

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Superfícies mínimas e a conjectura de Lawson

Mario Alexis Lamas Espinoza

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Mario Alexis Lamas Espinoza

Superfícies mínimas e a conjectura de Lawson

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fernando Manfio

USP – São Carlos
Dezembro de 2020

Mario Alexis Lamas Espinoza

Minimal surfaces and the Lawson conjecture

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fernando Manfio

USP – São Carlos
December 2020

*Este trabalho é dedicado à minha mãe Maríá e a meu irmão Marcelo. Eles são a minha
motivação para perseverar na minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Meu agradecimento vai para:

- Minha mãe María, por ser a pessoa que procura motivar-me sempre.
- O professor Fernando Manfio, por ser o meu orientador no desenvolvimento de esta dissertação.
- Meus amigos em São Carlos, por fazer a minha estância em São Carlos seja entretenida.
- À USP, por oferecer os recursos para trabalhar.
- Juan Fuentes y Elvis Torres, por aconselhar-me de vir aqui a fazer um mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço o seu apoio financeiro.

“Maybe we were not meant for paradise. Maybe we were meant to fight our way through. Struggle, claw our way up, scratch for every inch of the way. Maybe we can not stroll to the music of the lute, we must march to the sound of drums.”

(Captain Kirk at Omicron Ceti III)

RESUMO

LAMAS ESPINOZA, M. A. **Superfícies mínimas e a conjectura de Lawson**. 2020. 68 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Em 1970, Blaine Lawson ([LAWSON, 1970b](#)) conjecturou que, a menos de isometrias da esfera \mathbb{S}^3 , o toro de Clifford é a única superfície mínima, mergulhada e de genus 1 em \mathbb{S}^3 . Neste trabalho apresentaremos a demonstração da conjectura de Lawson obtida em 2013 por Simon Brendle ([BRENDLE, 2013a](#)).

Palavras-chave: Superfícies mínimas, Conjectura de Lawson, Toro de Clifford.

ABSTRACT

LAMAS ESPINOZA, M. A. **Minimal surfaces and the Lawson conjecture**. 2020. 68 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

In 1970, Blaine Lawson conjectured that the Clifford torus is the only embedded minimal surface in \mathbb{S}^3 of genus 1, up to rigid motions in \mathbb{S}^3 . In this work we present the proof of this conjecture obtained in 2013 by Simon Brendle ([BRENDLE, 2013a](#)).

Keywords: Minimal surfaces, Lawson conjecture, Clifford torus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Catenóide. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>>). Enlace: <<https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/Catenoid/web/index.html>> 30
- Figura 2 – Helicóide. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>>). Enlace: <<https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/Helicoid/web/index.html>> 31
- Figura 3 – Superfície de Scherk. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>>). Enlace: <<https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/SinglyScherk/web/index.html>> 33
- Figura 4 – Superfície de Enneper. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>>). Enlace: <<https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/Enneper/web/index.html>> 38

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathfrak{X}(M)$ — Espaço dos campos vetoriais diferenciais em M

$\mathfrak{X}(M)^\perp$ — Espaço dos campos vetoriais diferenciais normais a M

$\mathfrak{X}(\lambda)$ — Espaço dos campos vetoriais diferenciais ao longo do caminho λ

(∂_i) — Referencial local coordenado

\Re — Parte real de uma função o numero complexo

\Im — Parte imaginaria de uma função o numero complexo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	SUPERFÍCIES MÍNIMAS	23
2.1	Subvariedades em formas espaciais	23
2.2	Superfícies mínimas em \mathbb{R}^3	26
2.3	A fórmula de representação de Weierstrass	33
2.4	Superfícies mínimas em \mathbb{S}^3	41
3	A CONJECTURA DE LAWSON	45
3.1	Introdução	45
3.2	Alguns resultados técnicos	46
3.3	Prova do Teorema 1.1	54
	REFERÊNCIAS	67

INTRODUÇÃO

Superfícies mínimas constituem hoje um dos objetos de estudo mais importantes em Geometria Diferencial. De particular interesse, são as superfícies mínimas em formas espaciais, isto é, variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas e com curvatura seccional constante, como o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 e a esfera \mathbb{S}^3 . O caso de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 é um assunto clássico que tem despertado a atenção de várias gerações de geômetras, desde o problema inicial proposto por Lagrange até os dias atuais. Nesta dissertação daremos ênfase ao estudo de superfícies mínimas na esfera \mathbb{S}^3 , identificando-a com a esfera unitária em \mathbb{R}^4 , i.e.,

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Ao contrário do que ocorre em \mathbb{R}^3 , de que não existem superfícies mínimas fechadas, existem exemplos interessantes desse fenômeno na esfera \mathbb{S}^3 . Um exemplo simples de superfície mínima fechada em \mathbb{S}^3 é o *equador*

$$M = \{x \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}.$$

Neste caso, as curvaturas principais são ambas iguais a zero. Além disso, o equador tem curvatura Gaussiana constante igual a 1. Assim, munido da métrica induzida, M é isométrica à esfera usual \mathbb{S}^2 .

Outro exemplo de superfície mínima em \mathbb{S}^3 é o *toro de Clifford*, definido por

$$M = \{x \in \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1/2\}.$$

Neste caso, as curvaturas principais para qualquer ponto $p \in M$ são iguais a 1 e -1 , resultando em $H(p) = 0$, onde $H(p)$ é a curvatura média no ponto $p \in M$. Além disso, a curvatura Gaussiana é identicamente nula e M , munido da métrica induzida, é isométrica ao toro flat $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Um problema clássico nessa área é construir exemplos de superfícies mínimas mergulhadas, i.e., superfícies sem auto-interseções. Durante um longo tempo, o equador e o toro de Clifford foram os únicos exemplos conhecidos de superfícies mínimas mergulhadas em \mathbb{S}^3 . No entanto, no final da década de 1960, Lawson (LAWSON, 1970a) descobriu uma família infinita de superfícies mínimas mergulhadas em \mathbb{S}^3 de “genus” relativamente grande. Uma superfície que é a soma conexa de n toros ou n planos projetivos diz-se que é de *genus* n , enquanto uma esfera é de *genus* 0.

Teorema 1.1. (LAWSON, 1970a). Dado um par de inteiros positivos n e k , existe uma superfície mínima mergulhada em \mathbb{S}^3 de genus nk . Em particular, existe pelo menos uma superfície mínima mergulhada em \mathbb{S}^3 de qualquer genus g . Se g não for primo, o mergulho não é único.

Um problema natural, relacionado à existência de tais superfícies, é a questão da unicidade. Em 1966, Almgren (ALMGREN, 1966) provou que, a menos de isometrias de \mathbb{S}^3 , o equador é a única superfície mínima imersa em \mathbb{S}^3 de genus 0. Em 1970, Blaine Lawson (LAWSON, 1970b) conjecturou uma propriedade similar de unicidade para toros mínimos na esfera \mathbb{S}^3 . Mais precisamente,

Conjectura 1.1. (LAWSON, 1970b). A menos de isometrias de \mathbb{S}^3 , o toro de Clifford é a única superfície mínima mergulhada em \mathbb{S}^3 de genus 1.

A conjectura de Lawson é falsa se permitirmos que a superfície tenha auto-interseções (cf. (LAWSON, 1969)). Em 2012, Simon Brendle deu uma resposta positiva para esta conjectura. A prova de Brendle, apresentada em (BRENDLE, 2013a), envolve uma aplicação do princípio do máximo a uma função que depende de um par de pontos. Essa técnica foi introduzida por Huisken (HUISKEN, 1998) em seu trabalho que aborda o fluxo de curvas mergulhadas no plano.

Nesta dissertação apresentamos a demonstração da conjectura de Lawson seguindo o trabalho original de Brendle (BRENDLE, 2013a). O texto está dividido em dois capítulos, que passaremos a descrever.

No Capítulo 2 apresentamos alguns fatos básicos da teoria de superfícies mínimas no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e na esfera \mathbb{S}^3 . Iniciamos o capítulo lembrando as equações fundamentais de uma imersão isométrica, dando destaque para a equação de Gauss quando o espaço ambiente é uma forma espacial tridimensional. Nas seções seguintes apresentamos alguns resultados básicos da teoria de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , dando ênfase para a representação de Weierstrass. Finalizamos o capítulo com noções básicas de superfícies mínimas em \mathbb{S}^3 , onde damos enfoque no toro de Clifford.

O Capítulo 3 será dedicado, integralmente, à exposição da prova da conjectura de Lawson obtida por S. Brendle (BRENDLE, 2013a).

SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Neste capítulo apresentaremos fatos básicos da teoria de superfícies no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e na esfera \mathbb{S}^3 . Teremos como base as referências (CARMO, 1987), (MEEKS, 2012), (NITSCHKE, 2011), (BRENDLE, 2013b) e (DAJCZER; TOJEIRO, 2019).

2.1 Subvariedades em formas espaciais

Nesta seção apresentaremos, sem demonstrações, as equações fundamentais de uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas dando enfoque, em especial, quando o espaço ambiente é uma forma espacial. Admitiremos conhecidos todos os pré-requisitos de Geometria Riemanniana necessários à compreensão dessa seção.

Dadas duas variedades Riemannianas M^m e \tilde{M}^n , uma *imersão isométrica* entre M e \tilde{M} é uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \tilde{M}$ que é uma imersão e, para todo $p \in M$, satisfaz

$$\langle X, Y \rangle = \langle df(p)X, df(p)Y \rangle, \quad (2.1)$$

para quaisquer $X, Y \in T_pM$. A diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* de f . Observe que se $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é uma imersão e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica em \tilde{M} , a condição (2.1) define uma métrica em M , a *métrica induzida* por f , que torna f uma imersão isométrica.

Definição 2.1. Dada uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \tilde{M}$, seja $f^*T\tilde{M}$ o fibrado induzido sobre M , cuja fibra em $p \in M$ é $T_{f(p)}\tilde{M}$. O complemento ortogonal de f_*T_pM em $T_{f(p)}\tilde{M}$, denotado por T_pM^\perp , chama-se o *espaço normal* de f em p . O *fibrado normal* TM^\perp de f é o subfibrado vetorial de $f^*T\tilde{M}$, cuja fibra em $p \in M$ é T_pM^\perp .

A conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de \tilde{M} induz uma única conexão $\hat{\nabla}$ em $f^*T\tilde{M}$ tal que

$$\hat{\nabla}_X(Z \circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X}Z,$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Identificaremos sempre $\hat{\nabla}$ com $\tilde{\nabla}$.

Dados dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, decompos

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\perp,$$

com relação à decomposição ortogonal

$$f^* T\tilde{M} = f_* TM \oplus TM^\perp.$$

A aplicação

$$\nabla_X Y = f_*^{-1} (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\top$$

define uma conexão compatível e sem torção em TM , logo coincide com a conexão de Levi-Civita de M .

Definição 2.2. A aplicação $\alpha_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(TM^\perp)$ definida por

$$\alpha_f(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\perp$$

chama-se a *segunda forma fundamental* da imersão isométrica f .

Obtemos, assim, a fórmula de Gauss

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha_f(X, Y),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 2.3. Como

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y - \tilde{\nabla}_Y f_* X = f_* [X, Y],$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, segue que

$$\alpha_f(X, Y) - \alpha_f(Y, X) = f_* [X, Y] - f_* [X, Y] = 0,$$

ou seja, α_f é simétrica. Além disso, α_f é $C^\infty(M)$ -bilinear, o valor de $\alpha_f(X, Y)$ em $p \in M$ depende somente dos valores dos campos X e Y em p .

O operador de forma A_ξ de f em relação a um campo vetorial $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ é definido por

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha_f(X, Y), \xi \rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X \xi, f_* Y \rangle &= -\langle \xi, \tilde{\nabla}_X f_* Y \rangle \\ &= -\langle \xi, \alpha_f(X, Y) \rangle \\ &= -\langle A_\xi X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\tilde{\nabla}_X \xi)^\top = -f_* A_\xi X.$$

Além disso, a componente normal

$$\nabla_X^\perp \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$$

define uma conexão compatível em TM^\perp , chamada a *conexão normal* de f . Obtemos, assim, a *fórmula de Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_* A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

Definição 2.4. O *vetor curvatura média* de f no ponto $p \in M$ é o vetor normal

$$H(p) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_f(X_i, X_i), \quad (2.2)$$

onde $\{X_1, \dots, X_m\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$. Segue de (2.2) que

$$\begin{aligned} m \langle H, \xi \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle \alpha_f(X_i, X_i), \xi \rangle = \sum_{i=1}^m \langle A_\xi X_i, X_i \rangle \\ &= \text{tr} A_\xi, \end{aligned}$$

logo o lado direito de (2.2) não depende da escolha da base ortonormal.

Definição 2.5. Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é dita *mínima num ponto* $p \in M$ se $H(p) = 0$. Diremos que f é *mínima* se for mínima em todos os pontos $p \in M$.

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, podemos obter as equações de compatibilidade para uma dada imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \tilde{M}^n$. De forma mais precisa, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para a imersão isométrica f são dadas, respectivamente, por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha_f(X, W), \alpha_f(Y, Z) \rangle - \langle \alpha_f(X, Z), \alpha_f(Y, W) \rangle, \quad (2.3)$$

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = \left(\nabla_X^\perp \alpha_f \right) (Y, Z) - \left(\nabla_Y^\perp \alpha_f \right) (X, Z) \quad (2.4)$$

e

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle, \quad (2.5)$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(TM^\perp)$.

Quando \tilde{M}^n denota uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a c , as equações (2.3), (2.4) e (2.5) tornam-se, respectivamente

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = c \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle \alpha_f(X, W), \alpha_f(Y, Z) \rangle - \langle \alpha_f(X, Z), \alpha_f(Y, W) \rangle, \quad (2.6)$$

$$\left(\nabla_X^\perp \alpha_f \right) (Y, Z) = \left(\nabla_Y^\perp \alpha_f \right) (X, Z) \quad (2.7)$$

e

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle. \quad (2.8)$$

Seja \mathbb{Q}_c^n uma forma espacial completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante c . Para os espaços ambientes \mathbb{Q}_c^n , as equações de compatibilidade (2.6), (2.7) e (2.8) são equações intrínsecas relacionando o tensor de curvatura de M^m , a segunda forma fundamental de f e o tensor de curvatura da conexão normal. Assim, é natural se perguntar se tais dados, satisfazendo as equações de compatibilidade de um fibrado vetorial sobre uma variedade Riemanniana M^m podem ser realizados como os dados associados com uma imersão isométrica de M^m em \mathbb{Q}_c^n .

O *teorema fundamental para subvariedades* (cf. (DAJCZER; TOJEIRO, 2019, Theorem 1.10)) estabelece que isso é, localmente, sempre verdadeiro, e também globalmente quando M^m é simplesmente conexa. Além disso, independente do fato de M^m ser simplesmente conexa, a imersão isométrica é única a menos de isometrias do espaço ambiente.

No caso particular de uma hipersuperfície $f: M^n \rightarrow \mathbb{Q}_c^{n+1}$, as equações fundamentais tornam-se somente duas. Mais precisamente, as equações de Gauss e Codazzi para f podem ser expressas como sendo

$$R(X, Y)Z = c(X \wedge Y)Z + (AX \wedge AY)Z \quad (2.9)$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y, \quad (2.10)$$

respectivamente.

No caso mais particular de uma superfície $f: M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_c^3$, imersa numa forma espacial tridimensional, a curvatura seccional da superfície M^2 em \mathbb{Q}_c^3 , munida da métrica induzida, coincide com sua curvatura Gaussiana, a menos da constante c . De forma mais precisa, a curvatura Gaussiana intrínseca K_{int} de M^2 é dada por

$$K_{\text{int}} = K_{\text{ext}} + c, \quad (2.11)$$

onde K_{ext} denota a curvatura extrínseca de M^2 , que é dada pelo produto das curvaturas principais de M^2 .

2.2 Superfícies mínimas em \mathbb{R}^3

Uma superfície regular M em \mathbb{R}^3 é dita ser uma *superfície mínima* se sua curvatura média H é nula em todos os pontos. O plano é, trivialmente, uma superfície mínima, pois suas curvaturas principais são identicamente nulas em todos os pontos.

Antes de estudarmos mais exemplos, faremos algumas considerações. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada e considere uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Uma *variação*

normal de M dada por f é uma família de superfícies M_t , com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dadas por

$$p_t = p + tf(p)N(p),$$

onde N é o campo unitário, normal a M , na orientação positiva de M . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, cada M_t é uma superfície regular, chamada uma *superfície de variação*. Note que, para $t = 0$ tem-se $M_0 = M$, e que se $f \equiv 1$, M_t é uma *superfície paralela* a M a uma distância t .

Dados uma variação normal M_t de M , relativa a uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e um domínio limitado $D \subset M$, considere o conjunto

$$D_t = \{p_t \in M_t : p \in D\},$$

com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Para cada instante $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, o conjunto D_t é o domínio correspondente em M_t . Definimos, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$A(t) = \text{Área}(D_t).$$

Vale o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em (NITSCHKE, 2011):

Teorema 2.6. Nas condições acima, vale

$$A'(0) = -2 \int_D Hf dA, \quad (2.12)$$

onde dA denota o elemento de área de M .

A fórmula (2.12) é conhecida como *primeira variação da área*. Como consequência, temos a seguinte:

Proposição 2.7. Uma superfície M em \mathbb{R}^3 é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$.

Demonstração. Se M é uma superfície mínima, então $H \equiv 0$, logo segue de (2.12) que $A'(0) = 0$. Reciprocamente, suponha $A'(0) = 0$ para toda função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que existe um ponto $p \in M$ tal que $H(p) > 0$. Podemos escolher f tal que $f(p) = H(p)$, $f \geq 0$ e $f \equiv 0$ no complementar de um domínio D de M , com $p \in D$ e $H|_D > 0$. Para uma tal função f , temos

$$A'(0) = - \int_M Hf dA < 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, deve-se ter $H(p) = 0$, para todo $p \in M$. \square

A palavra mínima, neste contexto, está relacionada com o seguinte problema proposto por Lagrange em 1760: dado uma curva fechada γ em \mathbb{R}^3 , sem auto-interseções, determinar a superfície de área mínima que tem γ como fronteira.

Suponha que exista uma solução M para o problema de Lagrange, e considere uma variação normal M_t de M , com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dada por uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $f|_{\partial M} \equiv 0$. Como a área de M é mínima tem-se, em particular, que

$$A(t) \geq A(0),$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e toda tal variação. Portanto, $A'(0) = 0$ qualquer que seja a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $f|_{\partial M} \equiv 0$. Isso mostra, em virtude da Proposição 2.7, que as superfícies de área mínima são superfícies mínimas no sentido da definição usual. A recíproca, no entanto, é falsa.

Proposição 2.8. Não existem superfícies mínimas e compactas em \mathbb{R}^3 .

Demonstração. Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 , então

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.$$

Isso implica que $k_1 = -k_2$ em todos os pontos de M , logo a curvatura Gaussiana K satisfaz $K = k_1 k_2 \leq 0$. No entanto, toda superfície compacta em \mathbb{R}^3 admite um ponto p tal que $K(p) > 0$, e isso nos dá uma contradição. \square

Dado uma superfície regular M em \mathbb{R}^3 , considere uma carta local isotérmica (U, φ) para M , i.e.,

$$E = G = \lambda^2 \text{ e } F = 0,$$

onde $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, com $\lambda > 0$. Note que, nas coordenadas isotérmicas $\varphi \sim (x, y)$, a curvatura média H se expressa como

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}.$$

Definição 2.9. Dado uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o *Laplaciano* de f , denotado por Δf , é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que f é *harmônica* se $\Delta f = 0$.

Se (U, φ) é uma carta local para M , como $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, definimos

$$\Delta \varphi = (\Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2, \Delta \varphi_3).$$

Proposição 2.10. Se (U, φ) é uma carta local isotérmica em M , então

$$\Delta \varphi = 2\lambda^2 H N.$$

Demonstração. Como φ é isotérmica, com $\varphi \sim (u, v)$, temos

$$\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \lambda^2 = \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle \quad \text{e} \quad \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 0.$$

Derivando, obtemos:

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{vu}, \varphi_v \rangle = -\langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle.$$

Disso decorre que

$$\langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Analogamente, obtemos:

$$\langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = 0. \quad (2.14)$$

De (2.13) e (2.14) concluímos que $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ é paralela a N . Além disso, como

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}, \quad (2.15)$$

obtemos

$$2\lambda^2 H = e + g = \langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, N \rangle,$$

mostrando que

$$\Delta\varphi = 2\lambda^2 HN, \quad (2.16)$$

como queríamos. \square

Corolário 2.11. Uma superfície M em \mathbb{R}^3 é mínima se, e somente se, toda carta local isotérmica é harmônica.

Exemplo 2.12. O *catenóide* é a superfície em \mathbb{R}^3 gerada pela rotação da catenária

$$y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$$

em torno do eixo- z . Assim, o catenóide pode ser parametrizado por

$$\varphi(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

onde $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$. Para tal φ , obtemos

$$E = G = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0.$$

Portanto o catenóide é uma superfície mínima.

Exemplo 2.13. Considere uma hélice dada por

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au).$$

Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano- xy que intercepta o eixo- z ortogonalmente. A superfície gerada por tais retas é o *helicóide* e pode ser parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

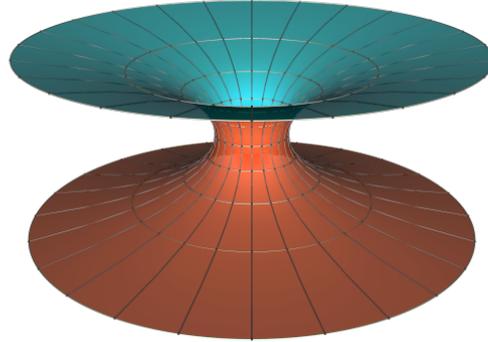


Figura 1 – Catenóide. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>). Enlace: <https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/Catenoid/web/index.html>

com $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$. Temos

$$E = G = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0.$$

Portanto o helicóide é uma superfície mínima.

Teorema 2.14. Além do plano,

- a) O catenóide é a única superfície rotacional mínima.
- b) O helicóide é a única superfície regrada mínima.

Demonstração. Para a demonstração de *a*), ver (CARMO, 2010, §3.5, Exemplo 5). Para a demonstração de *b*), ver (CARMO, 2010, §3.5, Exemplo 6). \square

Exemplo 2.15. Dado uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, considere o gráfico $\text{Gr}(f)$ de f , parametrizado por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U.$$

Temos

$$\begin{aligned} \varphi_x &= (1, 0, f_x), \\ \varphi_y &= (0, 1, f_y). \end{aligned}$$

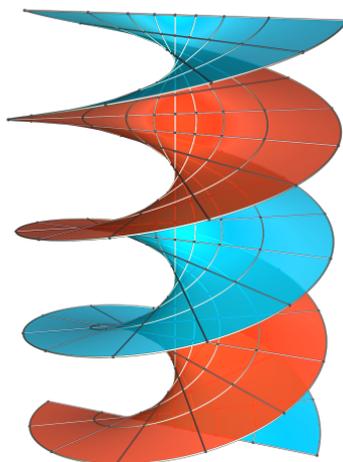


Figura 2 – Helicóide. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>). Enlace: <https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/Helicoid/web/index.html>

Assim

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1 + f_x^2, \\ F &= \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = f_x f_y, \\ G &= \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = 1 + f_y^2. \end{aligned}$$

Um campo n , normal a $\text{Gr}(f)$, é dado por

$$n = \varphi_x \times \varphi_y = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

Normalizando, temos

$$N = \frac{n}{\|n\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1).$$

Como

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= (0, 0, f_{xx}) \\ \varphi_{xy} &= (0, 0, f_{xy}) \\ \varphi_{yy} &= (0, 0, f_{yy}) \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{xx}, N \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ f &= \langle \varphi_{xy}, N \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ g &= \langle \varphi_{yy}, N \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}$$

Assim, como

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

segue que $H \equiv 0$ se, e somente se,

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (2.17)$$

que é uma EDP de 2ª ordem. Uma solução simples da equação (2.17) é a função linear

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

como $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.16 (Superfície de Scherk). Considere uma função f dada por

$$f(x, y) = g(x) + h(y),$$

onde $g(x, y) = g(x)$ e $h(x, y) = h(y)$. Neste caso, a equação (2.17) pode ser escrita como

$$(1 + (h')^2(y))g''(x) + (1 + (g')^2(x))h''(y) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{g''(x)}{1 + (g')^2(x)} + \frac{h''(y)}{1 + (h')^2(y)} = 0.$$

Isso implica

$$\frac{g''(x)}{1 + (g')^2(x)} = -\frac{h''(y)}{1 + (h')^2(y)} = \text{constante}.$$

Integrando, obtemos (a menos de constantes) que

$$g(x) = \ln(\cos x) \quad \text{e} \quad h(y) = -\ln(\cos y).$$

A menos de dilatações e translações, uma parte da superfície pode ser representada pelo gráfico da função

$$\ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right), \quad 0 < x, y < \frac{\pi}{2}.$$

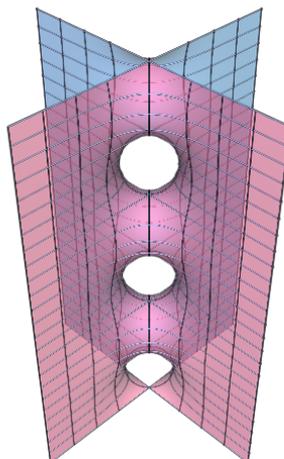


Figura 3 – Superfície de Scherk. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>). Enlace: <https://minimal.sitehost.iu.edu/archive/Classical/Classical/SinglyScherk/web/index.html>

2.3 A fórmula de representação de Weierstrass

Nesta seção apresentaremos a fórmula de representação de Weierstrass que tem como objetivo gerar superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 . Esta fórmula faz uso da teoria de superfícies de Riemann e Análise Complexa.

Considere o plano complexo \mathbb{C} identificado com \mathbb{R}^2 através da aplicação injetora

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}.$$

Uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser escrita na forma

$$f(u, v) = f_1(u, v) + if_2(u, v),$$

onde $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais, denotadas por

$$f_1 = \Re(f)$$

$$f_2 = \Im(f)$$

tal que $\Re(f)$ é parte real da função f e $\Im(f)$ é a parte imaginária da função f .

Definição 2.17. Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida no aberto U , é dita *holomorfa* se f_1, f_2 possuem derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} &= -\frac{\partial f_2}{\partial u} \end{aligned}$$

Dados uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ e uma carta local (U, φ) em M , com

$$\varphi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

considere as funções complexas $f_j : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq 3$, dadas por

$$f_j = \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v}, \quad 1 \leq j \leq 3. \quad (2.18)$$

Lema 2.18. Seja (U, φ) uma carta local isotérmica em M . Então, φ é mínima se, e somente se, cada f_j , definida em (2.18), é holomorfa.

Demonstração. Pelo Corolário 2.11, temos que φ é mínima se, e somente se, φ é harmônica, i.e., $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$. Isso significa que

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial v^2} = 0, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Queremos provar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \Re(f_j) &= \frac{\partial}{\partial v} \Im(f_j), \\ \frac{\partial}{\partial v} \Re(f_j) &= -\frac{\partial}{\partial u} \Im(f_j). \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial u} \Re(f_j) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial u} = \frac{\partial^2 x_j}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 x_j}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial x_j}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \Im(f_j).$$

Isso prova a primeira equação de Cauchy-Riemann. Por outro lado, como a superfície é regular, vale

$$\varphi_{uv} = \varphi_{vu},$$

ou seja

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_j}{\partial v \partial u}.$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial v} \Re(f_j) = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} (-\Im(f_j)) = -\frac{\partial}{\partial u} \Im(f_j),$$

que é a segunda equação de Cauchy-Riemann. \square

Lema 2.19. Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e (U, φ) uma carta local isotérmica. Então, as funções holomorfas f_j , definidas em (2.18), satisfazem

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 0 \quad (2.19)$$

$$|f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2 \neq 0. \quad (2.20)$$

Reciprocamente, sejam f_1, f_2, f_3 funções holomorfas, definidas num aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{C}$, satisfazendo (2.19) e (2.20). Então, tais funções dão origem a uma carta local isotérmica mínima (U, φ) , cujas funções coordenadas satisfazem (2.18).

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta local isotérmica em M . Então,

$$\begin{aligned} f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 &= \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 - 2i \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \right] \\ &= E - G - 2iF = 0, \end{aligned}$$

pois $E = G$ e $F = 0$. A equação (2.20) segue da regularidade de φ , pois $\varphi_u \neq 0$ e $\varphi_v \neq 0$. Reciprocamente, defina

$$x_j(u, v) = \int_{\xi_0}^{\xi} f_j(z) dz, \quad 1 \leq j \leq 3 \quad (2.21)$$

com $\xi = (u, v) \in U$, para algum $\xi_0 \in U$ fixado. Note que cada x_j está bem definida, pois U é simplesmente conexo e f_j é holomorfa, o que nos dá uma função holomorfa definida em U , para qual podemos aplicar as equações de Cauchy-Riemann, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} f_j &= \frac{d}{d\xi} \left[\Re \int_{\xi_0}^{\xi} f_j + i \Im \int_{\xi_0}^{\xi} f_j \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \Re \int_{\xi_0}^{\xi} f_j + i \frac{\partial}{\partial u} \Im \int_{\xi_0}^{\xi} f_j \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \Re \int_{\xi_0}^{\xi} f_j - i \frac{\partial}{\partial v} \Re \int_{\xi_0}^{\xi} f_j, \end{aligned}$$

de modo que a equação (2.18) é válida. Considere a aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujas funções coordenadas

$$\varphi = (x_1, x_2, x_3)$$

são dadas como em (2.21). De (2.19) e (2.20) segue que (U, φ) é uma carta local isotérmica. Além disso, as funções f_j serem holomorfas implica que as funções coordenadas x_j são harmônicas, logo, pelo Corolário 2.11, φ é mínima. \square

Observação 2.20. As funções x_j definidas em (2.21) estão definidas a menos de uma constante aditiva, de modo que a superfície está definida a menos de uma translação. Assim, o estudo local de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 reduz-se a resolver as equações (2.19) e (2.20) para uma terna de funções holomorfas.

Teorema 2.21. Sejam $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa tais que fg^2 seja holomorfa. Assuma que se $\xi \in U$ é um polo de ordem n para g então ξ é um zero para f de ordem $2n$, e que estes sejam os únicos zeros de f . Então, a aplicação

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} f(z) \left((1 - g(z)^2), i(1 + g(z)^2), 2g(z) \right) \quad (2.22)$$

satisfaz as condições do Lema 2.19. Além disso, para toda tal φ , existem funções holomorfa f e meromorfa g tais que vale (2.22).

Demonstração. Se φ satisfaz (2.22), temos

$$\begin{aligned} f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 &= \frac{1}{4}f(z)^2(1-g(z)^2)^2 - \frac{1}{4}f(z)^2(1+g(z)^2)^2 + f(z)^2g(z)^2 \\ &= -f(z)^2g(z)^2 + f(z)^2g(z)^2 = 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\varphi(z) \neq 0, \forall z \in U$. De fato, a hipótese sobre os zeros de f e os polos de g implica que $f(z)g(z)^2 \neq 0$. Assim, para qualquer z fixado, a primeira e a segunda coordenadas de φ não podem ser ambas nulas. Assim, podemos assumir que φ é holomorfa satisfazendo

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \neq 0,$$

φ nunca é zero, e considere

$$f(z) = \varphi_1(z) - i\varphi_2(z) \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z) - i\varphi_2(z)}.$$

f é uma função holomorfa e g é o quociente de funções holomorfas. Se o denominador de g é identicamente nulo, fazemos

$$g(z) = \frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z) + i\varphi_2(z)}$$

e procedemos de forma similar. Assim, sendo o denominador de g não nulo, tem-se que g é meromorfa. Logo, a relação

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$$

implica

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2$$

que, em termos de f e g , torna-se

$$\begin{aligned} \varphi_1 + i\varphi_2 &= \frac{-\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \\ &= \frac{-\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2} (\varphi_1 - i\varphi_2) \\ &= -fg^2 \end{aligned}$$

Esta última equação, juntamente com as condições sobre f e g , nos dão φ como em (2.22). \square

Definição 2.22. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $\gamma \subset U$ uma curva de um ponto fixado $z_0 \in U$ a um ponto arbitrário $z \in U$, $z = u + iv$. Sejam f, g como no Teorema 2.21. Então,

$$\varphi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

onde

$$\begin{aligned}x_1 &= \Re \int_{\gamma} \frac{1}{2} f(z) (1 - g(z)^2) dz \\x_2 &= \Re \int_{\gamma} \frac{1}{2} f(z) (1 + g(z)^2) dz \\x_3 &= \Re \int_{\gamma} f(z) g(z) dz\end{aligned}$$

é uma carta local mínima, chamada *a representação de Weierstrass* da teoria local de superfícies mínimas.

Exemplo 2.23 (Catenóide). O catenóide pode ser representado pelas funções holomorfas $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = e^{-z} \quad \text{e} \quad g(z) = e^z.$$

Substituindo tais funções na fórmula da representação de Weierstrass, e integrando de $z_0 = 0$ a um ponto arbitrário $z = u + iv$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= x_0 + \Re \int_{z_0}^z \frac{f(\xi)}{2} (1 - g(\xi)^2, i(1 + g(\xi)^2), 2g(\xi)) d\xi \\&= x_0 + \Re \int_{z_0}^z \frac{e^{-\xi}}{2} (1 - e^{2\xi}, i(1 + e^{2\xi}), 2e^{\xi}) d\xi \\&= \Re \int_0^z \frac{1}{2} (e^{-\xi} - e^{\xi}, i(e^{-\xi} + e^{\xi}), 1) d\xi \\&= \Re \left[\frac{1}{2} \left(-e^{-z} - e^z, -\frac{1}{2i} (-e^{-z} + e^z), z \right) \right] \\&= \Re (-\cosh z, i \sinh z, z) \\&= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, u).\end{aligned}$$

Exemplo 2.24 (Superfície de Enneper). A superfície de Enneper pode ser representada pelas funções holomorfas $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = 1 \quad \text{e} \quad g(z) = z.$$

Assim, a representação de Weierstrass torna-se

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \Re \left(\frac{1}{2} \int_0^z (1 - \xi^2, i(1 + \xi^2), 2\xi) d\xi \right) \\&= \frac{1}{2} \Re \left(z - \frac{z^3}{3}, iz + \frac{iz^3}{3}, z^2 \right) \\&= \frac{1}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2 \right).\end{aligned}$$

Exemplo 2.25 (Superfície de Scherk). A superfície de Scherk, definida pela equação

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x},$$

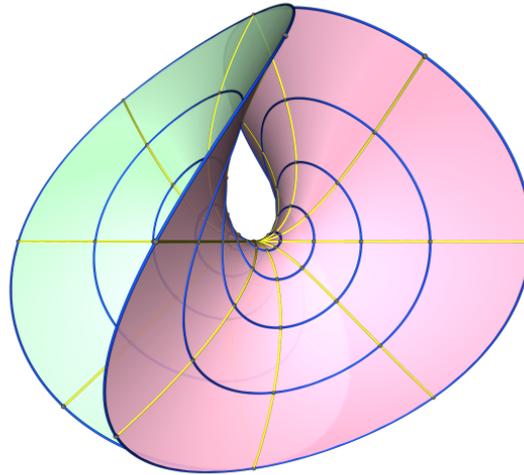


Figura 4 – Superfície de Enneper. Autor: Matthias Weber. Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Unported License (<<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>>). Enlace: <<https://minimal.siteshost.iu.edu/archive/Classical/Classical/Enneper/web/index.html>>

pode ser representada pelas funções holomorfas $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \frac{2}{1-z^4} \quad \text{e} \quad g(z) = z.$$

Note que

$$\begin{aligned} f(1-g^2) &= \frac{2}{1+z^2} = \frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i}, \\ if(1+g^2) &= \frac{2i}{1-z^2} = \frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1}, \\ 2fg &= \frac{4z}{1-z^4} = \frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo na representação de Weierstrass e integrando, obtemos

$$\varphi(z) = \left(-\arg \frac{z+i}{z-i}, -\arg \frac{z+i}{z-i}, \log \left\| \frac{z^2+1}{z^2-1} \right\| \right).$$

Usando as identidades

$$\begin{aligned} \frac{z+i}{z-i} &= \frac{|z|^2-1}{|z^2-i|^2} + i \frac{z+\bar{z}}{|z-i|^2}, \\ \frac{z+1}{z-1} &= \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} + i \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}, \end{aligned}$$

podemos encontrar as expressões para $\cos x$ e $\cos y$. Temos

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \cos \left(-\arg \frac{z+i}{z-i} \right) \\
 &= \cos \left(\arg \frac{z+i}{z-i} \right) \\
 &= \cos \left(\arg \left(\frac{|z-i|}{|z+i|} \frac{z+i}{z-i} \right) \right) \\
 &= \Re \left(\frac{|z-i|}{|z+i|} \frac{z+i}{z-i} \right) \\
 &= \frac{|z-i|}{|z+i|} \Re \left(\frac{z+i}{z-i} \right) \\
 &= \frac{|z-i|}{|z+i|} \frac{|z|^2 - 1}{|z-i|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z^2 + 1|}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
 \cos y &= \cos \left(-\arg \frac{z+1}{z-1} \right) \\
 &= \frac{|z-1|}{|z+1|} \frac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2} \\
 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z^2 - 1|}
 \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\frac{\cos y}{\cos x} = \frac{z^2 + 1}{|z^2 - 1|} = e^z.$$

Vejamos uma aplicação da representação de Weierstrass. Dado uma superfície mínima $M \subset \mathbb{R}^3$, seja (U, φ) uma carta local isotérmica. Isso significa que

$$E = G = \lambda^2 \quad \text{e} \quad F = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 |f_j|^2 \\
 &= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2) + \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2) + |fg|^2 \\
 &= \left(\frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 \varphi_u \times \varphi_v &= (\Im(f_2 \bar{f}_3), \Im(f_3 \bar{f}_1), \Im(f_1 \bar{f}_2)) \\
 &= \frac{|f|^2 (1 + |g|^2)}{4} (2\Re(g), 2\Im(g), |g|^2 - 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad \|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \lambda^2,$$

de modo que

$$N = \left(\frac{2\Re(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{2\Im(g)}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

Lembremos que a projeção estereográfica

$$\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

é a aplicação dada por

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$

e sua inversa é dada por

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Portanto, temos que

$$N = \pi^{-1} \circ g. \quad (2.23)$$

Podemos resumir isso no seguinte resultado.

Proposição 2.26. Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e (U, φ) uma carta local isotérmica. Então, um dos campos unitários N , normal a M é a inversa da projeção estereográfica da função g dada pela representação de Weierstrass.

Teorema 2.27 (Existência local de parâmetros isotérmicos). Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima. Então, todo $p \in M$ pertence a uma vizinhança coordenada isotérmica.

Demonstração. Seja $U \subset M$ uma vizinhança coordenada de p que é o gráfico de uma função diferenciável que podemos assumir ser da forma $z = h(x, y)$, $(x, y) \in U$. Lembrando que a equação para gráficos mínimos (2.17) é dada por

$$(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy} = 0,$$

obtemos a equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 + h_y^2}{W} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{h_x h_y}{W}$$

em U , onde $W = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}$. Escolhendo U simplesmente conexo, isso implica que existe uma função diferenciável $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{h_x h_y}{W} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1 + h_y^2}{W}.$$

Introduza novas coordenadas

$$\bar{x} = x \quad \text{e} \quad \bar{y} = \phi(x, y).$$

Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} &= 1, \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} &= -\frac{h_x h_y}{1 + h_y^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} &= \frac{W}{1 + h_y^2},\end{aligned}$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental, em relação a (\bar{x}, \bar{y}) , são

$$E = G = \frac{W^2}{1 + h_y^2} \quad \text{e} \quad F = 0,$$

como queríamos. □

2.4 Superfícies mínimas em \mathbb{S}^3

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos sobre superfícies mínimas na esfera \mathbb{S}^3 . Indicaremos as referências onde as demonstrações podem ser encontradas. Discutiremos também a minimalidade do toro de Clifford.

A esfera unitária \mathbb{S}^3 é a hipersuperfície de \mathbb{R}^4 dada por

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.\}$$

Dado uma superfície M em \mathbb{S}^3 , seja \mathbf{v} um campo vetorial unitário, normal ao longo de M . Isso significa que \mathbf{v} é tangente à esfera \mathbb{S}^3 e, para cada ponto $p \in M$, tem-se $\mathbf{v}(p) \in T_p M^\perp$. Decorre da equação de Gauss (2.11) para a superfície M em \mathbb{S}^3 que a curvatura Gaussiana intrínseca K de M é dada por

$$K = \lambda_1 \lambda_2 + 1,$$

onde λ_1 e λ_2 são as curvaturas principais do operador de forma de M associado ao campo normal \mathbf{v} .

Assim como para superfícies em \mathbb{R}^3 , a soma das curvaturas principais será denotada como a curvatura média de M

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 = \sum_{i=1}^2 \langle \tilde{\nabla}_{X_i} \mathbf{v}, X_i \rangle,$$

onde $\{X_1, X_2\}$ é um referencial local tangente a M e $\tilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de \mathbb{S}^3 . A curvatura média de M pode ser interpretada, geometricamente, como um L^2 -gradiente do funcional de área. De forma mais precisa, dada qualquer função $\varphi \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\frac{d}{dt} \text{Área}(M_t)|_{t=0} = \int_M H \varphi,$$

onde

$$M_t = \{\cos(t\varphi(x))x + \sin(t\varphi(x))N(x) : x \in M\}.$$

Analogamente ao caso Euclidiano, essa interpretação variacional motiva a definir uma superfície na esfera \mathbb{S}^3 como sendo *mínima* se sua curvatura média H for identicamente nula. O conceito de minimalidade em \mathbb{S}^3 pode ser formulado de várias formas equivalentes (cf. (SIMONS, 1968, Theorem 3.2.1) e (DAJCZER; TOJEIRO, 2019)).

Teorema 2.28. Dada uma superfície M em \mathbb{S}^3 , as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) M é uma superfície mínima.
- b) M é um ponto crítico do funcional área.
- c) As restrições das funções coordenadas em \mathbb{R}^4 são autofunções do operador Laplaciano $-\Delta_M$ com autovalor igual a 2, ou seja, $\Delta_M x_i = -2x_i$, com $1 \leq i \leq 4$.

Ao contrário do que ocorre em \mathbb{R}^3 , de que não existem superfícies mínimas fechadas, existem exemplos interessantes desse fenômeno em \mathbb{S}^3 . Um exemplo simples de superfície mínima fechada em \mathbb{S}^3 é o equador, que é definido por

$$M = \{x \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}.$$

Neste caso, as curvaturas principais são ambas iguais a zero, logo o equador é uma superfície mínima. Além disso, o equador tem curvatura Gaussiana constante igual a 1. Assim, munido da métrica induzida, M é isométrico à esfera usual \mathbb{S}^2 .

Vejamos outro exemplo importante.

Exemplo 2.29 (toro de Clifford). Considere a aplicação $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$x(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v). \quad (2.24)$$

Claramente x é uma aplicação diferenciável e tem-se

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin u, \cos u, 0, 0)$$

e

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, -\sin v, \cos v).$$

Disso decorre, em particular, que x é uma imersão. Além disso, como

$$x(u + 2k\pi, v + 2l\pi) = x(u, v),$$

para quaisquer $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $k, l \in \mathbb{Z}$, segue que a imagem $x(\mathbb{R}^2)$ é um toro $\mathbb{S}^1_{\sqrt{2}} \times \mathbb{S}^1_{\sqrt{2}} \subset \mathbb{R}^4$. A fim de entender a geometria deste toro, fixemos o seguinte referencial ortonormal

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 0, -\sin v, \cos v), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v). \end{aligned}$$

Observe que o vetor posição $e_3 = x$ descreve uma esfera unitária, pois $\|x\| = 1$. Assim, o toro $x(\mathbb{R}^2)$ está contido na esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Além disso, o referencial $\{e_1, e_2, e_4\}$ é tangente a \mathbb{S}^3 , com e_4 normal ao toro $x(\mathbb{R}^2)$. Como imersão isométrica, $x: \mathbb{S}^1_{\sqrt{2}} \times \mathbb{S}^1_{\sqrt{2}} \rightarrow \mathbb{S}^3$ é conhecida como o *toro de Clifford*. Denotemos por (h_{ij}) a matriz da segunda forma fundamental do toro em relação ao campo normal e_4 . Cada entrada da matriz é dada por

$$\begin{aligned} h_{11} &= \langle Ae_1, e_1 \rangle \\ h_{12} &= \langle Ae_1, e_2 \rangle \\ h_{21} &= \langle Ae_2, e_1 \rangle \\ h_{22} &= \langle Ae_2, e_2 \rangle \end{aligned}$$

onde AX é dado por

$$AX = -\tilde{\nabla}_X e_4,$$

para qualquer vetor tangente X ao toro $x(\mathbb{R}^2)$. Temos:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= -\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\ Ae_2 &= -\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, \sin v, -\cos v). \end{aligned}$$

Substituindo, obtemos:

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_{12} = h_{21} = 0 \quad \text{e} \quad h_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Disso decorre, em particular, que as curvaturas principais do toro $x(\mathbb{R}^2)$ são $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, o toro de Clifford é uma superfície mínima.

Observação 2.30. Reparametrizando a aplicação dada em (2.24), as curvaturas principais do toro de Clifford podem ser reobtidas como sendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Decorre então da equação de Gauss (2.11) que a curvatura Gaussiana intrínseca do toro de Clifford é nula, ou seja, é uma superfície flat na esfera \mathbb{S}^3 .

Por muito tempo o equador e o toro de Clifford eram os únicos exemplos conhecidos de superfícies mínimas mergulhadas em \mathbb{S}^3 . No entanto, isso mudou fortemente no final dos anos 1960 quando Blaine Lawson descobriu uma família infinita de superfícies mínimas mergulhadas em \mathbb{S}^3 de genus arbitrário (LAWSON, 1970b).

Teorema 2.31 (Lawson). Existe ao menos uma superfície mínima mergulhada em \mathbb{S}^3 de genus g , onde g é um inteiro não negativo. Se g não for primo, o mergulho não é único.

A questão de unicidade para superfícies mínimas na esfera \mathbb{S}^3 com genus 0 foi provada por Frederick Almgren ([ALMGREN, 1966](#)).

Teorema 2.32 (Almgren). A menos de isometrias de \mathbb{S}^3 , o equador é a única superfície mínima imersa em \mathbb{S}^3 de genus 0.

Em 1970, Blaine Lawson conjecturou uma propriedade de unicidade similar para toros mínimos em \mathbb{S}^3 . Mais precisamente, Lawson ([LAWSON, 1970a](#)) conjecturou o seguinte

Conjectura 2.1 (Lawson). A menos de isometrias de \mathbb{S}^3 , o toro de Clifford é a única superfície mínima mergulhada em \mathbb{S}^3 de genus 1.

Queremos apenas observar que a conjectura de Lawson é falsa se permitirmos que a superfície tenha auto-interseções. De fato, o próprio Blaine Lawson ([LAWSON, 1969](#)) provou que existe uma família infinita de toros mínimos em \mathbb{S}^3 que são “Alexandrov imersos” mas não são mergulhados. Uma aplicação $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ é chamada de Alexandrov imersa se existe uma variedade compacta N e uma imersão $\bar{F} : N \rightarrow \mathbb{S}^3$ tal que $\Sigma = \partial N$ e $\bar{F}|_{\Sigma} = F$

Veremos no capítulo seguinte a prova da conjectura de Lawson obtida por Simon Brendle.

A CONJECTURA DE LAWSON

Neste capítulo apresentaremos a demonstração da conjectura de Lawson obtida por Simon Brendle (BRENDLE, 2013a).

3.1 Introdução

Em 1970, Blaine Lawson (LAWSON, 1970b) conjecturou que o toro de Clifford é a única superfície mínima, compacta e mergulhada em \mathbb{S}^3 , com genus 1, e tal conjectura foi provada somente quatro décadas depois por Simon Brendle (BRENDLE, 2013a) em 2013. A hipótese de ser mergulhada é fundamental. De fato, em (LAWSON, 1970a) Lawson construiu uma família (infinita) de imersões mínimas de toros em \mathbb{S}^3 .

A prova da conjectura de Lawson em (BRENDLE, 2013a) envolve uma aplicação do princípio do máximo para uma função que depende de duas variáveis. Esta técnica foi inicialmente desenvolvida por Huisken (HUISKEN, 1998) no estudo do fluxo de comprimento de curvas para curvas mergulhadas no plano e, posteriormente, por Andrews (ANDREWS, 2012).

Antes de apresentarmos os argumentos usados em (BRENDLE, 2013a), na prova da conjectura de Lawson, faremos algumas considerações iniciais. Seguiremos aqui o artigo (ANDREWS, 2012), onde o autor apresenta a noção de não-colapsante para hipersuperfícies Euclidianas mergulhadas.

Considere uma superfície Σ em \mathbb{R}^3 , cuja curvatura média H é positiva em todos os pontos, e limitando uma região aberta Ω em \mathbb{R}^3 .

Definição 3.1. A superfície Σ é dita ser *δ -não-colapsante* se, para todo ponto $x \in \Sigma$, existe uma bola aberta B de raio $\delta/H(x)$, contida em Ω , com $x \in \partial B$.

Dado uma superfície $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, defina uma função $Z : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$Z(x, y) = \frac{H(x)}{2} \|F(y) - F(x)\|^2 + \delta \langle F(y) - F(x), \mathbf{v}(x) \rangle,$$

onde \mathbf{v} é um campo unitário, normal a Σ .

Proposição 3.2 ((ANDREWS, 2012)). A superfície Σ é δ -não-colapsante se, e somente se, $Z(x, y) \geq 0$, para quaisquer $x, y \in \Sigma$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, escolha o campo normal \mathbf{v} que aponta para fora de Σ . Assim, uma bola em Ω de raio $\delta/H(x)$, com $F(x)$ sendo um ponto da fronteira, deve ter centro no ponto

$$p(x) = F(x) - (\delta/H(x))\mathbf{v}(x).$$

A afirmação de que esta bola está contida em Ω é equivalente ao fato de que nenhum ponto de Σ tem distância menor do que $\delta/H(x)$ ao ponto p . Ou seja,

$$0 \leq \|F(y) - p(x)\|^2 - \left(\frac{\delta}{H(x)}\right)^2 = 2 \cdot \frac{Z(x, y)}{H(x)},$$

para quaisquer $x, y \in \Sigma$. Como $H > 0$ em todos os pontos de Σ , isso é equivalente ao fato de que Z seja não-negativa em todos os pontos. A recíproca é imediata. \square

Considere agora uma superfície mínima e mergulhada $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ e $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva. Defina uma função $Z : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$Z(x, y) = \Phi(x)(1 - \langle F(x), F(y) \rangle) + \langle \mathbf{v}(x), F(y) \rangle, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{v} é um campo unitário, normal a Σ . Observando que uma bola geodésica na esfera \mathbb{S}^3 é simplesmente a interseção de uma bola de \mathbb{R}^4 com \mathbb{S}^3 podemos provar, de forma análoga à Proposição 3.2, que a função $Z(x, y)$, definida em (3.1), é não-negativa se, e somente se, a superfície Σ é não-colapsante.

3.2 Alguns resultados técnicos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados preliminares que serão usados na demonstração da conjectura de Lawson.

Dados uma superfície mínima e mergulhada $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ e uma função positiva $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, considere a função $Z : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Z(x, y) = \Phi(x)(1 - \langle F(x), F(y) \rangle) + \langle \mathbf{v}(x), F(y) \rangle, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{v} é um campo unitário, normal a Σ . Considere dois pontos $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$, com $\bar{x} \neq \bar{y}$, tais que $Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ e $dZ(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ sistemas de coordenadas geodésicas em torno dos pontos \bar{x}, \bar{y} , respectivamente. No ponto (\bar{x}, \bar{y}) , temos:

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) - \Phi(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle + \sum_{k=1}^2 h_{ik}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \quad (3.3)$$

e

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = -\Phi(\bar{x}) \left\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \quad (3.4)$$

onde $h_{ij}(\bar{x})$ denota a (ij) -ésima coordenada da matriz da segunda forma fundamental de F no ponto \bar{x} , i.e.,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^2 h_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}). \quad (3.5)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que a segunda forma fundamental de F está diagonalizada no ponto \bar{x} , i.e.,

$$h_{11}(\bar{x}) = \lambda_1, \quad h_{12}(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad h_{22}(\bar{x}) = \lambda_2.$$

Denotemos por w_i a reflexão do vetor

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x})$$

em relação ao plano ortogonal ao vetor $F(\bar{x}) - F(\bar{y})$, i.e.,

$$w_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) - 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{y})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|} \right\rangle \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{y})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|}. \quad (3.6)$$

Escolhendo um sistema de coordenadas apropriado (y_1, y_2) , podemos supor que

$$\left\langle w_1, \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \right\rangle \geq 0, \quad \left\langle w_1, \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}) \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle w_2, \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}) \right\rangle \geq 0.$$

Lema 3.3. Os vetores $F(\bar{y})$ e $\Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \mathbf{v}(\bar{x})$ são linearmente independentes.

Demonstração. Usando a identidade

$$\langle \Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle = \Phi(\bar{x}) - Z(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi(\bar{x}),$$

obtemos

$$\begin{aligned} |\Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \mathbf{v}(\bar{x})|^2 |F(\bar{y})|^2 &= \langle \Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle^2 \\ &= |\Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \mathbf{v}(\bar{x})|^2 - \Phi(\bar{x})^2 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Disso decorre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz é estrita, logo os vetores $F(\bar{y})$ e $\Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \mathbf{v}(\bar{x})$ são linearmente independentes. \square

Em relação à reflexão dada em (3.6), obtemos o seguinte:

Lema 3.4. Valem as seguintes igualdades:

$$w_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}).$$

Demonstração. Usando a expressão de w_i , dada em (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle w_i, F(\bar{y}) \rangle &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, F(\bar{y}) \right\rangle \frac{\langle F(\bar{x}) - F(\bar{y}), F(\bar{y}) \rangle}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|^2} \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, F(\bar{y}) \right\rangle \frac{\langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle - 1}{2 - 2\langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle w_i, \Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \nu(\bar{x}) \rangle &= 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \frac{\langle F(\bar{x}) - F(\bar{y}), \Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \nu(\bar{x}) \rangle}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|^2} \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \frac{Z(\bar{x}, \bar{y})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, os vetores

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y})$$

satisfazem

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}), F(\bar{y}) \right\rangle = 0$$

e

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}), \Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \nu(\bar{x}) \right\rangle = -\frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Como os vetores $F(\bar{y})$ e $\Phi(\bar{x})F(\bar{x}) - \nu(\bar{x})$ são linearmente independentes, concluímos que o plano gerado por

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y})$$

é o mesmo plano gerado por w_1 e w_2 . Além disso, os vetores w_1 e w_2 são ortonormais.

Como

$$\left\langle w_1, \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}) \right\rangle = 0,$$

concluímos que

$$w_1 = \pm \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \quad \text{e} \quad w_2 = \pm \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}).$$

Finalmente, como

$$\left\langle w_1, \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \right\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \left\langle w_2, \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}) \right\rangle \geq 0$$

obtemos que

$$w_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}),$$

como queríamos. \square

No resultado seguinte iremos considerar as derivadas de segunda ordem da função Z no ponto (\bar{x}, \bar{y}) .

Proposição 3.5. A derivada segunda da função Z , dada em (3.2), satisfaz:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\Delta_{\Sigma} \Phi(\bar{x}) - \frac{|\nabla \Phi(\bar{x})|^2}{\Phi(\bar{x})} + (|A(\bar{x})|^2 - 2)\Phi(\bar{x}) \right) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) \\ &\quad + 2\Phi(\bar{x}) - \frac{2\Phi(\bar{x})^2 - |A(\bar{x})|^2}{2\Phi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Derivando a equação (3.3) em relação a x_i , e somando, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \Phi(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle + \sum_{i,k=1}^2 \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i,k=1}^2 h_{ik}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Iremos, inicialmente, reescrever a equação (3.7). Note que, da equação de Codazzi (2.4), tem-se

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial h_{21}}{\partial x_1}(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial h_{22}}{\partial x_1}(\bar{x}), \quad (3.8)$$

e do fato de Σ ser mínima, obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial h_{ii}}{\partial x_k}(\bar{x}) = 0. \quad (3.9)$$

De (3.8) e (3.9), obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0. \quad (3.10)$$

Analisemos o termo $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\bar{x})$. Pelo teorema 2.28, tem-se

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i^2}(\bar{x}) + 2F_j(\bar{x}) = 0,$$

para $j = 1, \dots, 4$, logo,

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\bar{x}) = -2F(\bar{x}).$$

Analisemos agora o termo

$$\sum_{i=1}^2 h_{ik}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle.$$

Derivamos (3.5) em relação a x_i , somando e usando (3.10), obtemos:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x}) = \sum_{i,k=1}^2 h_{ik}(\bar{x}) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(\bar{x}). \quad (3.11)$$

Note que, como

$$\left\langle \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \right\rangle = 0,$$

para $j = 1, 2$, segue que o vetor $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x})$ não tem componentes no plano tangente $T_{\bar{x}}\Sigma \subset T_{\bar{x}}\mathbb{S}^3$. Por outro lado, derivando

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\bar{x}), \mathbf{v}(\bar{x}) \right\rangle = 0$$

em relação a x_i , obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x}), \mathbf{v}(\bar{x}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\bar{x}) \right\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.5) em (3.12), notando que $\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \right\rangle = \delta_{kj}$ e somando, a equação (3.12) torna-se

$$\left\langle \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x}), \mathbf{v}(\bar{x}) \right\rangle + \sum_{i=1}^2 (h_{ik}(\bar{x}))^2 = 0.$$

Como $\sum_{i=1}^2 (h_{ik}(\bar{x}))^2 = |A(\bar{x})|^2$ e lembrando que $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x})$ só tem componente na direção \mathbf{v} , obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}(\bar{x}) = -|A(\bar{x})|^2 \mathbf{v}(\bar{x}). \quad (3.13)$$

Usando (3.11) e (3.13), temos que

$$\sum_{i=1}^2 h_{ik}(\bar{x}) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(\bar{x}) = -|A(\bar{x})|^2 \mathbf{v}(\bar{x}). \quad (3.14)$$

Assim, usando (3.10) e (3.14), podemos escrever a equação (3.7) como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}(\bar{x}) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + 2\Phi(\bar{x}) \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle - |A(\bar{x})|^2 \langle \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como

$$\langle \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle = Z(\bar{x}, \bar{y}) - \phi(\bar{x}) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)$$

podemos reescrever (3.15) como sendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= (\Delta_{\Sigma} \Phi(\bar{x}) + (|A(\bar{x})|^2 - 2)\Phi(\bar{x})) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) \\ &\quad + 2\Phi(\bar{x}) \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad - |A(\bar{x})|^2 Z(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo

$$\frac{|\nabla \Phi(\bar{x})|^2}{\Phi(\bar{x})} (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + \frac{\Phi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\Delta_{\Sigma} \Phi(\bar{x}) - \frac{|\nabla \Phi(\bar{x})|^2}{\Phi(\bar{x})} + (|A(\bar{x})|^2 - 2)\Phi(\bar{x}) \right) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) \\ &\quad + 2\Phi(\bar{x}) + \frac{|\nabla \Phi(\bar{x})|^2}{\Phi(\bar{x})} (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad + \frac{\Phi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ &\quad - \frac{\Phi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Fatorando a expressão acima adequadamente, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\Delta_{\Sigma} \Phi(\bar{x}) - \frac{|\nabla \Phi(\bar{x})|^2}{\Phi(\bar{x})} + (|A(\bar{x})|^2 - 2)\Phi(\bar{x}) \right) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + 2\Phi(\bar{x}) \\ &\quad - \frac{\Phi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ &\quad + \frac{1}{\Phi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)} m(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} m(\bar{x}, \bar{y}) &= -2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) \Phi(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad + |\nabla \Phi(\bar{x})|^2 (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)^2 + \Phi(\bar{x})^2 \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Observe que

$$m(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) - \Phi(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \right)^2.$$

Pela equação (3.3), e lembrando que $\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, podemos escrever

$$m(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^2 \left(h_{ik}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \right)^2. \quad (3.16)$$

Expandindo o termo quadrático em (3.16), obtemos:

$$(h_{i1}(\bar{x}))^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 + (h_{i2}(\bar{x}))^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ + 2h_{i1}(\bar{x})h_{i2}(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle.$$

Como o determinante de A é $-\lambda^2$, tem-se

$$h_{11}(\bar{x})h_{22}(\bar{x}) - h_{12}(\bar{x})h_{21}(\bar{x}) = h_{11}(\bar{x})h_{22}(\bar{x}) - (h_{12}(\bar{x}))^2 = -\lambda^2,$$

pois $h_{12}(\bar{x}) = h_{21}(\bar{x})$. Além disso, como $h_{11}(\bar{x}) + h_{22}(\bar{x}) = 0$, tem-se

$$\sum_{i=1}^2 (h_{i1}(\bar{x}))^2 = \lambda^2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^2 (h_{i2}(\bar{x}))^2 = \lambda^2.$$

Em relação ao termo $\sum_{i=1}^2 h_{i1}(\bar{x})h_{i2}(\bar{x})$, tem-se

$$h_{11}(\bar{x})h_{12}(\bar{x}) + h_{21}(\bar{x})h_{22}(\bar{x}) = h_{12}(\bar{x})(h_{11}(\bar{x}) + h_{22}(\bar{x})) = 0.$$

Portanto, podemos reescrever (3.16) como sendo

$$m(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^2 \lambda^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2.$$

Lembrando agora que $\lambda^2 = \frac{1}{2}|A(\bar{x})|$, obtemos a equação desejada. \square

Proposição 3.6. Em relação às derivadas mistas, vale a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_i - \Phi(\bar{x}). \quad (3.17)$$

Demonstração. Derivando em relação a x_i a equação (3.4), obtemos:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle - \Phi(\bar{x}) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle.$$

Lembrando que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lambda_i(\bar{x}) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}),$$

temos

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) \left\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle + (\lambda_i(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle. \quad (3.18)$$

Da equação (3.3), tem-se:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{1}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} (\lambda_i(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle. \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.18), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} (\lambda_i(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \left\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad + (\lambda_i(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Como

$$|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|^2 = \langle F(\bar{x}) - F(\bar{y}), F(\bar{x}) - F(\bar{y}) \rangle = 2 - 2\langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle,$$

a equação anterior torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) &= -2(\lambda_i(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{-F(\bar{y})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|} \right\rangle \left\langle \frac{F(\bar{x})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|}, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad + (\lambda_i - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Além disso, como

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{x}) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}), F(\bar{y}) \right\rangle = 0,$$

a equação (3.20) se escreve como sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) &= -2(\lambda_i(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{y})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|} \right\rangle \left\langle \frac{F(\bar{x}) - F(\bar{y})}{|F(\bar{x}) - F(\bar{y})|}, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &\quad + (\lambda_i - \Phi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &= (\lambda_i - \Phi(\bar{x})) \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &= \lambda_i - \Phi(\bar{x}), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Proposição 3.7.

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) = 2\Phi(\bar{x}). \quad (3.21)$$

Demonstração. Derivando a equação (3.4) em relação a y_i , e somando, obtemos:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) = -\Phi(\bar{x}) \left\langle F(\bar{x}), \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}(\bar{y}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}(\bar{x}), \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}(\bar{y}) \right\rangle. \quad (3.22)$$

Como

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}(\bar{y}) = -2F(\bar{y})$$

e

$$0 = Z(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + \langle \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle$$

a expressão em (3.22) torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= 2\Phi(\bar{x})\langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle - 2\langle \nu(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle \\ &= 2\Phi(\bar{x}), \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Proposição 3.8. Vale a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ = -\frac{2\Phi(\bar{x})^2 - |A(\bar{x})|^2}{2\Phi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ + \left(\Delta_{\Sigma} \Phi(\bar{x}) - \frac{|\nabla \Phi(\bar{x})|^2}{\Phi(\bar{x})} + (|A(\bar{x})|^2 - 2)\Phi(\bar{x}) \right) (1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Demonstração. A equação (3.23) segue das equações (3.7), (3.17) e (3.21). \square

3.3 Prova do Teorema 1.1

Usando os resultados preliminares apresentados nas seções anteriores, apresentaremos nesta seção a prova do teorema principal dessa dissertação.

Inicialmente, iremos determinar uma identidade tipo-Simons para a função

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}|A(x)|, \quad (3.24)$$

onde A denota o operador de forma da superfície $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$.

Proposição 3.9. Seja $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ um toro mínimo e mergulhado em \mathbb{S}^3 . Então, a função Ψ dada em (3.24) é estritamente positiva e satisfaz a EDP

$$\Delta_{\Sigma} \Psi - \frac{|\nabla \Psi|^2}{\Psi} + (|A|^2 - 2)\Psi = 0.$$

Demonstração. Segue do trabalho de Lawson que um toro mínimo na esfera \mathbb{S}^3 não tem pontos umbílicos (cf. (LAWSON, 1970a, Proposition 1.5)). Disso decorre que a função $|A|$ é estritamente positiva. Usando a identidade de Simons (SIMONS, 1968, Theorem 5.3.1), obtemos

$$\Delta_{\Sigma} h_{ik} + (|A|^2 - 2)h_{ik} = 0, \quad (3.25)$$

visto que (h_{ik}) é a matriz que representa A . Multiplicando a equação (3.25) por $2h_{ik}$, tem-se

$$2\Delta_{\Sigma} h_{ik} h_{ik} + 2(|A|^2 - 2)h_{ik}^2 = 0. \quad (3.26)$$

Somando e subtraindo a quantidade

$$2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} \right)^2$$

na equação (3.26), obtemos

$$2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_j^2} h_{ik} + 2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} \right)^2 + 2(|A|^2 - 2)h_{ik}^2 = 0. \quad (3.27)$$

Como

$$2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_j^2} h_{ik} + 2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} \right)^2 = 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} h_{ik} \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 h_{ik}^2}{\partial x_j^2},$$

podemos reescrever a equação (3.27) como sendo

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 h_{ik}^2}{\partial x_j^2} - 2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} \right)^2 + 2(|A|^2 - 2)h_{ik}^2 = 0. \quad (3.28)$$

Na equação (3.28), somando em relação a i e k , obtemos:

$$\Delta_{\Sigma}(|A|^2) - 2|\nabla A|^2 + 2(|A|^2 - 2)|A|^2 = 0. \quad (3.29)$$

Note agora que

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma}(|A|^2) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 |A|^2}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial |A|^2}{\partial x_j} \right) = 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(|A| \frac{\partial |A|}{\partial x_j} \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial |A|}{\partial x_j} \frac{\partial |A|}{\partial x_j} + |A| \frac{\partial^2 |A|}{\partial x_j^2} \right) = 2|\nabla |A||^2 + 2|A| \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 |A|}{\partial x_j^2} \\ &= 2|\nabla |A||^2 + 2|A| \Delta_{\Sigma} |A|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim, substituindo (3.30) em (3.29), obtemos

$$\Delta_{\Sigma}(|A|) + \frac{|\nabla |A||^2}{|A|} - \frac{|\nabla A|^2}{|A|} + (|A|^2 - 2)|A| = 0. \quad (3.31)$$

Provemos agora que

$$|\nabla A|^2 = 2|\nabla |A||^2. \quad (3.32)$$

De fato, elevando ao quadrado a equação (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_2} \right)^2 &= -2 \frac{\partial h_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial h_{21}}{\partial x_2}, \\ \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x_2} \right)^2 &= -2 \frac{\partial h_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial h_{22}}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Cada uma das equações em (3.33) corresponde a $k = 1$ e $k = 2$, respectivamente. Disso decorre que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_2}\right)^2 &= 2\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_2}\right)^2, \\ \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x_2}\right)^2 &= 2\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}\right)^2, \\ \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_1}\right)^2 &= 2\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial x_1}\right)^2, \\ \left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x_1}\right)^2 &= 2\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Somando as equações em (3.34), e lembrando que $h_{12} = h_{21}$, obtemos:

$$|\nabla A|^2 = 4\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}\right)^2. \tag{3.35}$$

Note que

$$|A| = \sqrt{2h_{11}^2 + 2h_{12}^2} \tag{3.36}$$

e

$$|\nabla|A||^2 = \left(\frac{\partial|A|}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial|A|}{\partial x_2}\right)^2. \tag{3.37}$$

Derivando $|A|$, dada em (3.36), em relação a x_1 e x_2 obtemos, respectivamente, que

$$\frac{\partial|A|}{\partial x_1} = \frac{2h_{11}\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1} + 2h_{12}\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}}{|A|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial|A|}{\partial x_2} = \frac{2h_{11}\frac{\partial h_{11}}{\partial x_2} + 2h_{12}\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}}{|A|}. \tag{3.38}$$

Elevando ao quadrado as duas equações em (3.38), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial|A|}{\partial x_1}\right)^2 &= \frac{4h_{11}^2\left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1}\right)^2 + 4h_{12}^2\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}\right)^2 + 8h_{11}h_{12}\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}}{|A|^2} \\ \left(\frac{\partial|A|}{\partial x_2}\right)^2 &= \frac{4h_{11}^2\left(\frac{\partial h_{11}}{\partial x_2}\right)^2 + 4h_{12}^2\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}\right)^2 + 8h_{11}h_{12}\frac{\partial h_{11}}{\partial x_2}\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}}{|A|^2} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Somando as duas equações em (3.39), e usando (3.37) e (3.38), obtemos

$$|\nabla|A||^2 = 2\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}\right)^2. \tag{3.40}$$

Das equações (3.35) e (3.40) obtém-se (3.32). Finalmente, substituindo a equação (3.32) em (3.31), obtemos

$$\Delta_{\Sigma}\Psi - \frac{|\nabla\Psi|^2}{\Psi} + (|A|^2 - 2)\Psi = 0,$$

finalizando a demonstração. \square

Proposição 3.10. Seja $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ um toro mínimo e mergulhado na esfera \mathbb{S}^3 . Se

$$\sup_{\substack{x,y \in \Sigma \\ x \neq y}} \frac{|\langle \mathbf{v}(x), F(y) \rangle|}{\Psi(x)(1 - \langle F(x), F(y) \rangle)} \leq 1, \quad (3.41)$$

então F é congruente ao toro de Clifford.

Demonstração. Segue da hipótese (3.41) que

$$\Psi(x)(1 - \langle F(x), F(y) \rangle) + \langle \mathbf{v}(x), F(y) \rangle \geq 0, \quad (3.42)$$

para quaisquer $x, y \in \Sigma$. Por uma questão de simplicidade, identificaremos a superfície Σ com sua imagem através do mergulho F , i.e., $F(x) = x$, para todo $x \in \Sigma$. Fixado um ponto arbitrário $\bar{x} \in \Sigma$, podemos encontrar uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_{\bar{x}}\Sigma$ tal que

$$h(e_1, e_1) = \Psi(\bar{x}), \quad h(e_1, e_2) = 0 \quad \text{e} \quad h(e_2, e_2) = -\Psi(\bar{x}),$$

onde h denota a segunda forma fundamental de F no ponto \bar{x} . Dado uma geodésica γ na superfície Σ , com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = e_1$, definimos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$f(t) = Z(\bar{x}, \gamma(t)) = \Psi(\bar{x})(1 - \langle \bar{x}, \gamma(t) \rangle) + \langle \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma(t) \rangle.$$

Note que, em virtude de (3.42), tem-se $f(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Calculando a derivada de primeira ordem de f , obtemos:

$$f'(t) = -\langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma'(t) \rangle + \langle \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma'(t) \rangle$$

Como γ é geodésica, $\gamma'(t)$ é o transporte paralelo de $\gamma'(0)$, logo

$$\langle \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma'(t) \rangle = \langle \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Assim, $f'(t)$ pode ser escrito como

$$f'(t) = -\langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma'(t) \rangle.$$

Calculando a derivada segunda de f , obtemos:

$$f''(t) = -\langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma''(t) \rangle.$$

Derivando a igualdade

$$\langle \mathbf{v}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

tem-se

$$\langle D\mathbf{v}(\gamma(t))\gamma'(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \mathbf{v}(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle = 0,$$

onde D denota a derivada usual em \mathbb{S}^3 . Como $\gamma''(t)$ não tem componentes em $T_{\gamma(t)}\Sigma$, tem-se

$$-\gamma''(t) = \gamma(t) + h(\gamma'(t), \gamma'(t))\mathbf{v}(\bar{x}).$$

Assim, $f''(t)$ se expressa como

$$f''(t) = \langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma(t) + h(\gamma'(t), \gamma'(t))\mathbf{v}(\bar{x}) \rangle.$$

Calculando a derivada de ordem 3 de f , obtemos:

$$\begin{aligned} f'''(t) = & \langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), \gamma'(t) \rangle + h(\gamma'(t), \gamma'(t)) \langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), D_{\gamma'(t)}\mathbf{v}(\gamma(t)) \rangle \\ & + \left(D_{\gamma'(t)}^{\Sigma} h \right) (\gamma'(t), \gamma'(t)) \langle \Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x}), \mathbf{v}(\gamma(t)) \rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Observe que $f(0) = 0$. Temos também $f'(0) = 0$, pois $\Psi(\bar{x})\bar{x} - \mathbf{v}(\bar{x})$ é perpendicular a $T_{\bar{x}}\Sigma$. Além disso, temos $f''(0) = 0$ pois

$$f''(0) = \Psi(\bar{x}) - h(e_1, e_1) = 0.$$

Provemos agora que $f'''(0) = 0$. Usando a expansão de Taylor em f , tem-se:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)t^2 + f'''(0)t^3 + r_3(t),$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r_3(t)}{t^3} = 0.$$

Como $f(t) \geq 0$ e $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ tem-se

$$0 \leq f'''(0)t^3 + r_3(t). \quad (3.44)$$

Dividindo por t^3 em (3.44), e fazendo $t \rightarrow 0$, obtemos

$$0 \leq f'''(0).$$

Por outro lado, usando $-t$ ao invés de t e aplicando a mesma ideia, obtemos

$$f'''(0) \leq 0,$$

logo $f'''(0) = 0$. Fazendo agora $t = 0$ na equação (3.43), tem-se

$$(D_{e_1}^{\Sigma} h)(e_1, e_1) = 0, \quad (3.45)$$

pois $e_1, D_{e_1}\mathbf{v}(\bar{x}) \in T_p\Sigma$ e $\Psi(\bar{x})p - \mathbf{v}(\bar{x})$ e $\mathbf{v}(\bar{x})$ são paralelos. Trocando o referencial $\{e_1, e_2, \mathbf{v}\}$ por $\{e_2, e_1, -\mathbf{v}\}$, e argumentando de maneira análoga, obtemos

$$(D_{e_2}^{\Sigma} h)(e_2, e_2) = 0. \quad (3.46)$$

Como $h_{11} + h_{22} = 0$, segue de (3.45) e (3.46) que

$$(D_{e_2}^{\Sigma} h)(e_1, e_1) = (D_{e_1}^{\Sigma} h)(e_2, e_2) = 0$$

e

$$(D_{e_1}^{\Sigma} h)(e_2, e_2) = (D_{e_2}^{\Sigma} h)(e_1, e_1) = 0,$$

implicando que

$$(D_{e_1}^\Sigma h)(e_2, e_2) = 0$$

e

$$(D_{e_2}^\Sigma h)(e_1, e_1) = 0.$$

Aplicando as equações de Codazzi nas identidades acima, obtemos que $\nabla h = 0$. Disso decorre, em particular, que a curvatura intrínseca K de Σ é constante e, assim, a métrica induzida em Σ por F é flat. Logo, pelo trabalho de Lawson (cf. (LAWSON, 1969, Corollary 3)), tem-se que $K \equiv 0$ ou $K \equiv 1$. Como Σ não tem pontos umbílicos, segue que $K \equiv 0$ e, portanto, Σ é um subconjunto aberto do toro de Clifford. A compacidade de Σ implica que F é congruente ao toro de Clifford. \square

Iremos a partir de agora finalizar a prova do Teorema 1.1. Dado um toro mínimo e mergulhado $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$, considere a expressão

$$\mathfrak{K} = \sup_{\substack{\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma \\ \bar{x} \neq \bar{y}}} \frac{|\langle \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle|}{\Psi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)}, \quad (3.47)$$

onde Ψ é dada em (3.24). Se $\mathfrak{K} \leq 1$, segue da Proposição 3.10 que F é congruente ao toro de Clifford. Assim, resta considerar o caso em que $\mathfrak{K} > 1$. Trocando a direção normal \mathbf{v} por $-\mathbf{v}$, caso necessário, podemos escrever

$$\mathfrak{K} = \sup_{\substack{\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma \\ \bar{x} \neq \bar{y}}} \frac{-\langle \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle}{\Psi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)}. \quad (3.48)$$

Assim, em virtude de (3.48), a função Z , dada por

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) = \mathfrak{K} \Psi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + \langle \mathbf{v}(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle,$$

satisfaz

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0, \quad (3.49)$$

para quaisquer $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$. Considere agora o conjunto

$$\Omega = \{\bar{x} \in \Sigma : \text{existe } \bar{y} \in \Sigma \setminus \{\bar{x}\} \text{ tal que } Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0\} \quad (3.50)$$

Lema 3.11. O conjunto Ω , dado em (3.50), é não-vazio.

Demonstração. Sejam $x, y \in \Sigma$. Como $\Psi(x)(1 - \langle F(x), F(y) \rangle)$ é contínua e Σ é compacto então existe $M > 0$ tal que

$$\Psi(x)(1 - \langle F(x), F(y) \rangle) \leq M.$$

Pela definição de \mathfrak{K} , tem-se que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n, y_n \in \Sigma$, onde $x_n \neq y_n$, tal que

$$\frac{-\langle \mathbf{v}(x_n), F(y_n) \rangle}{\Psi(x_n)(1 - \langle F(x_n), F(y_n) \rangle)} > \mathfrak{K} - \frac{1}{nM}.$$

Desenvolvendo a desigualdade anterior, podemos escrevê-la como:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{\Psi(x_n)(1 - \langle F(x_n), F(y_n) \rangle)}{nM} > Z(x_n, y_n) \geq 0. \quad (3.51)$$

Como tais (x_n) e (y_n) são seqüências limitadas, então existem subsequências convergentes (x_{n_k}) e (y_{n_k}) tais que $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ e $y_{n_k} \rightarrow \bar{y}$, onde $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$. Usando as subsequências já mencionadas em (3.51) e tomando limite, tem-se que

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Se $\bar{x} = \bar{y}$, então

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) = Z(\bar{x}, \bar{x}) = \langle \nu(\bar{x}), F(\bar{x}) \rangle = 0.$$

Isso implica que $F(\bar{x}) \in T_{\bar{x}}\Sigma$, então $F(\bar{x})$ pode-se expressar como combinação linear dos $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x})$, logo

$$F(\bar{x}) = a^i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}). \quad (3.52)$$

Lembrando que $\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \rangle = 0$ e tomando o produto interno em (3.52), obtêm-se

$$0 = \left\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \right\rangle = a^i \delta_{ij}.$$

Então $a^i = 0$, o que implica que $F(\bar{x}) = 0$, uma contradição. Portanto $\bar{x} \neq \bar{y}$ e $\bar{x} \in \Omega$. \square

O próximo passo agora é provar que o conjunto Ω , dado em (3.50), é aberto. Para isso, faremos uso de dois resultados. O primeiro deles é o *princípio do máximo estrito de Bony* para equações elípticas não-degeneradas (cf. (BRENDLE, 2010, Corollary 9.7)).

Teorema 3.12. Dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e campos vetoriais $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(U)$, considere uma função diferenciável não-negativa $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\sum_{j=1}^m (D^2 \varphi)(X_j, X_j) \leq -L \inf_{|\xi| \leq 1} (D^2 \varphi)(\xi, \xi) + L|d\varphi| + L\varphi, \quad (3.53)$$

onde L é uma constante positiva. Seja $F = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$ o conjunto dos zeros de φ e suponha que $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ seja uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) \in F$ e $\gamma'(s) = \sum_{j=1}^m f_j(s) X_j(\gamma(s))$, para certas funções diferenciáveis $f_1, \dots, f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Então $\gamma(s) \in F$, para todo $s \in [0, 1]$. Este teorema também é válido para um conjunto aberto U de uma variedade Riemanniana em vez de \mathbb{R}^n . Para demonstrar isso, divide-se o caminho γ em segmentos pequenos onde cada segmento está numa carta coordenada. Logo se aplica o teorema a cada segmento.

O seguinte resultado é uma estimativa obtida fazendo-se uma adaptação na demonstração da Proposição 3.8.

Considere dois pontos $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$, com $\bar{x} \neq \bar{y}$. Seja (x_1, x_2) um sistema de coordenadas normais geodésicas em torno de \bar{x} tal que

$$h_{11}(\bar{x}) = \lambda_1, \quad \lambda_{12}(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad h_{22}(\bar{x}) = \lambda_2.$$

Além disso, seja (y_1, y_2) um sistema de coordenadas normais geodésicas em torno de \bar{y} tal que

$$\left\langle w_1, \frac{\partial F}{\partial y_1}(\bar{y}) \right\rangle \geq 0, \quad \left\langle w_1, \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}) \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle w_2, \frac{\partial F}{\partial y_2}(\bar{y}) \right\rangle \geq 0,$$

onde w_1 e w_2 são dados em (3.6). Adaptando a demonstração do Lema 3.4, podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^2 \left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right| \leq \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \left(Z(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \right), \quad (3.54)$$

onde Λ é uma função contínua sobre o conjunto

$$\{(\bar{x}, \bar{y}) \in \Sigma \times \Sigma : \bar{x} \neq \bar{y}\}$$

que, eventualmente, deixa de ser limitada numa vizinhança da diagonal de $\Sigma \times \Sigma$.

Lema 3.13. Dados dois pontos $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$, com $\bar{x} \neq \bar{y}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \leq -\frac{\aleph^2 - 1}{\aleph} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ & + \tilde{\Lambda}(\bar{x}, \bar{y}) \left(Z(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $\tilde{\Lambda}(\bar{x}, \bar{y})$ é uma função contínua no conjunto $\{(\bar{x}, \bar{y}) \in \Sigma \times \Sigma : \bar{x} \neq \bar{y}\}$, a qual pode ser não limitada numa vizinhança da diagonal de $\Sigma \times \Sigma$.

Demonstração. Em virtude das Proposições 3.8 e 3.9, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ & = -\frac{\aleph^2 - 1}{\aleph} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 + 4\aleph\Psi(\bar{x}) - (|A(\bar{x})|^2 + 2)Z(\bar{x}, \bar{y}) \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 (\lambda_i - \aleph\Psi(\bar{x})) \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle - \frac{2}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \left\langle F(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ & + \frac{1}{\aleph\Psi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right)^2 - 2\lambda_i \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right]. \end{aligned}$$

Como

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad \text{e} \quad |F(\bar{x})| = \left| \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right| = 1,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\
&= -\frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 + 4\varkappa \Psi(\bar{x}) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^2 (\lambda_i - \varkappa \Psi(\bar{x})) \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle + \frac{2}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \\
&+ \frac{1}{\varkappa \Psi(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle)} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right)^2 - 2\lambda_i \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right].
\end{aligned}$$

Estimemos, inicialmente, o termo

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) - 2\lambda_i \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \right].$$

Como

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \varkappa \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + (\lambda_i - \varkappa \Psi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle,$$

temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) - 2\lambda_i \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \right] \\
&= \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \left[\varkappa \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + (\lambda_i - \varkappa \Psi(\bar{x})) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle \right] \\
&\leq \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \varkappa M(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle) + \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| 2\varkappa \Psi(\bar{x}),
\end{aligned}$$

onde

$$M = \sup_{\substack{\bar{x} \in \Sigma \\ i=1,2}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\bar{x}) \right|$$

e notando que $\lambda_i \leq \varkappa \Psi(\bar{x})$, com $i = 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\
&\leq -\frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 + 4\varkappa \Psi(\bar{x}) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^2 (\lambda_i - \varkappa \Psi(\bar{x})) \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle + \left(\frac{4}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} + \frac{M}{\Psi(\bar{x})} \right) \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right|.
\end{aligned}$$

Estimemos agora o termo

$$2 \sum_{i=1}^2 (\lambda_i - \varkappa \Psi(\bar{x})) \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle.$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right|^2 &= |w_i|^2 + \left| \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right|^2 - 2 \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &= 2 - 2 \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade (3.54), obtemos:

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^2 (\lambda_i - \mathfrak{K} \Psi(\bar{x})) \left\langle w_i, \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \left(2 - \left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right|^2 \right) + \mathfrak{K} \Psi(\bar{x}) \sum_{i=1}^2 \left(\left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right|^2 - 2 \right) \\ &\leq \Psi(\bar{x}) \sum_{i=1}^2 \left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right|^2 + \mathfrak{K} \Psi(\bar{x}) \sum_{i=1}^2 \left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right|^2 - 4 \mathfrak{K} \Psi(\bar{x}) \\ &\leq 2 \Psi(\bar{x}) (\mathfrak{K} + 1) \sum_{i=1}^2 \left| w_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}(\bar{y}) \right| - 4 \mathfrak{K} \Psi(\bar{x}) \\ &\leq 2 \Psi(\bar{x}) (\mathfrak{K} + 1) \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \left(Z(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \right) - 4 \mathfrak{K} \Psi(\bar{x}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq -\frac{\mathfrak{K}^2 - 1}{\mathfrak{K}} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ &\quad + 2 \Psi(\bar{x}) (\mathfrak{K} + 1) \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) \left(Z(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \right) \\ &\quad + \left(\frac{4}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} + \frac{M}{\Psi(\bar{x})} \right) \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right|, \end{aligned}$$

e, assim, concluímos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq -\frac{\mathfrak{K}^2 - 1}{\mathfrak{K}} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \\ &\quad + \left(2 \Psi(\bar{x}) (\mathfrak{K} + 1) \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{4}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} + \frac{M}{\Psi(\bar{x})} \right) \\ &\quad \cdot \left(Z(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| + \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \right). \end{aligned}$$

Basta considerar então

$$\tilde{\Lambda}(\bar{x}, \bar{y}) = \left(2 \Psi(\bar{x}) (\mathfrak{K} + 1) \Lambda(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{4}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} + \frac{M}{\Psi(\bar{x})} \right),$$

o que prova (3.55). \square

Lema 3.14. O conjunto Ω , dado em (3.50), é aberto.

Demonstração. Dado $x \in \Omega$, definimos o conjunto

$$Y_x = \{y \in \Sigma : Z(x, y) = 0\}.$$

Com a notação do Teorema 3.12, identifiquemos a função φ com Z , e o conjunto F estará definido por

$$F = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \times Y_x.$$

Em cada ponto $(x, y) \in F$, Z atinge o seu mínimo. Logo, a derivada segunda da função Z naqueles pontos serão operadores bilineares definidos positivos. Pela continuidade da derivada segunda, para cada ponto $(x, y) \in F$ existe uma vizinhança $V_{(x,y)}$ tal que a derivada segunda avaliada nos pontos da vizinhança segue sendo um operador bilinear definido positivo. Considere o aberto

$$U = \bigcup_{(x,y) \in F} V_{(x,y)}$$

e dois campos vetoriais X_1 e X_2 definidos por:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando o valor da expressão em (3.53), obtemos:

$$\sum_{i=1}^2 D^2Z(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}.$$

No aberto U , a derivada segunda de Z é definida positiva, i.e., $0 < D^2Z(\xi, \xi)$, para qualquer campo vetorial ξ em U . Logo, obtemos que

$$0 \leq \inf_{|\xi| \leq 1} D^2Z(\xi, \xi) \leq D^2Z(0, 0) = 0.$$

Portanto $\inf_{|\xi| \leq 1} D^2Z(\xi, \xi) = 0$. Como estamos no caso $\mathfrak{K} > 1$, tem-se

$$-\frac{\mathfrak{K}^2 - 1}{\mathfrak{K}} \frac{\Psi(x)}{1 - \langle F(x), F(y) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), F(y) \right\rangle^2 \leq 0.$$

Podemos construir U de tal forma que esteja contido no complemento da vizinhança da diagonal onde a função $\bar{\Lambda}$ é ilimitada, logo $\bar{\Lambda}$ é limitada em U . Estamos, assim, nas condições do Teorema 3.12 e, portanto, podemos chegar à conclusão que para uma geodésica $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) \in U$ e $\gamma'(s) = f_1(s)X_1(\gamma(s)) + f_2(s)X_2(\gamma(s))$ para quaisquer funções $f_1, f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se que $\gamma(s) \in F$. Aplicando a projeção sobre a primeira variável no conjunto F obtemos o conjunto Ω que, pela escolha de X_1 e X_2 , conclui-se que é aberto porque é uma bola geodésica. \square

Considere agora dois pontos $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$, com $\bar{x} \neq \bar{y}$, tais que

$$Z(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial Z}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Usando a Proposição 3.9, a equação (3.23) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ = -\frac{\aleph^2 - 1}{\aleph} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Proposição 3.15. Para todo ponto $\bar{x} \in \Omega$, tem-se

$$\nabla \Psi(\bar{x}) = 0.$$

Demonstração. Fixemos um ponto arbitrário $\bar{x} \in \Omega$. Pela definição de Ω , existe um ponto $\bar{y} \in \Sigma \setminus \{x\}$ tal que $Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Como a função Z atinge seu mínimo global no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , a igualdade em (3.56) torna-se

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ = -\frac{\aleph^2 - 1}{\aleph} \frac{\Psi(\bar{x})}{1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle} \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Como estamos supondo $\aleph > 1$, concluímos que

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}), F(\bar{y}) \right\rangle = 0,$$

para cada $i = 1, 2$. Usando agora a equação (3.3), concluímos que

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \aleph \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\bar{x})(1 - \langle F(\bar{x}), F(\bar{y}) \rangle),$$

provando que $\nabla \Psi(\bar{x}) = 0$, para todo $\bar{x} \in \Omega$, como queríamos. \square

Finalizemos agora a prova do Teorema 1.1. Como Ω é aberto, segue da Proposição 3.15 que

$$\Delta_{\Sigma} \Psi(\bar{x}) = 0,$$

para todo ponto $\bar{x} \in \Omega$. Assim, a Proposição 3.9 implica que $\Psi(\bar{x}) = 1$, para todo $\bar{x} \in \Omega$. Usando o teorema de extensão única para soluções de equações diferenciais parciais elípticas (cf., por exemplo, (ARONSZAJN, 1957)), concluímos que $\Psi(\bar{x}) = 1$, para todo ponto $\bar{x} \in \Sigma$. Como consequência, a curvatura Gaussiana de Σ é identicamente nula. Como anteriormente, segue do trabalho de Lawson (LAWSON, 1969) que F é congruente ao toro de Clifford, e isso finaliza a demonstração do Teorema 1.1.

REFERÊNCIAS

ALMGREN, F. J. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of bernstein's theorem. **The Annals of Mathematics**, Princeton University, v. 84, n. 2, p. 277–292, Sept. 1966. Citado nas páginas 22 e 44.

ANDREWS, B. Noncollapsing in mean-convex mean curvature flow. **Geometry & Topology**, Mathematical Sciences Publishers, v. 16, n. 3, p. 1413–1418, July 2012. Citado nas páginas 45 e 46.

ARONSZAJN, N. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 36, p. 235–249, 1957. Citado na página 65.

BRENDLE, S. **Ricci Flow and the Sphere Theorem**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. Citado na página 60.

_____. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture. **Acta Mathematica**, v. 211, n. 2, p. 177–190, Dec 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11511-013-0101-2>>. Citado nas páginas 11, 13, 22 e 45.

_____. Minimal surfaces in S^3 : a survey of recent results. **Bulletin of Mathematical Sciences**, v. 3, n. 1, p. 133–171, May 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13373-013-0034-2>>. Citado na página 23.

CARMO, M. **Superfícies mínimas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987. Citado na página 23.

_____. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. Citado na página 30.

DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. **Submanifold Theory**. [S.l.]: Springer US, 2019. Citado nas páginas 23, 26 e 42.

HUISKEN, G. A distance comparison principle for evolving curves. **Asian Journal of Mathematics**, International Press of Boston, v. 2, n. 1, p. 127–134, 1998. Citado nas páginas 22 e 45.

LAWSON, H. B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. **The Annals of Mathematics**, Princeton University, v. 89, n. 1, p. 187–197, jan 1969. Citado nas páginas 22, 44, 59 e 65.

_____. Complete minimal surfaces in S^3 . **The Annals of Mathematics**, Princeton University, v. 92, n. 3, p. 335–374, nov 1970. Citado nas páginas 22, 44, 45 e 54.

_____. The unknottedness of minimal embeddings. **Inventiones mathematicae**, Springer Science and Business Media LLC, v. 11, n. 3, p. 183–187, sep 1970. Citado nas páginas 11, 22, 43 e 45.

MEEKS, W. **A survey on classical minimal surface theory**. First edition. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2012. Citado na página [23](#).

NITSCHKE, J. C. C. **Lectures on Minimal Surfaces**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado nas páginas [23](#) e [27](#).

SIMONS, J. Minimal varieties in riemannian manifolds. **The Annals of Mathematics**, Princeton University, v. 88, n. 1, p. 62–105, jul 1968. Citado nas páginas [42](#) e [54](#).

