

Existência de soluções periódicas para uma  
equação de segunda ordem com  
retardamento

*Fábio Silva de Souza*

**Orientador:** *Profa. Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

**“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”**

Data da Defesa:	20/04/2005
-----------------	------------

Visto do Orientador:	<i>Sandra M. S. de Godoy</i>
----------------------	------------------------------

USP – São Carlos  
Junho/2005

Do meu pai e a Luiz.

## Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por me permitir concluir este trabalho apesar de todas as dificuldades.

A meu pai, a pessoa que mais acreditou em mim e contribuiu de maneira decisiva para esta conquista.

À Universidade de São Paulo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À minha orientadora Profa. Sandra Maria Semensato de Godoy, pelo auxílio e pela amizade constante em todas as horas em que sua presença se fez necessária.

A todos os funcionários do ICMC-USP, que tornaram esta tarefa mais agradável.

Aos amigos de sempre, Everaldo de Mello Bonotto, Angela Leite Moreiro e Profa Márcia Federson, pelo apoio nos piores momentos desta caminhada.

A Luiz Benedito César que está sempre comigo e sempre me apoiou, mesmo nas horas turbulentas, com seu mais sincero amor, carinho e afeto.

Mais que agradecer eu dedico este trabalho à meu pai: Altino, pelo incentivo, encorajamento e principalmente por permitir esta oportunidade única de me desenvolver. Se cheguei tão longe devo isso a você.

# Abstract

In this work we are interested in determining conditions for the existence of nontrivial periodic solutions of the retarded functional differential equation:

$$\ddot{x}(t) - f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t-r)) = 0 \tag{1}$$

using the delay as parameter. The equation (1) is known as Liénard equation and many studies about this equation have been made. The most general hypothesis used to a large extent of these studies is  $xg(x) > 0$  for all  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Here we will use a weaker hypothesis to reach our results and later these will be applied in physical and biological models as the sunflower equation.

## Resumo

Neste trabalho estamos interessados em determinar condições para a existência de soluções periódicas não - triviais da equação diferencial funcional retardada de segunda ordem:

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) - g(x(t-r)) = 0 \quad (2)$$

utilizando o retardo como parâmetro. A equação (2) é conhecida como equação de Lienard e uma série de estudos a respeito desta equação foram feitos. A hipótese mais geral utilizada em grande parte dos trabalhos a respeito desta equação é  $xg(x) > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Aqui utilizaremos uma hipótese mais fraca para alcançar nossos resultados e posteriormente estes serão aplicados em modelos físicos e biológicos como a equação do girassol.

## Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	6
2 Existência Local de Soluções Periódicas para a Equação de Liénard	11
3 Existência Global de Soluções Periódicas	23
4 Aplicações a modelos Físicos e Biológicos	47

## Introdução

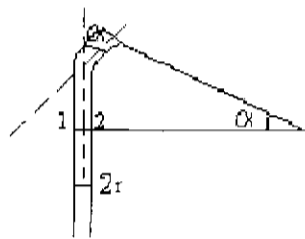
Um dos fenômenos biológicos bem definidos e estudados em inúmeros trabalhos consiste no movimento do caule de algumas plantas durante o seu desenvolvimento. Este fenômeno foi estudado em [7] e [8]. Nestes trabalhos um fato observado é que estes movimentos variam de planta para planta. Por exemplo, os caules de pés-de-feijão fazem um movimento de torção enquanto crescem. Já os caules da planta do gênero *Helianthus* desenvolvem movimentos oscilatórios durante o seu crescimento, sendo por isso chamadas de plantas da luz e da escuridão. Este nome deve-se ao fato de que tais plantas sempre parecem estar voltadas para os locais de maior luminosidade. Um exemplo deste gênero de planta é o girassol.

Em relação às plantas do gênero *Helianthus* podemos ver em [16] um estudo interessante feito sobre os movimentos que os caules desta planta desenvolvem durante seu crescimento. Neste estudo, os biólogos D. Israelsson e A. Johnsson observaram que este movimento é oscilatório e depende da quantidade de auxina existente no caule da planta. A auxina é um hormônio de crescimento responsável pelo desenvolvimento do caule.

Quanto à auxina, durante os estudos feitos em [16], foi concluído que a quantidade de auxina no caule de tais plantas depende do tempo durante o qual ocorre a ação da gravidade e da temperatura ambiente sobre o caule. O mecanismo para o desenvolvimento do caule, segundo os autores de [16] se dá através do acúmulo de auxina em um dos lados do caule, o qual se desenvolve de maneira mais rápida que o outro. Por sua vez, o lado do caule que está com menor quantidade de auxina tende a produzir este hormônio afim de equilibrar o crescimento do caule. Porém, este lado quantidade tende a produzir auxina em excesso e cresce mais fazendo com que o caule da planta se incline para o outro lado. Deste lado, o processo acima descrito repete-se e a planta se desenvolve desta maneira fazendo um movimento oscilatório.

Também em seu trabalho, Israelsson e Johnsson elaboraram um modelo matemático para controlar este crescimento através do ângulo de curvatura do caule. Este modelo foi novamente

trabalhado pelo matemático Alfredo Somolinos em [22]. Passamos agora a desenvolver este modelo.



A figura acima mostra a parte superior do caule de uma planta *Helianthus*. Os lados denotados por 1 e 2 tem comprimento  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente. Podemos perceber que:

$$2r\alpha = l_1 - l_2$$

Como tanto o ângulo de curvatura  $\alpha$  e o comprimento dos lados do caule dependem da quantidade de auxina concentrada e esta, por sua vez, depende do tempo de exposição  $t$  do caule da planta à ação da gravidade e da temperatura, faz sentido dizermos que

$$2r \frac{d}{dt} \alpha = \frac{d}{dt} l_1 - \frac{d}{dt} l_2$$

Ou seja

$$\frac{d}{dt} \alpha = \frac{1}{2r} \left[ \frac{d}{dt} l_1 - \frac{d}{dt} l_2 \right] \quad (3)$$

onde  $d = 2r$  é o diâmetro do caule. Quando o caule da planta está inclinado, ocorre o transporte transversal de auxina do lado maior para o lado menor do caule. Experiências descritas em [16] justificam a hipótese da existência de uma relação linear entre o crescimento dos lados do caule por unidade de tempo e a concentração de auxina neste lado, isto é

$$\frac{d}{dt} l_i = K_1 C_i + K, \quad i = 1, 2, K \text{ constante} \quad (4)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são as concentrações de auxina nos lados  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente e  $K_1$  é uma constante positiva.



Além disso foi constatado experimentalmente que o aumento no comprimento dos lados do caule por unidade de tempo é logaritmicamente dependente da concentração de auxina neste lado.

A equação (4) significa, portanto, que em uma concentração pequena de auxina, a curva logarítmica está sendo aproximada por uma reta.

De (3) e (4) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\alpha = \frac{1}{d}K_1(C_1 - C_2)$$

Para enfatizar que a equação acima depende do tempo  $t$  escreveremos a partir de agora

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \left(-\frac{K_1}{d}\right)(C_1(t) - C_2(t)) \quad (5)$$

A diferença da concentração de auxina nos lados do caule é chamada de gradiente de concentração. Ainda podemos supor que o gradiente de concentração da auxina no instante  $t$ , causando uma reação no mesmo instante  $t$ , é proporcional ao seno do ângulo formado pelo caule com a linha vertical. Entretanto, existe um intervalo de tempo entre o acúmulo de auxina num dos lados do caule e a reação do caule (a sua inclinação). Seja  $t_0$  o instante em que o estímulo ocorre e  $t$  o instante da reação do caule. Então, pode-se verificar experimentalmente que as posições da planta entre os instantes  $t_0$  e  $t$  possuem alguma importância para o gradiente da concentração de auxina. Também é claro que o gradiente de concentração de auxina depende mais do instante  $t - t_0$  do que do instante  $t$ . De fato, para expressar uma relação verdadeira entre a posição da planta e o gradiente de concentração, devemos introduzir uma função "peso"  $f$ , a qual é zero para instantes infinitamente depois de  $t$ . Podemos expressar todos estes argumentos na fórmula

$$C_2(t) - C_1(t) = K_2 \int_1^{-\infty} f(s) \operatorname{sen} \alpha(t - st_0) ds \quad (6)$$

onde  $K_2$  é uma constante positiva,  $f(s)$  é uma função "peso" tal que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = 0$  e  $f(1) = 1$  e  $s$  é uma variável adimensional. Para  $s \in [0, 1)$ ,  $f(s) = 0$ .

De (5) e (6) obtemos

$$\dot{\alpha}(t) = -b \int_1^{-\infty} f(s) \operatorname{sen} \alpha(t - st_0) ds$$

onde  $b = \frac{K_1 K_2}{d}$ .

A função "peso" descrita acima pode ser qualquer uma que satisfaça as condições exigidas. Porém uma função que mais se aproxima do modelo fisiológico descrito é a função  $f(s) = e^{-a(s-1)}$ , onde  $a$  é uma constante positiva. Observe que  $f(1) = 1$  e  $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = 0$ . Além disso esta função descreve o fato que a planta "lembra" de sua posição não apenas no instante  $t = t_0$ , mas também nos instantes posteriores, embora em um grau menor. Com isso posto, a equação acima torna-se

$$\dot{\alpha}(t) = -b \int_1^{+\infty} \exp(-a(s-1)) \operatorname{sen} \alpha(t - st_0) ds \quad (7)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $w = st_0 - t$  obtemos o seguinte

- $s = \frac{w+t}{t_0}$
- $-w = t - st_0$
- $t - st_0 = w$
- $dw = t_0 ds$
- Para  $s = 1$  temos  $w = t_0 - t$
- Para  $s \rightarrow +\infty$  temos  $w \rightarrow +\infty$

Logo a equação (7) se torna

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{b}{t_0} \int_{t_0-t}^{+\infty} \exp\left(-a\left(\frac{w+t-t_0}{t_0}\right)\right) \operatorname{sen} \alpha(-w) dw \quad (8)$$

Então note que de (8) e lembrando agora que podemos escrever  $t = t(w)$  temos

$$\frac{d}{dt} \dot{\alpha}(t) = -\frac{b}{t_0} \int_{t-t_0}^{+\infty} \exp\left(-a\left(\frac{w+t-t_0}{t_0}\right)\right) \cos \alpha(-w) \dot{\alpha}(-w) dw$$

Resolvendo a integral acima por partes obtemos

$$\begin{aligned} -\ddot{\alpha}(t) &= -\frac{b}{t_0} \left[ \exp\left(-a\left(\frac{w+t-t_0}{t_0}\right)\right) \operatorname{sen} \alpha(-w) \right] \Big|_{t_0-t}^{+\infty} \\ &\quad - \frac{ab}{t_0^2} \int_{t_0-t}^{+\infty} \exp\left(-a\left(\frac{w+t-t_0}{t_0}\right)\right) \operatorname{sen} \alpha(-w) dw \end{aligned} \quad (9)$$

Agora observe que

$$\frac{a}{t_0} \dot{\alpha}(t) = -\frac{ab}{t_0^2} \int_{t_0-t}^{+\infty} \exp\left(-a\left(\frac{w+t-t_0}{t_0}\right)\right) \operatorname{sen} \alpha(-w) dw$$

Substituindo na equação acima temos

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{b}{t_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \exp\left(-a\left(\frac{n \cdot t - t_0}{t_0}\right)\right) \sin \alpha(-n) - \sin \alpha(t - t_0) \right] = \frac{a}{t_0} \dot{\alpha}(t)$$

É, portanto,

$$\ddot{\alpha}(t) = -\frac{b}{t_0} \sin \alpha(t - t_0) + \frac{a}{t_0} \dot{\alpha}(t)$$

É, logo,

$$\ddot{\alpha}(t) + \frac{a}{r} \dot{\alpha}(t) + \frac{b}{r} \sin \alpha(t - r) = 0 \quad (10)$$

A equação (10) é conhecida como equação do girassol, em virtude do girassol ser o principal representante do gênero *Helianthus*. O matemático Somolinos em [22] estudou a estabilidade e a periodicidade das soluções de (10) utilizando o valor  $a$  como parâmetro.

A equação (10) é uma generalização da equação de Lienard, sendo conhecida como equação diferencial funcional com retardamento de Lienard. Esta equação foi estudada em diversos trabalhos como [3], [4], [5], [6], [10], [11], [12], [13], [20], [21], [22], [24] e [27].

A forma mais geral da EDFR de Lienard é:

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t - r)) = 0$$

Neste trabalho estudaremos em particular [24]. Faremos algumas modificações nas idéias utilizadas pelos autores trazendo todos os detalhes dos resultados enunciados no referido trabalho. Além disso para esta equação utilizaremos o retardo como parâmetro. Por fim, modificaremos uma das hipóteses mais utilizadas no estudo desta equação. Em geral, a hipótese mais comum na procura de soluções para esta equação é que  $xg(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Entretanto, para esta hipótese, utilizaremos uma condição mais fraca a respeito da função  $g$ .

No capítulo 1 daremos alguns conceitos e resultados básicos da Teoria de Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e da Teoria das Equações Exponenciais que serão utilizados posteriormente.

No capítulos 2 e 3 estudaremos a equação de Lienard quanto à sua estabilidade, dando condições de existência de soluções periódicas para determinados valores de retardo. Por fim, no capítulo 4, aplicaremos os resultados desenvolvidos em alguns modelos biológicos e físicos, como o modelo acima proposto.

## Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados básicos e outros mais gerais da teoria das equações diferenciais funcionais com retardamento, bem como da teoria das equações exponenciais, as quais serão utilizadas no decorrer do nosso trabalho.

Seja  $r \geq 0$  um número real dado,  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}^n$  o espaço vetorial linear  $n$ -dimensional sobre o conjunto dos números reais com norma  $|\cdot|$ ,  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$  é o espaço de Banach de funções contínuas cujo domínio é o intervalo fechado  $[a, b]$  com valores em  $\mathbb{R}^n$  e com a topologia da convergência uniforme. Se  $[a, b] = [-r, 0]$  então denotemos  $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  e designemos a norma de um elemento  $\phi$  de  $C$  por

$$\|\phi\| = \sup_{-r < \theta < 0} |\phi(\theta)|$$

Se

$$\sigma \in \mathbb{R}, A \geq 0 \text{ e } x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$$

então para cada  $t \in [\sigma, \sigma + A]$  definimos  $x_t$  por  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ .

Se  $D \subset \mathbb{R} \times C$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada, consideraremos a equação diferencial funcional retardada (EDFR) sobre  $D$ ,

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

Se quisermos enfatizar que esta equação é definida pela função  $f$  denotamos EDFR( $f$ ).

**Definição 1.1.** *Uma função  $x$  é dita solução da equação (1.1) sobre  $[\sigma - r, \sigma + A]$  se existem  $\sigma \in \mathbb{R}$  e  $A > 0$  tais que  $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ ,  $(t, x_t) \in D$  e  $x(t)$  satisfaz a equação 1.1 para  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ .*

**Definição 1.2.** Para  $\sigma \in \mathbb{R}$  e  $\phi \in C$ , dizemos que a função  $x(\sigma, \phi, f)$  é uma solução da equação (1.1) com valor inicial  $\phi$  em  $\sigma$  ou simplesmente uma solução através de  $(\sigma, \phi)$  se existe um número real positivo  $A$  tal que  $x(\sigma, \phi, f)$  é solução da equação (1.1) em  $[\sigma - r, \sigma + A)$  e  $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$ .

Com estas definições enunciaremos os seguintes resultados básicos, que se encontram demonstrados em [12] e em [13].

**Teorema 1.1. (Existência)** Suponhamos que  $\Omega$  seja um subconjunto aberto em  $\mathbb{R} \times C$  e  $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Se  $(\sigma, \phi) \in \Omega$ , então existe uma solução da EDR( $f^0$ ) por  $(\sigma, \phi)$ . Mais geralmente, se  $W \subseteq \Omega$  é compacto e  $f^0 \in C(W, \mathbb{R}^n)$ , existe uma vizinhança  $U \subset C(W, \mathbb{R}^n)$  de  $f^0$  e um  $\alpha > 0$  tais que, para cada  $(\sigma, \phi) \in W$ ,  $f \in U$ , existe uma solução  $x(\sigma, \phi, f)$  da EDR( $f$ ) por  $(\sigma, \phi)$  em  $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ .

**Teorema 1.2. (Dependência Contínua)** Suponhamos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$  seja aberto,  $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$ ,  $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$  e  $x^0$  uma solução da EDR( $f^0$ ) por  $(\sigma^0, \phi^0)$  e que existe e é única sobre  $[\sigma^0 - r, b]$ . Seja  $W^0 \subset \Omega$  o conjunto compacto definido por:

$$W^0 = \{(t, x_t) | t \in [\sigma^0, b]\}$$

e seja  $V^0$  uma vizinhança de  $W^0$  sobre a qual  $f^0$  é limitada. Se  $(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  satisfaz  $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$ ,  $\phi^k \rightarrow \phi^0$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f^k - f^0\|_{V^0} = 0$  então existe um  $k^0$  tal que a EDR( $f^k$ ) para  $k \geq k^0$  é tal que a cada solução  $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$  através de  $(\sigma^k, \phi^k)$  existe sobre  $[\sigma^k - r, b]$  e  $x^k \rightarrow x^0$  uniformemente sobre  $[\sigma^0 - r, b]$ . Como nem todas as soluções  $x^k$  podem ser definidas sobre  $[\sigma^0 - r, b]$  por  $x^k \rightarrow x^0$  uniformemente sobre  $[\sigma^0 - r, b]$ , entendemos que, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $k_1(\epsilon)$  tal que  $x^k(t)$ ,  $k \geq k_1(\epsilon)$ , é definida sobre  $[\sigma^0 - r + \epsilon, b]$  e  $x^k \rightarrow x^0$  uniformemente sobre  $[\sigma^0 - r + \epsilon, b]$ .

**Teorema 1.3. (Unicidade)** Suponha que  $\Omega$  seja um conjunto aberto em  $\mathbb{R} \times C$ ,  $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e  $f(t, \phi)$  é Lipschitziana em  $\phi$  em cada subconjunto compacto de  $\Omega$ . Se  $f(\sigma, \phi) \in \Omega$ , então existe uma única solução da equação (1.1) através de  $(\sigma, \phi)$ .

Além disso, necessitaremos das seguintes definições:

**Definição 1.3.** Seja  $X$  um espaço de Banach,  $U$  um subconjunto de  $X$  e  $x$  um ponto de  $U$ . Dada uma aplicação  $A : U \setminus \{x\} \rightarrow X$ , o ponto  $x \in U$  é dito ponto ejetivo de  $A$  se existe uma vizinhança aberta  $G \subset X$  de  $x$  tal que para cada  $y \in G \cap U$ ,  $y \neq x$ , existe um inteiro  $m = m(y)$  tal que  $A^m(y) \notin G \cap U$ .

A seguir enunciaremos alguns resultados os quais serão utilizados no decorrer deste trabalho.

**Teorema 1.4.** *Considere a função matricial*

$$F_\alpha(s) = \left[ sI - \sum_{j=0}^m A_j \exp(-\alpha s h_j) \right]$$

onde  $\alpha > 0$ ,  $0 < h_1 < \dots < h_m$  e  $A_j$  é uma matriz  $n \times n$  complexa para  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Seja ainda  $\sigma(Q) = \sup\{\operatorname{Re}(s) \mid \det(Q(s)) = 0\}$  se  $\det(Q) \neq 0$  para um conjunto finito de valores de  $s$  e  $\sigma(Q(S)) = -\infty$  se  $\det(Q(s)) \neq 0$  para todo  $s$ .

Então, para cada  $\alpha > 0$ ,  $\sigma(F_\alpha)$  é finito e define uma função contínua em  $\alpha$ , desde que  $\alpha$  seja um autovetor simples.

Este teorema encontra-se demonstrado em [9] (Teorema 2.1).

**Teorema 1.5.** *Seja  $f(\lambda, \tau) = \lambda^2 - a\lambda + b\lambda e^{-\lambda\tau} - c - de^{-\lambda\tau}$ , onde  $a, b, c, d$  e  $\tau$  são números reais e  $\tau \geq 0$ . Então, à medida que  $\tau$  varia, a soma das multiplicidades dos zeros de  $f$  no semi plano aberto direito pode mudar somente se um zero de  $f$  aparece ou se existir um  $\lambda$  neste semiplano tal que  $f(\lambda, \tau) = i\omega_0$ ,  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ .*

O resultado acima pode ser encontrado em [6] (Lema 1).

**Teorema 1.6. (Ascoli - Arzelá)** *Sejam  $K$  um espaço métrico compacto e  $E \subset C(K, \mathbb{R}^m)$ . Suponhamos que exista  $N > 0$  tal que  $\|f(x)\| \leq N$ , para quaisquer  $x \in K$ ,  $f \in E$  e que  $E$  seja equicontínuo. Então  $E$  é relativamente compacto.*

Este resultado encontra-se demonstrado em [1].

**Teorema 1.7.** *Sejam  $K$  é um subconjunto fechado, limitado, convexo e de dimensão infinita em um espaço de Banach  $X$ .  $A : K \setminus \{x_0\} \rightarrow K$  uma aplicação completamente contínua e  $x_0 \in K$  um ponto efetivo de  $A$ . Então existe um ponto fixo de  $A$  em  $K \setminus \{x_0\}$ .*

Este resultado é uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Schauder cuja demonstração está em [20].

Os próximos resultados encontram-se em [12] e [13].

**Teorema 1.8. (Representação de Riesz)** *Suponha  $T : L_1([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  um operador linear contínuo. Então existe uma única função matricial  $n \times n$ , digamos,  $V(\theta)$ ,  $a \leq \theta \leq b$ , (única exceto por conjuntos de medida nula em  $\theta$ ) que é integrável e essencialmente limitada tal que:*

$$T(h) = \int_a^b V(\theta)h(\theta)d\theta, \quad h \in \mathcal{L}_1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

As considerações abaixo referem-se à uma classe especial de equações diferenciais funcionais lineares com retardamento:

$$\dot{x}(t) = L(x_t)$$

onde  $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função linear contínua. Esta hipótese implica que existe uma função matricial  $n \times n$ , da forma  $\eta(\theta)$ , com  $-r \leq \theta \leq 0$ , cujos elementos são de variação limitada e

$$L(\phi) = \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)] \phi(\theta), \quad \phi \in C$$

Com isto obtemos os seguintes resultados demonstrados em [12] e [13]:

**Teorema 1.9.** *Suponha que a família de operadores limitados  $\{L(\alpha) : C \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}\}$  é de classe  $C^1$ . Se  $\lambda_0$  é uma raiz característica simples da EDFR( $L(0)$ ), então existe um  $\alpha_0 > 0$  e uma raiz característica  $\lambda(\alpha)$  da EDFR( $L(\alpha)$ ) de classe  $C^1$  para  $|\alpha| < \alpha_0$  e  $\lambda(0) = \lambda_0$ . Além disso,  $C$  é decomposto por  $\lambda(\alpha)$  da forma  $C = P_\alpha \oplus Q_\alpha$  e  $\pi_\alpha$  é a projeção correspondente com imagem  $P_\alpha$ .*

**Teorema 1.10.** *Suponha que as seguintes condições são válidas:*

1. *Existe uma raiz característica  $\lambda$  da EDFR( $f$ ) satisfazendo  $Re\lambda > 0$ ,*
2. *Existem um subconjunto  $K \subseteq C$  fechado e convexo com  $0 \in K$  e  $\delta > 0$ , tal que:*

$$v = v(\delta) = \inf\{|\pi_\lambda \phi| : \phi \in K, \|\phi\| = \delta\} > 0$$

3. *Existe uma função completamente contínua  $D : K \setminus \{0\} \rightarrow [\alpha, +\infty)$ ,  $0 \leq \alpha$  tal que a aplicação definida por:*

$$A\phi = x^{D(\phi)}(\phi), \quad \phi \in K \setminus \{0\}$$

*levando  $K \setminus \{0\}$  sobre  $K$  é completamente contínua.*

*Então 0 é um ponto cético de  $A$ .*

As considerações abaixo referem-se ao Teorema da Bifurcação de Hopf.

Consideremos uma família a um parâmetro de equações diferenciais funcionais retardadas da forma:

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t), \quad (1.2)$$

onde  $F(\alpha, \phi)$  tem primeira e segunda derivadas contínuas em relação a  $\alpha$  e  $\phi$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in C$  e  $F(\alpha, 0) = 0$  para todo  $\alpha$ .

Definimos  $L: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$  por:

$$L(\alpha)\Psi = F_\sigma(\alpha, 0)\Psi,$$

onde  $F_\sigma(\alpha, 0)$  é a derivada de  $F(\alpha, \phi)$  com respeito a  $\phi$  em  $\phi = 0$ .

Consideremos as seguintes hipóteses:

1. A EDFR( $L(0)$ ) linear tem uma raiz característica imaginária pura simples  $\lambda_0 = iv_0 \neq 0$  e todas as raízes características  $\lambda_j \neq \lambda_0, \lambda_0^m$  satisfazem  $\lambda_j \neq m\lambda_0$  para qualquer inteiro  $m$ .

Como  $L(\alpha)$  é continuamente diferenciável em relação a  $\alpha$ , de acordo com [12] (Lema 2.2, seção 7.2), existe  $\alpha_0 > 0$  e uma raiz característica simples  $\lambda(\alpha)$  da equação EDFR( $L(\alpha)$ ) linear, que possui derivada contínua  $\dot{\lambda}(\alpha)$  em  $\alpha$ , para  $|\alpha| < \alpha_0$ .

2.  $Re(\dot{\lambda}(0)) \neq 0$

**Teorema 1.11. (Bifurcação de Hopf):**

Suponhamos que  $F(\alpha, \phi)$  seja continuamente diferenciável com respeito a  $\alpha$  e  $\phi$ ,  $F(\alpha, 0) = 0$  para todo  $\alpha$  e que as hipóteses 1 e 2 estejam satisfeitas. Então, existem constantes  $a_0, \alpha_0, \delta_0$  e funções continuamente diferenciáveis em  $a$ ,  $\alpha(a) \in \mathbb{R}$ ,  $\omega(a) \in \mathbb{R}$  e  $x^*(a), \omega(a)$  - periódica, para  $|\alpha| < \alpha_0$ , tais que  $x^*(a)$  é uma solução da equação (1.2). Além disso, para  $|\alpha| < \alpha_0$ ,  $|\omega - \left(\frac{2\pi}{v_0}\right)| < \delta_0$ , as soluções  $x^*$  são as únicas  $\omega$ -periódicas da equação (1.2) com  $|x_t| < \delta_0$ , exceto por uma translação de fase.



## Capítulo 2

# Existência Local de Soluções Periódicas para a Equação de Liénard

Consideremos a equação de Liénard com retardo finito

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t-r)) = 0 \quad (2.1)$$

onde  $r$  é uma constante positiva,  $f$  e  $g$  são funções de classe  $C^2$  e  $g(0) = 0$ . Denotemos  $f(0) = m$ ,  $g'(0) = n$ . Suponha ainda que  $m$  e  $n$  são constantes positivas.

Observe que a função nula  $x(t) = 0$  para  $t \geq 0$  é solução da equação (2.1) e vamos investigar condições sob as quais esta solução é estável. Como neste trabalho estamos assumindo que o retardo  $r$  é o parâmetro, vamos reescrever a equação (2.1) fazendo uma mudança de variável. Para isto consideremos  $x(t) = X(\tau)$  onde  $t = r\tau$ . Deste modo temos

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{r}\dot{X}(\tau)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{r^2}\ddot{X}(\tau)$$

$$x(t-r) = x(r\tau-r) = x(r(\tau-1)) = X(\tau-1)$$

Portanto a equação (2.1) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\ddot{X}(\tau) + rf(X(\tau))\dot{X}(\tau) + r^2g(X(\tau-1)) = 0 \quad (2.2)$$

Observe que  $x(t)$  é solução da equação (2.1) se, e somente se  $X(\tau)$  for solução da equação (2.2). Sendo assim, se desejarmos obter resultados a respeito da estabilidade da solução nula para a equação (2.1) basta analisarmos o comportamento da solução nula para a equação (2.2).

Deste modo, determinemos a equação característica associada à equação (2.2). Notemos que a parte linear daquela equação, desenvolvida através da série de Taylor em torno do zero, é

$$\ddot{X}(\tau) + rf(0)\dot{X}(\tau) + r^2g(0) + r^2\dot{g}(0)X(\tau - 1)$$

Donde, tendo em vista a igualdade (2.2) obtemos

$$\ddot{X}(\tau) + rf(0)\dot{X}(\tau) + r^2g(0) + r^2\dot{g}(0)X(\tau - 1) = 0$$

Ao considerarmos como solução da equação (2.2) a função  $X(\tau) = ce^{\lambda\tau}$ , onde  $c$  é uma constante não nula, então obtemos

$$\lambda^2 ce^{\lambda\tau} + rf(0)c\lambda e^{\lambda\tau} + r^2g(0) + r^2\dot{g}(0)ce^{\lambda(\tau-1)} = 0$$

Como  $c \neq 0$ ,  $g(0) = 0$ ,  $\dot{g}(0) = -n$  e  $f(0) = m$ , segue que a equação característica da equação (2.2) é

$$\lambda^2 + mr\lambda + nr^2e^{-\lambda} = 0 \quad (2.3)$$

Para estudarmos a estabilidade da solução nula daremos alguns resultados a respeito da equação característica (2.3).

**Lema 2.1.** *Existem  $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$  e  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  tais que para  $r \in (0, r_0)$ , todas as raízes da equação (2.3) têm partes reais estritamente negativas. Se  $r = r_0$  então a equação (2.3) tem um único par de raízes imaginárias puras, a saber  $z_1 = i\omega_0$  e  $z_2 = -i\omega_0$  enquanto todas as outras raízes têm parte real estritamente negativa e  $0 < r_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{n}\cos\omega_0}$  e  $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$ .*

*Demonstração:*

Suponha inicialmente que exista  $\omega \in \mathbb{R}$  tal que  $z_1 = i\omega$  e  $z_2 = -i\omega$  sejam raízes da equação (2.3). Então, observe que:

$$z_1^2 + mrz_1 + nr^2e^{-z_1} = 0$$

Donde

$$-\omega^2 + mr^2 e^{-i\omega} = 0$$

Isto é

$$-\omega^2 + imr\omega + nr^2 \cos(\omega) - nr^2 i \sin(\omega) = 0$$

Ou seja

$$\left(-\omega^2 + nr^2 \cos(\omega)\right) + i\left(mr\omega - nr^2 \sin(\omega)\right) = 0$$

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \omega^2 = nr^2 \cos(\omega) \\ mr\omega = nr^2 \sin(\omega) \end{cases} \quad (2.4)$$

Da mesma forma, observe que se  $z_2 = -i\omega$ , então  $z_2$  também é raiz da equação (2.3).

Por outro lado, suponha que exista  $\omega \in \mathbb{R}$  tal que  $w$  satisfaça o sistema acima.

Deste modo, observe que se  $z_1 = i\omega$  temos

$$z_1^2 + mrz_1 + nr^2 e^{-z_1} = -\omega^2 + mr^2 e^{-i\omega} = -\omega^2 + mr^2 \cos(\omega) - imr^2 \sin(\omega) = 0$$

Analogamente se  $z_2 = -i\omega$  então  $z_2$  satisfaz a equação acima.

Desta maneira, a condição necessária e suficiente para que  $z_1 = i\omega$  e  $z_2 = -i\omega$  sejam raízes da equação característica (2.3) é que  $\omega$  seja solução do sistema.

Do sistema (2.4) obtemos, elevando a segunda equação ao quadrado,

$$\omega^2 = \frac{n^2 r^2}{m^2} \sin^2 \omega$$

Substituindo a igualdade acima na primeira equação do sistema (2.4) obtemos

$$\frac{\sin^2 \omega}{m^2} = nr^2 \cos \omega$$

Isto é

$$1 - \cos^2 \omega = \frac{m^2}{n} \cos \omega \quad (2.5)$$

E, logo,  $\cos^2 \omega + \frac{m^2}{n} \cos \omega - 1 = 0$

Fazendo  $y = \cos \omega$  obtemos:

$$y^2 - \frac{m^2}{n}y - 1 = 0$$

E daí, obtemos os seguintes valores de  $y$

$$y_1 = \frac{-\frac{m^2}{n} + \sqrt{\frac{m^4}{n^2} + 4n^2}}{2} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-\frac{m^2}{n} - \sqrt{\frac{m^4}{n^2} + 4n^2}}{2}$$

Da primeira equação do sistema (2.4) temos que

$$\frac{\omega^2}{m^2} = \cos \omega$$

Como  $\omega^2 > 0$ ,  $n > 0$  e  $r^2 > 0$  segue que  $0 < \cos \omega < 1$ .

Agora, observe que para quaisquer constantes positivas  $m$  e  $n$  temos

$$m^2 = \sqrt{m^4} < \sqrt{m^4 + 4n^2} \tag{2.6}$$

Donde  $-\frac{m^2}{n} < \frac{\sqrt{m^4 + 4n^2}}{n}$ .

E, portanto,  $y_2 < 0$ .

Por outro lado, observe que  $0 < 4nm$ .

Donde  $m^4 + 4n^2 < m^4 + 4nm^2 + 4n^2 = (m^2 + 2n)^2$ .

Portanto,

$$\frac{-m^2 + \sqrt{m^4 + 4n^2}}{2n} < 1$$

Isto é  $y_1 < 1$ .

Ainda, de (2.6) segue que

$$0 < -\frac{m^2}{n} + \frac{\sqrt{m^4 + 4n^2}}{n}$$

E, portanto  $0 < y_1 < 1$ .

Desta forma segue que

$$\cos \omega = \frac{m^2 + \sqrt{m^4 + 4n^2}}{2n}$$

Definimos então

$$\omega_0 = \arccos \left( \frac{-m^2 + \sqrt{m^4 + 4n^2}}{2n} \right) \tag{2.7}$$

e

$$r_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{n \cos \omega_0}} \quad (2.8)$$

Observemos agora que

$$n^2 r_0^4 \sin^2 \omega_0 = n^2 r_0^4 (1 - \cos^2 \omega_0)$$

Substituindo (2.5) na equação acima obtemos

$$n^2 r_0^4 \sin^2 \omega_0 = n r_0^4 m^2 \cos \omega_0$$

Da primeira equação do sistema (2.4) segue que

$$n^2 r_0^4 \sin^2 \omega_0 = m^2 \omega_0^2 r_0^2$$

E, portanto,

$$n r_0^2 \sin \omega_0 = m r_0 \omega_0 \quad (2.9)$$

E, ainda,

$$\omega_0^2 = n r_0^2 \cos \omega_0 \quad (2.10)$$

Desta maneira, de (2.9) e (2.10), vemos que o par ordenado  $(\omega_0, r_0)$  satisfaz as equações do sistema (2.4). Desta forma,  $z_1 = i\omega_0$  e  $z_2 = -i\omega_0$  são as raízes imaginárias puras da equação característica (2.3) quando  $r = r_0$ . A unicidade destas raízes segue da definição de  $\omega_0$  e  $r_0$ .

Suponha agora que exista  $r_1 \in (0, r_0)$  tal que para  $r = r_1$  a equação (2.3) tenha raízes imaginárias puras  $z'_1 = i\omega_1$  e  $z'_2 = -i\omega_1$ . Deste modo, sabemos que  $\omega_1$  deve satisfazer o sistema (2.4).

E, portanto, chegamos à equação  $\cos^2 \omega_1 - \frac{m^2}{n} \cos \omega_1 - 1 = 0$

E, pela unicidade das raízes desta equação, concluímos que

$$\cos \omega_1 = \cos \omega_0$$

Donde

$$\omega_1 = \omega_0 + 2k\pi, \text{ para algum inteiro } k.$$

Assim, concluímos que

$$r_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{n \cos \omega_0}} - \frac{2k\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}} = r_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}}, \text{ para algum inteiro } k.$$

Observe agora que se  $k = 0$ , então  $r_1 = r_0$ , o que é absurdo. Por outro lado, se  $k$  é um inteiro positivo então  $r_1 > r_0$ , visto que  $\frac{2k\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}} > 0$ .

Por outro lado observe que  $0 < \cos \omega_0 < 1$

Donde, segue que  $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$ .

Dai,

$$0 < \frac{\omega_0}{\sqrt{n \cos \omega_0}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n \cos \omega_0}}$$

E, portanto,

$$0 < r_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}} < \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}}$$

Isto é,

$$0 < r_1 < \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}}$$

Se  $k$  é um inteiro negativo então  $r_1 < 0$ , o que é absurdo. Deste modo, para  $r \in (0, r_0)$  a equação (2.3) não possui raízes imaginárias puras.

Façamos agora  $\dot{X}(\tau) = Y(\tau)$ . Então, da equação (2.2) temos que

$$\ddot{X}(\tau) = -rf(X(\tau))\dot{X}(\tau) - r^2g(X(\tau-1))$$

E, logo, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = Y(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) = -rf(X(\tau))Y(\tau) - r^2g(X(\tau-1)) \end{cases} \quad (2.11)$$

Seja  $A$  a matriz associada ao sistema (2.11), isto é, a matriz obtida da parte linear do sistema acima em torno de 0. Consideremos agora a seguinte função matricial:

$$E_r(\lambda) = \left[ \lambda I - A(r)e^{-\lambda} \right]$$

Então do Teorema 1.4 do Capítulo 1 sabemos que

$$\sigma(F_r(\lambda)) = \sup\{Re(\lambda) : det(F_r(\lambda)) = 0\}$$

é finito e é uma função contínua de  $r$ . Em outras palavras, estamos afirmando que o supremo da parte real das raízes da equação (2.3) varia continuamente com o parâmetro  $r$ . Observe que para  $r = 0$  temos a seguinte equação:

$$\lambda^2 = 0$$

cuja raiz dupla é  $\lambda = 0$ . Assim  $\sigma(F_0(\lambda)) = 0$ .

Consideremos agora a função

$$\lambda(r) = \alpha(r) + i\omega(r) \tag{2.12}$$

representando as raízes da equação (2.3) satisfazendo  $\alpha(0) = \alpha(r_0) = \omega(0) = 0$  e  $\omega(r_0) = \omega_0$ .

Então observe que

$$\lambda^2(r) + rm\lambda(r) + nr^2e^{-\lambda(r)} = 0$$

Daí, derivando a equação acima obtemos

$$2\lambda(r)\frac{d\lambda(r)}{dr} + m\left(\lambda(r) + r\frac{d\lambda(r)}{dr}\right) + n\left(2re^{-\lambda(r)} - r^2e^{-\lambda(r)}\frac{d\lambda(r)}{dr}\right) = 0$$

Donde

$$\frac{d\lambda(r)}{dr}\Big|_{r=r_0} \left[2\lambda(r_0) + mr_0 - nr_0^2e^{-\lambda(r_0)}\right] = -m\lambda(r_0) - 2nr_0e^{-\lambda(r_0)}$$

Como  $\lambda(r_0) = i\omega_0$  obtemos

$$\frac{d\lambda(r)}{dr}\Big|_{r=r_0} [2i\omega_0 + mr_0 - nr_0^2\cos\omega_0 - inr_0^2\sin\omega_0] = -mi\omega_0 - 2nr_0\cos\omega_0 - 2inr_0\sin\omega_0$$

Tendo em vista as equações do sistema (2.4) obtemos

$$\frac{d\lambda(r)}{dr}\Big|_{r=r_0} = [i(2\omega_0 + mr_0\omega_0) + mr_0 - \omega_0^2] = i(-m\omega_0 - 2m\omega_0) - \frac{\omega_0^2}{r_0}$$

Donde

$$\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{-\omega_0^2 + i(-m\omega_0 r_0 - 2m\omega_0 r_0)}{r_0[(mr_0 - \omega_0^2) + i(2\omega_0 + mr_0\omega_0)]}$$

On seja

$$\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{(-\omega_0^2 - 2im\omega_0 r_0)(mr_0 - \omega_0^2) - i(2\omega_0 + mr_0\omega_0)}{r_0[(mr_0 - \omega_0^2)^2 + (2\omega_0 + mr_0\omega_0)^2]}$$

Fazendo  $\Delta = r_0[(mr_0 - \omega_0^2)^2 + (2\omega_0 + mr_0\omega_0)^2]$ , obtemos

$$\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{-mr_0\omega_0^2 + \omega_0^4 + 2i\omega_0^3 + imr_0\omega_0^3 - 2i\omega_0 r_0^2 m^2 - 2mi\omega_0^3 r_0 - 4m\omega_0^2 r_0 - 2m^2\omega_0^2 r_0^2}{\Delta}$$

É, logo,

$$\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{3m\omega_0^2 r_0 - \omega_0^4 - 2m^2\omega_0^2 r_0^2}{\Delta} - i \frac{2\omega_0^3 - mr_0\omega_0^3 + 2m\omega_0 r_0^2}{\Delta}$$

Deste modo, como  $\left. \frac{d\lambda(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{d\alpha(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} + i \left. \frac{d\omega(r)}{dr} \right|_{r=r_0}$  segue que

$$\left. \frac{d\alpha(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{(3m\omega_0^2 r_0 - \omega_0^4 + 2m\omega_0^2 r_0^2)}{\Delta} > 0$$

Desta forma, existe  $\delta > 0$  tal que para  $r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$ , a função  $\alpha(r)$  é crescente. Conseqüentemente a função  $\sigma(F_r(\lambda))$  é crescente neste mesmo intervalo.

Como  $\sigma(F_{r_0}(\lambda)) = 0$ , segue que existe  $r_1 < r_0$  tal que  $\sigma(F_{r_1}(\lambda)) < 0$ . Além disso,  $\sigma(F_r(\lambda)) \neq 0$  para  $r \in (0, r_0)$ . Desta maneira, pela continuidade de  $\sigma(F_r(\lambda))$  segue que  $\sigma(F_r(\lambda)) < 0$  para  $r \in (0, r_0)$ .



Portanto, para  $r \in (0, r_0)$  todas as raízes da equação (2.3) têm partes reais estritamente negativas, enquanto que para  $r = r_0$  existem apenas duas raízes imaginárias puras e as demais raízes também possuem partes reais estritamente negativas.

Por fim, observe que já mostramos que  $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$  e além disso observe que  $r_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{n \cos \omega_0}}$ .  
 Onde segue que  $0 < r_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{n \cos \omega_0}}$ .

É, portanto, o lema está provado. ■

Definimos agora as seguintes constantes

$$r_j = r_0 + \frac{2j\pi}{\sqrt{n \cos \omega_0}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $\omega_0$  e  $r_0$  são definidos por (2.7) e (2.8). Para  $r = r_j$  está provado no lema acima que  $z_1 = i\omega_0$  e  $z_2 = -i\omega_0$  é o único par de raízes imaginárias puras da equação (2.3).

Definimos ainda

$$\lambda_j(r) = \alpha_j(r) + i\omega_j(r), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

como sendo as raízes da equação (2.3) satisfazendo  $\alpha_j(r_j) = 0$  e  $\omega_j(r_j) = \omega_0$ .

Com isto, obtemos o seguinte resultado

**Lema 2.2.** *Sejam  $\lambda_j(r) = \alpha_j(r) + i\omega_j(r)$  como definido acima. Então:*

$$\frac{d}{dr} \alpha_j(r) \Big|_{r=r_j} > 0$$

*Demonstração:*

Tendo em vista que  $\lambda_j(r)$  é raiz da equação (2.3), então para cada  $j = 0, 1, 2, \dots$  temos que

$$\lambda_j^2(r) + m r \lambda_j(r) + n r^2 e^{\lambda_j(r)} = 0$$

Deste modo, tomando-se a derivada em ambos os membros da equação acima obtemos

$$2\lambda_j(r) \frac{d\lambda_j(r)}{dr} + m \left( \lambda_j(r) + r \frac{d\lambda_j(r)}{dr} \right) + n \left( 2r e^{-\lambda_j(r)} - r^2 e^{-\lambda_j(r)} \frac{d\lambda_j(r)}{dr} \right) = 0$$

Isto é

$$\left( 2\lambda_j(r) + m r - n r^2 e^{\lambda_j(r)} \right) \frac{d}{dr} \lambda_j(r) = -m \lambda_j(r) - 2n r e^{-\lambda_j(r)}$$

Donde

$$\frac{d}{dr} \lambda_j(r) = \frac{-m\lambda_j(r) - 2nr e^{-\lambda_j(r)}}{2\lambda_j(r) + mr - nr^2 e^{\lambda_j(r)}}$$

Por hipótese, sabemos que  $\lambda_j(r_j) = \alpha_j(r_j) + i\omega_j(r_j) = i\omega_0$ .

Desta forma, obtemos

$$\left. \frac{d}{dr} \lambda_j(r) \right|_{r=r_j} = \frac{-mi\omega_0 - 2nr_0 \cos \omega_0 - 2imr_0 \sin \omega_0}{2i\omega_0 + mr_0 - nr_0^2 \cos \omega_0 + imr_0^2 \sin \omega_0}$$

Do lema anterior, segue que:

$$\left. \frac{d}{dr} \lambda_j(r) \right|_{r=r_j} - \left. \frac{d}{dr} \lambda(r) \right|_{r=r_0}$$

Portanto, segue que

$$\left. \frac{d}{dr} \lambda_j(r) \right|_{r=r_j} = \frac{3m\omega_0^2 r_0 - \omega_0^4 - 2m^2 \omega_0^2 r_0^2}{\Delta} + i \frac{2\omega_0^3 - mr_0 \omega_0^3 + 2m\omega_0 r_0^2}{\Delta}$$

onde  $\Delta = r_0[(mr_0 - \omega_0^2)^2 + (2\omega_0 + mr_0 \omega_0)^2]$ .

Tendo em vista que  $\left. \frac{d}{dr} \lambda_j(r) \right|_{r=r_j} = \left. \frac{d}{dr} \alpha_j(r) \right|_{r=r_j} + i \left. \frac{d}{dr} \omega_j(r) \right|_{r=r_j}$  segue que

$$\left. \frac{d}{dr} \alpha_j(r) \right|_{r=r_j} = \frac{3m\omega_0^2 r_0 - \omega_0^4 - 2m^2 \omega_0^2 r_0^2}{\Delta} > 0$$

■

Agora, daremos um resultado importante a respeito das raízes da equação característica (2.3).

**Lema 2.3.** *Para  $r = r_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , a equação característica (2.3) tem um único par de raízes imaginárias puras e  $2j$  raízes com parte real positiva enquanto todas as outras raízes tem parte real estritamente negativa.*

*Demonstração:*

Para esta demonstração utilizaremos o primeiro princípio de indução finita sobre  $j$ .

Com efeito, note que para  $j = 0$ , ou seja, quando  $r = r_0$ , a equação característica (2.3) tem um único par de raízes imaginárias puras que são  $z_1 = i\omega_0$  e  $z_2 = -i\omega_0$ , enquanto as demais raízes desta equação possuem parte real negativa, como provado no Lema 2.1.

Suponha agora que o lema seja válido para  $k \in \mathbb{Z}$ , ou seja, que para  $r = r_k$  a equação (2.3) tem um único par de raízes imaginárias puras,  $2k$  raízes com parte real positiva enquanto todas

as outras raízes tem parte real estritamente negativa: e provemos que esta afirmação continua válida para  $k + 1$ .

De fato, observe que para  $r = r_{k-1}$  temos apenas um par de raízes imaginárias puras, como foi mostrado na demonstração do Lema 2.1, a saber:  $z_1 = i\omega_0$  e  $z_2 = -i\omega_0$ .

Além disso, para  $r = r_{k+1}$  temos, pelo Lema 2.2 que  $\left. \frac{d}{dr} \alpha_j(r) \right|_{r=r_{k+1}} > 0$ . Logo, teremos a partir de  $r = r_{k+1}$  uma raiz com parte real positiva, ou seja uma raiz no semi - plano:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

Desta forma, a soma das multiplicidades das raízes da equação (2.3) no semi plano  $A$  se alterou. Pelo Teorema 1.5, temos a existência de mais uma raiz da equação (2.3) com parte real positiva. Como as raízes desta equação vêm sempre aos pares, temos a existência de mais duas raízes a partir de  $r = r_{k+1}$  com respectivas partes reais positivas.

Como da hipótese de indução já tínhamos  $2k$  raízes com parte real positiva, passamos agora a ter  $2(k + 1)$  raízes com parte real positiva, duas raízes imaginárias puras e as demais raízes com parte real estritamente negativa. Isto completa a prova do lema. ■

Por fim, apresentaremos um resultado a respeito da estabilidade da solução nula da equação (2.2).

**Teorema 2.1.** *Para  $r \in (0, r_0)$ , a solução nula da equação (2.2) é assintoticamente estável. Para  $r > r_0$ , a solução nula da equação (2.2) é instável e para  $r$  suficientemente próximo a  $r_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), a equação (2.1) apresenta bifurcações de Hopf.*

*Demonstração*

Pelo Lema 2.1, todas as raízes da equação característica (2.3) têm respectivas partes reais estritamente negativas para  $r \in [0, r_0)$ . Desta maneira se  $r \in (0, r_0)$ , a solução nula da equação (2.2) é assintoticamente estável.

Por outro lado, para  $r > r_0$  algumas raízes da equação característica (2.3) passam a ter parte real estritamente positiva. Assim a solução nula da equação (2.2) é instável para  $r \in (r_0, +\infty)$ .

Por fim, para valores próximos de  $r_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) temos do Lema 2.3 a existência de um único par de raízes imaginárias puras da equação característica (2.3) não nulas. Ainda, do Lema 2.2 temos que  $\text{Re} \left( \left. \frac{d}{dr} \lambda_j(r) \right|_{r=r_j} \right) > 0$ .

Portanto, pelo Teorema de Bifurcação de Hopf, a equação (2.2) apresenta bifurcações de Hopf para  $r$  suficientemente próximo de  $r_j$  para  $j = 0, 1, 2, \dots$

■

---

O teorema acima mostra que quando o retardo  $r$  está próximo de  $r_j$  para  $j = 0, 1, 2, \dots$ , a equação (2.1) apresenta bifurcações de Hopf e, portanto, apresenta soluções periódicas de amplitude pequena.

## Capítulo 3

# Existência Global de Soluções Periódicas

Para estudarmos a existência global de soluções periódicas para a equação (2.2), retomemos o sistema associado a esta equação, isto é:

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = Y(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) = -rf(X(\tau))Y(\tau) - r^2g(X(\tau-1)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Até agora assumimos que  $f$  e  $g$  são funções de classe  $C^2$ ,  $f(0) = m$ ,  $\dot{g}(0) = n$  e  $g(0) = 0$ . Além disso assumiremos que:

1.  $m > n > 0$ ;
2. Existe uma constante  $A$  tal que  $A > \frac{\pi}{2} + \frac{n}{m^2}$  e para todo  $x \in [A, A] \setminus \{0\}$  temos as seguintes condições:
  - $f(-x) = f(x)$
  - $f(x) \geq m$
  - $xg(x) > 0$
  - $g(x) = -g(-x)$
  - $|g(x)| \leq n$
3.  $r_0 < r < \left(A - \frac{r^2n}{m^2}\right) \frac{m}{n}$ , onde  $r_0$  é definido por (2.8).

Para o sistema (3.1) o espaço de fases definido é o espaço de fases usual, isto é:

$$C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2) = \{\varphi : \varphi : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ contínua}\}$$

A norma de cada  $\varphi \in C$  é definida por:

$$\|\varphi\| = \sup_{-1 \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$$

Observe ainda que, com esta norma,  $C$  é um espaço de Banach.

Para estudarmos a existência global de soluções periódicas utilizaremos como ferramenta o Teorema de Nussbaum (Teorema 1.7). Para isto considere o seguinte conjunto no plano  $xOy$ :

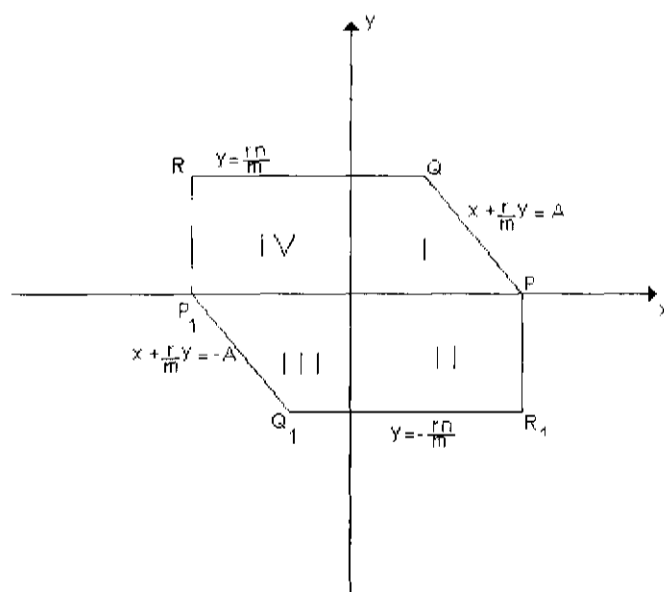
$$G = \left\{ (x, y) : |y| \leq \frac{rn}{m}, |x| \leq A, \left| x + \frac{r}{m}y \right| \leq A \right\}$$

Daremos agora alguns resultados que nos ajudarão a estabelecer condições para a existência global de soluções periódicas para a equação (2.2).

**Lema 3.1.** *Suponha que as condições 1, 2 e 3 sejam válidas. Suponha que exista um  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $z(\tau_0 + \theta) \in G$ , para  $\theta \in [-1, 0]$ , onde  $z(t) = (X(t), Y(t))$  é a solução do sistema (3.1). Então  $z(\tau + \theta) \in G$  para todo  $\tau \geq \tau_0$  e  $\theta \in [-1, 0]$ .*

*Demonstração :*

O conjunto  $G$  definido acima está representado na figura a seguir:



Notemos então que  $G$  é o polígono fechado  $PQR\overline{P_1}Q_1R_1P$ . Para demonstrarmos este lema, basta provarmos que todas as trajetórias da solução  $z(\tau)$  que passam em algum ponto da fronteira de  $G$  entram e permanecem no interior de  $G$ . Para isto, analisemos o comportamento da solução em cada um dos segmentos que constituem a fronteira de  $G$ .

1. Segmento  $\overline{RP_1}$

Se  $\tau_0$  é tal que  $z(\tau_0)$  está neste segmento então  $\dot{y}(\tau_0) \geq 0$ . De acordo com o sistema (3.1) sabemos que  $\dot{X}(\tau_0) = Y(\tau_0)$ . Portanto  $X(\tau)$  é não-decrescente em alguma vizinhança de  $\tau_0$  e, desta forma, a trajetória da solução deve entrar no interior de  $G$ .

2. Segmento  $R\overline{Q}$

Se  $\tau_0$  é tal que  $z(\tau_0)$  está neste segmento, então  $y(\tau_0) = \frac{rn}{m}$ . Pela condição 2, sabemos que  $f(x) \geq m$  e  $|g(x)| \leq n$  para todo  $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ . Desta forma, do sistema (3.1), segue que:

$$\dot{Y}(\tau_0) = -rf(X(\tau))Y(\tau) - r^2g(X(\tau-1)) \leq -mr^2\frac{n}{m} + r^2n = 0$$

Portanto  $\dot{Y}(\tau_0) < 0$ . Desta maneira a trajetória da solução deve entrar no interior de  $G$ .

3. Segmento  $\overline{QP}$

Note que as coordenadas do ponto  $Q$  são  $(x_0, \frac{rn}{m})$ . Este ponto é o ponto de interseção das retas  $y = \frac{rn}{m}$  e  $x + \frac{r}{m}y = A$ . Deste modo, observe que:

$$x_0 + \frac{r^2n}{m^2} = A$$

Donde segue que  $x_0 = A - \frac{r^2n}{m^2}$ .

Pela condição 1,  $n > 0$ . Assim, segue que  $0 < x_0 < a$ . Consideremos agora a trajetória da solução  $z(t) = (X(\tau), Y(\tau))$  na região I. Nesta região segue do Teorema do Valor Médio que:

$$|X(\tau) - X(\tau-1)| = |\dot{X}(\xi)|, \text{ onde } \tau-1 < \xi \leq \tau.$$

Do sistema (3.1) e da condição 3 segue que:

$$|X(\tau-1) - X(\tau)| = |Y(\xi)| < \frac{rn}{m} < \left(A - \frac{r^2n}{m^2}\right) \frac{m}{n} \frac{n}{m} = A - \frac{r^2n}{m^2} = x_0$$

Se existe  $\tau_1 \in \mathbb{R}$  tal que a trajetória  $z(t) = (X(\tau), Y(\tau))$  intercepta o segmento  $PQ$  em algum ponto  $z(\tau_1) = (X(\tau_1), Y(\tau_1))$  então  $X(\tau_1) > x_0$  e então

$$|X(\tau_1 - 1) - X(\tau_1)| < x_0$$

E daí,

$$-x_0 < X(\tau_1 - 1) - X(\tau_1) < x_0$$

E, portanto,

$$0 < X(\tau_1) - x_0 < X(\tau_1 - 1)$$

Pela condição 2 sabemos que  $xy(x) > 0$  para todo  $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ . Desta forma, obtemos que  $g(x(\tau_1 - 1)) > 0$ , pois  $0 < x(\tau_1 - 1) < a$ .

Além disso, seja  $l_1$  a inclinação do segmento  $PQ$ . Então:

$$l_1 = \frac{-\frac{rn}{m}}{A - x_0} = -\frac{rn}{m} \left( \frac{1}{A - A + \frac{x_0^2 n}{m^2}} \right) = -rm$$

Por outro lado, se a inclinação da trajetória  $z(t) = (X(\tau), Y(\tau))$  em  $\tau = \tau_1$  for  $l_2$ , então:

$$l_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\tau_1) - Y(\tau_1 - h)}{X(\tau_1) - X(\tau_1 - h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{Y(\tau_1) - Y(\tau_1 - h)}{h}}{\frac{X(\tau_1) - X(\tau_1 - h)}{h}} = \frac{\dot{Y}(\tau_1)}{\dot{X}(\tau_1)}$$

Pelo sistema (3.1) obtemos

$$l_2 = \frac{-rf(X(\tau_1))\dot{X}(\tau_1) - r^2g(X(\tau_1 - 1))}{\dot{X}(\tau_1)} = -rf(X(\tau_1)) - r^2\frac{g(X(\tau_1 - 1))}{Y(\tau_1)} < -rf(X(\tau_1))$$

Pela condição 2,  $f(X(\tau_1)) > m$ . Logo,  $l_2 < -rm$ , isto é,  $l_2 < l_1$ . Portanto a trajetória  $z(\tau)$  entra no interior de  $G$ .

#### 4. Segmento $\overline{PR_1}$

Se existe um  $\tau_0$  tal que  $z(\tau_0) = (X(\tau_0), Y(\tau_0))$  esteja neste segmento, então  $Y(\tau_0) < 0$ .

Do sistema (3.1) sabemos que  $\dot{X}(\tau_0) = Y(\tau_0)$ , e, então, segue que  $X(\tau)$  é decrescente neste segmento e, portanto, a trajetória da solução  $z(\tau)$  entra no interior de  $G$ .



5. Segmento  $\overline{R_1Q_1}$ 

Seja  $\tau_0$  tal que  $z(\tau_0)$  esteja neste segmento. Então  $Y(\tau_0) = -\frac{rn}{m}$ . Da condição 2 sabemos que  $f(x) \geq m$  e  $|g(x)| \leq n$  para todo  $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ . Desta forma, pelo sistema (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{Y}(\tau) &= -rf(X(\tau))Y(\tau) - r^2g(X(\tau-1)) \\ &= -rf(X(\tau))\left(-\frac{rn}{m}\right) - r^2g(X(\tau-1)) \geq rm\left(-\frac{rn}{m}\right) + r^2n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Desta maneira, segue que a função  $Y$  é não-decrescente, e segue que a trajetória da solução  $z(\tau)$  entra no interior de  $G$ .

6. Segmento  $\overline{Q_1P_1}$ 

Observe que  $Q_1 = \left(x_0, -\frac{rn}{m}\right)$  é o ponto de interseção das retas  $y = -\frac{rn}{m}$  e  $x + \frac{r}{m}y = -A$ . Portanto,  $x_0 + \frac{r}{m}\left(-\frac{rn}{m}\right) = -A$

Donde

$$x_0 = \frac{r^2n}{m^2} - A$$

Da condição 1 sabemos que  $n > 0$ . Assim, segue que  $x_0 > -A$ .

Consideremos agora a trajetória da solução  $z(\tau)$  na região III. Pelo Teorema do Valor Médio temos:

$$|X(\tau) - X(\tau-1)| = |Y(\xi)|, \quad t-1 < \xi \leq t.$$

Deste modo, pela condição 3, segue que:

$$|X(\tau) - X(\tau-1)| = |Y(\xi)| < \frac{rn}{m} < \left(A - \frac{r^2n}{m^2}\right) \frac{m}{n} \frac{n}{m} = A - \frac{r^2n}{m^2} = x_0$$

Se existir  $\tau_1$  tal que a trajetória da solução  $z(\tau)$  intercepta o segmento  $P_1Q_1$  em algum ponto  $z(\tau_1) = (X(\tau_1), Y(\tau_1))$  então  $X(\tau_1) < x_0$  e:

$$|X(\tau_1) - X(\tau_1-1)| < -x_0$$

Daí,  $X(\tau_1-1) < X(\tau_1) - x_0 < 0$ .

Pela condição 2 sabemos que  $xg(x) > 0$  para todo  $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ .

Como  $-A < X(\tau_1 - 1) < 0$ , segue que  $g(X(\tau_1 - 1)) < 0$ .

Seja então  $l_1$  a inclinação do segmento  $\overline{P_1Q_1}$ . Então

$$l_1 = \frac{\frac{rm}{x_0 + A} - \frac{-rm}{x_0 - x_0 + \frac{r^2p}{m^2}}}{\frac{r^2p}{m^2}} = -rm$$

Porém, se a inclinação da trajetória da solução  $z(\tau)$  em  $\tau = \tau_1$  for  $l_2$  temos, do sistema (3.1):

$$l_2 = \frac{Y'(\tau_1)}{X'(\tau_1)} = -rf(X(\tau_1)) - \frac{r^2g(X(\tau_1 - 1))}{X(\tau_1)} < -rf(X(\tau_1)) < -rm$$

Ou seja,

$$l_2 < l_1$$

Desta forma, a trajetória da solução  $z(\tau)$  entra no interior de  $G$ .

Isto completa a prova do lema.

■

Consideremos agora o seguinte cone:

$$K = \left\{ \varphi = (q, p) : (q, p) \in C, 0 \leq p \leq \frac{rp}{m}, q(-1) = 0, q(0) + \frac{rp}{m} \leq A, q \text{ é não-decrescente} \right\}$$

Considere ainda  $z(\tau) = (X(\tau), Y(\tau))$  a solução do sistema (3.1) com dado inicial  $\varphi \in K \setminus \{0\}$ .

**Lema 3.2.** *Se as condições 1, 2 e 3 são válidas, então:*

1. *Existe uma função contínua  $T_1(\varphi) : K \setminus \{0\} \rightarrow (1, +\infty)$  tal que:*

$$z^{T_1(\varphi)}(\varphi) \in K$$

onde:

- $-K = \{-\varphi : \varphi \in K\}$

- $z^{T_1(\varphi)}(\varphi)$  é a solução com dado inicial  $\varphi \in K \setminus \{0\}$  e:

$$z^{T_1(\varphi)}(\varphi) = (X_{T_1(\varphi)}, Y(T_1(\varphi)))$$

2. Existe uma função contínua  $T_2(\varphi) : K \setminus \{0\} \rightarrow (1, +\infty)$  tal que:

$$z^{T_2(\varphi)}(\varphi) \in K$$

3. A solução  $z(\tau)$  é oscilante, isto é,  $X(\tau)$  e  $Y(\tau)$  têm um número infinito de zeros.

*Demonstração:*

Vamos demonstrar cada um dos itens:

1. Consideremos novamente o conjunto  $G$ , visualizado na figura da página 24.

Seja  $t = 0$  o tempo inicial da trajetória da solução  $z(\tau)$ . Então sabemos que  $z_0(\theta) = \varphi(\theta)$ , para todo  $\theta \in [-1, 0]$ . Além disso, como  $\varphi \in K \setminus \{0\}$ , segue  $\varphi(\theta) = (q(\theta), p)$ ,  $\theta \in [-1, 0]$ .

Mostremos então que  $p \neq 0$ . Com efeito, se  $p = 0$ , então do sistema (3.1) temos:

$$\dot{q}(\tau) = 0$$

Logo  $q$  é uma função constante. Como  $q(-1) = 0$ , segue que  $q$  é a função nula e, portanto,  $\varphi$  é a função nula, o que contradiz o fato de  $\varphi \in K \setminus \{0\}$ .

Deste modo,  $\varphi(-1) = (0, p)$ , donde,  $X(-1) = 0$ ,  $Y(-1) = p$  e  $z(-1) = (0, p) \neq (0, 0)$ .

Por outro lado, como  $q$  é não-decrescente e  $0 \leq p \leq \frac{rn}{m}$  segue que  $z(0)$  está na região I.

Além disso, como  $z(\theta) \in G$  para  $\theta \in [-1, 0]$ , segue do Lema 3.1 que  $z(\tau + \theta) \in G$  para todo  $\tau \geq 0$  e  $\theta \in [-1, 0]$ .

Analisemos agora a trajetória da solução  $z(\tau)$ . Quando  $z(\tau)$  está na região I temos  $Y(\tau) > 0$ ,  $X(\tau - 1) > 0$ . Pela condição 2 segue que  $g(X(\tau - 1)) > 0$ . Ainda, pelo sistema (3.1) temos:

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = Y(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) = -rf(X(\tau))Y(\tau) - r^2g(X(\tau - 1)) \end{cases}$$

Portanto,  $\dot{X}(\tau) > 0$  e  $\dot{Y}(\tau) < -r^2g(X(\tau - 1)) < 0$

Desta forma  $X(\tau)$  é estritamente crescente e  $Y(\tau)$  é estritamente decrescente nesta região. Portanto, existe um ponto  $\tau_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $z(\tau_1) = (X(\tau_1), 0)$  e a trajetória da solução  $z(\tau)$  entra na região II para  $\tau > \tau_1$ .

Por outro lado, observe que  $X(\tau_1) > 0$  e  $X(\tau_1 - 1) > 0$ . Desta forma, pelo sistema (3.1) segue que

$$\dot{X}(\tau_1) = 0$$

e

$$\dot{Y}(\tau_1) = -rf(X(\tau_1))Y(\tau_1) - r^2g(X(\tau_1 - 1)) < -r^2g(X(\tau_1 - 1)) < 0$$

Portanto, a tangente à trajetória da solução  $z(\tau)$  em  $\tau = \tau_1$  é perpendicular ao eixo  $x$  e, pela continuidade de  $\dot{Y}(\tau)$ , segue que existe  $\delta > 0$  tal que  $\dot{Y}(\tau) < 0$  para  $\tau \in (\tau_1, \tau_1 + \delta]$ .

Quando a trajetória da solução  $z(\tau)$  está na região II temos  $Y(\tau) < 0$ . Desta forma, pelo sistema (3.1) sabemos que  $\dot{X}(\tau) < 0$ . Portanto  $X(\tau)$  é estritamente decrescente nesta região.

Agora observemos que a trajetória da solução  $z(\tau)$  não pode retornar à região I. Com efeito, se isto acontecesse então existiria um  $\tau' > \tau_1$  tal que  $Y(\tau') = 0$ ,  $\dot{Y}(\tau') > 0$  e  $X(\tau' - 1) > 0$ .

$$\text{Porém } \dot{Y}(\tau') = -rf(X(\tau'))Y(\tau') - r^2g(X(\tau' - 1)) = -r^2g(X(\tau' - 1)) < 0.$$

E, portanto, chegamos a um absurdo.

Desta maneira, a trajetória da solução  $z(\tau)$  não retorna à região I. Mostremos então que esta trajetória se direciona para a região III. Para isto analisemos alguns casos:

a) Para todo  $\tau$  tal que  $z(\tau)$  está na região II, temos  $\dot{Y}(\tau) < 0$ .

Neste caso,  $X(\tau)$  e  $Y(\tau)$  são estritamente decrescentes enquanto  $z(\tau)$  estiver na região II. Além disso, pelo Lema 3.1, a trajetória da solução  $z(\tau)$  está contida em  $G$  para todo  $\tau \in [-1, 0]$ . Desta maneira existe  $\tau_2 > \tau_1$  tal que  $z(\tau_2) = (0, y(\tau_2))$ ,  $y(\tau_2) < 0$  e para todo  $\tau > \tau_2$ ,  $\tau$  em uma vizinhança suficientemente próxima de  $\tau_2$  temos a trajetória da solução  $z(\tau)$  na região III.

b) Existe  $\tau'$  tal que  $\dot{Y}(\tau') \geq 0$  e  $z(\tau')$  está na região II.

Sabemos que a trajetória da solução  $z(\tau)$  não retorna à região II. Deste modo, para assegurarmos que a trajetória da solução  $z(\tau)$  passa para a região III, devemos nos considerar somente com a possibilidade de existir  $\tau_2 > \tau_1$  tal que  $z(\tau_2) = (0, 0)$  e a solução  $z(\tau)$  estar na região II para  $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ . Isto deve ser considerado pois neste caso pode haver a possibilidade de a trajetória da solução ir direto para a região IV. Com efeito, se existir tal  $\tau_2$  então do sistema (3.1) sabemos que  $\dot{X}(\tau_2) = 0$

$$\text{e } \dot{Y}(\tau_2) = -rf(X(\tau_2))Y(\tau_2) - r^2g(X(\tau_2 - 1)) = -r^2g(X(\tau_2 - 1)) < 0.$$

Desta forma, observe que a tangente à trajetória da solução  $z(\tau)$  em  $\tau = \tau_2$  é perpendicular ao eixo  $x$ .

Pela continuidade de  $Y$  existe  $\delta > 0$  tal que  $Y(\tau) < 0$  para  $\tau \in (\tau_2 - \delta, \tau_2)$ . Desta maneira, segue que  $\dot{X}(\tau) \leq 0$  para  $\tau \in (\tau_2 - \delta, \tau_2)$ .

Por outro lado  $\dot{Y}(\tau_2) < 0$ . Logo, pela continuidade de  $Y$  existem  $\delta'$  e  $\tau_3$  tal que  $\tau_3 \in (\tau_2, \tau_2 + \delta')$  e  $Y(\tau_3) < 0$ . Desta maneira,  $\dot{X}(\tau_3) < 0$  e a trajetória da solução  $z(\tau)$  entra na região III a partir de  $\tau_3$ .

Por outro lado, como  $\dot{X}(\tau) = Y(\tau)$  e  $Y(\tau) < 0$  para todo  $\tau$  tal que  $z(\tau)$  esteja na região III, segue que  $x$  é decrescente nesta região e, portanto, a trajetória da solução  $z(\tau)$  não retorna à região II nem sai do conjunto  $G$ .

Além disso, para  $\tau > \tau_3 + 1$  temos que  $X(\tau - 1) < 0$ . Desta forma, pelo sistema (3.1) temos que

$$\dot{Y}(\tau) = -rf(X(\tau))Y(\tau) - r^2g(X(\tau - 1)) > -r^2g(X(\tau - 1)) > 0, \text{ para } \tau > \tau_3 + 1$$

Portanto, para  $\tau > \tau_3 + 1$  a função  $Y$  é estritamente crescente. Deste modo existe  $\tau_4 > \tau_3$  tal que  $z(\tau_4) = (X(\tau_4), 0)$  e  $z(\tau)$  está na região III para  $\tau \in (\tau_3, \tau_4)$ .

Por fim, existe  $\tau_5 \in (\tau_3, \tau_4)$  tal que  $X(\tau_5 - 1) = 0$  e  $Y(\tau_5) < 0$ .

Definimos então  $T_1(\varphi) = \tau_5$ . Como  $\tau_5 - 1 > 0$  segue que  $T_1(\varphi) > 1$ . Pelo teorema da dependência contínua segue ainda que  $T_1(\varphi)$  é uma função contínua de  $\varphi$ .

Mostremos agora que  $z^{T_1(\varphi)}(\varphi) \in \cdot K$ . De fato:

i) Para todo  $\theta \in [-1, 0]$  temos:

$$z^{T_1(\varphi)}(\varphi)(\theta) = (X(\tau_5 - \theta), Y(\tau_5))$$

Ou seja  $z^{T_1(\varphi)}(\varphi)$  é uma função contínua de  $\theta$  com domínio  $[-1, 0]$  e contradomínio  $\mathbb{R}^2$ . Desta forma  $z^{T_1(\varphi)}(\varphi) \in C$ .

ii) Observe que:

$$-\frac{rn}{m} \leq Y(\tau_5) \leq 0$$

Ou, equivalentemente:

$$0 \leq -Y(\tau_5) \leq \frac{rn}{m}$$

iii)  $X(\tau_5 - 1) = 0$

iv)

$$X(\tau_5) + \frac{Y(\tau_5)}{m} > -A$$

ou, equivalentemente,

$$-\left(X(\tau_5) + \frac{Y(\tau_5)}{m}\right) \leq A$$

v) A função  $X(\tau_5 + \theta)$  é não - crescente para  $\theta \in [-1, 0]$ .

Portanto  $z^{T_1(\varphi)}(\varphi) \in K$ .

2. Seja  $z(\tau)$  a solução da equação (2.2) com dado inicial  $\varphi$ , onde  $\varphi \in K$ . Denotemos esta solução por  $z(\varphi)$ . Para demonstrarmos este item mostraremos inicialmente que  $-z(\varphi)$  também é solução da equação (2.1). Com efeito, observe que se  $z(\varphi) = (X(\tau), Y(\tau))$ , então  $-z(\varphi) = (-X(\tau), -Y(\tau))$ .

Então, tendo em vista que  $z(\varphi)$  é solução segue que  $\dot{X}(\tau) = Y(\tau)$ .

Ou seja  $-\dot{X}(\tau) = -Y(\tau)$ .

Ainda segue que  $\dot{Y}(\tau) = -rf(X(\tau))Y(\tau) + r^2g(X(\tau - 1))$ .

Donde  $-\dot{Y}(\tau) = rf(X(\tau))Y(\tau) + r^2g(X(\tau - 1))$ .

Pela condição 2 sabemos que  $f(x) = f(-x)$  e  $g(x) = -g(-x)$  para todo  $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ .

Deste modo, segue que

$$-\dot{Y}(\tau) = -f(-X(\tau))[-Y(\tau)] - g(-X(\tau - 1))$$

Desta forma,  $-z(\varphi)$  satisfaz o sistema (3.1). Como o dado inicial é o mesmo que o da solução  $z(\varphi)$  segue, pela unicidade da solução, que  $-z(\varphi)$  também é solução da equação (2.2).

Pelo teorema da unicidade segue ainda que  $z(-\varphi) = -z(\varphi)$ .

Desta maneira, pelo item anterior segue que existe uma função

$$T_1(\varphi) : K \setminus \{0\} \rightarrow (t, +\infty)$$

tal que :

$$z^{T_1(\varphi)}(\varphi) \in -K$$

Denotemos  $z^{T_1(\varphi)}(\varphi) = \varphi'$ . Então  $-\varphi' \in K$ . Portanto, existe uma função

$$T_2(-\varphi') : K \setminus \{0\} \rightarrow (1, +\infty)$$

tal que:

$$z^{T_2(-\varphi')}(-\varphi') \in -K$$

Porém:

$$z^{T_2(-\varphi')}(-\varphi') = -z^{T_2(\varphi')}(\varphi')$$

Observe ainda que  $-z^{T_2(-\varphi')}(\varphi')$  também é solução da equação (2.2) e  $z^{T_2(-\varphi')}(\varphi') \in K$ .

Por fim, como  $\varphi'$  depende continuamente de  $\varphi$ , segue que  $T_2$  é uma função contínua de  $\varphi$ .

3. Seja  $z(\varphi)$  a solução da equação (2.2) com dado inicial  $\varphi$ , onde  $\varphi \in K \setminus \{0\}$ . Então, ao analisarmos a trajetória da solução vimos no item 1 que existem  $t$  e  $t'$  positivos tais que  $X(\tau) = 0$  e  $Y(\tau') = 0$ .

Além disso, vimos que existe uma função  $T_1(\varphi) : K \setminus \{0\} \rightarrow (1, +\infty)$  tal que:

$$z^{T_1(\varphi)}(\varphi) \in -K$$

Por outro lado, pelo item 2, sabemos que existe uma função  $T_2(\varphi) : K \setminus \{0\} \rightarrow (t, +\infty)$

tal que:

$$z^{T_2(\varphi)}(\varphi) \in K$$

Observe ainda que  $T_1(\varphi) < T_2(\varphi)$ .

Além disso, como  $z^{T_2(\varphi)} \in K$  segue que existe uma função  $T_3(\varphi) : K \setminus \{0\} \rightarrow (1, +\infty)$  tal que  $z^{T_3(\varphi)} \in -K$ .

Analisando a trajetória da solução  $z(\tau)$  sabemos que existem  $\tau_1$  e  $\tau'_1$  tais que  $X(\tau_1) = 0$  e  $Y(\tau'_1) = 0$ .

Desta forma, repetindo o processo descrito acima obteremos infinitos zeros da função  $X$  e infinitos zeros da função  $Y$ . Portanto a solução  $z(\tau)$  é oscilante. Isto conclui a prova do lema.

■

Agora, vamos definir um operador  $B : K \setminus \{0\} \rightarrow K$  da seguinte maneira:

$$B(\varphi) = -z^{T_3(\varphi)}$$

onde  $z(\varphi)$  é a solução da equação (2.2) satisfazendo  $z_0 = \varphi$  e  $T_1(\varphi)$  é a função definida no lema anterior.

**Lema 3.3.** *A aplicação  $B : K \setminus \{0\} \rightarrow K$  definida acima é completamente contínua, ou seja,  $B$  é contínua e leva subconjuntos limitados de  $K \setminus \{0\}$  sobre subconjuntos relativamente compactos de  $K$ .*

*Demonstração:*

Como  $X_\tau(\varphi)$  é solução da equação (2.2) segue que  $X$  é contínua em  $\tau$ . Além disso, pelo teorema da dependência contínua sabemos que  $T_1(\varphi)$  é contínua em  $\varphi$ . Desta forma, segue que  $B$  é contínua em  $\varphi$ .

Seja  $K_1$  um subconjunto limitado de  $K \setminus \{0\}$ . Então segue que  $BK_1$  é limitado pois  $BK_1$  é um subconjunto de  $K$ .

Seja  $z^{T_3(\varphi)}$  elemento de  $BK_1$ . Então para todo  $\theta \in [-1, 0]$  temos

$$z^{T_3(\varphi)}(\theta) = (X(T(\varphi) + \theta), Y(T(\varphi)))$$

Desta maneira observe que

$$|z^{T_3(\varphi)}| = |(X(T(\varphi) + \theta), Y(T(\varphi)))| \leq |X(T(\varphi) + \theta)| \cdot |Y(T(\varphi))| \leq A \cdot \frac{rn}{m}$$

Portanto



$$|z^{T(\varphi)}| \leq A \cdot \frac{r^n}{m}, \quad \theta \in [-1, 0]$$

Desta forma  $BK_1$  é uniformemente limitado.

Sejam agora  $z^{T(\varphi_1)}$  e  $z^{T(\varphi_2)}$  elementos de  $BK_1$ . Então para quaisquer  $\tau_1$  e  $\tau_2$  no intervalo  $[1, 0]$ , com  $\tau_1 < \tau_2$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$  então:

$$|z^{T(\varphi_1)}(\tau_1) - z^{T(\varphi_2)}(\tau_2)| = |(X(T(\varphi_1) + \tau_1) - X(T(\varphi_2) + \tau_2), Y(T(\varphi_1)) - Y(T(\varphi_2)))|$$

Ou seja

$$|z^{T(\varphi_1)}(\tau_1) - z^{T(\varphi_2)}(\tau_2)| \leq |X(T(\varphi_1) + \tau_1) - X(T(\varphi_2) + \tau_2)| + |Y(T(\varphi_1)) - Y(T(\varphi_2))|$$

Pelo Teorema do Valor Médio segue que existem  $\xi_1$  e  $\xi_2$  no intervalo  $[\tau_1, \tau_2]$  tais que

$$|X(T(\varphi_1) + \tau_1) - X(T(\varphi_2) + \tau_2)| \leq |\dot{X}(\xi_1)||\tau_1 - \tau_2|$$

e

$$|Y(T(\varphi_1)) - Y(T(\varphi_2))| \leq |\dot{Y}(\xi_2)||\tau_1 - \tau_2|$$

Logo

$$|X(T(\varphi_1) + \tau_1) - X(T(\varphi_2) + \tau_2)| + |Y(T(\varphi_1)) - Y(T(\varphi_2))| \leq |\dot{X}(\xi_1)||\tau_1 - \tau_2| + |\dot{Y}(\xi_2)||\tau_1 - \tau_2|$$

Por fim, observe que

$$|\dot{X}(\xi)| \leq \frac{r^n}{m}$$

e

$$|\dot{Y}(\tau)| = |r f(X(\tau))g(\tau) - r^2 g(X(\tau - 1))| \leq |r f(X(\tau))g(\tau)| + |r^2 g(X(\tau - 1))|$$

Segue então que  $|\dot{Y}(\tau)| \leq r^2 \left( \frac{n}{m} \max_{x \in [1, a]} |f(x)| + a \right)$ .

Portanto,

$$|z^{T(\varphi_1)}(\tau_1) - z^{T(\varphi_2)}(\tau_2)| \leq |\dot{X}(\xi_1)||\tau_1 - \tau_2| + |\dot{Y}(\xi_2)||\tau_1 - \tau_2|$$

On seja,

$$|z^{T(\tau_1)}(\tau_1) - z^{T(\tau_2)}(\tau_2)| \leq \left( \frac{rn}{m} + r^2 \left( \frac{n}{m} \max_{x \in [-A, A]} |f(x)| \cdot n \right) \right) |\tau_1 - \tau_2| < \varepsilon$$

Deste modo, segue que  $BK_1$  é equicontínuo. Assim, pelo Teorema de Arzelá-Áscoli (Teorema 1.6) sabemos que  $BK_1$  é relativamente compacto. Isto prova que o operador  $B$  é completamente contínuo.

■

**Lema 3.4.** *Seja  $r > r_0$ . Então:*

$$\inf \{ |\pi_\lambda \varphi|, \varphi \in K, |\tau| = 1 \} > 0$$

onde  $\lambda$  é autovalor da equação (2.3),  $\text{Re}(\lambda) > 0$ ,  $r_0$  é definido por (2.8),  $\pi_\lambda \varphi$  é a projeção obtida relativamente à decomposição de  $\mathbb{C}$  citada no Teorema 1.9 (página 9) e  $r_0$  é o primeiro valor onde encontramos bifurcação de Hopf para a equação (2.2).

*Demonstração:*

Retomemos o sistema (3.1), isto é

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = Y(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) = -rf(X(\tau)) - r^2g(X(\tau-1)) \end{cases}$$

Então, a parte linear das equações deste sistema é dada por

$$\begin{cases} \dot{X}(\tau) = Y(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) = -rmY(\tau) - r^2nX(\tau-1) \end{cases}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(\tau) \\ \dot{Y}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -rm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\tau-1) \\ Y(\tau-1) \end{pmatrix}$$

Denotemos  $V(\tau) = \begin{pmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{pmatrix}$ . Deste modo temos a equação matricial

$$\dot{V}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -rm \end{pmatrix} V(\tau) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2n & 0 \end{pmatrix} V(\tau - 1) \quad (3.3)$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\dot{V}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -rm \end{pmatrix} V_\tau(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2n & 0 \end{pmatrix} V_\tau(-1)$$

Observe que neste caso temos uma equação diferencial funcional autônoma da forma:

$$\dot{V}(\tau) = L(V_\tau)$$

onde:

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -rm \end{pmatrix} \phi(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2n & 0 \end{pmatrix} \phi(-1)$$

e

$$\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \phi \in C$$

Além disso,  $L$  é um operador linear contínuo que tem como domínio  $C$  e contradomínio  $\mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema de representação de Riesz (Teorema 1.8) segue que existe uma matriz  $2 \times 2$   $\eta(\theta)$ , com  $\theta \in [-1, 0]$  cujos elementos são de variação limitada tal que:

$$L(\phi) = \int_{-1}^0 [d\eta(\theta)] \phi(\theta), \quad \phi \in C$$

Resolvendo a integral de Stieltjes acima vemos que

$$\eta(-1) = 0$$

$$\eta(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2n & 0 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq \theta \leq 0$$

$$\eta(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2n & -rm \end{pmatrix}$$

Considere agora  $H(\tau) = \begin{pmatrix} U(\tau) \\ W(\tau) \end{pmatrix}$ . Então, a equação formal adjunta da equação matricial (3.3) é

$$\dot{H}(\tau) = -H(\tau) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & rm \end{pmatrix} - H(\tau-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2n & 0 \end{pmatrix}$$

Reescrevendo esta equação em forma de sistema obtemos

$$\begin{cases} \dot{U}(\tau) = r^2nW(\tau+1) \\ \dot{W}(\tau) = U(\tau) + rmW(\tau) \end{cases} \quad (3.4)$$

Sejam agora  $\varphi = (\phi, a)$  e  $\Psi = (b, \xi)$ , com  $\phi \in C$ ,  $\xi \in C^*$ , onde  $C^* = C'([0, 1])$  e  $a$  e  $b$  reais quaisquer. Então a forma bilinear associada à equação (2.2) é dada por

$$(\Psi, \varphi) = \Psi(0)\varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \Psi(\epsilon - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\epsilon) d\epsilon$$

Como  $\eta(\theta)$  é uma função matricial  $2 \times 2$  para  $\theta \in [-1, 0]$ , podemos considerar

$$d\eta(\theta) = \begin{pmatrix} d\eta_{11}(\theta) & d\eta_{12}(\theta) \\ d\eta_{21}(\theta) & d\eta_{22}(\theta) \end{pmatrix}$$

Desta maneira a forma bilinear associada à equação (2.2) é:

$$(\Psi, \varphi) = (b, \xi(0))(\phi(0), a) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta (b, \xi(\epsilon - \theta)) \begin{pmatrix} d\eta_{11}(\theta) & d\eta_{12}(\theta) \\ d\eta_{21}(\theta) & d\eta_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(\epsilon) \\ a \end{pmatrix} d\epsilon$$

Ou seja,

$$(\Psi, \varphi) = b\phi(0) + a\xi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta (bd\eta_{11}(\theta) + \xi(\epsilon - \theta)d\eta_{21}(\theta), bd\eta_{12}(\theta) + \xi(\epsilon - \theta)d\eta_{22}(\theta)) \begin{pmatrix} \phi(\epsilon) \\ a \end{pmatrix} d\epsilon$$

Donde,

$$(\Psi, \varphi) = b\phi(0) + a\xi(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta [bd\eta_{11}(\theta)\phi(\epsilon) + \phi(\epsilon)\xi(\epsilon - \theta)d\eta_{21}(\theta) + bad\eta_{12}(\theta) + a\xi(\epsilon - \theta)d\eta_{22}(\theta)] d\epsilon$$

Calculando a integral de Stieltjes acima concluímos que

$$(\Psi, \varphi) = b\phi(0) + a\xi(0) + r^2n \int_0^{-1} \phi(\epsilon)\xi(\epsilon+1)d\epsilon$$

Fazendo  $\theta = \epsilon$  concluímos, então que a forma bilinear associada à equação (2.2) é

$$(\Psi, \varphi) = b\phi(0) + a\xi(0) - r^2n \int_{-1}^0 \xi(\theta+1)\phi(\theta)d\theta$$

Consideremos agora uma sequência  $(\varphi_s) = (\phi_s, u_s)_{s \in \mathbb{N}} \in K \cap \partial B(1)$  tal que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \pi_\lambda \varphi_s = 0$ , onde  $B(1)$  é a bola aberta centrada na origem de raio 1. Sejam ainda  $A$  o gerador infinitesimal associado ao operador solução da equação (2.2) e  $A^*$  o operador formal adjunto de  $A$ . Então, sabemos que  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\alpha, \varphi_s) = 0$  para todo  $\alpha \in M_\lambda(A^*)$ . Este fato está demonstrado em [12](Seção 7.3, Lema 3.2).

Porém, todo elemento de  $M_\lambda(A^*)$  é da forma  $\Psi(\tau) = ve^{-\lambda\tau}$ , onde  $v = (u, w) \in \mathbb{R}^2$  e  $\Psi(\tau)$  é solução do sistema adjunto (3.4).

Sendo assim, determinemos uma base para as soluções deste sistema. Se  $\Psi(\tau) = ve^{-\lambda\tau}$ , com  $v = (u, w)$  então do sistema (3.4) temos

$$\begin{cases} \lambda ue^{-\lambda\tau} = r^2 n w e^{-\lambda(\tau-1)} \\ -\lambda w e^{-\lambda\tau} = -ue^{-\lambda\tau} + m r w e^{-\lambda\tau} \end{cases} \quad (3.5)$$

Da segunda equação do sistema (3.5) obtemos  $-\lambda w = -u + m r w$ .

Donde  $u = (\lambda + m r)w$ .

Substituindo na primeira equação de (3.5) temos

$$-\lambda(\lambda + m r)w e^{-\lambda\tau} = r^2 n w e^{-\lambda\tau} e^\lambda$$

E, portanto,  $(\lambda^2 + m r \lambda - r^2 n)w = 0$ .

Se supusermos  $w \neq 0$  então chegamos à equação  $\lambda^2 + m r \lambda - r^2 n = 0$ .

E, logo,  $\lambda$  é um autovalor da equação (2.3). Sendo assim podemos escolher como base do conjunto solução do sistema adjunto (3.4),  $\Psi_j(\tau) = v_j e^{-\lambda_j \tau}$ , onde  $v_j = (\lambda_j + m r, 1)$  e  $\lambda_j$  é autovalor da equação (2.3) para  $j = 1, 2$ .

Analisemos agora alguns casos:

- 1) Suponha que a equação (2.3) possua um autovalor complexo, digamos  $\lambda = \gamma + i\sigma$ . Então, por hipótese  $\gamma > 0$  e, do Lema 2.1 sabemos que  $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ . Além disso, podemos considerar  $v = \alpha + i\beta$  onde  $\alpha$  e  $\beta$  são dois vetores em  $\mathbb{R}^2$ . Deste modo temos:

$$(\Psi, \varphi_s) = \Psi(0)\varphi_s(0) - r^2 n \int_1^0 e^{(-\gamma-i\sigma)(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta$$

Ou seja,

$$(\Psi, \varphi_s) = \alpha \varphi_s(0) + i\beta \varphi_s(0) - r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta+1)} (\cos(\sigma(\theta+1)) - i \sin(\sigma(\theta+1))) \phi_s(\theta) d\theta$$

Isto é,

$$\begin{aligned} (\Psi, \varphi_s) &= \alpha\varphi_s(0) + i\beta\varphi_s(0) - r^2n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta+1)} \cos(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta \\ &\quad - ir^2n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta-1)} \operatorname{sen}(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} (\Psi, \varphi_s) &= \left[ \alpha\varphi_s(0) - r^2n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta+1)} \cos(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta \right] \\ &\quad + i \left[ \beta\varphi_s(0) + r^2n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta-1)} \operatorname{sen}(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta \right] \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\operatorname{Re}(\Psi, \varphi_s) = \alpha\varphi_s(0) - r^2n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta+1)} \cos(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta$$

e

$$\operatorname{Im}(\Psi, \varphi_s) = \beta\varphi_s(0) + r^2n \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta-1)} \operatorname{sen}(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta$$

Observe que,  $-1 \leq \theta \leq 0$  e  $0 \leq \theta+1 \leq 1$ .

E, logo,  $0 \leq \sigma(\theta+1) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Assim,  $0 \leq \operatorname{sen}(\sigma(\theta+1)) \leq 1$

Note ainda que  $v = (\lambda + rm, 1)$ .

Ou seja,  $v = (\gamma + i\sigma + rm, 1) = (\gamma + rm, 1) + i(\sigma, 0)$ .

E, daí,  $\beta\phi_s(0) = (\sigma, 0) \cdot (\phi_s(0), a_s) = \sigma\phi_s(0)$ .

Como, para todo  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_s \in K$ , segue que  $\phi_s(0) \geq 0$ , para  $s \in \mathbb{N}$ . Logo  $\beta\varphi_s(0) \geq 0$ , para  $s = 1, 2, \dots$ . Além disso, como  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \pi_s \varphi_s = 0$  segue que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Im(\Psi, \varphi_s) = 0$ . Desta maneira,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} nr^2 \int_{-1}^0 e^{-\gamma(\theta-1)} \operatorname{sen}(\sigma(\theta+1))\phi_s(\theta)d\theta = 0$$

Donde,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi_s(\theta) = 0$ ,  $\theta \in [-1, 0]$ .

Por outro lado,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Re(\Psi, \varphi_s) = 0$ . Logo,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha \varphi_s(0) = 0$ .

Ou seja,

$$0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} (\gamma + rm, 1) \cdot (\phi_s(0), a_s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} [\gamma \phi_s(0) + rm \phi_s(0) + a_s]$$

Donde,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} a_s = 0$ .

Portanto  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi_s = 0$ , o que é absurdo pois  $|\varphi_s| = 1$ , para  $s \in \mathbb{N}$ .

ii) Suponha agora que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores positivos da equação (2.3), com  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Então, neste caso, a base para o conjunto solução do sistema adjunto é a mesma dada no item anterior. Desta maneira temos:

$$(\Psi_1, \varphi_s) = v_1 \varphi_s(0) + r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta$$

Donde,

$$(\Psi_1, \varphi_s) = (\lambda_1 + rm, 1) \cdot (\phi_s(0), a_s) + r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta$$

Ou seja,

$$(\Psi_1, \varphi_s) = (\lambda_1 + rm) \phi_s(0) + a_s + r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta$$

Analogamente,

$$(\Psi_2, \varphi_s) = (\lambda_2 + rm) \phi_s(0) + a_s + r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\lambda_2(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta$$

Seja  $\varphi_s = (\phi_s, a_s)_{s \in \mathbb{N}} \in \partial B(1) \cap K$  uma sequência tal que  $\pi_\lambda(\varphi_s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow +\infty$ .

Então note que:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} [(\Psi_1, \varphi_s) - (\Psi_2, \varphi_s)] = 0$$

Ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ (\lambda_1 - \lambda_2) \phi_s(0) + r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\lambda_1(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta + r^2 n \int_{-1}^0 e^{-\lambda_2(\theta+1)} \phi_s(\theta) d\theta \right] = 0$$

Donde,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left[ (\lambda_1 - \lambda_2) \phi_s(0) + r^2 n \int_{-1}^0 \left[ e^{-\lambda_2(\theta-1)} - e^{-\lambda_1(\theta+1)} \right] \phi_s(\theta) d\theta \right] = 0$$

Observe que  $e^{-\lambda_1(\theta+1)} \leq e^{-\lambda_2(\theta-1)}$

Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} r^2 n \int_{-1}^0 \left[ e^{-\lambda_2(\theta-1)} - e^{-\lambda_1(\theta+1)} \right] \phi_s(\theta) d\theta = 0$$

E, assim,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_s(\theta) = 0$ , para  $\theta \in [-1, 0]$ .

Como  $\lim_{s \rightarrow -\infty} (\Psi_1, \varphi_s) = 0$ , segue que  $\lim_{s \rightarrow -\infty} a_s = 0$ .

Desta maneira,  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi_s = 0$ , o que, conforme visto no item anterior, é absurdo.

iii) Por fim, suponha que  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Então, uma base para o conjunto das soluções do sistema adjunto (3.4) é

$$\Psi_1(\tau) = be^{-\lambda_1 \tau} \text{ e } \Psi_2(\tau) = (b\tau + c)e^{-\lambda_1 \tau}$$

onde

$$b = (x, y) \text{ e } c = (h, w) \text{ são vetores em } \mathbb{R}^2.$$

Já mostramos que substituindo  $\Psi_1$  nas equações do sistema (3.4) obtemos

$$\Psi(\tau) = (\lambda_1 + rm, 1)e^{-\lambda_1 \tau}$$

onde  $\lambda_1$  é um autovalor da equação (2.3).

Substituindo  $\Psi_2$  nas equações do sistema adjunto (3.4) obtemos

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \{ (\lambda_1 + rm)\tau + h \} e^{-\lambda_1 \tau} = r^2 n (\tau + 1 - w) e^{-\lambda_1 (\tau-1)} \\ \frac{d}{d\tau} [(\tau + w)e^{-\lambda_1 \tau}] = -[(\lambda_1 - rm)\tau + h] e^{-\lambda_1 \tau} - rm(\tau + w) e^{-\lambda_1 \tau} \end{cases}$$

Isto é,



$$\begin{cases} (\lambda_1 + rm)e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1[(\lambda_1 + rm)\tau + h]e^{-\lambda_1\tau} = r^2n(\tau + 1 + w)e^{-\lambda_1(\tau-1)} \\ e^{-\lambda_1\tau} - \lambda_1(\tau + w)e^{-\lambda_1\tau} = [(\lambda_1 + rm)\tau + h]e^{-\lambda_1\tau} + rm(\tau + w)e^{-\lambda_1\tau} \end{cases}$$

E, logo, para  $\tau = 0$  temos

$$\begin{cases} \lambda_1 + rm - \lambda_1 h = r^2n(1 + w)e^{-\lambda_1} \\ 1 - \lambda_1 w = -h - rmw \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_1 h - r^2nwe^{-\lambda_1} = r^2ne^{-\lambda_1} - \lambda_1 - rm \\ -h - rmw = 1 - \lambda_1 w \end{cases} \quad (3.6)$$

Da segunda equação do sistema (3.6) obtemos

$$h = -1 - (\lambda_1 + rm)w$$

Substituindo o valor de  $h$  na primeira equação do sistema (3.6) temos

$$\lambda_1[-1 + (\lambda_1 + rm)w] - r^2nwe^{-\lambda_1} = r^2ne^{-\lambda_1} - \lambda_1 - rm$$

Tendo em vista que  $\lambda_1$  é autovalor da equação (2.3) segue que

$$r^2ne^{-\lambda_1} = -\lambda_1^2 - rm\lambda_1$$

Donde,

$$-\lambda_1[-1 + (\lambda_1 + rm)w] + \lambda_1(\lambda_1 + rm)w = -\lambda_1^2 - rm\lambda_1 - \lambda_1 - rm$$

Ou seja,  $\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + rm\lambda_1 + rm = 0$

Resolvendo a equação acima obtemos:

$$\lambda_1 = \frac{-(rm + 2) \pm \sqrt{r^2m^2 + 4}}{2}$$

Porém, note que  $-4rm \leq 0$ .

E, portanto,  $r^2m^2 + 4rm + 4 - 4rm \leq r^2m^2 + 4rm + 4$ .

Isto é,

$$r^2m^2 - 4 < (rm + 2)^2$$

E, logo,  $\sqrt{(r^2m^2 - 4)} \leq (rm + 2)$ .

Deste modo  $\lambda_1 \leq 0$ , o que contraria nossa hipótese.

Isto completa a prova do lema.

■

**Teorema 3.1.** *Se as hipóteses 1, 2 e 3 são válidas, então o sistema (3.1) tem soluções periódicas não-triviais de período maior que 2; para  $r > r_0$ , onde  $r_0$  é definido por (2.8) e é o primeiro valor de existência de bifurcação de Hopf da equação (2.2).*

*Demonstração :*

Inicialmente observemos que:

i)  $K$  é fechado

Com efeito, sabemos que  $K \subset \overline{K}$ . Consideremos então  $\varphi = (\phi, p) \in \overline{K}$ . Desta forma existe uma sequência  $\varphi_s = (\phi_s, p_s)$  em  $K$  tal que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s = \varphi$ .

Note que para  $s \in \mathbb{N}$  temos

$$0 \leq p_s \leq \frac{rn}{m}$$

Donde,  $0 \leq p \leq \frac{rn}{m}$ .

Também,  $\phi_s(-1) = 0$

Logo  $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_s(-1) = 0$ . Ou seja,  $\phi(-1) = 0$

Como  $\phi_s(0) = \frac{rp_s}{m} \leq A$ , segue que  $\phi(0) = \frac{rp}{m} \leq A$ .

Considere  $x$  e  $y$  elementos de  $[-1, 0]$  tal que  $x \leq y$ . Então,  $\phi_s(x) \leq \phi_s(y)$ .

Desta forma temos que  $\phi(x) \leq \phi(y)$ .

Desta maneira segue que  $\varphi \in K$ . Portanto  $\overline{K} \subset K$ , ou seja  $K$  é fechado.

ii)  $K$  é convexo

Com efeito, consideremos  $\varphi_1 = (\phi_1, p_1)$  e  $\varphi_2 = (\phi_2, p_2)$  elementos de  $K$ . Consideremos ainda a função:

$$f(s) = (1-s)\varphi_1 + s\varphi_2 = ((1-s)\phi_1 + s\phi_2, (1-s)p_1 + sp_2), \quad s \in [0, 1]$$

Mostremos que  $f(s) \in K$  para  $s \in [0, 1]$ . De fato, tendo em vista que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  estão em  $K$  temos:

$$0 \leq p_1 \leq \frac{rn}{m} \text{ e } 0 \leq p_2 \leq \frac{rn}{m}$$

Como  $s \in [0, 1]$  segue que  $(1-s) > 0$ . Logo,

$$0 \leq (1-s)p_1 + sp_2 \leq (1-s)\frac{rn}{m} + s\frac{rn}{m} = \frac{rn}{m}$$

$$(1-s)\phi_1(-1) + s\phi_2(-1) = 0, \text{ para } s \in [0, 1]$$

$$\phi_1(0) + \frac{rn}{m} \leq A \text{ e } \phi_2(0) + \frac{rn}{m} \leq A$$

Portanto,

$$(1-s)\phi_1(0) + (1-s)\frac{rn}{m} + s\phi_2(0) + s\frac{rn}{m} \leq (1-s)A + sA$$

Ou seja,

$$[(1-s)\phi_1(0) + s\phi_2(0)] + \frac{rn}{m} \leq A$$

Sejam  $x$  e  $y$  elementos de  $[-1, 0]$ , com  $x \leq y$ . Então

$$(1-s)\phi_1(x) + s\phi_2(x) \leq (1-s)\phi_1(y) + s\phi_2(y), \quad s \in [0, 1]$$

Portanto,  $f(s) \in K$ , para  $s \in [0, 1]$ . Desta forma,  $K$  é convexo.

iii)  $K$  é limitado.

Observe por fim que pelo Lema 2.2 a equação característica (2.3) possui autovalores com parte real positiva para  $r > r_0$ . Além disso, pelo Lema 3.3, o operador  $B$  é completamente contínuo.

Ainda, pelo Lema 3.4 segue que se  $\lambda$  é autovalor da equação (2.3) com  $Re(\lambda) > 0$ , então

$$\inf\{|\pi_\lambda(\varphi)|, \varphi \in K, |\varphi| = 1\} > 0.$$

Logo, pelo Teorema 1.10, segue que  $(x, y) = (0, 0)$  é um ponto ejetivo de  $B$ .

Além disso, pelo Lema 1.7 segue que  $B$  possui um ponto fixo que não é ejetivo. Seja  $\varphi \in K \setminus \{0\}$  este ponto. Então temos que

$$z^{2T_1(\varphi)}(\varphi) = z^{T_1(\varphi)}\left(z^{T_1(\varphi)}(\varphi)\right) = z^{T_1(\varphi)}(-B(\varphi)) = z^{T_1(\varphi)}(-\varphi) = -z^{T_1(\varphi)}(\varphi) - B(\varphi) = \varphi$$

Ou seja  $z_t(\varphi)$  é periódica com período maior que  $2T_1(\varphi)$ . Como  $T_1(\varphi) > 1$  segue que  $2T_1(\varphi) > 2$ . Isto prova o teorema.

■

Por fim, note que a solução  $X(\tau)$  da equação (2.2) tem período  $p_1$  maior que 2. Seja então  $p_2$  o período da solução  $x(t)$  da equação (2.1). Como  $X(\tau) = x(t)$ , onde  $t = r\tau$  segue que

$$x(t + p_2) = x(t)$$

Ou seja,  $x\left(r\left(\tau + \frac{p_2}{r}\right)\right) = x(r\tau)$ .

Donde,  $X\left(\tau + \frac{p_2}{r}\right) = X(\tau)$ .

Logo,  $p_1 = \frac{p_2}{r}$ .

Ou,  $p_2 = rp_1$ .

Como  $p_1 > 2$  então  $p_2 > 2r$ . Deste modo, concluímos que para  $r > r_0$  a equação (2.1) possui soluções periódicas não - triviais de período maior que  $2r$  se as condições do Teorema (3.1) estiverem satisfeitas.

## Capítulo 4

# Aplicações a modelos Físicos e Biológicos

Neste capítulo aplicaremos os resultados dos capítulos anteriores a alguns modelos físicos e biológicos.

**Exemplo 4.1.** Já vimos no capítulo 1 a equação do girassol estudada por Somolinis em [22].

A equação referida é a seguinte:

$$\ddot{x}(t) + \frac{a}{r}\dot{x}(t) - \frac{b}{r}\text{sen}(x(t-r)) = 0 \quad (4.1)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $r$  são constantes positivas.

Se fizermos a mudança de variável  $t = r\tau$  obtemos a seguinte equação:

$$\ddot{X}(\tau) + ar\dot{X}(\tau) - r^2b\text{sen}(X(\tau-1)) = 0$$

A equação característica então é:

$$\lambda^2 + ar\lambda + br^2e^{-\lambda} = 0 \quad (4.2)$$

Ainda, podemos observar que neste caso temos:

$$f(x) = \frac{a}{r}, \quad g(x) = \frac{b}{r}\text{sen}(x) \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{b}{r}\cos(x)$$

E, portanto,

$$m = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad n = \frac{b}{r}$$

Pelo Lema 2.1, existem valores  $\omega_0$  e  $r_0$  tais que a solução nula é assintoticamente estável para  $r \in [0, r_0)$  e para  $r = r_0$  a equação característica (4.2) possui somente duas raízes imaginárias puras,  $\lambda_1 = i\omega_0$  e  $\lambda_2 = -i\omega_0$ , enquanto todas as demais raízes possuem partes reais negativas. Neste caso temos:

$$\omega_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{a^4 - 4b^2r^2} - a^2}{2br}\right)$$

e

$$r_0 = \frac{r\sqrt{2}}{\left(\sqrt{a^4 - 4b^2r^2} - a^2\right)^{\frac{1}{2}}} \arccos\left(\frac{\sqrt{a^4 - 4b^2r^2} - a^2}{2br}\right)$$

Deste modo, pelo Teorema 2.1 segue que a solução nula da equação (4.1) é instável para  $r > r_0$  e para valores próximos de  $r_j$  onde

$$r_j = \frac{r\sqrt{2}}{\left(\sqrt{a^4 - 4b^2r^2} - a^2\right)^{\frac{1}{2}}} \arccos\left(\frac{\sqrt{a^4 - 4b^2r^2} - a^2}{2br}\right) - \frac{2j\pi r\sqrt{2}}{\left(\sqrt{a^4 - 4b^2r^2} - a^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad j = 1, 2, \dots$$

a equação possui soluções de amplitude pequena uma vez que para estes valores de  $r$  ocorrem bifurcações de Hopf.

Por fim observe que temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.2.** *Se  $\frac{2b}{\pi a^2} < r$ ,  $r > r_0$  e  $r^3 + ar - a\pi < 0$  então a equação (4.1) possui soluções com períodos maiores que  $2r$ .*

*Demonstração:*

Observe que:

i)  $a > b$  donde  $\frac{a}{r} > \frac{b}{r}$ . Logo  $m > n > 0$ ;

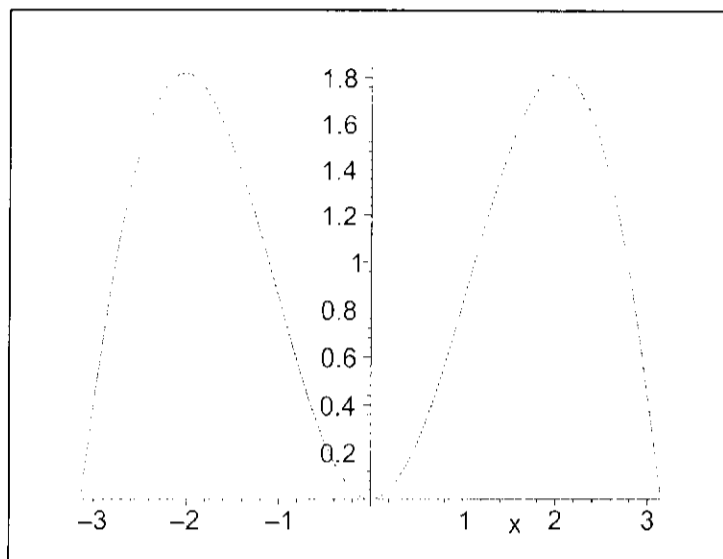
ii)  $g(0) = \frac{b}{r} \sin(0) = 0$ ;

iii) Para todo  $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$  temos que:

$$- f(x) = \frac{a}{r} = f(-x);$$

$$- f(x) - \frac{a}{r} \geq m;$$

De acordo com o gráfico abaixo podemos perceber que  $xg(x) = x\frac{b}{r} \sin(x) > 0$ ;



$$g(x) = \frac{b}{r} \text{sen}(x) = \frac{b}{r} \text{sen}(-x) = g(-x);$$

$$- |g(x)| = \left| \frac{b}{r} \text{sen}(x) \right| \leq \frac{b}{r} = n.$$

iii) Note que,  $\frac{2b}{\pi a^2} < r$ .

Ou seja,  $\frac{\pi}{2} > \frac{b}{a^2} r$ .

E, portanto,  $\pi - \frac{\pi}{2} > \frac{b}{a^2} r$ .

Logo,  $\pi > \frac{\pi}{2} + \frac{b}{a^2} r$ .

E, portanto,  $\pi > \frac{\pi}{2} + \frac{n}{m^2}$ .

- Por hipótese  $r > r_0$
- Como  $r^3 + ar - a\pi < 0$  segue que  $ar - r^3 < a\pi$ .  
Segue que,  $r < \left( \pi - \frac{r^2 n}{m^2} \right) \frac{m}{n}$ .

Assim, pelo Teorema 3.1 a equação (1.1) possui soluções periódicas não-triviais para  $r > r_0$  com período maior que  $2r$ .

■

**Exemplo 4.3.** Considere a equação do posição angular do leme de um navio de guerra com dispositivo de direção automática de Minorsky, estudada em [3]:

$$\ddot{x}(t) + M\dot{x}(t) + \varphi(x(t-r)) = 0$$

**Teorema 4.4.** Para a equação acima, suponha que  $\varphi \in C^2$ , e:

1.  $M > \dot{\varphi}(0) > 0$ .
2.  $\varphi(0) = 0$
3. Existe uma constante positiva  $H$  tal que  $H > \frac{\pi}{2} + \frac{\dot{\varphi}(0)}{M^2}$  e para todo  $x \in [-H, H] \setminus \{0\}$  tenhamos:
  - $x\varphi(x) > 0$ ;
  - $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ ;
  - $|\varphi(x)| \leq \dot{\varphi}(0)$ .
4.  $r_0 < r \in \frac{r^2}{M} - r - H < 0$ , onde:

$$r_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{n \cos \omega_0}}$$

e

$$\omega_0 = \arccos \left( \frac{-M^2 + \sqrt{M^4 + 4\dot{\varphi}^2(0)}}{2\dot{\varphi}(0)} \right)$$

Então, a equação acima possui soluções periódicas com período maior que  $2r$ .

*Demonstração:*

Observemos o seguinte:

Fazendo uma comparação com a forma geral da equação estudada no capítulo anterior podemos perceber que  $f(x) = M$ ,  $g(x) = \varphi(x)$ ,  $m = C$  e  $n = \dot{\varphi}(0)$ . Além disso:

- $m > n > 0$  por hipótese;
- Para todo  $x \in [-H, H] \setminus \{0\}$  temos:
  - i)  $f(x) = C = f(-x)$ ;
  - ii)  $g(0) = \varphi(0) = 0$
  - iii)  $f(x) = C \geq m$ ;
  - iv)  $xg(x) = x\varphi(x) > 0$  por hipótese;
  - v)  $g(x) = \varphi(x) = -\varphi(-x) = -g(-x)$ , por hipótese;



vi)  $|\dot{g}(x)| = |\dot{\varphi}(x)| < \dot{\varphi}(0) = n$ , por hipótese.

- $H > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}(0)}{M^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{n}{m^2}$ , por hipótese.
- $r_0 < r$ , por hipótese.
- Por hipótese  $\frac{r^2}{M} - r - H < 0$ . Daí:

$$r < H - \frac{r^2}{M}$$

Ou seja:

$$r < H - \left( \frac{r^2 \dot{\varphi}(0)}{M^2} \right) \frac{M}{\dot{\varphi}(0)}$$

E, portanto:

$$r < H - \left( \frac{nr^2}{m} \right) \frac{m}{n}$$

Agora, tendo em vista o valor de  $r_0$  e  $\omega_0$  segue do Teorema 2.1 que para  $r \in (0, r_0)$  a solução nula é assintoticamente estável. Para  $r > r_0$  segue do Teorema 3.1 que esta equação possui soluções periódicas com valor de período maior que  $2r$ . ■

## Referências Bibliográficas

- [1] Brézis, H., *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial S.A., Madrid (1981).
- [2] Browder, F.E., A Further Generalization of the Schauder Fixed Point Theorem in *Duke Mathematics Journal* 32, 575 - 578 (1965)
- [3] Burton, T.A., *Stability and Periodic Solution of Ordinary and Functional Differential Equations* Orlando Academic Press (1975).
- [4] Chow, S.N., Existence of Periodic Solutions of Autonomous Functional Differential Equations in *Journal of Differential Equations* 15, 350 - 378 (1974).
- [5] Chow, S.N., Hale, J. K., Periodic Solutions of Autonomous Equations in *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 66, 495 - 506 (1978).
- [6] Cooke, K.L., Gossman, Z. Discrete Delay, Distributed Delay and Stability Switches in *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86, 592 - 627 (1982).
- [7] Darwin, C., On the Movements and Habits of Climbing Plants in *Journal of the Linnean Society of Botany* 9, 1 - 118 (1865).
- [8] Darwin, F., Pertz, D., On the Artificial Production of Rhythm in Plants in *Annals of Botany* 6, 245 - 264 (1892).
- [9] Datko, R. A Procedure for Determination of the Exponential Stability of Certain Differential - Difference Equations in *Quarterly of Applied Mathematics* 36, 279 - 292 (1978).
- [10] Grafton, R.B. A Periodicity Theorem for Autonomous Functional Differential Equations in *Journal of Differential Equations* 6, 87 - 109 (1969).

- [11] Grafton, R.B., Periodic Solutions of Certain Liénard Equations with Delay in *Journal of Differential Equations* 11, 519 - 572 (1972).
- [12] Hale, J.K., *Theory of Functional Differential Equations* Springer - Verlag, New York Heidelberg Berlin (1977).
- [13] Hale, J.K., Lunel, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations* Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1993).
- [14] Haddeler, K.P., Delay Equations in Biology in *Lecture Notes in Mathematics*, Springer - Verlag, Berlin 730, 136 - 156 (1979).
- [15] Heinden, U. an der, Periodic Solutions of a Nonlinear Second Differential Equation with Delay in *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 70, 599 - 609 (1979).
- [16] Israelsson, D., Johnsson, A., A Theory of Circumnutations in *Helianthus annuus* in *Physiologia Plantarum* 20, 957 - 976 (1967).
- [17] Kolmanovskii, V., Myshkis, A. *Applied Theory of Functional Differential Equations* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1992).
- [18] Lima, E.L., *Elementos de Topologia Geral*, Impa: Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1969).
- [19] Pesin, J.B., On the Behaviour of a Strongly Nonlinear Differential Equation with a Retarded Argument in *Differential'nye Uravnenija* 10, 1025 - 1036 (1974).
- [20] Nussbaum, R.D. Periodic Solutions of Some Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations in *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 10, 263 - 306 (1974).
- [21] Norkin, S.B. *Differential Equations of Second Order with Retarded Argument*, American Mathematical Society (1972).
- [22] Somolinos, A.S., Periodic Solutions of the Sunflower Equation  
 $\ddot{x}(t) + \frac{a}{r} \dot{x}(t) + \frac{b}{r} \sin(x(t-r)) = 0$  in *Quarterly of Applied Mathematics* 4, 465 - 478 (1974).
- [23] Tomárik, J., Haddeler, K.P., Periodic Solutions of Difference-Differential Equations in *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 65, 87 - 95 (1977).
- [24] Wei, J., Huang, Q., Periodic Solutions of Liénard Equations in *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 6, 603 - 614 (1999).

- 
- [25] Weissman, M.R., *Existência de Soluções Periódicas para uma Classe de Equações Diferenciais Funcionais Retardadas e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, ICMC - USP, São Carlos (1997).
- [26] Yorke, A.J., Kaplan, J.L., On the Nonlinear Differential Delay Equation  $\dot{x}(t) = -f(x(t), x(t-1))$  in *Journal of Differential Equations* 23, 293 - 314 (1977).
- [27] Zhang, B., On the Retarded Liénard Equation in *American Mathematical Society* 115, 779 - 785 (1992).