UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sobre teoremas de funções implícitas, abertas e suas aplicações

Edivaldo Lopes dos Santos

São Carlos - SP

Sobre teoremas de funções implícitas, abertas e suas aplicações

Edivaldo Lopes dos Santos

Orientador: ***Prof. Dr. Carlos Biasi***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências: Matemática.

USP – São Carlos
Fevereiro de 2005

Aluno: *Edivaldo Lopes dos Santos*

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Carlos Biasi

Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon

Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes

Prof. Dr. Pedro Luis Queiroz Pergher

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Dedico este trabalho à toda minha família,

à Denise e à Marina.

Resumo

Neste trabalho nós obtivemos uma versão homológica do teorema da função implícita. Como conseqüência, nós mostramos que sob certas condições, o conjunto dos elementos inversíveis de um monóide topológico X é um grupo aberto em X e nós usamos a teoria clássica de grupos topológicos para concluir que este conjunto é um grupo de Lie. Mais ainda, nós provamos versões do teorema da função aberta e versões do teorema de Darboux.

Abstract

In this work we obtain a homological version of the implicit function theorem. As a consequence, we show that under certain conditions, the set of the invertible elements of a topological monoid X is an open topological group in X and we use the classical topological group theory to conclude that this set is a Lie group. Moreover, we prove versions of the open function theorem and versions of the Darboux's theorem.

Agradecimentos

A todos aqueles que me incentivaram e acompanharam a minha jornada, meus mais sinceros agradecimentos: a Deus, por ter me dado saúde e forças para enfrentar e superar as dificuldades e à minha família, pelo amor que têm por mim.

Ao meu orientador, Professor Doutor Carlos Biasi, a quem agradeço pela confiança em mim depositada, pela orientação segura e extremamente competente e que muito contribuiu com o seu otimismo, a sua experiência e conhecimento para o meu aprendizado. Em especial, agradeço pela amizade, dedicação e paciência.

A todos os professores que contribuíram diretamente para a minha formação, em especial à Professora Doutora Alice Kimie Miwa Libardi, da Unesp de Rio Claro.

A todos os colegas da pós-graduação, pelo apoio, incentivo e amizade, em particular ao Helton, um grande amigo. Ao Sadao Massago pela sua disponibilidade com relação às freqüentes dúvidas no uso do Latex.

A todos os professores e funcionários do ICMC, que com o seu trabalho e competência contribuíram para o sucesso deste trabalho.

À Marina, pela alegria e otimismo constantes e à Eliane, pelo incentivo e amizade!

E como não poderia deixar de ser, à Denise, que muito contribuiu com este trabalho, através de valiosas sugestões e revisões, a quem agradeço especialmente, por todo apoio, otimismo, dedicação e companheirismo por todos esses anos.

À Capes pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

Sumário

Introdução

Neste trabalho, consideramos o problema de determinar novas versões dos teoremas clássicos das funções implícitas, abertas e do teorema de Dauboux. Essas versões visam enfraquecer as condições de diferenciabilidade ou até mesmo, no caso do teorema da função implícta e do teorema de Darboux, versões homológicas (Teoremas 3.2.1, 4.4.5) são provadas para funções contínuas entre espaços topológicos quaisquer. Um classe especial de espaços topológicos que satisfaz as condições dos nossos teoremas é a classe das variedades generalizadas.

No capítulo 2 deste trabalho, definimos variedades generalizadas e estudamos algumas propriedades desses espaços. Uma n-variedade generalizada X é um espaço ENR satisfazendo a seguinte condição homológica: $H_*(X, X-\{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{0\}; \mathbb{Z})$. Se a condição homológica for satisfeita com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ dizemos que X é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade generalizada. Tais variedades têm sido recentemente estudadas; por exemplo, é um fato conhecido que existem variedades generalizadas que não são homotopicamente equivalentes a variedades topológicas (ver [10, 11]). Em [6, 7, 8], foi mostrado que a dualidade de Poincaré é valida para qualquer variedade generalizada.

Em [2], usando a Dualidade de Poincaré, Biasi et al. definiram as classes de Stiefel-Whitney para uma $\mathbb{Z}_2$-variedade generalizada X. Isso significa que essas classes podem ser estudadas do ponto de vista algébrico topológico e não é necessária a hipótese de diferenciabilidade sobre X. Usando tais classes, eles definem uma classe homológica, a qual é uma obstrução primária à existência de mergulhos topológicos entre variedades generalizadas. Em [3], foi mostrado que a versão clássica do Teorema Borsuk-Ulam provada por Conner e Floyd em [12], para variedades diferenciáveis, pode ser estendida para $\mathbb{Z}_2$-variedades generalizadas. Nas seções 2.1, 2.2 relatamos os principais resultados relacionados com a topologia desses espaços e na seção 2.3, damos condições para que uma variedade generalizada possua a propriedade de posição geral chamada $DADP$.

No capítulo 3, nós provamos um dos principais resultados deste trabalho: uma versão homológica do teorema da Função Implícita. Nós consideramos X, Y, Z espaços topológicos e $f : X \times Y \to Z$ uma função contínua. Sob a condição homológica essencial de que o homomorfismo $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \to H_n(Z, Z - z_0)$ é não trivial, para algum $n \geq 1$, nós mostramos a existência de uma função dada implicitamente pela equação $f(x, g(x)) = z_0$, conforme os Teoremas 3.2.1, 3.2.4.

Ainda no Capítulo 3, na seção 3.3, nós demos interessantes aplicações da versão homológica do teorema da Função Implícita na teoria clássica dos monóides e grupos topológicos. O fato de que todo monóide topológico é homogêneo, permite que a verificação da condição homológica do Teorema 3.2.1 se reduza ao caso de saber se $H_n(X, X - e) \neq 0$, onde "e" é o elemento identidade de X. No Teorema 3.3.6 nós mostramos que o conjunto dos elementos inversíveis $\mathfrak{U}$ de um monóide topológico X é um grupo topológico aberto em X. Em [36, 35], os autores trabalham com estruturas de semigrupos com identidade em variedades e mostram que o conjunto das unidades $H(1)$ é um grupo topológico aberto na variedade. Vemos que o mesmo resultado segue do Teorema 3.3.6, desde que se M é uma n-variedade topológica ou até generalizada, então $H_n(M, M - e) \neq 0$.

Nos Teoremas 3.3.8, 3.3.11, 3.3.12 e 3.3.14 usamos os resultados da teoria clássica de grupos topológicos, para mostrar que o conjunto $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado. Na seção 3.3.1, damos uma breve descrição do quinto problema de Hilbert e suas conseqüências no desenvolvimento da teoria de grupos topológicos localmente compactos. Nós também consideramos o caso em que X é um espaço topológico munido de uma multiplicação contínua com identidade, e resultados similares são obtidos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, entramos em contato com o Prof. K. H. Hofmann, com a finalidade de esclarecer algumas dúvidas relacionadas com a teoria de semigrupos e grupos topológicos. O Professor Hofmann nos deu valiosas sugestões e fez vários comentários, inclusive em nosso pré-print [5], os quais contribuíram muito para o aperfeiçoamento do nosso trabalho.

No Capítulo 4, nós damos versões de teoremas de funções abertas e versões do teorema clássico de Darboux. O Teorema 4.3.3 foi provado em [42], no caso em que f é de classe C^1 e para obtermos o teorema no caso apenas diferenciável usamos o Teorema de Sard para funções diferenciáveis provado em [14, 33], e um teorema de inversão local provado em [4]. Um caso onde f é apenas contínua satisfazendo algumas propriedades, também é considerado no Teorema 4.3.5.

Finalizamos o nosso trabalho com algumas versões do Teorema de Darboux, dentre as quais destacamos a versão homológica (Teorema 4.4.5) e a versão diferenciável para $\mathbb{R}^n$ (Corolário 4.4.9). Essas versões são obtidas a partir uma versão generalizada do teorema de Černavskii [16], provada em [4] e [49].

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Terminologias e Notações

Em nosso trabalho, o interior, o fecho e a fronteira de um subconjunto A de um espaço topológico serão denotados por $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$ e ∂A, respectivamente. Os grupos de homologia, quando não especificado, terão sempre coeficientes em $\mathbb{Z}$, o símbolo $\check{H}_*$ denotará a homology de $\check{C}$ech no sentido de [48, Cap.6]. Por *dimensão*, nós entenderemos a dimensão topológica usual no sentido de [29].

1.2 Seqüências generalizadas

Sabemos que as seqüências são objetos adequados para detectar pontos limites, funções contínuas e conjuntos compactos em espaços métricos. Existe uma generalização da noção de seqüência, chamada seqüência generalizadas ("net") para espaços topológicos arbitrários, a qual definiremos a seguir (para detalhes ver [22] e [37]).

Recordemos que uma relação $\leq$ em um conjunto é uma relação de ordem parcial se as seguintes condições são válidas:

(1) $\alpha \leq \alpha$, para todo α.

(2) Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então $\alpha = \beta$.

(3) Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \leq \gamma$.

Definição 1.2.1 Um **conjunto direto** J é um conjunto com uma ordem parcial $\leq$ tal que para cada par de elementos α, $\beta \in J$ existe um elemento $\gamma \in J$, satisfazendo $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Definição 1.2.2 Um subconjunto K é dito ser **cofinal** em J, se para cada $\alpha \in J$, existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \leq \beta$.

Observação 1.2.3 Se J é um conjunto direto e K é um conjunto cofinal em J, então K também é um conjunto direto.

Definição 1.2.4 Seja X um espaço topológico. Uma seqüência generalizada em X é uma função f de um conjunto direto J em X. Nós denotaremos $f(\alpha)$ por x_α e a seqüência generalizada por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, ou simplesmente por (x_α).

Definição 1.2.5 Uma seqüência generalizada **converge** para um ponto $x \in X$ e escrevemos $x_\alpha \to x$ ou $\lim x_\alpha = x$ se para cada vizinhança aberta U de x existe $\alpha \in J$ tal que

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

A seguir daremos algumas propriedades e teoremas sobre seqüências generalizadas:

Propriedade 1.2.6 *Suponhamos que $(x_\alpha)_{\alpha \in J} \to x \in X$ e $(y_\alpha)_{\alpha \in J} \to y \in Y$. Então $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y) \in X \times Y$.*

Propriedade 1.2.7 *Se X é um espaço de Hausdorff então uma seqüência generalizada em x converge para no máximo um ponto.*

Teorema 1.2.8 *Seja A um subconjunto de X. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um seqüência generalizada de pontos de A convergindo para x.*

Teorema 1.2.9 *Seja $f : X \to Y$. Então f é contínua se, e somente se, para toda seqüência generalizada (x_α) em X, convergindo para um ponto x, então a seqüência generalizada $(f(x_\alpha))$ converge para $f(x)$.*

Definição 1.2.10 Seja $f : J \to X$ uma seqüência generalizada em X, com $f(\alpha) = x_\alpha$. Se K é um conjunto direto e $g : K \to J$ é uma função tal que

(i) $i \leq j \Rightarrow g(i) \leq g(j)$,

(ii) $g(K)$ é cofinal em J.

Então, a função $f \circ g : K \to X$ é chamada uma subseqüência generalizada de x_α.

Propriedade 1.2.11 Se uma seqüência generalizada (x_α) converge para x, então qualquer subseqüência de (x_α) também converge para x.

Definição 1.2.12 Seja (x_α) uma seqüência generalizada em x. Nós dizemos que x é um ponto de acumulação de (x_α) se para cada vizinhança U de x, o conjunto

$$\{\alpha; x_\alpha \in U\}$$

é cofinal em J.

Lema 1.2.13 *A seqüência generalizada (x_α) tem o ponto x como ponto de acumulação se, e somente se, alguma subseqüência generalizada de (x_α) converge para x.*

Teorema 1.2.14 *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda seqüência generalizada em X admite subseqüência generalizada convergente.*

1.3 Quase-Grupos topológicos e Espaços com multiplicação

Definição 1.3.1 Uma lei de composição em G

$$Q_1(x, y) = z \quad \text{com} \quad x, y, z \in G, \tag{1.3.1}$$

define um **quase-grupo** em G se, e somente se, dados dois quaisquer dos elementos x, y, z em G, o terceiro fica univocamente. A função Q_1 é chamada "função fundamental" do quase-grupo.

Dados $y \in G$ e $z \in G$, existe um único elemento $x \in G$ tal que (1.3.1) seja satisfeito. Podemos escrever

$$x = Q_2(y, z) \tag{1.3.2}$$

e analogamente

$$y = Q_3(x, z) \tag{1.3.3}$$

As funções Q_2 e Q_3 são chamadas soluções à direita e à esquerda, respectivamente. Fixando em $Q_1(x, y)$ uma das variáveis, obtemos um função biunívoca de G em G. Denotamos a função

$$y \to Q_1(x, y) \tag{1.3.4}$$

por L_x. A função L_x é chamada " multiplicação à esquerda'. Analogamente R_y dada por

$$x \to Q_1(x, y) \tag{1.3.5}$$

é chamada "multiplicação à direita". Estas funções são biunívocas, de acordo com a própria definição de quase-grupo, e suas inversas são dadas por

$$L_x^{-1}(z) = Q_3(x, y) \quad \text{e} \quad R_y^{-1}(z) = Q_2(y, z) \tag{1.3.6}$$

Fixando por sua vez z em $Q_2(y, z)$ obtemos,

$$E_z : G \to G \tag{1.3.7}$$

dada por $E_z(y) = Q_2(y, z)$ e fixando $z \in Q_3(x, z)$ obtemos a função inversa de E_z

$$E_z^{-1} = Q_3(x, z) \tag{1.3.8}$$

As funções $L_x, L_x^{-1}, R_y, R_y^{-1}, E_z, E_z^{-1}$ são chamadas operações fundamentais de G.

Particular interesse têm os quase-grupos com elemento identidade "e" único, tal que:

$$Q_1(x,e) = Q_1(e,x) = x \quad \forall x \in G \tag{1.3.9}$$

Definição 1.3.2 Um quase-grupo com elemento identidade é chamado "loop".

Observação 1.3.3 Não traduziremos o termo "loop", porém por motivos de simplicidade deixaremos de escrevê-lo entre aspas.

1.3.1 Topologia dos quase-grupos

Seja G um quase-grupo de função fundamental Q_1 munido com uma topologia τ. Dizemos que a estrutura de quase-grupo e a topologia são **compatíveis** se as funções Q_i são contínuas na topologia τ ($G \times G$ com a topologia produto).

Definição 1.3.4 Um quase-grupo munido de uma topologia compatível é chamado **quase-grupo topológico**. Em particular, se o quase-grupo tiver identidade temos um loop topológico.

1.3.2 Espaços com multiplicação e espaços de Hopf

Vamos considerar agora generalizações de loop topológico.

Definição 1.3.5 Seja X um espaço topológico. Uma lei de composição $Q : X \times X \to X$ é chamada uma **multiplicação com identidade** se satisfizer as seguintes condições

(a) Q é contínua;

(b) existe um elemento $e \in X$ tal que $Q(x,e) = Q(e,x) = x$.

O elemento "e" é chamado elemento identidade.

Definição 1.3.6 Seja X um espaço topológico. Uma lei de composição $Q : X \times X \to X$ define sobre X uma **estrutura de Hopf** se:

(a) Q é contínua;

(b) existe um elemento $e \in X$ tal que $Q(e,e) = e$ e as aplicações $x \mapsto Q(x,e)$ e $x \mapsto Q(e,x)$ são homotópicas a aplicação identidade $x \mapsto x$ por homotopia relativa a "e". X é chamado um **espaço de Hofp** ou **H-espaço**.

Observação 1.3.7 Temos que todo loop topológico é um espaço com multiplicação e por sua vez todas as multiplicações com identidade definem estruturas de Hopf. Para mais detalhes sobre quase-grupos topológicos e espaços com multiplicação ver [39, 40].

1.4 Compactificação de Stone-$\breve{C}$ech

Sejam X um espaço topológico e I o intervalo fechado $[0,1]$. Seja

$$\Lambda = \{\lambda : X \to I | \ \lambda \text{ é contínua.}\} \tag{1.4.1}$$

Identificamos o "cubo" $I^\Lambda = \Pi_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, onde $I_\lambda = I$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Deste modo, cada ponto de I^Λ é uma família $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, com $0 \leq x_\lambda \leq 1$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Pelo teorema de Tychonoff, I^Λ é um espaço de Hausdorff compacto. Existe uma aplicação natural

$$\varphi : X \to I^\Lambda, \tag{1.4.2}$$

dada por $\varphi(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, para cada $x \in X$. A aplicação φ é contínua, pois para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $\pi_\lambda \circ \varphi$, coincide com $f : X \to I$, onde $\pi_\lambda : I^\Lambda \to I$ é a projeção sobre o λ-ésimo fator. Consideremos a seguinte definição

Definição 1.4.1 Um espaço topológico X é **completamente regular** se dados $x \in X$ e um aberto U em X, com $x \in X$, existe sempre uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(X - U) = 0$.

Seja $\varphi : X \to I^\Lambda$, definida em (1.4.2). Para espaços completamente regulares, temos o seguinte

Teorema 1.4.2 *A aplicação contínua $\varphi : X \to \varphi(X)$ é um homeomorfismo se, e somente se, X é completamente regular.*

Dado um espaço topológico X, Hausdorff e completamente regular, seja $\overline{\varphi(X)}$ o fecho da imagem da aplicação $\varphi : X \to I^{\Lambda}$. Então $\overline{\varphi(X)}$ é um espaço de Hausdorff compacto e $\varphi : X \to \overline{\varphi(X)}$ é uma compactificação de X, chamada **compactificação de Stone-Čech do espaço** X . Para mais detalhes ver [38].

Capítulo 2

Propriedades de posição geral em variedades generalizadas

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos propriedades dos espaços topológicos conhecidos como variedades generalizadas. Nos capítulos subseqüentes grande parte dos resultados podem ser aplicados para tais espaços e isso justifica o nosso interesse em conhecer melhor as propriedades de tais variedades. Especificamente daremos condições para que uma variedade generalizada satisfaça uma propriedade de posição geral chamada *DADP* ("Disjoint arc-disk property").

2.2 Variedades generalizadas

Definição 2.2.1 Um espaço localmente compacto X é uma n-variedade generalizada se X satisfaz:

(i) X é um ENR, ou seja, para algum inteiro m, X mergulha em $\mathbb{R}^m$ como um retrato de algum subconjunto aberto;

(ii) X é uma $\mathbb{Z}$-variedade homológica, isto é, para todo ponto $x \in X$,

$$H_*(X, X - \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}).$$

Na definição 2.2.1, quando X for uma ENR $\mathbb{Z}_2$-variedade homológica, ou seja,

$$H_*(X, X - \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{Z}_2),$$

dizemos que X é uma $\mathbb{Z}_2$-variedade generalizada. Tais variedades têm sido recentemente estudadas; por exemplo, é um fato conhecido que existem variedades generalizadas que não são homotopicamente equivalentes a variedades topológicas (ver [10, 11]). Em [6, 7], foi mostrado que a dualidade de Poincaré é valida para variedades generalizadas localmente orientáveis. Além disso, em [8], mostrou-se que toda variedade generalizada é localmente orientável. Sendo assim, a dualidade de Poincaré é válida para qualquer variedade generalizada (para detalhes ver [9]).

Apresentaremos agora, os resultados mais importantes concernentes à topologia das variedades generalizadas. Esses resultados são obtidos assumindo basicamente duas condições que definiremos a seguir

Definição 2.2.2 (DDP) Um espaço métrico X tem a propriedade de disjunção de discos ("Disjoint Disk Property - DDP), se dado $\epsilon > 0$ e aplicações contínuas $f, g : D^2 \to X$, existem aplicações contínuas $f', g' : D^2 \to X$ tais que $d(f, f') < \epsilon$, $d(g, g') < \epsilon$ e $f'(D^2) \cap g'(D^2) = \emptyset$.

Definição 2.2.3 (Resolução) Uma resolução para uma n-variedade generalizada X é uma aplicação $\phi : M \to X$ com a propriedade de que $\phi_{|\phi^{-1}(U)} : \phi^{-1}(U) \to U$ é uma equivalência de homotopia para todo aberto $U \subset X$, onde M é uma n-variedade topológica. Se X admite uma resolução, dizemos que X é resolúvel.

Agora, estamos em condições de enunciar um dos mais importantes teoremas para variedades generalizadas. Em [23], R. Edwards provou o seguinte

Teorema 2.2.4 (Teorema da aproximação de Edwards) *Seja X uma n-variedade generalizada satisfazendo a DDP. Se $\phi : M \to X$ for uma resolução de X, então ϕ é limite de uma seqüência de homeomorfismos $h_i : M \to X$.*

Como uma conseqüência imediata temos o seguinte

Corolário 2.2.5 *Seja X uma n-variedade generalizada resolúvel, $n \geq 5$. X é uma variedade topológica se, e somente se, X possui a DDP.*

Dessa forma, o Corolário 2.2.5 fornece um critério para caracterizar variedades topológicas a partir das variedades generalizadas. Em [45, 46], F. Quinn associa a qualquer n-variedade generalizada conexa, $n \geq 4$, um índice local $i(X) \in 1 + 8\mathbb{Z}$ e mostra que $i(X) = 1$ *se, e somente se, X é resolúvel.* Combinando com o Teorema de Aproximação de Edwards temos o seguinte *teorema de caracterização para variedades topológicas*:

Teorema 2.2.6 (Edwards-Quinn) *Se $n \geq 5$, uma n-variedade generalizada X com a DDP é uma variedade topológica se, e somente se, $i(X) = 1$.*

Em [10, 11], são construídas n-variedades generalizadas, tendo índice local arbitrário em todas as dimensões $n > 5$, ou seja, existem variedades generalizadas que não são variedades topológicas (essas variedades são conhecidas como *variedades generalizadas exóticas*), tornando relevante a questão de caracterizar variedades topológicas no universo das variedades generalizadas. Através do Teorema 2.2.6 e do Corolário 2.2.5, para mostrarmos que uma variedade generalizada X é uma variedade topológica devemos exigir que X tenha a *DDP* e que X seja resolúvel.

No nosso trabalho, estaremos considerando o problema de detectar propriedades de posição geral em variedades generalizadas similares à *DDP*, as quais especificaremos na próxima seção.

2.3 Propriedades de posição geral em variedades generalizadas

Em [20], R. Daverman mostra que se uma variedade generalizada X satisfizer condições análogas à DDP então os produtos cartesianos $X \times \mathbb{R}$ ou $X \times \mathbb{R}^2$ satisfazem a DDP. Consideremos as seguintes definições de *propriedade de posição geral* que são análogas à DDP em dimensões 3 e 4.

Definição 2.3.1 (DAP) Um espaço X tem a propriedade de disjunção de caminhos ("disjoint arcs property"- DAP), se quaisquer dois caminhos $f, g : I \to X$ podem ser ϵ-aproximados por caminhos com imagens disjuntas.

Definição 2.3.2 ($DADP$) Um espaço X tem a propriedade de disjunção de caminho - disco ("disjoint arc-disc property" - $DADP$), se dadas quaisquer duas aplicações $f : I \to X$ e $g : D^2 \to X$ existem ε-aproximações de f e g, as quais possuem imagens disjuntas.

Podemos mostrar, usando dualidade, que toda n-variedade generalizada, $n \geq 3$, possui a DAP. Em [20], foi provado que *se um espaço X tem a DAP então $X \times \mathbb{R}$ tem a $DADP$* e que *se um espaço X tem a $DADP$ então $X \times \mathbb{R}$ tem a DDP*. Combinando esses resultados com o Teorema 2.2.6, temos os seguintes corolários:

Corolário 2.3.3 *Seja X uma n-variedade generalizada resolúvel, $n \geq 3$. Então $X \times \mathbb{R}^2$ é uma n-variedade topológica.*

Corolário 2.3.4 *Seja X uma n-variedade generalizada resolúvel com a $DADP$, $n \geq 4$. Então $X \times \mathbb{R}$ é uma variedade topológica.*

Recentemente, em [26], D. Halverson define uma propriedade de disjunção de homotopia (DHP) a qual é mais "refinada" do que a $DADP$ no sentido de garantir quando $X \times \mathbb{R}$ possui a DDP.

Definição 2.3.5 (DHP) Um espaço X tem a propriedade de disjunção de homotopias (" disjoint homotopies property" - DHP) se quaisquer duas homotopias de caminhos $f, g : D \times I \to X$ podem ser ϵ-aproximadas por homotopias de caminhos $f', g' : D \times I \to X$ tal que $f'_t(D) \cap g'_t(D) = \emptyset$ para todo $t \in I$, onde $D = I = [0, 1]$.

D. Halverson provou o seguinte

Teorema 2.3.6 ([26], Theorema 3.4) *Se X é uma n-variedade generalizada com a DHP então $X \times \mathbb{R}$ possui a DDP.*

Além disso, ela mostrou que *toda variedade generalizada com a $DADP$ possui a DHP* ([26, Corolário 4.5]), porém a recíproca não é verdadeira. D. Halverson, deu a seguinte condição para que uma variedade X possua a DHP,

Definição 2.3.7 Um espaço X tem a $P2MP$ ("plentiful 2-manifolds property") se cada caminho $\alpha : I \to X$ pode ser aproximado por um caminho $\alpha' : I \to N \subset X$, onde N é uma 2-variedade mergulhada em X.

E provou o seguinte

Teorema 2.3.8 ([26, Theorem 5.5]) *Se X é uma n-variedade generalizada, $n \geq 4$, com a $P2MP$, então X tem a DHP.*

No entanto, a recíproca do Teorema 2.3.8 não é verdadeira. Em [27], D. Halverson provou que os espaços "2-ghastly" construídos por Daverman e Walsh em [21], possuem a DHP, mas tais espaços não possuem nenhuma 2-célula mergulhada e, portanto, não podem ter a propriedade $P2MP$.

2.4 Detectando a *DADP*

Nesta seção, estudaremos a questão de dar condições para que uma n-variedade generalizada, satisfaça a $DADP$, onde $n \leq 4$. Consideremos a seguinte

Definição 2.4.1 (Variedade de Cantor) Seja X um espaço topológico localmente conexo e localmente compacto. Dizemos que X é uma variedade de Cantor, se dados $F \subset X$ fechado tal que $\dim(F) \leq 1$ e um aberto $U \subset X$ conexo, então $U - F$ é conexo.

Observação 2.4.2 Toda variedade generalizada é uma variedade de Cantor.

Seja X um espaço localmente compacto de Haudorff. Denotaremos por $X^* = X \cup \{\infty\}$ a compactificação de Alexandroff. Se A é um subconjunto fechado de X, nós podemos considerar A^* como um subespaço de X^*.

Lema 2.4.3 *Suponhamos que X seja um espaço conexo por caminhos e localmente compacto tal que para algum inteiro n e para qualquer $A \subset X$ fechado,*

$$\check{H}^n(X^*, A^*) \cong \check{H}_0(X - A) \tag{2.4.1}$$

Se $\dim(A) \leq n-2$, *então $X - A$ é conexo (Čech) ou conexo por caminhos.*

Demonstração. Consideremos a sequência exata de cohomologia do par (X^*, A^*)

$$\longrightarrow H^{n-1}(A^*) \longrightarrow H^n(X^*, A^*) \longrightarrow H^n(X^*) \longrightarrow H^n(A^*) \longrightarrow \tag{2.4.2}$$

Desde que $\dim(A) \leq n-2$, temos que $H^{n-1}(A^*) \cong H^n(A^*) \cong 0$ e da seqüência exata 2.4.2 temos que $H^n(X^*, A^*) \cong H^n(X^*)$. Deste modo, segue de (2.4.1) que

$$H_0(X - A) \cong H^n(X^*, A^*) \cong H^n(X^*) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z} \tag{2.4.3}$$

Portanto, $X - A$ é localmente conexo por caminhos. $\square$

Observação 2.4.4 Se X é uma n-variedade generalizada então X satisfaz a dualidade (2.4.1).

Teorema 2.4.5 *Seja X uma n- variedade generalizada e $F \subset X$ um subconjunto fechado tal que* $\dim(F) \leq n-2$. *Então, dada uma função contínua $g : I \to X$ existe $g' : I \to X$ uma ε-aproximação de g tal que $g'(I) \cap F = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $g : I \to X$ e escolhemos $\varepsilon > 0$. Seja $\mathscr{U}$ uma cobertura de $g(I)$ tal que os elementos U de $\mathscr{U}$ sejam conexos com diâmetro menor que ε. Segue do Lema 2.4.3 que $U - F$ é conexo por caminhos para todo U em $\mathscr{U}$.Seja δ o número de Lebesgue para a cobertura $\mathscr{U}$ de $g(I)$. Escolhemos uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ do intervalo I tal que $\text{diam}(g(ti-1, t_i)) < \delta$ para $i = 1, \ldots, m$. Seja U_i um elemento em $\mathscr{U}$ contendo $g([ti-1, t_i])$. Escolhemos $x_0 \in U_1 - F$, $x_m \in U_m - F$ e $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, m-1$. Como cada $U_i - F$ é conexo por caminhos, podemos definir $g' : I \to X$ tal que $g'(t_i) = x_i$ para $i = 0, \ldots, m$ e $g'([ti-1, t_i]) \subset U_i - F$ para $i = 1, \ldots, m$. Deste modo, g' é uma aproximação para g satisfazendo $g'(I) \cap F = \emptyset$. □

Agora, daremos condições para que uma n-variedade generalizada X possua a *DADP*. Uma primeira condição é a seguinte

Condição 1. Toda função contínua $f : D^2 \to X$ pode ser ε-aproximada por uma função contínua $f' : D^2 \to X$ tal que $\dim(f'(D^2)) \leq n-2$.

Teorema 2.4.6 *Seja X uma $n-$variedade generalizada, $n \geq 4$. Se X satisfaz a* **Condição 1**, *então X tem a DADP.*

Demonstração. Sejam $f : D^2 \to X$ e $g : I \to X$ funções contínuas sobre X. Como X satisfaz a **Condição 1**, existe uma ε-aproximação f' de f tal que $dim(f'(D^2)) \leq n-2$. Deste modo, segue do Teorema 2.4.5 que existe uma ε-aproximação g' de g tal que $g'(I) \cap f'(D^2) = \emptyset$. Portanto X tem a *DADP*. □

A fim de impormos uma segunda condição para que uma $n-$variedade generalizada, $n \geq 4$, possua a DADP, precisaremos considerar alguns resultados preliminares, os quais descreveremos a seguir.

Definição 2.4.7 Seja X um espaço métrico e A um subconjunto de X. Nós dizemos que A é **localmente k-conexo**, e escrevemos A é $k-LC$, se para cada $a \in A$ e para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda aplicação da i-esfera S^i sobre uma vizinhança $V_\delta(a)$ de a, pode ser estendida para uma aplicação do $(i+1)$-disco D^{i+1} sobre uma vizinhança $V_\epsilon(a)$ de a, para $i = 1, \ldots, k$. Analogamente, nós dizemos que A é **localmente k-co-conexo**, e escrevemos A é $k - LCC$, ou equivalentemente, que $X - A$ é $k - LC$ em A, se para cada $a \in A$ e para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda aplicação da $k-$esfera S^k sobre $V_\delta(a) \cap (X - A)$, pode ser estendida para uma aplicação do $k+1$-disco D^{i+1} sobre $V_\epsilon(a) \cap X - A$.

Em [13], J. Cannon mostra que se X é uma n-variedade generalizada satisfazendo a DDP, então toda função contínua $f : D^2 \to X$ pode ser ϵ-aproximada por um mergulho $f' : D^2 \to X$, com $f'(D^2)$ $0 - LCC$. Como toda n-variedade generalizada, $n \geq 3$, tem a DAP, adaptamos a técnica de J. Cannon para obtermos o mesmo resultado para caminhos $f : I \to X$, como mostra o seguinte

Teorema 2.4.8 *Seja X uma n-variedade generalizada, $n \geq 3$. Então todo caminho $f : I \to X$ pode ser ε-aproximado por um caminho $f' : I \to X$ tal que f' é um mergulho e $f'(I)$ é 0-LCC.*

Demonstração. Suponhamos que X seja equipado com uma métrica completa d. Sejam $(I_1, E_1), (I_2, E_2), \ldots$ pares de intervalos disjuntos em I tais que, se p e q são pontos distintos em I, então, para algum i, $p \in I_1$ e $q \in I_2$. Dado ε_0, tomamos $f_0 = f$. Suponhamos indutivamente que $f_0, \ldots, f_{i-1} : I \to X$ satisfaça a condição

$$f_{i-1}(I_j) \cap f_{i-1}(E_j) = 0, \quad \text{para } j < i. \tag{2.4.4}$$

Escolhemos

$$0 < \epsilon_i < \frac{1}{2}\min\{\epsilon_{i-1}, d(f_{i-1}(I_j), f_{i-1}(E_j) \mid j < i\} \tag{2.4.5}$$

Como X possui a DAP, podemos aproximar $f_{i-1}|(I_i)$ e $f_{i-1}|(E_i)$ para que as imagens de I_i e E_i sejam disjuntas. O aproximação se estende para uma aproximação de f_{i-1} em todo intervalo I, pois X é localmente contrátil. Seja f_i a aproximação final. Nós podemos assumir que $d(f_{i-1}, f_i) < \epsilon_i$. A seqüência $f_0, f_1, \ldots$ é uma seqüência de Cauchy, deste modo converge para uma aplicação $f' : I \to X$. Podemos ver que $f'(I_i) \cap f'(E_i) = \emptyset$ para todo i. Então f' é injetora e portanto um mergulho topológico. Mostremos agora que a aproximação f' pode ser escolhida como sendo 0-LCC. De fato, seja uma seqüência de aplicações $g_1, g_2, \ldots : I \to X$, a qual é densa no espaço das funções contínuas de I sobre X. Suponhamos adicionalmente que $f_i(I) \cap g_i'(I) = \emptyset$, onde g_i' é uma ϵ_i-aproximação para g_i e que $\epsilon_i < \dfrac{1}{2} d(f_{i-1}(I), g_{i-1}'(I))$. Então a aplicação limite $f' : I \to X$ omitirá $g_1'(I), g_2'(I), \ldots$, ou seja, $f'(I) \cap g'_i(I) = \emptyset$, $\forall i$. Deste modo segue que f' é $0 - LCC$. □

O mergulho topológico construído no Teorema 2.4.8, pode ser escolhido de tal forma que a sua imagem omita um subconjunto fechado F de dimensão $\leq n-1$ em X, a menos de um conjunto 0-dimensional, como mostra o seguinte teorema

Teorema 2.4.9 *Seja X uma n-variedade generalizada, $n \geq 3$, e F um subconjunto fechado de X de dimensão $\geq n-1$. Então toda aplicação $f : I \to X$ pode ser ϵ-aproximada por um* 0-LCC *mergulho interceptando F em um conjunto* 0*-dimensional.*

Demonstração. Escolhemos triangulações $T_0, T_1, T_2, \ldots$ para I de tal forma que T_i subdivide T_{i-1} para cada i e mesh$T_i < \frac{1}{i}$. Seja $f' = \lim f_i$ construída no Teorema 2.4.8. Usando o fato de que X é localmente contraível, podemos considerar a menos de homotopia, que cada aplicação f_{i-1} é tal que $f_{i-1}(T_{i-1}^{(0)}) \cap F = \emptyset$, onde $T_{i-1}^{(0)}$ é o 0-esqueleto da triangulação T_{i-1}. Escolhemos f_i satisfazendo a condição adicional

$$d(f_i, f_{i-1}) < \varepsilon_i < (1/2) d(f_{i-1}(T_{i-1}^{(0)}), F) \tag{2.4.6}$$

Então, ${f'}^{-1}(F)$ é um conjunto 0-dimensional. De fato, dado $\delta > 0$ seja $i \in \mathbb{N}$ tal que $(1/i) < \delta$, assim existe

$$T_i = \cup \sigma_i \text{ tal que } {f'}^{-1}(F) \subset \cup \mathrm{Int}\sigma_i. \tag{2.4.7}$$

Como f' é injetora, temos que $\dim(\mathrm{Im}(f') \cap F) = 0$. □

A segunda condição que vamos exigir para que uma n-variedade generalizada tenha a $DADP$ é a seguinte

Condição 2. Toda função $f : D^2 \to X$ pode ser ϵ-aproximada por uma função $f' : D^2 \to F_{n-1} \subset X$, onde F_{n-1} é um subespaço fechado de X, com $\dim(F_{n-1}) \leq n-1$, e além disso, dado G um subconjunto 0-dimensional em F_{n-1}, f' pode ser escolhida de tal forma que $G \cap f'(D^2) = \emptyset$.

Teorema 2.4.10 *Seja X uma n-variedade generalizada, $n \geq 4$. Se X satisfaz a* **Condição 2**, *então X possui a $DADP$.*

Demonstração. Sejam $f : D^2 \to X$ e $g : I \to X$ funções contínuas sobre X. Segue da **Condição 2**, que existe uma ϵ-aproximação $f' : D^2 \to F_{n-1} \subset X$, onde F_{n-1} é um subespaço fechado de X, com $\dim(F_{n-1}) \leq n-1$. Pelo Teorema 2.4.9, $g : I \to X$ pode ser ϵ-aproximada por um mergulho $g' : I \to X$, tal que $G = g'(I) \cap F_{n-1} \subset F_{n-1}$ é um conjunto 0-dimensional. Além disso, f' pode ser escolhida de tal forma que $G \cap f'(D^2) = \emptyset$. Assim, como $G = g'(I) \cap F_{n-1}$, temos

$$\emptyset = (g'(I) \cap F_{n-1}) \cap f'(D^2) = g'(I) \cap f'(D^2). \tag{2.4.8}$$

Portanto X possui a $DADP$. □

Capítulo 3

Uma versão homológica do Teorema da Função Implícita

3.1 Introdução

Seja f uma função contínua de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. No teorema clássico da Função Implícita as hipóteses essenciais são a C^k-diferenciabilidade de f, para $1 \leq k \leq \infty$, e a hipótese de que $\partial_1 f_{(x_0,y_0)}$ seja um isomorfismo, onde $(x_0, y_0) \in U$. Em [31], o autor requer apenas a continuidade da função f, e a condição de f ser localmente injetora, quando restrita à primeira coordenada para obter uma generalização do teorema clássico da função implícita.

Nós consideramos X, Y, Z espaços topológicos e $f : X \times Y \to Z$ uma função contínua. Sob certas condições topológicas e homológicas, as quais serão especificadas na seção 3.2, nós provamos uma versão homológica do Teorema da Função Implícita para espaços topológicos gerais, com aplicações na teoria geral de grupos, semi-grupos e monóides topológicos. Na seção 3.3, nós mostramos que o conjunto dos elementos inversíveis de um monóide topológico X é um grupo topológico o qual é aberto em X e usamos os resultados da teoria clássica de grupos topológicos para mostrar que este conjunto é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado. Nós também consideramos o caso em que X é um espaço topológico munido de uma multiplicação contínua com identidade, e resultados similares são obtidos.

Uma classe especial de espaços topológicos que satisfaz as condições do nosso teorema principal é classe das variedades generalizadas definidas no Capítulo 2.

3.2 Versão homológica do Teorema da Função Implícita

Nesta seção, nós provaremos um dos teoremas principais do nosso trabalho. Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Dada uma função contínua $f : X \times Y \to Z$, nós definimos as funções contínuas $\varphi_x : Y \to Z$ e $\psi_y : X \to Z$ por

$$\begin{aligned} \varphi_x(y) &= f(x, y), \text{ para cada } x \in X; \\ \psi_y(x) &= f(x, y), \text{ para cada } y \in Y. \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1 (Teorema da Função Implícita) *Sejam X, Y, Z espaços topológicos de Hausdorff, onde X é localmente conexo por caminhos e Y é localmente compacto. Seja $f : X \times Y \to Z$ uma função contínua e $z_0 = f(x_0, y_0) \in Z$, com $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Suponhamos que $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{z_0\}) = \{y_0\}$ e que $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \to H_n(Z, Z - z_0)$ seja um homomorfismo não trivial, para algum natural $n > 0$. Então existe uma vizinhança aberta V de x_0 e uma função $g : V \to Y$ tal que $f(x, g(x)) = z_0$, para cada $x \in V$. Mais ainda, g é uma função contínua em x_0.*

Demonstração. Desde que Y é localmente compacto, podemos tomar $W \subset Y$ uma vizinhança compacta de $y_0 \in Y$. Dividiremos a demonstração do teorema em quatro passos.

Passo 1. Nós primeiramente mostraremos que *para qualquer subconjunto compacto $K \subset \text{Int}(W)$ contendo y_0 em seu interior, existe uma vizinhança aberta V de x_0 tal que*

$$(\varphi_{x|_W})^{-1}(\{z_0\}) \in K, \qquad \forall x \in V. \tag{3.2.1}$$

De fato, suponhamos que para cada vizinhança aberta V de x_0 existe (x_V, y_V) em $X \times (W - K)$ tal que $f(x_V, y_V) = z_0$. Consideremos a seqüência generalizada, $((x_V, y_V))_{V \in \mathcal{V}}$, onde $\mathcal{V}$ é a coleção de todas as vizinhanças abertas de x_0, ordenadas parcialmente pelas inclusões inversas. Deste modo, $\lim x_V = x_0$ e como (y_V) é uma seqüência generalizada contida no subconjunto compacto $W - \text{Int}(K)$, seja $y_1 \in W - \text{Int}(K)$ o ponto limite de alguma subseqüência generalizada convergente de (y_V) garantida pelo Teorema 1.2.14. Então, pela Propriedade 1.2.6, (x_0, y_1) é ponto limite de alguma subseqüência generalizada de (x_V, y_V) e como f é contínua, segue do Teorema1.2.8 que $f(x_0, y_1) = \varphi_{x_0}(y_1) = z_0$, o que implica que $y_1 = y_0$, pois por hipótese $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{z_0\}) = \{y_0\}$. Mas isto contradiz o fato de que $y_1 \in W - \text{Int}(K)$. Deste modo, existe uma vizinhança aberta V de x_0 satisfazendo (3.2.1).

Passo 2. Temos que $Y - W$ é um subconjunto aberto de Y, pois em particular W é fechado em Y e $\overline{Y - W} \subset \text{int}(Y - y_0) = Y - y_0$. Assim, desde que

$$(Y - [Y - W], [Y - y_0] - [Y - W]) = (W, W - y_0), \tag{3.2.2}$$

segue da propriedade de excisão que

$$H_n(Y, Y - y_0) \cong H_n(W, W - y_0), \tag{3.2.3}$$

Desde que por hipótese, o homomorfismo $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \to H_n(Z, Z - z_0)$ é não trivial, temos que $(\varphi_{x_0})_* : H_n(W, W - y_0) \to H_n(Z, Z - z_0)$ não é o homomorfismo nulo. Mais ainda,nós podemos escolher K "suficientemente pequeno" tal que a composição

$$H_n(W, W - K) \xrightarrow{i_*} H_n(W, W - y_0) \xrightarrow{(\varphi_{x_0})_*} H_n(Z, Z - z_0) \tag{3.2.4}$$

seja não trivial. De fato, seja $[a] \in H_n(W, W - y_0)$ tal que $(\varphi_{x_0})_*([a]) \neq 0$. Desde que a é um n-ciclo relativo em W (mod $W - y_0$), nós temos que suporte[1] $|\partial a|$ de ∂a é um subconjunto compacto contido em $(W - y_0)$. Podemos escolher um subconjunto compacto K contendo y_0 em seu interior tal que K não intercepta o conjunto $|\partial a|$ da seguinte forma: para cada $x \in |\partial a|$, como Y é um espaço de Hausdorff, existem vizinhanças abertas V_x e U_x de x e y_0 respectivamente, tais que $V_x \cap U_x = \emptyset$. A coleção $\mathscr{V} = \{V_x\}_{x \in |\partial a|}$ é uma cobertura aberta do conjunto compacto $|\partial a|$ e deste modo admite uma subcobertura finita $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$. Assim $U = \cap_{i=1}^{k} U_{x_i}$ é uma vizinhança aberta de y_0 que não intercepta $|\partial a|$ e como Y é localmente compacto, existe uma vizinhança aberta U_0 de y_0, tal que $U_0 \subset \overline{U_0} \subset U$ com $\overline{U_0}$ compacto. Portanto, $K = \overline{U_0}$ é um subconjunto compacto contendo y_0 em seu interior que não intercepta o conjunto $|\partial a|$. Então, o conjunto $|\partial a|$ está contido em $W - K$ e $\bar{a} = a$ é um n-ciclo relativo em W (mod $W - K$), com $i_*([\bar{a}]) = [a]$. Deste modo, a composição em (3.2.4) é não trivial, pois $(\varphi_{x_0})_*(i_*([\bar{a}])) = (\varphi_{x_0})_*([a]) \neq 0$. Denotaremos a composição $(\varphi_{x_0})_* \circ i_*$ por $(\varphi_{x_0})_*$.

Passo 3. Seja agora, K o compacto construído no Passo 2 e V a vizinhança aberta de x_0 associada a K dada pelo Passo 1. Para cada $x \in V$, desde que V satisfaz (3.2.1), está bem definida a aplicação de pares $\varphi_x : (W, W - K) \to (Z, Z - z_0)$. Como X é localmente conexo, podemos assumir V conexa por caminhos e deste modo, para cada x em V, existe um caminho α em V unindo x_0 a x. Definimos a homotopia de pares $H : (W \times I, (W - K) \times I) \to (Z, Z - z_0)$ dada por

$$H(t, y) = f(\alpha(t), y) = \varphi_{\alpha(t)}(y), \qquad \forall (t, y) \in I \times Y. \tag{3.2.5}$$

Então, H é uma homotopia entre φ_{x_0} e φ_x e segue do axioma da homotopia que $(\varphi_x)_* = (\varphi_{x_0})_* \neq 0$. Deste modo, para cada x em V o homomorfismo

$$(\varphi_x)_* : H_n(W, W - K) \to H_n(Z, Z - z_0), \tag{3.2.6}$$

[1]Se σ um n-simplex singular, definimos seu suporte $|\sigma|$ como sendo $\sigma(\Delta_n)$. Para cada n-cadeia $c = \sum v_i \sigma_i$, definimos $|c| = \cup_i |\sigma_i|$ (para detalhes ver [25])

é não trivial, o que implica que deve existir $y = g(x)$ em K tal que $\varphi_x(g(x)) = f(x, g(x)) = z_0$. De fato, se não existisse tal $y = g(x)$, $(\varphi_x)_*$ seria o homomorfismo trivial, pois $(\varphi_x)_*$ se fatoraria da seguinte forma

$$H_n(W, W - K) \longrightarrow H_n(W, W) \equiv 0 \longrightarrow H_n(Z, Z - z_0)$$

Passo 4. Mostremos agora que $g : V \to K \subset Y$ é contínua em x_0. Seja A uma vizinhança de y_0 tal que $A \subset K$. Suponhamos que f não seja contínua em x_0, ou seja, que para cada vizinhança aberta U de x_0 existe x_U em U tal que $g(x_U)$ pertence ao conjunto compacto $K - A$. Seja y_1 em $K - A$ o ponto limite de alguma subseqüência generalizada de $(g(x_U))$. Então, (x_0, y_1) é ponto limite de alguma subseqüência de $(x_U, g(x_U))$. Como f é contínua e g é dada implicitamente pela equação $f(x_U, g(x_U)) = z_0$ nós temos que $f(x_0, y_1) = z_0$ e assim, $y_1 = y_0$ o que contradiz o fato de que $y_1 \in K - A$. □

Se no Teorema 3.2.1, substiuírmos a hipótese de que X é localmente conexo por caminhos pela hipótese de que X é localmente conexo e localmente compacto, usando a homologia de Čech, é possível mostrar que o Teorema 3.2.1 continua válido. Para isto, consideremos os seguintes resultados

Lema 3.2.2 *Seja C um espaço de Hausdorff compacto e conexo e seja X um espaço topológico arbitrário. Dados $c_0, c_1 \in C$ e A um subespaço de X, definimos as funções contínuas $\theta_0, \theta_1 : (X, A) \to (C \times X, C \times A)$, por $\theta_0(x) = (c_0, x)$ e $\theta_1(x) = (c_1, x)$. Então, os homomorfismos induzidos*

$$(\theta_0)_*, (\theta_1)_* : \check{H}_*(X, A) \to \check{H}_*(C \times X, C \times A) \tag{3.2.7}$$

coincidem.

Demonstração. Pela compactificação de Stone-Čech (seção 1.4), podemos supor C um subespaço de I^Λ. Recordemos que I^Λ é um espaço de Hasdorff, compacto conexo e localmente conexo por caminhos. Consideremos

$$\Gamma = \{V \subset I^{\Lambda} |\ V \text{ é aberto, conexo por caminhos e } C \subset V\}. \tag{3.2.8}$$

Podemos mostrar que para qualquer aberto U contendo C, existe $V \in \Gamma$ tal que $V \subset U$; portanto

$$\bigcap_{V \in \Gamma} V = C \tag{3.2.9}$$

Sabemos que

$$\check{H}_*(C \times X, C \times A) = \varprojlim \check{H}_*(V \times X, V \times A). \tag{3.2.10}$$

As aplicações θ_0 e θ_1 consideradas como aplicações de X em $V \times X$ são homotópicas. De fato, como V é uma vizinhança conexa por caminhos, seja α um caminho em V unindo c_0 a c_1. Deste modo a aplicação $F : (X \times I, A \times I) \to (C \times X, C \times A)$ dada por $F(x,t) = (\alpha(t), x)$ é uma homotopia de pares entre θ_0 e θ_1. Assim, segue do axioma da homotopia para a homologia de Čech que

$$\theta_{0*} \equiv \theta_{1*} : \check{H}_*(X, A) \to \check{H}_*(V \times X, V \times A). \tag{3.2.11}$$

Como $\check{H}_*(C \times X, C \times A) = \varprojlim \check{H}_*(V \times X, V \times A)$, segue da propriedade de continuidade da homologia de Čech que tomando o limite inverso em (3.2.11), temos a igualdade

$$\theta_{0*} \equiv \theta_{1*} : \check{H}_*(X, A) \to \check{H}_*(C \times X, C \times A). \tag{3.2.12}$$

Teorema 3.2.3 *Sejam C, X e Y espaços de Hausdorff, com C compacto e uma função contínua $f : C \times X \to Y$. Dados c_0 e c_1 em C consideremos as funções contínuas $\varphi_0, \varphi_1 : (X, A) \to (Y, B)$, onde $\varphi_{c_0}(x) = f(c_0, x)$ e $\varphi_{c_1}(x) = f(c_1, x)$ para cada $x \in X$ e A, B são subespaços de X e Y, respectivamente. Então,*

$$\varphi_{c_0*} \equiv \varphi_{c_1*} : \check{H}_*(X, A) \to \check{H}_*(Y, B). \tag{3.2.13}$$

Demonstração. Temos que $\varphi_{c_0} = f \circ \theta_0$ e $\varphi_{c_1} = f \circ \theta_1$. Pelo Lema 3.2.2, $\theta_{0*} \equiv \theta_{1*}$, consequentemente, $\varphi_{c_0*} \equiv \varphi_{c_1*}$. □

Consideremos agora, a versão do Teorema 3.2.1 para a homologia de Čech.

Teorema 3.2.4 *Sejam X, Y, Z espaços topológicos de Hausdorff, onde X é localmente conexo e X, Y são localmente compactos. Seja $f : X \times Y \to Z$ uma função contínua e $z_0 = f(x_0, y_0) \in Z$, com $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Suponhamos que $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{z_0\}) = \{y_0\}$ e que $(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(Y, Y - y_0) \to \check{H}_n(Z, Z - z_0)$ seja um homomorfismo não trivial, para algum natural $n > 0$. Então existe uma vizinhança aberta V_0 de x_0 e uma função $g : V_0 \to Y$ tal que $f(x, g(x)) = z_0$, para cada $x \in V_0$. Mais ainda, g é contínua em x_0.*

Demonstração. A prova consiste em repetir os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.2.1, adaptando-os para a homologia de Čech, com a hipótese de que X é localmente conexo e localmente compacto. O Passo 1 permanece idêntico, pois só depende das propriedades topológicas do espaço Y. O Passo 2 continua válido, pois a homologia de Čech satisfaz o axioma da excisão. Para o Passo 3, devemos considerar o subconjunto compacto dado pelo Passo 2, ou seja, $K \subset \operatorname{int}(W)$ é um subconjunto compacto contendo y_0 em seu interior tal que o homomorfismo

$$\varphi_{x_0*} : H_n(W, W - K) \to H_n(Z, Z - z_0) \tag{3.2.14}$$

é não trivial. Seja V a vizinhança aberta de x_0 associada a K dada pelo Passo 1. Como X é localmente conexo e localmente compacto, temos que existe uma vizinhança aberta V_0 de x_0 tal que $V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$, com V_0 conexa e $\overline{V_0}$ compacto. Além disso, a aplicação de pares $\varphi_{x_1} : (W, W - K) \to (Z, Z - z_0)$ está bem definida, para cada x_1 em $C = \overline{V_0} \subset V$, pois V satisfaz (3.2.1). Segue do Teorema 3.2.4, que para cada $x_1 \in C$,

$$\varphi_{x_0*} \equiv \varphi_{x_1*} : \check{H}_*(X, A) \to \check{H}_*(Y, B). \tag{3.2.15}$$

Por outro lado, de (3.2.14) temos que $\varphi_{x_1*} \equiv \varphi_{x_0*} \neq 0$, e usando argumentos análogos aos do Passo 3 da prova do Teorema 3.2.1, concluímos que para cada $x \in V_0$ existe

$y = g(x)$ em K tal que $\varphi_x(g(x)) = f(x, g(x)) = z_0$.

Finalizamos a prova do teorema observando que o Passo 4 permanece inalterado, desde que depende apenas das propriedades topológicas dos espaços em questão. $\square$

Observação 3.2.5 Consideremos no Teorema 3.2.1, Y e Z variedades generalizadas n-dimensionais. *Se φ_{x_0} é localmente injetora, então o homomorfismo*

$$(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \to H_n(Z, Z - z_0) \tag{3.2.16}$$

é não trivial. De fato, seja U uma vizinhança aberta de y_0 tal que $\varphi_{x_0|_U}$ é injetora. Segue do Teorema Da Invariância do Domínio para variedades generalizadas [9, Corolário 16.19] que $\varphi_{x_0}(U) = U'$ é um subconjunto aberto em Z. Deste modo, $\varphi_{x_0|_U} : U \to U'$ é um homeomorfismo e $(\varphi_{x_0})_* : H_n(U, U - y_0) \to H_n(U', U' - z_0)$ é um isomorfismo não trivial, pois como U é aberto em Y, temos que U é uma n-variedade generalizada e deste modo $H_n(Y, Y - y_0) \neq 0$. Por outro lado, por excisão nós temos que

$$H_n(U, U - x_0) \cong H_n(Y, Y - y_0) \text{ e } H_n(U', U' - z_0) \cong H_n(Z, Z - z_0),$$

e assim, nós concluímos que $(\varphi_{x_0})_* : H_n(Y, Y - y_0) \to H_n(Z, Z - z_0)$ é não trivial.

3.3 Aplicações

Nesta seção, nós consideramos X um monóide topológico e usamos a versão homológica do Teorema da Função Implícita (Teorema 3.2.4) para provar que, sob determinadas condições em X, o conjunto dos elementos inversíveis de X é um grupo topológico aberto em X. Além disso, usando a teoria clássica de grupos topológicos, analisaremos quando o grupo dos elementos inversíveis é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado. A seguir, daremos um breve descrição da teoria clássica de caracterização de grupos topológicos localmente compactos.

3.3.1 Grupos topológicos localmente compactos e o quinto problema de Hilbert

Hilbert propôs o seu famoso quinto problema em 1900, conjecturando o seguinte:

Conjectura - Quinto Problema de Hilbert. *Todo grupo localmente euclidiano é um grupo de Lie.*

Em 1933, o problema foi resolvido por von Neumann [41] para grupos compactos e em 1934, Pontrjagin [43] resolveu o problema para grupos de abelianos. No final da década de 40 e início da década de 50, uma série de trabalhos importantes, tratam do problema mais geral de caracterizar um grupo topológico localmente compacto qualquer. Iwasawa [30] e Gleason [24] constroem uma teoria de grupo de Lie generalizado, conhecido como L- grupos de Lie (ver Definição 3.3.4) e propõem a seguinte conjectura, a qual é uma generalização natural do problema de Hilbert:

Conjectura de Iwasawa-Gleason. *Todo grupo localmente compacto é um grupo de Lie generalizado.*

Montgomery e Zippin em [32], usando o teorema principal do trabalho de Gleason [24], demonstram a conjectura de Iwasawa-Gleason para o caso finito dimensional provando o seguinte teorema

Teorema 3.3.1 (Montgomery - Zippin) *Todo grupo localmente compacto finito dimensional é um grupo de Lie generalizado.*

Uma conseqüência desse resultado também provada por Montgomery e Zippin em [32] é a seguinte

Teorema 3.3.2 (Montgomery - Zippin) *Todo grupo localmente compacto, localmente conexo e finito dimensional é um grupo de Lie.*

Em particular, segue do teorema acima que todo grupo localmente Euclidiano é um grupo de Lie e, dessa forma, o quinto problema de Hilbert foi completamente resolvido.

Yamabe em [50], demonstra o Teorema 3.3.2 sem a hipótese de dimensão finita e dá uma resposta afirmativa para a Conjectura de Iwasawa-Gleason

Teorema 3.3.3 (Yamabe) *Todo grupo localmente compacto é um grupo de Lie generalizado.*

Assim, todos os problemas concernentes a estrutura dos grupos topológicos localmente compactos foram completamente resolvidos.
Observemos que a definição de um grupo de Lie generalizado, dada por Iwasawa [30] é a seguinte

Definição 3.3.4 (Grupo de Lie Generalizado) Um grupo G é um grupo de Lie generalizado (L- grupo), se G contém um sistema de subgrupos normais N_α tal que G/N_α são grupos de Lie e a interseção de todos os N_α coincide com a identidade.

3.3.2 Monóides Topológicos

Seja X um monóide topológico, ou seja, X é um semigrupo com elemento identidade. Denotemos por $\mathfrak{U}$ o conjunto dos elementos inversíveis de X e por "e" o elemento identidade de X. O próximo lema é uma das principais aplicações neste trabalho dos Teoremas 3.2.1, 3.2.4 (versão homológica do Teorema da Função Implicita).

Lema 3.3.5 *Seja X um monóide localmente compacto e localmente conexo. Suponhamos que $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, para algum natural $n > 0$. Então $\mathfrak{U}$ é aberto em X e a função $\mathfrak{I} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ dada por $\mathfrak{I}(x) = x^{-1}$ é contínua.*

Demonstração. Seja $f : X \times X \to X$ a função contínua dada por $f(x, y) = x * y$, onde $*$ é a multiplicação contínua em X. Seja $x_0 \in \mathfrak{U}$ arbitrário e $y_0 = {x_0}^{-1}$ o inverso de x_0 em $\mathfrak{U}$. Consideremos o homeomorfismo $\varphi_{x_0} : X \to X$ dado por $\varphi_{x_0}(x) = x_0 * x$, para cada $x \in X$ (a multiplicação à esquerda por x_0). Então, nós temos que $(\varphi_{x_0})^{-1}(\{e\}) = \{y_0\}$

e o isomorfismo

$$(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - y_0) \to \check{H}_n(X, X - e) \tag{3.3.1}$$

é não trivial, desde que por hipótese $\check{H}(X, X - e) \neq 0$. Segue do Teorema 3.2.4 que existe uma vizinhança aberta V_1 de x_0 e uma uma função $g_1 : V_1 \to X$ tal que $f(x, g_1(x)) = x * g_1(x) = e$, para cada $x \in V_1$. Analogamente, considerando o homomorfismo $\psi_{x_0} : X \to X$, dado por $\psi_{x_0}(x) = x * x_0$ para cada $x \in X$ (a multiplicação à direita x_0), nós temos que o isomorfismo

$$(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - y_0) \to \check{H}_n(X, X - e) \tag{3.3.2}$$

é não trivial e segue do Teorema 3.2.1 que existe uma vizinhança aberta V_2 of x_0 e uma função $g_2 : V_2 \to X$ tal que $f(g_2(x), x) = g_2(x) * x = e$, para cada $x \in V_2$.

Consideremos $V = V_1 \cap V_2$. Para cada $x \in V$ nós temos que

$$x * g_1(x) = e = g_2(x) * x.$$

Segue da propriedade associativa de X com relação a multiplicação "$*$"que

$$g_1(x) = g_2(x) = \mathfrak{I}(x) = x^{-1}, \tag{3.3.3}$$

para cada $x \in V$, ou seja, cada elemento $x \in V$ é inversível, deste modo V é uma vizinhança aberta de x_0 contida em $\mathfrak{U}$, e portanto $\mathfrak{U}$ é aberto em X.

Mais ainda, como consideramos x_0 um ponto arbitrário na prova acima e concluímos que $g_1 = g_2 = \mathfrak{I}$ segue do Teorema 3.2.4 que $\mathfrak{I} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ é contínua em x_0, e portanto contínua. □

Uma conseqüência imediata do Lema 3.2.1 é o seguinte

Teorema 3.3.6 *Seja X um monóide localmente compacto e localmente conexo. Suponhamos que $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, para algum natural $n > 0$. Então $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico aberto em X.*

Demonstração. Temos que $\mathfrak{U}$ é um grupo algébrico munido de uma multiplicação continua "$*$"herdada de X. Como pelo Lema 3.3.5 a aplicação $\mathfrak{I} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ é contínua, segue por definição que $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico. O Lema 3.3.5 também garante que $\mathfrak{U}$ é aberto em X. □

Observação 3.3.7 Consideremos $(X, +)$, onde $X = [0, \infty)$. Então $(X, +)$ é um monóide topológico, no entanto, $\mathfrak{U} = \{0\}$ não é aberto em X. Observemos que X não satisfaz a hipótese homológica essencial do Lemma 3.3.5, pois $H_n(X, X - 0) = 0$, para qualquer número natural n.

Nos próximos teoremas usaremos o Teorema 3.3.6 e os resultados da subseção 3.3.1 para concluir quando X ou $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie ou um grupo de Lie generalizado.

Teorema 3.3.8 *Seja X um monóide topológico compacto e conexo. Suponhamos que X seja localmente conexo de dimensão finita. Se $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, para algum natural $n > 0$, então X é um grupo de Lie.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3.6, que $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico aberto em X. Mostremos que $\mathfrak{U}$ também é fechado em X. De fato, seja (x_α) uma seqüência generalizada em $\mathfrak{U}$ com $x_\alpha \to x$ e deste modo, existe uma seqüência generalizada (x_α^{-1}) em X tal que $x_\alpha * x_\alpha^{-1} = e$, para todo α. Como X é compacto, seja y o ponto limite de alguma subseqüência generalizada convergente de $({x_\alpha}^{-1})$. Da continuidade da multiplicação "$*$", nós temos que $x * y = e$, então $x \in \mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}$ é fechado em X. Como X é conexo, segue que $X = \mathfrak{U}$ e deste modo X é um grupo localmente compacto, localmente conexo de dimensão finita, então pelo Teorema 3.3.2 X é um grupo de Lie. □

Corolário 3.3.9 *Seja M um monóide topológico, onde M é n-dimensional variedade generalizada compacta e conexo. Então M é um grupo de Lie.*

Demonstração. A prova é uma conseqüência imediata do Teorema 3.3.8, observando que sendo M uma n-variedade generalizada, $H_n(M, M - e) \neq 0$ e M é localmente conexa. □

Observação 3.3.10 Em particular, segue do Corolário 3.3.9 que se M for n-dimensional variedade topológica compacta e conexa que admite uma estrutura de monóide topológico, então M é um grupo de Lie. Este resultado foi provado por Mostert e Shields em [34].

No caso em que X não é necessariamente compacto, nós termos os seguintes teoremas

Teorema 3.3.11 *Seja X um monóide localmente compacto, comutativo satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade. Suponhamos que X seja localmente conexo. Se $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, para algum natural $n > 0$, então $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3.6 que $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico aberto em X. Assim, $\mathfrak{U}$ é um grupo comutativo, localmente conexo satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade, implicando que $\mathfrak{U}$ é de dimensão finita, e conseqüentemente do Teorema 3.3.2 é um grupo Lie. □

Teorema 3.3.12 *Seja X um monóide topológico localmente compacto. Suponhamos que X seja localmente conexo de dimensão finita. Se $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, para algum natural $n > 0$, então $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3.6 que $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico aberto em X. Deste modo, $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico localmente compacto, localmente conexo de dimensão finita. Do Teorema 3.3.2 $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie. □

Observação 3.3.13 Mostert e Shields em [36], provaram que se M é uma $n-$dimensional variedade topológica, então $\mathfrak{U}$ é aberto em M e é um grupo de Lie. O Teorema 3.3.12 tem como conseqüência este resultado, um vez que, se M for n-dimensional variedade topológica todas as sua hipóteses são atendidas.

Se retirarmos as hipóteses de local conexidade e de dimensão finita do Teorema 3.3.12, nós temos o seguinte

Teorema 3.3.14 *Seja X um monóide topológico localmente compacto. Se para algum natural $n > 0$ $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, então $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie generalizado.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3.6 que $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico aberto em X. Deste modo, $\mathfrak{U}$ é um grupo topológico localmente compacto. Segue do Teorema 3.3.3 que $\mathfrak{U}$ é um grupo de Lie generalizado. □

3.3.3 Espaços topológicos com multiplicação

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 3.2.1 (versão homológica do Teorema da Função Implícita) para espaços com multiplicação e elemento identidade. Podemos supor que a multiplicação no espaço não tenha propriedade associativa, caso contrário X será um monóide topológico e esta situação já foi abordada na seção anterior. Definiremos a seguir a noção de elementos "inversíveis"para tais espaços.

Definição 3.3.15 Seja X um espaço com multiplicação e elemento identidade $e \in X$. Um elemento $x \in X$ é **inversível** se existem $y_1, y_2 \in X$ tais que

$$x * y_1 = e = y_2 * x.$$

Seja $\mathfrak{U}$ o conjunto dos elementos inversíveis em X.

Até o final desta seção, a terna $(X, *, e)$ representará um espaço X com multiplicação e elemento identidade $e \in X$. Usaremos o Teorema 3.2.1 para obter resultados similares aos obtidos na seção anterior para o espaço $\mathfrak{U}$.

Lema 3.3.16 *Sejam $(X, *, e)$ um espaço localmente compacto, localmente conexo e φ_x and ψ_x as multiplicações à esquerda e à direita por x, respectivamente. Suponhamos que $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$ para algum natural $n > 0$. Se φ_x e ψ_x são bijeções, para cada $x \in \mathfrak{U}$, então $\mathfrak{U}$ é aberto em X.*

Demonstração. Consideremos $f : X \times X \to X$ dada por $f(x,y) = x * y$. Seja $x_0 \in \mathfrak{U}$, então existem $y_0, z_0 \in X$ tais que $x_0 * y_0 = e = z_0 * x_0$. Como φ_{x_0} e ψ_{x_0} são homeomorfismos e $\check{H}_n(X, X - e) \neq 0$, os isomorfismos

$$(\varphi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - y_0) \to \check{H}_n(X, X - e)$$

$$(\psi_{x_0})_* : \check{H}_n(X, X - z_0) \to \check{H}_n(X, X - e)$$

são não triviais. Segue do Teorema 3.2.4 que existem vizinhanças V de x_0 e funções $g_1 : V \to X$, $g_2 : V \to X$ tais que para cada $x \in V$,

$$x * g_1(x) = e = g_2(x) * x.$$

Deste modo, V é uma vizinhança aberta de x_0 contida em $\mathfrak{U}$ e nós concluímos que $\mathfrak{U}$ é aberto em X. □

Observação 3.3.17 Os números de Cayley satisfazem as hipóteses Lema 3.3.16, pois eles formam uma álgebra de divisão real. No conjunto dos números reais, é possível definir uma multiplicação não associativa com elemento identidade satisfazendo as condições do Lema 3.3.16. Em [1], os autores obtiveram uma seqüência $\{A_n\}$ de álgebras com identidade, A_n de dimensão 2^n, sobre um corpo $\mathbb{F}$, tal que em cada A_n todo elemento não nulo tem um inverso multiplicativo, no entanto cada A_n, $n > 3$, contém divisores próprios de zero, o que implica que φ_x, ψ_x não são bijeções, para algum elemento inversível x.

Corolário 3.3.18 *Seja $(X, *, e)$ uma n-dimensional variedade generalizada. Se φ_x, ψ_x são injetoras, para cada $x \in X$, então $\mathfrak{U}$ é aberto em X.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathfrak{U}$ arbitrário. Como φ_{x_0} e ψ_{x_0} são injetoras, segue do Teorema da Invariância do Domínio para variedades generalizadas [9, Corollary 16.19] que $\varphi_{x_0}(X) = U$ e $\psi_{x_0}(X) = U'$ são subconjuntos abertos em X, deste modo por excisão, nós temos que

$$H_n(U, U - e) \cong H_n(X, X - e) \cong H_n(U', U' - e)$$

e os homomorfismos

$$(\varphi_{x_0})_* : H_n(X, X - y_0) \to H_n(X, X - e)$$

$$(\psi_{x_0})_* : H_n(X, X - z_0) \to H_n(X, X - e)$$

são não triviais. Segue do Teorema 3.2.1 que existe uma vizinhança aberta V de x_0 e funções $g_1 : V \to X$, $g_2 : V \to X$ tais que para cada $x \in V$,

$$x * g_1(x) = e = g_2(x) * x.$$

Assim, V é uma vizinhança aberta de x_0 contida em $\mathfrak{U}$ e nós concluímos que $\mathfrak{U}$ é aberto em X. $\square$

Lema 3.3.19 *Seja $(X, *, e)$ um espaço compacto. Se X é um loop algébrico, então X é um loop topológico.*

Demonstração. Como $*$ é uma multiplicação em X, é suficiente provar que as funções $g, h : X \times X \to X$ são contínuas, onde para cada $(x, z) \in X \times X$, $g(x, z)$ e $h(x, z)$ são as únicas soluções das equações

$$x * g(x, z) = z \qquad h(x, z) * x = z$$

Nós mostraremos que *dada qualquer vizinhança V de $y_0 = g(x_0, z_0)$, existem vizinhanças U e W de x_0 e z_0, respectivamente, tais que*

$$(\varphi_x)^{-1}(W) \subset V, \forall x \in V$$

e deste modo, se $x \in U$ e $z \in W$, então $g(x, y) \in V$, ou seja, g é contínua em (x_0, z_0). De fato, suponhamos que para qualquer vizinhança V de x_0 e para qualquer vizinhança W de z_0, existem $(x_U, z_W) \in U \times W$ tais que $(\varphi_{x_U})^{-1}(z_W) \notin V$. Então, existe um seqüência generalizada $(g(x_U, z_w)) \in X - V$ com

$$x_U * g(x_U, z_W) = z_W.$$

Como $X - V$ é compacto, seja $y_1 \in X - V$ o ponto limite de alguma subseqüência generalizada convergente de $(g(x_U, z_V))$. Mais ainda, nós temos que $\lim x_U = x_0$ e $\lim z_W = z_0$, segue da continuidade da multiplicação "$*$" que $x_0 * y_1 = z_0$, implicando que $y_1 = y_0$. Isso contradiz o fato de que $y_1 \in X - V$. Analogamente, h é contínua. $\square$

Observação 3.3.20 As funções g e h da demonstração acima, representam na definição de quase-grupo (Definição 1.3.1) as funções Q_2 e Q_3, respectivamente.

Teorema 3.3.21 *Seja $(X, *, e)$ um espaço compacto, conexo e localmente conexo. Suponhamos que para algum natural $n > 0$, $\check{H}_n(X, X - \{e\}) \neq 0$. Se φ_x, ψ_x são bijeções para qualquer $x \in \mathfrak{U}$, então $\mathfrak{U} = X$. Conseqüentemente, X é um loop topológico.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.16 $\mathfrak{U}$ é um subconjunto aberto em X. Nós mostraremos que $\mathfrak{U}$ é fechado em X. Seja (x_α) uma seqüência generalizada em $\mathfrak{U}$ com $x_\alpha \to x$. Deste modo, existem subseqüências generalizadas (y_α), (z_α) em X tais que

$$x_\alpha * y_\alpha = e = z_\alpha * x_\alpha, \quad \forall \alpha. \tag{3.3.4}$$

Como X é compacto, seja y o ponto limite de alguma subseqüência generalizada de (y_α) e seja z o ponto limite de alguma subseqüência generalizada de (z_α). Da continuidade da multiplicação "$*$", nós temos que $x * y = e = z * x$, implicando que $x \in \mathfrak{U}$ e portanto $\mathfrak{U}$ é fechado. Como X é conexo, segue que $X = \mathfrak{U}$. Deste modo, φ_x, ψ_x são bijeções para qualquer $x \in X$, então nós concluímos que X é um loop algébrico. Pelo Lema 3.3.19, X é um loop topológico. $\square$

Capítulo 4

Teoremas de Funções Abertas e Generalizações do Teorema de Darboux

4.1 Introdução

Nesta seção, nós provaremos alguns Teoremas de funções abertas e generalizações do Teorema clássico de Darboux. Esses Teoremas são provados apenas assumindo a hipótese de diferenciabilidade da função (não necessariamente C^1) ou continuidade da função com algumas condições. Para a demonstração desses resultados, é fundamental o conceito de grau local, o qual apresentaremos a seguir.

4.2 O conceito de grau local

Os resultados a seguir, são conhecidos para variedades topológicas e diferenciáveis, no entanto, utilizando a definição de orientabilidade para variedades generalizadas (ver [9]), os mesmos são válidos para tais espaços.

Sejam X e Y n-dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$ e $f : X \to Y$ uma função contínua.

Definição 4.2.1 Seja $y \in Y$ tal que $L_y = f^{-1}(y)$ é um subconjunto compacto de X. Sejam $\alpha_{L_y} \in H_n(X, X - L_y)$ e $\beta_y \in H_n(Y, Y - y)$ as classes de orientação ao longo de L_y e em y, respectivamente. Existe um número inteiro $\deg(f, y)$ tal que $f_*(\alpha_{L_y}) = \deg(f, y)$, onde $f : X, X - L_y \to H_n(Y, Y - y)$ é o homomorfismo induzido por f. O número $\deg(f, y)$ é chamado **grau de f em y.**

Definição 4.2.2 Dizemos que f é **discreta** em x_0, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V - x_0$, $f(x) \neq f(x_0)$, ou equivalentemente, $f^{-1}(f(x_0)) \cap V - x_0 = \emptyset$. Um função f é discreta se ela for discreta em todos os pontos de seu domínio.

Definição 4.2.3 Dizemos que f é **light**, se $\dim(f^{-1}(y)) \leq 0$, para todo $y \in Y$.

Definição 4.2.4 Suponhamos que f seja discreta em x_0. Denotemos $y_0 = f(x_0)$ e sejam $\alpha_{x_0} \in H_n(V, V - x_0)$ e $\beta_{y_0} \in H_n(Y, Y - y_0)$ as classes de orientação em x_0 e y_0, respectivamente. Existe um número inteiro $\deg(f, x_0)$ tal que $f_*(\alpha_{x_0}) = \deg(f, x_0) \cdot \beta_{y_0}$, onde $f_* : H_n(V, V - x_0) \to H_n(Y, Y - y_0)$. Nós dizemos que $\deg(f, x_0)$ é o **grau local de f em x_0.**

Daremos agora, algumas propriedades dos números $\deg(f, y)$ e $\deg(f, x_0)$.

Lema 4.2.5 *Sejam X e Y variedades generalizadas conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$ e $f : X \to Y$ uma função contínua e $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y_0)$ é um conjunto finito. Então,*

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg(f, x) \tag{4.2.1}$$

Proposição 4.2.6 *Sejam X e Y variedades generalizadas orientadas de dimensão $n \geq 1$ e $f : X \to Y$ uma função contínua e K um subconjunto compacto e conexo de Y tal que $L_K = f^{-1}(K)$ é compacto. Então,* $\deg(f, y)$ *de* $y \in K$.

Se Y for uma variedade generalizada conexa, segue da Proposição 4.2.6 o seguinte

Corolário 4.2.7 *Sejam X e Y variedades topológicas conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$ e $f : X \to Y$ uma função contínua própria. Então, $\deg(f, y)$ não depende de $y \in Y$ e $\deg(f, y) = \deg(f)$, onde degf é o grau f.*

4.3 Teoremas de Funções Abertas

O Teorema 4.3.3 foi provado em [42], no caso em que f é de classe C^1. O fato de f ser de classe C^1 permitiu que os teoremas da Função Inversa e de Sard fossem aplicados. No entanto, em [14, 33], foi provado o teorema de Sard para funções apenas diferenciáveis e em [4] os autores mostram que se o conjunto dos pontos regulares for aberto e denso, então f é localmente inversível neste conjunto. Usaremos esses fato para provar Teorema 4.3.3.

Consideremos primeiramente o seguinte lema

Lema 4.3.1 *Sejam X, Y espaços topológicos, com X compacto e $f : X \to Y$ uma função contínua. Se f é discreta em um ponto $x_0 \in X$ então dada uma vizinhança aberta V contendo x_0 existe uma vizinhança aberta W contendo $y_0 = f(x_0)$ tal que $f^{-1}(W) \subset V$.*

Demonstração. Suponhamos que dado uma vizinhança aberta V contendo x_0, para toda vizinhança aberta W contendo y_0 existe x_w tal que $x_w \notin V$ e $f(x_w) \in W$. O conjunto

$$\Gamma = \{W \subset Y | \; y_0 \in W\}$$

é um sistema direto com a inclusão inversa. Deste modo, $(x_w)_{w \in \gamma}$ é uma seqüência generalizada em X compacto. Seja $x' \in X - V$ o ponto limite de alguma subseqüência convergente de $(x_w)_{w \in \gamma}$. Mostremos que $f(x') = y_0$. De fato, se $f(x') \neq y_0$ existem abertos disjuntos W_1 e W_2, com $y_0 \in W_1$ e $f(x') \in W_2$. Como f é contínua em x_0 e x', existem uma vizinhanças abertas V_1 e V_2 contendo x_0, x', respectivamente, tais que

$$f(V_1) \subset W_1 \quad e \quad f(V_2) \subset W_2$$

Como x' é ponto limite da seqüência generalizada $(x_w)_{w\in\gamma}$, e V_1 é uma vizinhança de x_0, existe $W \subset W_2$ tal que $x_w \in V_2$ e $f(x_w) \in W \subset W_1$, então $f(x_w) \subset W_1$ e $f(x_w) \subset W_2$, o que é uma contradição pois $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Portanto, $f(x') = y_0$ o que implica por hipótese que $x' = x_0$, mas isso contradiz o fato de $x' \in X - V$. □

Definição 4.3.2 Uma função contínua $f : X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y é dita ser **aberta**, se para qualquer aberto U em X, temos que $f(U)$ é aberto em Y.

Teorema 4.3.3 *Sejam M^n e N^n variedades diferenciáveis orientadas com N conexa e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável tal que :*

(1) *O conjunto dos pontos regulares de f é denso.*

(2) *Para cada ponto regular $x \in M$, $f'(x) : T_x(M) \to T_{f(x)}N$ preserva orientação.*

(3) *Para todo $y \in N$, $\dim f^{-1}(y) \leq 0$, ou seja, f é light.*

Então f é uma aplicação aberta.

Demonstração. Seja U um aberto de M e mostraremos que $f(U)$ é um aberto de N. Consideremos $y_0 = f(x_0) \in f(U)$. Como $\dim f^{-1}(y_0) \leq 0$ e M é localmente compacto, existe uma vizinhança aberta V de x_0, com

$$\partial(V) \cap f^{-1}(b) = \emptyset, \text{e } \overline{V}\text{compacto.} \tag{4.3.1}$$

Deste modo, $(f|_V)^{-1}(y_0) \subset V \subset \overline{V}$ é compacto e como M é um espaço topológico normal, existe um aberto V' com $(f|_V)^{-1}(y_0) \subset V' \subset \overline{V'}$ e $\overline{V'}$ compacto. Segue do Lema 4.3.1 que existe um aberto W de N contendo y_0 com $\overline{W}$ conexo e compacto satisfazendo $(f|_V)^{-1}(\overline{W}) \subset V' \subset \overline{V'} \subset V$, e assim, $(f|_V)^{-1}(\overline{W})$ é compacto e nós temos do Proposição 4.2.6 que

$$deg(f|_V, \overline{W}) = deg(f|_V, y) = deg(f|_V, y_0), \ \forall y \in \overline{W} \tag{4.3.2}$$

Por outro lado, $(f|_V)^{-1}(W)$ é um aberto em V e a condição (1) implica que existe $p \in (f|_V)^{-1}(W)$, onde p é um ponto regular de f, e segue de [4] que f é um homeomorfismo local em p, ou seja, existe $A \subset V$ aberto tal que $f_{|A} : A \to f|_V(A)$ é um homeomorfismo. Do Teorema de Sard, temos que existe $c \in f|_V(A) \subset W$, com c valor regular de $f|_V$ e $(f|_V)^{-1}(c) \neq \emptyset$. Como, pela condição (2), $f'(x)$ preserva orientação nos pontos regulares, temos que $\deg(f|_V, c) \neq 0$, e então $\deg(f|_V, y) \neq 0$ para todo y em W implicando que dado $y \in W$, existe $x \in V$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $y_0 \in W \subset f(U)$ e concluímos que f é aberta. $\square$

O próximo teorema nos dá condições para que uma função apenas contínua seja uma função aberta.

Definição 4.3.4 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Para $x_0 \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ denotemos por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \tag{4.3.3}$$

quando o limite existe. Se f é diferenciável, então $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ é a derivada direcional de f no ponto x_0 na direção do vetor v.

Teorema 4.3.5 *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$uma função contínua. Suponhamos que:*

(1) *Para todo $x \in U$ existam $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x)$, tal que $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x), \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial u_n}(x)\right\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^n$;*

(2) *Para todo $x \in U$, x é um ponto isolado de f.*

Então f é uma aplicação aberta.

Demonstração. Basta provarmos que para cada $x_0 \in U$, existe um aberto V contendo $f(x_0)$ tal que $V \subset f(U)$. Como x é um ponto isolado de f, existe um disco W contendo x_0 tal que $f^{-1}(f(x_0)) \cap \partial\overline{W} = x_0$. Deste modo, temos que $f(\partial\overline{W})$ não intercepta o ponto $f(x_0)$ e podemos escolher um disco V de raio $r < \frac{1}{2}d(f(\partial\overline{W}), f(x_0))$ contendo $f(x_0)$ tal que $\overline{V} \cap f(\partial\overline{W}) = \emptyset$ e mostremos que se $\tilde{y} \in V$ então $\tilde{y} \in f(\overline{W})$.

Definimos $h : \overline{W} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \| -\tilde{y} + f(x) \|^2 = \langle -\tilde{y} + f(x), -\tilde{y} + f(x) \rangle \tag{4.3.4}$$

Seja $\tilde{x} \in \overline{W}$ um ponto de mínimo de h, então $h(\tilde{x}) \leq h(x_0) = \| -\tilde{y} + f(x_0) \|^2$, ou seja,

$$d(f(\tilde{x}), \tilde{y}) \leq d(f(x_0), \tilde{y}) \tag{4.3.5}$$

Temos que $\tilde{x} \notin \partial\overline{W}$. De fato, se $\tilde{x} \in \partial\overline{W}$, então $f(\tilde{x}) \in f(\partial\overline{W})$ e de (4.3.5) temos

$$\begin{aligned} d(f(\partial\overline{W}), f(x_0)) &\leq d(f(\tilde{x}), f(x_0)) \\ &\leq d(f(\tilde{x}), \tilde{y}) + d(\tilde{y}, f(x_0)) \\ &\leq 2d(\tilde{y}, f(x_0)) \\ &\leq 2r \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Mas isso contradiz o fato de que $r < \frac{1}{2}d(f(\partial\overline{W}), f(x_0))$, e assim $\tilde{x} \in W$.

Sejam $u_1, \cdots, u_n$ vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1}(\tilde{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_n}(\tilde{x}) \right\} \tag{4.3.7}$$

seja uma base de $\mathbb{R}^n$. Como $\tilde{x}$ é um ponto de mínimo, temos que $\frac{\partial h}{\partial u_n}(\tilde{x}), \ldots, \frac{\partial h}{\partial u_n}(\tilde{x})$ são nulos e aplicando a regra da cadeia segue que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial u_i}(\tilde{x}) = 2\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}), \tilde{y} - f(\tilde{x}) \right\rangle \tag{4.3.8}$$

Por outro lado, existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tais que $\tilde{y} - f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x})$ e assim temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}, \tilde{y} - f(\tilde{x}) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(\tilde{x}) \right\rangle \\ &= \langle \tilde{y} - f(\tilde{x}), \tilde{y} - f(\tilde{x}) \rangle \\ &= \| \tilde{y} - f(\tilde{x}) \|^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ e $V \subset f(U)$, o que completa a prova. □

O seguinte exemplo, mostra a importância da hipótese dos pontos serem isolados no Teorema 4.3.5.

Exemplo 4.3.6 Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Se $v = (a,b)$, com $\| v \| = 1$ então $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = ab^2$. Seja $f(x,y) = (x, g(x,y))$ e podemos verificar que $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = ab^2$. Deste modo, considerando os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, temos que

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial v_1}(0,0), \frac{\partial f}{\partial v_2}(0,0) \right\} = \{(1,0), (1/2, 3/8)\} \tag{4.3.10}$$

formam um base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, f não é discreta em $(0,0)$, pois $f^{-1}\{(0,0)\} = \{(0,y) | y \in \mathbb{R}\}$. Vemos que f não é em aberta, pois f aplica os ponto da forma $(0,y)$ em $(0,0)$. Esse exemplo ilustra a importância da hipótese de f ser discreta no Teorema 4.3.5. Observemos que como g não é diferenciável, então h não é diferenciável.

4.4 Generalizações do Teorema de Darboux

O teorema clássico de Darboux nos diz que

Teorema 4.4.1 (Teorema de Darboux) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f'(a) < 0$ e $f' > 0$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Em [4] e [49], foi provada a seguinte generalização do teorema de Černavskii [16]

Teorema 4.4.2 (Černavskii) *Sejam M e N n-dimensionais variedades generalizadas e $f : M \to N$ uma função aberta e discreta. Então $\dim(f(B_f)) \leq n-2$ e $\dim(B_f) \leq n-2$, onde $B_f = \{x \in M |\ f$ não é homeomorfismo local em $x\}$*

Uma conseqüência do Teorema 4.4.2 é o seguinte

Corolário 4.4.3 *Sejam M, N n-dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas e $f : M \to N$ uma função aberta e discreta. Então, $\deg(f,x) \neq 0$ para todo $x \in M^n$ e $\deg(f,x)$ não muda de sinal.*

Demonstração. Segue do Teorema 4.4.2 que $\dim B_f \leq n-2$, então $M - B_f$ é conexo; e portanto, como f é um homeomorfismo local em $M - B_f$, temos que $\deg(f,x) = c$ para cada $x \in M - B_f$, onde $c = 1$ ou $c = -1$.

Seja $x_0 \in B_f$, como f é discreta, consideremos V uma vizinhança aberta de x_0, tal que $f(x) \neq f(x_0)$, para todo $x \in V$. Seja $y_0 = f(x_0)$, desde que $f(V)$ é aberto e $N - f(B_f)$ é denso em N, existe $y_1 \in f|_V(V) - f(B_f)$ tal que

$$\deg(f|_U, y_0) = \deg(f|_U, y_1)$$

para alguma vizinhança U de x_0, com $U \subset V$. Sejam $f^{-1}(y_1) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset M - B_f$. Então,

$$\deg(f, x_0) = \deg(f|_U, y_0) = \deg(f|_U, y_1) = \sum_{x_i \in f^{-1}(y_1)} \deg(f|_U, x_i),$$

e como cada $x_i \in M - B_f$, $\deg(f, x_i) = c$ para cada $x \in M - B_f$, onde $c = 1$ ou $c = -1$. Portanto, $\deg(f, x)$ não muda de sinal para todo $x \in M$. $\square$

Estenderemos agora a noção de grau para uma função não necessariamente discreta.

Definição 4.4.4 Sejam M e N n-dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas. Definimos

$$\deg(f, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ não é discreta em } x. \\ \\ \deg(f, x), & \text{se } f \text{ é discreta em } x, \text{ conforme Definição 4.2.2.} \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Aplicaremos os resultados anteriores para obtermos algumas generalizações do teorema de Darboux.

Teorema 4.4.5 (Versão homológica do Teorema de Darboux) *Sejam M, N n-dimensionais variedades generalizadas conexas e orientadas e $f : M^n \to N^n$ uma função contínua. Se existem x_0 e x_1 em M tais que* $\deg(f, x_0) < 0$ *e* $\deg(f, x_1) > 0$, *então existe x_2 em M tal que* $\deg(f, x_2) = 0$

Demonstração. Se existe x tal que f não é discreta, da Definição 4.4.4, segue que $\deg(f, x_0) = 0$. Caso contrário, f é discreta para todo $x \in M^n$. Suponhamos que $\deg(f, x) \neq 0$, para todo $x \in M^n$, então f é discreta e aberta e segue do Corolário 4.4.3 que $\deg(f, x)$ não muda de sinal, o que é uma contradição. $\square$

Observação 4.4.6 O lema a seguir é trivial se f é de classe C^1.

Teorema 4.4.7 *Sejam M e N n-variedades diferenciáveis orientadas e conexas e $f : M^n \to N^n$ uma função diferenciável. Se existem x_0 e x_1 em M^n tais que*

$$\det(f'(x_0)) < 0 \quad e \quad \det(f'(x_1)) > 0 \tag{4.4.2}$$

então f possui um ponto crítico.

Demonstração. Se f não tem pontos críticos, então $|\deg(f,x)| = 1 \neq 0$ para todo $x \in M$. Assim, f é aberta e discreta e segue do Corolário 4.4.3 que $\deg(f,x)$ não muda de sinal, o que é uma contradição. □

Daremos agora uma versão diferenciável do Teorema de Darboux.

Teorema 4.4.8 *Sejam $f, g : M \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis, onde M é uma $n-$variedade diferenciável conexa e orientada. Suponhamos que existam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0, x_1 \in M^n$ tais que*

$$\det(f'(x_0) - \alpha g'(x_0)) < 0 \quad e \quad \det(f'(x_1) - \alpha g'(x_1)) > 0.$$

Então, existe $x_2 \in M$ tal que $\det(f'(x_2) - \alpha g'(x_2)) = 0$

Demonstração. Basta aplicarmos o Teorema 4.4.7 para a função $h = f - \alpha g$. □

Como uma conseqüência imediata do Teorema acima, temos a seguinte generalização do teorema clássico de Darboux para aplicações diferenciáveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Corolário 4.4.9 (Teorema de Darboux diferenciável) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função diferencíável. Suponhamos que existam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0, x_1 \in U$ tais que*

$$\det(f'(x_0) - \alpha I) < 0 \quad e \quad \det(f'(x_1) - \alpha I) > 0.$$

Então, existe $x_2 \in U$ tal que $\det(f'(x_2) - \alpha I) = 0$

Mais geralmente, podemos provar o seguinte resultado

Teorema 4.4.10 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Suponhamos que existem $x_0, x_1 \in U$ e $\alpha \in R$ tais que*

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= \det(f'(x_0)) - \lambda I) = q_0(\lambda) \cdot (\alpha - \lambda)^{n_0} \\ p_1(\lambda) &= \det(f'(x_1)) - \lambda I) = q_1(\lambda)(\alpha - \lambda)^{n_1}, \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

com $q_0(\lambda) \neq 0$ e $q_1(\lambda) \neq 0$. Se n_0 for ímpar e n_1 for par e se $q_0(\alpha)q_1(\alpha) > 0$ (ou $q_0(\alpha)q_1(\alpha) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que para cada $\lambda \in (\alpha, \alpha + \delta)$

(ou $\lambda \in (\alpha - \delta, \alpha)$), existe $x_2 = x_2(\lambda)$ tal que

$$\det(f'(x_2) - \lambda I) = 0$$

Demonstração. Em virtude da paridade de n_0 e n_1, temos que em todas as situações acima os polinômios $p_o(\lambda)$ e $p_1(\lambda)$ possuem sinais diferentes, e segue do Corolário 4.4.9 que existe $x_2 = x_2(\lambda)$ tal que

$$p_2(\lambda) = det(f'(x_2) - \lambda I) = 0$$

□

Para finalizar o nosso trabalho, consideremos o seguinte Teorema de Inversão Local, que foi provado em [4] e [47].

Teorema 4.4.11 *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável sem pontos fixos. Então f é um homeomorfismo local.*

Demonstração. Como f é diferenciável e sem pontos críticos, então f é aberta e discreta. Seja $x_0 \in U$ e consideremos V uma vizinhança conexa de x_0 tal que $V \subset U$. Seja $y \in f(V)$ qualquer e mostremos que existe um único $x \in V$ tal que $f(x) = y$. De fato, V pode ser escolhida de tal forma que $f(x) \neq f(x_0) = y_0$, para todo $x \in V$ e

$$\deg(f|_V, y_0) = \deg(f|_V, y) \tag{4.4.4}$$

Suponhamos que existam $x, \tilde{x} \in V$ tais que $x \neq \tilde{x}$ e $f(x) = f(\tilde{x}) = y$. Assim, como f preserva orientação em V temos que

$$1 = |\deg(f|V, y_0)| = |\deg(f|_V, y)| \geq |\deg(f, x) + \deg(f, \tilde{x})| = 2, \tag{4.4.5}$$

o que é uma contradição. □

Referências Bibliográficas

[1] Althoen, S.C., and Weidner, J.F., *Real Division and Dickson's Construction*, Am. Math. Monthly, n. 5, 368-371, 1978.

[2] Biasi, C., Daccach J., and Saeki, O., *A primary obstruction to topological embeddings for maps between generalized manifolds.* Pacific J. Math. **197** n.2 275-289, 2001.

[3] Biasi, C., de Mattos, D., and dos Santos E.L., *A Borsuk-Ulam Theorem for maps from a sphere to a generalized manifold.* Geom. Dedicata **107** 101-110, 2004.

[4] Biasi, C., Gutierrez, C., *Finite branched coverings in generalized inverse mapping theorem*, pré-print.

[5] Biasi, C., Dos Santos, E. L., *A homological version of the implicit function theorem*, pré-print.

[6] Borel, A., *The Poincaré duality in generalized manifolds*, Mich. Math. J., **4**, 227-239, 1957.

[7] Borel, A., et al., *Seminar on Transformation Groups*, Ann. of Math. Studies, Vol.**46**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1960.

[8] Bredon, G. E., *Wilder manifolds are locally orientable*,Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **63** , 1079-1081, 1969.

[9] Bredon, G. E., *Sheaf Theory*, second edition, Graduate Texte in Math., Vol. **170**, Springer-Verlag, New York, 1997. Paris, 1969.

[10] Bryant, J., Ferry, S., Mio, W., e Weinberger, S., *Topology of homology manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **28** , 324-328, 1993.

[11] Bryant, J., Ferry, S., Mio, W., e Weinberger, S., *Topology of homology manifolds*, Ann. of Math., **143** , 435-467, 1996.

[12] Conner, P.E., and Floyd, E.E., *Differentiable Periodic Maps*. Ergebnisse der Math. Springer-Verlag Berlin **33**, 1964.

[13] Cannon, J. W., *Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimeñsion three*, Ann. of Math., (2) (**110**), 83-112, 1979.

[14] Constantin, A., *Critical values of differentiable maps*, Exposition. Math., (**14**), n. 1, 93-95, 1996.

[15] , Carruth, H., Hildebrant, J., and Koch, R.J., *Introductions to Topological Semigroups I and II*, Marcel Dekker, New York, 1983, respectively, 1986.

[16] Černavskii, A. V., *Finite-to-one open mappings of manifolds*, Mat. Sbornik, (**65**), 357-369, 1964.

[17] Černavskii, A. V., *Addendum to the paper "Finite-to-one open mappings of manifolds"*, Mat. Sbornik, (**66**), 471-472, 1965.

[18] Cleary, J., Morris, S., *Topologies on locally compact groups*, Bull. Austral. Math. Soc., **38**, 105-111, 1988.

[19] Comfort, W. W., Hofmann, K. H., Remus, D., *Topological groups and semigroups*, Recent Progress in General Topology, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 59-144, 1992.

[32] Montgomery, D. e Zippin, L., *Small sub groups of finite dimensional group*, Ann. of Math., (**56**), 213-241, 1952.

[33] Moreira, C. G., *Hausdorff measures and the Morse-Sard theorem* , Publ. Math. , (**45**), n. 1, 149-162, 2001.

[34] Mostert, P. S., Shields, A. L., *Semigroups with identity on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. , (**91**), 380-389, 1959.

[35] Mostert, P. S., Shields, A. L., *On the structure of semigroups on compact manifold with boundary*, Ann. of Math., (**65**), 117-143, 1957.

[36] Mostert, P. S., Shields, A. L., *Semigroups with identity on a manifold*,Trans. Amer. Math. Soc. , (**91**), 380-389, 1959.

[37] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[38] Lima, E. L., *Elementos de topologià geral* , Rio de Janeiro, Livros Tecnicos e Cientificos, 1976.

[39] Loibel, G. F., *Sobre quase-grupos topológicos*, Tese de doutorado, ICMC-USP, 1958.

[40] Loibel, G. F., *On topological quasi-groups.* (Portuguese) Bol. Soc. Mat. São Paulo, **13**, 1-42, 1961.

[41] von Neumann, J., *Die Eiinführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Math Ann. (**34**), 170-190, 1933.

[42] Poli, J. L., *Equivalência dos conceitos de orientação em variedades e grau de aplicações dos pontos de vista topológico e diferenciável*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 1983.

[43] Pontrjagin, L.: *The theory of topological commutative groups*, Ann. of Math., (**35**), 361-388, 1934.

[44] Pontrjagin, L.: *Topological Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[45] Quinn, F., *And the topological characterization of the manifolds*, Invent. Math., **72**, 267-284, 1983.

[46] Quinn, F., *An obstruction to the resolution of homology manifolds*, Michigan Math. Journal, **301**, 285-292, 1987.

[47] Radulescu, S., Radulescu, M., *Local inversion theorems without assuming continuous differenciability* , J. Math. Anal. Appl., **138**, n.2, 581-590, 1989.

[48] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[49] Väisälä, J., *Discrete open mappings on manifolds*, Annales Acad. Scie. Fenn. Ser. A, I n.0, n. **58**392, 10 pgs, 1966.

[50] Yamabe, H., *A generalization of a theorem of Gleason*, Ann of Math., (**58**), 351-365, 1953.

[51] Wilder, R. L. *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 32. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1949.