

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Superfícies completas de curvatura média constante em espaços homogêneos**

**Aires Eduardo Menani Barbieri**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Aires Eduardo Menani Barbieri**

# Superfícies completas de curvatura média constante em espaços homogêneos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fernando Manfio

**USP – São Carlos**  
**Março de 2024**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

B236s Barbieri, Aires Eduardo Menani  
Superfícies completas de curvatura média  
constante em espaços homogêneos / Aires Eduardo  
Menani Barbieri; orientador Fernando Manfio. -- São  
Carlos, 2024.  
78 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas  
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Geometria Diferencial. 2. Superfícies. 3.  
Espaços tridimensionais homogêneos. 4. Curvatura  
média constante. I. Manfio, Fernando, orient. II.  
Título.

**Aires Eduardo Menani Barbieri**

Complete surfaces in homogeneous spaces with constant  
mean curvature

Master dissertation submitted to the Institute of  
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in  
partial fulfillment of the requirements for the degree of  
the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fernando Manfio

**USP – São Carlos**  
**March 2024**



*Este trabalho é dedicado a todos que cuidam e acreditam nos sonhos daqueles que amam.  
Em especial, às pessoas mais importantes da minha vida, meus pais  
Dorotéia Menani Barbieri e Sergio Roberto Barbieri.*





# AGRADECIMENTOS

---

---

Inicialmente, expresso minha profunda gratidão à minha família por seu apoio incondicional ao longo de toda a jornada que me conduziu até este momento. Sou eternamente grato à minha mãe, Doroteia, e ao meu pai, Sergio, por proporcionarem um ambiente repleto de amor e carinho desde o meu nascimento.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores que cruzaram o meu caminho, cada um desempenhando um papel crucial em minha formação. Em especial, agradeço à minha professora de matemática do Ensino Médio, Ronise, cujo incentivo foi fundamental para a escolha da minha trajetória profissional. Expresso minha gratidão à minha primeira orientadora de Iniciação Científica, Irene, por instigar em mim um olhar matemático mais crítico. Também agradeço profundamente à colaboração significativa do meu supervisor na Universidad de Granada, José Gálvez. Acima de tudo, sou imensamente grato ao meu orientador, Fernando Manfio, por compartilhar seu tempo e conhecimento desde minha graduação. Sua orientação tem sido fundamental para o meu crescimento na universidade e agradeço muito sua dedicação.

Gostaria também de manifestar minha gratidão eterna a todos os amigos que estiveram ao meu lado nesta jornada acadêmica, sempre me apoiando e tornando esta trajetória muito mais leve. Agradeço imensamente a Mari, Destro, Caio, Fer, Bares, Gus e Arthur, assim como aos meus queridos colegas de laboratório Alan, Arnando, Gustavo, Julia, Pedro, Sérgio e Gabriel.

Agradeço, por fim, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2021/05766-8, pelo fomento a este trabalho.



*“Em algum lugar, alguma coisa incrível  
está esperando para ser descoberta.”  
(Carl Sagan)*



# RESUMO

BARBIERI, A. E. M. **Superfícies completas de curvatura média constante em espaços homogêneos**. 2024. 78 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

A teoria de superfícies mínimas e, mais geralmente, de superfícies de curvatura média constante em  $\mathbb{R}^3$  tem suas raízes no cálculo variacional introduzido por Euler e Lagrange no século 18 e nos estudos seguintes devidos a Enneper, Riemann, Weierstrass, dentre outros, no século 19. Várias questões globais e conjecturas que surgiram dessa teoria clássica foram resolvidas somente nos últimos anos. Neste trabalho, estudamos alguns resultados sobre superfícies completas de curvatura média constante no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e, mais geralmente, em espaços homogêneos tridimensionais, cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal.

**Palavras-chave:** Superfícies completas, espaços tridimensionais homogêneos, curvatura média constante.



# ABSTRACT

BARBIERI, A. E. M. **Complete surfaces in homogeneous spaces with constant mean curvature.** 2024. 78 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

The theory of minimal surfaces, and more generally, constant mean curvature surfaces in the 3-dimensional Euclidean space has its roots in the calculus of variations developed by Euler and Lagrange in the 18th century and in later investigations by Enneper, Riemann, Weierstrass, among others, in the 19th century. Many of the global questions and conjectures that arose in this classical subject have only recently been addressed. In this work we study some results on complete surfaces of constant mean curvature in the three-dimensional Euclidean space and, more generally, in homogeneous three-dimensional spaces, whose Gaussian curvature does not change sign.

**Keywords:** Complete surfaces, three-dimensional homogeneous spaces, constant mean curvature.





# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO	17
2	GEOMETRIAS TRIDIMENSIONAIS	21
2.1	Motivação	21
2.2	Submersões de Killing	24
2.3	Espaços tridimensionais homogêneos com grupo de isometria 4-dimensional	27
2.3.1	<i>Os espaços <math>\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}</math> e <math>\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}</math></i>	31
2.3.2	<i>As esferas de Berger</i>	32
2.3.3	<i>O grupo de Heisenberg <math>\text{Nil}_3</math></i>	33
2.3.4	<i>O espaço <math>\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})</math></i>	34
3	SUPERFÍCIES EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS	37
3.1	Equações de compatibilidade	37
3.1.1	<i>Em termos de um parâmetro conforme</i>	41
3.2	Diferencial de Abresch-Rosenberg	45
4	SUPERFÍCIES CMC COMPLETAS EM $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$	51
4.1	Função ângulo $\nu$ constante	51
4.2	Função $q$ constante	54
4.3	Curvatura Gaussiana não-negativa	61
4.4	Curvatura Gaussiana não-positiva	62
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICE A PAR FUNDAMENTAL E A DIFERENCIAL DE HOPF	71



---

# INTRODUÇÃO

---

A teoria de superfícies mínimas, e mais amplamente, de superfícies com curvatura média constante no espaço tridimensional Euclidiano, tem suas raízes no cálculo das variações, desenvolvido por Euler e Lagrange no século 18, e nas contribuições subseqüentes de Enneper, Scherk, Schwarz, Riemann e Weierstrass no século 19. Ao longo das últimas décadas, diversos matemáticos desempenharam papéis significativos nesta teoria.

No contexto das superfícies mínimas, a abordagem global desempenhou um papel significativo no trabalho pioneiro de Osserman na década de 60. Muitas das questões globais e conjecturas associadas a essa área específica foram recentemente solucionadas. Estas problemáticas abrangem propriedades conformes e analíticas, a geometria e o comportamento assintótico, bem como a topologia e a classificação das superfícies mínimas, completas e imersas no espaço Euclidiano tridimensional. Veja (MEEKS III; PÉREZ, 2011) para mais detalhes.

Os teoremas de Liebmann e Hilbert, que abordam superfícies de curvatura constante, representam dois dos resultados mais significativos na teoria de subvariedades. O primeiro estabelece que a esfera comum é a única superfície completa com curvatura constante positiva em  $\mathbb{R}^3$ , enquanto o segundo assegura a inexistência de superfícies completas com curvatura constante negativa em  $\mathbb{R}^3$ . Outro resultado relevante nesse contexto é o clássico teorema de Hopf sobre a classificação das esferas totalmente umbílicas:

**Teorema 1.1** (Hopf). Se uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$  tem curvatura média constante e é homeomorfa à esfera, então ela é a esfera  $\mathbb{S}^2$  usual.

Por outro lado, um teorema de Bonnet estabelece que uma superfície completa em  $\mathbb{R}^3$ , cuja curvatura Gaussiana  $K$  satisfaz  $K \geq c > 0$ , deve ser compacta. Consequentemente, decorre do teorema de Gauss-Bonnet que tal superfície tem gênero zero, implicando a presença de pelo menos um ponto umbílico. Através do teorema de Efimov, assegurando que a condição  $K \leq c < 0$  não se verifica em uma superfície completa em  $\mathbb{R}^3$ , concluímos que não existe uma

superfície completa em  $\mathbb{R}^3$ , sem pontos umbílicos, cuja curvatura Gaussiana  $K$  seja limitada por zero. Inspirado possivelmente por este resultado de Efimov, J. Milnor apresentou a conjectura seguinte. Veja (KLOTZ; OSSERMAN, 1966/67) para mais detalhes.

**Conjectura 1.2** (Milnor). Considere  $M$  uma superfície completa em  $\mathbb{R}^3$ , sem pontos umbílicos, tal que suas curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  satisfaçam a condição

$$k_1^2 + k_2^2 \geq c > 0.$$

Neste caso, ou a curvatura Gaussiana  $K$  de  $M$  muda de sinal, ou  $K \equiv 0$ .

Um progresso inicial na tentativa de demonstrar a conjectura de Milnor foi alcançado por Smyth e Xavier (1987). Uma das consequências alcançadas por Gálvez, Martínez e Teruel (2015) é dada a seguir.

**Teorema 1.3.** Uma superfície completa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura Gaussiana não-positiva, em que uma de suas funções curvaturas principais  $k_i$  satisfaz  $k_i^2 \geq c > 0$ , é um cilindro generalizado.

Observe que cilindros generalizados são as únicas superfícies completas em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura Gaussiana não-positiva e curvatura média limitada por zero. Além disso, embora a investigação de um análogo ao teorema de Efimov em outras formas espaciais permaneça como um problema em aberto até hoje, uma solução parcial foi apresentada por Schlenker (2001).

O comportamento de superfícies completas em  $\mathbb{R}^3$  no qual  $H \equiv c \neq 0$  difere substancialmente daquelas que são mínimas, i.e.,  $H \equiv 0$ . Como exemplo dessa diferença, somente o plano dentre as superfícies mínimas completas tem a aplicação normal que omite uma vizinhança não-vazia na esfera, enquanto que existem superfícies completas não-cilíndricas em  $\mathbb{R}^3$ , para o qual  $H \equiv c \neq 0$ , cuja aplicação normal omite uma vizinhança na esfera.

Tais superfícies são obtidas pela rotação de uma curva em torno de um eixo, as chamadas *superfícies de Delaunay*. Duas classes destas tais curvas, para o qual implicam a condição  $H \equiv c \neq 0$  na superfície rotacional resultante, são destacadas. A primeira delas consiste das curvas sem auto-interseções; a superfície rotacional resultante neste caso - chamada *onduloide* - é completa, conexa, com  $H \equiv c \neq 0$ , e a imagem da aplicação normal é uma região anular na esfera. A segunda classe consiste das curvas com auto-interseções. Neste caso, a curva quando girada produz uma superfície completa - chamada *nodoide* -, com  $H \equiv c \neq 0$ , homeomorfa a um cilindro, e cuja aplicação normal cobre toda a esfera. De toda forma, as duas classes de curvas produzem superfícies para o qual  $H^2 - K$  é sempre limitado por zero.

Um fato simples sobre a curvatura Gaussiana  $K$  é que, para superfícies mínimas, tem-se sempre  $K \leq 0$ , enquanto que para as superfícies de Delaunay descritas acima pode-se mostrar que  $K$  muda de sinal. O resultado seguinte, apresentado por Klotz e Osserman (1966/67), além de apresentar uma análise desse fenômeno, dá um passo na direção de caracterizar as superfícies completas em  $\mathbb{R}^3$  de curvatura média constante.

**Teorema 1.4** (Klotz - Osserman). Uma superfície completa em  $\mathbb{R}^3$ , de curvatura média constante, no qual a curvatura Gaussiana  $K$  não muda de sinal, ou é uma esfera, ou uma superfície mínima ou um cilindro circular reto.

Note que o Teorema 1.4 verifica a conjectura de Milnor 1.2 no caso especial de superfícies completas com  $H \equiv c \neq 0$ . Além disso, este resultado foi estendido para superfícies imersas na esfera  $\mathbb{S}^4$  por Hoffman (1973) e no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  por Tribuzy (1980). Mais precisamente,

**Teorema 1.5** (Hoffman). Uma superfície completa em  $\mathbb{S}_c^4$ , com vetor curvatura média  $H$  paralelo, no qual a curvatura Gaussiana não muda de sinal, deve ser ou uma superfície mínima, uma esfera de raio  $(\|H\|^2 + c)^{-\frac{1}{2}}$  ou um produto de círculos  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(s)$ , com  $0 < r \leq \infty$  e  $0 < s < \infty$ .

**Teorema 1.6** (Tribuzy). Seja  $M^2$  uma superfície completa no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ , com curvatura média constante  $H$ , no qual a curvatura Gaussiana  $K$  não muda de sinal; se  $K \leq 0$  assuma, além disso, que  $H^2 - K - 1 > 0$ , i.e., a superfície não tem pontos umbílicos. Então, a superfície é uma esfera geodésica em  $\mathbb{H}^3$  ou é o conjunto dos pontos equidistantes de uma geodésica completa de  $\mathbb{H}^3$ .

Cabe destacar que o Teorema 1.4 permanece válido para hipersuperfícies completas  $M^n$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvatura média constante  $H$ , desde que a curvatura de Ricci de  $M^n$  não mude de sinal. De fato, ambos os casos  $Ric(M) \leq 0$  ou  $Ric(M) \geq 0$  implicam que  $M$  é um cilindro esférico; o primeiro caso decorre de (SMYTH; XAVIER, 1987, Thm. 2), enquanto o segundo é uma consequência de (HARTMAN, 1978). Se existe uma constante  $c > 0$  tal que a curvatura Gaussiana satisfaz  $K_M > c$ , segue do teorema de Bonnet-Myers que  $M^n$  é compacta e, assim, convexa. Logo, neste caso,  $M^n$  é a esfera usual pelo teorema de Liebmann.

Nos últimos anos, o estudo de superfícies de curvatura média constante em espaços produto e, de forma mais geral, em espaços homogêneos tridimensionais, cujo grupo de isometrias tem dimensão 4, tem ganhado grande destaque. Nesse sentido, Espinar e Rosenberg (2011) estenderam o Teorema 1.4 para espaços homogêneos cujo grupo de isometrias tem dimensão 4.

O objetivo principal deste trabalho é estudar tais resultados, mais especificamente, os Teoremas 4.3 e 4.4. Para isto, o trabalho está dividido nos capítulos abaixo.

Primeiramente, no Capítulo 2, desenvolvemos um pouco da teoria de geometrias tridimensionais, culminando no Teorema da Geometrização de Thurston 2.11 sobre a classificação dos modelos geométricos de dimensão 3. Além disso, definimos submersões de Killing para poder analisar cada um dos espaços tridimensionais homogêneos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , onde  $\kappa$  e  $\tau$  são constantes com  $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ , com grupo de isometrias 4-dimensional:

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$	-	$\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	$\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$	$\text{Nil}_3$	$\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$

Já no Capítulo 3, estudamos as equações de compatibilidade para superfícies em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , condições necessárias e suficientes para uma imersão local de uma superfície orientada em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , baseadas em (DANIEL, 2007). Além disso, apresentamos tais equações para o caso em que haja um parâmetro conforme para a primeira forma fundamental da superfície, assim como (FERNÁNDEZ; MIRA, 2007).

Finalmente, no Capítulo 4, classificamos certas superfícies completas de curvatura média constante em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , assim como em (ESPINAR; ROSENBERG, 2011). Ademais, apresentamos o Apêndice A para entender alguns conceitos relacionados a sistemas de coordenadas conformes e a diferencial de Hopf, fundamentais para este trabalho. Recomenda-se ao leitor que, caso tais conceitos não sejam de conhecimento prévio, o Apêndice A seja lido anteriormente ao Capítulo 3.

# GEOMETRIAS TRIDIMENSIONAIS

## 2.1 Motivação

Com o intuito de estudar geometrias tridimensionais, é fundamental apresentar algumas definições e resultados acerca de ações de grupos em variedades diferenciáveis, baseados em (ALEXANDRINO; BETTIOL, 2015).

**Definição 2.1.** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\mu : G \times M \rightarrow M$  é chamada *ação de  $G$  em  $M$*  ou  *$G$ -ação em  $M$*  se:

- i.  $\mu(e, x) = x$ , para todo  $x \in M$ , onde  $e$  é o elemento identidade de  $G$ ;
- ii.  $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 \cdot g_2, x)$ , para todos  $g_1, g_2 \in G$  e  $x \in M$ .

O subgrupo

$$G_x := \{g \in G : \mu(g, x) = x\} < G$$

é chamado de *grupo de isotropia* ou *estabilizador* de  $x \in M$  e a *órbita* de  $x \in M$  é definida por

$$G(x) := \{\mu(g, x) : g \in G\} \subset M.$$

- Se  $G(x) = \{x\}$ , então  $x \in M$  é dito ser *ponto fixo* da ação;
- Se  $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$ , a ação é dita *eficaz*;
- Se  $G_x = \{e\}$ , para todo  $x \in M$ , a ação é dita *livre*;
- Se para todos  $x, y \in M$ , existe  $g \in G$ , tal que  $\mu(g, x) = y$ , então a ação é dita *transitiva*;
- Se para todo  $x \in M$ , existe um aberto  $U_x \subset M$  tal que  $U_x \cap \mu(g, x) = \emptyset$ , para todo  $g \in G \setminus \{e\}$ , a ação é dita *propriamente descontínua*.

Quando a ação estiver implícita, podemos denominar  $\mu(g, x) = gx = g \cdot x$ . Perceba que o grupo de isotropia  $G_x$  de um ponto fixo é o grupo inteiro e, portanto, uma ação com pontos fixos não pode ser livre. Como  $\bigcap_{x \in M} G_x$  é um subgrupo normal de  $G$ , observe que toda  $G$ -ação pode ser reduzida a uma ação eficaz de  $G / (\bigcap_{x \in M} G_x)$  em  $M$ .

**Observação 2.2.** Consideremos as aplicações diferenciáveis

$$\begin{array}{ccc} \mu^g : M \rightarrow M & \text{e} & \mu_x : G \rightarrow M \\ x \mapsto \mu(g, x) & & g \mapsto \mu(g, x) \end{array} .$$

Para cada  $g \in G$ , temos que  $\mu^g$  é um difeomorfismo de  $M$ . De fato, como  $\mu$  é diferenciável, a aplicação  $\mu^g$  e sua inversa  $\mu^{g^{-1}}$  são diferenciáveis. Desta forma, podemos identificar  $\mu^G := \{\mu^g : g \in G\}$  com um subgrupo de  $\text{Diff}(M) = \{\varphi : M \rightarrow M : \varphi \text{ é difeomorfismo}\}$ .

Quando são analisadas variedades Riemannianas, podemos exigir mais sobre as aplicações  $\mu^g$  e estabelecer algumas definições e resultados a seguir, assim como em (SCOTT, 1983).

**Definição 2.3.** Se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana, uma ação de  $\Gamma$  em  $(M, g)$  é dita *isométrica* se  $\mu^g$  é uma isometria de  $(M, g)$ , para todo  $g \in \Gamma$ . Neste caso, a métrica  $g$  é dita  $\Gamma$ -invariante e  $\mu^\Gamma$  é identificado com um subgrupo de  $\text{Iso}(M, g) = \{\phi : (M, g) \rightarrow (M, g) : \phi \text{ é isometria}\}$ .

Se uma ação de  $\Gamma$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é isométrica e propriamente descontínua, então  $M/\Gamma$  admite uma estrutura de variedade diferenciável e pode ser munida com uma métrica Riemanniana de forma que a projeção  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  se torne uma isometria local. Veja (CARMO, 1988, Pág. 183).

**Definição 2.4.** Uma métrica Riemanniana em  $M^n$  é dita *localmente homogênea* se para todos  $x, y \in M$ , existem vizinhanças abertas  $U_x, U_y \subset M$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, e uma isometria  $\varphi : U_x \rightarrow U_y$ .

**Definição 2.5.** Uma variedade  $M^n$  admite *estrutura geométrica* se  $M$  possui uma métrica Riemanniana completa e localmente homogênea.

A evolução do conceito de geometria ao longo do tempo inclui diferentes definições. Inicialmente, a geometria clássica de Euclides abordava conceitos fundamentais como pontos, retas, incidências, ângulos e comprimentos. Com o progresso da matemática, surgiu uma segunda definição relacionada à geometria diferencial, onde a geometria de um espaço é recuperada por meio de sua métrica Riemanniana.

Uma definição mais moderna, proposta por Klein, considera um conjunto  $M$  e um grupo  $G$  agindo em  $M$ . Nessa abordagem, a geometria do par  $(M, G)$  tem como foco o estudo das propriedades de  $M$  que são invariantes sob a ação de  $G$ . Neste contexto, consideremos a seguinte definição:



**Definição 2.6.** Uma *geometria* é um par  $(M, G)$ , onde  $M$  é uma variedade Riemanniana e  $G$  é um subgrupo do grupo de difeomorfismos  $\text{Diff}(M)$  de  $M$  que age transitivamente em  $M$  e com grupos de isotropias compactos.

**Definição 2.7.** Duas geometrias  $(M, G)$  e  $(N, H)$  são ditas *equivalentes* se existem um homomorfismo  $\phi_0 : G \rightarrow H$  e um difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  tais que, para todos  $g \in G$  e  $x \in M$ ,

$$\phi(g \cdot x) = \phi_0(g) \cdot \phi(x).$$

**Definição 2.8.** Diremos que uma geometria  $(M, G)$  é *maximal* se não existe um grupo  $H \neq G$  tal que  $G < H$  e  $(M, H)$  é também uma geometria.

**Definição 2.9.** Uma geometria  $(M, G)$  admite *quociente compacto* se existe um subgrupo  $H < G$  que age em  $M$  como um grupo de recobrimento tal que  $M/H$  é compacta.

Em 1882, Poincaré (seguido por Klein em 1883) enunciou o seguinte teorema da uniformização, que foi provado de maneira independente por [Poincaré \(1908\)](#) e [Koebe \(1907\)](#).

**Teorema 2.10** (Uniformização). Toda superfície compacta e conexa admite estrutura geométrica equivalente à de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ .

Este resultado representa uma ótima classificação, abrangendo todas as superfícies conexas e compactas, e determina precisamente que tipo de estruturas geométricas essas superfícies podem ter como modelo. Thurston, inspirado por tal resultado, buscou generalizá-lo para dimensões maiores, especificamente para a dimensão 3. Assim, com os conceitos apresentados anteriormente, [Thurston \(1997\)](#) demonstrou o teorema seguinte que classifica todas as possíveis geometrias tridimensionais maximais, simplesmente conexas e com quociente compacto.

**Teorema 2.11** (Thurston). Qualquer geometria tridimensional maximal, simplesmente conexa e com quociente compacto é equivalente à geometria  $(M, \text{Iso}(M))$ , onde  $M$  é uma das oito seguintes variedades Riemannianas:

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}_3, \widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}) \text{ ou } \text{Sol}_3.$$

A dimensão do grupo de isometrias de uma variedade tridimensional homogênea e simplesmente conexa pode ser 3, 4 ou 6. Quando a dimensão de tal grupo é 6, então a variedade possui a geometria modelo das formas espaciais, isto é, de  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . Se tal dimensão for 3, a geometria da variedade é equivalente ao grupo de Lie  $\text{Sol}_3$ . Neste trabalho, estamos interessados em estudar os espaços tridimensionais homogêneos  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , onde  $\kappa$  e  $\tau$  são constantes com  $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ , tais que  $\dim(\text{Iso}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))) = 4$ , dispostos na Tabela 1.

Para isto, é necessário desenvolver algumas definições e resultados acerca de submersões de Killing na próxima seção, os quais são majoritariamente baseados em ([MANZANO, 2014](#)).

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$	-	$\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	$\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$	$\text{Nil}_3$	$\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$

Tabela 1 – Os espaços  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

## 2.2 Submersões de Killing

Neste contexto, consideremos variedades Riemannianas  $E^n$  e  $M^k$  conexas e orientáveis, onde  $k \leq n$ . Se  $\pi : E \rightarrow M$  é uma submersão, isto é, uma aplicação diferenciável sobrejetora cuja diferencial em todo ponto é sobrejetora, temos que, para todo  $x \in M$ , o conjunto  $\mathcal{F}_x := \pi^{-1}(x) \subset E$ , denominado *fibra* sobre  $x \in M$ , é uma subvariedade de  $E$  de dimensão  $n - k$ .

Observe que, para cada  $p \in \mathcal{F}_x$ , o espaço tangente  $T_p \mathcal{F}_x$  é dado por  $\ker d\pi(p)$ . Desta forma, podemos decompor  $T_p E = T_p \mathcal{F}_x \oplus T_p \mathcal{F}_x^\perp$ , onde  $\dim(T_p \mathcal{F}_x) = n - k$  e  $\dim(T_p \mathcal{F}_x^\perp) = k$ .

**Definição 2.12.** Uma submersão  $\pi : E \rightarrow M$  é dita *Riemanniana* se, para todos  $x \in M$  e  $p \in \mathcal{F}_x$ , a aplicação

$$d\pi(p) \Big|_{T_p \mathcal{F}_x^\perp} : T_p \mathcal{F}_x^\perp \rightarrow T_x M$$

é uma isometria, isto é,

$$\langle d\pi(p) \cdot v, d\pi(p) \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p \mathcal{F}_x^\perp.$$

**Definição 2.13.** Um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(E)$  é dito

- *vertical* se  $X$  é tangente às fibras, isto é, para todo  $x \in M$ ,

$$X(p) \in T_p \mathcal{F}_x, \quad \forall p \in \mathcal{F}_x;$$

- *horizontal* se  $X$  é ortogonal às fibras, isto é, para todo  $x \in M$ ,

$$X(p) \in T_p \mathcal{F}_x^\perp, \quad \forall p \in \mathcal{F}_x.$$

Observe que podemos decompor qualquer campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(E)$  na sua parte vertical  $X^v$  e horizontal  $X^h$  de forma que  $X = X^v + X^h$ . Sabemos que dado  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , existe um único campo  $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(E)$  horizontal, denominado *levantamento horizontal de  $Y$* , que é  $\pi$ -relacionado com  $Y$ , ou seja, para todo  $x \in M$ ,

$$d\pi(p)\bar{Y}(p) = Y(x), \quad \forall p \in \mathcal{F}_x.$$

Não é verdade que todo campo horizontal em  $E$  é levantamento horizontal de um campo em  $M$ . Assim, diremos que um campo horizontal  $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(E)$  é *básico* se  $\bar{Y}$  é  $\pi$ -relacionado com algum  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 2.14.** Um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(E)$  é dito *de Killing* se seu grupo local a 1-parâmetro  $\{\phi_t\}$  é constituído por isometrias de  $E$ .

A proposição a seguir estabelece equivalências sobre um campo de Killing e sua demonstração pode ser encontrada em (CARMO, 1988).

**Proposição 2.15.** São equivalentes sobre  $X \in \mathfrak{X}(E)$ :

1.  $X$  é um campo de Killing;
2.  $X \langle Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle$ , para todos  $Y, Z \in \mathfrak{X}(E)$ ;
3.  $\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$ , para todos  $Y, Z \in \mathfrak{X}(E)$ . (Equação de Killing)

**Definição 2.16.** Uma submersão Riemanniana  $\pi : E \rightarrow M$  é dita *de Killing* se existe um campo de Killing  $\xi \in \mathfrak{X}(E)$  vertical, unitário e completo (seu grupo local a 1-parâmetro  $\{\phi_t\}$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ ).

Consideremos agora  $E^3$  uma variedade orientável tridimensional. Podemos definir globalmente um produto vetorial  $\wedge$  em  $\mathfrak{X}(E)$  de forma que, dado um referencial ortonormal positivo  $(E_1, E_2, E_3)$ , temos, para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(E)$ ,

$$\langle X \wedge Y, Z \rangle = \det_{(E_1, E_2, E_3)}(X, Y, Z). \quad (2.1)$$

**Lema 2.17.** Se  $\pi : E \rightarrow M^2$  é uma submersão de Killing, com campo de Killing  $\xi \in \mathfrak{X}(E)$ , existe uma função  $\tau \in C^\infty(E)$  tal que

$$\nabla_X \xi = \tau X \wedge \xi, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(E).$$

*Demonstração.* Note que nos pontos em que  $X$  é linearmente dependente a  $\xi$ , a igualdade é satisfeita, pois  $\xi \wedge \xi = \nabla_\xi \xi = 0$ . De fato, como  $\xi$  é um campo de Killing unitário, temos pela equação de Killing e pela compatibilidade de  $\nabla$  com a métrica que

$$\langle \nabla_\xi \xi, Z \rangle = -\langle \nabla_Z \xi, \xi \rangle = -\frac{1}{2} Z \langle \xi, \xi \rangle = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(E).$$

Desta forma, podemos considerar  $X \in \mathfrak{X}(E)$  linearmente independente a  $\xi$ . Perceba que, pela equação de Killing,

$$\langle \nabla_X \xi, X \rangle + \langle \nabla_X \xi, X \rangle = 0 \implies \langle \nabla_X \xi, X \rangle = 0,$$

assim como

$$\langle \nabla_X \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} X \langle \xi, \xi \rangle = 0.$$

Portanto, existe uma única função  $\tau_X \in C^\infty(E)$  tal que  $\nabla_X \xi = \tau_X X \wedge \xi$ . Observe que  $\tau_X$  depende somente da parte horizontal de  $X$ . De fato, decompondo  $X = X^h + X^v$ , temos

$$\nabla_{X^h} \xi = \nabla_{X^h} \xi + \nabla_{X^v} \xi = \nabla_X \xi = \tau_X X \wedge \xi = \tau_X X^h \wedge \xi + \tau_X X^v \wedge \xi = \tau_X X^h \wedge \xi.$$

Desta forma, devemos mostrar que  $\tau_X = \tau_Y$  para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$  horizontais. Como  $\xi$  é de Killing, obtemos

$$\tau_Y \langle Y \wedge \xi, X \rangle = \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = -\langle \nabla_X \xi, Y \rangle = -\tau_X \langle X \wedge \xi, Y \rangle = \tau_X \langle Y \wedge \xi, X \rangle,$$

isto é,  $(\tau_X - \tau_Y) \langle Y \wedge \xi, X \rangle = 0$ , ou ainda,  $(\tau_Y - \tau_X) \langle Y \wedge X, \xi \rangle = 0$ . Nos pontos em que  $X$  é linearmente independente a  $Y$ , temos que  $X \wedge Y$  é vertical e, portanto,  $\tau_X = \tau_Y$ . Nos pontos  $p \in E$  tais que  $X(p) = \lambda_p Y(p)$ , para algum  $\lambda_p \neq 0$ , teremos

$$\tau_X(p) \langle X \wedge \xi \rangle(p) = \nabla_X \xi(p) = \lambda_p \nabla_Y \xi(p) = \lambda_p \tau_Y(p) \langle Y \wedge \xi \rangle(p) = \tau_Y(p) \langle X \wedge \xi \rangle(p),$$

isto é,  $\tau_X(p) = \tau_Y(p)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Definição 2.18.** A função  $\tau \in C^\infty(E)$  dada pelo lema anterior é chamada *curvatura do fibrado* da submersão  $\pi$ .

**Observação 2.19.** Nas condições do Lema 2.17, observe que

- As fibras da submersão  $\pi$  são geodésicas de  $E$ , as quais serão denominadas *geodésicas verticais*. De fato, se  $\gamma$  denota a parametrização de uma fibra de  $\pi$ , temos que o vetor  $\gamma'$  está na direção de  $\xi$ , pois  $\xi$  é vertical. Desta forma, como  $\nabla_\xi \xi = \tau \xi \wedge \xi = 0$ , concluímos que  $\gamma'' = 0$ .
- As isometrias do grupo local a 1-parâmetro  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  associado ao campo de Killing  $\xi$  serão denominadas *translações verticais*. Se aplicarmos  $d\phi_t$  à igualdade do Lema 2.17, obteremos que  $\tau \circ \phi_t = \tau$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , ou seja, a função  $\tau$  é constante ao longo das fibras e, portanto, podemos definir  $\tau$  ao longo de  $M$ .
- Toda geodésica  $\gamma$  de  $E$  forma um ângulo constante com o campo de Killing  $\xi$ . De fato, pela compatibilidade com a métrica, temos que

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \xi(\gamma(t)) \rangle = \langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \xi \rangle + \langle \gamma', \nabla_{\gamma'} \xi \rangle,$$

onde o primeiro termo se anula pois  $\gamma$  é geodésica, assim como o segundo, pois  $\nabla_{\gamma'} \xi = \tau \gamma' \wedge \xi$  é ortogonal a  $\gamma'$ .

**Exemplo 2.20.** Dada uma variedade Riemanniana bidimensional  $M$ , considere a variedade produto  $M \times \mathbb{R}$ . Observe que a projeção canônica  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  dada por  $\pi(p, t) = p$  é uma submersão de Killing. De fato, como  $T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R}) \simeq T_p M \oplus \mathbb{R}$ , basta considerar o campo de

Killing  $\xi = \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ , onde  $\frac{\partial}{\partial t}$  é o campo unitário que gera  $\mathbb{R}$ , isto é,  $\frac{\partial}{\partial t}(p, t) = 1$ . Desta forma,

$$\tau X \wedge \xi = \nabla_X \xi = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R}),$$

ou seja,  $\tau \equiv 0$ .

**Exemplo 2.21** (Fibração de Hopf). Considere  $\mathbb{R}^4$  identificado com  $\mathbb{C}^2$  e sejam  $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$  e  $\mathbb{S}^2(\kappa) = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = \frac{1}{\kappa}\}$ . A submersão

$$\begin{aligned} \pi_H : \quad \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^2(\kappa) \\ (z, w) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{\kappa}} (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \end{aligned}$$

é chamada *projeção de Hopf*. Observe que a fibra passando pelo ponto  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$  é dada por  $\{(e^{it}z, e^{it}w) : t \in \mathbb{R}\}$ , pois para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\pi_H(e^{it}z, e^{it}w) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} (2e^{it}ze^{-it}\bar{w}, |e^{it}z|^2 - |e^{it}w|^2) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) = \pi_H(z, w).$$

Desta forma, as órbitas da ação de  $\mathbb{S}^1$  em  $\mathbb{S}^3$  dada por

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ (e^{it}, (z, w)) &\longmapsto \phi_t(z, w) = (e^{it}z, e^{it}w) \end{aligned}$$

coincidem com as fibras da submersão  $\pi_H$ .

## 2.3 Espaços tridimensionais homogêneos com grupo de isometria 4-dimensional

Consideremos  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ , uma forma espacial bidimensional com curvatura constante  $\kappa$ , isto é,

$$\mathbb{M}^2(\kappa) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{se } \kappa = 0, \\ \mathbb{S}^2(\kappa), & \text{se } \kappa > 0, \\ \mathbb{H}^2(\kappa), & \text{se } \kappa < 0. \end{cases}$$

Denotaremos por  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  os espaços tridimensionais homogêneos, cujos grupos de isometrias têm dimensão igual a 4, e que são fibrações Riemannianas sobre  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , ou seja, que existe uma submersão de Killing

$$\pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \longrightarrow \mathbb{M}^2(\kappa),$$

com campo unitário e vertical de Killing  $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$  e curvatura do fibrado constante  $\tau$  tal que  $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ . De acordo com a Observação 2.19, as fibras de tal submersão são tangentes a  $\xi$  e geodésicas em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Pelo teorema a seguir, demonstrado por [Manzano \(2014\)](#), podemos classificar todas as submersões de Killing em espaços homogêneos tridimensionais.

**Teorema 2.22.** Seja  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow M^2$  uma submersão de Killing. Se  $\mathbb{E}$  é homogêneo, então a curvatura Gaussiana de  $M$  e a curvatura do fibrado  $\tau$  da submersão são constantes. Em particular,  $\mathbb{E}$  é um espaço  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  ou seu quociente por uma translação vertical.

Se  $\tau = 0$ , de acordo com o Exemplo 2.20, temos que  $\mathbb{E}(\kappa, 0) = \mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , considerando a projeção canônica na primeira coordenada como a submersão de Killing. Se, além disso,  $\kappa = 0$ , obtemos o espaço  $\mathbb{R}^3$ , cujo grupo de isometria tem dimensão igual a 6, o que não nos interessa.

Vamos estabelecer alguns resultados para o caso  $\tau \neq 0$ , assim como em (DANIEL, 2007). Considere localmente um referencial ortonormal positivo  $(E_1, E_2, E_3)$  em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  com  $E_3 = \xi$ . Denotando por

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle$$

os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana  $\nabla$  de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , obtemos, pelo Lema 2.17 e por (2.1), que

$$\Gamma_{23}^1 = \langle \nabla_{E_2} \xi, E_1 \rangle = \langle \tau E_2 \wedge \xi, E_1 \rangle = \tau \det_{(E_1, E_2, E_3)}(E_2, E_3, E_1) = \tau \det_{(E_1, E_2, E_3)}(E_1, E_2, E_3) = \tau.$$

Pela compatibilidade de  $\nabla$  com a métrica,  $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$  e, portanto,  $\Gamma_{21}^3 = -\tau$ . De forma análoga, obtemos que  $\Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{12}^3 = -\tau$ . Além disso, denote  $\Gamma_{32}^1 = -\Gamma_{31}^2 = \tau - \sigma$ , onde  $\sigma \in \mathbb{R}$  será determinado a seguir, e observe que os demais símbolos são identicamente nulos. Perceba que

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{E_2} E_1 = \Gamma_{12}^1 E_1 + \Gamma_{12}^2 E_2 + \Gamma_{12}^3 E_3 - \Gamma_{21}^1 E_1 - \Gamma_{21}^2 E_2 - \Gamma_{21}^3 E_3 \\ &= \tau E_3 + \tau E_3 = 2\tau E_3, \\ [E_2, E_3] &= \nabla_{E_2} E_3 - \nabla_{E_3} E_2 = \Gamma_{23}^1 E_1 + \Gamma_{23}^2 E_2 + \Gamma_{23}^3 E_3 - \Gamma_{32}^1 E_1 - \Gamma_{32}^2 E_2 - \Gamma_{32}^3 E_3 \\ &= \tau E_1 - (\tau - \sigma) E_1 = \sigma E_1, \\ [E_1, E_3] &= \nabla_{E_1} E_3 - \nabla_{E_3} E_1 = \Gamma_{13}^1 E_1 + \Gamma_{13}^2 E_2 + \Gamma_{13}^3 E_3 - \Gamma_{31}^1 E_1 - \Gamma_{31}^2 E_2 - \Gamma_{31}^3 E_3 \\ &= -\tau E_2 - (\sigma - \tau) E_2 = -\sigma E_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Das simetrias do tensor de curvatura  $R$  decorre que está bem definido o *operador curvatura*  $\hat{R} : \wedge_2 M \rightarrow \wedge_2 M$ , onde  $\wedge_2 M$  é o espaço dos bivectores, dado por

$$\langle \hat{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

o qual é um operador simétrico. Denotando por  $(e_1, e_2, e_3) = (E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$  a base de  $\wedge_2 M$ , obtemos a matriz  $[\hat{R}_{ij}]$  de  $\hat{R}$ , onde

$$\hat{R}_{ij} = \langle \hat{R}(e_i), e_j \rangle \quad \text{e} \quad \hat{R}_{ii} = \langle \hat{R}(e_i), e_i \rangle = \langle R(E_j, E_k)E_j, E_k \rangle = K(E_j, E_k), \tag{2.3}$$

para  $i \neq j \neq k \neq i$ , em que  $K(E_j, E_k)$  denota a curvatura seccional do plano gerado por  $E_j$  e  $E_k$ . Assim, por (2.2),

$$\begin{aligned}\hat{R}_{11} &= \langle R(E_2, E_3)E_2, E_3 \rangle = \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_3} E_2 + \nabla_{[E_2, E_3]} E_2, E_3 \rangle \\ &= \langle -(\tau - \sigma) \nabla_{E_2} E_1 + \sigma \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \langle (\tau - \sigma) \tau E_3 + \sigma \tau E_3, E_3 \rangle = \tau^2 \langle E_3, E_3 \rangle = \tau^2, \\ \hat{R}_{22} &= \langle R(E_3, E_1)E_3, E_1 \rangle = \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_3 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_3 + \nabla_{[E_3, E_1]} E_3, E_1 \rangle \\ &= \langle \tau \nabla_{E_3} E_2 + \sigma \nabla_{E_2} E_3, E_1 \rangle = \langle \tau(\tau - \sigma) E_1 + \sigma \tau E_1, E_1 \rangle = \tau^2 \langle E_1, E_1 \rangle = \tau^2, \\ \hat{R}_{33} &= \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle = \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \rangle \\ &= \langle -(-\tau) \nabla_{E_1} E_3 + 2\tau \nabla_{E_3} E_1, E_2 \rangle = \langle -\tau^2 E_2 + 2\tau(\sigma - \tau) E_2, E_2 \rangle \\ &= (-\tau^2 + 2\tau\sigma - 2\tau^2) \langle E_2, E_2 \rangle = 2\tau\sigma - 3\tau^2.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\hat{R}_{12} &= \langle R(E_2, E_3)E_3, E_1 \rangle = \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_2} E_3 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_3} E_3 + \nabla_{[E_2, E_3]} E_3, E_1 \rangle \\ &= \langle \tau \nabla_{E_3} E_1 + \sigma \nabla_{E_1} E_3, E_1 \rangle = \langle \tau(\sigma - \tau) E_2 - \sigma \tau E_2, E_1 \rangle = 0,\end{aligned}$$

e, de forma análoga,  $\hat{R}_{ij} = 0$ , para todo  $i \neq j$ . Desta forma,

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau\sigma - 3\tau^2 \end{pmatrix}.$$

De acordo com (CARMO, 1988, Pág. 207), se  $\pi : E \rightarrow M$  é uma submersão Riemanniana,  $K$  e  $K'$  denotam as curvaturas seccionais em  $E$  e  $M$ , respectivamente, temos, para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(E)$  seus respectivos levantamentos horizontais, que

$$K'(X, Y) = K(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{3}{4} \|[ \bar{X}, \bar{Y} ]^\nu\|^2.$$

Desta forma,

$$\kappa = K(E_1, E_2) + \frac{3}{4} \|[E_1, E_2]^\nu\|^2 = 2\tau\sigma - 3\tau^2 + \frac{3}{4} \|2\tau E_3^\nu\|^2 = 2\tau\sigma - 3\tau^2 + 3\tau^2 \|\xi\|^2 = 2\tau\sigma,$$

isto é,  $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$ . Portanto,

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa - 3\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Observe que, por (2.3), a matriz nos diz que  $K(E_1, E_2) = \kappa - 3\tau^2$  e  $K(E_1, \xi) = K(E_2, \xi) = \tau^2$ . A proposição a seguir, que pode ser encontrada em (ESPINAR; OLIVEIRA, 2013), abrange este resultado a qualquer espaço  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

**Proposição 1.** Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$  campos vetoriais horizontais de forma que  $\{X, Y, \xi\}$  forma um referencial ortonormal positivo. Então  $K(X, Y) = \kappa - 3\tau^2$  e  $K(X, \xi) = \tau^2$ , onde  $K(X, Y)$  denota a curvatura seccional do espaço bidimensional gerado por  $X$  e  $Y$ .

Observe que o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  não admite uma estrutura de submersão de Killing sobre uma forma bidimensional  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , pois  $\mathbb{H}^3$  possui curvatura seccional constante  $-1$  e, pela proposição anterior, planos verticais em submersões de Killing têm curvatura constante não negativa. A proposição seguinte nos permite calcular o tensor de curvatura em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

**Proposição 2.23.** Para quaisquer campos vetoriais  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}(\kappa, \tau))$ , temos

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle,$$

onde  $R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X$  e

$$R_1(\xi; X, Y)Z = \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \xi - \langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle Y.$$

*Demonstração.* Decomponha  $X = \tilde{X} + x\xi$ ,  $Y = \tilde{Y} + y\xi$ ,  $Z = \tilde{Z} + z\xi$  e  $W = \tilde{W} + w\xi$ , onde  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  e  $\tilde{W}$  são campos horizontais e  $x = \langle X, \xi \rangle$ ,  $y = \langle Y, \xi \rangle$ ,  $z = \langle Z, \xi \rangle$  e  $w = \langle W, \xi \rangle$ . Desta forma, observe que

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(\tilde{X} + x\xi, \tilde{Y} + y\xi)\tilde{Z} + z\xi, \tilde{W} + w\xi \rangle \\ &= \langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle R(x\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + \langle R(\tilde{X}, y\xi)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})z\xi, \tilde{W} \rangle + \langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, w\xi \rangle + \langle R(x\xi, y\xi)\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle R(x\xi, \tilde{Y})z\xi, \tilde{W} \rangle + \langle R(x\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, w\xi \rangle + \langle R(\tilde{X}, y\xi)z\xi, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle R(\tilde{X}, y\xi)\tilde{Z}, w\xi \rangle + \langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})z\xi, w\xi \rangle + \langle R(x\xi, y\xi)z\xi, \tilde{W} \rangle \\ &\quad + \langle R(x\xi, y\xi)\tilde{Z}, w\xi \rangle + \langle R(x\xi, \tilde{Y})z\xi, w\xi \rangle + \langle R(\tilde{X}, y\xi)z\xi, w\xi \rangle \\ &\quad + \langle R(x\xi, y\xi)z\xi, w\xi \rangle. \end{aligned}$$

Pela antissimetria do tensor de curvatura, os termos em que o campo  $\xi$  aparece três ou quatro vezes se anulam, assim como aqueles em que o campo aparece duas vezes nas primeiras ou últimas posições do tensor.

Além disso, os termos em que o campo  $\xi$  aparece apenas uma vez também se anulam, pois a matriz  $\hat{R}$  na base  $(e_1, e_2, e_3)$  é diagonal. De fato, por exemplo, no termo em que  $\xi$  aparece na primeira posição, se considerarmos as decomposições  $\tilde{Y} = y_1E_1 + y_2E_2$ ,  $\tilde{Z} = z_1E_1 + z_2E_2$  e  $\tilde{W} = w_1E_1 + w_2E_2$ , teremos:

$$\begin{aligned} \langle R(x\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle &= x\langle R(\xi, y_1E_1 + y_2E_2)z_1E_1 + z_2E_2, w_1E_1 + w_2E_2 \rangle \\ &= x \sum_{i,j,k=1}^2 y_i z_j w_k \langle R(E_3, E_i)E_j, E_k \rangle \\ &= x \sum_{i,j,k=1}^2 y_i z_j w_k \langle \hat{R}(E_3 \wedge E_i), E_j \wedge E_k \rangle \\ &= xy_1 \sum_{j,k=1}^2 z_j w_k \langle \hat{R}(-e_2), E_j \wedge E_k \rangle + xy_2 \sum_{j,k=1}^2 z_j w_k \langle \hat{R}(-e_1), E_j \wedge E_k \rangle \\ &= xy_1(-z_1w_2\hat{R}_{23} + z_2w_1\hat{R}_{23}) + xy_2(-z_1w_2\hat{R}_{13} + z_2w_1\hat{R}_{13}) = 0. \end{aligned}$$



Portanto, temos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle + xz \langle R(\xi, \tilde{Y})\xi, \tilde{W} \rangle + xw \langle R(\xi, \tilde{Y})\tilde{Z}, \xi \rangle \\ &\quad + yz \langle R(\tilde{X}, \xi)\xi, \tilde{W} \rangle + yw \langle R(\tilde{X}, \xi)\tilde{Z}, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.23, sabemos que  $K(E_1, E_2) = \kappa - 3\tau^2$  e  $K(E_1, E_3) = K(E_2, E_3) = \tau^2$ . Como  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W} \in \text{span}\{E_1, E_2\}$ , obtemos que

$$\langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W} \rangle = (\kappa - 3\tau^2) (\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle).$$

Além disso, considerando as decomposições  $\tilde{Y} = y_1E_1 + y_2E_2$  e  $\tilde{W} = w_1E_1 + w_2E_2$ , perceba que

$$\begin{aligned} \langle R(\xi, \tilde{Y})\xi, \tilde{W} \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 y_i w_j \langle R(E_3, E_i)E_3, E_j \rangle \\ &= y_1 w_1 K(E_1, E_3) + y_1 w_2 \hat{R}_{21} + y_2 w_1 \hat{R}_{12} + y_2 w_2 K(E_2, E_3) \\ &= \tau^2 (y_1 w_1 + y_2 w_2) \\ &= \tau^2 \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando o processo análogo aos outros termos, concluímos que

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= (\kappa - 3\tau^2) (\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle) \\ &\quad + \tau^2 (xz \langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - xw \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle - yz \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle + yw \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle) \\ &= (\kappa - 3\tau^2) ((\langle X, Z \rangle - xz)(\langle Y, W \rangle - yw) - (\langle X, W \rangle - xw)(\langle Y, Z \rangle - yz)) \\ &\quad + \tau^2 (xz \langle Y, W \rangle - xw \langle Y, Z \rangle - yz \langle X, W \rangle + yw \langle X, Z \rangle) \\ &= (\kappa - 3\tau^2) (\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle) \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2) (\langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \langle X, W \rangle + \langle X, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle \langle Y, Z \rangle \\ &\quad - \langle Y, \xi \rangle \langle W, \xi \rangle \langle X, Z \rangle - \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \langle Y, W \rangle), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

A seguir, vamos descrever cada um dos espaços  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com grupo de isometria 4-dimensional.

### 2.3.1 Os espaços $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$

Nos casos de espaços produto, dados por  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , consideramos a métrica produto e, portanto, as geodésicas são produtos de geodésicas em cada fator e toda isometria  $f$  de  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  decompõe-se como  $f = (f_1 \times id_{\mathbb{R}}) \circ (id_{\mathbb{M}^2(\kappa)} \times f_2)$ , onde  $f_1$  é uma isometria de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  e  $f_2$  é uma isometria de  $\mathbb{R}$ . Como visto no Exemplo 2.20, consideramos a submersão de Killing  $\pi : \mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  dada por  $\pi(p, t) = p$ . Para mais detalhes, ver (MANZANO, 2012; SCOTT, 1983).

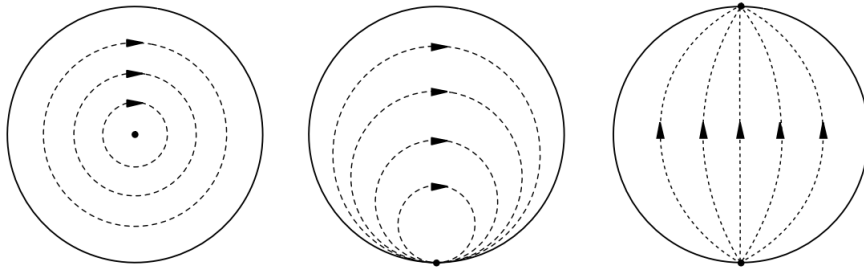


Figura 1 – Esquema dos três tipos de isometrias que preservam orientação de  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ . (MANZANO, 2012)

- No caso  $\kappa > 0$ , toda isometria de  $\mathbb{S}^2(\kappa) \subset \mathbb{R}^3$  é a restrição de uma isometria de  $\mathbb{R}^3$  que fixa a origem, isto é, uma transformação ortogonal. Como toda transformação ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  deixa uma direção invariante, então as isometrias de  $\mathbb{S}^2(\kappa)$  deixam um par de pontos antipodais invariante.
  1. Se a isometria preserva orientação, então tais pontos antipodais permanecem fixos e, desta forma, a isometria é uma rotação em torno do eixo formado por estes pontos;
  2. Se a isometria inverte orientação, então é uma composição da aplicação antípoda - ou de uma simetria com respeito a uma geodésica (grande círculo) - com uma rotação.
- No caso  $\kappa < 0$ , considerando o modelo do disco de Poincaré  $\mathbb{H}^2(\kappa) \equiv \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ , as isometrias de  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  que preservam orientação são transformações de Möbius que deixam invariante a fronteira  $\partial\mathbb{D}$  e podem ser de três tipos, além da identidade, de acordo com a Figura 1:
  1. Se a isometria não deixa pontos fixos na fronteira, é uma rotação (*elíptica*) em torno de um ponto;
  2. Se a isometria tem um ponto fixo em  $\partial\mathbb{D}$ , então temos uma *translação parabólica* ou rotação em torno de um ponto no infinito;
  3. Se a isometria deixa dois pontos fixos na fronteira, então é uma *translação hiperbólica*.

As isometrias que invertem orientação são obtidas compondo as isometrias acima com uma reflexão com respeito a uma geodésica.

Vale ressaltar que os subconjuntos da forma  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \{t_0\}$  (chamados *planos horizontais* ou *slices*) e  $\Gamma \times \mathbb{R}$  (chamados *planos verticais*), onde  $\Gamma \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$  é uma geodésica, são superfícies totalmente geodésicas em  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , pois podem expressar-se como conjuntos de pontos fixos de isometrias.

### 2.3.2 As esferas de Berger

As esferas de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$ , com  $\kappa > 0$  e  $\tau \neq 0$ , são obtidas deformando a métrica usual da esfera tridimensional de forma que a fibração de Hopf permaneça sendo uma submersão

de Killing sobre  $\mathbb{S}^2(\kappa)$ , mas modificando o comprimento das fibras. Para mais detalhes, veja (TORRALBO, 2010; MANZANO, 2012; DANIEL, 2007).

Como visto no Exemplo 2.21, a esfera  $\mathbb{S}^3$  pode ser vista como um subconjunto de  $\mathbb{C}^2$ . Além disso, admite uma estrutura de grupo de Lie induzida pela seguinte identificação com  $SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I, \det(A) = 1\}$ :

$$(z, w) \mapsto \begin{pmatrix} \bar{z} & w \\ -\bar{w} & z \end{pmatrix}.$$

Uma base de campos invariantes à esquerda é  $\{E_1, E_2, V\}$ , onde

$$(E_1)_{(z,w)} = (-\bar{w}, \bar{z}), \quad (E_2)_{(z,w)} = (-i\bar{w}, i\bar{z}) \quad \text{e} \quad V_{(z,w)} = (iz, iw).$$

A submersão de Killing é dada pela fibração de Hopf

$$\begin{aligned} \pi_H : (\mathbb{S}^3, \mathfrak{g}_b) &\longrightarrow \mathbb{S}^2(\kappa) \\ (z, w) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{\kappa}} (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \end{aligned}$$

onde a métrica  $\mathfrak{g}_b$  é dada por

$$\mathfrak{g}_b(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[ \langle X, Y \rangle + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right], \quad \forall X, Y \in T\mathbb{S}^3,$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar usual de  $\mathbb{C}^2$ .

Observe que, com esta métrica, temos, para cada  $i, j = 1, 2$ ,

$$\mathfrak{g}_b(E_i, E_j) = \frac{4}{\kappa} \delta_{ij}, \quad \mathfrak{g}_b(E_i, V) = 0 \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_b(V, V) = \frac{16\tau^2}{\kappa^2},$$

ou seja, a base  $\{E_1, E_2, V\}$  é ortogonal em  $(\mathbb{S}^3, \mathfrak{g}_b)$ . Assim, o campo de Killing vertical unitário é dado por  $\xi = (\frac{\kappa}{4\tau})V$ , já que  $E_1$  e  $E_2$  são horizontais. Perceba que se  $\kappa = 4\tau^2$ , então a métrica  $\mathfrak{g}_b$  coincide com a métrica usual de  $\mathbb{S}^3$ . Como estamos considerando espaços homogêneos Riemannianos com grupo de isometria 4-dimensional, então  $\kappa \neq 4\tau^2$ .

### 2.3.3 O grupo de Heisenberg $\text{Nil}_3$

O espaço  $\text{Nil}_3(\tau) = \mathbb{E}(0, \tau)$ , com  $\tau \neq 0$ , é a variedade Riemanniana  $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g}_\tau)$ , onde a métrica  $\mathfrak{g}_\tau$  é dada por

$$\mathfrak{g}_\tau = dx^2 + dy^2 + (dz + \tau(ydx - xdy))^2,$$

sendo  $(x, y, z)$  as coordenadas usuais de  $\mathbb{R}^3$ . Boas referências para este espaço são (TORRALBO, 2010; DANIEL, 2007). Tal espaço admite uma estrutura de grupo de Lie

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \tau(x_1y_2 - x_2y_1)),$$

cuja álgebra de Lie consiste das matrizes triangulares superiores e nilpotentes de ordem 3:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Dadas duas constantes  $\tau$  e  $\tilde{\tau}$  e os correspondentes grupos de Heisenberg  $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g}_\tau)$  e  $(\mathbb{R}^3, \mathfrak{g}_{\tilde{\tau}})$ , a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma: (\mathbb{R}^3, \frac{\tau^2}{\tilde{\tau}} \mathfrak{g}_\tau) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathfrak{g}_{\tilde{\tau}}) \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{\tau}{\tilde{\tau}}(x, y, z) \end{aligned}$$

é uma isometria. Desta forma, a menos de homotetias e isometrias, podemos fixar uma constante  $\tau$ , a qual geralmente é tomada  $\tau = \frac{1}{2}$ .

A submersão de Killing, neste caso, é dada pela projeção  $\pi: (\mathbb{R}^3, \mathfrak{g}_\tau) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , na qual consideremos uma base de campos invariantes à esquerda que caracterizam os levantamentos horizontais dos campos  $\partial_x$  e  $\partial_y$  de  $\mathbb{R}^2$ , dada por

$$E_1 = \partial_x - \tau y \partial_z, \quad E_2 = \partial_y + \tau x \partial_z \quad \text{e} \quad E_3 = \partial_z.$$

Observe que esta base é ortonormal em  $\text{Nil}_3(\tau)$  e, como as fibras da submersão  $\pi$  são as linhas retas  $\{x = x_0, y = t_0\}$ , o campo de Killing vertical unitário é  $\partial_z$ .

### 2.3.4 O espaço $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$

O espaço  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com  $\tau \neq 0$  e  $\kappa < 0$ , é uma fibração sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ . Denotemos por  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  o grupo de Lie tridimensional das matrizes de ordem 2 com entradas reais cujo determinante é 1, ou seja,  $\text{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ . Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+bc}{d} & b \\ c & d \end{pmatrix}; (b, c, d) \in \mathbb{R}^3, d \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Seja  $M$  o grupo das isometrias de  $\mathbb{H}^2$  com a operação de composição - considerando  $\mathbb{H}^2$  com o modelo do semiplano de Poincaré -, isto é, o grupo das transformações de Möbius:

$$M = \left\{ \Phi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 : \Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Observe que a aplicação

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \Phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

é um homomorfismo de grupos entre  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$  e  $(M, \circ)$ . O núcleo de tal homomorfismo é dado por  $\{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : \Phi_A(z) = z\} = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ , onde  $\mathrm{Id}$  denota a matriz identidade de ordem 2. Pelo Teorema dos Isomorfismos, o quociente  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$  é isomorfo ao grupo de isometrias de  $\mathbb{H}^2$  que preservam orientação. Assim como em (MANZANO, 2012; DANIEL, 2007), vamos descrever uma métrica Riemanniana sobre  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  que admite uma estrutura de submersão de Killing sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ .

Seja  $U\mathbb{H}^2(\kappa) := \{(p, v) \in T\mathbb{H}^2(\kappa) : \|v\| = 1\}$  o fibrado tangente unitário de  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ . Como o grupo  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  age transitivamente em  $U\mathbb{H}^2(\kappa)$  e o estabilizador de cada ponto sob a ação é trivial, podemos identificar  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  com  $U\mathbb{H}^2(\kappa)$  através da aplicação

$$A \mapsto (\Phi_A(p_0), (d\Phi_A)_{p_0}(v_0)),$$

para certo  $(p_0, v_0) \in U\mathbb{H}^2(\kappa)$  fixo.

Tomamos em  $T\mathbb{H}^2(\kappa)$  a métrica cuja norma sobre um vetor tangente  $V \in T\mathbb{H}^2(\kappa)$  é dada por

$$\|V\| = \|d\pi(V)\|_{\mathbb{H}^2(\kappa)} + \left\| \frac{DV}{dt} \right\|_{\mathbb{H}^2(\kappa)},$$

onde  $\pi : T\mathbb{H}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$  é a projeção canônica e  $\frac{DV}{dt}$  é a derivada covariante com respeito a uma curva  $\alpha(t) = (p(t), v(t))$  em  $T\mathbb{H}^2(\kappa)$  tal que  $\alpha'(0) = V$ . Assim, podemos induzir uma métrica em  $U\mathbb{H}^2(\kappa)$  por restrição de tal métrica descrita em  $T\mathbb{H}^2(\kappa)$ .

Portanto, pela identificação citada, podemos considerar a métrica em  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  e induzir uma métrica no recobrimento universal  $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ . Pelo fato de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  agir em  $U\mathbb{H}^2(\kappa)$  por isometrias, concluímos que a métrica induzida em  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  é invariante à esquerda e, portanto, a métrica induzida em  $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$  é invariante à esquerda.

Como  $U\mathbb{H}^2(\kappa)$  é, a menos de difeomorfismos, um fibrado circular trivial sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ , temos que  $U\mathbb{H}^2(\kappa) \simeq \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{S}^1$  e, portanto,  $\widetilde{U\mathbb{H}^2(\kappa)} \simeq \widetilde{\mathbb{H}^2(\kappa)} \times \mathbb{S}^1$ . Desta forma, os seguintes espaços são difeomorfos:

$$\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})} \simeq \widetilde{U\mathbb{H}^2(\kappa)} \simeq \widetilde{\mathbb{H}^2(\kappa)} \times \mathbb{S}^1 \simeq \widetilde{\mathbb{H}^2(\kappa)} \times \mathbb{R}.$$

Desta forma, seja  $\xi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$  uma parametrização conforme e seja  $\lambda$  o fator conforme, isto é, a métrica em  $\mathbb{H}^2(\kappa)$  é dada por  $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$ . Então uma parametrização de  $U\mathbb{H}^2(\kappa)$  pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \widetilde{U\mathbb{H}^2(\kappa)} \\ (x, y, t) &\longmapsto \left( \xi(x, y), \frac{1}{\lambda} (\cos(t)\partial_x + \sin(t)\partial_y) \right). \end{aligned}$$

Assim, através desta identificação, a métrica sobre  $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$  é dada por

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + \left( dt + \frac{\lambda_x}{\lambda} dx - \frac{\lambda_y}{\lambda} dy \right)^2.$$

Para mais detalhes, ver (DANIEL, 2007). Pela identificação  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , a submersão de Killing é dada pela projeção no primeiro fator  $\pi : \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$ .

Quando tomamos, por exemplo, a parametrização conforme  $\xi$  dada pelo modelo do semiplano superior de Poincaré, com fator conforme  $\lambda(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{-\kappa}}$ , obtemos a seguinte métrica sobre  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{-\kappa y^2} + \left( dt - \frac{2\tau}{\kappa y} dx \right)^2.$$

## SUPERFÍCIES EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

Um fato importante de Geometria Diferencial é que as equações de Gauss e Codazzi são condições necessárias para a existência de uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas  $M^n$  e  $\tilde{M}^{n+1}$ . Sendo  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $M$ ,  $R$  e  $\tilde{R}$  os tensores de curvatura de  $M$  e  $\tilde{M}$ , respectivamente, e  $S$  o operador de forma de  $M$ , tais equações são expressas respectivamente por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle, \quad (3.1)$$

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = \tilde{R}(X, Y)N, \quad (3.2)$$

para quaisquer  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

Se  $\tilde{M}$  tem curvatura constante, então as equações de Gauss e Codazzi também são condições suficientes para a existência de uma imersão isométrica de  $M$  em  $\tilde{M}$ . Veja (DAJCZER; TOJEIRO, 2019). Para  $n = 2$ , tal fato não se generaliza a superfícies nos espaços homogêneos tridimensionais  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Tendo isto em vista, Daniel (2007) apresentou condições necessárias e suficientes para que uma superfície orientada seja localmente imersa em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , as chamadas *equações de compatibilidade*. Já Fernández e Mira (2007) reescreveram tais equações para o caso em que haja um parâmetro conforme para a primeira forma fundamental. O intuito desta seção é estudar tais equações.

### 3.1 Equações de compatibilidade

Neste contexto, vamos considerar  $\Sigma$  uma superfície Riemanniana orientada simplesmente conexa em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Denotemos por  $ds^2$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica induzida pela imersão,  $\nabla$  a conexão Riemanniana em  $\Sigma$ ,  $R$  seu tensor de curvatura e  $K$  sua curvatura Gaussiana. Seja  $N$  um campo unitário normal à superfície  $\Sigma$  e  $S$  o operador de forma, isto é,  $SX = -\bar{\nabla}_X N$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . A principal referência para os resultados seguintes é (DANIEL, 2007).

Seja  $\{E_1, E_2\}$  um referencial ortonormal positivo de  $T\Sigma$ . Denotaremos por  $J : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em  $T\Sigma$  no sentido anti-horário, isto é,  $J$  é definida por

$$J(E_1) = E_2 \quad \text{e} \quad J(E_2) = -E_1.$$

A seguir, vamos denotar por  $T$  a projeção do campo de Killing  $\xi$  sobre  $T\Sigma$ , isto é,

$$T = \xi - \nu N, \quad \text{onde } \nu = \langle N, \xi \rangle.$$

Decorrente da Proposição 2.23, podemos escrever o tensor de curvatura  $\bar{R}$  de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  em termos da projeção  $T$ :

**Proposição 3.1.** Para quaisquer  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle, \\ \bar{R}(X, Y)N &= (\kappa - 4\tau^2) \nu (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y), \end{aligned}$$

onde  $R_0$  e  $R_1$  são definidos como na Proposição 2.23.

*Demonstração.* Substituindo  $\xi = T + \nu N$  na Proposição 2.23 e usando que  $\langle X, N \rangle = 0$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , obtemos

$$\begin{aligned} R_1(T + \nu N; X, Y)Z &= \langle Y, T + \nu N \rangle \langle Z, T + \nu N \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, T + \nu N \rangle (T + \nu N) \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, T + \nu N \rangle (T + \nu N) - \langle X, T + \nu N \rangle \langle Z, T + \nu N \rangle Y \\ &= \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle T + \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \nu N \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle T - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \nu N - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle Y \\ &= R_1(T; X, Y)Z + (\langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle) \nu N \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle \\ &\quad + \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \nu \langle N, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \nu \langle N, W \rangle \\ &= (\kappa - 3\tau^2) \langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, também pela Proposição 2.23, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)N &= (\kappa - 3\tau^2) R_0(X, Y)N + (\kappa - 4\tau^2) R_1(\xi; X, Y)Z, W \\ &= (\kappa - 3\tau^2) (\langle X, N \rangle Y - \langle Y, N \rangle X) + (\kappa - 4\tau^2) (\langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X \\ &\quad + \langle Y, N \rangle \langle X, \xi \rangle \xi - \langle X, N \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y) \\ &= (\kappa - 4\tau^2) (\langle Y, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle X - \langle X, \xi \rangle \langle N, \xi \rangle Y) \\ &= (\kappa - 4\tau^2) (\langle Y, T + \nu N \rangle \langle N, T + \nu N \rangle X - \langle X, T + \nu N \rangle \langle N, T + \nu N \rangle Y) \\ &= (\kappa - 4\tau^2) \nu (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$



**Corolário 3.2.** As equações de Gauss e Codazzi em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  são dadas por

$$\begin{aligned} K &= \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2, \\ \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] &= (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Recordemos que as equações de Gauss e Codazzi de uma hipersuperfície Riemanniana são dadas por (3.1) e (3.2). Seja  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  uma superfície e tome  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  ortonormais. Observe que

$$\langle R_0(X, Y)X, Y \rangle = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle Y, X \rangle \langle X, Y \rangle = 1, \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \langle R_1(T; X, Y)X, Y \rangle &= \langle Y, T \rangle \langle X, T \rangle \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle \langle X, T \rangle \langle T, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, X \rangle \langle Y, T \rangle \langle T, Y \rangle - \langle X, T \rangle \langle X, T \rangle \langle Y, Y \rangle \\ &= -(\langle T, Y \rangle^2 + \langle T, X \rangle^2) = -\|T\|^2 \end{aligned}$$

Como  $T = \xi - vN$ , note que

$$\|T\|^2 = \langle \xi - vN, \xi - vN \rangle = \langle \xi, \xi \rangle - 2v\langle N, \xi \rangle + v^2\langle N, N \rangle = 1 - v^2,$$

isto é,

$$\langle R_1(T; X, Y)X, Y \rangle = v^2 - 1. \quad (3.4)$$

Assim, como

$$\det S = \langle SX, X \rangle \langle SY, Y \rangle - \langle SY, X \rangle \langle SX, Y \rangle,$$

a equação de Gauss (3.1) é expressa por

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \det S + \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle.$$

Desta forma, como  $K = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$ , obtemos, por (3.3), (3.4) e pela Proposição 3.1, a equação de Gauss para superfícies em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ :

$$\begin{aligned} K &= \det S + (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)X, Y \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)X, Y \rangle \\ &= \det S + \kappa - 3\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(v^2 - 1) \\ &= \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2. \end{aligned}$$

Novamente pela Proposição 3.1, a equação de Codazzi (3.2) para superfícies em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  é dada por

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = \bar{R}(X, Y)N = (\kappa - 4\tau^2)v(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y).$$

□

**Proposição 3.3.** Para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , temos

$$\nabla_X T = v(SX - \tau JX) \quad \text{e} \quad dv(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0.$$

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X(T + \nu N) \\ &= \bar{\nabla}_X T + d\nu(X)N + \nu \bar{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X T + \langle SX, T \rangle N + d\nu(X)N - \nu SX.\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 2.17,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= \tau X \wedge \xi \\ &= \tau X \wedge (T + \nu N) \\ &= \tau(\langle JX, T \rangle N - \nu JX),\end{aligned}$$

pois  $X \wedge N = -JX$  e  $X \wedge T = \langle JX, T \rangle N$ , já que

$$\langle X \wedge T, N \rangle = -\langle X \wedge N, T \rangle = \langle JX, T \rangle.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\nabla_X T &= \tau(\langle JX, T \rangle N - \nu JX) - \langle SX, T \rangle N - d\nu(X)N + \nu SX \\ &= \nu(SX - \tau JX) + (\tau \langle JX, T \rangle - \langle SX, T \rangle - d\nu(X))N,\end{aligned}$$

ou seja, como  $\nabla_X T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX) \quad \text{e} \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

As equações do Corolário 3.2 e da Proposição 3.3 são chamadas de *equações de compatibilidade* de superfícies nos espaços  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Tais equações nos sugerem a introduzir a definição a seguir. Para isto, consideremos  $S$  um campo de operadores simétricos  $S_y : T_y \Sigma \rightarrow T_y \Sigma$ ,  $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  um campo vetorial tangente com  $\|T\| \leq 1$  e  $\nu \in C^\infty(\Sigma)$  uma função suave tal que  $\nu^2 \leq 1$ .

**Definição 3.4.** Dizemos que a quádrupla  $(ds^2, S, T, \nu)$  *satisfaz as equações de compatibilidade* para  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  se, para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,

$$(E.1) \quad \|T\|^2 + \nu^2 = 1,$$

$$(E.2) \quad K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2,$$

$$(E.3) \quad \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

$$(E.4) \quad \nabla_X T = \nu(SX - \tau JX),$$

$$(E.5) \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0.$$

**Observação 3.5.** Perceba que, se  $\nu \neq 0$ , então a equação (E.3) implica (E.4). De fato, derivando a identidade  $\nu^2 + \langle T, T \rangle = 1$  com respeito a  $X$  e substituindo a equação (E.3), obtemos que

$$2d\nu(X)\nu + 2\langle \nabla_X T, T \rangle = 0 \implies \nu(d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle) = 0,$$

resultando na equação (E.4) se  $\nu \neq 0$ .

Como visto, as equações de compatibilidade são condições necessárias para existência de uma imersão isométrica entre uma superfície  $\Sigma$  e o espaço  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Em (DANIEL, 2007), Benoît Daniel demonstrou o seguinte teorema - utilizando métodos de referencial móvel, encontrados em (DANIEL, 2007) e (DANIEL, 2009) - que nos indica que as equações de compatibilidade também são condições suficientes para a existência de uma imersão isométrica  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

**Teorema 3.6** (Benoît Daniel, 2007). Sejam  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana bidimensional orientada simplesmente conexa,  $ds^2$  sua métrica e  $\nabla$  sua conexão Riemanniana. Considere  $S$  um campo de operadores simétricos  $S_y : T_y \Sigma \rightarrow T_y \Sigma$ ,  $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  um campo vetorial tangente e  $\nu \in C^\infty(\Sigma)$  uma função suave tais que  $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ . Seja  $\xi$  um campo vertical em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , uma variedade homogênea tridimensional com grupo de isometrias de dimensão 4, que é uma submersão de Killing sobre  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , com curvatura do fibrado constante  $\tau$ .

Então existe uma imersão isométrica  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  tal que o operador de forma com respeito ao campo normal  $N$  associado a  $f$  é dado por  $df \circ S \circ f^{-1}$  e tal que

$$\xi = df(T) + \nu N$$

se, e somente se, a quádrupla  $(ds^2, S, T, \nu)$  satisfaz as equações de compatibilidade para  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Neste caso, a imersão é única a menos de isometrias globais de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  preservando orientação da fibra e da base da fibração.

### 3.1.1 Em termos de um parâmetro conforme

Conhecendo as equações de compatibilidade, Fernández e Mira (2007) reescreveram-as para o caso em que a superfície é expressa em termos de um parâmetro conforme. Essa escolha revela-se especialmente apropriada em vários contextos, como evidenciado pelos resultados apresentados no Capítulo 4.

Neste contexto, consideremos  $\Sigma$  uma superfície de Riemann com estrutura conforme (ver Apêndice A para detalhes). Podemos supor que  $\Sigma$  é orientável, passando para o recobrimento duplo orientado se necessário.

**Definição 3.7.** Os dados fundamentais de uma imersão isométrica  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  são a quintupla

$$(\lambda, \nu, H, p, A) \in \mathbb{R}^+ \times [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

onde

- $\lambda$  é o fator conforme da métrica induzida em  $\Sigma$ , isto é,  $\lambda = 2\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle$ ,
- $\nu$  é a componente normal do campo de Killing  $\xi$ , isto é,  $\nu = \langle N, \xi \rangle$ ,
- $H$  é a curvatura média de  $\psi$ ,
- $p dz^2$  é a diferencial de Hopf (ver Definição A.11) de  $\psi$ ,
- $A = \langle \xi, \psi_z \rangle = \langle T, \partial_z \rangle$ , onde  $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  é dado por  $d\psi(T) = \xi - \nu N$ .

**Teorema 3.8.** Os dados fundamentais de uma superfície imersa  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  satisfazem as seguintes condições de integrabilidade:

$$(C.1) \quad p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2}(H_z + \nu A(\kappa - 4\tau^2)),$$

$$(C.2) \quad A_{\bar{z}} = \frac{\nu\lambda}{2}(H + i\tau),$$

$$(C.3) \quad \nu_z = -(H - i\tau)A - \frac{2p}{\lambda}\bar{A},$$

$$(C.4) \quad \frac{4|A|^2}{\lambda} = 1 - \nu^2.$$

Reciprocamente, se existem funções  $\lambda, \nu, H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\lambda > 0$ ,  $-1 \leq \nu \leq 1$  e  $p, A : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  em uma superfície de Riemann simplesmente conexa  $\Sigma$ , que satisfazem as condições de integrabilidade acima, para certas constantes reais  $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ , com  $\kappa \neq 4\tau^2$ , então existe uma única (a menos de isometrias) imersão isométrica  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  cujos dados fundamentais são  $(\lambda, \nu, H, p, A)$ .

*Demonstração.* De acordo com o Teorema 3.6, as equações de compatibilidade são condições necessárias e suficientes para a existência de uma imersão isométrica  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Desta forma, devemos mostrar que as condições de integrabilidade (C.1)-(C.4) são equivalentes às equações de compatibilidade (E.1)-(E.5) dadas na Definição 3.4.

Primeiramente, vamos mostrar que (E.1) é equivalente a (C.4). Escrevendo  $T = dz(T)\partial_z + d\bar{z}(T)\partial_{\bar{z}}$ , observe que

$$\begin{aligned} A &= \langle T, \partial_z \rangle = \lambda |dz|^2(T, \partial_z) = \frac{\lambda}{2} dz d\bar{z}(T, \partial_z) + \frac{\lambda}{2} d\bar{z} dz(T, \partial_z) = \frac{\lambda}{2} d\bar{z}(T), \\ \bar{A} &= \langle T, \partial_{\bar{z}} \rangle = \lambda |d\bar{z}|^2(T, \partial_{\bar{z}}) = \frac{\lambda}{2} dz d\bar{z}(T, \partial_{\bar{z}}) + \frac{\lambda}{2} d\bar{z} dz(T, \partial_{\bar{z}}) = \frac{\lambda}{2} dz(T), \end{aligned}$$

isto é,

$$T = \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}). \quad (3.5)$$

Desta forma, pela Proposição A.7, como  $\langle \partial_z, \partial_z \rangle = \langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle = 0$ ,

$$\|T\|^2 = \frac{4}{\lambda^2} \langle \bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}, \bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{4}{\lambda^2} (\bar{A}^2 \langle \partial_z, \partial_z \rangle + 2|A|^2 \langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle + A^2 \langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle) = \frac{4|A|^2}{\lambda}.$$

Assim,

$$\|T\|^2 + v^2 = 1 \iff \frac{4|A|^2}{\lambda} = 1 - v^2.$$

Agora, vamos verificar que (E.5) é equivalente a (C.3). Perceba que, como (E.5) é  $\mathbb{C}$ -linear em  $X$ , basta mostrarmos a equivalência para  $X = \partial_z$ . Assim, como  $J(\partial_z) = i\partial_z$ , temos, por (3.5),

$$\begin{aligned} (E.5) &\iff d\nu(\partial_z) + \langle S(\partial_z) - \tau J(\partial_z), T \rangle = 0, \\ &\iff v_z + \left\langle S(\partial_z) - \tau i\partial_z, \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\partial_z + A\partial_{\bar{z}}) \right\rangle = 0, \\ &\iff v_z + \frac{2}{\lambda} (\bar{A}\langle S(\partial_z), \partial_z \rangle + A\langle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle - \tau \bar{A}i\langle \partial_z, \partial_z \rangle - \tau Ai\langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle) = 0, \\ &\iff v_z + \frac{2}{\lambda} \left( \bar{A}\Pi(\partial_z, \partial_z) + A\Pi(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) - \frac{\lambda}{2}\tau Ai \right) = 0, \\ &\iff v_z + \frac{2}{\lambda} \left( \bar{A}p + \frac{\lambda}{2}AH - \frac{\lambda}{2}\tau Ai \right) = 0, \\ &\iff v_z + \frac{2p}{\lambda}\bar{A} + (H - i\tau)A = 0 \iff (C.3). \end{aligned}$$

Vamos verificar que (E.4) é obtida a partir de (C.2), (C.3) e (C.4). Observe que (E.4) é  $\mathbb{C}$ -linear em  $X$  e, portanto, basta mostrarmos a equivalência para  $X = \partial_z$ . Perceba que

$$\begin{aligned} (E.4) &\iff \nabla_{\partial_z} T = \nu(S(\partial_z) - \tau i\partial_z) \\ &\iff \begin{cases} \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle = \nu \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle - \nu \tau i \langle \partial_z, \partial_z \rangle = \nu p, \\ \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_{\bar{z}} \rangle = \nu \langle S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle - \nu \tau i \langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle = \nu \Pi(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) - \frac{\lambda}{2} \nu \tau i = \frac{\nu \lambda}{2} (H - i\tau). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Note que a segunda equação de (3.6) é precisamente a expressão conjugada de (C.2). Pela compatibilidade com a métrica e pela Proposição A.7, a primeira equação de (3.6) pode ser reescrita como

$$\nu p = \langle \nabla_{\partial_z} T, \partial_z \rangle = \partial_z \langle T, \partial_z \rangle - \langle T, \nabla_{\partial_z} \partial_z \rangle = \partial_z A - \left\langle T, \frac{\lambda_z}{\lambda} \partial_z \right\rangle = A_z - \frac{\lambda_z}{\lambda} A. \quad (3.7)$$

Assim, derivando (C.4) com respeito a  $z$ , obtemos

$$\frac{4(A_z \bar{A} + \bar{A}_z A)\lambda - 4\lambda_z A \bar{A}}{\lambda^2} = -2\nu v_z.$$

Substituindo (C.2) e (C.3) na equação acima, obtemos

$$\frac{4A_z \bar{A} \lambda + 2A \nu \lambda (H - i\tau) \lambda - 4\lambda_z A \bar{A}}{\lambda^2} = -2\nu \left( -(H - i\tau)A - \frac{2p}{\lambda} \bar{A} \right),$$

isto é,

$$\frac{4A_z}{\lambda} \bar{A} + 2A \nu (H - i\tau) - \frac{4A \lambda_z}{\lambda^2} \bar{A} = 2A \nu (H - i\tau) + \frac{4p \nu}{\lambda} \bar{A} \implies \frac{4\bar{A}}{\lambda} \left( A_z - \frac{\lambda_z}{\lambda} A - \nu p \right) = 0,$$

donde resultamos na segunda equação de (3.6), como queríamos.

Agora vamos verificar que (C.1) é equivalente a (E.3). Como (E.3) é  $\mathbb{C}$ -bilinear antissimétrica em  $X$  e  $Y$ , basta mostrarmos a equivalência para  $X = \partial_z$  e  $Y = \partial_{\bar{z}}$ . Assim,

$$\begin{aligned} (C.1) \iff \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z) - S[\partial_z, \partial_{\bar{z}}] &= (\kappa - 4\tau^2) \nu (\langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \partial_z - \langle \partial_z, T \rangle \partial_{\bar{z}}) \\ \iff \begin{cases} \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle &= (\kappa - 4\tau^2) \nu (-\langle \partial_z, T \rangle \langle \partial_{\bar{z}}, \partial_z \rangle) = -\frac{\lambda}{2} (\kappa - 4\tau^2) \nu A, \\ \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}) - \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_{\bar{z}} \rangle &= (\kappa - 4\tau^2) \nu (\langle \partial_{\bar{z}}, T \rangle \langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle) = \frac{\lambda}{2} (\kappa - 4\tau^2) \nu \bar{A}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observe que a segunda equação de (3.8) é precisamente a expressão conjugada da primeira, assim podemos mostrar a equivalência a partir da primeira equação. Note que, pela compatibilidade com a métrica e pela Proposição A.7,

$$p_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \Pi(\partial_z, \partial_z) = \partial_{\bar{z}} \langle S(\partial_z), \partial_z \rangle = \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle + \langle S(\partial_z), \nabla_{\partial_{\bar{z}}} \partial_z \rangle = \langle \nabla_{\partial_{\bar{z}}} S(\partial_z), \partial_z \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_z H + \lambda H_z}{2} &= \partial_z \left( \frac{\lambda H}{2} \right) = \partial_z \Pi(\partial_{\bar{z}}, \partial_z) = \partial_z \langle S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle, \\ &= \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \langle S(\partial_{\bar{z}}), \nabla_{\partial_z} \partial_z \rangle, \\ &= \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \frac{\lambda_z}{\lambda} \Pi(\partial_{\bar{z}}, \partial_z), \\ &= \langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle + \frac{\lambda_z H}{2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle \nabla_{\partial_z} S(\partial_{\bar{z}}), \partial_z \rangle = \frac{\lambda H_z}{2}.$$

Assim, a primeira equação de (3.8) pode ser expressa por

$$\frac{\lambda H_z}{2} - p_{\bar{z}} = -\frac{\lambda}{2} (\kappa - 4\tau^2) \nu A \iff p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2} (H_z + \nu A (\kappa - 4\tau^2)),$$

concluindo precisamente (C.1).

Por fim, segue da Proposição A.8 que

$$K = -\frac{2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda}. \quad (3.9)$$

Além disso, pela Proposição A.7, temos que

$$\det S = H^2 - \frac{4|p|^2}{\lambda^2}.$$

Portanto, podemos reescrever a equação de Gauss (E.2) como

$$(\log \lambda)_{z\bar{z}} = \frac{2|p|^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} \nu^2 (\kappa - 4\tau^2) - \frac{\lambda}{2} (H^2 + \tau^2). \quad (3.10)$$

Considerando que

$$(\log \lambda)_{z\bar{z}} = \left( \frac{\lambda_z}{\lambda} \right)_{\bar{z}} = \frac{\lambda_{z\bar{z}}\lambda - \lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2},$$

obtemos, derivando (3.7) com respeito a  $\bar{z}$ , que

$$v_{\bar{z}}p + vp_{\bar{z}} = A_{z\bar{z}} - (\log \lambda)_{z\bar{z}}A - \frac{\lambda_z}{\lambda}A_{\bar{z}}.$$

Substituindo (C.1), (C.2) e (C.3) na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} (\log \lambda)_{z\bar{z}}A &= \frac{v\lambda H_z}{2} + \frac{(H+i\tau)}{2}(\lambda v_z + v\lambda_z) - \frac{v}{2}(H+i\tau)\lambda_z + (H+i\tau)p\bar{A} \\ &\quad + \frac{2|p|^2}{\lambda}A - \frac{v\lambda}{2}(H_z + vA(\kappa - 4\tau^2)) \\ &= \frac{v\lambda H_z}{2} + \frac{(H+i\tau)}{2} \left( \lambda \left( -(H-i\tau)A - \frac{2p}{\lambda}\bar{A} \right) + v\lambda_z \right) - \frac{(H+i\tau)v\lambda_z}{2} \\ &\quad + (H+i\tau)p\bar{A} + \frac{2|p|^2}{\lambda}A - \frac{v\lambda H_z}{2} - \frac{\lambda}{2}v^2(\kappa - 4\tau^2)A \\ &= -(H^2 + \tau^2)\frac{\lambda}{2}A + \frac{2|p|^2}{\lambda}A - \frac{\lambda}{2}v^2(\kappa - 4\tau^2)A, \end{aligned}$$

resultando na equação (3.10). Assim, as equações de compatibilidade (E.1)-(E.5) são equivalentes às equações (C.1)-(C.4), como queríamos demonstrar.  $\square$

## 3.2 Diferencial de Abresch-Rosenberg

Em 1955, H. Hopf desenvolveu uma forma quadrática (veja Definição A.11) definida em superfícies bidimensionais em  $\mathbb{R}^3$ , a qual associada à propriedade de ser holomorfa quando a curvatura média da superfície é constante, representa uma ferramenta fundamental para demonstrar o Teorema de Hopf 1.1.

Em 2004, U. Abresch e H. Rosenberg ampliaram a definição da diferencial de Hopf, culminando na Definição 3.10, para incluir superfícies com curvatura média constante nos espaços produto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , em (ABRESCH; ROSENBERG, 2004), e de maneira mais abrangente, nos espaços  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  e nas formas espaciais tridimensionais, em (ABRESCH; ROSENBERG, 2005). Como resultado, estabeleceram a seguinte generalização do Teorema de Hopf:

**Teorema 3.9** (Abresch-Rosenberg). Qualquer esfera imersa com curvatura média constante em um espaço homogêneo simplesmente conexo  $(M^3, g)$  com um grupo de isometrias ao menos 4-dimensional é, na verdade, uma esfera mergulhada rotacional.

Neste contexto, consideremos uma superfície imersa  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  em termos de um parâmetro conforme e utilizaremos as notações dos dados fundamentais da Definição 3.7. Quando a superfície tiver curvatura média constante  $H$ , chamaremos-na de superfície CMC ou, simplesmente,  $H$ -superfície. As principais referências para esta seção são (ESPINAR; ROSENBERG, 2011; FERNÁNDEZ; MIRA, 2007).

**Definição 3.10.** Chamamos de *diferencial de Abresch-Rosenberg* a diferencial quadrática em  $\Sigma$  dada por

$$Qdz^2 = (2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2) dz^2.$$

**Teorema 3.11.** A diferencial de Abresch-Rosenberg é holomorfa em qualquer superfície de curvatura média constante em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

*Demonstração.* Observe que

$$Q_{\bar{z}} = 2H_{\bar{z}}p + 2p_{\bar{z}}(H + i\tau) - (\kappa - 4\tau^2)2AA_{\bar{z}}.$$

Como  $H$  é constante, temos que  $H_z = H_{\bar{z}} = 0$ . Assim, por (C.1) e (C.2), concluímos que

$$Q_{\bar{z}} = \lambda (H_z + \nu A(\kappa - 4\tau^2)) (H + i\tau) - (\kappa - 4\tau^2)A\nu\lambda (H + i\tau) = 0,$$

isto é,  $Qdz^2$  é holomorfa. □

Para a proposição a seguir, vamos desconsiderar os casos em que  $H = 0$  se  $\tau = 0$ . Como o resultado é local, estamos apenas excluindo superfícies mínimas em  $\mathbb{E}(\kappa, 0)$ , que são melhor estudadas por outros métodos.

**Proposição 3.12.** Toda superfície  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  com diferencial de Abresch-Rosenberg nula é uma superfície CMC.

*Demonstração.* Vamos supor, por absurdo, que  $H$  não é constante em algum aberto de  $\Sigma$ . Desta forma, sem perda de generalidade, podemos supor que  $H_z \neq 0$  e  $A \neq 0$ . Como  $Q \equiv 0$  por hipótese, temos por definição que

$$2p = \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{(H + i\tau)} A^2. \quad (3.11)$$

Derivando a expressão acima com respeito a  $\bar{z}$ , obtemos

$$2p_{\bar{z}} = (\kappa - 4\tau^2) \left( \frac{2AA_{\bar{z}}(H + i\tau) - H_{\bar{z}}A^2}{(H + i\tau)^2} \right).$$

Por (C.1) e (C.2), temos

$$\lambda (H_z + \nu A(\kappa - 4\tau^2)) = (\kappa - 4\tau^2) \left( \frac{A\nu\lambda (H + i\tau)^2 - H_{\bar{z}}A^2}{(H + i\tau)^2} \right),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \lambda H_z &= (\kappa - 4\tau^2)A\nu\lambda - \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{(H + i\tau)^2} H_{\bar{z}}A^2 - (\kappa - 4\tau^2)A\nu\lambda \\ &= -\frac{(\kappa - 4\tau^2)}{(H + i\tau)^2} H_{\bar{z}}A^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$



Tomando o módulo, obtemos

$$\lambda |H_z| = \frac{|\kappa - 4\tau^2|}{(H^2 + \tau^2)} |H_{\bar{z}}| |A|^2.$$

Como  $H_z \neq 0$ , concluímos que

$$\frac{|A|^2}{\lambda} = \frac{H^2 + \tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|}. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.11) e (3.13) em (C.3), obtemos

$$\begin{aligned} -v_z &= (H - i\tau)A + \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{(H + i\tau)} A \frac{|A|^2}{\lambda} \\ &= A \left( (H - i\tau) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)(H^2 + \tau^2)}{|\kappa - 4\tau^2|(H + i\tau)} \right) \\ &= A \left( (H - i\tau) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)(H - i\tau)}{|\kappa - 4\tau^2|} \right) \\ &= A(H - i\tau) \left( 1 + \frac{\kappa - 4\tau^2}{|\kappa - 4\tau^2|} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se  $\kappa - 4\tau^2 < 0$ , obtemos pela expressão acima que  $v_z = 0$ , isto é,  $v$  é constante. Mas observe que substituindo (3.13) em (C.4), obtemos a equação

$$\frac{4(H^2 + \tau^2)}{|\kappa - 4\tau^2|} = 1 - v^2, \quad (3.15)$$

a qual nos indica que  $H$  é constante, o que é uma contradição. Desta forma,  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  e, portanto, por (3.14),

$$v_z = -2A(H - i\tau). \quad (3.16)$$

Observe que, por (3.12) e (3.13),

$$\begin{aligned} H_z(H + i\tau)\bar{A} &= -\frac{(\kappa - 4\tau^2)H_{\bar{z}}}{\lambda(H + i\tau)^2} A^2(H + i\tau)\bar{A} \\ &= -\frac{|A|^2}{\lambda} (\kappa - 4\tau^2) \frac{H_{\bar{z}}}{(H + i\tau)} A \\ &= -\frac{(H^2 + \tau^2)H_{\bar{z}}}{(H + i\tau)} A \\ &= -H_{\bar{z}}(H - i\tau)A, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{H_z(H + i\tau)\bar{A}} = \overline{-H_{\bar{z}}(H - i\tau)A} = -H_z(H + i\tau)\bar{A},$$

o que nos indica que  $\text{Im}\{H_z(H + i\tau)\bar{A}\} \neq 0$ . Além disso, derivando (3.15) com respeito a  $z$ , obtemos que

$$\frac{8HH_z}{(\kappa - \tau^2)} = -2vv_z \implies v_z = -\frac{4HH_z}{v(\kappa - 4\tau^2)}.$$

Assim,

$$v_z(H + i\tau)\bar{A} = -\frac{4H}{v(\kappa - 4\tau^2)} H_z(H + i\tau)\bar{A},$$

o que nos indica que  $\text{Im}\{v_z(H + i\tau)\bar{A}\} \neq 0$ , já que  $\frac{4H}{v(\kappa - 4\tau^2)} \in \mathbb{R}$  e  $\text{Im}\{H_z(H + i\tau)\bar{A}\} \neq 0$ .

Por outro lado, temos, por (3.16), que

$$v_z(H + i\tau)\bar{A} = -2A\bar{A}(H - i\tau)(H + i\tau) = -2|A|^2(H^2 + \tau^2) \in \mathbb{R},$$

ou seja,  $\text{Im}\{v_z(H + i\tau)\bar{A}\} = 0$ , o que é uma contradição. Portanto,  $H$  é constante em  $\Sigma$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Associada à diferencial de Abresch-Rosenberg, definimos a função suave  $q : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$  dada por

$$q = \frac{4|Q|^2}{\lambda^2}.$$

Em uma superfície CMC, temos, pelo Teorema 3.11, que  $Q$  é holomorfa e, em particular, é analítica. Assim,  $q$  também é uma função analítica, o que nos indica que  $q$  possui zeros isolados ou é identicamente nula. Observe também que  $q$  não depende do parâmetro conforme  $z$ , já que  $q$  é globalmente definida em  $\Sigma$ .

**Lema 3.13.** As seguintes equações são satisfeitas para uma  $H$ -superfície  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2 &= \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)v^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2}, \\ \Delta v &= - (4H^2 + 2\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) - 2K_e) v. \end{aligned}$$

Além disso, exceto nos zeros isolados de  $q$ , temos

$$\Delta \log q = 4K. \quad (3.17)$$

*Demonstração.* Por (C.3), temos que

$$v_z = -(H - i\tau)A - \frac{2p}{\lambda}\bar{A} \quad \text{e} \quad \bar{v}_z = -(H + i\tau)\bar{A} - \frac{2\bar{p}}{\lambda}A.$$

Assim,

$$|v_z|^2 = v_z \bar{v}_z = (H^2 + \tau^2)|A|^2 + \frac{2(H + i\tau)}{\lambda}p\bar{A}^2 + \frac{2(H - i\tau)}{\lambda}\bar{p}A^2 + \frac{4|p|^2|A|^2}{\lambda^2}. \quad (3.18)$$

Além disso, pela definição, temos

$$Q = 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2 \quad \text{e} \quad \bar{Q} = 2(H - i\tau)\bar{p} - (\kappa - 4\tau^2)\bar{A}^2,$$

isto é,

$$|Q|^2 = Q\bar{Q} = 4(H^2 + \tau^2)|p|^2 - 2(\kappa - 4\tau^2)((H + i\tau)p\bar{A}^2 + (H - i\tau)\bar{p}A^2) + (\kappa - 4\tau^2)^2|A|^4.$$

Desta forma, por (3.18),

$$\begin{aligned} \frac{|Q|^2}{(\kappa - 4\tau^2)\lambda} &= 4 \left( \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) \frac{|p|^2}{\lambda} - \frac{2(H + i\tau)p\bar{A}^2}{\lambda} - \frac{2(H - i\tau)\bar{p}A^2}{\lambda} + (\kappa - 4\tau^2) \frac{|A|^4}{\lambda} \\ &= 4 \left( \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) \frac{|p|^2}{\lambda} + \frac{4|p|^2|A|^2}{\lambda^2} - |v_z|^2 + (H^2 + \tau^2)|A|^2 + (\kappa - 4\tau^2) \frac{|A|^4}{\lambda}. \end{aligned}$$

Pela Proposição A.7, temos que  $\frac{4|p|^2}{\lambda^2} = H^2 - K_e$ . Assim,

$$|v_z|^2 = (H^2 + \tau^2)|A|^2 + (H^2 - K_e)|A|^2 + (\kappa - 4\tau^2) \frac{|A|^4}{\lambda} + \left( \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) (H^2 - K_e)\lambda - \frac{|Q|^2}{(\kappa - 4\tau^2)\lambda}.$$

Observe que, pela Proposição A.9,

$$\|\nabla v\|^2 = \left\| \frac{2}{\lambda} (v_{\bar{z}}\partial_z + v_z\partial_{\bar{z}}) \right\|^2 = \frac{4}{\lambda^2} (v_{\bar{z}}^2 \langle \partial_z, \partial_z \rangle + 2|v_z|^2 \langle \partial_z, \partial_{\bar{z}} \rangle + v_z^2 \langle \partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} \rangle) = \frac{4}{\lambda} |v_z|^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2 &= (H^2 + \tau^2) \frac{4|A|^2}{\lambda} + (H^2 - K_e) \frac{4|A|^2}{\lambda} + (\kappa - 4\tau^2) \frac{4|A|^4}{\lambda^2} \\ &\quad + 4(H^2 - K_e) \left( \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) - \frac{4|Q|^2}{(\kappa - 4\tau^2)\lambda^2}. \end{aligned}$$

Pela definição de  $q$  e por (C.4), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2 &= (1 - v^2)(H^2 + \tau^2) + (1 - v^2)(H^2 - K_e) + \frac{(1 - v^2)^2}{4}(\kappa - 4\tau^2) \\ &\quad + 4(H^2 - K_e) \left( \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= 4(H^2 - K_e) \left( \frac{1 - v^2}{4} + \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) \\ &\quad + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) \left( \frac{1 - v^2}{4} + \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \left( \frac{1 - v^2}{4} + \frac{H^2 + \tau^2}{\kappa - 4\tau^2} \right) (4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \\ &= \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)v^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) - \frac{q}{\kappa - 4\tau^2}. \end{aligned}$$

Agora derivando (C.3) com respeito a  $\bar{z}$ , obtemos

$$\begin{aligned} v_{z\bar{z}} &= -H_{\bar{z}}A - A_{\bar{z}}(H - i\tau) - \left( \frac{2(p_{\bar{z}}\bar{A} + \bar{A}_{\bar{z}}p)\lambda - 2\lambda_{\bar{z}}p\bar{A}}{\lambda^2} \right) \\ &= -(H - i\tau)A_{\bar{z}} - \frac{2}{\lambda}p_{\bar{z}}\bar{A} - \frac{2}{\lambda}p\bar{A}_{\bar{z}} + \frac{2}{\lambda^2}\lambda_{\bar{z}}p\bar{A}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pela equação (3.7), temos

$$A_z = \frac{\lambda_z}{\lambda}A + p v \quad \implies \quad \bar{A}_{\bar{z}} = \bar{A}_{\bar{z}} = \frac{\bar{\lambda}_{\bar{z}}}{\lambda}\bar{A} + \bar{p}v = \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}\bar{A} + \bar{p}v.$$

Desta forma, usando (C.1) e (C.2), a equação (3.19) é expressa por

$$\begin{aligned} v_{z\bar{z}} &= -\frac{\lambda}{2}(H+i\tau)(H-i\tau)v - (\kappa-4\tau^2)vA\bar{A} - \frac{2}{\lambda}p\left(\frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}\bar{A} + \bar{p}v\right) + \frac{2\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2}p\bar{A} \\ &= -\frac{(H^2+\tau^2)}{2}\lambda v - (\kappa-4\tau^2)v|A|^2 - \frac{2}{\lambda}|p|^2v, \end{aligned}$$

ou ainda, por (C.4),

$$v_{z\bar{z}} = -\frac{\lambda v}{4} \left( (\kappa-4\tau^2)(1-v^2) + \frac{8|p|^2}{\lambda^2} + 2(H^2+\tau^2) \right).$$

Portanto, pelas Proposições A.7 e A.9,

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{4}{\lambda}v_{z\bar{z}} = -\left((\kappa-4\tau^2)(1-v^2) + 2(H^2-K_e) + 2(H^2+\tau^2)\right)v \\ &= -(4H^2+2\tau^2+(\kappa-4\tau^2)(1-v^2)-2K_e)v. \end{aligned}$$

Além disso, nos pontos tais que  $Q \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \log q &= \Delta \log \left( \frac{4|Q|^2}{\lambda^2} \right) = \Delta \log(4|Q|^2) - \Delta \log \lambda^2 = \frac{4}{\lambda}(\log(4Q\bar{Q}))_{z\bar{z}} - 2\Delta \log \lambda \\ &= \frac{4}{\lambda} \left( \frac{Q_{\bar{z}}\bar{Q} + \bar{Q}_{\bar{z}}Q}{|Q|^2} \right)_z - 2\Delta \log \lambda = \frac{4}{\lambda} \left( \frac{\bar{Q}_{\bar{z}}}{\bar{Q}} \right)_z - 2\Delta \log \lambda \\ &= \frac{4}{\lambda} \left( \frac{\bar{Q}_{z\bar{z}}\bar{Q} - \bar{Q}_z\bar{Q}_{\bar{z}}}{\bar{Q}^2} \right) - 2\Delta \log \lambda = -2\Delta \log \lambda, \end{aligned}$$

pois, pelo Teorema 3.11,  $Q$  é holomorfa. Portanto, pelas Proposições A.8 e A.9, obtemos

$$\Delta \log q = -2\Delta \log \lambda = -\frac{8}{\lambda}(\log \lambda)_{z\bar{z}} = 4K, \quad (3.20)$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação 3.14.** A equação (3.17) relaciona a função  $q$  e a curvatura Gaussiana  $K$  de uma  $H$ -superfície em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Portanto, será relevante para os resultados que envolvem, por exemplo, o sinal de  $K$ .

## SUPERFÍCIES CMC COMPLETAS EM $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

Neste capítulo, buscamos classificar certas  $H$ -superfícies completas nos espaços  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Primeiramente, na Seção 4.1, estabeleceremos alguns resultados no caso que a função ângulo  $\nu$  é constante. Já na Seção 4.2, o intuito é caracterizar as  $H$ -superfícies completas tais que a função  $q$  é constante. Por fim, nas Seções 4.3 e 4.4, estudaremos os teoremas apresentados por (ESPINAR; ROSENBERG, 2011) que generalizam o Teorema 1.4, os quais classificam as  $H$ -superfícies completas em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal, com uma hipótese adicional no caso em que  $K \leq 0$ .

### 4.1 Função ângulo $\nu$ constante

**Definição 4.1.** Dizemos que  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  é um *cilindro vertical sobre  $\alpha$*  se  $\Sigma = \pi^{-1}(\alpha)$ , onde  $\pi$  é a submersão de Killing sobre  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  e  $\alpha$  é uma curva em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .

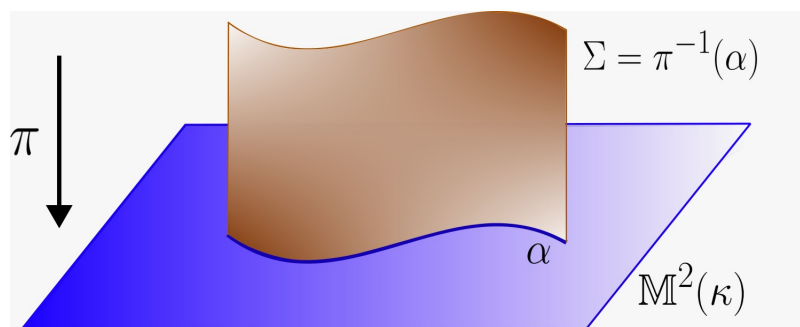


Figura 2 – Cilindro vertical sobre uma curva  $\alpha$ .

A proposição seguinte, encontrada em (ESPINAR; OLIVEIRA, 2013), estabelece informações importantes sobre a geometria de cilindros verticais sobre uma curva  $\alpha$  em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

**Proposição 4.2.** Seja  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  um cilindro vertical sobre  $\alpha$ . Então as curvaturas média, Gaussiana e extrínseca são dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{\kappa_g}{2}, \quad K = 0 \quad \text{e} \quad K_e = -\tau^2,$$

onde  $\kappa_g$  é a curvatura geodésica de  $\alpha$  com respeito à métrica de  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ . Além disso, tais cilindros são caracterizados por  $\nu \equiv 0$ .

Em particular, um cilindro vertical completo é isométrico a  $\mathbb{R}^2$ . Ademais, se  $\tau = 0$ , então um plano vertical em  $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  é totalmente geodésico.

*Demonstração.* Consideremos  $\alpha \subset \mathbb{M}^2(\kappa)$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Denotemos por  $\vec{t}, \vec{n}$  os campos unitários tangente e normal, respectivamente, ao longo de  $\alpha$  e sejam  $T, N$  seus respectivos levantamentos horizontais em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Note que  $\{T, \xi\} \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  é uma base ortonormal e  $N$  é um campo unitário normal ao longo de  $\Sigma$ , em particular,  $\nu = \langle N, \xi \rangle \equiv 0$ . Escolhemos  $N$  de forma que  $\{T, N, \xi\}$  é um referencial ortonormal positivo em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

A segunda forma fundamental aplicada a  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  é dada por  $\Pi(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$  e, desta forma, pelo Lema 2.17, é determinada na base por

$$\begin{aligned}\Pi(\xi, \xi) &= \langle \bar{\nabla}_\xi \xi, N \rangle = 0, \\ \Pi(T, \xi) &= \langle \bar{\nabla}_T \xi, N \rangle = \langle \tau(T \wedge \xi), N \rangle = \tau \det(T, \xi, N) = -\tau \det(T, N, \xi) = -\tau, \\ \Pi(T, T) &= \langle \bar{\nabla}_T T, N \rangle = \langle \nabla_{\vec{T}} \vec{t}, \vec{n} \rangle_{\mathbb{M}^2(\kappa)} = \kappa_g.\end{aligned}$$

Assim, decompondo  $X = x_1 \xi + x_2 T$  e  $Y = y_1 \xi + y_2 T$ , com  $x_i, y_i \in C^\infty(\Sigma)$ ,  $i = 1, 2$ , obtemos

$$\begin{aligned}\Pi(X, Y) &= \Pi(x_1 \xi + x_2 T, y_1 \xi + y_2 T) \\ &= x_1 y_1 \Pi(\xi, \xi) + x_1 y_2 \Pi(\xi, T) + x_2 y_1 \Pi(T, \xi) + x_2 y_2 \Pi(T, T) \\ &= -x_1 y_2 \tau - x_2 y_1 \tau + x_2 y_2 \kappa_g \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & \kappa_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

isto é, a matriz do operador de forma  $S$  é dada por

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & \kappa_g \end{pmatrix}.$$

Portanto, as curvaturas média e extrínseca são dadas por

$$H = \frac{1}{2} \text{Tr} S = \frac{\kappa_g}{2} \quad \text{e} \quad K_e = \det S = -\tau^2.$$

Além disso, pela equação de Gauss (E.2) e considerando  $\nu \equiv 0$ , obtemos

$$K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 = -\tau^2 + \tau^2 = 0,$$

concluindo a demonstração. □

Observe que a proposição anterior nos indica que, se  $\alpha$  é uma curva completa de curvatura geodésica constante  $2H$ , então  $\Sigma = \pi^{-1}(\alpha)$  é uma superfície completa e tem curvatura média constante  $H$ .

A definição seguinte de uma família de  $H$ -superfícies é motivada pelo surgimento natural desta família na demonstração do Teorema 4.5.

**Definição 4.3.** Denotemos por  $\mathcal{S}_{\kappa, \tau}$  uma família de  $H$ -superfícies em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ , com  $\kappa < 0$ , satisfazendo para toda  $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ :

- $4H^2 + \kappa < 0$ ;
- A função  $q$  se anula identicamente em  $\Sigma$ ;
- $0 < \nu^2 < 1$  é constante ao longo de  $\Sigma$ ;
- $K_e = -\tau^2$  e  $K = (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 < 0$  são constantes ao longo de  $\Sigma$ .

**Observação 4.4.** Geometricamente, o fato da função  $q$  se anular identicamente em  $\Sigma$  na definição anterior significa que  $\Sigma$  é invariante por uma família a 1-parâmetro de isometrias. Isto é consequência do Teorema 4.10, a ser demonstrado, já que os slices em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  não pertencem a  $\mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ .

**Teorema 4.5.** Seja  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  uma  $H$ -superfície completa com função ângulo  $\nu$  constante. Então  $\Sigma$  é uma das seguintes superfícies:

- um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ ,
- um slice em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,
- $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ , com  $\kappa < 0$ .

*Demonstração.* Suponha, sem perda de generalidade, que  $\nu \leq 0$ .

- Se  $\nu \equiv 0$ , então  $\Sigma$  deve ser um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ , de acordo com a Proposição 4.2;
- Se  $\nu = -1$ , obtemos de (C.4) que

$$\frac{4|A|^2}{\lambda} = 1 - \nu^2 = 0,$$

isto é,  $A \equiv 0$  e, portanto,  $T = 0$ . Assim, de (C.2), obtemos que  $-\frac{\lambda}{2}(H + i\tau) = 0$ , ou seja,  $H = \tau = 0$ . Isto nos indica que  $\Sigma$  é um slice em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ;

- Se  $-1 < v < 0$ , vamos mostrar que  $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$ , com  $\kappa < 0$ . Neste caso, por (C.4),

$$|\bar{A}|^2 = |A|^2 = \frac{\lambda}{4}(1 - v^2) \neq 0.$$

Além disso, por (C.3), temos

$$(H - i\tau)A = -\frac{2p}{\lambda}\bar{A} \implies (H^2 + \tau^2)|A|^2 = \frac{4|p|^2}{\lambda^2}|\bar{A}|^2. \quad (4.1)$$

Assim, pela Proposição A.7, obtemos

$$H^2 + \tau^2 = \frac{4|p|^2}{\lambda^2} = H^2 - K_e \implies K_e = -\tau^2.$$

Pelo Lema 3.13 e pelo fato de  $v$  ser constante não-nulo, temos

$$0 = \Delta v = -(4H^2 + 2\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) - 2K_e)v,$$

isto é,

$$4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) = 0. \quad (4.2)$$

Assim, por (C.4), (4.1) e pela Proposição A.7, obtemos

$$\begin{aligned} q &= \frac{4|Q|^2}{\lambda^2} \\ &= 16(H^2 + \tau^2)\frac{|p|^2}{\lambda^2} + (\kappa - 4\tau^2)\frac{4|A|^4}{\lambda^2} - \frac{4(\kappa - 4\tau^2)}{\lambda^2}(2(H + i\tau)p\bar{A}^2 + 2(H - i\tau)\bar{p}A^2) \\ &= 4(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)^2\frac{(1 - v^2)^2}{4} + \frac{4(\kappa - 4\tau^2)}{\lambda^2}(2(H^2 + \tau^2)\lambda|A|^2) \\ &= 4(H^2 + \tau^2)^2 + \left(\frac{(\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)}{2}\right)^2 + 2(\kappa - 4\tau^2)(H + \tau^2)(1 - v^2) \\ &= \frac{1}{4}\left((\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) + 4(H^2 + \tau^2)\right)^2, \end{aligned}$$

ou seja, por (4.2), a função  $q$  é identicamente nula em  $\Sigma$ .

Por fim, segue de (4.2) que  $\kappa - 4\tau^2 < 0$  e

$$\kappa \leq \kappa + 4H^2 = v^2(\kappa - 4\tau^2) < 0,$$

concluindo a demonstração. □

## 4.2 Função $q$ constante

Antes de estabelecer o resultado para o caso  $q \equiv 0$ , é necessário entender as definições seguintes, encontradas em (BOWDITCH, 2005) e (AHLFORS; SARIO, 2015).



**Definição 4.6.** Considere  $(X, d)$  e  $(X', d')$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : X \rightarrow X'$  é dita *quasi-isométrica* se existem constantes  $k_1 > 0, k_2, k_3, k_4 \geq 0$ , tais que para todos  $x, y \in X$ , temos

$$k_1 d(x, y) - k_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq k_3 d(x, y) + k_4.$$

Se, além disso, existe uma constante  $k_5 \geq 0$  tal que, para todo  $y \in X'$ , existe  $x \in X$  em que

$$d(y, f(x)) \leq k_5,$$

a aplicação  $f$  é chamada *quasi-isometria*.

**Definição 4.7.** Uma função com valores reais  $v$  é dita *subharmônica* em uma região plana  $\Omega$  se satisfaz as seguintes condições:

1.  $v$  é semicontínua superiormente em  $\Omega$ , isto é,  $v(z) \geq \limsup_{z \rightarrow z'} v(z')$ , para todo  $z \in \Omega$ ;
2. para toda função harmônica  $u$  em uma região  $\Omega' \subset \Omega$ , a diferença  $v - u$  é constante ou não possui máximo em  $\Omega'$ .

Para uma função  $v$  diferenciável,  $v$  é subharmônica se  $\Delta v(z) \leq 0$ , para todo  $z \in \Omega$ . Dizemos que  $v$  é *superharmônica* se  $-v$  é subharmônica.

**Definição 4.8.** Uma superfície de Riemann  $\Sigma$  é dita *parabólica* se não existem funções subharmônicas negativas não-constantes em  $\Sigma$ . Toda superfície aberta que não é parabólica é chamada *hiperbólica*.

Um fato importante sobre superfícies de Riemann parabólicas é que vale o princípio do máximo para tais superfícies, veja (AHLFORS; SARIO, 2015, p. 204).

Além disso, o lema abaixo, correspondente ao Lema 5 de (KLOTZ; OSSERMAN, 1966/67), é fundamental para a demonstração dos resultados seguintes.

**Lema 4.9.** Seja  $\Sigma$  uma superfície completa com curvatura Gaussiana  $K \geq 0$ . Então, ou  $K \equiv 0$  ou  $\Sigma$  é simplesmente conexa. Além disso,  $\Sigma$  é uma esfera topológica ou  $\Sigma$  é parabólica.

**Teorema 4.10.** Seja  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  uma  $H$ -superfície completa com  $q \equiv 0$ .

- Se  $H = \tau = 0$ , então  $\Sigma$  é um slice em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ;
- Se  $H \neq 0$  ou  $\tau \neq 0$ , então  $\Sigma$  é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Além disso, para  $\kappa < 8\tau^2 + 4H^2$ , a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  é dada a seguir:

- Se  $4H^2 + \kappa > 0$ , então  $K > 0$  (são esferas rotacionais);

- Se  $4H^2 + \kappa = 0$  e  $\nu \equiv 0$ , então  $K \equiv 0$  e  $\Sigma$  é ou plano vertical em  $\text{Nil}_3$  ou um cilindro vertical sobre um horociclo em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ;
- Existe um ponto com curvatura Gaussiana negativa nos demais casos.

*Demonstração.* Se  $H = \tau = 0$ , então pela definição da diferencial de Abresch-Rosenberg, obtemos que  $(\kappa - 4\tau^2)A^2 = 0$ , ou seja,  $A \equiv 0$  e, portanto,  $T = 0$  e  $\nu = \pm 1$ . Isto nos indica que  $\Sigma$  é um slice em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ .

Se  $H \neq 0$  ou  $\tau \neq 0$ , então segue da definição de  $Qdz^2$  que

$$2(H + i\tau)p = (\kappa - 4\tau^2)A^2, \quad (4.3)$$

ou ainda, tomando módulo,

$$\frac{4(H^2 + \tau^2)|p|^2}{\lambda^2} = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2|A|^4}{\lambda^2}.$$

Por (C.4) e pela Proposição A.7, temos

$$H^2 - K_e = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - \nu^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)}. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.3) em (C.3) e utilizando (C.4), obtemos

$$\begin{aligned} (H + i\tau)v_z &= -(H^2 + \tau^2)A - \frac{(\kappa - 4\tau^2)|A|^2}{\lambda}A \\ &= -(H^2 + \tau^2)A - \frac{(\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)}{4}A \\ &= -\frac{1}{4}(4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2)A. \end{aligned}$$

Denotando  $g(\nu) := \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}}$  e tomando o módulo na expressão acima, obtemos

$$|v_z|^2 = \left( \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)\nu^2}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}} \right)^2 |A|^2 = g(\nu)^2 |A|^2. \quad (4.5)$$

Se  $\nu$  é constante, a classificação é dada pelo Teorema 4.5, notando que cilindros verticais e superfícies de  $\mathcal{S}_{\kappa, \tau}$  são invariantes por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Assim, suponha que  $\nu$  não seja constante. Isto nos indica que existe  $p \in \Sigma$  tal que  $v_z(p) \neq 0$  e  $\nu^2(p) \neq 1$ . Tomemos uma vizinhança suficientemente pequena  $U$  de  $p$  de forma que  $v_z \neq 0$  e  $\nu^2 < 1$  em  $U$ . Perceba que  $g(\nu) \neq 0$  em  $U$ , já que  $|A| = \frac{\lambda}{4}(1 - \nu^2) \neq 0$ . Além disso, por (C.4) e (4.5),

$$\frac{|v_z|^2}{g(\nu)^2} = |A|^2 = \frac{\lambda}{4}(1 - \nu^2) \implies \lambda = \frac{4|v_z|^2}{(1 - \nu^2)g(\nu)^2}. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.4) e (4.6) na segunda equação do Lema 3.13, obtemos

$$\begin{aligned}
v_{z\bar{z}} &= \frac{\lambda}{4} \Delta v = \frac{-|v_z|^2 v}{(1-v^2)g(v)^2} \left( 2(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1-v^2) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1-v^2)^2}{8(H^2 + \tau^2)} \right) \\
&= \frac{-2|v_z|^2 v}{(1-v^2)g(v)^2} \left( \frac{16(H^2 + \tau^2)^2 + 8(\kappa - 4\tau^2)(1-v^2)(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)^2(1-v^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)} \right) \\
&= \frac{-2|v_z|^2 v}{(1-v^2)g(v)^2} \left( \frac{4(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1-v^2)}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}} \right)^2 \\
&= \frac{-2|v_z|^2 v}{(1-v^2)g(v)^2} \left( \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)v^2}{4\sqrt{H^2 + \tau^2}} \right)^2 \\
&= \frac{-2|v_z|^2 v}{(1-v^2)}.
\end{aligned}$$

Assim, defina a função real  $s := \operatorname{arctgh}(v)$  em  $U$ . Observe que  $s$  é uma função real bem definida, já que  $v^2 < 1$  em  $U$  e, além disso, pela equação acima,

$$\Delta s = \frac{4}{\lambda} s_{z\bar{z}} = \frac{v_{z\bar{z}}(1-v^2) + 2v v_{\bar{z}} v_z}{\lambda(1-v^2)^2} = \frac{v_{z\bar{z}}(1-v^2) + 2|v_z|^2 v}{\lambda(1-v^2)^2} = 0,$$

isto é,  $s$  é uma função harmônica em  $U$ . Desta forma, podemos considerar um novo parâmetro conforme  $w$  para a primeira forma fundamental de forma que  $s = \operatorname{Re}(w)$ , isto é,  $w = s + it$ .

Observe que  $v \equiv v(s)$ , isto é,  $v$  depende somente do parâmetro  $s$ , já que  $v = \operatorname{tgh}(s)$ , por definição. Além disso, por (4.6) e (4.5), obtemos que  $\lambda \equiv \lambda(s)$  e  $T \equiv T(s)$ , assim como  $p \equiv p(s)$  pela definição da diferencial de Abresch-Rosenberg e  $H \equiv H(s)$  pelas condições de integrabilidade. Isto quer dizer que os dados fundamentais de  $\Sigma$  dependem somente de  $s$ .

Agora, considere  $U$  um domínio simplesmente conexo em  $\Sigma$  e  $V \subset \mathbb{R}^2$  um domínio simplesmente conexo de uma superfície  $S$  tais que  $\psi_0 : V \rightarrow U \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  é uma parametrização local de  $\Sigma$ , onde parametrizamos  $V$  pelos parâmetros  $(s, t)$  obtidos. Portanto, pelo Teorema 3.8, os dados fundamentais  $\{\lambda_0, p_0, H_0, T_0, v_0\}$  de  $\psi_0$  são dados por

$$\begin{cases} \lambda_0(s, t) &= \lambda(s), \\ p_0(s, t) &= p(s), \\ H_0(s, t) &= H(s), \\ T_0(s, t) &= a(s) \partial_s, \\ v_0(s, t) &= v(s), \end{cases}$$

onde  $a(s)$  é uma função suave.

Para cada  $\bar{t} \in \mathbb{R}$ , considere o difeomorfismo translação vertical  $\mathbf{i}_{\bar{t}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$\mathbf{i}_{\bar{t}}(s, t) := (s, t + \bar{t}),$$

e defina  $\psi_{\bar{t}} := \psi_0 \circ \mathbf{i}_{\bar{t}}$ . Desta forma, os dados fundamentais  $\{\lambda_{\bar{t}}, p_{\bar{t}}, H_{\bar{t}}, T_{\bar{t}}, \mathbf{v}_{\bar{t}}\}$  de  $\psi_{\bar{t}}$  são dados por

$$\begin{cases} \lambda_{\bar{t}}(s, t) = \lambda(s), \\ p_{\bar{t}}(s, t) = p(s), \\ H_{\bar{t}}(s, t) = H(s), \\ T_{\bar{t}}(s, t) = a(s)\partial_s, \\ \mathbf{v}_{\bar{t}}(s, t) = \mathbf{v}(s), \end{cases}$$

ou seja, os dados fundamentais de  $\psi_0$  e  $\psi_{\bar{t}}$  coincidem em qualquer ponto  $(s, t) \in V$ . Assim, segue do Teorema 3.6 que existe uma isometria  $\mathbf{I}_{\bar{t}} : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  tal que, para todo  $\bar{t} \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{I}_{\bar{t}} \circ \psi_0 = \psi_0 \circ \mathbf{i}_{\bar{t}},$$

e, portanto, a superfície é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ .

Agora vamos demonstrar as afirmações referentes à curvatura Gaussiana de  $\Sigma$ . Pela equação de Gauss (E.2) e por (4.4), temos

$$H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2 - K = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2(1 - v^2)^2}{16(H^2 + \tau^2)}.$$

Fazendo  $a := 4(H^2 + \tau^2)$  e  $b := \kappa - 4\tau^2$ , a equação acima exprime-se como

$$\frac{a}{4} + bv^2 - K = \frac{b^2(1 - v^2)^2}{4a},$$

ou ainda, multiplicando por  $4a$  e adicionando termos  $b^2$ ,  $4a^2$  e  $4ab$ , obtemos

$$4aK = a^2 - b^2 + (2a + b)^2 - (2a + b(1 - v^2))^2. \quad (4.7)$$

- Se  $4H^2 + \kappa > 0$ , então

$$a + b = 4H^2 + 4\tau^2 + \kappa - 4\tau^2 = 4H^2 + \kappa > 0$$

e, como  $\kappa < 8\tau^2 + 4H^2$  por hipótese,

$$a - b = 4H^2 + 4\tau^2 - \kappa + 4\tau^2 = 4H^2 + 8\tau^2 - \kappa > 0, \quad (4.8)$$

isto é,  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) > 0$ . Desta forma, como  $v^2 \leq 1$ , concluímos que

$$K = \frac{a^2 - b^2 + (2a + b)^2 - (2a + b(1 - v^2))^2}{4a} > 0,$$

e, portanto,  $\Sigma$  é topologicamente uma esfera, já que é uma superfície completa. Como é uma  $H$ -superfície, segue do Teorema 3.9 que  $\Sigma$  é uma esfera rotacional.

- Se  $4H^2 + \kappa = 0$ , então

$$b = \kappa - 4\tau^2 = -4H^2 - 4\tau^2 = -a,$$

e, desta forma, por (4.7),

$$\begin{aligned} K &= \frac{a^2 - (-a)^2 + (2a - a)^2 - (2a - a(1 - v^2))^2}{4a} \\ &= \frac{a^2 - 4a^2 + 4a^2(1 - v^2) - a^2(1 - v^2)^2}{4a} \\ &= \frac{a - 4av^2 - a + 2av^2 - av^4}{4} \\ &= -\frac{v^2a(2 + v^2)}{4}. \end{aligned}$$

Note que  $a > 0$ , pois caso  $a = 0$ , teríamos que  $\kappa = \tau = 0$ , o que contradiz  $\kappa \neq 4\tau^2$ . Desta forma, se  $v \neq 0$ , então existe um ponto tal que  $K < 0$  e, se  $v \equiv 0$ , então  $K \equiv 0$ . Além disso, como  $\kappa = -4H^2 \leq 0$ , temos dois casos a considerar:

- Se  $H = 0$ , então  $\kappa = 0$  e  $\tau \neq 0$ , o que nos indica que  $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \text{Nil}_3$ . Como  $v \equiv 0$  e  $H = 0$ , concluímos que  $\Sigma$  é um cilindro vertical sobre uma linha reta em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\Sigma$  é um plano vertical em  $\text{Nil}_3$ ;
  - Se  $H \neq 0$ , então  $\kappa < 0$  e, desta forma,  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ , se  $\tau = 0$ , e  $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , se  $\tau \neq 0$ . Como  $v \equiv 0$ , concluímos que  $\Sigma$  é um cilindro vertical sobre um horociclo em um destes espaços.
- Se  $4H^2 + \kappa < 0$ , então

$$a + b = 4H^2 + 4\tau^2 + \kappa - 4\tau^2 = 4H^2 + \kappa < 0$$

e, como  $-\kappa > 4H^2 \geq 0$ ,

$$a - b = 4H^2 + 4\tau^2 - \kappa + 4\tau^2 = 8\tau^2 + 4H^2 - \kappa > 8\tau^2 + 4H^2 \geq 0,$$

ou seja,  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$ . Assim, se  $\inf_{\Sigma}\{v^2\} = 0$ , então, como  $\Sigma$  é completa, existe um ponto  $p \in \Sigma$  tal que  $v(p) = 0$  e, desta forma, segue de (4.7) que, neste ponto,

$$K = \frac{a^2 - b^2}{4a} < 0.$$

Para concluir a demonstração, basta verificarmos que não existem  $H$ -superfícies completas em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  com  $4H^2 + \kappa < 0$ ,  $q \equiv 0$ ,  $K \geq 0$  e  $\inf_{\Sigma}\{v^2\} = c > 0$ .

De fato, suponha que exista uma superfície  $\Sigma$  que satisfaça as hipóteses. Como  $K \geq 0$  e  $\Sigma$  é completa, temos pelo Lema 4.9 que ou  $\Sigma$  é parabólica e não compacta, ou é uma esfera. Como  $\inf_{\Sigma}\{v^2\} = c > 0$  e  $\kappa < -4H^2 \leq 0$ , concluímos que  $\Sigma$  não é compacta e, portanto, é parabólica.

Como  $q \equiv 0$  em  $\Sigma$ , mostramos que  $\text{arctgh}(v)$  é uma função harmônica limitada. Segue do princípio do máximo de Hopf que  $\text{arctgh}(v)$  é constante em  $\Sigma$ , ou ainda,  $v$  é constante não-nulo. Desta forma, a projeção  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$  é um difeomorfismo global e uma quasi-isometria. Isto nos indica que  $\Sigma$  é hiperbólica, já que  $\kappa < 0$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Observação 4.11.** Diferentemente de (ESPINAR; ROSENBERG, 2011, Thm. 2.3), a hipótese de  $\kappa < 8\tau^2 + 4H^2$  para os resultados sobre a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  no teorema anterior foi adicionada, pois mostrou-se necessária para concluir que  $K > 0$  a partir da equação (4.8), já que em geral não teríamos que  $a > b$ .

**Teorema 4.12.** Seja  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  uma  $H$ -superfície completa com  $q \neq 0$  constante. Então  $\Sigma$  é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .

*Demonstração.* Vamos supor que  $v$  não seja constante em  $\Sigma$ . Denotemos  $c^2 = q = \frac{4|Q|^2}{\lambda^2} > 0$ , e assim, podemos considerar um parâmetro conforme  $z$  de forma que  $\langle \cdot, \cdot \rangle = |dz|^2$  e  $Qdz^2 = cdz^2$  em  $\Sigma$ . Portanto,

$$Q = c = 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2.$$

Perceba que, se  $H = \tau = 0$ , teríamos da expressão acima que  $A$  seria constante e, portanto, por (C.4),  $v$  seria constante. Desta forma, podemos supor que  $H \neq 0$  ou  $\tau \neq 0$  e, assim, por (C.3) e (C.4), obtemos

$$\begin{aligned} (H + i\tau)v_z &= -(H^2 + \tau^2)A - 2p\bar{A}(H + i\tau) \\ &= -(H^2 + \tau^2)A - \bar{A}(c + (\kappa - 4\tau^2)A^2) \\ &= -(H^2 + \tau^2)A - c\bar{A} - (\kappa - 4\tau^2)A|A|^2 \\ &= -\left(H^2 + \tau^2 + \frac{\kappa - 4\tau^2}{4}(1 - v^2)\right)A - c\bar{A}. \end{aligned}$$

Tomando o módulo, obtemos

$$(H^2 + \tau^2)|v_z|^2 = \left|\frac{4H^2 + \kappa - v^2(\kappa - 4\tau^2)}{4}\right|^2 |A|^2 + 2\left(\frac{4H^2 + \kappa - v^2(\kappa - 4\tau^2)}{4}\right)c|A|^2 + c^2|\bar{A}|^2,$$

ou ainda, pela Proposição A.9, por (C.4) e fazendo  $g(v) := 4H^2 + \kappa - v^2(\kappa - 4\tau^2)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(H^2 + \tau^2)\|\nabla v\|^2}{4} &= \frac{|A|^2 g(v)^2}{16} + \frac{c(1 - v^2)g(v)}{8} + \frac{c^2(1 - v^2)}{4} \\ &= \frac{(1 - v^2)g(v)^2 + 8c(1 - v^2)g(v) + 16c^2(1 - v^2)}{64}, \end{aligned}$$

isto é,

$$16(H^2 + \tau^2)\|\nabla v\|^2 = (g(v) + 4c)^2(1 - v^2). \quad (4.9)$$

Além disso, como  $q$  é constante não-nulo, segue do Lema 3.13 que  $K = \frac{\Delta \log q}{4} \equiv 0$  e, portanto, pela equação de Gauss (E.2),

$$H^2 - K_e = H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2.$$

Assim, pelo Lema 3.13,

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|^2 &= \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)v^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\
&= \frac{g(v)}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\
&= \frac{g(v)}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4H^2 + 4(\kappa - 4\tau^2)v^2 + \kappa - v^2(\kappa - 4\tau^2)) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\
&= \frac{g(v)}{4(\kappa - 4\tau^2)} (g(v) + 4(\kappa - 4\tau^2)v^2) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2} \\
&= \frac{g(v)^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} + v^2 g(v) - \frac{c^2}{\kappa - 4\tau^2}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Portanto, segue de (4.9) e (4.10) que

$$\frac{16(H^2 + \tau^2)g(v)^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} + 16(H^2 + \tau^2)v^2 g(v) - \frac{16(H^2 + \tau^2)c^2}{\kappa - 4\tau^2} = (g(v) + 4c)^2 (1 - v^2). \tag{4.11}$$

Fazendo  $a := 4(H^2 + \tau^2)$  e  $b := \kappa - 4\tau^2$ , observe que  $g(v) = a + b(1 - v^2)$ . Desta forma, a equação (4.11) exprime-se como

$$\frac{a}{b} (a + b(1 - v^2))^2 + 4av^2(a + b(1 - v^2)) - \frac{4ac^2}{b} = (a + b(1 - v^2) + 4c)^2 (1 - v^2),$$

ou ainda,

$$a(a + b(1 - v^2))^2 + 4abv^2(a + b(1 - v^2)) - 4ac^2 = b(a + b(1 - v^2) + 4c)^2 (1 - v^2).$$

Observe que a equação acima pode ser expressa como uma expressão polinomial em  $v^2$ :

$$P(v^2) := -b^3 v^6 + \text{termos de menor potência} = 0.$$

Como  $b \neq 0$ , isto nos indica que  $v \equiv 0$ , o que é uma contradição. Assim,  $v$  é constante em  $\Sigma$ .

Pelo Teorema 4.5, há três possibilidades para  $\Sigma$ , a depender do valor de  $v$ . Se  $v^2 \equiv 1$ , então  $A \equiv 0$  e  $H = \tau = 0$ , o que nos indica pela definição da diferencial de Abresch-Rosenberg que  $Q = 0$  e, portanto  $q \equiv 0$ , o que contradiz a hipótese. Se  $0 < v^2 < 1$ , então  $\Sigma \in \mathcal{S}_{\kappa, \tau}$  e, pela definição de tal família,  $q \equiv 0$ , também contradizendo a hipótese. Portanto,  $v \equiv 0$  e  $\Sigma$  é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .  $\square$

### 4.3 Curvatura Gaussiana não-negativa

O intuito desta seção é classificar as superfícies completas de curvatura média constante em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  cuja curvatura Gaussiana  $K$  é sempre não-negativa, ou seja,  $K \geq 0$ .

**Teorema 4.13.** Seja  $\Sigma \in \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  uma  $H$ -superfície completa com  $K \geq 0$ . Então  $\Sigma$  é uma esfera rotacional ou é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .

*Demonstração.* Como  $K \geq 0$  e  $\Sigma$  é completa, segue do Lema 4.9 que  $\Sigma$  é uma esfera topológica ou uma superfície parabólica não compacta.

Caso  $\Sigma$  é uma esfera topológica de curvatura média constante, concluímos pelo Teorema 3.9 que  $\Sigma$  é uma esfera rotacional. Assim, vamos supor que  $\Sigma$  seja parabólica e não compacta.

Se  $q \equiv 0$  em  $\Sigma$ , então pelo Teorema 4.10, como  $K \geq 0$ , obtemos que  $\Sigma$  é um plano vertical em  $\text{Nil}_3$  ou um cilindro vertical sobre um horociclo em  $\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  ou  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ . Desta forma, podemos supor que  $q$  não seja identicamente nula em  $\Sigma$ .

Pela equação de Gauss (E.2), temos

$$0 \leq K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2 \leq K_e + \tau^2 + |\kappa - 4\tau^2|,$$

o que implica que

$$H^2 - K_e \leq H^2 + \tau^2 + |\kappa - 4\tau^2|. \quad (4.12)$$

Usando a definição da diferencial de Abresch-Rosenberg e a desigualdade

$$|\xi_1 + \xi_2|^2 \leq 2(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

obtemos, por (C.4), (4.12) e pela Proposição A.7,

$$\begin{aligned} q &= \frac{4|Q|^2}{\lambda^2} = \frac{4|2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2|^2}{\lambda^2} \\ &\leq 8(H^2 + \tau^2) \frac{4|p|^2}{\lambda^2} + 2(\kappa - 4\tau^2)^2 \frac{4|A|^4}{\lambda^2} \\ &= 8(H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{2}(1 - v^2)^2 \\ &\leq 8(H^2 + \tau^2)(H^2 + \tau^2 + |\kappa - 4\tau^2|) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{2}, \end{aligned}$$

ou seja, a função  $q$ , assim como  $\log q$ , são funções limitadas superiormente. Como  $\Delta \log q = 4K \geq 0$ , pelo Lema 3.13, concluímos que  $\log q$  é uma função subharmônica limitada em uma superfície parabólica não compacta  $\Sigma$ . Como  $q$  não é identicamente nula e o valor  $-\infty$  é permitido em pontos isolados, concluímos pelo princípio do máximo que  $q$  é constante não nula. Portanto, segue do Teorema 4.12 que  $\Sigma$  é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .  $\square$

## 4.4 Curvatura Gaussiana não-positiva

Finalmente, classificaremos as superfícies completas de curvatura média constante em  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$  cuja curvatura Gaussiana  $K$  é sempre não-positiva, ou seja,  $K \leq 0$ , com a hipótese adicional de que  $H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0$ .

**Teorema 4.14.** Seja  $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$  uma  $H$ -superfície completa com  $K \leq 0$  e  $H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0$ . Então,  $\Sigma$  é um cilindro vertical completo sobre uma curva completa de curvatura geodésica  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .



*Demonstração.* Primeiramente, vamos considerar o caso  $\kappa - 4\tau^2 < 0$ .

Como  $K \leq 0$  por hipótese, segue da equação de Gauss (E.2) que

$$H^2 - K_e \geq H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2 \geq H^2 + \kappa - 3\tau^2.$$

Assim, pelo Lema 3.13, como  $\|\nabla v\|^2 \geq 0$ , temos

$$\frac{q}{\kappa - 4\tau^2} \leq \frac{4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)v^2}{4(\kappa - 4\tau^2)} (4(H^2 - K_e) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)),$$

isto é,

$$\begin{aligned} q &\geq (4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) \left( H^2 - K_e + \frac{\kappa - 4\tau^2}{4}(1 - v^2) \right) \\ &= (H^2 - K_e) (4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) \\ &\quad + (H^2 + \tau^2)(\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4}(1 - v^2)^2 \\ &\geq (H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2) (4(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2)) \\ &\quad + (H^2 + \tau^2)(\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{4}(1 - v^2)^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde utilizamos na última desigualdade que

$$\begin{aligned} 4H^2 + 4\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)(1 - v^2) &= 4H^2 + \kappa - (\kappa - 4\tau^2)v^2 \\ &\geq 4H^2 + \kappa \\ &= 4(H^2 + \tau^2) - |\kappa - 4\tau^2| \\ &\geq H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2| > 0, \end{aligned}$$

por hipótese. Agora, considerando  $a := H^2 + \tau^2$  e  $b := \kappa - 4\tau^2$ , defina a função real suave  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) := (a + bx^2) (4a + b(1 - x^2)) + ab(1 - x^2) + \frac{b^2}{4}(1 - x^2)^2.$$

Observe que, por (4.13), obtemos que  $q \geq f(v)$  em  $\Sigma$ . Além disso, como  $f'(x) = -bx(3bx^2 - 4a - b)$ , os pontos críticos para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pm \sqrt{\frac{4a + b}{3|b|}},$$

mas perceba que  $\frac{4a + b}{3|b|} > 1$ , pois

$$\begin{aligned} 4a + b - 3|b| &= 4H^2 + 4\tau^2 + \kappa - 4\tau^2 + 3(\kappa - 4\tau^2) \\ &= 4(H^2 + \kappa - 3\tau^2) \\ &= 4(H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2|) > 0. \end{aligned}$$

Desta forma, o único ponto crítico de  $f$  em  $[-1, 1]$  é  $x = 0$ . Denotando  $c := \min\{f(0), f(\pm 1)\}$ , onde

$$f(0) = \frac{(4a+b)^2}{4} > 0 \quad \text{e} \quad f(\pm 1) = 4a(a+b) > 0,$$

concluimos que

$$q \geq f(\mathbf{v}) \geq c > 0.$$

Além disso, segue do Lema 3.13 e (3.20) que  $\tilde{\mathbb{I}} := \sqrt{q}\mathbb{I}$  é uma métrica flat em  $\Sigma$ , já que

$$K(\tilde{\mathbb{I}}) = -\frac{\Delta \log(\sqrt{q}\lambda)}{2} = -\frac{\Delta \log \sqrt{q} + \Delta \log \lambda}{2} = -\frac{\Delta \log q}{4} - \frac{\Delta \log \lambda}{2} = -K(\mathbb{I}) + K(\mathbb{I}) = 0.$$

Ademais,  $\tilde{\mathbb{I}}$  é uma métrica completa já que o comprimento de qualquer curva divergente é infinito, pois  $\tilde{\mathbb{I}} \geq \sqrt{c}\mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}$  é completa. Assim, perceba que  $\log q$  é uma função superharmônica em  $(\Sigma, \tilde{\mathbb{I}})$ , pois, pela Proposição A.9, temos

$$\tilde{\Delta} \log q = \frac{4}{\lambda \sqrt{q}} (\log q)_{z\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \Delta \log q = \frac{4K(\mathbb{I})}{\sqrt{q}} \leq 0.$$

Pelo Lema 4.9, temos que  $(\Sigma, \tilde{\mathbb{I}})$  é uma superfície parabólica, já que não pode ser difeomorfa à esfera, pois  $K(\tilde{\mathbb{I}}) \equiv 0$ . Logo, como  $q$  é limitada inferiormente por uma constante positiva, segue do princípio do máximo que  $\log q$  é constante e, portanto,  $q$  é constante não nula. Desta forma, pelo Teorema 4.12,  $\Sigma$  é um cilindro vertical sobre uma curva completa de curvatura geodésica  $2H$  em  $\mathbb{M}^2(\kappa)$ .

Agora, consideremos o caso  $\kappa - 4\tau^2 > 0$ . Denotando  $w_1 := 2(H + i\tau)\frac{p}{\lambda}$  e  $w_2 := (\kappa - 4\tau^2)\frac{A^2}{\lambda}$ , temos pela definição da diferencial de Abresch-Rosenberg que  $q = 4|w_1 - w_2|^2$ .

Pela equação de Gauss, como  $K \leq 0$ , temos

$$H^2 - K_e \geq H^2 + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2 \geq H^2 + \tau^2,$$

já que  $\kappa - 4\tau^2 > 0$ . Desta forma, pela Proposição A.7 e por (C.4),

$$\begin{aligned} |w_1|^2 &= (H^2 + \tau^2) \frac{4|p|^2}{\lambda^2} = (H^2 + \tau^2)(H^2 - K_e) \geq (H^2 + \tau^2)^2, \\ |w_2|^2 &= (\kappa - 4\tau^2)^2 \frac{|A|^4}{\lambda^2} = \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{16} (1 - v^2)^2 \leq \left(\frac{\kappa - 4\tau^2}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Agora, usando a seguinte desigualdade

$$|\xi_1 + \xi_2|^2 \geq ||\xi_1| - |\xi_2||^2, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} q &= 4|w_1 - w_2|^2 \\ &\geq 4||w_1| - |w_2||^2 \\ &\geq 4 \left| H^2 + \tau^2 - \frac{\kappa - 4\tau^2}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} |4H^2 - \kappa + 8\tau^2|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} |H^2 + \tau^2 - |\kappa - 4\tau^2||^2 > 0, \end{aligned}$$

ou seja, a função  $q$  é limitada inferiormente por uma constante positiva. Desta forma, usando os mesmos argumentos do caso anterior, concluimos que  $q$  é constante não nula e o resultado segue do Teorema 4.12.  $\square$



## REFERÊNCIAS

---

ABRESCH, U.; ROSENBERG, H. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . **Acta Math.**, v. 193, n. 2, p. 141–174, 2004. ISSN 0001-5962,1871-2509. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02392562>>. Citado na página 45.

\_\_\_\_\_. Generalized Hopf differentials. **Mat. Contemp.**, v. 28, p. 1–28, 2005. ISSN 0103-9059. Citado na página 45.

AHLFORS, L.; SARIO, L. **Riemann Surfaces: (PMS-26)**. Princeton University Press, 2015. (Princeton Mathematical Series). ISBN 9781400874538. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=qgTWCgAAQBAJ>>. Citado nas páginas 54 e 55.

ALEXANDRINO, M. M.; BETTIOL, R. G. **Lie groups and geometric aspects of isometric actions**. Springer, Cham, 2015. x+213 p. ISBN 978-3-319-16612-4; 978-3-319-16613-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-319-16613-1>>. Citado na página 21.

BOWDITCH, B. H. A course on geometric group theory. **School of Mathematics, University of Southampton, Highfield, Southampton SO17 1BJ, Great Britain**, 2005. Citado na página 54.

CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. [S.l.]: IMPA, 1988. ix+335 p. (Projeto Euclides.). ISBN 978-85-244-0036-0. Citado nas páginas 22, 25 e 29.

\_\_\_\_\_. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. [S.l.]: IMPA, 2005. ISBN 8585818263. Citado na página 76.

CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry**. [S.l.]: Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. v. 115. xiv+362 p. (Pure and Applied Mathematics, v. 115). Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk. ISBN 0-12-170640-0. Citado na página 77.

DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. **Submanifold theory**. Springer, New York, 2019. xx+628 p. (Universitext). Beyond an introduction. ISBN 978-1-4939-9642-1; 978-1-4939-9644-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9644-5>>. Citado na página 37.

DANIEL, B. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. **Comment. Math. Helv.**, v. 82, n. 1, p. 87–131, 2007. ISSN 0010-2571. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/CMH/86>>. Citado nas páginas 20, 28, 33, 35, 36, 37 e 41.

\_\_\_\_\_. Isometric immersions into  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$  and applications to minimal surfaces. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 361, n. 12, p. 6255–6282, 2009. ISSN 0002-9947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-09-04555-3>>. Citado na página 41.

ESPINAR, J. M.; OLIVEIRA, I. S. de. Locally convex surfaces immersed in a Killing submersion. **Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)**, v. 44, n. 1, p. 155–171, 2013. ISSN 1678-7544. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00574-013-0007-9>>. Citado nas páginas 29 e 51.

ESPINAR, J. M.; ROSENBERG, H. Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces. **Comment. Math. Helv.**, v. 86, n. 3, p. 659–674, 2011. ISSN 0010-2571. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/CMH/237>>. Citado nas páginas 19, 20, 45, 51 e 60.

FERNÁNDEZ, I.; MIRA, P. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. **Differential Geom. Appl.**, v. 25, n. 3, p. 281–289, 2007. ISSN 0926-2245. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2006.11.006>>. Citado nas páginas 20, 37, 41 e 45.

GÁLVEZ, J. A.; MARTÍNEZ, A.; TERUEL, J. L. Complete surfaces with non-positive extrinsic curvature in  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^3$ . **J. Math. Anal. Appl.**, v. 430, n. 2, p. 1058–1064, 2015. ISSN 0022-247X,1096-0813. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.049>>. Citado na página 18.

HARTMAN, P. On complete hypersurfaces of nonnegative sectional curvatures and constant  $m$ th mean curvature. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 245, p. 363–374, 1978. ISSN 0002-9947,1088-6850. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1998872>>. Citado na página 19.

HICKS, N. J. **Notes on differential geometry**. [S.l.]: D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965. vi+183 p. (Van Nostrand Mathematical Studies, No. 3). Citado na página 75.

HOFFMAN, D. A. Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature. **J. Differential Geometry**, v. 8, p. 161–176, 1973. ISSN 0022-040X,1945-743X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214431490>>. Citado na página 19.

KLOTZ, T.; OSSERMAN, R. Complete surfaces in  $E^3$  with constant mean curvature. **Comment. Math. Helv.**, v. 41, p. 313–318, 1966/67. ISSN 0010-2571. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02566886>>. Citado nas páginas 18 e 55.

KOEBE, P. Ueber die uniformisierung beliebiger analytischer kurven. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1907, p. 191–210, 1907. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/58678>>. Citado na página 23.

MANZANO, J. M. **Superfícies de curvatura media constante en espacios homogéneos**. Tese (Doutorado) — Universidad de Granada, Granada, jun. 2012. Citado nas páginas 31, 32, 33 e 35.

MANZANO, J. M. On the classification of Killing submersions and their isometries. **Pacific J. Math.**, v. 270, n. 2, p. 367–392, 2014. ISSN 0030-8730. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140/pjm.2014.270.367>>. Citado nas páginas 23 e 27.

MEEKS III, W. H.; PÉREZ, J. The classical theory of minimal surfaces. **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, v. 48, n. 3, p. 325–407, 2011. ISSN 0273-0979,1088-9485. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-2011-01334-9>>. Citado na página 17.

POINCARÉ, H. Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. **Acta Math.**, v. 31, n. 1, p. 1–63, 1908. ISSN 0001-5962,1871-2509. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02415442>>. Citado na página 23.

SANTOS, M. R. B. dos. **A Equação de Codazzi em Superfícies**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2011. Citado na página 71.

SCHLENKER, J.-M. Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique. **Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)**, v. 34, n. 1, p. 79–130, 2001. ISSN 0012-9593. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0012-9593\(00\)01057-0](https://doi.org/10.1016/S0012-9593(00)01057-0)>. Citado na página 18.

SCOTT, P. The geometries of 3-manifolds. **Bull. London Math. Soc.**, v. 15, n. 5, p. 401–487, 1983. ISSN 0024-6093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/blms/15.5.401>>. Citado nas páginas 22 e 31.

SMYTH, B.; XAVIER, F. Efimov's theorem in dimension greater than two. **Invent. Math.**, v. 90, n. 3, p. 443–450, 1987. ISSN 0020-9910,1432-1297. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01389174>>. Citado nas páginas 18 e 19.

THURSTON, W. P. **Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.** [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. v. 35. x+311 p. (Princeton Mathematical Series, v. 35). Edited by Silvio Levy. ISBN 0-691-08304-5. Citado na página 23.

TORRALBO, F. **Superficies de curvatura media paralela en  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  y superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos.** Tese (Doutorado) — Universidad de Granada, Granada, jan. 2010. Citado na página 33.

TRIBUZY, R. d. A. A characterization of tori with constant mean curvature in space form. **Bol. Soc. Brasil. Mat.**, v. 11, n. 2, p. 259–274, 1980. ISSN 0100-3569. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02584641>>. Citado na página 19.





## PAR FUNDAMENTAL E A DIFERENCIAL DE HOPF

O intuito deste apêndice é apresentar a definição de par fundamental em uma superfície bidimensional, culminando nos conceitos de sistema de coordenadas conforme e diferencial de Hopf. A principal referência é (SANTOS, 2011).

Seja  $\Sigma$  uma variedade diferenciável bidimensional orientável. Consideremos um sistema de coordenadas locais  $(x, U)$  em um aberto  $U \subset \Sigma$ , onde  $x = (x_1, x_2)$ . Denotemos por  $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\}$  a base de campos coordenados e por  $\{dx_1, dx_2\}$  sua base de 1-formas duais associada.

Para cada  $p \in U$ , as aplicações bilineares  $\{dx_i(p) \otimes dx_j(p) : i, j = 1, 2\}$  formam uma base das aplicações bilineares  $\{\alpha : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Desta forma, se  $T$  é uma forma bilinear em  $\Sigma$ , podemos escrever

$$T|_U = \sum_{i,j=1}^2 T_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

onde  $T_{ij} = T(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) \in C^\infty(U)$ . Em particular, se  $T$  é simétrica, isto é,  $T(X, Y) = T(Y, X)$ , para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , então podemos escrever

$$T|_U = E dx_1^2 + F dx_1 dx_2 + G dx_2^2,$$

em que  $E = T_{11}$ ,  $F = T_{12} + T_{21}$  e  $G = T_{22}$ .

**Definição A.1.** Um *par fundamental* em  $\Sigma$  é um par  $(I, II)$  de formas bilineares simétricas reais em  $\Sigma$  tal que  $I$  é uma métrica Riemanniana.

Associamos ao par fundamental  $(I, II)$  o *operador de forma*  $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$  dado por

$$II(X, Y) = I(SX, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

**Definição A.2.** O *plano tangente complexificado* a  $\Sigma$  em  $p$  é definido por

$$T_p^{\mathbb{C}}\Sigma := \{X_p + iY_p : X_p, Y_p \in T_p\Sigma\}.$$

Observe que se  $T$  é uma forma bilinear simétrica em  $\Sigma$ , podemos estender  $\mathbb{C}$ -bilinearmente  $T_p$ , para cada  $p \in \Sigma$ , a uma aplicação  $\mathbb{C}$ -bilinear simétrica  $T_p^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \times T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ .

Em  $U$ , denotando  $z = x_1 + ix_2$ , observe que os campos

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}) \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}) \quad (\text{A.1})$$

formam uma base para  $T_p^{\mathbb{C}}\Sigma$  sobre  $\mathbb{C}$ , já que  $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\}$  é base para  $T_p\Sigma$  sobre  $\mathbb{R}$ . Além disso, note que as 1-formas duais associadas a  $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$  são  $dz = dx_1 + idx_2$  e  $d\bar{z} = dx_1 - idx_2$ .

Para cada  $p \in U$ , o conjunto

$$\{dz(p) \otimes dz(p), dz(p) \otimes d\bar{z}(p), d\bar{z}(p) \otimes dz(p), d\bar{z}(p) \otimes d\bar{z}(p)\}$$

forma uma base das aplicações bilineares  $\{\alpha^{\mathbb{C}} : T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \times T_p^{\mathbb{C}}\Sigma \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Assim, em particular, se  $T$  é forma bilinear simétrica em  $\Sigma$ , podemos escrever

$$T^{\mathbb{C}}|_U = Pd\bar{z}^2 + \lambda|dz|^2 + Qdz^2,$$

em que

$$\begin{aligned} P &= T^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{4}T^{\mathbb{C}}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}, \partial_{x_1} - i\partial_{x_2}) = \frac{1}{4}(E - G - iF), \\ \lambda &= 2T^{\mathbb{C}}(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}T^{\mathbb{C}}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}, \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}) = \frac{1}{2}(E + G), \\ Q &= T^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = \frac{1}{4}T^{\mathbb{C}}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}, \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}) = \frac{1}{4}(E - G + iF) = \bar{P}. \end{aligned}$$

**Definição A.3.** Ao par fundamental  $(I, II)$ , definimos

- As *curvaturas principais*  $k_1$  e  $k_2$  como os autovalores do operador de forma associado  $S$ ;
- A *curvatura média*  $H(I, II)$  como metade do traço de  $S$ , isto é,  $H(I, II) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ;
- A *curvatura de Gauss-Kronecker*  $K(I, II)$  como o determinante de  $S$ , isto é,  $K(I, II) = k_1k_2$ .

**Observação A.4.** Quando consideramos uma imersão isométrica  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$ , onde  $\mathbb{E}$  é uma variedade Riemanniana tridimensional orientada, a segunda forma fundamental aplicada a  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  é dada por

$$\Pi(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle,$$

onde  $N$  é um campo unitário normal à  $\Sigma$ . Neste caso, a curvatura de Gauss-Kronecker  $K(I, II)$  também é chamada de *curvatura extrínseca*  $K_e$ .

No sistema de coordenadas locais  $(x, U)$  em  $\Sigma$ , com parâmetros reais  $(x_1, x_2)$ , considere as expressões locais do par fundamental  $(I, II)$ :

$$\begin{aligned} I &= Edx_1^2 + Fdx_1dx_2 + Gdx_2^2, \\ II &= edx_1^2 + fdx_1dx_2 + gdx_2^2. \end{aligned}$$

Além disso, no sistema de coordenadas complexificado  $(z, U)$ , com parâmetro  $z = x_1 + ix_2$ , considere as seguintes expressões locais de  $(I, II)$ :

$$\begin{aligned} I &= Pdz^2 + \lambda|dz|^2 + \bar{P}d\bar{z}^2, \\ II &= pdz^2 + \rho|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

**Proposição A.5.** As curvaturas média e de Gauss-Kronecker de  $\Sigma$  são expressas localmente em termos dos coeficientes do par fundamental  $(I, II)$  como

$$H(I, II) = \frac{2Eg + 2Ge - Ff}{4EG - F^2}, \quad K(I, II) = \frac{4eg - f^2}{4EG - F^2},$$

e, em termos dos coeficientes das complexificações, como

$$H(I, II) = \frac{2P\bar{p} + 2\bar{P}p - \lambda\rho}{4|P|^2 - \lambda^2}, \quad (A.2)$$

$$K(I, II) = \frac{4|p|^2 - \rho^2}{4|P|^2 - \lambda^2}. \quad (A.3)$$

*Demonstração.* Seja  $[a_{ij}]_{i,j=1,2}$  a matriz do operador de forma  $S$  com respeito à base formada pelos campos coordenados  $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\}$ . Então

$$\begin{pmatrix} e & \frac{f}{2} \\ \frac{f}{2} & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \frac{F}{2} \\ \frac{F}{2} & G \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} e &= II(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) = I(S\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) = a_{11}I(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) + a_{12}I(\partial_{x_2}, \partial_{x_1}) = a_{11}E + a_{12}\frac{F}{2}, \\ \frac{f}{2} &= II(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) = I(S\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) = a_{11}I(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) + a_{12}I(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = a_{11}\frac{F}{2} + a_{12}G, \\ \frac{f}{2} &= II(\partial_{x_2}, \partial_{x_1}) = I(S\partial_{x_2}, \partial_{x_1}) = a_{21}I(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) + a_{22}I(\partial_{x_2}, \partial_{x_1}) = a_{21}E + a_{22}\frac{F}{2}, \\ g &= II(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = I(S\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = a_{21}I(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) + a_{22}I(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = a_{21}\frac{F}{2} + a_{22}G. \end{aligned}$$

Como  $I$  é positiva definida, por ser métrica Riemanniana, podemos concluir que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \frac{f}{2} \\ \frac{f}{2} & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \frac{F}{2} \\ \frac{F}{2} & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} H(I, II) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(a_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{4Eg + 4Ge - 2Ff}{4EG - F^2} \right) = \frac{2Eg + 2Ge - Ff}{4EG - F^2}, \\ K(I, II) &= \det(a_{ij}) = \det \begin{pmatrix} e & \frac{f}{2} \\ \frac{f}{2} & g \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} E & \frac{F}{2} \\ \frac{F}{2} & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{eg - f^2/4}{EG - F^2/4} = \frac{4eg - f^2}{4EG - F^2}. \end{aligned}$$

Um cálculo análogo, considerando  $[a_{ij}]_{i,j=1,2}$  como a matriz do operador de forma  $S$  com respeito à base formada por  $\partial_z$  e  $\partial_{\bar{z}}$ , resulta nas expressões locais de  $H(I, II)$  e  $K(I, II)$  com os coeficientes das complexificações.  $\square$

Considere  $\nabla$  a extensão  $\mathbb{C}$ -bilinear da conexão de Levi-Civita relacionada à métrica I. Os símbolos de Christoffel complexos  $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$  são definidos por

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_z}\partial_z &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2\partial_{\bar{z}}, \\ \nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} &= \mathbb{C}\Gamma_{12}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{12}^2\partial_{\bar{z}} = \mathbb{C}\Gamma_{21}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{21}^2\partial_{\bar{z}} = \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z, \\ \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_{\bar{z}} &= \mathbb{C}\Gamma_{22}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2\partial_{\bar{z}}.\end{aligned}$$

Vamos exprimir  $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$  em termos dos coeficientes de I com respeito a  $(z, U)$ . Pela compatibilidade com a métrica, observe que

$$\partial_z P = \partial_z I(\partial_z, \partial_z) = 2I(\nabla_{\partial_z}\partial_z, \partial_z) = 2I(\mathbb{C}\Gamma_{11}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2\partial_{\bar{z}}, \partial_z) = 2\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 I(\partial_z, \partial_z) + 2\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 I(\partial_{\bar{z}}, \partial_z),$$

isto é,

$$P_z = 2\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 P + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 \lambda. \quad (\text{A.4})$$

Analogamente,

$$2I(\nabla_{\partial_z}\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = 2\partial_z I(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) - 2I(\partial_z, \nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}}) = \partial_z \lambda - 2I(\partial_z, \nabla_{\partial_{\bar{z}}}\partial_z) = \lambda_z - \partial_{\bar{z}} I(\partial_z, \partial_z),$$

ou seja,

$$\lambda_z - P_{\bar{z}} = 2I(\mathbb{C}\Gamma_{11}^1\partial_z + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = 2\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 I(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) + 2\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 I(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 \lambda + 2\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 \bar{P}. \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando (A.4) por  $2\bar{P}$ , (A.5) por  $\lambda$  e, em seguida, subtraindo-as, obtemos

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \frac{2\bar{P}P_z - \lambda\lambda_z + \lambda P_{\bar{z}}}{4|P|^2 - \lambda^2}. \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando (A.4) por  $\lambda$ , (A.5) por  $2P$  e, em seguida, subtraindo-as, obtemos

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = -\frac{2PP_{\bar{z}} - 2P\lambda_z + \lambda P_z}{4|P|^2 - \lambda^2}. \quad (\text{A.7})$$

De forma análoga, obtemos as seguintes expressões:

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 = \frac{2\bar{P}P_{\bar{z}} - \lambda\bar{P}_z}{4|P|^2 - \lambda^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^2 = \frac{2PP_{\bar{z}} - \lambda P_z}{4|P|^2 - \lambda^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{22}^1 = -\frac{2\bar{P}\bar{P}_z - 2\bar{P}\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{P}_{\bar{z}}}{4|P|^2 - \lambda^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{22}^2 = \frac{2PP_{\bar{z}} - \lambda\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{P}_{\bar{z}}}{4|P|^2 - \lambda^2}. \quad (\text{A.11})$$

**Definição A.6.** Um sistema de coordenadas  $(x, U)$ , com  $x = (x_1, x_2)$ , é dito *isotérmico* ou *conforme* para uma métrica Riemanniana  $I = E dx_1^2 + F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$  se  $E = G > 0$  e  $F = 0$ .

Equivalentemente, o sistema é conforme se a complexificação de I expressa em termos de  $z = x_1 + ix_2$  por  $I = P dz^2 + \lambda |dz|^2 + \bar{P} d\bar{z}^2$  satisfaz  $P = 0$ . Neste caso, dizemos que  $z$  é um *parâmetro conforme*.

Sabemos que para qualquer métrica Riemanniana em  $\Sigma$ , existe localmente um sistema de coordenadas conforme em  $\Sigma$ , veja (HICKS, 1965). Desta forma, toda métrica Riemanniana em uma superfície bidimensional orientável  $\Sigma$  induz uma estrutura de superfície de Riemann.

A seguir, consideremos  $(I, II)$  um par fundamental em  $\Sigma$  e  $z$  um parâmetro conforme local para a métrica Riemanniana  $I$ .

**Proposição A.7.** O par fundamental  $(I, II)$  em  $\Sigma$  se exprime como

$$\begin{aligned} I &= \lambda |dz|^2, \\ II &= pdz^2 + \lambda H |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Além disso, valem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} K(I, II) &= \det S = H^2 - \frac{4|p|^2}{\lambda^2}, \\ S(\partial_z) &= H\partial_z + \frac{2p}{\lambda}\partial_{\bar{z}}, \\ \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_z}{\lambda}, \quad \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} \quad \text{e} \quad \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 = \mathbb{C}\Gamma_{12}^2 = \mathbb{C}\Gamma_{22}^1 = 0. \end{aligned} \tag{A.12}$$

*Demonstração.* Por definição, como  $z$  é parâmetro conforme local com respeito a  $I$ , temos que  $P = 0$  e, diretamente, concluímos a expressão de  $I$ . Por (A.2), observe que

$$H(I, II) = \frac{2P\bar{p} + 2\bar{P}p - \lambda\rho}{4|P|^2 - \lambda^2} = \frac{\rho}{\lambda} \implies \rho = \lambda H,$$

donde concluímos a expressão de  $II$ . Por (A.3),

$$K(I, II) = \frac{4|p|^2 - \rho^2}{4|P|^2 - \lambda^2} = \frac{-4|p|^2 + \lambda^2 H^2}{\lambda^2} = H^2 - \frac{4|p|^2}{\lambda^2}.$$

Sejam  $a, b \in C^\infty(\Sigma)$  tais que  $S(\partial_z) = a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}$ . Note que

$$\begin{aligned} p &= II(\partial_z, \partial_z) = I(S(\partial_z), \partial_z) = I(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}, \partial_z) = aI(\partial_z, \partial_z) + bI(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = \frac{b\lambda}{2}, \\ \lambda H &= 2II(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = 2I(S(\partial_z), \partial_{\bar{z}}) = 2I(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = 2aI(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) + 2bI(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) = a\lambda, \end{aligned}$$

ou seja,  $S(\partial_z) = H\partial_z + \frac{2p}{\lambda}\partial_{\bar{z}}$ . Substituindo  $P = 0$  diretamente nas expressões encontradas em (A.6)-(A.11), resultamos nas expressões dos símbolos de Christoffel complexos, concluindo a demonstração.  $\square$

**Proposição A.8.** A curvatura Gaussiana  $K$  de  $\Sigma$  é dada por

$$K = -\frac{2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda}.$$

*Demonstração.* De acordo com (CARMO, 2005, p. 283), a curvatura Gaussiana  $K$  é expressa em termos de um sistema de coordenadas locais com parâmetros reais  $x = (x_1, x_2)$  por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_{x_2}}{\sqrt{EG}} \right)_{x_2} + \left( \frac{G_{x_1}}{\sqrt{EG}} \right)_{x_1} \right\}.$$

Observe que  $\lambda = E = G$  e, por (A.1), os campos coordenados reais são dados por

$$\partial_{x_1} = \partial_z + \partial_{\bar{z}} \quad \text{e} \quad \partial_{x_2} = i\partial_z - i\partial_{\bar{z}}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda} \left\{ i\partial_z \left( \frac{i\lambda_z - i\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} \right) - i\partial_{\bar{z}} \left( \frac{i\lambda_z - i\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} \right) + \partial_z \left( \frac{\lambda_z + \lambda_{\bar{z}}}{\lambda} \right) + \partial_{\bar{z}} \left( \frac{\lambda_z + \lambda_{\bar{z}}}{\lambda} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \left\{ -\left( \frac{\lambda\lambda_{zz} - \lambda\lambda_{z\bar{z}} - \lambda_z^2 + \lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2} \right) + \left( \frac{\lambda\lambda_{z\bar{z}} - \lambda\lambda_{\bar{z}\bar{z}} - \lambda_z\lambda_{\bar{z}} + \lambda_{\bar{z}}^2}{\lambda^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\lambda\lambda_{zz} + \lambda\lambda_{z\bar{z}} - \lambda_z^2 - \lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2} \right) + \left( \frac{\lambda\lambda_{z\bar{z}} + \lambda\lambda_{\bar{z}\bar{z}} - \lambda_{\bar{z}}\lambda_z - \lambda_{\bar{z}}^2}{\lambda^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \left( \frac{4\lambda_{z\bar{z}} - 4\lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{\lambda_{z\bar{z}} - \lambda_z\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2} \right) \\ &= -\frac{2(\log \lambda)_{z\bar{z}}}{\lambda}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Dado um campo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , recordemos que o *divergente de  $X$* , denotado por  $\operatorname{div}(X) \in C^\infty(\Sigma)$ , é definido por

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{Tr}(\xi \mapsto \nabla_\xi X) = \operatorname{I}(\nabla_{\partial_z} X, \partial_z) + \operatorname{I}(\nabla_{\partial_{\bar{z}}} X, \partial_{\bar{z}}).$$

Se  $g \in C^\infty(\Sigma)$  é uma função suave, recordemos que o campo  $\nabla g \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , chamado *gradiente de  $g$* , é definido por

$$\operatorname{I}(\nabla g, X) = X(g),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Já o *laplaciano de  $g$* , denotado por  $\Delta g \in C^\infty(\Sigma)$ , é definido como o divergente de  $\nabla g$ , ou seja,

$$\Delta g = \operatorname{div}(\nabla g).$$

**Proposição A.9.** O gradiente e o laplaciano de uma função suave  $f \in C^\infty(\Sigma)$  são expressos em termos do parâmetro conforme local  $z$  por

$$\nabla f = \frac{2}{\lambda} (f_{\bar{z}}\partial_z + f_z\partial_{\bar{z}}) \quad \text{e} \quad \Delta f = \frac{4}{\lambda} f_{z\bar{z}}.$$

*Demonstração.* A matriz dos coeficientes da métrica Riemanniana I em termos do parâmetro conforme  $z$  é dada por

$$G = (g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} I(\partial_z, \partial_z) & I(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) \\ I(\partial_{\bar{z}}, \partial_z) & I(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

e sua inversa é

$$G^{-1} = (g^{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\lambda} \\ \frac{2}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

De acordo com (CHAVEL, 1984), as expressões do gradiente e laplaciano de  $f \in C^\infty(\Sigma)$  em termos da métrica I, são dados por

$$\nabla f = \sum_{k,l=1}^2 (g^{kl} \partial_l f) \partial_k$$

e

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \sum_{j,k=1}^2 \partial_j (g^{jk} \sqrt{\det(G)} \partial_k f),$$

onde identificamos  $\{\partial_1, \partial_2\} = \{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \nabla f &= g^{11} \partial_z f \partial_z + g^{12} \partial_{\bar{z}} f \partial_z + g^{21} \partial_z f \partial_{\bar{z}} + g^{22} \partial_{\bar{z}} f \partial_{\bar{z}} \\ &= \frac{2}{\lambda} (f_{\bar{z}} \partial_z + f_z \partial_{\bar{z}}). \end{aligned}$$

Além disso, como  $\sqrt{\det(G)} = \sqrt{-\frac{\lambda^2}{4}} = \frac{\lambda}{2}i$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{2}{\lambda i} \left( \partial_z \left( g^{11} \frac{\lambda}{2} i \partial_z f \right) + \partial_z \left( g^{12} \frac{\lambda}{2} i \partial_{\bar{z}} f \right) + \partial_{\bar{z}} \left( g^{21} \frac{\lambda}{2} i \partial_z f \right) + \partial_{\bar{z}} \left( g^{22} \frac{\lambda}{2} i \partial_{\bar{z}} f \right) \right) \\ &= \frac{2}{\lambda i} (\partial_z (i \partial_{\bar{z}} f) + \partial_{\bar{z}} (i \partial_z f)) \\ &= \frac{2}{\lambda i} (i f_{\bar{z}z} + i f_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{4}{\lambda} f_{z\bar{z}}, \end{aligned}$$

finalizando a demonstração. □

**Definição A.10.** Um ponto  $p \in \Sigma$  é dito ser *umbílico* de um par fundamental (I, II) se existe  $\alpha_p \in \mathbb{R}$  tal que  $\Pi = \alpha_p I$  em  $p$ , isto é, o operador de forma S satisfaz  $S = \alpha_p \text{Id}$  em  $p$ .

Perceba que, de forma equivalente, um ponto  $p \in \Sigma$  é umbílico se, e somente se, as curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  coincidem em  $p$ , ou ainda,  $H(I, \Pi)^2 - K(I, \Pi) = 0$  em  $p$ .

**Definição A.11.** Considere  $\Pi = pdz^2 + \lambda H|dz|^2 + \bar{p}d\bar{z}^2$  a representação de  $\Pi$  com respeito a um parâmetro conforme  $z$  de um par fundamental (I, II). A *diferencial de Hopf* de (I, II) é a forma quadrática  $pdz^2$ .

A diferencial de Hopf está inteiramente relacionada com os pontos umbílicos de um par fundamental, de acordo com a proposição a seguir.

**Proposição A.12.** Sejam  $(I, II)$  um par fundamental em  $\Sigma$  e  $z$  um parâmetro conforme local em  $\Sigma$ . Então  $q \in \Sigma$  é um ponto umbílico de  $(I, II)$  se, e somente se, a diferencial de Hopf se anula em  $q$ .

*Demonstração.* Como

$$\begin{cases} I = \lambda |dz|^2 \\ II = pdz^2 + \lambda H |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2 \end{cases},$$

observe que existe  $\alpha_q \in \mathbb{R}$  ( $\alpha_q = H$ ) tal que  $II = \alpha_q I$  em  $q$  se, e somente se,  $p(q) = 0$ .  $\square$



