UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Cociclos lineares em sistemas dinâmicos

Enos Yuiti Ogasawara

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Enos Yuiti Ogasawara

Cociclos lineares em sistemas dinâmicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

USP – São Carlos
Outubro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

O34c Ogasawara, Enos Yuiti
Cociclos lineares em sistemas dinâmicos / Enos Yuiti Ogasawara; orientador Daniel Smania Brandão. -- São Carlos, 2023.
74 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Sistemas dinâmicos. I. Brandão, Daniel Smania, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Enos Yuiti Ogasawara

Linear cocycles in dynamical systems

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

USP – São Carlos
October 2023

Ao meu irmão,
Marcel.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao Senhor por me ter sustentado até aqui, lembro-me agora dos dias em que gostaria de tentar uma pós-graduação na Matemática, e aqui Ele me permitiu estar. Pelos diários suprimentos de graça, força e consolo desde então, dou graças a Ele. Há ainda tantas coisas que não entendo, mas creio que das mãos de Deus elas vêm para cooperar para o meu bem, seja por agora, seja na eternidade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Smania Brandão, por todo o apoio, disposição e acompanhamento durante estes dois anos, especialmente por ter confiado em meu trabalho, ainda que pudesse encontrar motivos para não fazê-lo.

À minha família, especialmente aos meus pais, Jorge e Elza, e ao meu irmão Marcel, por todo o amor, apoio e paciência, especialmente nas horas de maior tristeza. Lembro-me também dos meus avós, Kozo e Kuniko, Aritomo e Kaoru. Isto é construído sobre os ombros de vocês.

Aos meus amigos de Igreja, de fé, de República, de pós-graduação, de ABU e de laboratório. Agradeço a cada um: cada conversa, cada aconselhamento, cada puxão de orelha, cada refeição partilhada e cada abraço me permitiu estar aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Agora, pois, ouve, ó Jacó, servo meu, ó Israel, a quem escolhi.
Assim diz o SENHOR, que te criou, e te formou desde o ventre, e que te ajuda:
Não temas, ó Jacó, servo meu, ó amado, a quem escolhi."
(Isaías 44.1-2)

RESUMO

OGASAWARA, E. Y. **Cociclos lineares em sistemas dinâmicos**. 2023. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Nesta dissertação, apresenta-se uma demonstração do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets, seguindo a prova de Viana e Mañé. Apresenta-se também um critério para hiperbolicidade de cociclos (dicotomia exponencial), trabalho devido a Sacker e Sell.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Teoria Ergódica, Cociclos lineares, Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

OGASAWARA, E. Y. **Linear cocycles in dynamical systems**. 2023. 74 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this dissertation, we demonstrate the Multiplicative Ergodic Theorem of Oseledets, following the proof of Viana and Mañé. We also present sufficient criteria for the hyperbolicity of linear cocycles (exponential dichotomy), work due to Sacker and Sell.

Keywords: Dynamical systems, Ergodic Theory, Linear cocycles, Lyapunov exponents.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Há mais de uma definição do que é um sistema dinâmico, mas pode-se entendê-lo como uma dupla (M, f), onde M é um conjunto e $f : M \to M$ é uma transformação. Intuitivamente, pensamos em M como o conjunto de todos os possíveis estados de um dado sistema (o *espaço de fase*) e f a lei que rege o comportamento deste sistema ao longo do tempo (a *lei de evolução*). Dessa forma, se considerarmos que o dado sistema está em um estado x, após uma unidade de tempo (discreto) seu estado deverá ser $f(x)$.

Um interesse primário em sistemas dinâmicos é predizer o estado desse sistema após longos períodos de tempo (o que chamamos de *comportamento assintótico* do sistema). Dessa forma, é interessante saber qual o comportamento de

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}}(x)$$

quando n é um número suficientemente grande.

Em Teoria Ergódica, os objetos de interesse são os sistemas dinâmicos que possuem medida invariante. Neste caso, exige-se um pouco mais tanto do conjunto M como da transformação $f : M \to M$, a saber, que $M = (M, \mathscr{A}, \mu)$ seja um espaço de medida e que a transformação f preserve a medida μ, isto é:

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)), \text{ para todo } E \subset M \text{ mensurável.}$$

Este ramo da matemática teve suas origens no século XIX a partir da chamada *hipótese ergódica*, formulada pelo físico Ludwig Boltzmann, na elaboração da teoria cinética dos gases. Ele deduziu que médias temporais de uma grandeza observável ao longo de órbitas coincidem com as médias temporais dessa mesma grandeza, isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi d\mu,$$

onde $\phi : M \to \mathbb{R}$ representa a medida da grandeza feita no sistema.

A maneira como a hipótese foi originalmente formulada por Boltzmann estava equivocada. Entretanto, a questão da existência das médias temporais passou a ser objeto de investigação de matemáticos no objetivo de compreender em quais condições esta existência se daria.

Ainda no século XIX, pode-se destacar os trabalhos de Joseph Liouville e Carl Friedrich Gauss. Liouville observou que sistemas da Mecânica Newtoniana admitem uma medida invariante natural no seu espaço de configurações, enquanto que Gauss mostrou que a função

$$G : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \text{parte fracionária de } \frac{1}{x}$$

admite uma medida invariante que é equivalente à medida de Lebesgue em $[0,1]$.

O primeiro resultado mais notável foi descoberto por Henri Poincaré ao fim do século XIX com seu Teorema de Recorrência. Através da observação de corpos celestes, cujo movimento é descrito por certas equações diferenciais, Poincaré notou que para quase todo estado inicial do sistema, a solução da equação diferencial volta arbitrariamente para perto do estado inicial. Uma observação interessante é que tal propriedade não é restrita à mecânica celeste, mas qualquer sistema dinâmico com medida invariante e finita também a possui.

Foi na década de 1930, porém, que os fundamentos da Teoria Ergódica foram lançados. Em particular, destacam-se John von Neumann e George David Birkhoff ao provarem a existência das médias temporais de funções integráveis para quase toda órbita.

Um objeto de particular interesse na Teoria Ergódica são os *cociclos lineares*. Sendo $A : M \to \mathrm{GL}(d)$ função mensurável que toma valores no grupo linear de matrizes $d \times d$, o cociclo linear definido por A sobre f é a tranformação:

$$F : M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d, \text{ com } F(x,v) = (f(x), A(x)v).$$

Neste contexto, podemos citar o Teorema de Furstenberg-Kesten, que prova a boa definição das taxas exponenciais de crescimento (ou decaimento) da norma $\|A^n(x)\|$ e conorma $\|A^n(x)^{-1}\|^{-1}$ de cociclos para quase todo ponto.

O que constitui uma das motivações desta dissertação pode ser visto justamente como um refinamento deste último resultado, que é Teorema de Oseledets, publicado em 1968 por V. I. Oseledets. Este Teorema afirma a existência das taxas exponenciais (isto é, dos *expoentes de Lyapunov*) das iterações

$$|A^n(x)v|, \text{ quando } n \to \infty, \tag{1.1}$$

para todo vetor v, não se atendo somente à norma e conorma das matrizes. Este resultado obteve grande impacto e outras demonstrações surgiram desde então, com destaque para as demonstrações de (RAGHUNATTAN, 1979) (que utiliza o Teorema de Furstenberg-Kesten) (RUELLE, 1979) e (MAÑÉ; LEVY, 2012). Em particular, David Ruelle extendeu o Teorema de Oseledets para Espaços de Hilbert (RUELLE, 1982) e Ricardo Mañé para transformações compactas em Espaços de Banach (MAÑÉ, 2006), ambos em dimensão infinita.

Em particular, este interesse pelo comportamento assintótico da norma das iterações remonta aos trabalhos de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, que introduziu os expoentes de Lyapunov ao estudar a estabilidade de soluções de equações diferenciais (LYAPUNOV, 1992). De forma mais específica, considere a equação diferencial linear

$$\dot{v}(t) = B(t)v(t),$$

onde $B(\cdot)$ é função limitada que vai de $\mathbb{R}$ para o espaço das matrizes $d \times d$. Pela teoria geral de equações diferenciais, existe a chamada *matriz fundamental* A^t, com $t \in \mathbb{R}$ de forma que $A^t v_0$ é a solução do problema de valor inicial com $v(0) = v_0$.

A estratégia usada por Lyapunov para avaliar a estabilidade exponencial assintótica da solução foi usar uma certa função que é avaliada no espaço das soluções do sistema linear e que toma valores em $\mathbb{R}$, a saber,

$$\lambda(v) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log |A^t v_0|,$$

que é o expoente de Lyapunov, e que prova a estabilidade da solução sempre que toma valores negativos.

Dentro deste contexto de equações diferenciais lineares, encontra-se outra motivação desta dissertação, que é o critério para hiperbolicidade de cociclos, descoberto por Robert Sacker e George Sell ((SACKER; SELL, 1974) e (SACKER; SELL, 1976)).

Nestes trabalhos, primariamente interessados em equações diferenciais lineares, apresentam-se critérios para a existência de uma coleção de decomposições de $\mathbb{R}^d$ em subsepaços invariantes pela ação do cociclo, de forma que 1.1 expanda ou contraia de acordo com estes subespaços (o que os autores chamam de *dicotomia exponencial*).

Neste trabalho apresentaremos o Teorema de Oseledets, seguindo a demonstração de Marcelo Viana (VIANA,). Neste trabalho, o autor baseou-se na demonstração de Ricardo Mañé (MAÑÉ; LEVY, 2012). Apresentamos também um critério para a hiperbolicidade de cociclos lineares, seguindo os trabalhos de Robert Sacker e George Sell ((SACKER; SELL, 1974) e (SACKER; SELL, 1976)).

Sendo o Capítulo 1 esta Introdução, no Capítulo 2 apresentamos definições e resultados elementares em Teoria Ergódica que julgamos necessários para a compreensão do texto. No Capítulo 3 apresentamos os cociclos lineares através de definições e exemplos, enunciando também o Teorema de Oseledets com uma breve contextualização histórica do resultado.

Os Capítulos 4 e 5 são devotados às demonstrações dos resultados desta dissertação, a saber, o Teorema de Oseledets e o critério de Hiperbolicidade de Cociclos (chamado pelos autores de *Dicotomia Exponencial*), respectivamente.

CAPÍTULO

2

PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo apresentamos os conceitos elementares em Teoria Ergódica necessários para o entendimento das capítulos posteriores. Nos basearemos em Marcelo Viana e Krerley Oliveira (VIANA; OLIVEIRA, 2016) para este capítulo.

Admitiremos que o leitor possui conhecimento consistente em Teoria da Medida e algum conhecimento em Topologia e Sistemas dinâmicos.

2.1 Teoria Ergódica

A Teoria Ergódica trata do estudo de sistemas dinâmicos cuja medida é invariante. Dessa forma, consideraremos (f, M) um sistema dinâmico onde M=$(M, \mathscr{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $f : M \to M$ uma transformação mensurável.

Definição 2.1.1. Uma medida μ é dita *invariante por f* se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo } E \in \mathscr{A}.$$

Também se diz que f *preserva* μ.

Intuitivamente, dizer que uma medida μ é *invariante por f* signfica que, dado um ponto qualquer em M, a probabilidade deste ponto estar em E é a mesma dele estar em sua pré-imagem.

É possível estender a definição acima para *fluxos*, isto é, para famílias de transformações $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}}$, onde $f^t : M \to M$, satisfazendo

(i) $f^0 = Id$;

(ii) $f^t \circ f^s = f^{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, diz-se que uma medida μ é *invariante* por um fluxo $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ se é invariante por f^t, para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\mu(E) = \mu(f^{-t}(E)) \text{ para todo } E \in \mathscr{A} \text{, para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um resultado clássico é o Teorema de Recorrência de Poincaré, que afirma que, dada uma medida finita em M e um conjunto mensurável de medida positiva E, quase todo ponto de E retorna a E uma quantidade infinita de vezes.

Teorema 2.1.2 (Recorrência de Poincaré)**.** Seja $f : M \to M$ transformação mensurável e μ medida finita invariante por f. Seja $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) > 0$. Então, para μ-quase todo ponto $x \in E$, existem infinitos valores de n tais que $f^n(x)$ também pertencem a E.

Observação 2.1.3. Note que um resultado análogo ao Teorema 2.1.2 é também válido no contexto de fluxos. De fato, se μ é invariante por um fluxo $\{f^t\}_t$, então μ é, em particular, invariante por $f = f^1$. Dessa forma, dado $E \in \mathscr{A}$ com medida positiva, existem t_j, $j \in \mathbb{N}$, tais que $f^{t_j} \in E$, como consequência direta do Teorema.

Apresentamos um exemplo de sistema dinâmico com medida invariante. Algumas conclusões a seu respeito podem ser interessantes através da aplicação do Teorema 2.1.2.

Exemplo 2.1.4. Considere o sistema $f : [0,1] \to [0,1]$ dado por

$$x \mapsto 10x - [10x],$$

onde $[y]$ é a função *parte inteira* de um número real. Isto é, $[y]$ é o maior inteiro n tal que $n \leq y \leq n+1$. Dessa forma, para cada $x \in [0,1]$, $f(x)$ corresponde a *parte fracionária* de $10x$.

Afirmamos que a medida de Lebesgue μ em $[0,1]$ é invariante por f, isto é,

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset [0,1]. \tag{2.1}$$

Note, primeiro, que isto é verdadeiro no caso de intervalos: se $E = (a,b)$ onde $0 < a < b < 1$, temos que

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{j=0}^{9} \left(\frac{a+j}{10}, \frac{b+j}{10} \right)$$

E temos que a pré-imagem de E consiste de uma união de dez intervalos disjuntos, cuja medida de Lebesgue de cada um deles corresponde a $\dfrac{\mu(E)}{10}$. Consequentemente, se E é união de finita intevalos, conclui-se facilmente que também vale $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$.

Como a família de todas as uniões finitas de intervalos em $[0,1]$ é a álgebra que gera a σ-álgebra boreliana de $[0,1]$, usaremos o seguinte Lema para provar 2.1:

Lema 2.1.5. Sejam $f : M \to M$ é transformação mensurável e μ uma medida finita em M. Suponha que exista uma álgebra $\mathscr{A}$ de conjuntos mensuráveis de M tal que $\mathscr{A}$ gera a σ-álgebra $\mathscr{B}$ de M e $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathscr{A}$. Então vale $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathscr{B}$. Isto é, μ é invariante por f.

Demonstração. Provemos, primeiro, que $\mathscr{C} = \{E \in \mathscr{B} : \mu(E) = \mu(f^{-1}(E))\}$ é uma classe monótona. Seja $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sequência crescente de elementos de $\mathscr{C}$, isto é, $E_1 \subset E_2 \subset ...$ e defina $E = \bigcup_{i\geq 1} E_i$.

Por um resultado de Teoria da Medida, temos que

$$\mu(E) = \lim_i \mu(E_i) \text{ e } \mu(f^{-1}(E)) = \lim_i \mu(f^{-1}(E_i)).$$

Assim, como $E_i \in \mathscr{C}$, temos que

$$\mu(E) = \lim_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(f^{-1}(E_i)) = \mu(f^{-1}(E)).$$

Segue, então, que $E \in \mathscr{C}$. Analogamente, concluímos que se E é intersecção de qualquer sequência de elementos de $\mathscr{C}$, então $E \in \mathscr{C}$, o que mostra que $\mathscr{C}$ é classe monótona.

Assim, do Teorema da classe monótona, segue que $\mathscr{C}$ coincide com a σ-álgebra $\mathscr{B}$ gerada por $\mathscr{A}$, concluindo a demonstração do Lema. □

Agora, considerando $x \in [0,1]$ na sua expansão decimal, isto é,

$$x = 0, a_0a_1a_2a_3\cdots, \text{ onde } a_i \in \{0,1,...9\},$$

então $f(x)$ corresponde a um *shift* unilateral da expansão de x, isto é,

$$f(x) = 0, a_1a_2a_3a_4\cdots.$$

Mais geralmente, a n-ésima iteração de f é dada por

$$f^n(x) = 0, a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots, \text{ com } n \geq 1.$$

Seja, então, $E \subset [0,1]$ o conjunto de todos os x tais que $a_0 = 7$, isto é, $E = \left\{x : \frac{7}{10} \leq x < \frac{8}{10}\right\}$. Do Teorema 2.1.2, μ-quase todo ponto em E possui infinitos valores de n tais que $f^n(x) \in E$, isto é, existem infinitos valores de n tais que $a_n = 7$.

Concluímos, assim, que $\mu-$quase todo ponto em $\left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right)$ possui infinitos dígitos 7 em sua expansão decimal, sendo evidente que esta mesma conclusão vale para para qualquer outro dígito.

2.2 Teorema Ergódico de Birkhoff

Definição 2.2.1. Seja $E \subset M$ um conjunto mensurável de medida positiva e x um ponto arbitrário em M. O *mean sojourn time* de x em E é definido como

$$\tau(E,x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in E\}$$

Há também a definição análoga para fluxos, cuja expressão é

$$\tau(E,x) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} m\left(\{0 \leq t < n : f^t(x) \in E\}\right),$$

onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

O Teorema Ergódico de Birkhoff trata da existência do *mean sojourn time* μ-quase todo ponto em qualquer probabilidade invariante por f em M.

Teorema 2.2.2 (Ergódico de Birkhoff)**.** Seja $f: M \to M$ transformação mensurável, μ uma probabilidade invariante por f e $E \subset M$ mensurável. Então $\tau(E,x)$ existe em μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso,

$$\int \tau(E,x)d\mu(x) = \mu(E)$$

Observação 2.2.3. Note que, se $\tau(E,x)$ existe para algum $x \in M$, então $\tau(E, f(x)) = \tau(E,x)$.

O próximo Teorema é a extensão do Teorema 2.2.2 para funções integráveis. De fato, note que o *mean sojourn time* pode ser expresso como

$$\tau(E,x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)), \text{ onde } \phi = \mathbf{1}_E.$$

Teorema 2.2.4 (Ergódico de Birkhoff)**.** Seja $f: M \to M$ transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\phi: M \to \mathbb{R}$, o limite

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$$

existe μ-quase sempre em M. Além disso, a função $\tilde{\phi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\phi}(x)d\mu(x) = \int \phi(x)d\mu(x).$$

2.3 Ergodicidade

Daqui ao fim do capítulo, admitiremos que μ é uma probabilidade invariante por f.

Definição 2.3.1. Dizemos que um sistema dinâmico é *ergódico* se o *mean sojourn time* $\tau(E,x)$ coincide com a a medida de E μ-quase sempre em M, para qualquer conjunto mensurável E.

Veremos que há algumas formas equivalentes de se definir ergodicidade. Por exemplo, um sistema é ergódico se ele é indivisível, no sentido de que qualquer conjunto invariante ou possui medida total ou possui medida zero. Outra formulação equivalente é dada da seguinte forma: dada $\phi: M \to \mathbb{R}$ integrável, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi d\mu, \ \mu\text{-quase sempre},$$

isto é, que a média temporal coincide com a média espacial.

Para verificar todas as formas de se definir um sistema ergódico, introduziremos as definições de função invariante e conjunto invariante.

Definição 2.3.2. Uma função mensurável $\phi : M \to \mathbb{R}$ é dita *invariante* se $\phi = \phi \circ f$ μ-quase sempre.

Isto é, ϕ é constante em cada órbita a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 2.3.3. Dizemos que um conjunto mensurável $B \subset M$ é *invariante* se sua função característica $\mathbf{1}_E$ é invariante.

De forma equivalente, $B \subset M$ é invariante se

$$\mu(B\Delta f^{-1}(B)) = 0.$$

A próxima Proposição exibe algumas formulações equivalente de um sistema ergódico:

Proposição 2.3.4. Seja μ probabilidade invariante por $f : M \to M$ mensurável. As seguintes condições são equivalentes:

(i) Para todo $B \subset M$ mensurável tem-se $\tau(B,x) = \mu(B)$ μ-quase sempre em M;

(ii) Para todo $B \subset M$ mensurável, a função $x \mapsto \tau(B,x)$ é constante μ-quase sempre;

(iii) Para toda função integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$ tem-se $\tilde{\phi}(x) = \int \phi d\mu$ μ-quase sempre;

(iv) Para toda função integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$, a mpedia temporal $\tilde{\phi} : M \to \mathbb{R}$ é constante μ-quase sempre;

(v) Para toda função integrável e invariante $\psi : M \to \mathbb{R}$ tem-se $\psi(x) = \int \psi d\mu$ μ-quase sempre;

(vi) Toda função integrável e invariante $\psi : M \to \mathbb{R}$ é constante μ-quase sempre;

(vii) Dado $B \subset M$ invariante, tem-se ou $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.

Para a demonstração desta Proposição, deixamos como referência (VIANA; OLIVEIRA, 2016). Nos capítulos seguintes faremos uso das diferentes formulações apresentadas para um sistema ergódico, conforme for conveniente para cada contexto.

CAPÍTULO

3

COCICLOS LINEARES

Neste capítulo, apresentamos os cociclos lineares através de definições e alguns exemplos. Neste capítulo, seguiremos Marcelo Viana (VIANA, 2014), em particular nos exemplos apresentados.

No que segue, assumiremos ser $(M, \mathscr{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f: M \to M$ transformação mensurável que preserva μ e $A: M \to \mathrm{GL}(d)$ uma função mensurável que toma valores no grupo linear $\mathrm{GL}(d)$ (isto é, o grupo de todas as matrizes quadradas $d \times d$ que são inversíveis).

3.1 Introdução

Definição 3.1.1. O *cociclo linear* definido por A em f é uma sequência de funções em $\mathrm{GL}(d)$ definida por

$$A^n(x) = A(f^{n-1}(x)) \cdots A(f(x))A(x), \text{ para } n \geq 1 \text{ e}$$
$$A^0(x) = Id$$

para todo ponto $x \in M$. Se f é transformação inversível, podemos estender a sequência para todo o conjunto $\mathbb{Z}$ definindo

$$A^{-n}(x) = A^n(f^{-n}(x))^{-1} = A(f^{-n}(x))^{-1} \cdots A(f^{-1}(x))^{-1}, \text{ para } n \geq 1 \text{ e } x \in M.$$

Note que o cociclo, neste caso, induz uma *extensão linear*

$$F: M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d, \text{ com } F(x,v) = (f(x), A(x)v), \tag{3.1}$$

e sendo $\pi: M \times \mathbb{R}^d \to M$ a projeção natural $\pi(x,v) = x$, temos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R}^d \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] & M \times \mathbb{R}^d \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo e, consequentemente, $F \circ \pi = \pi \circ f$. A Figura 1 representa um cociclo linear onde M é uma curva e A assume valores em $\mathrm{GL}(2)$.

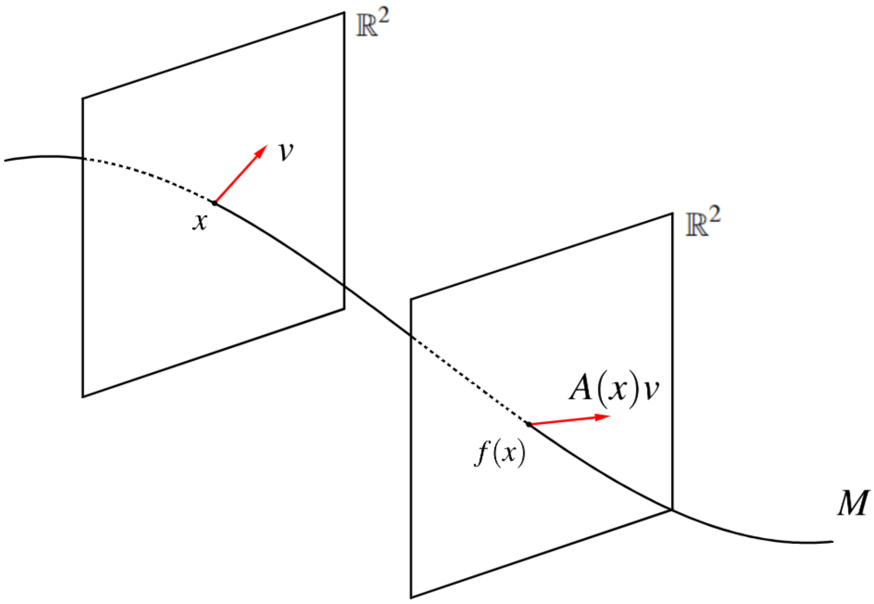

Figura 1 – Exemplo de cociclo

Assim, temos que para $n \in \mathbb{Z}$ a aplicação de F por n vezes é dada por:

$$F^n(x) = (f^n(x), A^n(x)v).$$

Extensões lineares como do tipo 3.1 são um caso particular de *fibrados vetoriais mensuráveis*. No caso, um espaço mensurável $\mathfrak{F}$ é dito *fibrado vetorial mensurável sobre M* se existe família enumerável de conjuntos mensuráveis Y_i que cobrem M e funções mensuráveis $\pi_i : M \times \mathbb{R}^d \to M$ tais que $\pi_i^{-1}(Y_i) = Y_i \times \mathbb{R}^d$. Além disso, existe função mensurável $F : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ de forma que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{F} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Dentro das hipóteses em que trabalharemos, entretanto, assumimos ser M um espaço métrico compacto, o que nos permite, por simplicidade, considerar apenas o caso em que $\mathfrak{F}$ é o *fibrado vetorial trivial*, isto é, quando $\mathfrak{F} = M \times \mathbb{R}^d$. De fato, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.2 ((BARREIRA; PESIN, 2007))**.** Se $\mathfrak{F}$ é fibrado vetorial mensurável sobre um espaço métrico compacto (M, μ), então existe $Y \subset M$ tal que $\mu(Y) = 1$ e $\pi^{-1}(Y)$ é (isomorfo ao) fibrado vetorial trivial.

Dessa forma, podemos considerar, sem perda de generalidade, que qualquer fibrado vetorial sobre um espaço métrico compacto é trivial.

A partir daqui, vamos nos referir à extensão linear induzida pelo cociclo como em 3.1 simplesmente como cociclo linear.

3.2 Exemplos

Exemplo 3.2.1 (Produtos de matrizes aleatórias)**.** Considere $X = \mathrm{GL}(d)$ e $M = X^{\mathbb{N}}$ e seja

$$f : M \to M,\ f((\alpha_k)_k) = (\alpha_{k+1})_k.$$

Isto é, f é o *shift* unilateral da sequência $(\alpha_k)_k$ em M. Seja também a função mensurável

$$A : M \to \mathrm{GL}(d),\ A((\alpha_k)_k) = \alpha_0$$

e $F : M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d$ o cociclo definido por A sobre f, isto é, $F((\alpha_k)_k, v) = ((\alpha_{k+1})_k, \alpha_0 v)$. Portanto, a n-ésima iterada de F é

$$F^n((\alpha_k)_k, v) = ((\alpha_{k+n})_k, \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_0 v).$$

Definindo o *cilindro* um subconjunto de M da forma

$$[i; E_i, ..., E_j] = \{(\alpha_k)_k : \alpha_i \in E_i, ..., \alpha_j \in E_j\}$$

onde $E_i, ..., E_j \subset X = \mathrm{GL}(d)$ são mensuráveis e dada p probabilidade em $\mathrm{GL}(d)$, considere a medida $\mu = p^{\mathbb{N}}$ em M, que é a medida produto, definida por:

$$\mu([i; E_i, ..., E_j]) = p(E_i)\cdots p(E_j),$$

onde $i \leq j$ e $E_i, ..., E_j$ são subconjuntos mensuráveis de $X = \mathrm{GL}(d)$. Além disso, temos que μ é invariante por f. Note que

$$f^{-1}([i; E_i, ..., E_j]) = \{(\alpha_{k-1})_k : \alpha_i \in E_i, ..., \alpha_j \in E_j\} = [i+1; E_i, ..., E_j]$$

e segue que

$$\mu([i; E_i, ..., E_j]) = \mu(f^{-1}([i; E_i, ..., E_j]))$$

se $E_i, ..., E_j \subset X = \mathrm{GL}(d)$ são mensuráveis.

Como a família de uniões finitas dos cilindros é a álgebra que gera a σ-álgebra produto em M e μ é medida finita em M, do Lema 2.1.5 segue que μ é invariante por f.

Exemplo 3.2.2 (Cociclos hiperbólicos)**.** Sendo M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ um homeomorfismo, chamamos o cociclo

$$F : M \times \mathbb{R}^2 \to M \times \mathbb{R}^2,\ F(x, v) = (f(x), A(x)v)$$

hiperbólico se existem $C > 0$ e $\lambda < 1$ de forma que, para todo $x \in M$ existem subespaços E_x^s e E_x^u em $\mathbb{R}^2$ onde

(i) $A(x)E^s_x = E^s_{f(x)}$ e $A(x)E^u_x = E^u_{f(x)}$;

(ii) $|A^n(x)v^s| \leq C\lambda^n|v^s|$ e $|A^{-n}(x)v^u| \leq C\lambda^n|v^u|$;

para todo $v^s \in E^s_x$, $v^u \in E^u_x$ e $n \geq 1$. Note que os subespaços E^s_x e E^u_x precisam ser transversais, pois dado $v^s \in E^s_x$, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|A^{-n}(x)\frac{v^s}{|v^s|}\right| = +\infty.$$

A Figura 2 representa um cociclo hiperbólico. No caso, temos novamente M uma curva com A assumindo valores em $GL(2)$.

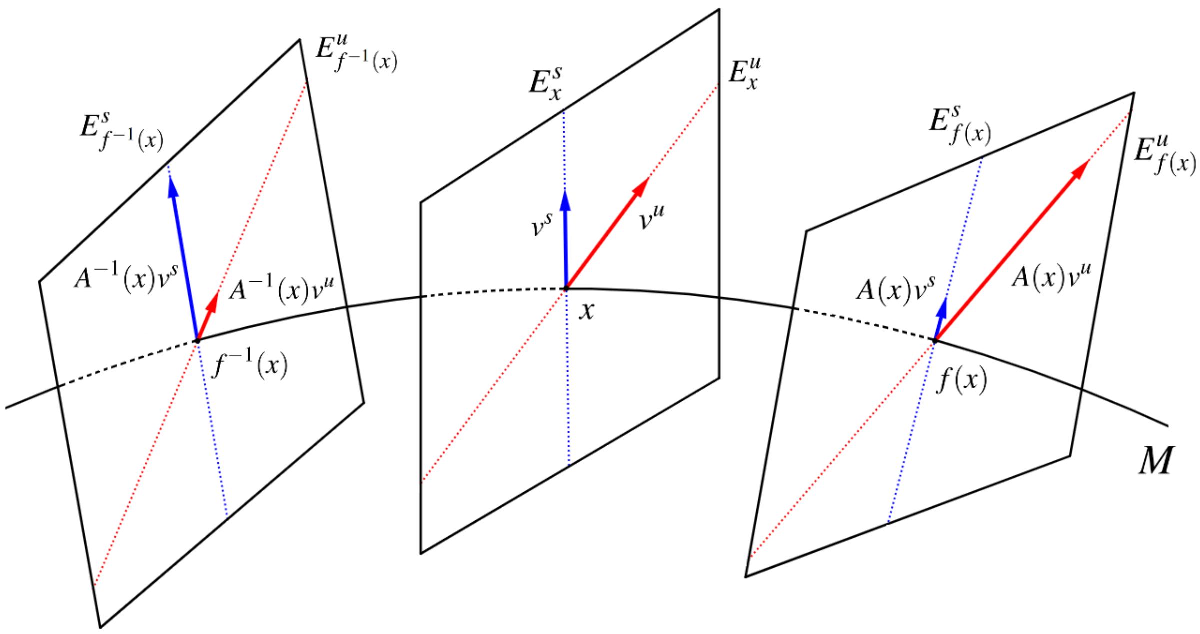

Figura 2 – Exemplo de cociclo hiperbólico

Observação 3.2.3. A noção de *hiperbolicidade* se estende para cociclos de qualquer dimensão. No caso, novamente considerando M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ um homeomorfismo, temos que

$$F : M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d,\ F(x,v) = (f(x), A(x)v)$$

é *hiperbólico* se existir uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^d = E^s_x \bigoplus E^u_x$, satisfazendo

(i) $A(x)E^s_x = E^s_{f(x)}$ e $A(x)E^u_x = E^u_{f(x)}$;

(ii) $|A^n(x)v^s| \leq C\lambda^n|v^s|$ e $|A^{-n}(x)v^u| \leq C\lambda^n|v^u|$ para todo $v^s \in E^s_x$, $v^u \in E^u_x$ e $n \geq 1$.

Exemplo 3.2.4 (Cociclo Derivada)**.** Sendo $f : M \to M$ um difeomorfismo no toro d-dimensional, isto é, $M = \mathbb{T}^d$, existem campos vetoriais suaves $\{X_1(x), \ldots, X_d(x)\}$ tais que formam base para o espaço tangente T_xM para todo $x \in M$. Neste caso, o *cociclo derivada* de f é

$$F : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d,\ F(x,v) = (f(x), A(x)v)$$

onde $A : M \to \mathrm{GL}(d)$ é a matriz, com respeito às bases $\{X_1(x),...,X_d(x)\}$ da derivada

$$Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}M.$$

A seguir, apresentamos um resultado fundamental em se tratando de cociclos, um Teorema devido a Furstenberg e Kesten.

Teorema 3.2.5 ((FURSTENBERG; KESTEN, 1960)**.** Se μ é probabilidade invariante por f e $A : M \to \mathrm{GL}(d)$ mensurável tal que $\log^+ \|A^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$, então

$$\lambda_+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| \text{ e } \lambda_-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)^{-1}\|^{-1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \|A^n(x)^{-1}\|$$

existem μ-quase sempre. Além disso, as funções λ_+, λ_- são integráveis com $\lambda_+ \geq \lambda_-$ e os números $\lambda_+(x)$ e $\lambda_-(x)$ são ditos os *expoentes de Lyapunov extremais*.

Em particular, este Teorema diz que tanto a *norma* $\|A^n(x)\|$ como a *conorma* $\|A^n(x)^{-1}\|^{-1}$ das matrizes $A^n(x)$ possuem taxas exponenciais de crescimento (ou decaimento) bem definidas μ-quase sempre, ajudando a compreender melhor o comportamento assintótico do cociclo.

O Teorema de Oseledets (ou Teorema Ergódico Multiplicativo), devido a V. I. Oseledets (OSELEDETS, 1968), pode ser visto como um refinamento do Teorema de Furstenberg-Kesten. De fato, para entendermos melhor este resultado, considere um ponto $x \in M$. Dizemos que este ponto é *regular* se existem números $\lambda_1(x) > ... > \lambda_\ell(x)$ e subespaços $E^1(x)$, ... , $E^\ell(x)$ de $\mathbb{R}^d$ tais que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| = \lambda_j(x)$$

para todo $v \in E^j(x) \setminus \{0\}$, $1 \leq j \leq \ell$, e

$$\mathbb{R}^d = E^1(x) \oplus \cdots \oplus E^\ell(x),$$

onde os números $\lambda_j(x)$ são os *expoentes de Lyapunov* do cociclo e $\dim E^j(x)$ é a *multiplicidade do expoente de Lyapunov* $\lambda_j(x)$. Assim, suponha que $\dim E^j(x) = n_j$, $1 \leq j \leq \ell$ e defina $\Lambda(n_1,...,n_\ell)$ como o conjunto de pontos regulares com ℓ expoentes de Lyapunov e tal que $\dim E^j(x) = n_j$.

Teorema 3.2.6 ((OSELEDETS, 1968)**.** Sendo M espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo, μ probabilidade f-invariante e $A : M \to \mathrm{GL}(d)$ contínua, tem-se:

(i) Para qualquer conjunto de naturais $\{n_1,...,n_\ell\}$, $\Lambda(n_1,...,n_\ell)$ é conjunto mensurável;

(ii) As funções

$$\Lambda(n_1,...,n_\ell) \ni x \mapsto \lambda_j(x) \in \mathbb{R},$$

$$\Lambda(n_1,...,n_\ell) \ni x \mapsto E^j(x) \in Grass(n_j,d)$$

são mensuráveis para $1 \leq j \leq \ell$;

(iii) O conjunto $\Lambda = \bigcup \Lambda(n_1, \ldots, n_\ell)$ de todos os pontos regulares é um conjunto mensurável de medida total.

Dessa forma, encontramos decomposição de $\mathbb{R}^d$ em subespaços invariantes pela ação de A (chamamos cada subespaço $E^j(x)$ de *subespaço de Oseledets*), de forma que os exponentes de Lyapunov restritos a cada subespaço ficam bem-definidos e limitados entre $\lambda_+(x)$ e $\lambda_-(x)$ para um conjunto de medida total.

Esse resultado foi notável de tal forma que se seguiram várias demonstrações alternativas e também outras formas de interpretá-lo desde então, se devendo especialmente às várias aplicações deste Teorema (GOL'DSHEID; MARGULIS, 1987).

3.3 Simplicidade do Espectro

Embora mais sofisticado, este último resultado nada diz quanto ao número de expoentes de Lyapunov que algum cociclo possui. De fato, é possível que o *espectro de Lyapunov*, isto é, o conjunto dos expoentes de Lyapunov, possua apenas um valor, ou uma quantidade ℓ de expoentes estritamente menor que d.

Um caso particular para o espectro ocorre quando a multiplicidade de cada expoente é igual a 1 (isto é, $\dim E^j = 1$ para todo $1 \leq j \leq \ell$). Quando isto acontece, dizemos que o espectro de Lyapunov é *simples* e o cociclo deve possuir exatamente d expoentes. Trabalhos notáveis no estudo da simplicidade do espectro de Lyapunov foram desenvolvidos por (GUIVARC'H; RAUGI, 1986) e (GOL'DSHEID; MARGULIS, 1989) na década de 1980. No caso, considerou-se a sequência

$$A^n(x) = A_n \cdots A_1$$

de matrizes aleatórias no grupo linear $\mathrm{GL}(d)$. Ambos apresentam critérios para a simplicidade do espectro de Lyapunov com a ressalva de que, no segundo artigo, dispensou-se a necessidade da propriedade de contração para um semigrupo em muitos casos, por ser propriedade difícil de se verificar (GOL'DSHEID; MARGULIS, 1989).

Mais recentemente, os estudos de (BONATTI; VIANA, 2000) estenderam os critérios encontrados por (GUIVARC'H; RAUGI, 1986) para cociclos Hölder-contínuos com holonomias invariantes. De forma similar, (AVILA; VIANA, 2007) estenderam os conclusões de (GOL'DSHEID; MARGULIS, 1989) onde, uma aplicação notável deste último foi a demonstração da conjectura de Zorich-Kontsevich (VIANA, 2014).

CAPÍTULO

4

O TEOREMA DE OSELEDETS

Este capítulo apresenta o Teorema de Oseledets (OSELEDETS, 1968), também conhecido como Teorema Ergódico Multiplicativo, resultado fundamental na teoria de expoentes de Lyapunov.

É possível ver este resultado como um refinamento do Teorema de Furstenberg-Kesten (FURSTENBERG; KESTEN, 1960): este último assegura a existência das taxas exponenciais de variação das normas $||A^n(x)||$ e $||A^n(x)^{-1}||^{-1}$ $\mu-$quase sempre em M, sob determinadas condições. O Teorema de Oseledets, entretanto, diz respeito às normas $|A^n(x)v|$ para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^d$.

4.1 Preliminares

Ao longo deste capítulo, assumiremos ser M um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo, μ uma probabilidade em M f-invariante e $A : M \to \mathrm{GL}(d)$ uma função contínua. Sem perda de generalidade, trabalharemos com o fibrado vetorial trivial $\mathfrak{F} = M \times \mathbb{R}^d$ (lembre da Proposição 3.1.2). Neste capítulo, adotaremos a seguinte definição de subfibrado vetorial mensurável, seguindo (MAÑÉ; LEVY, 2012):

Definição 4.1.1. Um *subfibrado vetorial mensurável* G de $\mathfrak{F} = M \times \mathbb{R}^d$ é uma coleção $\{G_x\}_{x\in M}$ de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^d$ (ditas *fibras de* G) tal que existem funções $\eta_i : M \to \mathbb{R}^d$, $i = 1,..,m$, onde $\{\eta_1(x),...,\eta_m(x)\}$ é base para G_x μ-quase sempre em M.

Definição 4.1.2. Dizemos que um subfibrado vetorial mensurável $G \subset \mathfrak{F}$ é A-invariante se

$$A(x)G_x = G_{f(x)}$$

para μ-quase todo ponto $x \in M$.

Neste contexto, lembramos ao leitor que o cociclo linear que trabalhamos é a extensão

$$F : M \times \mathbb{R}^d \to M \times \mathbb{R}^d, \text{ com } F(x,v) = (f(x), A(x)v). \tag{4.1}$$

Enunciamos ao leitor o resultado principal deste capítulo. Também pontuamos que as definições necessárias (ponto regular, expoente de Lyapunov, subespaço de Oseledets) são apresentadas na Seção 3.2 para recordar, caso necessário.

Denote por $\Lambda(n_1,...,n_\ell)$ o conjunto de todos os pontos regulares $x \in M$ que possuem ℓ expoentes de Lyapunov, de forma que a dimensão do autoespaço E_x^j seja n_j, $1 \leq j \leq \ell$. Seja também Λ o conjunto de pontos regulares em M, isto é,

$$\Lambda = \bigcup \Lambda(n_1,...,n_\ell)$$

com $\ell \leq d$ e $n_1,...,n_\ell$ variando entre os naturais.

Teorema 4.1.3 ((OSELEDETS, 1968))**.**

(i) Para qualquer conjunto de naturais $\{n_1,...,n_\ell\}$, $\Lambda(n_1,...,n_\ell)$ é conjunto mensurável;

(ii) As funções

$$\Lambda(n_1,...,n_\ell) \ni x \mapsto \lambda_j(x) \in \mathbb{R},$$

$$\Lambda(n_1,...,n_\ell) \ni x \mapsto E_x^j \in Grass(n_j,d)$$

são mensuráveis para $1 \leq j \leq \ell$;

(iii) Λ é um conjunto mensurável de medida total.

Dado que o item (iii) é a parte mais crucial para o Teorema, faremos apenas a demonstração deste, deixando como referência (MAÑÉ; LEVY, 2012) e (VIANA, 2014) para maior detalhamento dos itens (i) e (ii). Entretanto, assumiremos (i) e (ii) para a demonstração de (iii).

Para demonstração do Teorema 4.1.3.(iii), entretanto, necessitaremos dos resultados da próxima subseção, em particular a Proposição 4.2.5.

4.2 Crescimento subexponencial

Definição 4.2.1. Seja uma função mensurável $C : M \to \mathbb{R}$. Dizemos que C possui *crescimento subexponencial* para a medida μ em M se

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} log(C \circ f^n) = 0, \ \mu\text{-q.s. em } M.$$

Considere, agora, μ probabilidade invariante por f, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $E \subset \mathfrak{F}$ subfibrado mensurável e A-invariante de $\mathfrak{F}$ de forma que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| \leq \lambda$$

$\forall v \in E_x \setminus \{0\}$ e μ-q.s. em M (tal λ deve existir, uma vez que supomos $||A||$ limitado). Dado $\varepsilon > 0$, defina a função mensurável $C_\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$C_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0}\left\{\frac{|A^n(x)v|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon)|v|} : n \geq 0 \text{ e } v \in E_x \setminus \{0\}\right\}.$$

Proposição 4.2.2. C_ε tem crescimento exponencial para μ.

Para provar a Proposição 4.2.2, utilizaremos o seguinte Lema:

Lema 4.2.3. Sejam $f : M \to M$ mensurável e μ probabilidade invariante por f. Se $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é função mensurável de forma que $\varphi \circ f - \varphi$ é integrável, então

$$\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \ \mu\text{-quase sempre em } M.$$

Demonstração (do Lema 4.2.3). Por ser $\varphi \circ f - \varphi$ mensurável, do Teorema 2.2.4, vem que existe o limite

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f-\varphi)(f^j(x))\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ f^{j+1})(x)-(\varphi\circ f^j)(x)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}((\varphi\circ f^n)(x)-\varphi(x))\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\varphi\circ f^n)(x)-\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\varphi(x)}_{=0}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\varphi\circ f^n)(x)
\end{aligned}$$

μ-quase sempre e ψ é função mensurável. Além disso, temos também que $\psi = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\varphi\circ f^n)$ converge para 0 em medida. De fato, fixado $\delta \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{x\in M : \frac{1}{n}|\varphi\circ f^n(x)-0|\geq\delta\right\}\right) &= \mu\left((\varphi\circ f^n)^{-1}(-n\delta,n\delta)^c\right)\\
&= \mu\left(f^{-n}\left(\varphi^{-1}(-n\delta,n\delta)\right)^c\right)\\
&= \mu\left(\varphi^{-1}(-n\delta,n\delta)^c\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, usaremos o seguinte resultado para a conclusão do Lema:

Teorema 4.2.4 ((FOLLAND, 2013) (Teorema 2.30))**.** Suponha que a sequência de funções $\{f_n\}$ ($f_n : M \to \mathbb{R}$) é de Cauchy em medida. Então existe função mensurável f tal que $f_n \to f$ em medida e existe subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ μ-quase sempre. Além disso, se g é função mensurável onde $f_n \to g$ em medida, então $g = f$ μ-quase sempre.

Como $\{f_n\}$ convergir em medida (para 0) implica ser de Cauchy em medida, segue que $\{\frac{1}{n}\varphi \circ f^n\}$ possui subsequência tal que $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k}(\varphi \circ f^{n_k})(x) = 0$ μ-quase sempre. Como $\psi(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\varphi \circ f^n)(x)$ existe μ-quase sempre, segue a conclusão. $\square$

Provemos, agora, a Proposição 4.2.2.

Demonstração (da Proposição 4.2.2). Dado $v \in E_x \setminus \{0\}$, defina

$$C_\varepsilon(x,v) = \sup_{n\geq 0} \frac{|A^n(x)v|}{\exp(n(\lambda+\varepsilon)|v|}$$

Primeiro, note que $C_\varepsilon(x,v) = \max\{1, C_\varepsilon(f(x),A(x)v)\frac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|}\}$.

De fato, se $n = 0$, então $\dfrac{|A^0(x)v|}{\exp(0(\lambda+\varepsilon))|v|} = \dfrac{|v|}{|v|} = 1$. Caso contrário,

$$\begin{aligned}
\frac{|A^{n+1}(x)v|}{\exp((n+1)(\lambda+\varepsilon))|v|} &= \frac{\overbrace{A(f^n(x))...A(f(x))}^{A^n(f(x))}A(x)v}{\exp(\lambda+\varepsilon)\exp(n(\lambda+\varepsilon))|v|} = \frac{A^n(f(x))A(x)v}{\exp(\lambda+\varepsilon)\exp(n(\lambda+\varepsilon))|v|} \\
&= \frac{A^n(f(x))A(x)v}{\exp(\lambda+\varepsilon)\exp(n(\lambda+\varepsilon))|v|}\frac{|A(x)v|}{|A(x)v|} \\
&= \frac{A^n(f(x))A(x)v}{\exp(n(\lambda+\varepsilon))|A(x)v|}\frac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|} \\
&\leq C_\varepsilon(f(x),A(x)v)\frac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|}.
\end{aligned}$$

Além disso, se tomarmos a, $b > 0$ tais que

$$a \leq \frac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|} \leq b,$$

temos que $\dfrac{C_\varepsilon(x,v)}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)} = \max\left\{\dfrac{1}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)}, \dfrac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|}\right\}$, e segue que

$$a \leq \frac{C_\varepsilon(x,v)}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)}$$

.

Por outro lado, se $C_\varepsilon(x,v) = 1 \implies \dfrac{C_\varepsilon(x,v)}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)} = \dfrac{1}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)} \leq 1$, pois

$$C_\varepsilon(f(x),A(x)v) = \max\left\{1, \frac{|A(f(x))A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|A(x)v|}C_\varepsilon(f^2(x),A_2(x)v)\right\} \implies C_\varepsilon(f(x),A(x)v) \geq 1,$$

e se $C_\varepsilon(x,v) = C_\varepsilon(f(x),A(x)v)\dfrac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|}$, então segue que

$$\frac{C_\varepsilon(x,v)}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)} = \frac{|A(x)v|}{\exp(\lambda+\varepsilon)|v|} \leq b.$$

Portanto,

$$a \leq \frac{C_\varepsilon(x,v)}{C_\varepsilon(f(x),A(x)v)} \leq \max\{1,b\},\ \forall x \in M,\ \forall v \in E_x \setminus \{0\}$$

e segue que $a \leq \dfrac{C_\varepsilon(x)}{C_\varepsilon(f(x))} \leq \max\{1,b\}$, concluindo que

$$\begin{aligned} &\log(C_\varepsilon \circ f) - \log C_\varepsilon \quad \text{e} \\ &\log(C_\varepsilon \circ f^{-1}) - \log C_\varepsilon \end{aligned}$$

são funções limitadas inferior e superiormente:

$$-\log\max\{1,b\} \leq \log(C_\varepsilon \circ f)(x) - \log C_\varepsilon(x) \leq -\log a$$

$$\log a \leq \log(C_\varepsilon \circ f^{-1})(x) - \log C_\varepsilon(x) \leq \log\max\{1,b\}$$

Em particular, tais funções são integráveis. Assim, do Lema 4.2.3, vem que $\dfrac{1}{n}\log(C_\varepsilon \circ f^n) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$ μ-quase sempre. □

O próximo resultado será usado algumas vezes para a demonstração do Teorema 4.1.3.(iii)

Proposição 4.2.5. Seja E subfibrado mensurável e A-invariante de $\mathfrak{F}$. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e μ probabilidade f-invariante em M, então:

$$A.\begin{cases} \limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\log|A^n(x)v| \leq \lambda \ \ \mu\text{-q.s. em } M \text{ e } \forall v \in E_x \setminus \{0\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{se, e somente se} \\ \limsup\limits_{n\to-\infty} \dfrac{1}{n}\log|A^n(x)v| \leq \lambda \ \ \mu\text{-q.s. em } M \text{ e } \forall v \in E_x \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Analogamente, temos

$$B.\begin{cases} \liminf\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\log|A^n(x)v| \geq \lambda \ \ \mu\text{-q.s. em } M \text{ e } \forall v \in E_x \setminus \{0\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{se, e somente se} \\ \liminf\limits_{n\to-\infty} \dfrac{1}{n}\log|A^n(x)v| \geq \lambda \ \ \mu\text{-q.s. em } M \text{ e } \forall v \in E_x \setminus \{0\}. \end{cases}$$

e

$$C.\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\log|A^n(x)v| = \lambda \ \ \mu\text{-q.s. em } M \text{ e } \forall v \in E_x \setminus \{0\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{se, e somente se} \\ \lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{1}{n}\log|A^n(x)v = \lambda \ \ \mu\text{-q.s. em } M \text{ e } \forall v \in E_x \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Demonstração. Assuma que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| \leq \lambda$ μ-q.s. em M e $\forall v \in E_x \setminus \{0\}$ e seja C_ε como definido anteriormente. Como por definição temos $A^{-n}(x) = A^n(f^{-n}(x))^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
& v = A^n(f^{-n}(x))A^{-n}(x)v \\
\Longrightarrow\ & |v| \leq C_\varepsilon(f^{-n}(x))\exp(n(\lambda+\varepsilon))|A^{-n}(x)v| \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{n}\log|v| \leq \frac{1}{n}\log C_\varepsilon(f^{-n}(x)) + (\lambda+\varepsilon) + \frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v| \ \ \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{n}\log|v| \to 0$ e $\frac{1}{n}\log C_\varepsilon(f^{-n}(x)) \to 0$ quando $n \to +\infty$ (Proposição 4.2.2), segue que

$$0 \leq (\lambda+\varepsilon) + \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v|$$

Logo, da arbitrariedade de ε e do fato de que

$$-\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v| = \limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v|,$$

segue a conclusão. A implicação contrária e os casos B e C são provados de forma análoga. $\square$

Observação 4.2.6. De fato, temos $-\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v| = \limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v|$ pois

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| &= \limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v| \\
&= -\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^{-n}(x)v|
\end{aligned}$$

dado que $\limsup_{n\to+\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to+\infty} a_n$ se $\{a_n\}$ é sequência em $\mathbb{R}$.

4.3 Demonstração do Teorema de Oseledets

Primeiramente, para provar que Λ tem medida total, basta que $\mu(\Lambda) = 1$ para toda probabilidade ergódica invariante por f (ver (MAÑÉ; LEVY, 2012), Corolário II.6.5). Dessa forma, assumiremos ser μ ergódica.

A estratégia para esta prova, de forma genérica, consiste em encontrar o subfibrado A-invariante com o maior expoente de Lyapunov (Lema 4.3.1), reduzindo a dimensão do fibrado original e construindo outro subfibrado A-invariante com expoente de Lyapunov estritamente menor (Lema 4.3.2), e repetir o processo indutivamente, chegando a uma decomposição dos subespaços de Oseledets. Assim, sejam

$$\lambda_1(A,x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log||A^n(x)|| \text{ e } \lambda_1(A) = \int \lambda_1(A,x)d\mu(x).$$

Como μ é ergódica, então $\lambda_1(A,x) = \lambda_1(A)$ μ-quase sempre.

Defina, agora, o subfibrado $G \subset \mathfrak{F} = M \times \mathbb{R}^d$ da seguinte forma:

$$G_x = \{v \in \mathfrak{F}_x : \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| \geq \lambda_1(A)\}. \tag{4.2}$$

Os próximos Lemas (em especial os Lemas 4.3.1 e 4.3.3) são passos importantes, cuja prova é feita posteriormente.

Lema 4.3.1. *G é um subfibrado mensurável e A-invariante de dimensão estritamente positiva em cada G_x e*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| = \lambda_1(A)$$

μ-quase sempre em M e para todo $v \in G_x \setminus \{0\}$.

Com este Lema, provamos a existência de tal subfibrado G. Se $G = \mathfrak{F}$, então basta escrever $G_x = \mathfrak{F}_x$ e a prova está concluída. Se $G \neq \mathfrak{F}$, defina $G^\perp \subset \mathfrak{F}$ de forma que $G_x^\perp$ é o ortogonal de G_x em cada x.

Defina também $p : \mathfrak{F} \to G^\perp$ como a projeção ortogonal (isto é, $p_x : \mathfrak{F}_x \to G_x^\perp$ é a projeção em cada fibra) e $\hat{A} : G^\perp \to G^\perp$ como $\hat{A}(x) = p_{f(x)} \circ A(x) : G_x^\perp \to G_{f(x)}^\perp$.

Lema 4.3.2. *Se $G \neq \mathfrak{F}$ então $\lambda_1(\hat{A}) < \lambda_1(A)$.*

Demonstração. Lembre que $\lambda_1(\hat{A}) = \int \lambda_1(\hat{A},x)d\mu(x)$, onde

$$\lambda_1(\hat{A},x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log ||\hat{A}^n(x)||$$

Primeiro, afirmamos que $|\hat{A}^n(x)v| = |p_{f^n(x)}(A^n(x)v)| \leq |A^n(x)v|$. De fato, por indução em n e sendo $v \in G_x^\perp$, temos:

Caso $n = 1$: $\hat{A}(x)v = p_{f(x)}(A(x)v)$, que sai da própria definição de $\hat{A}$.

Passo de indução ($p(n) \implies p(n+1)$): Note que

$$\hat{A}^{n+1}(x)v = \hat{A}(f^n(x))\hat{A}^n(x)v$$
$$A^{n+1}(x)v = A(f^n(x))A^n(x)v$$

Como $G_{f^n(x)}^\perp \bigcap G_{f^n(x)} = \{0\}$, escrevemos $A^n(x)v = p_{f^n(x)}(A^n(x)v) + u$, onde $u \in G_{f^n(x)}$ e, da hipótese de indução, temos

$$A^n(x)v = p_{f^n(x)}(A^n(x)v) + u = \hat{A}^n(x)v + u.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^{n+1}(x)v &= A(f^n(x))A^n(x)v \\ &= A(f^n(x))(\hat{A}^n(x)v+u) \\ &= A(f^n(x))\hat{A}^n(x)v + A(f^n(x))u \\ \implies p_{f^{n+1}(x)}(A^{n+1}(x)v) &= p_{f^{n+1}(x)}(A(f^n(x))\hat{A}^n(x)v) + p_{f^{n+1}(x)}(A(f^n(x))u). \end{aligned}$$

Como G é subfibrado A-invariante e $u \in G_{f^n(x)}$, segue que

$$A(f^n(x))u \in G_{f^{n+1}(x)} \implies p_{f^{n+1}(x)}(A(f^n(x))u) = 0.$$

Logo,

$$p_{f^{n+1}(x)}(A^{n+1}(x)v) = p_{f^{n+1}(x)}(A(f^n(x))\hat{A}^n(x)v) = \hat{A}(f^n(x))\hat{A}^n(x)v = \hat{A}^{n+1}(x)v.$$

Agora, defina $\hat{G}$ subfibrado de $G^\perp$ dado por

$$\hat{G}_x = \left\{ v \in G_x^\perp : \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log|\hat{A}^n(x)v| \geq \lambda_1(\hat{A}) \right\}$$

como do Lema 4.3.1 e seja $v \in G_x^\perp \setminus \{0\}$. Então, da afirmação passada,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\hat{A}) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|\hat{A}^n(x)v| \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|A^n(x)v| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|A^n(x)v| \\ &\leq \lambda_1(A) \end{aligned}$$

Entretanto, suponha que $\lambda_1(\hat{A}) = \lambda_1(A)$. Isso implica que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log|A^n(x)v| = \lambda_1(A) \text{ para } v \in \hat{G}_x \setminus \{0\}$$

Mas pela Proposição 4.2.5, segue também que

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log|A^n(x)v| = \lambda_1(A)$$

uma vez que $\hat{G}$ é subfibrado mensurável e A-invariante de $G^\perp$. Logo, segue que $v \in G_x$, o que é absurdo, uma vez que $\hat{G}_x \bigcap G_x = \{0\}$ e concluímos que $\lambda_1(\hat{A}) < \lambda_1(A)$.

□

Lema 4.3.3. Se $G \neq \mathfrak{F}$ então existe um subfibrado H, mensurável e A-invariante de $\mathfrak{F}$ de forma que

$$G_x \oplus H_x = \mathfrak{F}_x$$

μ-quase sempre e $\lambda_1(A|_H) = \lambda_1(\hat{A}) < \lambda_1(A)$.

Assim, se escrevermos $E^1 = G$ e $H^1 = H$, temos que existe uma decomposição $\mathfrak{F}_x = E^1_x \oplus H^1_x$, invariante por A, onde

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| = \lambda_1(A) =: \lambda_1, \forall v \in E^1_x \setminus \{0\}$$

e $\lambda_1 > \lambda(A|_{H^1})$. Assim, o Teorema 4.1.3.(iii) é demonstrado ao usar este processo repetidamente. De fato, do Lema 4.3.1, existe subfibrado E^2 de H^1 onde

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| = \lambda(A|_{H^1}) =: \lambda_2, \forall v \in E^2_x \setminus \{0\}$$

e do Lema 4.3.3 existe subfibrado A-invariante H^2 de H^1 onde

$$H^1_x = E^2_x \oplus H^2_x.$$

Dessa forma, dado $j \geq 1$, suponha ter se chegado a uma decomposição

$$\mathfrak{F}_x = E^1_x \oplus \ldots \oplus E^j_x \oplus H^j_x$$

onde, para cada $1 \leq i \leq j$, tem-se

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| = \lambda_1(A|_{H^{i-1}}) = \lambda_i, \forall v \in E^i_x \setminus \{0\}$$

e $\lambda_1 > \ldots > \lambda_j > \lambda_1(A|_{H^j})$. O Lema 4.3.1 garante a existência de um subfibrado A-invariante E^{j+1} de H^j onde

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log |A^n(x)v| = \lambda_1(A|_{H^j}) =: \lambda_{j+1}, \forall v \in E^{j+1}_x \setminus \{0\}$$

e o Lema 4.3.3 garante a existência de um subfibrado H^{j+1} de H^j e decomposição $H^j_x = E^{j+1}_x \oplus H^{j+1}_x$ onde $\lambda_1(A|_{H^{j+1}}) < \lambda_{j+1}$. Uma vez que os subfibrados E^j são tais que $\dim E^j_x$ é estritamente positiva, eventualmente este processo chega ao fim e obtém-se a decomposição invariante.

4.4 Demonstração do Lema 4.3.1

Demonstração. Primeiro, mostremos que G como definido em 4.2 é, de fato, subfibrado mensurável. Para isso, usaremos a seguinte

Observação 4.4.1. Sejam $(A, \mathscr{A})$, $(B, \mathscr{B})$ espaços mensuráveis e $g : (A, \mathscr{A}) \to (B, \mathscr{B})$ uma função. Se $\{A_n\}$ é cobertura de A por conjuntos mensuráveis tais que $g|_{A_n} : A_n \to B$ é mensurável para cada $n \geq 1$, então $g : A \to B$ é mensurável.

Assim, dado $j \geq 1$ e definindo $\hat{\Lambda}(j) = \{x \in M : \dim G_x = j\}$, mostraremos que $\hat{\Lambda}(j)$ é conjunto mensurável de M e que $\hat{\Lambda}(j) \ni x \mapsto G_x \in Grass(j,d)$ é uma função mensurável, tornando a restrição de G a $\hat{\Lambda}(j)$ um subfibrado mensurável da restrição de F a $\hat{\Lambda}(j)$. Assim, concluiremos ser G subfibrado mensurável uma vez que $M = \bigcup_{j=0}^{d} \hat{\Lambda}(j)$.

Além disso, por ser $\dim G_x$ função f-invariante e μ ergódica, teremos que $\dim G_x$ é constante μ-quase sempre, isto é, $\mu(\hat{\Lambda}(j)) = 1$ para algum j único. Mostraremos que $j > 0$.

Dessa forma, provemos que G é subfibrado mensurável. Primeiro, construiremos, em três passos, coberturas mensuráveis para $\hat{\Lambda}(j)$.

Passo 1: Para $k \geq 1$ e $x \in M$, seja

$$G_x(k) = \{v \in \mathfrak{F}_x : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |A^{-n}(x)v| \leq -\lambda_1(A) + \frac{1}{k}\}$$

Defina, agora, $M^k = \{x \in M : G_x(k) = G_x\}$. Note que a sequência $\{M^k\}_k$ cobre M. De fato, fixado $x \in M$, $\{G_x(k)\}_k$ é sequência de subespaços vetoriais de $\mathfrak{F}_x$ tais que $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_x(k) = G_x \implies \exists k(x)$ tal que $G_x(k(x)) = G_x$.

Afirmamos que M^k é mensurável $\forall k \geq 1$. De fato, note que as funções $\lambda_1 : M \to \mathbb{R}$ e $\phi : F \to \mathbb{R}$ como definidas a seguir são mensuráveis:

$$\lambda_1(x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log ||A^n(x)||, \quad \phi(x,v) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |A^{-n}(x)v|.$$

Considerando também $\pi : \mathfrak{F} \to M$ como a projeção natural, note que

$$\begin{aligned}
x \notin M^k &\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ tal que } -\lambda_1(A) < \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |A^{-n}(x)v| \leq -\lambda_1(A) + \frac{1}{k} \\
&\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ tal que } 0 < \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |A^{-n}(x)v| + \lambda_1(A) \leq \frac{1}{k} \\
&\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ tal que } 0 < \phi(x,v) + \lambda(\pi(x,v)) \leq \frac{1}{k} \\
&\iff (x,v) \in (\phi + \lambda \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}]) \\
&\iff x \in \pi((\phi + \lambda \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}]))
\end{aligned}$$

onde, na terceira linha, usou-se a definição de $\lambda_1(A) = \lambda_1(A,x) = \lambda_1(\pi(x,v))$. Dessa forma, concluímos que $M^k = M \setminus \pi\left((\phi + \lambda \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}])\right)$, seguindo que M^k é mensurável.

Passo 2: Fixe $k \geq 1$ e, para cada $x \in M^k$ e $m \geq 1$, defina

$$G_x(k,m) = \left\{v \in \mathfrak{F}_x : |A^{-n}(x)v| \leq m \exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right) |v| \ \ \forall n \geq 1\right\}.$$

Afirmamos que $G_x(k) = \bigcup_{m\geq 1} G_x(k,m)$. De fato, é simples ver que $G_x(k) \supset \bigcup_{m\geq 1} G_x(k,m)$, pois dado $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&|A^{-n}(x)v| \leq m \exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|v| \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{n}\log\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \leq \frac{1}{n}\log m - \lambda_1(A) + \frac{1}{k} \\
\Longrightarrow\ & \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \leq \limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\log m - \lambda_1(A) + \frac{1}{k}\right) = -\lambda_1(A) + \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Agora, dado que $x \in M^k$, temos que $G_x(k) = G_x$. Assim, se $v \in G_x(k) \implies \frac{v}{|v|} \in G_x(k)$ e temos:

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \leq -\lambda_1(A) < -\lambda_1(A) + \frac{1}{k}.$$

Isto significa que $\exists N \geq 0$ de forma que

$$n \geq N \implies \frac{1}{n}\log\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \leq -\lambda_1(A) + \frac{1}{k}.$$

Tome, agora $m_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{n}\log\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \leq \log m_0 - \lambda_1(A) + \frac{1}{k} \ \ \forall n \in \{0, 1, ..., N-1\}.$$

Portanto, achamos m_0 tal que

$$\frac{1}{n}\log\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \leq \log m_0 - \lambda_1(A) + \frac{1}{k} \ \ \forall n \geq 0,$$

o que equivale a dizer que

$$|A^{-n}(x)v| \leq m_0 \exp\left(-n\left(\lambda_1(A) + \frac{1}{k}\right)\right)|v| \ \ \forall n \geq 0,$$

isto é, $v \in G_x(k, m_0)$ e segue que $G_x(k) \subset \bigcup_{m\geq 1} G_x(k,m)$.

Defina, agora, $M^{k,m} = \{x \in M^k : G_x(k) = G_x(k,m)\}$. Note que $M^{k,m}$ também pode ser definido como $M^{k,m} = \{x \in M^k : G_x(k,m) = G_x(k,\ell)\ \forall \ell \geq m\}$. De fato,

($\subset$): É simples ver que se $\ell \geq m$ então $G_x(k,m) \subset G_x(k,\ell)$. Como já vimos que $G_x(k,\ell) \subset G_x(k)\ \forall \ell$ e, por hipótese, temos $G_x(k) = G_x(k,m)$ então $G_x(k,\ell) \subset G_x(k) = G_x(k,m)$.

($\supset$): Como $x \in M^k \iff G_x = G_x(k)$, já vimos que neste caso é possível tomar m_0 de forma que $G_x(k) \subset G_x(k,m_0)$. Assim, basta tomar $\ell \geq m_0$ e teremos $G_x(k) \subset G_x(k,\ell) = G_x(k,m)$, onde a última igualdade é dada por hipótese.

Agora, considere a função mensurável:

$$\begin{aligned}
&\psi_k : \pi^{-1}(M^k) \to \mathbb{R} \\
&\qquad (x,v) \mapsto \psi_k(x,v) = \sup_{n>0}\left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right|\exp\left(n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

Do que acabamos de mostrar e, dado $\ell > m$,

$$\begin{aligned}
x \notin M^{k,m} &\iff \exists \ell > m \text{ tal que } G_x(k,m) \neq G_x(k,\ell) \\
&\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ e } n \geq 0 \text{ tais que } m\exp(-n(\lambda_1(A) - \frac{1}{k})) < |A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}| \leq \ell \exp(-n(\lambda_1(A) - \frac{1}{k})) \\
&\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ e } n \geq 0 \text{ tais que } m < \left|A^{-n}(x)\frac{v}{|v|}\right| \exp(n(\lambda_1(A) - \frac{1}{k})) \leq \ell \\
&\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ tal que } m < \psi_k(x,v) \leq \ell \\
&\iff \exists v \in \mathfrak{F}_x \text{ tal que } (x,v) \in \psi_k^{-1}((m,\ell]) \\
&\iff x \in \pi(\psi_k^{-1}((m,\ell]))
\end{aligned}$$

e concluímos que $M^{k,m} = M^k \setminus \bigcup_{l \geq m} \pi(\psi_k^{-1}((m,\ell]))$, mostrando que $M^{k,m}$ é mensurável.

Mostremos, agora, que $\{M^{k,m}\}_m$ cobre M^k. Seja $x \in M^k$ e $\{v_1,...,v_s\}$ base ortogonal de $G_x(k)$. Tome $m_1,...,m_s \geq 1$ tais que $v_i \in G_x(k,m_i)$ $\forall 1 \leq i \leq s$ (isto é possível, pois $G_x(k) = \bigcup_{m \geq 1} G_x(k,m)$) e defina $m = \max\{m_1,...,m_s\}$.

Dado $v = \sum_{i=1}^{s} a_i v_i \in G_x(k)$ e $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|A^{-n}(x)v| &\leq \sum_{i=1}^{s} m_i |a_i| \exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right) \\
&\leq m\exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{s}|a_i|\right) \\
& m\exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right) C|v|
\end{aligned}$$

onde C é uma costante que depende da norma em $G_x(k)$.

Portanto, segue que $G_x(k) \subset G_x(k,[Cm+1])$, onde $[Cm+1]$ é a parte inteira do número $Cm+1$, e concluímos que $x \in M^{k,[Cm+1]}$, mostrando que $M^k \subset \bigcup_{m \geq 1} G_x(k,m)$.

Passo 3: Afirmamos que dada sequência $\{x_i\}$ em $M^{k,m}$, que converge para algum $x \in M^{k,m}$, temos $\lim_{i \to +\infty} G_{x_i} \subset G_x$.

De fato, para $i \geq 1$ seja $v_i \in G_{x_i}$ de forma que $\{v_i\}$ é sequência convergente para algum $v \in \mathfrak{F}_x$. Assim, temos

$$|A^{-n}(x)v_i| \leq m\exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|v_i| \ \ \forall i \geq 1, \forall n \geq 1.$$

Passando o limite em i, segue que

$$|A^{-n}(x)v| \leq m\exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|v| \ \ \forall n \geq 1,$$

ou seja, $v \in G_x(k,m) = G_x$, e concluímos que $M^{k,m,j} = \{x \in M^{k,m} : \dim G_x \geq j\}$ é conjunto fechado. Além disso, mostramos que $x \mapsto G_x$ é contínua se restringimos esta função a cada

$$M^{k,m,j} \setminus M^{k,m,j+1} = \hat{\Lambda}(j) \bigcap M^{k,m}.$$

Dessa forma, tendo em vista a Observação 4.4.1 e do fato de que $\{M^{k,m}\}_{k,m}$ é cobertura para M, segue que $\hat{\Lambda}(j) \ni x \mapsto G_x \in Grass(j,d)$ é função mensurável, o que torna G restrita a $\hat{\Lambda}(j)$ subfibrado mensurável de F restrita a $\hat{\Lambda}(j)$.

Mostremos, agora, que $\dim G_x > 0$ $\mu-$quase sempre, como afirmado no Lema 4.3.1. Para isso, note que é suficiente verificar que $G_x(k) \neq \{0\}$ para algum $k \geq 1$, uma vez que $G_x(k) \subset G_x$. Dessa forma, fixe $k \geq 1$ e, para $m \geq 1$, defina $Y_m \subset M$ como

$$Y_m = \left\{ x \in M : \exists v \in \mathfrak{F}_x \setminus \{0\} \text{ tal que } |A^{-n}(x)v| \leq \exp\left(-n\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|v|,\ 1 \leq n \leq m \right\}.$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $\mu(Y_m) \geq \delta\ \ \forall m \geq 1$. Se isto for verdade, então $Y := \bigcap_{m \geq 1} Y_m$ é tal que $\mu(Y) > 0$. Como $Y \subset \{x \in M : \dim G_x > 0\}$ e $\{x \in M : \dim G_x > 0\}$ é conjunto $f-$invariante, segue que $\{x \in M : \dim G_x > 0\}$ é conjunto de medida total, uma vez que consideramos μ ergódica.

Assim, para provar a existência de tal δ, usaremos o seguinte Lema, atrbuído a Viktor Alexsandrovich Pliss:

Lema 4.4.2 ((PLISS, 1972))**.** Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e $L > 0$, existe $\delta = \delta(\lambda, \varepsilon, L) > 0$ tal que dada qualquer sequência finita $a_0, \ldots, a_{N-1}$ em $\mathbb{R}$ com $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \leq N\lambda$ e $a_k \leq L\ \forall 0 \leq k \leq N-1$, existe $\ell \geq N\lambda$ e $\{n_1, \ldots, n_\ell\}$ onde $0 \leq n_1 < \ldots < n_\ell \leq N-1$ tal que

$$\sum_{j=n}^{n_i - 1} a_j \leq (n_i - n)(\lambda + \varepsilon)\ \ \forall 0 \leq n \leq n_i \text{ e } 1 \leq i \leq \ell.$$

Provemos, então, afirmação anterior. Seja $v \in \mathfrak{F}_x$ e $N \geq 1$ grande o suficiente de forma que

$$|A^N(x)v| \leq \exp\left(N\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{2k}\right)\right)|v|.$$

Note que isso é possível, pois equivale a dizer que $\frac{1}{N}\log\left|A^N(x)\frac{v}{|v|}\right| \geq \lambda_1(A) - \frac{1}{2k}$ e, por hipótese, $\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log ||A^n(x)|| = \lambda_1(A)$.

Defina, também $a_i = \log|A(f^{i+1}(x))^{-1}\left(\frac{A^{i+1}(x)v}{|A^{i+1}(x)v|}\right)|$, com $0 \leq i \leq N-1$.

Note que $|a_i| \leq \log||A^{-1}||$ e que

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j = \sum_{j=0}^{N-1} \log\frac{|A^j(x)v|}{|A^{j+1}(x)v|} = \log\frac{|v|}{|A^N(x)v|} \leq -N\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{2k}\right).$$

Dessa forma, se considerarmos o Lema fazendo $\lambda = -\lambda_1(A) + \frac{1}{k}$, $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e $L = \log ||A^{-1}||$, temos a existência de uma sequência $0 \le n_1 < ... < n_\ell \le N-1$, com $\ell \ge N\delta$ tal que

$$\log \frac{|A^n(x)v|}{|A^{n_i}(x)v|} = \sum_{j=n}^{n_i-1} a_j \le (n_i - n)\left(-\lambda_1(A) + \frac{1}{k}\right) \ \forall\, 0 \le n < n_i.$$

Denotando, agora, $u_i = A^{n_i}(x)v \in F_{f^{n_i}(x)}$, note que a relação passada pode ser escrita como

$$|A^{n-n_i}(f^{n_i}(x))u_i| \le \exp\left((n-n_i)\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|u_i|.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}
A^n(x)v &= A^{-1}(f^n(x))A(f^n(x))A^n(x)v \\
&= A^{-1}(f^n(x))A^{-1}(f^{n+1}(x))A(f^{n+1}(x))A(f^n(x))A^n(x)v \\
&= A^{-1}(f^n(x))\ldots A^{-1}(f^{n_i-1}(x))\underbrace{A(f^{n_i-1}(x))\ldots A(f^n(x))A^n(x)v}_{A^{n_i}(x)v=u_i} \\
&= A^{-1}(f^n(x))\ldots A^{-1}(f^{n_i-1}(x))u_i
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
A^{-1}(f^n(x))\ldots A^{-1}(f^{n_i-1}(x)) &= [A(f^{n_i-1}(x))\ldots A(f^n(x))]^{-1} \\
&= [A^{n_i-n}(f^n(x))]^{-1} \\
&= [A^{n_i-n}(f^{-(n_i-n)}(f^{n_i}(x)))]^{-1} \\
&= A^{-(n_i-n)}(f^{n_i}(x))
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
&\log \frac{|A^n(x)v|}{|A^{n_i}(x)v|} \le (n_i - n)\left(-\lambda_1(A) + \frac{1}{k}\right) \\
&\implies \frac{|A^n(x)v|}{|A^{n_i}(x)v|} \le \exp\left((n-n_i)\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right) \\
&\implies |A^n(x)v| \le \exp\left((n-n_i)\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|A^{n_i}(x)v| \\
&\implies |A^{n-n_i}(f^{n_i}(x))u_i| \le \exp\left((n-n_i)\left(\lambda_1(A) - \frac{1}{k}\right)\right)|u_i|,\ 0 \le n_i - n \le n_i.
\end{aligned}$$

Em particular, isto quer dizer que $f^{n_i} \in Y_{n_i}$ com $1 \le i \le \ell$.

Note também que se $m \le n_i \implies Y_{n_i} \subset Y_m$ e, concluímos que

$$\frac{1}{N}\#\{0 \le j \le N : f^j(x) \in Y_m\} \ge \frac{\ell - m}{N} \ge \delta - \frac{m}{N}$$

pois dado $m \le n_i$, temos $n_1 < ... < n_{i-1} < m \le n_i < ... < n_\ell \implies f^{n_i}(x), \ldots, f^{n_l}(x) \in Y_m$. Isto é, há pelo menos $\ell - (i-1)$ elementos em $\{0 \le j \le N : f^j(x) \in Y_m\}$. Dado que $n_1, \ldots, n_\ell$ é subsequência em $\{0,...,N-1\}$ e $n_{i-1} < m \leq n_i$, segue que

$$\begin{aligned} i-1 \leq n_{i-1} < m &\implies i-1 < m \\ &\implies -(i-1) > -m \\ &\implies \ell-(i-1) > l-m \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{N}\#\{0 \leq j \leq N : f^j(x) \in Y_m\} \geq \frac{\ell-m}{N} \geq \frac{N\delta - m}{N} = \delta - \frac{m}{N}.$$

Logo, tomando N grande o suficiente e da ergodicidade de μ, segue que $\mu(Y_m) \geq \delta > 0$.

O fato de que $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| = \lambda_1(A)\ \forall v \in G_x \setminus \{0\}$ vem da Proposição 4.2.5. De fato, relembrando a definição de G, temos

$$G_x = \{v \in \mathfrak{F}_x : \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| \geq \lambda_1(A)\}.$$

Uma aplicação direta da Proposição 4.2.5 nos dá que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| \geq \lambda_1(A)\ \forall v \in G_x \setminus \{0\}$$

o que significa que

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left|A^n(x)\frac{v}{|v|}\right| \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log||A^n(x)|| \\ &= \lambda_1(A) \end{aligned}$$

concluindo que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| = \lambda_1(A) \underbrace{\implies}_{Prop.4.2.5} \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\log|A^n(x)v| = \lambda_1(A)$. □

4.5 Demonstração do Lema 4.3.3

Demonstração. Primeiramente, considere Σ o espaço de todos os morfismos entre fibrados mensuráveis que vão de $G^\perp$ a G. Isto é, o espaço de todos os $\overline{A} : G^\perp \to G$ de forma que tem-se $\overline{A}(x) : G_x^\perp \to G_x$ linear.

Nesta demonstração, construiremos $\overline{A} \in \Sigma$ de forma que $H := \{v + \overline{A}(x)v : v \in G_x^\perp\} = Graph(\overline{A})$ é subfibrado que cumpre a afirmação do Lema.

Seja $\Phi : \Sigma \to \Sigma$ definido por $\Phi(\overline{A}) = A^{-1} \circ \overline{A} \circ \hat{A}$. De forma mais explícita, temos $\Phi(\overline{A})(x) : G_x^{\perp} \to G_x$ com

$$\Phi(\overline{A})(x) = A^{-1}(x) \circ \overline{A}(f(x)) \circ \hat{A}(x).$$

Defina também $P : G^{\perp} \to G$ com $P(x) : G_x^{\perp} \to G_{f(x)}$ onde

$$P(x) = A(x) - \hat{A}(x).$$

Assim, dado $v \in G_x^{\perp}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
A(x)(v+\overline{A}(x)v) &= A(x)v + A(x)\overline{A}(x)v \\
&= (\hat{A}(x)v + P(x)v) + A(x)\overline{A}(x)v \\
&= (\hat{A}(x)v + P(x)v) + A(x)\overline{A}(x)v + (\overline{A}(f(x))\hat{A}(x)v - \overline{A}(f(x))\hat{A}(x)v) \\
&= \hat{A}(x)v + \overline{A}(f(x))\hat{A}(x)v + A(x)(\overline{A}(x)v - A^{-1}(x)\overline{A}(f(x))\hat{A}(x)v + A^{-1}(x)P(x)v) \\
&= \underbrace{\hat{A}(x)v}_{\in G_{f(x)}^{\perp}} + \overline{A}(f(x))\underbrace{\hat{A}(x)v}_{\in G_{f(x)}^{\perp}} + A(x)(\overline{A}(x) - A^{-1}(x)\overline{A}(f(x))\hat{A}(x) + A^{-1}(x)P(x))v
\end{aligned}$$

Dessa forma, uma vez que $\hat{A}(x)v \in G_{f(x)}^{\perp}$ e $\overline{A}(f(x))\hat{A}(x)v \in G_{f(x)}$, teremos que H será subfibrado A-invariante se

$$\overline{A}(x) - \underbrace{A^{-1}(x)\overline{A}(f(x))\hat{A}(x)}_{=\Phi(\overline{A})(x)} + A^{-1}(x)P(x) = 0, \text{ isto é, se}$$

$$\overline{A}(x) - \Phi(\overline{A})(x) = -A^{-1}(x)P(x) \tag{4.3}$$

e, consequentemente, seguirá que

$$A(x)\underbrace{(v+\overline{A}(x)v)}_{\in H_x} = \underbrace{\hat{A}(x)v}_{\in G_{f(x)}^{\perp}} + \overline{A}(f(x))\underbrace{\hat{A}(x)v}_{\in G_{f(x)}^{\perp}} \in H_{f(x)}.$$

Assim, defina $B(x) := -A^{-1}(x)P(x) : G_x^{\perp} \to G_x$. Mostremos que existem $\lambda < 0$ e $C : M \to \mathbb{R}$ mensurável tais que

$$\|\Phi^n(B)(x)\| \leq C(x)\exp(\lambda n),\ \forall n \geq 0 \text{ e } \mu - \text{quase sempre},$$

o que nos assegura de que $\sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)$ é convergente μ-quase sempre e, ao definir $\overline{A}(x) = \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x)$ tem-se a condição 4.3 satisfeita.

Observação 4.5.1. $\Phi^n(B)(x)$ significa simplesmente uma aplicação de n vezes do operador Φ, de forma que

$$\Phi^n(B)(x) = (A^{-1})^n(f^n(x)) \circ B(f^n(x)) \circ \hat{A}^n(x),$$

onde $(A^{-1})^n(f^n(x))$ é a notação adotada para a aplicação da função A^{-1} por n vezes no ponto $f^n(x)$, consequentemente voltando ao ponto de base x. De outra forma,

$$(A^{-1})^n(f^n(x)) := A^{-1}(x)A^{-1}(f(x))\dots A^{-1}(f^{n-1}(x)) = [A^n(x)]^{-1}$$

Observação 4.5.2. De fato, a existência de $\lambda < 0$ e $C : M \to \mathbb{R}$ mensurável como mencionado implica que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x) \right\| &\leq \sum_{n\geq 0} \|\Phi^n(B)(x)\| \\
&\leq \sum_{n\geq 0} C(x)\exp(\lambda n) \\
&= C(x)\sum_{n\geq 0} \exp(\lambda n) < +\infty,
\end{aligned}$$

concluindo que $\sum_{n\geq 0} \|\Phi^n(B)(x)\|$ converge $\implies \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x)$ converge.

Observação 4.5.3. Definir $\overline{A}(x) = \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x)$ satisfaz a condição 4.3, pois

$$\begin{aligned}
\overline{A}(x) - \Phi(\overline{A})(x) &= \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x) - \Phi\left(\sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)\right)(x) \\
&= \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x) - A^{-1}(x)\left(\sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(f(x))\right)\hat{A}(x)
\end{aligned}$$

Como $\Phi^n(B)(x) = (A^{-1})^n(f^n(x))B(f^n(x))\hat{A}^n(x)$, então

$$\begin{aligned}
A^{-1}(x)[\Phi^n(B)(f(x))]\hat{A}(x) &= A^{-1}(x)[(A^{-1})^n(f^{n+1}(x))B(f^{n+1}(x))\hat{A}^n(f(x))]\hat{A}(x) \\
&= \underbrace{A^{-1}(x)A^{-1}(f(x))\dots A^{-1}(f^n(x))}_{(A^{-1})^{n+1}(f^{n+1}(x))}B(f^{n+1}(x))\underbrace{\hat{A}^n(f(x))\hat{A}(x)}_{\hat{A}^{n+1}(x)} \\
&= (A^{-1})^{n+1}(f^{n+1}(x))B(f^{n+1}(x))\hat{A}^{n+1}(x) \\
&= \Phi^{n+1}(B)(x)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{A}(x) - \Phi(\overline{A})(x) &= \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x) - A^{-1}(x)\left(\sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(f(x))\right)\hat{A}(x) \\
&= \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x) - \sum_{n\geq 0} A^{-1}(x)\Phi^n(B)(f(x))\hat{A}(x) \\
&= \sum_{n\geq 0} \Phi^n(B)(x) - \sum_{n\geq 0} \Phi^{n+1}(B)(x) \\
&= B(x) = -A^{-1}(x)P(x)
\end{aligned}$$

como queríamos.

Para encontrar $\lambda < 0$ e $C : M \to \mathbb{R}$ como mencionado, defina as funções

$$K_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|\hat{A}^n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\hat{A})+\varepsilon))} \text{ e } C_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\left\|(A^{-1}|_G)^n(x)\right\|}{\exp\left(n\left(\lambda_1\left(A^{-1}|_G\right)+\varepsilon\right)\right)}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi^n(B)(x)\| &= \|(A^{-1})^n(f^n(x))B(f^n(x))\hat{A}^n(x)\| \\
&\leq C_\varepsilon(f^n(x))\exp\left(n\left(\lambda_1\left(A^{-1}|_G\right)+\varepsilon\right)\right)\|B\|K_\varepsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\hat{A})+\varepsilon)) \\
&= C_\varepsilon(f^n(x))\|B\|K_\varepsilon(x)\exp\left(n\left(\lambda_1\left(A^{-1}|_G\right)+\lambda_1(\hat{A})+2\varepsilon\right)\right)
\end{aligned}$$

Considerando a seção referente a Crescimento subexponencial (4.2), sabe-se que C_ε possui crescimento subexponencial e, consequentemente, temos que

$$D_\varepsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{C_\varepsilon(f^n(x))}{\exp(n\varepsilon)}$$

é finita e

$$\|\Phi^n(B)(x)\| \leq \|B\|D_\varepsilon(x)K_\varepsilon(x)\exp\left(n\left(\lambda_1\left(A^{-1}|_G\right)+\lambda_1(\hat{A})+3\varepsilon\right)\right).$$

Assim, tomando $\lambda = -\lambda_1(A)+\lambda_1(\hat{A})+3\varepsilon$ (onde assumimos $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante tal que $\lambda < 0$) e $C(x) = \|B\|D_\varepsilon(x)K_\varepsilon(x)$ obtemos a afirmação.

Falta ainda que $\lambda_1(A|_H) = \lambda_1(\hat{A})$. Para isso, seja $\tilde{A} : G^\perp \to H$, isto é, $\tilde{A}(x) : G_x^\perp \to H_x$ onde

$$\tilde{A}(x)v = v + \overline{A}(x)v.$$

Note que temos, por construção, $A(x)\tilde{A}(x) = \tilde{A}(f(x))\hat{A}(x)$, pois dado $v \in G_x^\perp$,

$$A(x)\tilde{A}(x)v = A(x)(v+\overline{A}(x)v) = \hat{A}(x)v + \overline{A}(f(x))(\hat{A}(x)v) = \tilde{A}(f(x))\hat{A}(x)v$$

Em particular, temos

$$(A|_H)(x) = \tilde{A}(f(x))\hat{A}(x)\tilde{A}^{-1}(x)$$

(pois $\tilde{A}^{-1}(x) : H_x \to G_x^\perp$, $\hat{A}(x) : G_x^\perp \to G_{f(x)}^\perp$ e $\tilde{A}(f(x)) : G_{f(x)}^\perp \to H_{f(x)}$) e, portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(A|_H, x) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|(A|_H)^n(x)\| \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left\|\tilde{A}(f^n(x))\hat{A}^n(x)\tilde{A}^{-1}(x)\right\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left\|\tilde{A}(f^n(x))\right\| + \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left\|\hat{A}^n(x)\right\|}_{=\lambda_1(\hat{A})} + \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\left\|\tilde{A}^{-1}(x)\right\|}_{=0}
\end{aligned}$$

Afirmamos, agora, que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left\|\tilde{A}(f^n(x))\right\| = 0$. De fato,

$$1 \leq \|Id\| \underset{(*)}{\leq} \|\tilde{A}(f^n(x))\| = \|Id + \overline{A}(f^n(x))\| \leq 1 + \|\overline{A}(f^n(x))\|$$
$$\underset{(**)}{\leq} 1 + \frac{C(f^n(x))}{1 - \exp\lambda}$$

onde a desigualdade $(*)$ vem de que $v \perp \overline{A}(x)v$ e a desigualdade $(**)$ vem da Observação 4.5.2.

Novamente considerando a seção sobre Crescimento subexponencial (seção 4.2), temos que $K_\varepsilon(x)$ e $D_\varepsilon(x)$ possuem crescimento exponencial. Consequentemente, o mesmo vale para $C(x)$ e, combinado com o argumento anterior,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left\|\tilde{A}(f^n(x))\right\| \leq \frac{1}{1-\exp\lambda} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log C(f^n(x)) = 0.$$

Portanto, $\lambda_1(A|_H) \leq \lambda_1(\hat{A})$.

Para provar que $\lambda_1(\hat{A}) \leq \lambda_1(A|_H)$, usa-se estratégia análoga uma vez que

$$\hat{A}(x) = \tilde{A}^{-1}(f(x))(A|_H)(x)\tilde{A}(x)$$

e que $\|\tilde{A}^{-1}\| \leq 1$, pois dado $u \in H_x$, temos $u = v + \overline{A}(x)v$, para algum $v \in G_x^\perp$ e segue que

$$(Id)u| = |u| = |v + \overline{A}(x)v| \geq |v| = |\tilde{A}^{-1}(x)u|.$$

$\square$

CAPÍTULO

5

DICOTOMIAS EXPONENCIAIS

Neste capítulo apresentamos alguns resultados de cociclos lineares no contexto de fluxos. Tais resultados, frutos do trabalho de Robert Sacker e George Sell ((SACKER; SELL, 1974) e (SACKER; SELL, 1976)), apresentam um critério suficiente para a hiperbolicidade de cociclos lineares (relembre o Exemplo 2 e a Observação 3.2.3), aqui definida pelos autores como a existência de uma *dicotomia exponencial*, nomenclatura que adotaremos neste capítulo.

A primeira seção apresenta noções preliminares para compreensão deste capítulo, entre definições e observações julgadas necessárias. A segunda seção apresenta os critérios suficientes e as ferramentas demandadas para a demonstração dos resultados principais, estes últimos constituem a terceira seção.

Observamos que as demonstrações mais densas apresentam-se na segunda subseção, dado que utilizamos majoritariamente resultados elementares em Topologia e Análise para sua construção.

Além disso, comentamos que apesar da noção de fluxo já ter sido apresentada em capítulo anterior, introduziremos novamente a definição de forma mais contextualizada para este capítulo.

5.1 Preliminares

Definição 5.1.1. Seja W um espaço de Hausdorff. Um *fluxo f sobre W* é uma transformação mensurável $f : W \times \mathbb{R} \to W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $f(w,0) = w$ para todo $w \in W$;

(ii) $f(f(w,t),s) = f(w,t+s)$ para todo $t,s \in \mathbb{R}$.

Observação 5.1.2. Assumiremos que o fluxo f é contínuo a partir de agora.

Definição 5.1.3. Seja M um espaço de Hausdorff e considere $W = M \times E$, onde $E = \mathbb{R}^d$. Seja um fluxo $F : W \times \mathbb{R} \to W$ que pode ser escrito na forma

$$F(x,v,t) = (f(x,t), g(x,v,t))$$

onde $f : M \times \mathbb{R} \to M$ é, em si, um fluxo em M.

Além disso, considere também a função $g(x,v,t)$ sendo contínua em $M \times \mathbb{R}$ e linear em v (isto é, $g(x,v,t)$ pode ser escrito na forma $A(x,t)v$, com $A(x,t) \in GL(d)$).

Uma transformação nestas condições se diz um *cociclo linear contínuo*.

Observação 5.1.4. Assumiremos que M é um espaço de Hausdorff que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, isto será necessário para as demonstrações que faremos.

Observação 5.1.5. Por F ser fluxo, vale que

$$A(f(x,s),t)A(x,s) = A(x,t+s)$$

Equivalentemente, tem-se

$$g(f(x,s), g(x,v,s),t) = g(x,v,t+s)$$

Definição 5.1.6. Defina os seguintes subconjuntos de M:

$$\begin{aligned}
\gamma(x) &= \{f(x,t) : t \in \mathbb{R}\}, \text{ órbita de } x \\
\gamma^+(x) &= \{f(x,t) : t \geq 0\}, \text{ órbita positiva de } x \\
\gamma^-(x) &= \{f(x,t) : t \leq 0\}, \text{ órbita negativa de } x \\
\Lambda^+(x) &= \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(f(x,r))}, \text{ conjunto } \omega\text{-limite}, \\
\Lambda^-(x) &= \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^-(f(x,r))}, \text{ conjunto } \alpha\text{-limite}.
\end{aligned}$$

Observação 5.1.7. Definições equivalentes para os conjuntos ω-limite e α-limite são (BHATIA; SZEGÖ, 2002):

$$\begin{aligned}
\Lambda^+(x) &= \{y \in M : \text{existe sequência } \{t_k\} \text{ em } \mathbb{R} \text{ com } t_k \to +\infty \text{ tal que } f(x,t_k) \to y\}, \\
\Lambda^-(x) &= \{y \in M : \text{existe sequência } \{t_k\} \text{ em } \mathbb{R} \text{ com } t_k \to +\infty \text{ tal que } f(x,-t_k) \to y\}.
\end{aligned}$$

Apesar de a definição de conjunto invariante já ter sido apresentada anteriormente (Definição 2.3.3), no contexto deste capítulo diremos que um conjunto $B \subset M$ é *invariante* se $\gamma(x) \subset B$ para todo $x \in B$ (o que é equivalente a dizer que $f(B,\mathbb{R}) \subset B$).

Definição 5.1.8. Um conjunto $B \subset M$ é dito *minimal* se é não vazio, fechado, invariante, e não possui subconjunto próprio nestas condições.

Observação 5.1.9. De forma similar, considerando que F é fluxo sobre $M \times E$, podemos estender as definições anteriores para conjuntos em $M \times E$. Por exemplo, $\gamma(x,v) = \{F(x,v,t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\Lambda^+(x,v) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \overline{\gamma^+(F(x,v,r))}$.

Observação 5.1.10. Um fato útil a ser usado posteriormente é de os conjuntos ω-limite e α-limite serem fechados e invariantes. De fato, sejam $y \in \Lambda^+(x)$ e $t \in \mathbb{R}$.

Como $y \in \Lambda^+(x)$, seja $\{t_k\}$ sequência em $\mathbb{R}$ tal que $t_k \to +\infty$ e $f(x,t_k) \to y$. Por ser f contínua, tem-se que $f(x,t_k+t) = f(f(x,t_k),t) \to f(y,t)$.

Se definirmos $t'_k = t_k + t$, então temos sequência $\{t'_k\}$ com $t'_k \to +\infty$ de forma que $f(x,t'_k) \to f(y,t)$. Portanto, $f(y,t) \in \Lambda^+(x)$, e segue que $\Lambda^+(x)$ é invariante. Analogamente, prova-se que $\Lambda^-(x)$ é invariante.

Tanto $\Lambda^+(x)$ como $\Lambda^-(x)$ são fechados por definição. Além disso, também é evidente que a observação se aplica a $\Lambda^+(x,v)$ e $\Lambda^-(x,v)$.

Ressaltamos ao leitor que, por estarmos seguindo (SACKER; SELL, 1974) e (SACKER; SELL, 1976) neste capítulo, apresentaremos a seguir uma segunda definição de subfibrado, que foi dada pelos autores na elaboração de sua demonstração.

Definição 5.1.11. Seja $\mathscr{V} \subset M \times \mathbb{R}^d$ e defina a seção

$$\mathscr{V}(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : (x,v) \in \mathscr{V}\}.$$

Diz-se que $\mathscr{V}$ é um *subfibrado* de $M \times \mathbb{R}^d$ se valem as seguintes propriedades:

(i) $\mathscr{V}$ é fechado em $M \times \mathbb{R}^d$;

(ii) Para cada $x \in M$, $\mathscr{V}(x)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$;

(iii) $\dim \mathscr{V}$ é constante em M.

Definição 5.1.12. Sejam $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ subconjuntos de $M \times E$. Dizemos que $M \times E$ é um *soma de Whitney* de $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ se valem as seguintes propriedades.

(i) $\mathscr{V}$ e $\mathscr{W}$ são subfibrados de $M \times E$;

(ii) $\mathscr{V}(x) \bigcap \mathscr{W}(x) = \{0\}$;

(iii) $E = \mathscr{V}(x) + \mathscr{W}(x)$ para todo $x \in M$.

Será útil também definir os seguintes subconjuntos em $M \times E$, uma vez que dicotomias exponenciais são construídas a partir deles.

Definição 5.1.13. Sejam os seguintes subconjuntos de $M \times E$:

$\mathscr{B} = \{(x,v) \in M \times E : |g(x,v,t)|$ é uniformemente limitado em t$\}$, chamado de *conjunto de órbitas limitadas*,

$\mathscr{S} = \{(x,v) \in M \times E : |g(x,v,t)| \to 0$ se $t \to +\infty\}$, chamado de *conjunto estável*,

$\mathscr{U} = \{(x,v) \in M \times E : |g(x,v,t)| \to 0$ se $t \to -\infty\}$, chamado de *conjunto instável*.

Considere também as *seções*

$$\mathscr{S}(x) = \{v \in E : (x,v) \in \mathscr{S}\},$$
$$\mathscr{U}(x) = \{v \in E : (x,v) \in \mathscr{U}\}.$$

Observação 5.1.14. Note que as seções acima são subespaços vetoriais de E.

Definição 5.1.15. Seja $x \in M$. Diremos que F admite uma *dicotomia exponencial em x* se existe projeção $P(x) : E \to E$ com $Im(P(x)) = \mathscr{S}(x)$, $ker(P(x)) = \mathscr{U}(x)$ e constantes positivas K_0 e α tais que

$$||A(x,t)P(x)A^{-1}(x,s)|| \leq K_0 e^{-\alpha(t-s)}, \ s \leq t,$$
$$||A(x,t)[I-P(x)]A^{-1}(x,s)|| \leq K_0 e^{-\alpha(s-t)}, \ t \leq s.$$

A partir das definições dadas, enunciemos o principal resultado deste Capítulo. Seja $d = \dim E$ e, dado $k \in \{0,1,...,d\}$, defina

$$M_k = \{x \in M : \dim \mathscr{S}(x) = k \text{ e } \dim \mathscr{U}(x) = d-k\}.$$

Teorema 5.3.8 Assuma que o conjunto de órbitas limitadas é trivial, isto é, $\mathscr{B} = M \times \{0\}$ e que M é um espaço de Hausdorff compacto. Se existe um único M_k não vazio, então F admite dicotomia exponencial em todo ponto $x \in M$.

5.2 Resultados necessários

Nesta seção, estudaremos mais de perto os critérios ncessários para a existência de uma dicotomia exponencial. Em particular, damos destaque a duas condições que adotaremos para o restante do Capítulo, chamando este par de condições de Hipótese Permanente:

Hipótese Permanente

(i) O conjunto de órbitas limitadas é trivial. Isto é, $\mathscr{B} = M \times \{0\}$;

(ii) M é espaço Hausdorff compacto.

Além disso, damos particular importância à Proposição 5.2.14 e ao Lema 5.3.1 como resultados chave para se chegar à dicotomia exponencial (Seção 5.3). Em linhas gerais, a demonstração consistirá em dois grandes passos:

(i) Provar que o decaimento apresentado pelos conjuntos estável e instável é o exponencial (Lema 5.2.8);

(ii) Provar que para todo $x \in M$, a fibra em x é descrita como uma soma direta

$$\mathbb{R}^d = \mathscr{S}(x) \oplus \mathscr{U}(x).$$

Observação 5.2.1. Em virtude da Hipótese Permanente, dado conjunto $B \subset M \times E$ que seja compacto e invariante, tem-se $B \subset \mathscr{B} = M \times \{0\}$.

Proposição 5.2.2. Seja K conjunto compacto em $M \times E$ e seja (x_k, v_k) sequência em K tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} (x_k, v_k) = (x, v)$. Então

(i) Se existe sequência $\{t_k\}$ em $\mathbb{R}$ com $t_k \to +\infty$ tal que $F(x_k, v_k, [0, t_k]) \subset K$ para todo k, então $(x, v) \in \mathscr{S}$;

(ii) Se existe sequência $\{t'_k\}$ em $\mathbb{R}$ com $t'_k \to +\infty$ tal que $F(x_k, v_k, [-t'_k, 0]) \subset K$ para todo k, então $(x, v) \in \mathscr{U}$;

(iii) Se valem ambas as condições anteriores, então $(x, v) \in \mathscr{S} \cap \mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ e, portanto, $v = 0$.

Demonstração. Provemos (i), com a demonstração de (ii) sendo análoga.

Primeiro, note que $\gamma^+(x, v)$, *ie*, a órbita positiva de (x, v), está contido em K. De fato, dado $t \geq 0$, considere $F(x, v, t)$.

Por hipótese, existe k_0 tal que $t_k \geq t$ e $F(x_k, v_k, t) \in K$ para todo $k \geq k_0$.

Como f e g são contínuas, vem que $f(x_k, t) \to f(x, t)$ e $g(x_k, v_k, t) \to g(x, v, t)$ quando $k \to +\infty$, donde vem que $F(x, v, t) \in \overline{K} \underset{K fechado}{\Longrightarrow} F(x, v, t) \in K$. Seguindo a conclusão de que $\gamma^+(x, v) \subset K$.

Agora, note que $\Lambda^+(x, v)$ é compacto e invariante, pois é um fechado contido em K (uma vez que $\Lambda^+(x, v) \subset \overline{\gamma^+(x, v)} \subset K$) e é invariante pela Observação 5.1.10.

Logo da Observação 5.2.1, segue que $\Lambda^+(x, v) \subset \mathscr{B}$, concluindo que $|g(x, v, t)| \to 0$ se $t \to +\infty \implies (x, v) \in \mathscr{S}$.

A conclusão de (iii) é óbvia. $\square$

Um dos resultados-chave a serem apresentados utilizam o Lema 5.2.8 como parte importante de sua demonstração. Para a prova deste Lema, entretanto, necessitamos de alguns resultados preliminares.

Proposição 5.2.3. Defina $A \subset \mathscr{S}$ como $A = \{(x, v) \in \mathscr{S} : |g(x, v, t)| \leq 1 \text{ para todo } t \geq 0\}$. Então A é compacto em $M \times E$.

Demonstração. Primeiramente, note que A está no compacto $\{(x,v) \in M \times E : |v| \leq 1\}$ (basta tomar $t = 0$ em cada ponto de A), restando mostrar que A é fechado. Assim, considere sequência $\{(x_k, v_k)\}$ em A tal que $(x_k, v_k) \to (x, v)$ se $k \to +\infty$.

O fato de $(x,v) \in \mathscr{S}$ vem da Proposição 5.2.2, pois $F(x_k, v_k, [0,k]) \subset \{(x,v) \in M \times E : |v| \leq 1\}$ para todo k.

Além disso, a continuidade de g garante que $|g(x,v,t)| \leq 1$ para $t \geq 0$ (já que $|g(x_k, v_k, t)| \leq 1$ para todo k). □

Proposição 5.2.4. Seja $\lambda \in (0,1]$. Então não existem sequências $\{(x_k, v_k)\}$ em A e $\{t_k\}$ com $t_k \to +\infty$ tais que $|g(x_k, v_k, t_k)| \geq \lambda$ para todo k.

Demonstração. Suponha por absurdo que existam tais sequências e defina

$$(\eta_k, \xi_k) = F(x_k, v_k, t_k) = (f(x_k, t_k), g(x_k, v_k, t_k))$$

com $|\xi_k| \geq \lambda$ para todo k.

Primeiro, note que (η_k, ξ_k) está em A pois (x_k, v_k) está em A:

$$|g(\eta_k, \xi_k, t)| = |g(x_k, v_k, t_k + t)| \leq 1, \text{ para } t \geq 0.$$

Assim, passando a uma subsequência, seja $(\eta, \xi) = \lim\limits_{k \to +\infty} (\eta_k, \xi_k)$. Como A é fechado, $(\eta, \xi) \in A \subset \mathscr{S}$.

Por outro lado, também tem-se que $(\eta, \xi) \in \mathscr{U}$, pois dado t tal que $0 \leq t \leq t_k$, tem-se que

$$|g(\eta_k, \xi_k, -t)| = |g(x_k, v_k, t_k - t)| \leq 1,$$

isto é, $F(\eta_k, \xi_k, [-t_k, 0]) \subset \{(x,v) \in M \times E : |v| \leq 1\}$ para todo k com $t_k \to +\infty$. Da Proposição 5.2.2, vem que $(\eta, \xi) \in \mathscr{U}$.

Conclusão: $(\eta, \xi) \in \mathscr{S} \bigcap \mathscr{U} \subset \mathscr{B}$, o que é um absurdo, pois $|\xi| \geq \lambda > 0$. □

Proposição 5.2.5. Seja $(x,v) \in A$ tal que $(x, \theta v) \notin A$ sempre que $\theta > 1$. Então existe $\tau = \tau(x,v) > 0$ com $|g(x,v,\tau)| = 1$.

Demonstração. Note, primeiramente, que para todo $(x,v) \in \mathscr{S}$, existe $\tau \geq 0$ tal que

$$|g(x,v,\tau)| = \sup\{|g(x,v,t)| : t \geq 0\}.$$

Além disso, sendo g linear em v, $\sup\limits_{t \geq 0} |g(x, \theta v, t)| = |\theta| \sup\limits_{t \geq 0} |g(x,v,t)|$.

Assim, se $(x,v) \in A$ é como no enunciado, dado $\theta > 1$,

$$\theta \sup_{t \geq 0} |g(x,v,t)| = \sup_{t \geq 0} |g(x, \theta v, t)| > 1,$$

pois $(x,\theta v) \notin A$ e, portanto, segue que $\sup_{t\geq 0}|g(x,v,t)| \geq 1$ pela arbitrariedade de θ. Note, porém, que, como $(x,v) \in A \implies |g(x,v,t)| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Portanto, para τ como foi observado, $|g(x,v,\tau)| = 1$. □

Proposição 5.2.6. Existe $\rho \in (0,1]$ tal que, se $(x,v) \in \mathscr{S}$ e $|v| \leq \rho$, então $(x,v) \in A$.

Demonstração. Suponha que não seja verdade. Então existe sequência $\{(x_k,v_k)\}$ em $\mathscr{S}$ tal que $|v_k| \to 0$ se $k \to +\infty$ mas $(x_k,v_k) \notin A$.

Assim, defina λ_k de forma que $\dfrac{1}{\lambda_k} = \sup_{t\geq 0}|g(x_k,v_k,t)|$.

Dado que $(x_k,v_k) \notin A$, então segue que $0 < \lambda_k < 1$ para todo k (pois $\dfrac{1}{\lambda_k} > 1$) e, da linearidade de g, segue também que $(x_k,\lambda_k v_k) \in A$, pois

$$|g(x_k,\lambda_k v_k,t)| \leq \sup_{t\geq 0}|g(x_k,\lambda_k v_k,t)| = \lambda_k.\frac{1}{\lambda_k} = 1 \text{ para } t \geq 0.$$

Note porém que, como $\sup_{t\geq 0}|g(x_k,\lambda_k v_k,t)| = 1$, temos que $(x_k,\theta\lambda_k v_k) \notin A$ sempre que $\theta > 1$.

Dessa forma, segue da Proposição 5.2.5 que, para cada k existe τ_k tal que $|g(x_k,\lambda_k v_k,\tau_k)| = 1$.

Agora, afirmamos que $\tau_k \to +\infty$ se $k \to +\infty$. De fato, suponha por absurdo que exista algum $C \geq 0$ tal que $\tau_k \leq C$ para todo k.

Sendo M compacto e $|\lambda_k v_k| \leq |v_k| \to 0$, então $\{(x_k,v_k)\}$ está contido num compacto de $M \times E$. Dessa forma, passamos a uma subsequência de $\{(x_k,v_k)\}$ que converge para algum $(x,0)$. Além disso, como $\{\tau_k\} \subset [0,C]$, podemos também passar a uma subsequência de $\{(x_k,v_k)\}$ onde $\tau_k \to T$ para algum $0 \leq T \leq C$.

Logo, da continuidade de g, para a subsequência acima temos

$$\lim_{k\to+\infty}|g(x_k,\lambda_k v_k,\tau_k)| = |g(x,0,T)| = 0.$$

Por outro lado, entretanto, temos $|g(x_k,\lambda_k v_k,\tau_k)| = 1\ \forall k \implies \lim_{k\to+\infty}|g(x_k,\lambda_k v_k,\tau_k)| = 1$, resultando num absurdo, concluindo que $\tau_k \to +\infty$.

Dessa forma, temos sequência $\{(x_k,\lambda_k v_k)\}$ em A e $\{\tau_k\}$ em $\mathbb{R}$ com $\tau_k \to +\infty$ onde $|g(x_k,\lambda_k v_k,\tau_k)| = 1$ para todo k, contradizendo a Proposição 5.2.4 e seguindo a existência de tal $\rho \in (0,1]$.

□

Proposição 5.2.7. Existe $T > 0$ tal que para qualquer $(x,v) \in \mathscr{S}$ tem-se $|g(x,v,T)| \leq \dfrac{1}{2}|v|$ para todo $t \geq T$.

Note que a afirmação acima implica que T não depende de (x,v) em $\mathscr{S}$.

Demonstração. Suponha que seja falso. Então existem sequências $\{(x_k, v_k)\}$ em $\mathscr{S}$ e $\{t_k\}$ em $\mathbb{R}$ com $t_k \to +\infty$ de forma que $|g(x_k, v_k, t_k)| > \frac{1}{2}|v_k|$ para todo k.

Da linearidade de g, podemos assumir para a sequência acima que $|v_k| = \rho$ para todo k como na Proposição 5.2.6, pois

$$|g(x_k, v_k, t_k)| > \frac{1}{2}|v_k| \implies |g(x_k, \rho\frac{v_k}{|v_k|}, t_k)| = \frac{\rho}{|v_k|}|g(x_k, v_k, t_k)| > \frac{\rho}{|v_k|}\left(\frac{1}{2}|v_k|\right) = \frac{1}{2}\rho.$$

Isto novamente contradiz a Proposição 5.2.4, pois a sequência $\{(x_k, v_k)\}$ está em A pela Proposição 5.2.6 mas $|g(x_k, v_k, t_k)| > \frac{1}{2}\rho > 0$ para todo k, concluindo que existe certo $T > 0$ como enunciado. $\square$

Provemos, agora, o Lema 5.2.8, importante para os principais resultados trazidos neste capítulo.

Lema 5.2.8. Valem as seguintes afirmações:

(i) $\mathscr{S}$ e $\mathscr{U}$ são subconjuntos fechados de $M \times E$;

(ii) Existem constantes $K \geq 1$ e $\alpha > 0$ tais que para todo $(x, v) \in \mathscr{S}$, tem-se

$$|g(x, v, t)| \leq K|v|e^{-\alpha t}, \ t \geq 0,$$

e para todo $(x, v) \in \mathscr{U}$, tem-se

$$|g(x, v, t)| \leq K|v|e^{\alpha t}, \ t \leq 0;$$

(iii) As aplicações $\dim \mathscr{S}$ e $\dim \mathscr{U}$ são semicontínuas superiormente em M. Isto é, se $\{x_k\}$ é sequência em M tal que $x_k \to x$, então

$$\dim \mathscr{S}(x) \geq \limsup_{k \to +\infty} \dim \mathscr{S}(x_k),$$

com desigualdade também válida para $\dim \mathscr{U}(x)$.

Demonstração. (i) Seja $\{(x_k, v_k)\}$ sequência em $\mathscr{S}$, convergente para algum (x, v). Se $v = 0$, é evidente que $(x, v) \in \mathscr{S}$.

Suponha que $v \neq 0$ e, sendo ρ como definido pela Proposição 5.2.6, defina $\theta = \frac{\rho}{2|v|}$. Note que $\{(x_k, \theta v_k)\} \subset A$ para k suficientemente grande, pois

$$|\theta v_k| = \frac{\rho}{2|v|}|v_k| \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{\rho}{2}.$$

Por ser A fechado e $(x_k, \theta v_k) \to (x, \theta v) \implies (x, \theta v) \in A$. Logo,

$$|g(x, v, t)| = \frac{1}{\theta}|g(x, \theta v, t)| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0, \text{ pois } (x, \theta v) \in A.$$

Portanto, $(x,v) \in A \subset \mathscr{S}$ e segue que $\mathscr{S}$ é fechado.

(ii) Sendo T dado pela Proposição 5.2.7, defina α e K da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\alpha T &= \log 2\\ K &= e^{\alpha T}\sup\{|g(x,v,t)| : (x,v)\in\mathscr{S}, |v| = 1 \text{ e } 0\le t\le T\}\end{aligned}$$

Provemos indutivamente (em j) que:

$$|g(x,v,t)| \le K|v|e^{-\alpha(j+1)T} \tag{5.1}$$

uniformemente em $x \in M$, $v \in \mathscr{S}(x)$ e $jT \le t \le (j+1)T$, concluindo a afirmação de (ii).

Caso $j = 0$: Note que $|g(x,v,t)| \le K|v|e^{-\alpha T}$ é verdadeiro para $0 \le t \le T$ pela forma como definimos K, α e T, equivalendo a dizer que

$$|g(x,\frac{v}{|v|},t)| \le \sup\{|g(x,v,t)| : (x,v)\in\mathscr{S}, |v| = 1 \text{ e } 0\le t\le T\}.$$

Passo de indução ($p(j) \implies p(j+1)$): Dados $x \in M$ e $v \in \mathscr{S}(x)$, defina $x_j = f(x, jT)$ e $v_j = g(x,v,jT)$.

Note que $(x_j, v_j) \in \mathscr{S}$ (pois $|g(x_j,v_j,s)| = |g(x,v,jT+s)| \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$) e, da Proposição 5.2.7, segue também que

$$|g(x_j,v_j,s)| \le \frac{1}{2}|v_j| \text{ se } s \ge T.$$

Em particular, se tivermos $T \le s < 2T$ e, definindo $t = jT + s$, então $(j+1)T \le t < (j+2)T$. Assim,

$$|g(x,v,t)| = |g(x,v,jT+s)| \underset{s\ge T}{\le} \frac{1}{2}|g(x,v,jT)| \underset{5.1}{\le} \frac{1}{2}K|v|e^{-\alpha(j+1)T} = K|v|e^{-\alpha(j+2)T},$$

concluindo a prova da indução.

Portanto, dado $t \ge 0$, tome j tal que $jT \le t < (j+1)T$ e, de 5.1, vem que

$$|g(x,v,t)| \le K|v|e^{-\alpha(j+1)T} \le K|v|e^{-\alpha t}.$$

(iii) Seja $\{x_k\}$ sequência em M tal que $x_k \to x$ e defina

$$n = \limsup_{k\to+\infty} \dim \mathscr{S}(x_k)$$

Assim, escolha subsequência de $\{x_k\}$ onde $\dim\mathscr{S}(x_k) = n$ para todo k e tome base ortonormal $\{e_1^k, \ldots, e_n^k\}$ em cada seção $\mathscr{S}(x_k)$. Novamente passando a uma subsequência, podemos assumir que $\{e_i^k\}$ converge para algum $\overline{e}_i$ para cada $1 \le i \le n$.

Da parte (i) do Lema, já temos $\mathscr{S}$ fechado, seguindo que $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\} \subset \mathscr{S}(x)$ (pois $(x_k, e_i^k) \to (x, \overline{e}_i)$) e, sendo $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ conjunto ortonormal, segue que $\dim\mathscr{S}(x) \ge n$.

As provas para as afirmações com relação a $\mathscr{U}$ são análogas. $\square$

A próxima Proposição será útil para mais de uma demonstração desta seção.

Proposição 5.2.9. Seja $\{(x_k, v_k)\}$ uma sequência no conjunto compacto $\{(x,v) \in M \times E : |v| = 1\}$. Se existe sequência $\{t_k\}$ em $\mathbb{R}$, $t_k \geq 0$, de forma que

$$|g(x_k, v_k, t_k)| \to 0 \text{ se } k \to +\infty$$

então tem-se que $t_k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$.

Demonstração. Suponha por absurdo que exista sequência nestas condições mas $t_k \not\to +\infty$.

Passando a uma subsequência de (x_k, v_k) (chamemos novamente de (x_k, v_k)), temos que (x_k, v_k) converge para algum (x, v). Além disso, dado que $t_k \not\to +\infty$, então $t_k \leq C$ para algum $C < +\infty$. Dessa forma, podemos novamente passar a uma subsequência de (x_k, v_k) onde $\{t_k\}$ converge para algum $T \leq C$.

Portanto, temos sequência (x_k, v_k) tal que $(x_k, v_k) \to (x, v)$ de forma que $t_k \to T$ quando $k \to +\infty$.

Entretanto, a continuidade de g implica que

$$\lim_{k \to +\infty} g(x_k, v_k, t_k) = g(x, v, T) = 0,$$

o que é um absurdo, pois $|v| = 1$ e $A(x, T) \in GL(d)$, concluindo que $t_k \to +\infty$. □

Observação 5.2.10. A existência de uma subsequência convergente para $\{(x_k, v_k)\}$ vem do Teorema de metrização de Urysohn (MUNKRES, 2000). De fato, dado que um espaço Hausdorff compacto é regular e por M satisfazer o segundo axioma da enumerabilidade, segue do Teorema que M é espaço metrizável e, portanto, sequencialmente compacto.

Observação 5.2.11. Perceba que afirmação da Proposição também é válida se $t_k \leq 0$ para todo k, de forma que se $|g(x_k, v_k, t_k)| \to 0$ quando $k \to +\infty$, então $t_k \to -\infty$.

A próxima Proposição, importante futuramente, diz que se $t \to \pm\infty$ então $t \mapsto |g(x, v, t)|$ exibe apenas dois comportamentos: ou tende a zero ou diverge.

Proposição 5.2.12. Para todo $(x, v) \in M \times E$, tem-se:

$$\limsup_{t \to +\infty} |g(x, v, t)| = \liminf_{t \to +\infty} |g(x, v, t)|,$$

$$\limsup_{t \to -\infty} |g(x, v, t)| = \liminf_{t \to -\infty} |g(x, v, t)|,$$

Além disso,

$$v \notin \mathscr{S}(x) \implies \lim_{t \to +\infty} |g(x, v, t)| = +\infty$$

$$v \notin \mathscr{U}(x) \implies \lim_{t \to -\infty} |g(x, v, t)| = +\infty.$$

Demonstração. Dado $(x,v) \in M \times E$, defina

$$L = \limsup_{t\to+\infty} |g(x,v,t)|$$
$$\ell = \liminf_{t\to+\infty} |g(x,v,t)|$$

Já sabemos que $0 \leq \ell \leq L \leq +\infty$. Portanto, se $(x,v) \in \mathscr{S}$ então $L = \ell = 0$.

Agora, assuma $(x,v) \notin \mathscr{S}$. Note que temos $L > 0$. Mostraremos que só é possível que $L = +\infty$ e, assim, $\ell = +\infty$.

Suponha, então, que $L < +\infty$. Então, $|g(x,v,t)|$ é limitado para $t \geq 0$.

Dessa forma, temos que $\Lambda^+(x,v)$ é não vazio, compacto (dado que $\Lambda^+(x,v)$ é fechado e está contido em $\{(x,v) \in M \times E : |v| \leq L\}$) e invariante. Mas isto é uma contradição, pois $\Lambda^+(x,v)$ não está contido em $\mathscr{B}$ (Observação 5.2.1). Logo, concluímos que $L = +\infty$.

Mostremos agora que $\ell = +\infty$. Supondo que $\ell < +\infty$ por absurdo, encontraremos uma contradição com a Proposição 5.2.2. Dessa forma, se $\ell < +\infty$ então devem existir sequências $\{s_k\}$, $\{r_k\}$ e $\{t_k\}$ com as seguintes propriedades:

(i) $s_k < r_k < t_k$;

(ii) $|g(x,v,t)| \leq \ell + 1$ se $t = s_k$ ou $t = t_k$;

(iii) r_k é tal que $|g(x,v,r_k)| = max\{|g(x,v,t)| : s_k \leq t \leq t_k\}$ para todo k.

Denote $u_k := |g(x,v,r_k)|$. Note que $u_k \to +\infty$ se $k \to +\infty$ (caso contrário temos $L < +\infty$).

Defina, agora, a sequência $\{(x_k, v_k)\}$ da seguinte forma:

$$x_k = f(x, r_k) \text{ e } v_k = \frac{g(x,v,r_k)}{|u_k|}$$

Note que a sequência está contida no compacto $\{(x,v) \in M \times E : |v| = 1\}$. Além disso, se $s_k - r_k \leq t' \leq t_k - r_k$ então $|g(x_k, v_k, t')| \leq 1$, pois

$$s_k - r_k \leq t' \leq t_k - r_k \iff s_k \leq t' + r_k \leq t_k, \text{ logo}$$

$$|g(x_k, v_k, t')| = \frac{1}{|u_k|}|g(f(x,r_k), g(x,v,r_k), t')| = \frac{1}{|u_k|}|g(x,v,t'+r_k)| \leq 1.$$

Note também que, como $|g(x,v,t)| \leq \ell + 1$ se $t = s_k$ ou $t = t_k$, então se $t' = s_k - r_k$ ou $t' = t_k - r_k$ segue que

$$|g(x_k, v_k, t')| = \frac{1}{|u_k|}|g(x,v,\underbrace{t'+r_k}_{=t_k \text{ ou } s_k})| \leq \frac{\ell+1}{|u_k|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

isto é, concluímos que $(s_k - r_k) \to -\infty$ e $(t_k - r_k) \to +\infty$ se $k \to +\infty$ (Proposição 5.2.9).

Dessa forma, construímos uma sequência $\{(x_k, v_k)\}$ que encaixa nos itens (i) e (ii) de Proposição 5.2.2. Assim, segue que qualquer ponto de acumulação (x, v) desta sequência deve estar em $\mathscr{B}$, isto é, $|v| = 0$, o que é um absurdo, pois $|v_k| = 1$ para todo k. Portanto, concluímos que $\ell = +\infty$. $\square$

Proposição 5.2.13. Para cada $k = 1, 2, ...$, seja K_k algum subespaço vetorial de E de forma que $\dim K_k \geq \ell$, para algum ℓ fixo. Defina K como

$$K = \limsup_{k\to+\infty} K_k = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k}.$$

Então o subespaço $spanK$ possui dimensão maior ou igual a ℓ.

Demonstração. Dado k, seja $\{e_1^k, ..., e_\ell^k\}$ conjunto ortonormal em K_k. Considerando que a sequência $\{e_i^k\}_k$ está contida na esfera da raio 1 em E (que é compacta) para $i = 1, ..., \ell$, podemos passar a uma subsequência de forma que $\lim\limits_{k\to+\infty} e_i^k = \overline{e}_i$.

Dessa forma, obtemos $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_\ell\}$ conjunto ortonormal contido em K (pois se $\lim\limits_{k\to+\infty} e_i^k = \overline{e}_i \implies \overline{e}_i \in \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k}$ para todo n), seguindo que $span\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_\ell\} \subset spanK$ e, portanto, $\dim(spanK) \geq \ell$. $\square$

Proposição 5.2.14. Sejam $x \in M$, $\eta \in \Lambda^-(x)$ e $\eta' \in \Lambda^+(x)$. Sendo $d = \dim E$, então valem:

$$\dim \mathscr{S}(\eta) \geq d - \dim \mathscr{U}(x),$$

$$\dim \mathscr{U}(\eta') \geq d - \dim \mathscr{S}(x).$$

Demonstração. Dado $x \in M$, seja $\mathscr{K}(x)$ um subespaço complementar de $\mathscr{U}(x)$ (*ie*, $\mathscr{K}(x) \bigcap \mathscr{U}(x) = \{0\}$ e $\mathscr{K}(x) + \mathscr{U}(x) = E$).

Dada sequência $\{t_k\}$ em $\mathbb{R}$ com $t_k \geq 0$, defina

$$\mu_k = \min\{|g(x, v, t_k)| : v \in \mathscr{K}(x), |v| = 1\}$$

Note que, pela Proposição 5.2.12, se $t_k \to +\infty$ então $\mu_k \to +\infty$.

Dessa forma, fixe $\eta \in \Lambda^-(x)$ e tome sequência $\{t_k\}$ de forma que $t_k \to +\infty$ e $x_k = f(x, -t_k) \to \eta$.

Defina, agora $K_k = g(x, \mathscr{K}(x), -t_k)$. Dado que $g(x, \cdot, -t_k)$ toma valores em $GL(d)$, K_k é subespaço de E tal que $\dim K_k = \dim \mathscr{K}(x)$ $(= d - \dim \mathscr{U}(x))$. Assim, dado $v \in K_k$ com $|v| \leq 1$, tem-se que $|g(x_k, v, t_k)| \leq \mu_k^{-1}$

Afirmação: existe $C < +\infty$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq t_k} |g(x_k, v, t)| \leq C \text{ para todo } k, \text{ para todo } v \in K_k \text{ com } |v| \leq 1. \tag{5.2}$$

Suponha que não. Então deve existir sequência $\{v_k\}$, $v_k \in K_k$, $|v_k| \leq 1$, de forma que $\sup_{0\leq t\leq t_k} |g(x_k, v_k, t)| \to +\infty$ se $k \to +\infty$.

Assim, defina $\beta_k = \sup_{0\leq t\leq t_k} |g(x_k, v_k, t)|$ e seja $\tau_k \in [0, t_k]$ de forma que $|g(x_k, v_k, \tau_k)| = \beta_k$.

Seja a sequência $\{(\eta_k, \xi_k)\}$ em $M \times E$ definida como

$$(\eta_k, \xi_k) = \left(f(x_k, \tau_k), \frac{g(x_k, v_k, \tau_k)}{\beta_k} \right)$$

Dessa forma, tem-se que $|\xi_k| = 1$ e $F(\eta_k, \xi_k, [-\tau_k, t_k - \tau_k]) \subset \{(x, v) \in M \times E : |v| \leq 1\}$, pois dado t tal que $-\tau_k \leq t \leq t_k - \tau_k$, então $0 \leq t + \tau_k \leq t_k$, logo

$$|g(\eta_k, \xi_k, t)| = \frac{1}{\beta_k}|g(f(x_k, \tau_k), g(x_k, v_k, \tau_k), t)| = \frac{1}{\beta_k}|g(x_k, v_k, t + \tau_k)| \leq 1$$

Note, porém, que

$$|g(\eta_k, \xi_k, -\tau_k)| = \frac{1}{\beta_k}|g(f(x_k, \tau_k), g(x_k, v_k, \tau_k), -\tau_k)| = \frac{1}{\beta_k} \underbrace{|x_k|}_{=1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

$$|g(\eta_k, \xi_k, t_k - \tau_k)| = \frac{1}{\beta_k}|g(f(x_k, \tau_k), g(x_k, v_k, \tau_k), t_k - \tau_k)| = \frac{1}{\beta_k}|g(x_k, v_k, t_k)| \leq \frac{1}{\beta_k \mu_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Logo, tem-se que $-\tau_k \to -\infty$ e $(t_k - \tau_k) \to +\infty$ quando $k \to +\infty$ (Proposição 5.2.9).

Agora, sendo $\{(\eta_k, \xi_k)\}$ sequência num compacto, passando a uma subsequência podemos assumir que (η_k, ξ_k) converge para algum (η, ξ). Então, $|\xi| = 1$ dado que $|\xi_k| = 1$ para todo k, mas isso contradiz a Proposição 5.2.2, e segue a afirmação de 5.2.

Defina, agora $K = \limsup_{k\to+\infty} K_k = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k}$ e seja $v \in K$ com $|v| \leq 1$. Escolha sequência (x_k, v_k) tal que $v_k \in K_k$, $|v_k| \leq 1$ de forma que, passando a uma subsequência, tenha-se $(x_k, v_k) \to (\eta, v)$. Pela afirmação em 5.2, temos que

$$F(x_k, v_k, [0, t_k]) \subset \{(x, v) \in M \times E : |v| \leq C\}$$

para todo k. Logo, da Proposição 5.2.2 (i), vem que $v \in \mathscr{S}(\eta)$ e, portanto, $K \subset \mathscr{S}(\eta)$. Dessa forma, tem-se $span K \subset \mathscr{S}(\eta)$ e, pela Proposição 5.2.13, vem que

$$\dim \mathscr{S}(\eta) \geq \dim K_k = d - \dim \mathscr{U}(x).$$

A segunda desigualdade é demonstrada de forma análoga. $\square$

5.3 Resultados principais

Lema 5.3.1. Seja $x \in M$ e defina:

$$\begin{aligned} d &= \dim E \\ k &= \dim \mathscr{S}(x) \\ \ell &= \dim \mathscr{U}(x) \\ k_1 &= d - \ell \\ k_2 &= k \end{aligned}$$

Então $k_1 \geq k_2$ e valem as seguintes afirmações:

(i) Para todo $\eta \in \Lambda^-(x)$, tem-se

$$\dim \mathscr{S}(\eta) = k_1 \text{ e } \dim \mathscr{U}(\eta) = d - k_1;$$

(ii) Para todo $\eta' \in \Lambda^+(x)$, tem-se

$$\dim \mathscr{S}(\eta') = k_2 \text{ e } \dim \mathscr{U}(\eta') = d - k_2.$$

Demonstração. A afirmação de que $k_1 \geq k_2$ vem do fato de que $\mathscr{S} \bigcap \mathscr{U} \subset \mathscr{B} = M \times \{0\}$. Isto é, $\mathscr{S}(x) \bigcap \mathscr{U}(x) = \{0\}$ e, assim, $d \geq \dim \mathscr{S}(x) + \dim \mathscr{U}(x) \iff k_1 \geq k_2$.

Provemos (i), cuja argumentação é análoga para (ii).

Dado $\eta \in \Lambda^-(x)$, segue diretamente da Proposição 5.2.14 que $\dim \mathscr{S}(\eta) \geq d - \ell$. Além disso, da função $\dim \mathscr{U}(x)$ ser semicontínua superiormente (Proposição 5.2.8) segue que $\dim \mathscr{U}(\eta) \geq \dim \mathscr{U}(x) (= \ell)$. Logo, segue que

$$d = (d - \ell) + \ell \leq \dim \mathscr{S}(\eta) + \dim \mathscr{U}(\eta) \leq d,$$

onde, na segunda desiguladade aplica-se $\mathscr{S}(\eta) \bigcap \mathscr{U}(\eta) = \{0\}$. Portanto, conclui-se que

$$\dim \mathscr{S}(\eta) = k_1 \text{ e } \dim \mathscr{U}(\eta) = \ell = d - k_1.$$

A demonstração de (ii) é feita de forma análoga. □

Este próximo resultado mostra que, se algum η pertence a algum conjunto ω-limite ou α-limite, então $\mathbb{R}^d = \mathscr{S}(\eta) + \mathscr{U}(\eta)$. Isto é, $\eta \in M_k$ para algum k.

Teorema 5.3.2. Seja $x \in M$. Então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $k_1 \geq k_2$, $\Lambda^-(x) \subset M_{k_1}$, $\Lambda^+(x) \subset M_{k_2}$. Além disso, se B é algum conjunto minimal, tem-se $B \subset M_k$ para algum k.

Demonstração. As afirmações de $\Lambda^-(x) \subset M_{k_1}$ e $\Lambda^+(x) \subset M_{k_2}$ seguem diretamente do Lema anterior com $k_1 = d - \dim \mathscr{U}(x)$ e $k_2 = \dim \mathscr{S}(x)$.

O fato de ser $k_1 \geq k_2$ sai diretamente de $\dim \mathscr{S}(x) + \dim \mathscr{U}(x) \leq d$.

Agora, se B é algum conjunto minimal, afirma-se que $B = \Lambda^-(x) = \Lambda^+(x)$ para todo $x \in B$. Com efeito, dado $x \in B$ ($B \neq \emptyset$ por definição) segue que $\Lambda^+(x)$, $\Lambda^-(x) \subset B$, pois B é invariante e fechado. Como $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ são fechados e invariantes, segue que $B = \Lambda^+(x) = \Lambda^-(x)$.

Dessa forma, $\Lambda^+(x)$, $\Lambda^-(x)$ estão contidos num mesmo M_k e $B \subset M_k$. □

Observação 5.3.3. Note que o Teorema 5.3.2 prova a existência de ao menos um M_k não vazio para algum k, uma vez que M sempre contém um conjunto minimal.

Com o intuito de maior didática para o leitor, provamos alguns resultados que são consequências diretas do Teorema e Lemas anteriores a fim de demonstrar o próximo Teorema.

Lema 5.3.4. Para cada $k = 0, 1, ..., d$, o conjunto M_k é invariante e compacto. Além disso, $M_k \bigcap M_\ell = \emptyset$ se $k \neq \ell$.

Demonstração. É imediato que $M_k \bigcap M_\ell = \emptyset$ se $k \neq \ell$.

Mostremos que M_k é compacto. Seja $\{x_m\}$ sequência em M_k, convergente para algum x quando $m \to +\infty$. Como $\dim \mathscr{S}$ e $\dim \mathscr{U}$ são funções semicontínuas superiormente, segue que

$$\dim \mathscr{S}(x) \geq \limsup_{m \to +\infty} \underbrace{\dim \mathscr{S}(x_m)}_{=k,\ \forall m} = k,$$

$$\dim \mathscr{U}(x) \geq \limsup_{m \to +\infty} \underbrace{\dim \mathscr{U}(x_m)}_{=d-k,\ \forall m} = d - k.$$

$$\implies d = k + (d-k) \leq \dim \mathscr{S}(x) + \dim \mathscr{U}(x) \leq d$$

Portanto, $\dim \mathscr{S}(x) = k$ e $\dim \mathscr{U}(x) = d - k$, concluindo que $x \in M_k$. Isto é, M_k é fechado num espaço Hausdorff compacto $\implies$ M_k compacto.

M_k ser invariante vem do fato de as funções $\dim \mathscr{S}(x)$ e $\dim \mathscr{U}(x)$ serem constantes ao longo de órbitas. Isto é,

$$\mathscr{S}(f(x,s)) = A(x,s)\mathscr{S}(x) \text{ e } \mathscr{U}(f(x,s)) = A(x,s)\mathscr{U}(x)$$

seguindo que M_k é invariante para todo $k = 0, 1, ..., d$. □

Lema 5.3.5. Seja $x \in M$ tal que $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ estão contidos num mesmo M_k. Então $x \in M_k$ e $\overline{\gamma(x)} \subset M_k$.

Demonstração. Se $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ estão contidos num mesmo M_k, do Lema 5.3.1 segue que $k = k_1 = k_2$, onde $k_1 = d - \dim \mathscr{U}(x)$ e $k_2 = \dim \mathscr{S}(x)$. Portanto, segue que $\dim \mathscr{S}(x) = k$ e $\dim \mathscr{U}(x) = d - k \implies x \in M_k$.

Além disso, dado que M_k é invariante e compacto (Lema 5.3.4), segue diretamente que $\overline{\gamma(x)} \subset M_k$. □

Lema 5.3.6. Existe um único M_k não vazio se, e somente se, todo conjunto minimal está contido no mesmo M_k.

Demonstração. Do Teorema 5.3.2 já temos que todo conjunto minimal está contido em algum M_k. Se existe apenas um M_k não vazio, segue a primeira implicação.

Reciprocamente, por contrapositiva suponha haver mais de um M_k não vazio. Isto é, que existem M_k e M_ℓ não vazios com $k \neq \ell$. Consequentemente, sendo M_k e M_ℓ compactos e invariantes (Lema 5.3.4), segue que cada um destes contém um conjunto minimal. □

Observação 5.3.7. A existência de conjuntos minimais em M_k e M_ℓ, afirmada no Lema anterior, vem do fato de todo conjunto não vazio, compacto e invariante possui um conjunto minimal (BHATIA; SZEGÖ, 2002).

Teorema 5.3.8. Se existe um único M_k, então valem as seguintes afirmações:

(i) $M = M_k$ para algum $k \in \{0, 1, ..., d\}$;

(ii) $\mathscr{S}$ e $\mathscr{U}$ são subfibrados fechados e invariantes de $M \times E$;

(iii) $M \times E = \mathscr{S} + \mathscr{U}$ como soma de Whitney;

(iv) Seja $P(x) : E \to E$ a projeção com $Im(P(x)) = \mathscr{S}(x)$, $ker(P(x)) = \mathscr{U}(x)$. Então existem constantes positivas K_0 e α tais que

$$||A(x,t)P(x)A^{-1}(x,s)|| \leq K_0 e^{-\alpha(t-s)}, \ s \leq t,$$
$$||A(x,t)[I - P(x)]A^{-1}(x,s)|| \leq K_0 e^{-\alpha(s-t)}, \ t \leq s,$$

isto é, F admite dicotomia exponencial em todo $x \in M$

Demonstração. (i) De fato, se existe um único M_k então dado $x \in M$, segue que do Teorema 5.3.2 que $\Lambda^-(x)$, $\Lambda^+(x) \subset M_k$. Do Lema 5.3.5, vem que $x \in M_k$. Portanto, $M \subset M_k$.

(ii) $\mathscr{S}$ e $\mathscr{U}$ serem fechados sai diretamente do Lema 5.2.8. Além disso, como $\dim \mathscr{S}(x)$, $\dim \mathscr{U}(x)$ são constantes pelo item (i), segue que $\mathscr{S}$ e $\mathscr{U}$ são subfibrados pela Definição 5.1.11.

Além disso, se $(x,v) \in \mathscr{S}$, então $F(x,v,t) = (f(x,t), g(x,v,t)) \in \mathscr{S}$, pois dado $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(f(x,t), g(x,v,t), s)| = |g(x,v,t+s)| \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0,$$

seguindo que $\mathscr{S}$ é invariante, com demonstração análoga para $\mathscr{U}$.

(iii) Note que esta afirmação é apenas uma reformulação dos itens (i) e (ii).

(iv) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $s \leq t$, e tome $u \in \mathscr{S}(f(x,s)) \underset{(*)}{=} A(x,s)\mathscr{S}(x)$.

Observação: A igualdade em $(*)$ é verdadeira, pois $\mathscr{S}$ é invariante e $A(x,s)$ toma valores em $GL(d)$.

Logo, temos que $(f(x,s),u) \in \mathscr{S}$ ($\mathscr{S}$ invariante), $A^{-1}(x,s)u \in \mathscr{S}(x)$ e, sendo $P(x) : E \to E$ projeção em $\mathscr{S}(x)$, $P(x)A^{-1}(x,s)u = A^{-1}(x,s)u$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
|A(x,t)P(x)A^{-1}(x,s)u| &= |A(x,t)A^{-1}(x,s)u| \\
&= |A(f(x,s),t-s)u| \\
&= |g(f(x,s),u,t-s)| \\
&\leq K|u|e^{-\alpha(t-s)},
\end{aligned}$$

onde a desigualdade anterior sai do Lema 5.2.8, dado que $(f(x,s),u) \in \mathscr{S}$.

Observação: foi usado que $A^{-1}(x,s) = A(f(x,s),-s)$ na segunda desigualdade, o que é consequência da propriedade de fluxo em F:

$$A(x,s)A(f(x,s),-s) = I \implies A^{-1}(x,s) = A(f(x,s),-s).$$

Por outro lado, tome $w \in \mathscr{U}(f(x,s)) = A(x,s)\mathscr{U}(x)$. Analogamente, temos $(f(x,s),w) \in \mathscr{U}$, $A^{-1}(x,s)w \in \mathscr{U}(x)$ e $P(x)A^{-1}(x,s)w = 0$.

Dado que $E = \mathscr{S}(f(x,s)) + \mathscr{U}(f(x,s))$ e $\mathscr{S}(f(x,s)) \bigcap \mathscr{U}(f(x,s)) = \{0\}$ pelo item (i), segue que qualquer $v \in E$ é unicamente escrito como uma soma $v = u + w$, onde $u \in \mathscr{S}(f(x,s))$ e $w \in \mathscr{U}(f(x,s))$. Logo,

$$\begin{aligned}
|A(x,t)P(x)A^{-1}(x,s)v| &= |A(x,t)P(x)A^{-1}(x,s)(u+w)| \\
&\leq K|u|e^{-\alpha(t-s)}.
\end{aligned}$$

Como $P(x) : E \to E$ é contínua, existe k_0 tal que $|P(x)v| \leq k_0|v|$ para todo $v \in E$, e vem que $|u| = |P(x)v| \leq k_0|v|$. Portanto, conclui-se que

$$|A(x,t)P(x)A^{-1}(x,s)v| \leq K|u|e^{-\alpha(t-s)} \leq Kk_0|v|e^{-\alpha(t-s)}$$

com a demonstração para $[I - P(x)]$ sendo análoga. □

REFERÊNCIAS

AVILA, A.; VIANA, M. Simplicity of Lyapunov spectra: a sufficient criterion. **Portugaliae Mathematica**, v. 64, n. 3, p. 311 – 376, 2007. Citado na página 34.

BARREIRA, L.; PESIN, Y. **Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Citado na página 30.

BHATIA, N.; SZEGÖ, G. **Stability Theory of Dynamical Systems**. Springer Berlin Heidelberg, 2002. (Classics in Mathematics). ISBN 9783540427483. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wP5dwTS6jg0C>. Citado nas páginas 56 e 70.

BONATTI, C.; VIANA, M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. **Israel Journal of Mathematics**, v. 115, p. 157 – 193, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02810585>. Citado na página 34.

FOLLAND, G. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wI4fAwAAQBAJ>. Citado na página 37.

FURSTENBERG, H.; KESTEN, H. Products of Random Matrices. **The Annals of Mathematical Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 31, n. 2, p. 457 – 469, 1960. Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909>. Citado nas páginas 33 e 35.

GOL'DSHEID, I.; MARGULIS, G. The condition of simplicity of the spectrum of Lyapunov exponents. **DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR**, MEZHDUNARODNAYA KNIGA, 39 DIMITROVA UL., 113095 MOSCOW, RUSSIA, v. 293, n. 2, p. 297–301, 1987. ISSN 0002-3264. Citado na página 34.

GOL'DSHEID, I. Y.; MARGULIS, G. A. Lyapunov indices of a product of random matrices. **Russian Mathematical Surveys**, v. 44, n. 5, p. 11, oct 1989. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1070/RM1989v044n05ABEH002214>. Citado na página 34.

GUIVARC'H, Y.; RAUGI, A. Products of random matrices: convergence theorems. In: **Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, (Contemp. Math., v. 50). p. 31–54. ISBN 0-8218-5044-X. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/conm/050/841080>. Citado na página 34.

HASSELBLATT, B.; KATOK, A. Chapter 1 principal structures. In: HASSELBLATT, B.; KATOK, A. (Ed.). Elsevier Science, 2002, (Handbook of Dynamical Systems, v. 1). p. 1–203. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1874575X02800030>. Nenhuma citação no texto.

LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. **International Journal of Control**, Taylor Francis, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>. Citado na página 21.

MAÑÉ, R. Lyapounov exponents and stable manifolds for compact transformations. In: SPRINGER. **Geometric Dynamics: Proceedings of the International Symposium held at the Instituto de Matématica Pura e Aplicada Rio de Janeiro, Brasil, July–August 1981**. [S.l.], 2006. p. 522–577. Citado na página 21.

MAÑÉ, R.; LEVY, S. **Ergodic Theory and Differentiable Dynamics**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics). ISBN 9783642703355. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=0V7yCAAAQBAJ>. Citado nas páginas 20, 21, 35, 36 e 40.

MUNKRES, J. R. **Topology**. [S.l.]: Prentice Hall, 2000. Citado na página 64.

OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. **Tr. Mosk. Mat. Obs.**, v. 19, p. 179 – 210, 1968. Citado nas páginas 33, 35 e 36.

PETERSEN, K. E. **Ergodic Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1983. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Nenhuma citação no texto.

PLISS, V. On a conjecture of Smale. **Differentsial'nye Uravneniya**, v. 8, n. 2, p. 268 – 282, 1972. Citado na página 47.

RAGHUNATTAN, M. S. A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem. **Israel Journal of Mathematics**, v. 32, p. 356 – 362, 1979. Citado na página 20.

RUELLE, D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. **Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, v. 50, p. 27 – 58, 1979. Citado na página 20.

____. Characteristic exponents and invariant manifolds in hilbert space. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 115, n. 2, p. 243–290, 1982. ISSN 0003486X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1971392>. Citado na página 21.

SACKER, R. J.; SELL, G. R. Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, I. **Journal of Differential Equations**, v. 15, n. 3, p. 429–458, 1974. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022039674900679>. Citado nas páginas 21, 55 e 57.

____. Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, II. **Journal of Differential Equations**, v. 22, n. 2, p. 478–496, 1976. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022039676900425>. Citado nas páginas 21, 55 e 57.

VIANA, M. **A proof of Oseledets' theorem**. <http://w3.impa.br/~viana/out/oseledets.pdf>. Accessed: 2022-12-22. Citado na página 21.

____. **Lectures on Lyapunov Exponents**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Citado nas páginas 29, 34 e 36.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Foundations of Ergodic Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Citado nas páginas 23 e 27.

ICMC USP
SÃO CARLOS