UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sistemas de medidas Margulis e medidas de máxima entropia para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta

Richard Javier Cubas Becerra

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Richard Javier Cubas Becerra

Sistemas de medidas Margulis e medidas de máxima entropia para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ali Tahzibi

USP – São Carlos
Novembro de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C962s

Cubas Becerra, Richard Javier
Sistemas de medidas Margulis e medidas de máxima entropia para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta / Richard Javier Cubas Becerra; orientador Ali Tahzibi. -- São Carlos, 2022.
91 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Entropia Topológica. 2. Medida de Máxima Entropia. 3. Difeomorfismo parcialmente hiperbólico. 4. Sistema de Margulis. 5. Expoente de Lyapunov. I. Tahzibi, Ali , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Richard Javier Cubas Becerra

Margulis systems of masures and measures of maximal entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliation

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Ali Tahzibi

USP – São Carlos
November 2022

Aos meus pais, Anibal e Rosa.

AGRADECIMENTOS

O caminho para atingir este objetivo tem sido difícil, muito difícil. No entanto, existem pessoas que, com o seu apoio, tornam este caminho menos complicado, e até tornam todo o processo uma experiência muito agradável.

Em primeiro lugar agradeço a minha família e à minha noiva pelo encorajamento e suporte emocional, em especial a os meus pais que sempre me apoiaram e motivaram incansavelmente.

Ao Professor Ali Tahzibi, pelas orientações, paciência, encorajamento e pelas oportunidades e experiências acadêmicas que pude vivenciar durante todo o período do meu doutorado.

A todos os professores do ICMC que de algum modo me ajudaram nesse trajeto. Em especial aos professores Daniel Smania, Tiago Pereira, Carlos Maquera, Alexandre Nolasco e Eder Ritis.

Aos colegas amigos que fiz durante o doutorado que me ajudaram em algum sentido. Em especial a Edmilson Roque, Eder Sanchez, Hans Muller, Estefani Moraes, Estela Garcia, Zeray Hagos e Herbert Maquera.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro sob a bolsa 2018/04076-5.

"Se eu estivesse a começar os meus estudos, seguiria o conselho de Platão
e começava pela Matemática "
(Galileu Galilei)

RESUMO

RICHARD, C.B. **Sistemas de medidas Margulis e medidas de máxima entropia para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta**. 2022. 91 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Este trabalho trata sobre a construção e caracterização das medidas de máxima entropia para certos sistemas parcialmente hiperbólicos usando o conceito de medidas Margulis. Consideramos a classe dos difeomorfismos C^2 parcialmente hiperbólicos com folheação central uniformemente compacta de dimensão um, sobre uma variedade fechada M, denotada por $\mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$. Para sistemas $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$, supondo que a dinâmica induzida no espaço das folhas centrais é topologicamente transitiva, construímos uma família de medidas ao longo da folheação instável chamadas medidas Margulis e exibimos a sua relação com a desintegração ao longo da folheação instável de medidas de máxima entropia. Usando esta caracterização, quando a folheação instável é dinamicamente minimal provamos que ou f possui uma única medida de máxima entropia a qual é provada ter expoente central zero, ou f possui exatamente duas medidas de máxima entropia ergódicas, as quais são hiperbólicas e com expoente central de sinal oposto. Também estudamos a natureza do suporte das medidas de máxima entropia com expoente central zero para difeomorfismos $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ que são infra-AB-sistemas, e provamos que toda medida de máxima entropia com expoente central zero possui uma sub-variedade compacta e periódica, tangente aos fibrados estável e instável, a qual chamamos de *su*-folha. Ainda neste contexto, quando o sistema f é topologicamente transitiva, mostramos que f possui no máximo duas medidas de máxima entropia com expoente central nulo. Além disso, para o caso $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ mostramos finitude de medidas de máxima entropia ergódicas usando algumas hipóteses adicionais e aplicando os resultados obtidos.

Palavras-chave: Entropia topológica, Medida de máxima entropia, Difeomorfismo parcialmente hiperbólico, AB-sistema, *su*-folha, Expoente de Lyapunov, Sistema de Margulis.

ABSTRACT

RICHARD, C.B. **Margulis systems of masures and measures of maximal entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliation**. 2022. 91 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This work is the construction and characterization of maximal entropy measures for certain partially hyperbolic systems using the concept of Margulis measures. We consider the class of C^2 partially hyperbolic diffeomorphisms with one-dimensional center bundle and uniformly compact center foliation on a closed manifold M, denoted by $\mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$. For systems $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$, assuming that the dynamics induced in the space of the central leaves is topologically transitive, we construct a family of measures along the unstable foliation called Margulis measures, and characterize their relationship with the disintegration along the unstable foliation of maximal entropy measures. using this characterization, we prove that when the unstable foliation is dynamically minimal there is a dichotomy: either f has a unique entropy-maximizing measure, which is proved to have zero center exponent; or the system f has exactly two ergodic maximal measures, which are hyperbolic and have a central exponent of opposite sign. We also study the nature of the support of measures of maximal entropy with vanishing center exponent for diffeomorphisms $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ infra-AB-systems, and we prove that every measure of maximal entropy with vanishing center exponent has a periodic submanifold tangent to the stable and unstable bundles, which we call *su*-leaf. Still in this context, when the system f is topologically transitive, we show that f has at most two ergodic maximal entropy measures with vanishing center exponent. Furthermore, for the case $M = \mathbb{T}^3$, if $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ we show finiteness of the ergodic maximal entropy measures using some additional assumptions and applying the previous results.

Keywords: Topological entropy, Maximal entropy measures, Partially hyperbolic diffeomorphism, AB-system, *su*-leaf, Lyapunov Exponent, Margulis system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Caixa folheada 31
Figura 2 – Dinâmica na direção central de acordo ao expoente central 36
Figura 3 – s,u caminho de x para y 37
Figura 4 – Dinâmica quociente 39
Figura 5 – s-holonomia das folhas centrais 40
Figura 6 – Interseção de $AC(t)$ com a folha central L 45
Figura 7 – A retração $R : \widetilde{X} \to L$ 46
Figura 8 – O mapa g_α 46
Figura 9 – Placas Σ_j de $\mathscr{F}^{cu}$ 54
Figura 10 – Ponto de acumulação de $(x_n)_n$ 59
Figura 11 – Suporte da medida $\mu^c_{x^*}$ 72
Figura 12 – Dinâmica na direção central de acordo ao expoente central 82
Figura 13 – Suporte da medida $\widehat{\eta}_2$ 86

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 19

2 PRELIMINARES 25
2.1 Medidas invariantes 25
2.2 Desintegração de medidas 26
2.3 Entropia métrica 27
2.4 Entropia topológica 29
2.5 Desintegração de medidas ao longo de folheações 31

3 SISTEMAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS 35
3.1 Generalidades 35
3.2 Entropia de sistemas $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ 37
3.3 AB-sistemas 42
3.5 AI-sistemas 43
3.6 Entropia instável 46
3.7 Entropia topológica instável 47

4 EXISTÊNCIA DE SISTEMAS DE MEDIDAS MARGULIS 49
4.1 Sistemas Margulis e propriedades 49
4.2 Construção de sistemas de medidas Margulis 52
4.2.1 Construção de um cu-sistema de Margulis 52
4.3 Prova do Teorema A 60
4.3.1 Implicações do Teorema A 62

5 SOBRE O SUPORTE DE MEDIDAS DE MÁXIMA ENTROPIA 67
5.1 Co-existência de medidas de máxima u-entropia 67
5.2 Prova e consequências topológicas do Teorema B 69
5.2.1 Corolário B.1 76
5.3 Prova do Teorema C 77
5.4 Prova do Teorema D 79
5.5 Prova das Proposições E.1, E.2 e E.3 83

REFERÊNCIAS 89

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A noção de entropia topológica tem um papel central no estudo da complexidade dos sistemas dinâmicos. Para sistemas contínuos definidos sobre espaços métricos compactos, a complexidade de estos sistemas pode ser abordado usando a noção de entropia métrica, a qual descreve a complexidade do sistema dinâmico em relação a uma medida de probabilidade invariante, uma vez que o principio variacional (LEDRAPPIER; WALTERS, 1977) afirma que o supremo da entropia métrica tomado sobre todas as medidas de probabilidade invariantes coincide com a entropia topológica do sistema. Uma medida onde esse supremo é atingido é dita de medida máxima entropia. As medidas de máxima entropia refletem a complexidade de todo o sistema e portanto são de muita importância para estudar a complexidade do mesmo. Perguntas relacionadas a medidas de máxima entropia surgem naturalmente: existem medidas de máxima entropia?, como podemos construí-las?, quantas medidas ergódicas de máxima entropia possui um sistema?, como é a natureza do suporte dessa medidas?, etc.

Existem resultados clássicos nesse sentido, por exemplo, é conhecido que todo sistema restrito a um conjunto hiperbólico transitivo admite uma única medida de máxima entropia (BOWEN, 1975). Recentemente, novas abordagens foram desenvolvidas para o estudo de medidas de máxima entropia de mapas hiperbólicos não uniformes e difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (URES, 2012; NEWHOUSE; YOUNG, 1983), difeomorfismos $C^{1+\alpha}$ sobre superfícies (BUZZI *et al.*, 2012; SARIG, 2013).

Com respeito da construção de medidas de máxima entropia, existem alguns resultados clássicos, por exemplo, para sistemas hiperbólicos, Bowen (BOWEN, 1970) e Margulis (MARGULIS, 2004) as construíram usando duas abordagens diferentes. Por meio de suas provas, verifica-se que estas medidas máxima entropia equidistribuem órbitas periódicas da dinâmica e também possuem uma estrutura de produto local.

No contexto de sistemas dinâmicos destacam-se uma classe importante de sistemas dinâmicos, denominadas de *parcialmente hiperbólicos*, os quais terão um papel central nesta tese.

Seja M uma variedade riemanniana compacta, um difeomorfismo $f : M \to M$ é chamado parcialmente hiperbólico se o espaço tangente admite uma decomposição contínua $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ invariante por Df, onde $Df|E^s$ contrai uniformemente, $Df|E^u$ expande uniformemente e $Df|E^c$ tem um comportamento intermediário, ou seja, Df restrito a E^c não pode contrair ou expandir mais do que $Df|E^s$ e $Df|E^u$, respectivamente. Denotamos por $\mathrm{PH}^r(M)$ ao conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de classe C^r de uma variedade M. Os fibrados E^s, E^u e E^c são conhecidos como fibrado estável, instável e central, respectivamente. É conhecido que os fibrados estável e instável são unicamente integráveis por folheações invariantes (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1970), denotados comumente por $\mathscr{F}^s$ e $\mathscr{F}^u$, respectivamente. Porém a integrabilidade do fibrado E^c ou mesmo de $E^{cs} = E^s \oplus E^c$ e $E^{cu} = E^u \oplus E^c$ é um assunto mais delicado (HERTZ; HERTZ; URES, 2016). O sistema f é dita dinamicamente coerente se $E^{cs} = E^s \oplus E^c$ e $E^{cu} = E^u \oplus E^c$ são integráveis. Nesse casso obtém-se naturalmente uma folheação $\mathscr{F}^c$ tangente ao fibrado central, como a interseção das folhas das folheações que integram a E^{cs} e E^{cu}.

Nesta tese, estudamos medidas de máxima entropia para uma classe importante de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de uma variedade fechada M. Esta classe é o conjunto dos sistemas $f \in \mathrm{PH}^r(M)$, $r \geq 2$, dinamicamente coerentes com folheação central uniformemente compacta de dimensão um; a qual denotamos por $\mathrm{PHC}^r_{c=1}(M)$. Para isso, seguimos algumas técnicas encontradas em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019), as quais consistem na construção sistemas de medidas Margulis ao longo da folheação instável, para caraterizar a desintegração de medidas de máxima entropia ao longo desta folheação. Um sistema de medidas Margulis é em essência, uma família de medidas $\{m_x\}_{x\in M}$ respeito de uma folheação $\mathscr{F}$ cuja característica principal é a existência de uma constante $D > 0$ tal que $f^* m_{f(x)} = D.m_x$. Em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019) os autores construíram sistemas de Margulis $\{m^u_x\}$ ao longo da folheação instável, para perturbações de mapas tempo-um de fluxo Anosov transitivo, com folheações estáveis minimais, com constante $D = e^{h_{top}(f)}$. Logo usaram estas medidas para caracterizar as medidas de máxima entropia. Além disso, para estos sistemas provaram que se $\mathrm{supp}(m^u_x) = \mathscr{F}^u(x)$ para todo $x \in M$, então uma medida invariante é de máxima entropia se e somente se a desintegração ao longo da folheação instável é equivalente ao sistema $\{m^u_x\}_{x\in M}$. É por isso que medidas Margulis torna-se interessantes quando elas tem suporte total em folhas instáveis e constante $D = e^{h_{top}(f)}$. Nesse sentido, a seguir enunciamos o nosso primeiro resultado, onde f_c denota o mapa induzido por f no espaço quociente $M_c = M/\mathscr{F}^c$:

Teorema A. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$. Se f_c é topologicamente transitiva então existe um sistema continuo de medidas $\{m^u_x\}_{x\in M}$ tal que:*

(1) cada m^u_x é uma medida Radon sem átomos e totalmente suportada em $\mathscr{F}^u(x)$;

(2) $f^* m^u_{f(x)} = e^{h_{top}(f)}.m^u_x$;

(3) o sistema $\{m^u_x\}_{x\in M}$ é cs-invariante e localmente uniformemente finito.

Além disso, se μ é uma medida ergódica com $\lambda_c(\mu) \leq 0$, μ é de máxima entropia se e somente se a desintegração $\{\mu_x^u\}_{x\in M}$ de μ ao longo da folheação instável é equivalente a $\{m_x^u\}_{x\in M}$.

Para a prova do Teorema A, primeiro construímos um sistema de medidas $\{m_x^{cu}\}_{x\in M}$, m_x^{cu} com suporte contido em $\mathscr{F}^{cu}(x)$, logo construímos a medida m_x^u como uma projeção da medida m_x^{cu}. Em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019) os autores usam minimalidade da folheação estável para construir medidas m_x^{cu}, porém, neste trabalho construímos essas medidas sem a hipótese de minimalidade. Além disso, a existência do sistema de medidas $\{m_x^u\}_{x\in M}$ pode ser feita sem usar a hipótese da transitividade topológica de f_c; a transitividade topologicamente de f_c serve para garantir que toda medida m_x^u tem suporte total em $\mathscr{F}^u(x)$. No caso de que M é o único conjunto f-invariante minimal u-saturado podemos construir medidas Margulis $\{m_x^{cs}\}_{x\in M}$ e $\{m_x^u\}_{x\in M}$ ao longo das folheações $\mathscr{F}^{cs}$ e $\mathscr{F}^u$, respectivamente, e todas com suporte total. Tudo isso contribui para mostrar a seguinte dicotomia para medidas de máxima entropia:

Teorema B. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$. Se M é o único conjunto minimal f-invariante, u-saturado, então vale uma, e só uma das alternativas abaixo:*

(1) f admite uma única medida de máxima entropia μ. Neste caso $\lambda_c(\mu) = 0$ e μ tem estrutura de produto local, isto é, $\mu\mid_{B(x,\varepsilon)} \equiv m_x^{cs} \times m_x^u$.

(2) Existem exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia μ^+, μ^-, com expoente central positivo e negativo, respectivamente. Além disso, $\mu^-\mid_{B(x,\varepsilon)} \equiv m_x^{cs} \times m_x^u$.

Se M^3 é uma variedade tridimensional fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M^3)$; quando f possui a propriedade de acessibilidade, existem alguns resultados relacionadas ao número de medidas de máxima entropia ergódicas, porém a noção de acessibilidade sempre é uma hipótese forte para assegurar que essa quantidade é finita. Por exemplo, nesse contexto em (HERTZ *et al.*, 2012) os autores concluem que esses sistemas satisfazem uma dicotomia interessante: ou possuem uma única medida ergódica de máxima entropia e essa medida tem expoente central nulo ou possuem no máximo um número finito de medidas ergódicas de máxima entropia, e todas são medidas hiperbólicas. Quando a variedade tridimensional é diferente do toro tridimensional $\mathbb{T}^3$, em (URES; VIANA; YANG, 2021) os autores provaram que: ou possuem uma única medida ergódica de máxima entropia e essa medida tem expoente central nulo ou possuem exatamente duas medidas hiperbólicas ergódicas, as quais possuem expoentes centrais com sinais opostos. Em ambos trabalhos é usado fortemente a propriedade de acessibilidade, pois devido a esta propriedade, medidas hiperbólicas e não hiperbólicas não coexistem, o que implica que medidas de máxima entropia hiperbólicas não podem-se acumular e medidas com expoente central com o mesmo sinal tem suportes disjuntos.

Sem a hipótese de acessibilidade pode ser construídos facilmente sistemas parcialmente

hiperbólicos com infinitas medidas ergódicas de máxima entropia. Porém sob algumas condições pode-se obter uma quantidade finitas medidas ergódicas de máxima entropia (ROCHA; TAHZIBI, 2021). No casso não acessível pode ocorrer que medidas de máxima entropia hiperbólicas e não hiperbólica podem coexistir, além disso, medidas de máxima entropia não hiperbólicas podem ser acumuladas por medidas de máxima entropia hiperbólicas.

Um outro abordagem é conhecer a natureza do suporte das medidas de máxima entropia para o caso não acessível. Uma classe interessante de sistemas que abordaremos aqui, são os difeomorfismos $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ que são infra-AB-sistemas (HAMMERLINDL, 2017), que para o caso de $\mathbb{T}^3$, a classe dos infra-AB-sistemas contém a todos os sistemas parcialmente hiperbólicos não accessíveis, com folheação central compacta. No teorema acima, quando f é um infra-AB-sistema não acessível, uma descrição exata da dinâmica pode ser dada:

Corolário B.1. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f é não acessível e M é o único conjunto invariante minimal u-saturado, então f é conjugado (a menos de iterações finitas e recobrimento finito) com*

$$N \times S^1 \to N \times S^1, \ \ (x,t) \mapsto (Ax, t+\theta)$$

onde a N é uma nilvariedade. Além disso, possui uma única medida de máxima entropia, a qual tem suporte total e expoente central nulo.

No que segue, uma *su*-folha é uma variedade tangente ao fibrado $E^s \oplus E^u$. Para o caso de infra-AB-sistemas damos uma descrição do suporte das medidas de máxima entropia com expoente de Lyapunov central zero:

Teorema C. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f admite uma medida de máxima entropia μ com $\lambda_c(\mu) = 0$, então*

(1) $\mathrm{supp}(\mu) = M$*, ou*

(2) o suporte de toda medida de máxima entropia com expoente central zero contém uma su-folha periódica compacta.

No caso de f ser topologicamente transitiva, podemos dar um limite superior para o número de medidas ergódicas de máxima entropia com expoente central zero, denotado por $\mathrm{MME}_0(f)$.

Teorema D. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f é topologicamente transitiva, então $\#\mathrm{MME}_0(f) \leq 2$. Além disso, se $\mu \in \mathrm{MME}_0(f)$, então:*

(1) $\mathrm{supp}(\mu) = M$*, ou*

(2) $\mathrm{supp}(\mu)$ *é a órbita de uma su-folha compacta e periódica.*

Por fim, podemos aplicar os resultados obtidos. Vamos restringir para o caso $M = \mathbb{T}^3$. Neste casso a *su*-folha compacta do Teorema C é um Toro bidimensional $\mathbb{T}^2_{su}$ tangente a $E^s \oplus E^u$, o qual chamamos de *su*-toro.

Proposição E.1. *Seja* $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ *e* S *é uma folha central fixa. Se* $NW(f|_S) < \infty$*, então* $\#\mathrm{MME}_0(f) \leq \#\mathrm{NW}(f|_S)$*. Além disso, se* $\mu \in \mathrm{MME}_0$*, então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\mathrm{card}\big(\mathrm{supp}(\mu) \cap \mathscr{F}^c(x)\big) = n_0, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{T}^3.$$

É conhecido que todo homeomorfismo sobre $\mathbb{T}^2$ admite uma única medida de máxima entropia. Portanto se $\mathbb{T}^2_{su}$ é um *su*-toro periódico para $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ é fácil ver que $f|_{\mathscr{O}(\mathbb{T}^2_{su})}$ admite uma única medida de máxima entropia. Dizemos que $\mathbb{T}^2_{su}$ é um *su*-toro transversalmente hiperbólico se $\mathbb{T}^2_{su}$ é periódico e a única de máxima entropia tem expoente central diferente de zero, ou seja, se ν é a medida de máxima entropia de $f|_{\mathscr{O}(\mathbb{T}^2_{su})}$ então

$$\int_{\mathbb{T}^2_{su}} \log \|Df \mid E^c\| \, d\eta \neq 0.$$

Proposição E.2. *Seja* $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ *tal que todo su-toro é transversalmente hiperbólico. Então* f *tem um número finito de medidas ergódicas de máxima entropia e todas são hiperbólicas.*

Como mostra a proposição acima, a inexistência de *su*-torus transversalmente não hiperbólicos implica a existência de um número finito de medidas ergódicas de máxima entropia. Caso exista um *su*-toro transversalmente não hiperbólico existe uma medida de máxima entropia com expoente zero que poderia ser acumulada por medidas de máxima entropia. Para o caso de f ser topologicamente transitivo, a existência de um *su*-toro hiperbólico implica um resultado interessante relacionado ao número de medidas de máxima entropia:

Proposição E.3. *Seja* $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ *topologicamente transitiva. Se* f *possui um su-toro transversalmente hiperbólico, então*

$$2 \leq \#\mathrm{MME}(f) \leq 3.$$

A tese está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos de teoria ergódica que aparecem ao longo da tese.
- No capítulo 3, estudamos os conceitos clássicos de sistemas parcialmente hiperbólicos, entropia instável e detalhamos alguns resultados relacionados ao contexto dos principais resultados.

- No capítulo 4, apresentamos resultados relacionados a sistema medidas Margulis, logo construímos medidas Margulis ao longo da folheação centro-instável e demonstramos o Teorema A.

- No capítulo 5, aparecem as provas dos teoremas e proposições enunciados na introdução.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

2.1 Medidas invariantes

Seja $(M, \mathscr{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é f*-invariante* se

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E) \quad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Dizemos que uma medida f-invariante μ é *ergódica* se $f^{-1}(E) = E$ implica que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$. A n-ésima média de Birkhoff para uma função $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mensurável é definida como

$$S_n\varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi\left(f^i(x)\right).$$

Teorema 2.1.1 (Teorema ergódico de Birkhoff)**.** Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade f-invariante. Dada qualquer função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$, o limite $\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} S_n\varphi(x)$ existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso, a função $\bar{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Observação 2.1.1. Se μ é uma medida ergódica no teorema ergódico de Birkhoff note que $\varphi(x) = \int \varphi d\mu$, para μ-q.t.p. $x \in M$.

Observação 2.1.2. Se f é uma transformação invertível então as medias temporais de qualquer função integrável φ para f e para f^{-1} coincidem em μ-quase todo ponto:

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^{-j} = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^{j} \quad \text{em } \mu \text{ -quase todo ponto .}$$

Seja (M, d) é um espaço métrico, a σ-álgebra gerada pelos abertos da topologia induzida pela métrica é chamada de σ-álgebra de Borel. Uma medida de probabilidade sobre esta σ-álgebra é chamada de medida de probabilidade de Borel. Denotamos por $\mathscr{M}_1(M)$ ao conjunto de

medidas das probabilidade borelianas, isto é,

$$\mathscr{M}_1(M) := \{\mu : \mu \text{ é uma medida de probabilidade boreliana }\}.$$

Quando M é um espaço métrico compacto, existe uma topologia sobre $\mathscr{M}_1(M)$ chamada topologia fraca*, que torna a $\mathscr{M}_1(M)$ um espaço topológico metrizável compacto, onde duas medidas são consideradas próximas se as integrais que elas dão a funções contínuas limitadas estão próximas. A topologia fraca* em $\mathscr{M}_1(M)$ pode ser definida como a topologia cuja sub-base é coleção de conjuntos da forma $V(\mu,\varphi,\varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$, $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua e

$$V(\mu,\varphi,\varepsilon) = \left\{\eta \in \mathscr{M}_1(M); \left|\int \varphi d\mu - \int \varphi d\eta\right| < \varepsilon\right\}.$$

Teorema 2.1.2. (OLIVEIRA; VIANA, 2014) Se M é espaço métrico compacto então $\mathscr{M}_1(M)$ com a topologia fraca* é metrizável e compacto.

Proposição 2.1.1. (OLIVEIRA; VIANA, 2014) Uma sequência de medidas de probabilidade $\{\mu_n\}_n$ em M converge na topologia fraca* para uma medida μ, se para toda função contínua $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ temos que

$$\lim \int \varphi d\mu_n = \int \varphi d\mu.$$

Definição 2.1.1. O suporte de uma medida μ, denotado por $\text{supp}(\mu)$, é o conjunto dos pontos $x \in M$ para os quais $\mu(U) > 0$ para todo aberto $U \subset M$ tal que $x \in U$.

2.2 Desintegração de medidas

Seja M um espaço métrico completo separável, $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel e μ uma medida de Borel finita sobre M. Dada uma partição $\mathscr{P}$ de M em conjunto mensuráveis, denotamos por $\pi : M \to \mathscr{P}$ a projeção que associa a cada ponto $x \in M$ o elemento $\mathscr{P}(x)$ da partição que o contém. Esta projeção permite associar a $\mathscr{P}$, o espaço de medida $(\mathscr{P}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathscr{B}})$, onde $\tilde{\mu} := \pi_*\mu$ e $\tilde{\mathscr{B}} := \pi_*\mathscr{B}$.

Definição 2.2.1. Dada uma partição $\mathscr{P}$ de M. Um sistema de medidas condicionais de μ com respeito de $\mathscr{P}$ é uma família $\{\mu_p\}_{p\in\mathscr{P}}$ de medidas de probabilidades em M tal que

(1) Dado $\phi \in C^0(M)$, então $P \mapsto \int \phi \mu_P$ é mensurável;

(2) $\mu_P(P) = 1$ $\tilde{\mu}$ -q.t.p.

(3) se $\phi \in C^0(M)$, então

$$\int_M \phi d\mu = \int_{\mathscr{P}} \left(\int_P \phi d\mu_P\right) d\tilde{\mu}.$$

Quando fica claro a qual partição nos referimos, dizemos que a família $\{\mu_P\}$ desintegra a medida μ.

Proposição 2.2.1. Se $\{\mu_P\}$ e $\{\mu'_P\}$ são desintegrações de μ com respeito a $\mathscr{P}$, então $\mu_P = \mu'_P$ para $\tilde{\mu}$-quase todo $P \in \mathscr{P}$.

Corolário 2.2.1. Se $f : M \to M$ preserva uma medida de probabilidade μ e a partição $\mathscr{P}$, então $f_*\mu_P = \mu_P$ para $\tilde{\mu}$-quase todo $P \in \mathscr{P}$.

Demonstração. Decorre do fato de que $\{f_*\mu_P\}_{P\in\mathscr{P}}$ também é uma desintegração de μ e da unicidade essencial do sistema de desintegração. □

Definição 2.2.2 (Partição mensurável)**.** Dizemos que $\mathscr{P}$ é uma partição mensurável se existe uma família de conjuntos Borelianos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\mathscr{P} = \{A_1, A_1^c\} \vee \{A_2, A_2^c\} \vee \dots \text{ mod } 0.$$

Teorema 2.2.1. (ROKHLIN, 1949). Seja $\mathscr{P}$ uma partição mensurável de um espaço métrico completo separável M e μ uma medida boreliana finita. Então μ admite um sistema de medidas condicionais relativamente a $\mathscr{P}$. Este sistema de medidas condicionais é essencialmente única.

O teorema da decomposição ergódica que vamos a enunciar a continuação, tem diversas aplicações importantes; em particular, ele permite reduzir a demonstração de muitos resultados ao caso em que o sistema é ergódico.

Teorema 2.2.2 (Decomposição ergódica)**.** Seja M um espaço completo separável, $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante. Então existe um conjunto mensurável $M_0 \subset M$ com $\mu(M_0) = 1$, uma partição $\mathscr{P}$ de M_0 em subconjuntos mensuráveis tal que se $\{\mu_P : P \in \mathscr{P}\}$ é a decomposição de μ ao longo $\mathscr{P}$ então μ_P é ergódica.

2.3 Entropia métrica

Nesta seção, vamos considerar (M,d) um espaço métrico compacto. Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável, denotamos por $\mathscr{M}(f)$ o conjunto das medidas borelianas de probabilidade f-invariantes e por $\mathscr{M}_{\text{erg}}(f)$ o conjunto das medidas borelianas de probabilidade ergódicas. Se f é uma transformação contínua, decorre do teorema da existência de medidas invariante e da decomposição ergódica que $\mathscr{M}_{\text{erg}}(f) \neq \emptyset$.

Seja $(M, \mathscr{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma partição $\mathscr{P}$ é uma coleção finita ou enumerável de subconjuntos mensuráveis de M disjuntos dois a dois e cuja união tem medida total. Seja $\mathscr{P}$ uma partição finita de M, a entropia da partição $\mathscr{P}$ respeito da medida μ é definida por

$$H_\mu(\mathscr{P}) = -\sum_{P\in\mathscr{P}} \mu(P)\log\mu(P).$$

A *soma* $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$ de duas partições $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ é a partição cujos elementos são interseções $P \cap Q$ com $P \in \mathscr{P}$ e $Q \in \mathscr{Q}$. Mais geralmente, dada uma família enumerável $\{\mathscr{P}_k : k \in L\}$ de partições

de M, definimos

$$\bigvee_{k\in L} \mathscr{P}_k = \{\bigcap_{k\in L} P_k : P_k \in \mathscr{P}_k\}.$$

Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida de probabilidade em M. Se $\mathscr{P}$ é uma partição de M então $f^{-j}(\mathscr{P}) := \{f^{-j}(P) : P \in \mathscr{P}\}$ também é uma partição de M, para todo inteiro $j \geq 0$. Denotamos

$$\mathscr{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathscr{P}) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Chamamos entropia de f respeito à medida μ e à partição $\mathscr{P}$, ao limite

$$h_\mu(f, \mathscr{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathscr{P}^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathscr{P}^n).$$

Definição 2.3.1. Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável que preserva uma medida de probabilidade μ em M. A entropia de f respeito de μ é definido por

$$h_\mu(f) := \sup\{h_\mu(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ é uma partição de } M\}.$$

.

Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaço topológicos compactos M e N. Dizemos que g é um fator topológico de f se existe uma aplicação contínua sobrejetiva $\pi : M \to N$ satisfazendo $\pi \circ f = g \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Se π pode ser escolhida invertível (homeomorfismo), dizemos que as duas transformações são topologicamente equivalentes, ou topologicamente conjugadas, e chamamos π de conjugação topológica entre f e g.

Proposição 2.3.1. Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaço topológicos compactos M e N. Se g é um fator de F por meio de uma aplicação contínua sobrejetiva $\pi : M \to N$ então

$$h_{\pi_*\mu}(g) \leq h_\mu(F).$$

Além disso, a igualdade $h_{\pi_*\mu}(g) = h_\mu(f)$ vale sempre que π é uma conjugação topológica.

2.4 Entropia topológica

Seja (M,d) um espacio métrico compacto e $f : M \to M$ um sistema dinâmico continuo. Dado um inteiro $n \geq 0$, a distância dinâmica de ordem n entre dois pontos $x, y \in M$, é definido por

$$d_n(x,y) = \max\left\{d\left(f^k x, f^k y\right) : 0 \leq k < n\right\}$$

As bolas Bowen de ordem $n \geq 0$, centradas em $x \in M$ e de raio $\varepsilon > 0$ são definidas como

$$B_n(x,\varepsilon) = \{y \in M : d_n(x,y) < \varepsilon\}.$$

Um subconjunto $E \subset M$ é dito ser (n,ε)-separado se $d_n(x,y) \geq \varepsilon$ para todo $x \neq y \in E$. Dados $n \geq 1$ e $\varepsilon > 0$, defina

$$S(f,n,\varepsilon) := \sup\{\#(E) : E \subset M \text{ é } (n,\varepsilon) \text{ -separado }\}. \tag{2.1}$$

Definição 2.4.1. Chamamos entropia topológica de f ao limite

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S(f,n,\varepsilon).$$

Teorema 2.4.1 (Princípio Variacional)**.** Seja $f : M \to M$ uma transformação continua num espaço métrico compacto. Então

$$h_{\text{top}}(f) = \sup\left\{h_\mu(f) : \mu \in \mathscr{M}(f)\right\}.$$

Observação 2.4.1. No teorema 2.4.1 podemos mudar o conjunto $\mathscr{M}(f)$ por $\mathscr{M}_{\text{erg}}(f)$. Isso é uma consequência do teorema da decomposição ergódica. Com efeito, seja $\mu \in \mathscr{M}(f)$ e $\{\mu_P : P \in \mathscr{P}\}$ a sua decomposição ergódica. Pelo teorema da decomposição ergódica, temos

$$h_\mu(f) = \int h_{\mu_P}(f) d\tilde{\mu}(P).$$

Portanto,

$$\sup\left\{h_\mu(f) : \mu \in \mathscr{M}(f)\right\} \leq \sup\left\{h_\mu(f) : \mu \in \mathscr{M}_{\text{erg}}(f)\right\}$$

A desigualdade recíproca é trivial, uma vez que $\mathscr{M}_{\text{erg}}(f) \subset \mathscr{M}(f)$.

Observação 2.4.2. Devido ao principio variacional podemos redefinir uma medida de máxima entropia como aquela medida f-invariante μ tal que

$$h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f).$$

Definamos os conjuntos

$$\begin{aligned} \text{MME}(f) &:= \{\mu \in \mathscr{M}(f) : h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)\}, \\ \text{MME}_{\text{erg}}(f) &:= \{\mu \in \mathscr{M}_{\text{erg}}(f) : h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)\}. \end{aligned}$$

Se $\mu \in \text{MME}(f)$ diremos simplesmente que μ é uma m.m.e.

A seguinte proposição mostra que a entropia topológica é um invariante de equivalência topológica.

Proposição 2.4.1. (OLIVEIRA; VIANA, 2014). Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaço métricos compactos M e N. Se g é um fator de f por meio de uma aplicação contínua sobrejetiva $\pi : M \to N$ então

$$h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Além disso, a igualdade $h_{\text{top}}(g) = h_{\text{top}}(f)$ vale sempre que π seja uma conjugação topológica.

Observação 2.4.3. Dada uma transformação contínua $f : M \to M$ sobre um espacio métrico compacto M, se $K \subset M$ es compacto. Apesar de K não ser necessariamente invariante, podemos definir entropia topológica de f em K, por meio de conjuntos separados, bastando seguir iteradas de K, ou seja, tomando $S(f,K,n,\varepsilon) := \sup\{\#(E) : E \subset K \text{ é } (n,\varepsilon)\text{-separado}\}$ e

$$h_{\text{top}}(f,K) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S(f,K,n,\varepsilon).$$

A continuação vamos a enunciar um principio variacional relativo para transformações continuas devido a (LEDRAPPIER; WALTERS, 1977), a qual fornece uma relação entre as entropias de sistemas semi-conjugados.

Teorema 2.4.2. (LEDRAPPIER; WALTERS, 1977). Sejam M e N espaços métricos compactos e $f : M \to M$, $g : N \to N$, $\pi : M \to N$ mapas contínuos tais que π seja sobrejetivo e $\pi \circ f = g \circ \pi$. Se ν é uma medida g-invariante, então:

$$\sup_{\pi_*\mu=\nu} h_\mu(f) = h_\nu(g) + \int_N h_{\text{top}}\left(f, \pi^{-1}(y)\right) d\nu(x).$$

Observação 2.4.4. No Teorema 2.4.2, se $\pi^{-1}(y)$ é um conjunto finito, então $h_{\text{top}}(f,\pi^{-1}(y)) = 0$. Assim, se $\#(\pi^{-1}(y)) < \infty$ para todo $y \in N$, temos que $\sup_{\pi_*\mu=\nu} h_\mu(f) = h_\nu(g)$. Portanto, $h_\mu(f) \leq h_\nu(g)$, para todo $\mu \in \mathscr{M}(f)$ com $\pi_*\mu = \nu$. Isto, juntamente com a Proposição 2.3.1, implica

$$h_\nu(g) = h_\mu(f), \;\; \pi_*\mu = \nu. \tag{2.2}$$

Novamente, como g é um fator de f, pela Proposição 2.4.1 temos que $h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(f)$. Além disso, a igualdade (2.2) juntamente com o Principio variacional (Teorema 2.4.1) implicam a desigualdade contraria, portanto:

$$h_{\text{top}}(g) = h_{\text{top}}(f).$$

Pela observação acima, note que o Teorema 2.4.2 permite relacionar entropia de um homeomorfismo definido sobre uma variedade compacta com a entropia de qualquer levantamento deste homeomorfismo, para um recobrimento finito da variedade, como mostra a seguinte observação:

Observação 2.4.5. Seja M uma variedade compacta e $f : M \to M$ um homeomorfismo. Seja $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{M}$ um levantamento de f para um recobrimento finito $\pi : \overline{M} \to M$. Como $\pi \circ \overline{f} = f \circ \pi$,

y $\#(\pi^{-1}(x)) < \infty$, se $\nu \in \mathscr{M}(f)$, pela Observação 2.4.4 temos que

$$h_\nu(f) = h_\mu(\overline{f}), \ \pi_*\mu = \nu. \tag{2.3}$$

$$h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(\overline{f}). \tag{2.4}$$

Se $\mu \in \text{MME}(\overline{f})$, a igualdade (2.3) implica que $\pi_*\mu \in \text{MME}(f)$. Logo Como $\pi : \overline{M} \to M$ é um levantamento finito, toda medida f-invariante ν pode ser levantada para uma medida $\overline{f}$-invariante $\overline{\nu}$, isto é, existe $\overline{\nu}$ tal que $\pi_*\overline{\nu} = \nu$. Isto juntamente com a igualdade (2.3) implicam que toda medida de máxima entropia de f pode ser levantada para uma medida de máxima entropia de $\overline{f}$. Consequentemente,o conjunto $\text{MME}(f)$ se projeta sobrejetivamente sobre o conjunto $\text{MME}(f)$.

2.5 Desintegração de medidas ao longo de folheações

Aqui vamos considerar M (ou M^m) uma variedade riemanniana (de dimensão $m \geq 2$) e $f : M \to M$ um sistema contínuo. Dado $k \geq 1$, em lo que segue B^k denotará a bola unitária centrada no origem em $\mathbb{R}^k$, ou seja,

$$B^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 1\}.$$

Definição 2.5.1. Uma partição $\mathscr{F}$ de uma variedade M^m é dita uma folheação de dimensão $n < m$ de classe C^r $(r \geq 0)$ se existe um atlas $\mathscr{A} = \{(\phi_\alpha, B^n \times B^{m-n}) : \alpha \in I\}$ de classe C^r tal que todo $y \in B^{m-n}$ e $\alpha \in I$, temos que $\phi_\alpha(B^n \times y) \subset \mathscr{F}(\phi_\alpha(0,y))$.

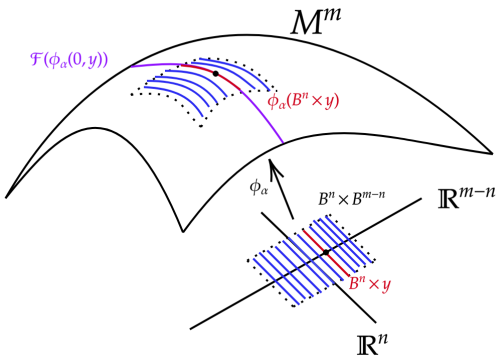

Figura 1 – Caixa folheada

A imagem $\phi_\alpha(B^n \times B^{m-n})$ e chamada de *caixa folheada* e as imagens $\phi_\alpha(B^n \times \{y\})$ são chamadas *folhas locais* ou *placas* de $\mathscr{F}$ correspondente a ϕ_α.

Definição 2.5.2. Uma folheação é dita f-invariante se $f(\mathscr{F}(x)) = \mathscr{F}(f(x))$.

Definição 2.5.3. Dada uma distribuição $E \subset TM$, dizemos que uma folheação $\mathscr{F}$ é tangente a E se $T_x\mathscr{F}(x) = E(x)$ para todo $x \in M$.

Agora vamos considerar partições dadas por folhas de uma folheação. Se o conjunto de folhas não compactas tem medida positiva então o resultado de Rokhlin não pode ser aplicado imediatamente. No entanto, pode-se estender o resultado de Rokhlin, desintegrando a medida em caixas folheadas. De fato, seja M uma variedade de dimensão $m \geq 2$, e seja μ uma medida localmente finita em M. Seja B uma caixa folheada e μ^B a restrição da medida μ para a caixa folheada B. Pelo Teorema 2.2.1, existe uma desintegração $\{\mu_x^B : x \in B\}$ de μ^B em medidas de probabilidade condicionais ao longo das placas da caixa folheada, e essa desintegração é essencialmente única. A propriedade principal é que para caixas folheadas distintas, na interseção as medidas condicionais correspondentes coincidem a menos de um fator constante, como mostra o seguinte lema:

Lema 2.5.1. [(AVILA; VIANA; WILKINSON, 2011), Lema 3.2] Sejam B e B' caixas folheadas e μ^B e $\mu^{B'}$ as restrições da medida μ para B e B', respectivamente. Se $\{\mu_x^B\}$ e $\{\mu_x^{B'}\}_x$ é a desintegração de μ^B e $\mu^{B'}$ ao longo das placas então μ_x^B e $\mu_x^{B'}$ restritos a $B \cap B'$ coincidem a menos de um fator constante para μ-quase todo ponto $x \in B \cap B'$.

Demonstração. Seja Σ uma seção transversal para a caixa folheada B, isto é, uma subvariedade de dimensão $m-k$ que intersecta cada folha local apenas em um ponto. Seja $\widehat{\mu}_B$ a medida em Σ obtida projetando a medida μ^B ao longo das folhas locais. Considere qualquer conjunto mensurável $C \subset B$ e seja $\widehat{\mu}_C$ a medida em Σ obtida como a medida projetada de $\mu|_C$ sob a projeção ao longo das folhas locais. Então a derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{d\widehat{\mu}_C}{d\widehat{\mu}_B} \in (0,1] \text{ em } \mu_C\text{-quase todo ponto.}$$

Para qualquer conjunto mensurável $E \subset C$, temos

$$\mu(E) = \int_\Sigma \mu_\xi^B(E) d\widehat{\mu}_B(\xi) = \int_\Sigma \mu_\xi^B(E) \frac{d\mu_B}{d\mu_C} d\widehat{\mu}_C(\xi).$$

Pela unicidade essencial, isto prova que a desintegração de $\mu|_C$ ao longo das folhas locais é dada por

$$\mu_x^C = \frac{d\widehat{\mu}_B}{d\widehat{\mu}_C}(\xi)(\mu_x^B|C) \text{ para } \mu\text{-quase todo ponto } x \in C.$$

onde ξ é o ponto em que a folha local que passa por x intersecta Σ. Tomando $C = B \cap B'$. Usando duas vezes a igualdade acima, temos

$$\frac{d\widehat{\mu}_B}{d\widehat{\mu}_C}(\xi)(\mu_x^B|C) = \frac{d\widehat{\mu}_{B'}}{d\widehat{\mu}_C}(\xi)(\mu_x^{B'}|C)$$

para μ-quase todo ponto x. Isto conclui o lema. □

O Lema 2.5.1 implica que existe uma família $\{\mu_x : x \in M\}$ tal que μ_x é uma medida definida por "escalonamento" com $\mu_x(M \backslash \mathscr{F}_x) = 0$, a função $x \mapsto \mu_x$ é constante nas folhas de $\mathscr{F}$, e as probabilidades condicionais μ_x^B ao longo das folhas locais de qualquer caixa folheada

B coincide quase sempre com a restrições normalizadas de μ_x para as folhas locais de B. Dos argumentos, é claro que tal família é essencialmente única. Chamamos a $\{\mu_x : x \in M\}$ de desintegração de μ ao longo de $\mathscr{F}$ e nos referimos a μ_x como classes condicionais de μ ao longo das folhas de $\mathscr{F}$.

CAPÍTULO

3

SISTEMAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS

3.1 Generalidades

Definição 3.1.1. Seja M uma variedade compacta. Um difeomorfismo $f : M \to M$ é chamado de *parcialmente hiperbólico* se admite uma decomposição não trivial Df-invariante do fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$, tal que para cada $x \in M$ e todo vetor unitário $v^\sigma \in E^\sigma(x)(\sigma = s, c, u)$ satisfaz:

$$\|D_x f v^s\| < \|D_x f v^c\| < \|D_x f v^u\| \quad e$$

$$\|D_x f|_{E^s}\| < 1 < \|(D_x f|_{E^u})^{-1}\|^{-1}$$

para alguma métrica Riemanniana. O difeomorfismo f é dito de *absolutamente parcialmente hiperbólico* se for parcialmente hiperbólica e

$$\|D_x f v^s\| < \|D_y f v^c\| < \|D_z f v^u\|$$

para todo $x, y, z \in M$ e todo vetor unitário $v^\sigma \in E^\sigma(w)$, $\sigma = s, c, u$ e $w = x, y, z$ respectivamente. Denotamos por $\mathrm{PH}^r(M)$ o conjunto dos sistemas parcialmente hiperbólicos, de classe C^r, $r \geq 1$.

Os fibrados E^s, E^u e E^c são conhecidos como fibrado estável, instável e central respectivamente. Os fibrados $E^{cs} = E^c \oplus E^s$ e $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ são chamados de fibrado centro-estável e centro-instável. Se E^σ é integrável, denotamos por $\mathscr{F}_f^\sigma$ à folheação que integra este fibrado, quando não houver risco de ambiguidade, escrevemos simplesmente por $\mathscr{F}^\sigma$, $\sigma = s, u, c, cu, cs$. Os fibrados estável e instável são unicamente integráveis por folheações invariantes (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1970). No entanto, determinar se E^c é uma questão mais delicada, mesmo que o fibrado central sendo unidimensional (HERTZ; HERTZ; URES, 2016).

Definição 3.1.2. Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Diremos que f é dinamicamente coerente se os fibrados E^{cs} e E^{cu} são integráveis por folheações f-invariantes.

Denotamos por $\mathscr{F}^{cs}$ e $\mathscr{F}^{cu}$ às folheações tangentes a E^{cs} e E^{cu}, respectivamente. Quando f é dinamicamente coerente, naturalmente obtemos uma folheação $\mathscr{F}^{c}$ tangente ao fibrado E^{c} dada por:

$$\mathscr{F}^{c}(x) = \mathscr{F}^{cs}(x) \cap \mathscr{F}^{cu}(x).$$

Definição 3.1.3. Um número χ é um expoente de Lyapunov central no ponto $x \in M$ se existe $v \in E^{c}(x)$, $v \neq 0$, tal que

$$\chi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^{n}(v)\|.$$

Se $\dim(E^{c}) = 1$ então o limite acima depende apenas de x, e existe para μ-quase todo ponto $x \in M$, para qualquer medida de probabilidade de Borel f-invariante μ (OSELEDETS, 1968). Se $\dim(E^{c}) = 1$ e μ é uma medida de probabilidade de Borel ergódica, o limite assume um único valor para μ-quase todo $x \in M$, o qual denotamos por $\lambda_c(\mu, f)$, neste caso, o expoente de Lyapunov central proporciona informação da dinâmica ao longo das folhas centrais para pontos que são relevantes para a medida ergódica μ, por exemplo, no caso que $\lambda_c(\mu, f) > 0$ significa que a dinâmica está expandindo exponencialmente na direção central em quase todo ponto; no caso que $\lambda_c(\mu, f) < 0$ significa que a dinâmica está contraindo exponencialmente na direção central em quase todo ponto. No caso que $\lambda_c(\mu, f) = 0$ tem um comportamento "quase-linear".

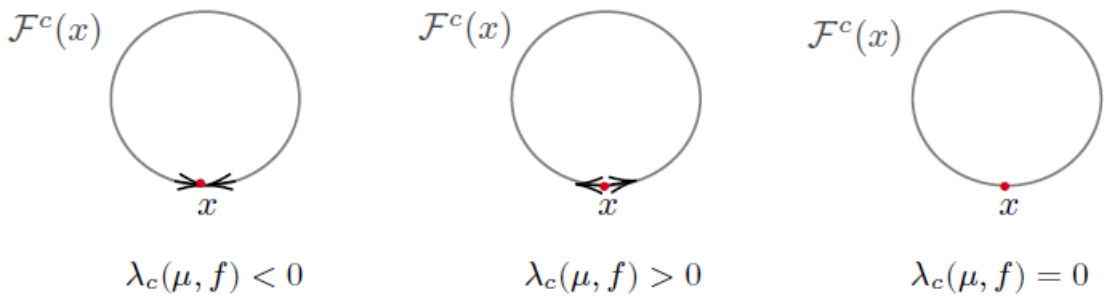

Figura 2 – Dinâmica na direção central de acordo ao expoente central

Quando $\lambda_c(\mu, f) \neq 0$ dizemos que μ é uma medida hiperbólica. Quando não houver risco de ambiguidade, escrevemos a $\lambda_c(\mu, f)$ simplesmente por $\lambda_c(\mu)$.

Definição 3.1.4. Para cada ponto $x \in M$, a classe de acessibilidade de x, denotado por $AC(x)$, é o conjunto dos pontos $y \in M$ tal que x e y podem ser conectados por um s,u caminho, isto é, um caminho composto por segmentos sobre folhas das folheações $\mathscr{F}^{s}$ e $\mathscr{F}^{u}$.

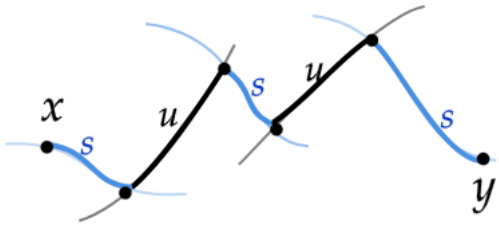

Figura 3 – s, u caminho de x para y

Dizemos que f tem a propriedade de acessibilidade se $AC(x) = M$ para algum $x \in M$.

Note que as classes de acessibilidade formam uma partição para M: Se $AC(x) \cap AC(y) \neq \emptyset$, então $AC(x) = AC(y)$.

Proposição 3.1.1. (RODRIGUEZ-HERTZ; RODRIGUEZ-HERTZ; URES, 2006). Suponha que f seja um sistema parcialmente hiperbólico de uma variedade (não necessariamente compacta) M e com folheação central unidimensional. Para todo $x \in M$, são equivalentes:

- $AC(x)$ não é aberto.
- $AC(x)$ tem interior vazio.
- $AC(x)$ é uma subvariedade C^1 e completa de codimensão um.

Além disso, se f não é acessível, o conjunto de classes de acessibilidade não abertas forma uma laminação.

3.2 Entropia de sistemas $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$

Como foi anunciado na introdução, os sistemas parcialmente hiperbólicos com folheação central compacta terão um papel central nesta tese. Para entrar em contexto, vamos apresentar um exemplo. Considere no 3-toro $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ o automorfismo F definido por

$$F(x,y,z) = (2x+y, x+y, z).$$

O automorfismo F tem três autovalores: λ, 1 e λ^{-1} como $\lambda = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$. Portanto, F é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Além disso, a folheação central é compacta uma vez que $\mathscr{F}^c(x) = \{x\} \times S^1$. Este é um dos exemplos de parcialmente hiperbólicos mais simples que existe e pertence a uma classe importante de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, conhecida como difeomorfismos parcialmente hiperbólicos skew product topológicos (GOGOLEV, 2011).

Definição 3.2.1. Seja X uma variedade topológica compacta, ou seja, um espaço métrico de Hausdorff, segundo contável com estrutura localmente euclidiana. Seja M uma variedade

suave compacta e $p : M \to X$ um fibrado localmente trivial tal que $\mathscr{F}^c := \left\{p^{-1}(x), x \in X\right\}$ é uma folheação contínua com folhas de classe C^1. Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ de classe C^1 com fibrado central $E^c = T\mathscr{F}^c$ é chamado de *skew product topológico parcialmente hiperbólico* . Portanto, um skew product topológico parcialmente hiperbólico f satisfaz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f_c"] & X \end{tikzcd}$$

onde $f_c : X \to X$ é um homeomorfismo hiperbólico de X. Dizemos que f é um skew product topológico sobre um automorfismo hiperbólico A se o homeomorfismo induzido $f_c : X \to X$ é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico A.

Usando os resultados de (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1970) e o fato de que o mapa base é expansivo pode ser verificado facilmente que a definição acima é robusto por pequenas perturbações C^1, isto é, se f um difeomorfismo C^1 parcialmente hiperbólico skew product topológico, qualquer C^1-perturbação pequena de f é ainda um difeomorfismo parcialmente hiperbólico skew product topológico. A dinâmica quociente também tem a propriedade de ser topologicamente Anosov (AOKI; HIRAIDE, 1994).

Os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos skew product topológicos da definição 3.2.1, generaliza a definição estândar de skew product (HAMMERLINDL; POTRIE,) sobre automorfismos hiperbólicos, definidos da seguinte maneira: dada M e X variedades fechadas, um automorfismo hiperbólico $A : M \to M$ com decomposição da forma $TM = E^s_A \oplus E^u_A$ e um mapa contínuo $g : M \to \mathrm{Diff}^1(X)$ tal que para cada $x \in M$ satisfaz:

$$\left\| Df|_{E^s(x)} \right\| < m(D_t g_x) \leq \|D_t g_x\| < m\left(Df|_{E^u(x)}\right) \quad \forall t \in X$$

O skew product de A e g é o difeomorfismo $F : M \times X \to M \times X$ definido por

$$F(x,t) = (A(x), g_x(t)).$$

Não é difícil mostrar que F é parcialmente hiperbólico com decomposição $T(M \times X) = \hat{E}^s \oplus \hat{E}^c \oplus \hat{E}^u$, com $\dim\left(\hat{E}^\sigma(x,t)\right) = \dim\left(E^\sigma_A(x)\right), \sigma \in \{s,u\}$.

È claro que todo Skew product topológico tem folhas centrais compactas, a questão inversa atribuída em (HERTZ; HERTZ; URES, 2007) a C. C. Pugh, esta ainda em aberto:

Questão 3.2.1. Todo difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com folhas centrais compactas são finitamente cobertos por um skew product topológico parcialmente hiperbólico?

A questão acima foi estudada independentemente por D. Bohnet, P. Carrasco e A. Gogolev, e deram respostas positivas sob certas suposições (BOHNET, 2011; CARRASCO; RODRIGUEZ-HERTZ, 2021; GOGOLEV, 2011).

Teorema 3.2.1. (GOGOLEV, 2011). Se f é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com folhas centrais compactas, e $\dim E^c = 1, \dim E^u \leq 2$, e $\dim E^s \leq 2$, então f é finitamente coberto por um difeomorfismo skew product topológica.

Folhas centrais uniformemente compactas

Dada uma folheação compacta $\mathscr{F}$ de uma variedade compacta M. Equipamos o espaço quociente $M_{\mathscr{F}}$ com a topologia quociente. Uma métrica Riemanniana induz um volume Riemanniano nas folhas de $\mathscr{F}$. A folheação $\mathscr{F}$ é dita uniformemente compacta se todas as folhas são compactas e

$$\sup_{x \in M} vol(\mathscr{F}(x)) < +\infty.$$

Notação 1. Seja M uma variedade fechada, $\mathrm{PHC}^r_{c=1}(M)$ denotará o conjunto dos difeomorfismos $f : M \to M$ de classe C^r, parcialmente hiperbólicos, dinamicamente coerentes com folheação central uniformemente compacta de dimensão um.

O resultado principal de (MARTINO; MARTINCHICH, 2018) mostra que se f é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinamicamente coerente com folheação central compacta e $\dim(E^u) = 1$ então o volume das folhas centrais é uniformemente limitado, ou seja, $\mathscr{F}^c$ é uniformemente compacta.

Seja $M_c := M/\mathscr{F}^c$ o espaço das folhas centrais e $\pi_c : M \to M_c$ a projeção. Quando $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta, a Proposição 2.2 em (CORRASCO, 2011) implica que M_c é um espaço Hausdorff compacto, portanto metrizável (BOURBAKI, 2013). O sistema f induz naturalmente um homeomorfismo $f_c : M_c \to M_c$, $f_c(\pi_c(x)) = \pi_c(f(x))$. f_c é chamada *dinâmica quociente* de f.

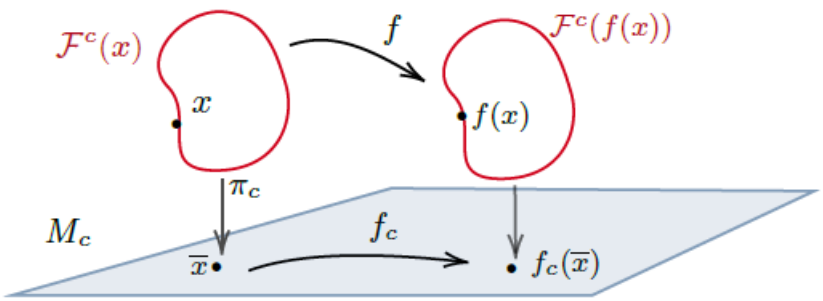

Figura 4 – Dinâmica quociente

Teorema 3.2.2. (BOHNET, 2011). Se f é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com folhas centrais uniformemente compactas e $\dim E^u = 1$, então f é finitamente coberto por um skew product topológico parcialmente hiperbólico onde o mapa base é um automorfismo hiperbólico num toro.

Outras propriedades interessantes ocorrem quando a folhação central é uniformemente compacta, uma de elas é que folhas centrais e folhas instáveis (estáveis) se intersectam em apenas um ponto:

Lema 3.2.1. (CORRASCO, 2011). Suponha que o fibrado central $\mathscr{F}^c$ é uniformemente compacta. Então

$$\mathscr{F}^u(x) \cap \mathscr{F}^c(x) = \{x\}, \ \ \forall x \in M.$$

Uma outra propriedade importante é existência de s-holonomia global entre duas folhas centrais que intersectam uma mesma folha estável (ou instável).

Lema 3.2.2. (CORRASCO, 2011). Seja $x, y \in M$ satisfazendo $\mathscr{F}^{cs}(x) = \mathscr{F}^{cs}(y)$. Então existe uma s-holonomia $h^s : \mathscr{F}^c(x) \to \mathscr{F}^c(y)$ com

$$h^s(\mathscr{F}^c(x)) = \mathscr{F}^c(y).$$

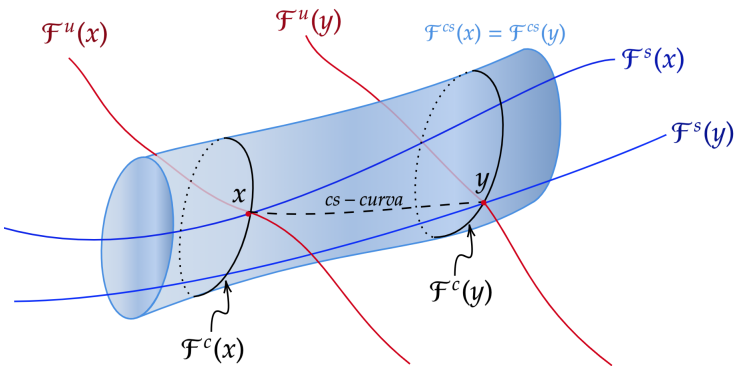

Figura 5 – s-holonomia das folhas centrais

Entropia da dinâmica quociente

Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^r_{c=1}(M)$. Se $f_c : M_c \to M_c$ é a dinâmica quociente, é claro que f_c é um homeomorfismo hiperbólico. Se f_c é transitivo então f_c admite uma única medida de máxima entropia, a qual tem estrutura de produto local, ou seja, é o produto de medidas suportadas nas variedades estáveis e instáveis (BOWEN, 1970; MARGULIS, 1970).

O principio variacional de Ledrappier-Walter permite relacionar entropia topológica de f com a entropia topológica da dinâmica quociente f_c.

Proposição 3.2.1. Seja M uma variedade fechada, $f \in \mathrm{PHC}^r_{c=1}(M)$ e $\mu \in \mathscr{M}(f)$. Então $h_\mu(f) = h_\nu(f_c)$ para $\nu = (\pi_c)_*\mu$. Em particular,

$$h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(f_c).$$

Demonstração. Pelo princípio variacional de Ledrappier-Walter (Teorema 2.4.2),

$$\sup_{\mu:(\pi_c)_*\mu=\nu} h_\mu(f) = h_\nu(f_c) + \int_{M/\mathscr{F}c} h_{\mathrm{top}}\left(f, \pi_c^{-1}(y)\right) d\nu(y). \tag{3.1}$$

Como $\pi^{-1}(y)$ é uma folha central e $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta, então $\pi^{-1}(y)$ é um círculo e suas iteradas têm comprimento limitado, temos que $h_{\mathrm{top}}\left(f, \pi^{-1}(y)\right) = 0$. Portanto $h_\mu(f) \leq h_\nu(f_c)$. Isto juntamente com o fato de que f_c é um fator de f, implica que

$$h_\mu(f) = h_\nu(f_c). \tag{3.2}$$

Finalmente, se $\mu \in \mathrm{MME}(f)$, a igualdade (3.2) implica que $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{(\pi_c)_*\mu}(f_c) \leq h_{\mathrm{top}}(f_c)$. E como f_c é fator topológico de f temos a igualdade $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(f_c)$. □

Corolário 3.2.1. Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^r_{c=1}(M)$. Se f_c é topologicamente transitiva e $\mu \in \mathrm{MME}(f)$ então $\mathrm{supp}(\mu) \cap \mathscr{F}^c(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in M$.

Demonstração. Seja $\mu \in \mathrm{MME}(f)$, pela Proposição 3.2.1 segue que $(\pi_c)_*(\mu)$ é uma medida de máxima entropia de f_c. Como f_c é um homeomorfismo hiperbólico topologicamente transitivo então admite uma única medida de máxima entropia ν a qual tem suporte total. Logo $(\pi_c)_*(\mu) = \nu$ e $M_c = \mathrm{supp}(\pi_c)_*(\mu) = \pi(\mathrm{supp}(\mu))$. Isso implica que $\mathrm{supp}(\mu) \cap \mathscr{F}^c(x) \neq \emptyset$, para todo ponto $x \in M$. □

Medidas gêmeas de medidas hiperbólicas de sistemas en $\mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$

O seguinte resultado é um argumento de simetria, usando as folhas centrais unidimensionais, pode ser mostrado que cada medida invariante η com expoente central negativo tem associado uma outra medida invariante η^*, com a mesma entropia de η e expoente central não negativa. A medida η^* é chamada de *medida gêmea* de η.

Proposição 3.2.2. (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019). Seja $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ tal que f preserva alguma orientação de $\mathscr{F}^c$. Se $\eta \in \mathscr{M}_{\mathrm{erg}}(f)$ é tal que $\lambda_c(\eta) < 0$, então existe outra medida de probabilidade f-invariante η^* que é isomórfica a η e com expoente $\lambda_c(\eta^*) \geq 0$. Mais precisamente, existe um conjunto mensurável $Z \subset M$ com $\eta(Z) = 1$ tal que

$$\beta : Z \to \beta(Z),\ x \mapsto \sup \mathscr{W}^c_s(x, f) \text{ e } \eta^* = \beta_*\eta$$

é um homeomorfismo, onde $\mathscr{W}^c_s(x, f) := \left\{y \in \mathscr{F}^c(x) : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d\left(f^n x, f^n y\right) < 0\right\}$ e $\sup \mathscr{W}^c_s(x)$ é o ponto extremo de $\mathscr{W}^c_s(x)$ na direção positiva.

Corolário 3.2.2. Seja $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ e $\mu \in \mathrm{MME}_{\mathrm{erg}}(f)$. Se $\lambda_c(\mu) < 0$, então existe $\mu^* \in \mathrm{MME}_{\mathrm{erg}}(f)$ com expoente $\lambda_c(\mu^*) \geq 0$.

Demonstração. Seja $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$, se $\mathscr{F}^c$ é não orientável, tomamos $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{M}$ um levantamento de f para um recobrimento duplo $\pi : \overline{M} \to M$ e podemos assumir que la folheação central de $\overline{f}$ é orientável. Se $\overline{f}$ não preserva orientação de $\mathscr{F}^c_{\overline{f}}$ então $g = \overline{f}^2$ preserva a orientação de $\mathscr{F}^c_g = \mathscr{F}^c_{\overline{f}}$. Se μ é uma medida de máxima entropia com $\lambda_c(\mu, f) < 0$. Pela Observação 2.4.5 μ pode ser levantada para uma medida medida de máxima entropia $\overline{\mu}$, ou seja, $\pi_* \overline{\mu} = \mu$. É claro que $\lambda_c(\mu, f) < 0$ implica que $\lambda_c(\overline{\mu}, \overline{f}) < 0$. Como $\lambda_c(\overline{\mu}, \overline{f})$ também é uma medida de máxima entropia para g, usando a Proposição 3.2.2 obtemos uma medida de máxima entropia ergódica $\overline{\mu}^*$ para g com $\lambda_c(\overline{\mu}^*, g) \geq 0$. Como $\overline{\mu}$ é $\overline{f}$-invariante, pela construção da medida $\overline{\mu}^*$ por meio da aplicação β como na Proposição 3.2.2 é claro que $\overline{\mu}^*$ também é $\overline{f}$-invariante e $\lambda_c(\overline{\mu}^*, \overline{f}) \geq 0$. Tomando $\mu^* := \pi_* \overline{\mu}^*$, obtemos que $\mu^* \in \mathrm{MME}_{erg}(f)$ e $\lambda_c(\mu^*) \geq 0$. □

Corolário 3.2.3. Se $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$, então

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \lambda_c(\mu) \leq 0\} = \sup\{h_\mu(f) : \lambda_c(\mu) \geq 0\}.$$

Demonstração. Segue do corolário 3.2.2 e do Principio variacional (Teorema 2.4.1). □

3.3 AB-sistemas

Sejam A e B automorfismos de uma nilvariedade compacta N tal que A é hiperbólico e $AB = BA$. Então A e B definem um difeomorfismo:

$$f_{AB} : M_B \to M_B, \quad (v,t) \mapsto (Av, t),$$

onde

$$M_B = N \times \mathbb{R}/(v,t) \sim (Bv, t-1).$$

O automorfismo f_{AB} é chamado *AB-sistema protótipo*.

Dois difeomorfismos parcialmente hiperbólicos f e g são conjugadas por folhas centrais se existem folheações invariantes $\mathscr{F}^c_f$ e $\mathscr{F}^c_g$ tangentes a E^c_f e E^c_g, respectivamente, e um homeomorfismo h tal que para cada folha L de $\mathscr{F}^c_f$, $h(L)$ é uma folha de $\mathscr{F}^c_g$ e $h(f(L)) = g(h(L))$.

Definição 3.3.1. Um sistema parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ é um AB-sistema se preserva uma orientação do fibrado central E^c e é conjugado por folhas centrais com um AB-sistema protótipo.

Exemplo 3.4. Se f é uma AB-sistema com $B = id_N$ então $M_B = N \times S^1$ e f é um skew product topológico parcialmente hiperbólico com fibrado trivial, isto é, com folheação central $\mathscr{F}^c = \{\{v\} \times S^1 : v \in N\}$. Se $B = A$ então f é a suspensão do difeomorfismo Anosov A, neste caso temos folhas não compactas.

Os casos do Exemplo 3.4 não são os únicos, pois, pela Proposição 4.2 e Teorema 4.3 de (HAMMERLINDL, 2017) temos que:

Teorema 3.4.1. Seja $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ um C^2 difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinamicamente coerente com folhas centrais compactas. Se f preserva alguma orientação de E^c e f é não acessível então f é um AB-sistema.

Para um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com folheação central unidimensional, uma subvariedade de classe C^1 tangente a $E^u \oplus E^s$ é chamada *su*-folha.

Teorema 3.4.2. (HAMMERLINDL, 2017) Todo *AB*-sistema não acessível tem uma *su*-folha compacta.

Para considerar sistemas sobre infra-nilvariedades que não preservam uma orientação de E^c, também consideramos a seguinte generalização introduzida em (HAMMERLINDL, 2017).

Definição 3.4.1. Um difeomorfismo f é um infra-AB-sistema se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f^{n_0} é levantado para um AB-sistema por um recobrimento finito.

No toro $\mathbb{T}^3$, se a folheação central $\mathscr{F}^c$ é compacta, então o seguinte resultado segue do Corolário 4.9 de (HAMMERLINDL, 2017).

Teorema 3.4.3. Suponha que $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ seja um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com folhas centrais compactas. Se f não é acessível então f é um infra-AB-sistema .

3.5 AI-sistemas

Agora consideramos sistemas parcialmente hiperbólicos em variedades não compactas. Suponha que M seja compacto e $f : M \to M$ seja parcialmente hiperbólico. Então, qualquer recobrimento de f para um espaço de recobrimento de M também pode ser considerado parcialmente hiperbólico. Além disso, qualquer restrição de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico a um subconjunto aberto invariante também pode ser considerado como um parcialmente hiperbólico. Denotamos por $P : \widetilde{M} \to M$ o recobrimento universal de M, o levantamento de f para o espaço de recobrimento universal $\widetilde{M}$ será denotado por $\widetilde{f}$ e as folheações estável, instável e central para $\widetilde{f}$ os denotamos por $\widetilde{\mathscr{F}}^s$, $\widetilde{\mathscr{F}}^u$ e $\widetilde{\mathscr{F}}^c$, respectivamente.

Definição 3.5.1. Um sistema parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ tem estrutura de produto global se ele é dinamicamente coerente e as folheações no recobrimento universal $\widetilde{M}$, satisfazem as seguinte propriedades para todo $x, y \in \tilde{M}$:

1. $\widetilde{\mathscr{F}}^u(x)$ e $\widetilde{\mathscr{F}}^{cs}(y)$ se intersectam em um único ponto,

2. $\widetilde{\mathscr{F}}^s(x)$ e $\widetilde{\mathscr{F}}^{cu}(y)$ se intersectam em um único ponto,

3. se $x \in \widetilde{\mathscr{F}}^{cs}(y)$, então $\widetilde{\mathscr{F}}(x)$ e $\widetilde{\mathscr{F}}^s(y)$ se intersectam em um único ponto, e

4. se $x \in \widetilde{\mathscr{F}}^{cu}(y)$, então $\widetilde{\mathscr{F}}^c(x)$ e $\widetilde{\mathscr{F}}^u(y)$ se intersectam em um único ponto.

Seja A um automorfismo hiperbólico numa nilvariedade compacta N e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. O difeomorfismo AI-sistema protótipo é definido por

$$f_{AI} : N \times I \to N \times I, \quad (v,t) \to (Av,t).$$

O sistema f_{AI} é um parcialmente hiperbólico com folhas centrais unidimensionais, homeomorfas a I, mais precisamente, $\mathscr{F}^c(x,t) = \{x\} \times I$ para todo $(x,t) \in N \times I$.

Definição 3.5.2. Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : X \to X$ de uma variedade (não compacta) X é um AI-sistema se possui estrutura de produto global, preserva alguma orientação do fibrado central e é conjugado por folhas centrais com um AI-sistema protótipo.

Agora, considere $f : X \to X$ um AI-sistema. Então, existe um AI-sistema protótipo $f_{AI} : N \times I \to N \times I$, e um homeomorfismo $h : X \to N \times I$ que conjuga as folhas centrais de f e f_{AI}. Sejam $\widetilde{X} \to X$ e $\widetilde{N} \to N$ recobrimentos universais, então f e h são levantadas para funções $\tilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, e $\tilde{h} : \widetilde{X} \to \widetilde{N} \times I$. Cada folha central de $\tilde{f}$ é da forma $\tilde{h}^{-1}(\{v\} \times I)$ para algum $v \in \widetilde{N}$. Em geral, os levantamentos de f e h não são únicas, eles podem ser escolhidos de modo que

$$\tilde{h} \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}^{-1}(v \times I) = Av \times I,$$

onde $A : \widetilde{N} \to \widetilde{N}$ é um automorfismo do grupo de Lie hiperbólico $\widetilde{N}$. Como A fixa o elemento identidade do grupo de Lie, existe uma folha central mapeada para si mesma por $\widetilde{f}$, a qual denotamos por L. Como L é homeomorfo a $\mathbb{R}$, podemos dar uma ordem nos pontos de L e definir intervalos abertos $(a,b) \subset L$ para $a,b \in L$ e supremo $\sup J$ para subconjuntos $J \subset L$ da mesma maneira como são definidas para $\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\
N \times I \arrow[r, "A \times id"] & N \times I
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{h}"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\widetilde{h}"] & \widetilde{\mathscr{F}}^c(x) \arrow[d, mapsto] \\
\widetilde{N} \times I \arrow[r, "A \times id"] & \widetilde{N} \times I & \{v\} \times I
\end{tikzcd}$$

Agora, vamos considerar um AI-sistema f não acessível e L uma folha central fixa para $\widetilde{f}$ como acima. Defina

$$\Lambda_f = \{t \in L : AC(t) \text{ não é aberto } \}.$$

Lema 3.5.1. (HAMMERLINDL, 2017). O conjunto Λ_f é fechado e não vazio.

Demonstração. Como $\widetilde{X}$ é conexo, se todas as classes de acessibilidade são abertas, f deveria ser acessível (também $\widetilde{f}$). Portanto, existe pelo menos uma classe de acessibilidade não aberta. Pela estrutura de produto global, esta classe intersecta a L. □

Lema 3.5.2. Se $t \in \Lambda_f$ então $AC(t) = \widetilde{\mathscr{F}}^s\big(\widetilde{\mathscr{F}}^u(t)\big) = \widetilde{\mathscr{F}}^u\big(\widetilde{\mathscr{F}}^s(t)\big)$.

Demonstração. Cada folha central de $\widetilde{X}$ é da forma $\widetilde{h}^{-1}(v \times I)$ para algum $v \in \widetilde{N}$. Pela estrutura de produto global, para cada $v \in \widetilde{N}$, existem (únicos) pontos $x_v, y_v, z_v, t_v \in \widetilde{X}$ dependendo continuamente de v tal que

$$x_v \in \widetilde{\mathscr{F}}^s(t), \quad y_v \in \widetilde{\mathscr{F}}^u(x_v) \cap \widetilde{h}^{-1}(v \times I), \quad z_v \in \widetilde{\mathscr{F}}^s(y_v), \quad t_v \in \widetilde{\mathscr{F}}^u(z_v) \cap L.$$

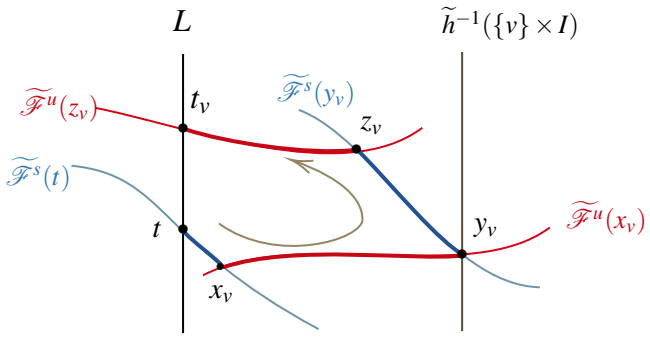

Figura 6 – Interseção de $AC(t)$ com a folha central L

Como $\widetilde{N}$ é conexo, o conjunto

$$\left\{t_v : v \in \widetilde{N}\right\} \subset L \cap AC(t)$$

é conexo e pela Proposição 3.1.1, este conjunto tem interior vazio como subconjunto de L. Portanto, consiste em um único ponto t. Isto prova que $\widetilde{\mathscr{F}}^s(\widetilde{\mathscr{F}}^u(t))$ e $\widetilde{\mathscr{F}}^u(\widetilde{\mathscr{F}}^s(t))$ intersecta cada folha $\widetilde{h}^{-1}(v \times I)$ no mesmo ponto único y_v e assim os dois conjuntos são iguais. Este conjunto é s e u-saturado e portanto contém a $AC(t)$. □

Pela estrutura de produto global, para qualquer $x \in \widetilde{X}$, existe um único ponto $R(x) \in L$ tal que $\widetilde{\mathscr{F}}^u(x)$ intercepta a $\widetilde{\mathscr{F}}^s(R(x))$. Isso define uma retração, $R : \widetilde{X} \to L$. Pelo lema anterior, se $t \in \Lambda_f$ então $R^{-1}(t) = AC(t)$.

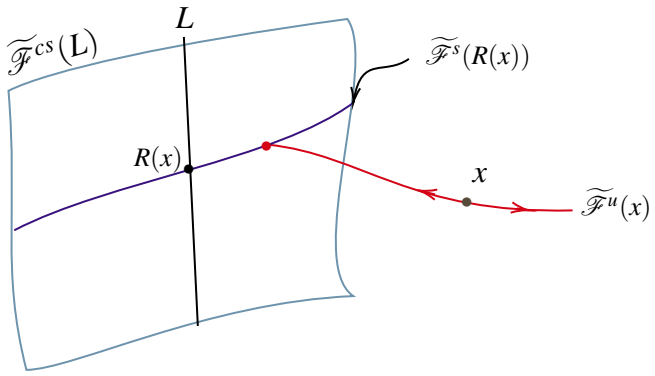

Figura 7 – A retração $R : \widetilde{X} \to L$

Seja $\alpha : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ uma transformação de recobrimento. Então α define um mapa $g_\alpha \in \mathrm{Homeo}^+(\Lambda_f)$ dado pela restrição de $R \circ \alpha$ a Λ_f. Defina

$$G = \left\{ g_\alpha : \alpha \in \pi_1(\widetilde{X}) \right\}.$$

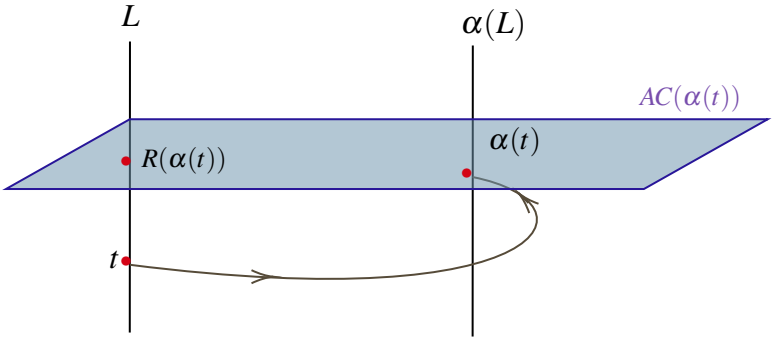

Figura 8 – O mapa g_α

Lema 3.5.3. (HAMMERLINDL, 2017) Seja $t \in \Lambda_f$, $AC(t) \subset \widetilde{X}$ se projeta sobre uma *su*-folha compacta em X se e somente se $t \in \mathrm{Fix}(G)$.

3.6 Entropia instável

Seja $\mathscr{F}$ uma folheação invariante, uma partição ξ de M é dita crescente geradora subordinada a $\mathscr{F}$ se

(a) $\xi(x)$ contem uma uma vizinhança aberta de x em $\mathscr{F}(x)$ para μ-q.t.p $x \in M$.

(b) $\xi(x) \subset \mathscr{F}(x)$ para μ-q.t.p $x \in M$.

(c) $f^{-1}\xi \geq \xi$

Suponha que M admite uma partição mensurável crescente geradora ξ subordinada a $\mathscr{F}$. Seja μ é uma medida invariante e $\{\mu_{\xi(x)}\}_{x \in M}$ a desintegração de μ respeito de ξ. A entropia em relação

a $\mathscr{F}$ é definida como:

$$h(f,\mu,\mathscr{F}) = -\int \log \mu_{\xi(x)}(f^{-1}\xi(f(x)))d\mu.$$

Esta fórmula não depende da escolha de ξ. Pode ser mostrado que a folheação instável $\mathscr{F}^u$ sempre admite partições crescentes geradoras (YANG, 2016). Para simplificar notação, denotamos $h(f,\mu,\mathscr{F}^u)$ por $h^u_\mu(f)$.

Proposição 3.6.1. (LEDRAPPIER; YOUNG, 1985) Seja $f \in \mathrm{PH}^2(M)$. Então, para qualquer $\nu \in \mathscr{M}_{erg}(f)$,

$$h^u_\mu(f) \leq h_\mu(f).$$

Se todos os expoentes de Lyapunov centrais de μ são não positivos, então a desigualdade acima é uma igualdade.

3.7 Entropia topológica instável

Seja d^u a métrica induzida pela estrutura riemanniana na variedade instável, e seja $d^u_n := \max_{0\leq j\leq n-1} d^u(f^j(x), f^j(y))$. Seja $\mathscr{F}^u(x,\delta)$ a bola aberta de raio $\delta > 0$ com respeito de d^u centrada em x na variedade $\mathscr{F}^u(x)$. Um subconjunto $E \subset \mathscr{F}^u(x,\delta)$ é dito (n,ε) *u-separado* se $d^u_n(y,z) \geq \varepsilon$ para todo $y,z \in E$. Seja

$$N^u(f,\varepsilon,n,x,\delta) := \max\{\#(F) : F \text{ é um subconjunto } (n,\varepsilon)\ u\text{-separado de } \overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}\}.$$

Definição 3.7.1. A *entropia topológica instável* de f sobre M, denotado por $h^u_{\mathrm{top}}(f)$ é definido como

$$h^u_{\mathrm{top}}(f) := \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in M} h^u_{\mathrm{top}}(f,\overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}),$$

onde

$$h^u_{\mathrm{top}}(f,\overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N^u(f,\varepsilon,n,x,\delta).$$

Uma definição equivalente para entropia topológica instável pode ser feita usando conjuntos geradores. De fato, um subconjunto $F \subset \mathscr{F}^u(x,\delta)$ é dito (n,ε) *u-gerador* se para todo $y \in \mathscr{F}^u(x,\delta)$ existe um ponto $z \in F$ tal que $d^u_n(y,z) \leq \varepsilon$. Seja

$$S^u(f,\varepsilon,n,x,\delta) := \inf\{\#(F) : F \text{ é um subconjunto } (n,\varepsilon)\ u\text{-gerador de } \overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}\}.$$

Assim, pode-se provar facilmente que

$$N^u(f,2\varepsilon,n,x,\delta) \leq S^u(f,\varepsilon,n,x,\delta) \leq N^u(f,\varepsilon,n,x,\delta).$$

Então, na Definição 3.7.1 temos que

$$h^u_{\mathrm{top}}(f,\overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S^u(f,\varepsilon,n,x,\delta).$$

O seguinte lema assegura que na definição 3.7.1 podemos tomar $\delta > 0$ fixo, ou seja, não precisamos $\delta \to 0$.

Lema 3.7.1. Para qualquer $\delta > 0$,

$$h^u_{\text{top}}(f) = \sup_{x \in M} h^u_{\text{top}}(f, \overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}).$$

Teorema 3.7.1. (HU; HUA; WU, 2017). Seja $f \in \text{PH}^{1+\alpha}(M)$, então

(1) $h^u_{\text{top}}(f) \leq h_{\text{top}}(f)$

(2) Se ν não possui exponentes centrais positivos então

$$h_\nu(f) = h^u_\nu(f).$$

Por (HU; HUA; WU, 2017) e (WANG; ZHU, 2015) temos que se $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta de dimensão um então $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(\mathscr{F}^u)$.

O seguinte resultado é conhecido como u-principio variacional, o qual pode ser encontrado em (HU; HUA; WU, 2017):

Teorema 3.7.2 (u-principio variacional)**.** Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^1, então

$$h^u_{\text{top}}(f) = \sup\{h^u_\mu(f) : \mu \in \mathbb{P}_{erg}(f)\}.$$

A medida em que o supremo é atingido no u-princípio variacional é chamada de *medida de máxima u-entropia* para f. Defina

$$\text{MME}^u(f) = \left\{\mu \in \mathscr{M}(f) : h^u_\mu(f) = h^u_{\text{top}}(f)\right\}, \text{ e}$$

$$\text{MME}^u_{erg}(f) = \left\{\mu \in \mathscr{M}_{erg}(f) : h^u_\mu(f) = h^u_{\text{top}}(f)\right\}.$$

Se $\mu \in \text{MME}^u(f)$, de maneira abreviada diremos que μ é uma u-m.m.e.

Observação 3.7.1. Seja $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(M)$, o Corolário 3.2.3 e a Proposição 3.6.1 implicam que

$$h^u_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(f).$$

Portanto, $\text{MME}^u(f) \subseteq \text{MME}(f)$. Porém a inclusão contraria não sempre acontece. Por exemplo, em (URES; VIANA; YANG, 2021), no caso $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(M^3)$ é acessível temos que $\mu \in \text{MME}^u_{erg}(f)$ se e somente se $\lambda_c(\mu) \leq 0$. Portanto, para toda medida de máxima entropia ergódica ν com $\lambda_c(\nu) > 0$ temos que $\nu \notin \text{MME}^u_{erg}(f)$.

CAPÍTULO

4

EXISTÊNCIA DE SISTEMAS DE MEDIDAS MARGULIS

4.1 Sistemas Margulis e propriedades

Definição 4.1.1. Dada uma folheação $\mathscr{F}$ de uma variedade Riemanniana M. Um $\mathscr{F}$-sistema continuo de medidas em M é uma família $\{m_x\}_{x\in M}$ tal que:

(i) para todo $x \in M$, m_x é uma medida de Radon em $\mathscr{F}(x)$;

(ii) para todo $x, y \in M$, $m_x = m_y$ se $\mathscr{F}(x) = \mathscr{F}(y)$;

(iii) para cada carta de folheação $B \subset M$ o mapa:

$$x \mapsto m_x(\phi|\mathscr{F}_B(x)) = \int_{\mathscr{F}_B(x)} \phi(y)dm_x(y)$$

é continuo, para qualquer $\phi \in C_c(M)$.

A propriedade Radon (i) significa que cada m_x é uma medida de Borel e finita em subconjuntos compactos da folha $\mathscr{F}(x)$ considerando a topologia intrínseca em cada folha.

Definição 4.1.2. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\mathscr{F}$ uma folheação f-invariante. Um $\mathscr{F}$-sistema continuo de medidas $\{m_x\}_{x\in M}$ em M é chamada de $\mathscr{F}$-sistema de Margulis se existe algum número $D > 0$ tal que

$$\frac{d(f^* m_{f(x)})}{dm_x}(z) = D, \quad \text{para todo } x \in M. \tag{4.1}$$

As medidas m_x são chamadas de medidas *$\mathscr{F}$-condicionais de Margulis*, e a constante D é chamada de *constante de dilatação* ou *constante de Margulis*.

Seja $f \in \mathrm{PH}^r(M)$ dinamicamente coerente, para $\sigma \in \{s,u,cs,cu\}$, um $\mathscr{F}^\sigma$-sistema de Margulis a chamaremos simplesmente de σ-sistema de Margulis.

Definição 4.1.3. Um $\mathscr{F}$-sistema continuo de medidas $\{m_x\}_{x\in M}$ é um sistema localmente finito uniforme se para cada $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon > 0$ tal que

$$m_x(\mathscr{F}(x,\varepsilon)) \leq K_\varepsilon, \ \ \forall x \in M.$$

Sejam $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ folheações transversais e f-invariantes por algum difeomorfismo $f \in Diff^1(M)$. Assuma que $\{m_x\}_{x\in M}$ é um $\mathscr{F}_1$-sistema continuo de medidas em M. Se $\mathscr{F}_2$ é transversal a $\mathscr{F}_1$ podemos definir $\mathscr{F}_2$-holonomias entre subconjuntos das folhas de $\mathscr{F}_1$ da seguinte maneira: Seja $x,y \in M$ tal que $y \in \mathscr{F}_2(x,R)$, $R > 0$ por transversalidad existe uma vizinhança $V_y \in \mathscr{F}_1(y)$ e uma aplicação chamada de $\mathscr{F}_2$-holonomia $h : V_y \to \mathscr{F}_1(x)$ tal que $h(z) = \mathscr{F}_2(z,R) \cap \mathscr{F}_1(x)$ e h é um homeomorfismo sobre sua imagem. Uma $\mathscr{F}_2$-holonomia $h : A_1 \to A_2$ é dita de $(\mathscr{F}_2,\delta)$-holonomia se

$$\sup_{x\in A_1} d_{\mathscr{F}_2}(x,h(x)) \leq \delta,$$

onde $d_{\mathscr{F}_2}$ é a distância definida em cada folha de $\mathscr{F}_2$ dada pela estrutura Riemanniana da variedade induzida na folha.

Definição 4.1.4. Dizemos que um $\mathscr{F}_1$-sistema contínuo de medidas $\{m_x\}_{x\in M}$ é um sistema invariante por $\mathscr{F}_2$-holonomia (ou $\mathscr{F}_2$-invariante) se para toda $(\mathscr{F}_2,\delta)$-holonomia $h : A_1 \to A_2$ temos que

$$m_{h(x)}(h(A_1)) = m_x(A_1).$$

Em geral para uma folheação invariante, não está claro se a constante de Margulis é único ou não. Ou seja, podem existir duas famílias de Margulis com diferentes constantes de dilatação. No entanto, se $f : M \to M$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e $\{m^u_x\}_{x\in M}$ um $\mathscr{F}^u$-sistema de Margulis, a seguinte proposição mostra que o logaritmo da constante de dilatação deve ser igual à entropia topológica instável.

Proposição 4.1.1. Se $\{m^u_x\}_{x\in M}$ um $\mathscr{F}^u$-sistema de Margulis, com constante $D_u > 1$, cs-invariante e m^u_x com suporte total. Então

$$\log D_u = h^u_{top}(f).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja E um conjunto $(n,\varepsilon),u$-gerador para $\overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}$. Logo,

$$f^n\left(\mathscr{F}^u(x,\delta)\right) \subset \bigcup_{y\in f^n(E)} \mathscr{F}^u(y,\varepsilon).$$

Por finitude local e cs-invariância do sistema $\{m^u_x\}_{x\in M}$, existe $K_\varepsilon > 0$, tal que $K_\varepsilon^{-1} \leq m^u\left(\mathscr{F}^u(y,\varepsilon)\right) \leq K_\varepsilon$ para qualquer $y \in M$. Assim

$$m^u\left(f^n\left(\mathscr{F}^u(x,\delta)\right)\right) \leq K_\varepsilon S^u(f,n,\varepsilon,\delta).$$

Como $\log\left(m^u\left(f^n\left(\mathscr{F}^u(x,\delta)\right)\right)\right) = n\left(\log D_u\right) + m^u\left(\mathscr{F}^u(x,\delta)\right)$, obtemos

$$h^u_{\text{top}}\left(f,\mathscr{F}^u(x,\delta)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S^u(f,n,\varepsilon,\delta) \geq \log D_u.$$

Agora, dado qualquer $\varepsilon > 0$ por definição de $h^u_{\text{top}}(f)$, existe um ponto $x \in M$ e $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N^u\left(f,\varepsilon_0,n,x,\delta\right) > h^u_{\text{top}}(f) - \varepsilon$$

Seja $F \subset \overline{\mathscr{F}^u(x,\delta)}$ um conjunto (n,ε_0) u-separado. Como $f^n(F)$ é um subconjunto ε_0 separado e f restrito às folhas de $\mathscr{F}^u$ está expandindo uniformemente, as $\frac{\varepsilon_0}{2}$ bolas (na distancia d^u) centradas nos pontos de $f^n(F)$ são subconjuntos disjuntos de $f^n\left(\mathscr{F}^u\left(x,\delta+\varepsilon_0/2\right)\right)$, então

$$m^u\Big(f^n\left(\mathscr{F}^u\left(x,\delta+\varepsilon_0/2\right)\right)\Big) \geq K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}.N^u\left(f,\varepsilon_0,n,x,\delta\right).$$

Novamente, tomando o logaritmo e dividindo por n temos

$$\log D^u \geq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(N^u\left(f,\varepsilon_0,n,x,\delta\right)\right) > h^u_{\text{top}}(f) - \varepsilon.$$

Como ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que $\log D_u \geq h^u_{\text{top}}(f)$. Esto completa a prova da proposição. □

Proposição 4.1.2 (Proposição 5.3, (TAHZIBI, 2021))**.** Seja $f \in \text{PH}^2(M)$ com um u-sistema de Margulis $\{m^u_x\}_{x\in M}$ com constante $D_u > 0$. Suponha que m^u_x é totalmente suportada em $\mathscr{F}^u(x)$ para todo $x \in M$. Então, para qualquer medida f-invariante μ:

$$h^u_\mu(f) \leq \log D_u$$

Além disso, a igualdade ocorre se e somente se a desintegração de μ ao longo de ξ é dado por $m^u_x/m^u_x(\xi(x))$, μ-q.t.p. para alguma partição crescente ξ subordinada a $\mathscr{F}^u$.

Corolário 4.1.1. Se $\mu \in \mathscr{M}_{\text{erg}}(f)$ e $h^u_\mu(f) = \log D_u$ então $\text{supp}(\mu)$ é u-saturado.

Demonstração. Seja ξ uma partição crescente, geradora subordinada a $\mathscr{F}^u$ como na Proposição 4.1.2. Defina

$$m^u_{\xi(x)} := \frac{m^u_x|_{\xi(x)}}{m^u_x(\xi(x))}.$$

Se $\{\mu^u_x\}_{x\in M}$ é a decomposição de μ ao longo de ξ, pela Proposição 4.1.2, temos que $m^u_{\xi(x)} = \mu^u_{\xi(x)}$ para μ-quase todo ponto $x \in M$. Logo

$$1 = \mu(\text{supp}(\mu)) = \int \mu^u_{\xi(x)}(\text{supp}(\mu))d\widehat{\mu} = \int m^u_{\xi(x)}(\text{supp}(\mu))d\widehat{\mu}.$$

Portanto $m^u_{\xi(x)}(\text{supp}(\mu)) = 1$ para μ-quase todo ponto. Como $m^u_{\xi(x)}$ te suporte total em $\xi(x)$ e $\text{supp}(\mu)\cap\xi(x)$ é pre-compacto, então $\xi(x) \subset \text{supp}(\mu)$, para μ-q.t.p. $x \in M$. Portanto, se $A_0 = \{x \in \text{supp}(\mu) : \xi(x) \subset \text{supp}(\mu)\}$ então $\mu(A_0) = 1$. Como $\mu^u_{f^k(\xi(x))} = f^k_*\mu^u_{\xi(x)}$ para μ-a.e. então

$\mu(A_k) = 1$ onde $A_k := \{x \in A_{k-1} : \text{supp}(\mu^u_{f^k\xi(x)}) \subset \text{supp}(\mu)\}$. Como $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ temos que

$$\mu(A^u) = 1, \text{ onde } A^u := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Como $(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n\xi)(x) = \mathscr{F}^u(x)$ μ-q.t.p. então $A^u = \{x \in \text{supp}(\mu) : \mathscr{F}^u(x) \subset \text{supp}(\mu)\}$. Como $A^u \subseteq \text{supp}(\mu)$ e $\mu(A^u) = 1$ então $\text{supp}(\mu) = cl(A^u)$. Logo, se $x \in \text{supp}(\mu)$ então existe uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A^u$ tal que $x_k \to x$ quando k vai para infinito. Pela continuidade da folheação $\mathscr{F}^u$ temos que $\mathscr{F}^u(x_k)$ se acumula em $\mathscr{F}^u(x)$, consequentemente $\mathscr{F}^u(x) \subset cl(A^u)$ uma vez que A^u é u-saturado. Isso completa a prova do corolário. □

4.2 Construção de sistemas de medidas Margulis

Primeiro construímos um sistema de medidas Margulis suportadas nas folhas centro-instáveis. Logo, quando a folheação central é uniformemente compacta, deduzimos desse sistema um sistema de medidas Margulis suportadas nas folhas instáveis $\{m^u_x\}_{x\in M}$ que são invariantes por holonomias centro-estáveis. Logo, se a dinâmica quociente f_c é topologicamente transitiva ou M é o único conjunto minimal f-invariante provamos que m^u_x tem suporte total em $\mathscr{F}^u(x)$ para todo $x \in M$. Isso provará o Teorema A.

Proposição 4.2.1. Seja M uma variedade compacta e $f \in \text{PH}^2(M)$ dinamicamente coerente. Então existe um cu-sistema Margulis $\{m^{cu}_x\}_{x\in M}$ não trivial, invariante por s-holonomia e constante de dilatação $D_u > 0$.

Proposição 4.2.2. No teorema acima se $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta. Então

(a) $m^{cu}_x(\mathscr{F}^c(x)) = 0$, para todo $x \in M$.

(b) $D_u > 1$.

As provas das Proposições 4.2.1 e 4.2.2 serão feitas na seguinte subseção, antes vamos demostrar e definir as ferramentas para a construção do sistema de Margulis.

4.2.1 Construção de um cu-sistema de Margulis

No que segue M denota uma variedade compacta e $f : M \to M$ um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólico e dinamicamente coerente. Por conveniência, fixamos uma estrutura riemanniana na variedade compacta M.

Seja $\sigma \in \{c, s, u, cs, cu\}$. Denotamos por λ^σ o volume de Riemann intrínseco nas folhas de $\mathscr{F}^\sigma$ para $\sigma = u, s, cu$. Analogamente, denotamos por d_σ a distância definida em cada folha de $\mathscr{F}^\sigma$ dada pela estrutura Riemanniana induzida, a qual define a topologia intrínseca na folha.

Dado $r > 0$, o conjunto $\mathscr{F}^\sigma(x,r) := \{y \in \mathscr{F}^\sigma(x) : d_\sigma(y,x) < r\}$ será chamado de σ-bola. Para um subconjunto A de uma σ-folha definimos $\mathscr{F}^\sigma(A,r) := \cup_{x\in A}\mathscr{F}^\sigma(x,r)$. Um σ-subconjunto é uma d_σ-subconjunto limitado de uma σ-folha. Uma σ-função é uma função não negativa $\psi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\{x \in M : \psi(x) \neq 0\}$ é um σ-subconjunto e a restrição de ψ a

$$\operatorname{supp}(\psi) := \overline{\{x \in M : \psi(x) \neq 0\}}$$

é contínua. Escrevemos $\psi > 0$ se $\psi \geq 0$ e $\{\psi > 0\}$ tem interior não vazio na topologia intrínseca. Denote por $\mathscr{T}^\sigma$ a coleção de todas as σ funções, e para cada $x \in M$, defina

$$\mathscr{T}^\sigma(x) \quad := \quad \Big\{\psi \in \mathscr{T}^\sigma : \operatorname{supp}(\psi) \subset \mathscr{F}^\sigma(x)\Big\}.$$

Dada uma σ-holonomia $h : A \to B$, seu tamanho é dada por $\sup_{x\in A} d_\sigma(x,h(x))$. Dois subconjuntos A e B são ditos equivalentes por σ-holonomia através de h se $h(A) = B$. Dizemos que eles são ε-equivalentes se a holonomia tem tamanho no máximo $\varepsilon > 0$. Duas funções ψ_1 e ψ_2 são (σ,ε)-equivalentes se seus suportes são (σ,ε)-equivalentes através de uma σ-holonomia h com tamanho no máximo ε, tal que

$$\psi_2 = \psi_1 \circ h.$$

Seguindo (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019), consideramos os funcionais $\lambda : \mathscr{T}^{cu} \to \mathbb{R}$. O mapa f age sobre eles por:

$$\forall \psi \in \mathscr{T}^{cu} \;\; f(\lambda)(\psi) := \lambda(\psi \circ f^{-1}),$$

Uma classe chave de tais funcionais é $\ell_n := f^n(\lambda^{cu})$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, para qualquer $\psi \in \mathscr{T}^{cu}$,

$$\ell_n(\psi) := \int \psi \circ f^{-n} d\lambda^{cu}.$$

Para um cu-subconjunto A e $\varepsilon > 0$, denotamos por $r^{cu}(A,\varepsilon)$ o menor inteiro $k \geq 0$ tal que existem $x_1,\ldots,x_k \in A$ e $A \subset \cup_{i=1}^k \mathscr{F}^{cu}(x_i,\varepsilon)$.

O objetivo inicial é construir um conjunto compacto de funcionais sobre $\mathscr{T}^{cu}$. Na construção das cu-medidas Margulis em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019), os autores usaram a minimalidade da folheação estável para definir uma função cu-normalizadora que permite definir um conjunto compacto de funcionais $\mathbb{L}$ sobre $\mathscr{T}^{cu}$. Como não estamos assumindo a minimalidade da folheação estável, precisamos definir estrategicamente as cu-funções normalizadoras. Para isso usamos caixas bi-folhadas para $\mathscr{F}^{cu}$ e $\mathscr{F}^s$, mais precisamente: Fixe $B_1, B_2, \ldots, B_l$ caixas bi-folhadas para $\mathscr{F}^\sigma$ e funções $g_i^\sigma : B_i \to B^s(0,\varepsilon_1) \times B^{m-s}(0,\varepsilon_1)$ tal que $\{(g_i^\sigma, B_i) : i = 1,2,\ldots,l\}$ é um atlas folheado para $\mathscr{F}^\sigma$, $\sigma = s, cu$. Logo,

$$\bigcup_{i=1}^{l} B_i = M.$$

Para normalizar, tome cu-funções $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l \in \mathscr{T}^{cu}$ da seguinte maneira: para cada $i = 1, \ldots, l$ tome $p_i \in B_i$, $\Sigma_i = \mathscr{F}^u_{B_i}(p_i)$ e $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_l$.

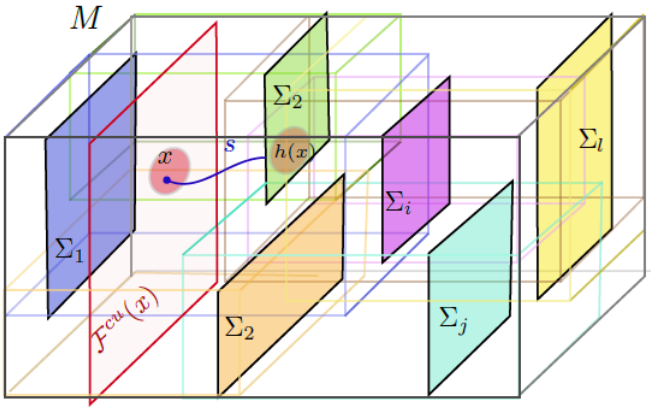

Figura 9 – Placas Σ_j de $\mathscr{F}^{cu}$

Agora, tome funções não negativas $\Phi_i : \mathscr{F}^{cu}(p_i) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\phi_i|_{\Sigma_i} = 1, \text{ para } i = 1, \ldots, l.$$

Considerando a topologia da convergência pontual (ou seja, trabalhando em $\mathbb{R}^{\mathscr{T}^{cu}}$ com a topologia do produto), seja $\mathbb{L}$ o fecho do seguinte conjunto:

$$\mathbb{L}_1 := \left\{ \lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i \ell_{t_i} : n \in \mathbb{N}^*, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_n > 0 \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{l} \lambda(\Phi_i) = 1 \right\}$$

Proposição 4.2.3. Seja $f \in \mathrm{PH}^2(M)$ dinamicamente coerente. Existem $\Lambda \in \mathbb{L}$ e $D_u > 0$ tais que

$$f(\Lambda) = D_u.\Lambda.$$

Além disso, existem números positivos C_Σ, r_Σ tal que para qualquer $\psi \in \mathscr{T}^{cu}$:

(a) $\Lambda_u(\psi) \leq C_\Sigma r^{cu}(supp\psi, r_\Sigma)\|\psi\|_\infty$,

(b) se $\phi \in \mathscr{T}^{cu}$ é s-equivalente a ψ então $\Lambda_u(\phi) = \Lambda_u(\psi)$.

Para provar isso, seguiremos os passos do Teorema 4.2 em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019) adaptado ao nosso contexto. Mais precisamente, mostraremos que $\mathbb{L}$ é um conjunto convexo e compacto, para logo aplicar o Teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff a uma ação normalizada de f em $\mathbb{L}$.

Relacionaremos as iterações de diferentes cu-funções usando a invariância por s-holonomia, para isso usamos o seguinte teorema devido a Avila-Viana e Wilkinson, adaptado a nosso contexto.

Teorema 4.2.1. (AVILA; VIANA; WILKINSON, 2011). Seja M uma variedade Riemanniana compacta e $f \in \mathrm{PH}^2(M)$ dinamicamente coerente. Sejam A_1, A_2 seções transversais a $\mathscr{F}^s$ e (s,δ)-equivalentes por uma s-holonomia $h : A_1 \to A_2$. Seja λ_1, λ_2 as medidas volume de Riemann sobre A_1, A_2, então as medidas $h_*\lambda_1$ e λ_2 são equivalentes. Mais precisamente, existe $\kappa(\delta) < \infty$ dependendo apenas de f e E^s tal que:

$$|\frac{dh_*\lambda_1}{d\lambda_2} - 1| \leq \kappa(\delta), \;\; \kappa(\delta) \to 0 \text{ quando } \delta \to 0.$$

Como $\Sigma := \Sigma_1 \cup \ldots \Sigma_l$ é uma seção transversal completa para a folheação estável, então o seguinte resultado é consequência do teorema acima.

Lema 4.2.1. Existem números $C_\Sigma < \infty$ e $r_\Sigma > 0$ tal que

$$\forall x \in M, \; \forall n \geq 0, \; \lambda^{cu}(f^n B^{cu}(x, r_\Sigma)) \leq C_\Sigma \sum_{i=1}^{l} \lambda^{cu}(f^n(\Sigma_i)).$$

Demonstração. Seja $x \in M$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que x é s-equivalente a algum ponto em Σ_j para algum j. Tome $r_1 > 0$ pequeno tal que $A_j := \Sigma_j \backslash \mathscr{F}^{cu}(\partial\Sigma_j, r_1)$ é não vazio e x é s-equivalente a algum ponto em A_j. A continuidade do folheação $\mathscr{F}^s$ e a transversalidade com Σ_j fornecem $r_x > 0$ e $R_x < \infty$ tal que, para qualquer $y \in B(x, r_x)$, $\mathscr{F}^{cu}(y, r_x)$ é (R_x, s)-equivalente a um subconjunto de Σ_j. A compacidade de M implica a existência de $r_\Sigma > 0$ e $R < \infty$ tal que, para qualquer ponto $x \in M$, $\mathscr{F}^{cu}(x, r_\Sigma)$ é (R, s)-equivalente a um subconjunto de alguma seção transversal $\Sigma' \in \{\Sigma_i : i = 1, 2, \ldots, l\}$. Como $\mathscr{F}^s$ esta contraindo uniformemente, existe um número $\alpha < 1$ tal que o conjunto $f^n(\mathscr{F}^{cu}(x, r_\Sigma))$ é $(\alpha^n R, s)$-equivalente a um subconjunto de $f^n(\Sigma')$ para algum $\Sigma' \in \{\Sigma_i : i = 1, 2, \ldots, l\}$. Tomando $C_\Sigma = \kappa(\alpha.R) < \infty$, do Teorema 4.2.1 obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda^{cu}(f^n(\mathscr{F}^u(x, r_\Sigma)) &< \kappa(\alpha^n R)\lambda^{cu}(f^n(\Sigma')) \\ &\leq C_\Sigma \lambda^{cu}(f^n(\Sigma')) \\ &\leq C_\Sigma . \sum_{i=1}^{l} \lambda^{cu}(f^n(\Sigma_i)). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.2.1. Seja $C_\Sigma < \infty$ e $r_\Sigma > 0$ como no lema acima. Para todo $\psi \in \mathscr{T}^{cu}$ temos:

$$\int \psi \circ f^{-n} d\lambda^{cu} \leq C_\Sigma r^{cu}(\operatorname{supp} \psi, r_\Sigma) \|\psi\|_\infty \sum_{i=1}^{l} \int \Phi_i \circ f^{-n} d\lambda^{cu}, \;\; \forall n \geq 0.$$

Demonstração. Note que o lado esquerdo é limitado por $\|\psi\|_\infty . \lambda^{cu}(f^n(\operatorname{supp} \psi))$. Como $\operatorname{supp}(\psi)$ é um conjunto compacto, então existem $x_1, \ldots, x_N \in \mathscr{F}^{cu}(\operatorname{supp}(\psi))$ com $N = r^{cu}(\operatorname{supp}(\psi), r_\Sigma)$ tal que $\operatorname{supp}(\psi) \subset \cup_{i=1}^{N} B^{cu}(x_i, r_\Sigma)$. Como $\Phi_j|_{\Sigma_i} \equiv 1$ implica $\lambda^{cu}(f^n(\Sigma_j)) \leq \lambda^{cu}(\Phi_j \circ f^{-n})$, logo

$$\begin{aligned}
\int \psi \circ f^{-n} d\lambda^{cu} &\leq \|\psi\|_\infty . \lambda^{cu}(f^n(\operatorname{supp}\psi)) \\
&\leq \|\psi\|_\infty \sum_{i=1}^{N} \lambda^{cu}(f^n(B^{cu}(x_i, r_\Sigma))) \\
&\leq \|\psi\|_\infty \sum_{i=1}^{N} C_\Sigma \sum_{j=1}^{l} \lambda^{cu}(f^n(\Sigma_j)) \\
&\leq \|\psi\|_\infty \sum_{i=1}^{N} C_\Sigma \sum_{j=1}^{l} \lambda^{cu}(\Phi_j \circ f^{-n}) \\
&\leq \|\psi\|_\infty N . C_\Sigma \sum_{j=1}^{l} \lambda^{cu}(\Phi_j \circ f^{-n}).
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova do corolário. □

Lema 4.2.2. Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{T}^{cu}$ cu-funções (s, δ)-equivalentes para alguns $\delta < \infty$, para todo $\lambda \in \mathbb{L}$, temos

(a) $|\lambda(\psi_1) - \lambda(\psi_2)| \leq \kappa(\delta)\lambda(\psi_2)$,

(b) se $\psi_1, \psi_2 > 0$ então existe $C_0(\delta) \geq 1$ tal que $\lambda(\psi_1) \leq C_0(\delta).\lambda(\psi_2)$, com $C_0(\delta) \to 1$ quando $\delta \to 0$.

Demonstração. A prova do item (a) é inteiramente análoga à prova da primeira parte do Lema 4.6 em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019). Para provar o item (2), basta tomar $C_0(\delta) = 1 + \kappa(\delta)$. □

Proposição 4.2.4. Existe $C > 0$ tal que $\lambda(\psi \circ f^{-1}) \geq C.\lambda(\psi)$ para todo $\lambda \in \mathbb{L}$ e $\psi \in \mathscr{T}^{cu}$.

Demonstração. Tomando $C = \min_{x \in M} |Jac(f|\mathscr{F}^{cu}(x))|$, temos que $C > 0$ e

$$\begin{aligned}
\ell_k(\psi \circ f^{-1}) &= \int \psi \circ f^{-k-1} d\lambda^{cu} \\
&= \int \psi \circ f^{-k} . |Jac(f^k|\mathscr{F}^{cu})(x)| d\lambda^{cu} \\
&\geq C . \int \psi \circ f^{-k} d\lambda^{cu} \\
&= C.\ell_k(\psi).
\end{aligned}$$

Logo, para todo $\lambda = \sum_{i \in I} c_i \ell_{k_i}$ temos que

$$\begin{aligned}
\lambda(\psi \circ f^{-1}) &= \sum_{i \in I} c_i \ell_{k_i}(\psi \circ f^{-1}) \\
&\geq C . \sum_{i \in I} c_i \ell_{k_i}(\psi) \\
&= C.\lambda(\psi).
\end{aligned}$$

Isso pode ser estendido para todo $\lambda \in \mathbb{L} = \overline{\mathbb{L}_1}$ e conclui a prova da proposição. □

Prova da Proposição 4.2.3.

Passo 1: *Existem* $C_\Sigma, r_\Sigma > 0$ *tal que* $\lambda(\psi) \leq C_\Sigma r^{cu}(\operatorname{supp}\psi, r_\Sigma)\|\psi\|_\infty$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{L}$.

Tome os números $C_\Sigma, r_\Sigma > 0$ como no Lema 4.2.1. Pelo Corolário 4.2.1 temos que $\ell_n(\psi) \leq C_\Sigma r^{cu}(\operatorname{supp}\psi, r_\Sigma)\|\psi|_\infty \sum_{j=1}^{l} \ell_n(\Phi_j)$ para todo $\psi \in \mathscr{T}^{cu}$ e todo $n \geq 0$. Portanto, para $\lambda \in \mathbb{L}_1$:

$$\begin{aligned}
\lambda(\psi) = \sum_{i\in I} c_i \ell_{t_i}(\psi) &\leq \sum_{i\in I} c_i C_\Sigma r^{cu}(\operatorname{supp}\psi, r_\Sigma)\|\psi\|_\infty \sum_{j=1}^{l} \ell_{t_i}(\Phi_j) \\
&\leq C_\Sigma r^{cu}(\operatorname{supp}\psi, r_\Sigma)\|\psi\|_\infty \sum_{j=1}^{l} \lambda(\Phi_j) \\
&= C_\Sigma r^{cu}(\operatorname{supp}\psi, r_\Sigma)\|\psi\|_\infty. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova da afirmação, pois $\sum_{j=1}^{l} \lambda(\Phi_j) = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{L}_1$ e pode ser estendido para o fecho de $\mathbb{L}_1$.

Observe que (4.2) implica que $\mathbb{L}_1$ é um subconjunto do conjunto compacto

$$\prod_{\psi\in\mathscr{T}^{cu}} [0, C_\Sigma . r^{cu}(supp\psi, r_\Sigma)\|\psi\|].$$

Portanto, $\mathbb{L}$ é um subconjunto compacto do espaço linear e localmente convexo $\mathbb{R}^{\mathscr{T}^{cu}}$.

Passo 2: *Existência de* $\Lambda \in \mathbb{L}$ *com* $f(\Lambda) = D_u.\Lambda$

Construímos o funcional Λ como um ponto fixo do mapa

$$\overline{f} : \mathbb{L} \to \mathbb{L}, \lambda \mapsto \frac{\lambda(\,.\,\circ f^{-1})}{\sum_{i=1}^{l} \lambda(\Phi_i \circ f^{-1})}.$$

Afirmamos que $\bar{f}$ esta bem definido e é contínuo. De fato, o mapa $\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{l} \lambda\left(\Phi_i \circ f^{-1}\right)$ saindo de $\mathbb{L}$ para $\mathbb{R}$ está bem definido, pois $\Phi_i \circ f^{-1} \in \mathscr{T}^{cu}$ é contínuo e positivo, mais precisamente, o Lema 4.2.4 fornece $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda\left(\Phi_i \circ f^{-1}\right) \geq \sum_{i=1}^{l} C.\lambda\left(\Phi_i\right) = C > 0.$$

Além disso, $\lambda\left(\cdot \circ f^{-1}\right) : \mathscr{T}^{cu} \to \mathbb{R}$ está bem definido e é contínuo. Portanto a afirmação está provada.

Como $\overline{f}(\mathbb{L}_1) = \mathbb{L}_1$, temos que $\bar{f} : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ está bem definido e também é contínuo. Como $\mathbb{L}$ é um subconjunto convexo e compacto do espaço linear localmente convexo $\mathbb{R}^{\mathscr{T}^{cu}}$, o Teorema de Schauder-Tychonoff se aplica e fornece um funcional $\Lambda \in \mathbb{L}$ tal que $\bar{f}(\Lambda) = \Lambda$. Portanto $f(\Lambda) = D_u \cdot \Lambda$, com

$$D_u = \sum_{i=1}^{l} \Lambda\left(\Phi_i \circ f^{-1}\right) > 0$$

Passo 3: *Afirmação (b): invariância por s-holonomia de* Λ.
A prova desta afirmação é análoga à prova de s-invariância na Proposição 4.2 de (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019).

Prova de Proposição 4.2.1. A Proposição 4.2.3 fornece um funcional Λ em $\mathscr{T}^{cu}$. Note que, para cada $x \in M$, $C_c(\mathscr{F}^{cu}(x))$ é um espaço métrico localmente compacto e $\Lambda|_{C_c(\mathscr{F}^{cu}(x))}$ é linear e positivo (pois isso vale para todo $\lambda \in \mathbb{L}_1$ e se estende por continuidade para $\mathbb{L}$). Aplicando o Teorema de Representação de Riesz, obtemos uma medida de Radon m_x^{cu} em $\mathscr{F}^{cu}(x)$ para cada $x \in M$, tal que:

$$\forall \psi \in C_c(\mathscr{F}^{cu}(x)), m_x^{cu}(\psi) = \Lambda(\psi).$$

A s-invariância de $\{m_x^{cu}\}_{x\in M}$ segue da propriedade (b) da Proposição 4.2.3.

Agora, vamos provar que toda medida m_x^{cu} é não atômica usando a invariância de holonomia. De fato, suponha por contradição que existe $y \in \mathscr{F}^{cu}(x)$ com $m_x^{cu}(\{y\}) > 0$. Como $\mathscr{F}^s$ não possui folhas compactas e $\Sigma = \Sigma_1 \cup_2 \ldots \cup \Sigma_l$ é uma seção transversal completa para $\mathscr{F}^s$ então existe $i_0 \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $\Sigma_{i_0} \cap \mathscr{F}^s(y)$ é um conjunto infinito. Da s-invariância temos que $m_{x_{i_0}}^{cu}(\{z\}) = m_x^{cu}(\{y\})$ para todo $z \in \Sigma_{i_0} \cap \mathscr{F}^s(y)$. Logo,

$$m_{x_{i_0}}^{cu}(\overline{\Sigma_{i_0}}) \geq \sum_{z\in\Sigma_{i_0}\cap\mathscr{F}^s(y)} m_{x_{i_0}}^{cu}(\{z\}) = \sum_{z\in\Sigma_{i_0}\cap\mathscr{F}^s(y)} m_x^{cu}(\{y\}) = +\infty.$$

Isso contradiz a finitude das medidas $m_{x_{i_0}}^{cu}$ sob conjuntos compactos.

Para a prova da continuidade segue da invariância por s-holonomia (Veja (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019)). $\square$

Observação 4.2.1. Seja $\mathscr{M}^{cu} := \{x \in M : x \in \operatorname{supp} m_x^{cu}\}$. Notando que $f(\mathscr{M}^{cu}) = \mathscr{M}^{cu}$. A s-invariância implica que $\mathscr{M}^{cu}$ é um conjunto s-saturado e fechado de M. De fato, sejam $x \in \mathscr{M}^{cu}$ e $y \in \mathscr{F}^s(x)$, por continuidade da folheação estável existe uma s-holonomia $h^s : \mathscr{F}^{cu}(y,\delta) \to h^s(\mathscr{F}^{cu}(y,\delta)) \subset \mathscr{F}^{cu}(x)$ com $h^s(y) = x$. Dado um conjunto aberto $U_y \subset \mathscr{F}^{cu}(y)$ com $y \in U_y$, então

$$m_y^{cu}(U_y) \geq m_y^{cu}(U_y \cap \mathscr{F}^{cu}(y,\delta)) = m_x^{cu}(h^s(U_y \cap \mathscr{F}^{cu}(y,\delta))) > 0.$$

Isso implica que $y \in \operatorname{supp}(m_y^u)$, e portanto, $\mathscr{M}^{cu}$ é um conjunto s-saturado. Agora vamos mostrar que $\mathscr{M}^{cu}$ é um conjunto fechado. Em efeito, dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}^{cu}$ tal que $x_n \to z \in M$. Seja $U \subset \mathscr{F}^{cu}(z)$ um conjunto aberto com $z \in U$, como $x_n \to z$, da continuidade da folheação $\mathscr{F}^s$ e sua transversalidade a U existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F}^s_{loc}(x_n) \cap U \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$.

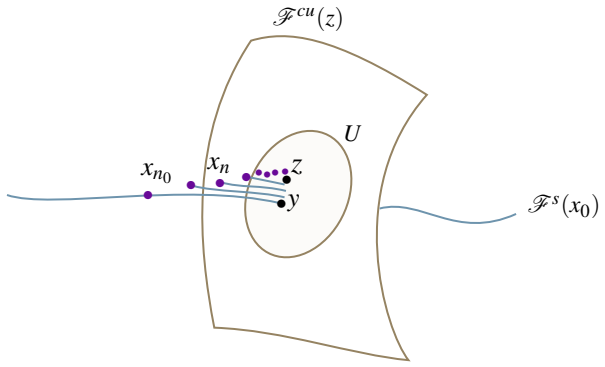

Figura 10 – Ponto de acumulação de $(x_n)_n$

Tome $y \in \mathscr{F}^s_{loc}(x_{n_0}) \cap U$. Do fato que $x_{n_0} \in \mathscr{M}^{cu}$ e $\mathscr{M}^{cu}$ é s-saturado, então $y \in \mathscr{M}^{cu}$, e como $y \in U$ temos que $m^{cu}_z(U) = m^{cu}_y(U) > 0$. Isso implica que $\mathscr{M}^{cu}$ é um conjunto fechado.

Proposição 4.2.5. Se M é o único conjunto invariante, minimal s-saturado então m^{cu}_x tem suporte total, para todo $x \in M$.

Demonstração. Segue imediatamente da observação 4.2.1. □

Prova da Proposição 4.2.2. Primeiro vamos provar que toda folha central tem medida m^{cu} igual a zero. Com efeito, suponha que exista um ponto $y \in M$ tal que $m^{cu}_y(\mathscr{F}^c(y)) > 0$. Como $\mathscr{F}^s$ não possui folhas compactas, existe um ponto $z \in M$ tal que $\mathscr{F}^{cu}(z, 1/2) \cap \mathscr{F}^s(y)$ é um conjunto infinito. Logo, existe uma sequência de pontos distintos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in \mathscr{F}^{cu}(z, 1/2) \cap \mathscr{F}^s(y)$. Como $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta, o Lema 3.2.1 implica que $\mathscr{F}^s(y_m) \cap \mathscr{F}^c(y_m) = y_m$. Se $n \neq m$ então $y_n \notin \mathscr{F}^c(y_m)$. Pela s-invariância temos que

$$m^{cu}_z\Big(\bigcup_{w\in\mathscr{F}^{cu}(z,1/2)} \mathscr{F}^c(w)\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^{cu}_z(\mathscr{F}^c(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} m^{cu}_y(\mathscr{F}^c(y)) = \infty.$$

Isso contradiz a finitude local do sistema $\{m^{cu}_x\}_{x\in M}$.

Agora vamos mostrar que $D_u > 1$. Tome $x \in \mathscr{M}^{cu}$ e $A^{cu}(x,\delta) := \cup_{y\in\mathscr{F}^c(x)} \mathscr{F}^u(y,\delta)$ para $\delta > 0$ pequeno. Considere a sequência $(f^{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\mathscr{M}^{cu}$ é compacto então existe um ponto $p \in \mathscr{M}^{cu}$ e uma subsequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{-n_k}(x) = p$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe k_ε tal que $f^{-n}(A^{cu}(x,\delta))$ é s-equivalente a um subconjunto $h^s(f^{-n_{k_\varepsilon}}(A^{cu}(x,\delta))) \subset A^{cu}(p,\varepsilon)$.

Por s-invariância e regularidade de m_p^{cu} temos que

$$\begin{aligned}
0 = m_p^{cu}(\mathscr{F}^c(p)) &= \inf_{\varepsilon>0} m_p^{cu}\Big(A^{cu}(p,\varepsilon))\Big) \\
&\geq \inf_{\varepsilon>0} m_p^{cu}\Big(h^s(f^{-n_{k\varepsilon}}(A^{cu}(x,\delta))))\Big) \\
&\geq \inf_{k\in\mathbb{N}} m_p^{cu}\Big(h^s(f^{-n_k}(A^{cu}(x,\delta)))\Big) \\
&= \inf_{k\in\mathbb{N}} m_{f^{-n_k}(x)}^{cu}\Big(f^{-n_k}(A^{cu}(x,\delta))\Big) \\
&= \inf_{k\in\mathbb{N}} D_u^{-n_k} m_x^{cu}\Big(A^{cu}(x,\delta)\Big).
\end{aligned}$$

Suponha pelo contrario, que $D_u \leq 1$ então $D_u^{-n_k} \geq 1$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
0 &= \inf_{k\in\mathbb{N}} D_u^{-n_k} m_x^{cu}\Big(A^{cu}(x,\delta)\Big) \\
&\geq \inf_{k\geq k_0} m_x^{cu}\Big(A^{cu}(x,\delta)\Big) \\
&= m_x^{cu}\Big(A^{cu}(x,\delta)\Big) > 0.
\end{aligned}$$

Isso contradiz o fato de que as folhas centrais tem medida zero. Portanto $D_u > 1$. □

4.3 Prova do Teorema A

Teorema A. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$. Se f_c é topologicamente transitiva então existe um sistema continuo de medidas $\{m_x^u\}_{x\in M}$ tal que:*

(1) cada m_x^u é uma medida Radon sem átomos e totalmente suportada em $\mathscr{F}^u(x)$;

(2) $f^* m_{f(x)}^u = e^{h_{top}(f)}.m_x^u$;

(3) o sistema $\{m_x^u\}_{x\in M}$ é cs-invariante e localmente uniformemente finito.

Além disso, se μ é uma medida ergódica com $\lambda_c(\mu) \leq 0$, μ é de máxima entropia se e somente se a desintegração $\{\mu_x^u\}_{x\in M}$ de μ ao longo da folheação instável é equivalente a $\{m_x^u\}_{x\in M}$.

Demonstração. Começamos considerando o cu-sistema de Margulis $\{m_x^{cu}\}_{x\in M}$ como na Proposição 4.2.1. Definimos a família de medidas $\{m_x^u\}_{x\in M}$ estendendo subconjuntos das u-folhas para subconjuntos das cu-folhas, saturando os u-conjuntos por folhas centrais. Finalmente, usamos a transitividade topológica de f_c para provar que m_x^u é totalmente suportada na folha instável $\mathscr{F}^u(x)$ para todo $x \in M$.

Passo 1: *Definição do u-sistema de Margulis.*
Como $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta, do Lema 3.2.1, $\mathscr{F}^u(x) \cap \mathscr{F}^c(x) = \{x\}$ para todo $x \in M$. Logo, para cada $x \in M$ e cada subconjunto de Borel $A \subset \mathscr{F}^u(x)$, defina

$$m_x^u(A) = m_x^{cu}(\widehat{A}) \text{ com } \widehat{A} := \bigcup_{y \in A} \mathscr{F}^c(y).$$

Então m_x^u é uma medida em $\mathscr{F}^u(x)$, uma vez que $\mathscr{F}^c(x) \cap \mathscr{F}^u(x) = \{x\}$ para todo $x \in M$ e $\widehat{A}$ é mensurável sempre que A é mensurável. Observe que $\widehat{A}$ é relativamente compacto e tem interior não vazio sempre que isso seja válido para A. Tudo isso implica que m_x^u é uma medida de Radon. Sejam $A, B \subset M$ u-conjuntos cs-equivalentes, a coerência dinâmica de f implica que $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são s-equivalentes. Logo, a s-invariância de $\{m_x^{cu}\}_{x \in M}$ implica a cs-invariância de $\{m_x^u\}_{x \in M}$. Além disso, como as folhas centrais têm medida zero pelas medidas m^{cu}, concluímos que m_x^u não possui átomos, para qualquer $x \in M$. Finalmente, observe que

$$m_x^u(f(A)) = m_x^{cu}(\widehat{f(A)}) = m_x^{cu}(f(\widehat{A})) = D_u m_x^{cu}(\widehat{A}) = D_u.m_x^u(A).$$

Passo 2: *O sistema é uniformemente localmente finito*

Dado $\delta > 0$. Para cada $x \in M$ tome $A^{cu}(x,\delta) := \widehat{\mathscr{F}^u(x,\delta)}$. Como $\mathscr{F}^c$ é uma folheação uniformemente compacta, existe $R > 0$ tal que $A^{cu}(x, 2\delta) \subset \mathscr{F}^{cu}(x,R)$ para todo $x \in M$. Logo, existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$r^{cu}(A^{cu}(x,2\delta), r_\Sigma) \leq N_\delta, \text{ para todo } x \in M.$$

Agora, tome uma função contínua $\phi_x : \mathscr{F}^{cu}(x)$ tal que $\|\phi_x\|_\infty = 1$, $\phi_x|_{A^{cu}(x,\delta)} = 1$ e $\operatorname{supp}(\phi_x) \subset A^{cu}(x, 2\delta)$. Como $\phi_x \in \mathscr{T}^{cu}$, pela finitude local das medidas Margulis, temos que

$$\begin{aligned} m_x^{cu}(A^{cu}(x,\delta/2)) < m_x^{cu}(\phi_x) &= \Lambda_{cu}(\phi_x) \\ &\leq C_\Sigma.r^{cu}(\operatorname{supp}\phi_x, r_\Sigma)\|\phi_x\|_\infty \\ &\leq C_\Sigma.N_\delta. \end{aligned}$$

Esta é a propriedade de finitude local uniforme.

Passo 3: *Continuidade do u-sistema Margulis*
Como $\mathscr{F}^u$ e $\mathscr{F}^{cs}$ são transversais, para qualquer $x_0 \in M$, existe uma caixa bifolheada B em x_0. Como todas as placas instáveis em B são cs-equivalentes, dado $x, y \in B$ existe cs-holonomia $h_{x,y}^{cs} : \mathscr{F}_B^u(x) \to \mathscr{F}_B^u(y)$. Defina $h_0^{cs} : B \times \mathscr{F}_B^u(x_0) \to B$ por $h_0^{cs}(x,z) = h_{x_0,x}^{cs}(z)$. Seja $\phi \in C(M)$. Pela cs-invariância do sistema $\{m_x^u\}_{x \in M}$ temos $m_x^u(\phi|\mathscr{F}_B^u(x)) = m_x^u(\phi \circ h_0^{cs}(x,.))$. Portanto,

$$\left|m_x^u(\phi \mid \mathscr{F}_B^u(x)) - m_{x_0}^u(\phi \mid \mathscr{F}_B^u(x_0))\right| \leq \int_{\mathscr{F}_B^u(x_0)} |\phi \circ h_0(x,\cdot) - \phi| \, dm_{x_0}^u$$

converge para 0 quando x vai para x_0. Esto conclui a prova da continuidade do u-sistema Margulis.

Observação 4.3.1. Se $\mathscr{S}^u := \{x \in M : x \in \operatorname{supp}(m_x^u)\}$, seguindo como na Observação 4.2.1, é fácil verificar que $\mathscr{S}^u$ é um conjunto cs-saturado, fechado e $f(\mathscr{S}^u) = \mathscr{S}^u$.

Passo 4: *Suporte total*
Aqui vamos provar que $\mathscr{S}^u = M$. Em efeito, como f_c é topologicamente transitivo, existe um ponto $q \in M_c$ tal que $cl(\mathscr{O}^-(q, f_c)) = M_c$. Tomando $p \in \pi_c^{-1}(q)$ temos que $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}^c(f^{-n}(p))$ é denso em M. Provemos primeiro que $p \in \mathscr{S}^u$. De fato, dado $\delta > 0$ existe $\theta > 0$ tal que $\mathscr{F}^u(x,\theta) \subset \widehat{\mathscr{F}^u(p,\delta)}$ para todo $x \in \mathscr{F}^c(p)$. Como $\{m_x^u\}_{x\in M}$ é um sistema Margulis não trivial, existe $x_0 \in M$ tal que $x_0 \in \operatorname{supp}(m_{x_0}^u)$. Pela transversalidade de $\mathscr{F}^u$ e $\mathscr{F}^{cs}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que x_0 é cs-equivalente a um ponto $h^{cs}(x_0) \in \mathscr{F}^u(y,\theta)$ para cada $y \in B(x_0,\varepsilon)$. Como $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}^c(f^{-n}(p))$ é denso em M, existem $N \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathscr{F}^c(f^{-N}(p))$ tal que $d(y,x_0) < \varepsilon$. Então x_0 é cs-equivalente a um ponto $h^{cs}(x_0) \in \mathscr{F}^u(y,\theta)$. Como $x_0 \in \mathscr{S}^u$ e $\mathscr{S}^u$ é cs-saturado, temos que $h^{cs}(x_0) \in \mathscr{S}^u$ e $m_y^u(\mathscr{F}^u(y,\theta)) = m_{h^{cs}(x_0)}^u(\mathscr{F}^u(y,\theta)) > 0$. Tomando $x = f^N(y)$ temos

$$\begin{aligned}
m_p^u(\mathscr{F}^u(p,\delta)) = m_p^{cu}(\widehat{\mathscr{F}^u(p,\delta)}) &\geq m_x^{cu}(\widehat{\mathscr{F}^u(x,\theta)}) \\
&= m_x^u(\mathscr{F}^u(x,\theta)) \\
&= D_u^{-N} m_{f^{-N}(x)}^u(f^{-N}(\mathscr{F}^u(x,\theta))) \\
&\geq D_u^{-N} m_{f^{-N}(x)}^u(\mathscr{F}^u(f^{-N}(x),\theta)) \\
&= D_u^{-N} m_y^u(\mathscr{F}^u(y,\theta)) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Como δ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que $p \in \operatorname{supp}(m_p^u)$, ou seja, $p \in \mathscr{S}^u$. Do fato de que $\mathscr{S}^u$ é c-saturado e invariante temos que $\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{F}^c(f^n(p)) \in \mathscr{S}^u$. Como $\mathscr{S}^u$ é um conjunto fechado temos que $M = cl\big(\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{F}^c(f^n(p))\big) \subset \mathscr{S}^u$. Isso implica que $\mathscr{S}^u = M$, ou seja, m_x^u tem suporte total em $\mathscr{F}^u(x)$ para todo $x \in M$.

Passo 5: $\log D_u = h_{top}(f)$ e $\mu_x^u \equiv m_x^u$ para toda medida de máxima u-entropia μ.
O sistema $\{m_x^u\}_{x\in M}$ é cs-invariante, $D_u > 1$ e como $\mathscr{S}^u = M$ temos que m_x^u é totalmente suportado em $\mathscr{F}^u(x)$ para todo $x \in M$. Pela Proposição 4.1.1 obtemos que $\log(D_u) = \exp\big(h_{top}^u(f)\big)$. Pela Observação 3.7.1 temos $h_{top}(f) = h_{top}^u(f) = \log D_u$. A equivalência $\mu_x^u \equiv m_x^u$ segue da proposição 4.1.2. □

4.3.1 Implicações do Teorema A

A continuação vamos aplicar o Teorema A para exibir a existência de medidas Margulis para sistemas como nas hipóteses dos teoremas e proposições enunciados na introdução. Estas medidas Margulis serão essenciais para mostrar esses resultados, pois servem para caraterizar as medidas de máxima entropia, como veremos no seguinte capítulo.

Proposição 4.3.1. Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Então existe um sistema de medidas Margulis $\{m^u_x\}_{x\in M}$ tal que:

(1) cada m^u_x é uma medida Radon sem átomos e totalmente suportada em $\mathscr{F}^u(x)$;

(2) $f_* m^u_x = e^{-h_{top}(f)}.m^u_{f(x)}$;

(3) o sistema $\{m^u_x\}_{x\in M}$ é cs-invariante e localmente uniformemente finito.

Além disso, uma medida invariante μ é de máxima u-entropia se e somente se a desintegração $\{\mu^u_x\}_{x\in M}$ de μ ao longo da folheação instável é equivalente a $\{m^u_x\}_{x\in M}$.

Esta proposição é consequência do Teorema A e do seguinte lema:

Lema 4.3.1. Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Então $f_c : M_c \to M_c$ é topologicamente transitiva.

Demonstração. Como f é um infra-AB-sistema então existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que f^τ é levantado para um AB-sistema $g : \overline{M} \to \overline{M}$ para um recobrimento finito $\overline{M}$ de M. Isto é, existe um recobrimento finito $\pi : \overline{M} \to M$ tal que $f^\tau \circ \pi = \pi \circ g$ e $\pi(\mathscr{F}^\sigma_g(x)) = \mathscr{F}^\sigma_{f^\tau}(\pi(x))$ para $\sigma = c, s, u, cu, cs$.

Como $g \in \mathrm{PHC}^2_1(\overline{M})$ é um AB-sistema. Então existe um AB-sistema protótipo $f_{AB} : M_B \to M_B$ com folheação central uniformemente compacta, e um homeomorfismo $h : M_B \to \overline{M}$ tal que $h(\mathscr{F}^c_{f_{AB}}(x)) = \mathscr{F}^c_g(h(x))$ e $h(f_{AB}(L)) = g(h(L))$ para toda folha central L de f_{AB}. Sejam A e B automorfismos de uma nilvariedade compacta N, definindo o AB-sistema protótipo f_{AB}, ou seja, A é hiperbólico, $AB = BA$ e $f_{AB} = A \times Id$, definida sobre a nilvariedade

$$M_B = N \times \mathbb{R}/(v,t) \sim (Bv, t-1).$$

Como A é uma automorfismo hiperbólico sobre a uma nilvariedade N então o automorfismo A é topologicamente transitivo, logo existe um ponto $x_0 \in N$ tal que a órbita de x_0, $\mathscr{O}_A(x_0)$ é denso em N. Se $L = \mathscr{F}^c_{AB}(x_0)$, pela conjugação por folhas centrais, f_{AB} tem folheação central uniformemente compacta, então $\cup_{i\in\mathbb{Z}} f^j_{AB}(L)$ é denso em M_B. Pela conjugação por folhas centrais, $\cup_{i\in\mathbb{Z}} g^j(h(L))$ é denso $\overline{M}$.

Como $\cup_{i\in\mathbb{Z}} g^j(h(L))$ é denso $\overline{M}$, pelo levantamento finito temos que $\cup_{j\in\mathbb{Z}} f^{\tau.j}(\pi(h(L)))$ é denso em M. Logo, se $S = \pi(h(L))$ então $\cup_{i\in\mathbb{Z}} f^j(S)$ é denso em M. Como S também é uma folha central de f e $cl(\cup_{i\in\mathbb{Z}} f^j(S)) = M$ temos que $cl(\cup_{i\in\mathbb{Z}} f^j_c(\pi(S))) = M_c$. Ou seja f_c é topologicamente transitivo. Isto completa a prova do lema. □

Corolário 4.3.1. Seja M^3 uma variedade fechada tridimensional e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M^3)$. Então existe um sistema de medidas Margulis $\{m^u_x\}_{x\in M^3}$ tal que:

(1) cada m^u_x é uma medida Radon sem átomos e totalmente suportada em $\mathscr{F}^u(x)$;

(2) $f_* m^u_x = e^{-h_{top}(f)}.m^u_{f(x)}$;

(3) o sistema $\{m^u_x\}_{x\in M^3}$ é cs-invariante e localmente uniformemente finito.

Além disso, uma medida invariante μ é de máxima u-entropia se e somente se a desintegração $\{\mu^u_x\}_{x\in M}$ de μ ao longo da folheação instável é equivalente a $\{m^u_x\}_{x\in M}$.

Demonstração. Para variedades tridimensionais, Epstein provou que o volume das folhas centrais de qualquer folheação unidimensional por folhas compactas é uniformemente limitado (EPSTEIN, 1972). Além disso, temos que $M/\mathscr{F}^c$ é homeomorfo a $\mathbb{T}^2$ e f_c é um homeomorfismo de Anosov (ver Teorema 3 em (HERTZ *et al.*, 2012)). Logo, f_c é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov em $\mathbb{T}^2$, portanto é topologicamente transitivo. Logo, todo difeomorfismo C^2 parcialmente hiperbólico com folhas centrais compactas em variedades tridimensionais satisfazem a hipótese do Teorema A. Isso completa a prova do corolário. □

Com as hipóteses do Teorema B, na seguinte proposição, provamos a existência de medidas Margulis ao longo das folheações, instável, estável e centro-estável, todas com suporte total nas folhas correspondentes. A importância de que o cs-sistema Margulis tenha suporte total em cada folha será fundamental para construir a medida de máxima entropia com estrutura de produto local do Teorema B.

Proposição 4.3.2. Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se M é o único conjunto mínimal invariante u-saturado então existem sistema de medidas Margulis $\{m^u_x\}_{x\in M}$, $\{m^s_x\}_{x\in M}$ e $\{m^{cs}_x\}_{x\in M}$ tal que:

(1) $\{m^\sigma_x\}_{x\in M}$ é localmente uniformemente finito, cada m^σ_x é uma medida Radon sem átomos e totalmente suportada em $\mathscr{F}^\sigma(x)$, $\sigma = u, s, cs$;

(2) o sistema $\{m^u_x\}_{x\in M}$ é cs-invariante e $f_* m^u_x = e^{-h_{top}(f)}.m^u_{f(x)}$;

(3) o sistema $\{m^s_x\}_{x\in M}$ é cu-invariante e $f_* m^s_x = e^{h_{top}(f)}.m^s_{f(x)}$;

(4) o sistema $\{m^{cs}_x\}_{x\in M}$ é u-invariante e $f_* m^{cs}_x = e^{h_{top}(f)}.m^{cs}_{f(x)}$;

Além disso, se $\{\mu^u_x\}_{x\in M}$ e $\{\mu^s_x\}_{x\in M}$ e a desintegração de uma medida μ ao longo da folheação instável e estável, respetivamente, então:

- μ é medida de máxima entropia para f se e somente se $\mu^u_x \equiv m^u_x$ para μ-q.t.p.
- μ é medida de máxima u-entropia para f^{-1} se e somente se $\mu^s_x \equiv m^s_x$ para μ-q.t.p.

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que f é topologicamente transitivo. Em efeito, Dado $U, V \subset M$ conjuntos abertos, tome $x \in U$, e $\delta > 0$ tal que $I = \mathscr{F}^u(x,\delta) \subset U$.

Afirmação 4.3.1. $cl(\bigcup_{n\geq 0} f^n(I)) = M$.

De fato, tome $x_n = f^n(x) \in f^n(I)$, pela compacidade de M existe uma subsequencia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e um ponto $y \in M$ tal que $x_{n_k} \to y$. Pela continuidade da folheação $\mathscr{F}^u$ devemos ter que $\mathscr{F}^u(x_{n_k}) \to \mathscr{F}^u(y)$. Como f^n expande exponencialmente a I e $x_{n_k} \in f^{n_k}(I)$, devemos ter que $f^{n_k}(I) \to \mathscr{F}^u(y)$ quando $n \to \infty$. Logo, dado $j \in \mathbb{Z}$, como $\lim_{k\to\infty} f^{n_k+j} = f^j(y)$, devemos ter que $f^{n_k+j}(I) \to \mathscr{F}^u(f^j(y))$, então

$$\mathscr{F}^u(f^j(y)) \subset \bigcup_{n\geq 0} f^n(I),\ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Isto juntamente com o fato de que M é o único conjunto minimal invariante u-saturado implica que:

$$M = cl\big(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}^u(f^j(y))\big) \subseteq cl\big(\bigcup_{n\geq 0} f^n(I)\big).$$

Portanto a afirmação esta provada.

Da Afirmação 4.3.1, $\bigcup_{n\geq 0} f^n(I) \cap V \neq \emptyset$. Portanto, existe $N >> 1$ tal que $f^N(I) \cap V \neq \emptyset$, ou seja, $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. Isto conclui a transitividade topológica de f.

Finalmente a continuidade da projeção $\pi_c : M \to M_c$ implica a transitividade de f_c, logo aplicando o Teorema A para f e f^{-1} concluímos a existência de $\{m_x^u\}_{x\in M}$ e $\{m_x^s\}_{x\in M}$ com as propriedades desejadas. Para obter as medidas $\{m_x^{cs}\}_{x\in M}$ é suficiente aplicar as Proposições 4.2.1 e 4.2.5 para f^{-1}, $\mathscr{F}^{cu}_{f^{-1}} = \mathscr{F}^{cs}_f$ e $\mathscr{F}^s_{f^{-1}} = \mathscr{F}^u_f$. $\square$

CAPÍTULO

5

SOBRE O SUPORTE DE MEDIDAS DE MÁXIMA ENTROPIA

5.1 Co-existência de medidas de máxima u-entropia

Nesta secção vamos considerar uma variedade fechada M e $f \in \mathrm{PH}^2(M)$ com um sistema Margulis $\{m_x^u\}_{x\in M}$ ao longo da folheação instável, cs-invariante e tal que m_x^u tem suporte total em $\mathscr{F}^u(x)$ para todo ponto $x \in M$. Para $\sigma = s, u$, defina

$$\Gamma^\sigma(f) := \{K \subset M : K \text{ é minimal, invariante e } \sigma\text{-saturado}\}.$$

Seja $\mathscr{F}^\sigma(\mathscr{O}_f(x)) := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}^\sigma(f^n x)$. Note que se $K \in \Gamma^\sigma(f)$ então $K = cl(\mathscr{F}^\sigma(\mathscr{O}_f(x)))$ para todo $x \in K$. Em particular, se μ é uma u-m.m.e, pela Proposição 4.1.2 temos que $\mathrm{supp}(\mu)$ é um conjunto u-saturado invariante e fechado. Portanto, se $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$ para algum $K \in \Gamma^u(f)$ então $\mathrm{supp}(\mu) = K$.

Lema 5.1.1. Se $K \in \Gamma^u(f)$ então existe uma medida de máxima u-entropia μ_K tal que $\mathrm{supp}(\mu_K) = K$. Em particular, se $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ então μ_K é uma medida de máxima entropia.

Demonstração. Procedendo como em (TAHZIBI, 2021), tome $x_0 \in K$ e um disco aberto $\gamma \subset \mathscr{F}^u(x_0)$ tal que $m^u_{x_0}(\gamma) = 1$. Seja $m^u_\gamma(E) := m^u_{x_0}(E \cap \gamma)$ para todo $E \subset M$, e

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_*^j m^u_\gamma. \tag{5.1}$$

Seja μ um ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pelo Lema 5.10 de (TAHZIBI, 2021) temos que qualquer medida de acumulação $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem desintegração ao longo de $\mathscr{F}^u$ coincidindo com $\{m^u_x\}_{x\in M}$. Logo, a Proposição 4.1.2 implica que $h^u_\mu(f) = h^u_{\mathrm{top}}(f)$. Pelo corolário 4.1.1 temos que $\mathrm{supp}(\mu)$ é um conjunto u-saturado. Além disso, $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$. De fato, dado $y \in M\backslash K$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y,\varepsilon) \cap K = \emptyset$. Como $f^n(\gamma) \subset K$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$f^n(\gamma)\cap B(y,\varepsilon)=\emptyset$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Consequentemente $\mu_n(B(y,\varepsilon))=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, ou seja, $\mu(B(y,\varepsilon))=0$. Portanto $y\notin \operatorname{supp}(\mu)$ para todo $y\in M\backslash K$, ou seja, $\operatorname{supp}(\mu)\subset K$. Finalmente, como $\operatorname{supp}(\mu)$ é fechado, u-saturado e f-invariante, concluímos que $\operatorname{supp}(\mu)=K$. Logo, é suficiente considerar μ_K como uma medida de acumulação da sequencia (5.1).

Para finalizar, note que se $f\in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$, pela Observação 3.7.1, $h^u_{\mathrm{top}}(f)=h_{\mathrm{top}}(f)$ então μ_K também é uma medida de máxima entropia, uma vez que

$$h_{\mu_K}(f)\geq h^u_{\mu_K}(f)=h^u_{\mathrm{top}}(f)=h_{\mathrm{top}}(f).$$

□

O seguinte resultado é baseado no argumento de Hopf.

Proposição 5.1.1. Seja μ uma medida ergódica de máxima u-entropia com $\operatorname{supp}(\mu)\in\Gamma^u(f)$. Se $\lambda_c(\mu)<0$ então $\operatorname{supp}(\mu)\cap\operatorname{supp}(\nu)=\emptyset$ para toda u-m.m.e. ergódica $\nu\neq\mu$. Em particular, μ é a única medida de máxima u-entropia para $f|_{\operatorname{supp}(\mu)}$.

Demonstração. Seja $K=\operatorname{supp}(\mu)$. Como $K\in\Gamma^u(f)$ temos que $K=cl\big(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(x))\big)$ para todo $x\in K$. Seja ν uma u-m.m.e ergódica. Suponha que $\operatorname{supp}(\mu)\cap\operatorname{supp}(\nu)\neq\emptyset$ e tome $x\in\operatorname{supp}(\mu)\cap\operatorname{supp}(\nu)$. Como $\operatorname{supp}(\nu)$ é um conjunto u-saturado, fechado e invariante, temos que

$$K=cl\Big(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(x))\Big)\subset\operatorname{supp}(\nu).$$

Como ν é uma medida ergódica de u-máxima entropia, a Proposição 4.1.2 implica que as suas medidas condicionais ao longo da folheação instável para μ e ν são ambas dadas por $\{m^u_x\}_{x\in M}$. Seja $B_\mu:=\left\{x\in M:\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{f^kx}\to\mu\right\}$ a bacia ergódica de μ (a convergência quando $n\to+\infty$ é na topologia fraca*). Pela ergodicidade de μ temos que $\mu\left(K\backslash B_\mu\right)=0$, e assim $m^u_x\left(K\backslash B_\mu\right)=0$ para $\mu-$ a.e x. Da mesma forma, sendo B_ν a bacia ergódica de ν; temos que $m^u_y\left(M\backslash B_\nu\right)=0$ para $\nu-$ q.t.p y.
Como o expoente de Lyapunov central de μ é negativo e $m^u_x(\mathscr{F}^u(x)\backslash B_\mu)=0$ para μ -q.t. $x\in B_\mu$, existe $x\in K$ e $J\subset\mathscr{F}^u(x,1/2)\cap B_\mu$ com $m^u_x(J)>0$ tal que o tamanho das variedades estáveis locais Pesin seja limitado por baixo, isto é, $\inf_{z\in K}\operatorname{diam}^{cs}(\mathscr{W}^s_{\mathrm{loc}}(z))>\delta$ para algum $\delta>0$, onde $\mathscr{W}^s_{\mathrm{loc}}(z)$ é a variedade de Pesin estável local do ponto z. Como J esta contido em $\mathscr{F}^u(x,1/2)$, existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $y\in B(x,\varepsilon)$ existe uma (cs,δ)-holonomia $h^s:J\to h^s(J)\subset\mathscr{F}^u(y)$. Como $K\subset\operatorname{supp}(\nu)$ existe $y\in B_\nu\cap B(x,\varepsilon)$ com $m^u_y(\mathscr{F}^u(y)\backslash B_\nu)=0$. Logo, existe uma cs-holonomia local $h:J\to\mathscr{F}^u(y)$. Esta holonomia é absolutamente contínua de (J,m^u_x) a $\left(\mathscr{F}^u(y),m^u_y\right)$, portanto:

$$m^u_y(h(J))>0.$$

Pela escolha de $J,h(z)$ pertence à variedade estável Pesin de z. Como a bacia ergódica é saturada por variedades estáveis, $h(J)\subset B_\mu$ e, portanto, $m^u_y\left(B_\mu\right)>0$. Como $m^u_y\left(J\backslash B_\nu\right)=0$, concluímos que $B_\nu\cap B_\mu\neq\emptyset$, e consequentemente $\mu=\nu$. Isso completa a prova da proposição. □

Corolário 5.1.1. Se $\Gamma^u(f) = \{M\}$ e μ uma medida de u-m.m.e. com $\lambda_c(\mu) < 0$ então μ é a única medida de máxima u-entropia.

Demonstração. Seja $\nu \in \mathscr{M}_{\text{erg}}(f)$ uma u-m.m.e. Como $\text{supp}(\nu)$ é u-saturado e $\Gamma^u(f) = \{M\}$ então $\text{supp}(\nu) = M$. Logo, $\text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(\nu) = M$, a Proposição 5.1.1 implica que $\mu = \nu$. □

5.2 Prova e consequências topológicas do Teorema B

Teorema B. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(M)$. Se M é o único conjunto mínimal f-invariante, u-saturado, então vale uma, e só uma das alternativas abaixo:*

(1) f admite uma única medida de máxima entropia μ. Neste caso $\lambda_c(\mu) = 0$ e μ tem estrutura de produto local, isto é, $\mu\,|_{B(x,\varepsilon)} \equiv m^{cs}_x \times m^u_x$.

(2) Existem exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia μ^+, μ^-, com expoente central positivo e negativo, respectivamente. Além disso, $\mu^-\,|_{B(x,\varepsilon)} \equiv m^{cs}_x \times m^u_x$.

Antes de provar o Teorema B, vamos enunciar e demostrar um resultado que é uma consequência topológica do Teorema B.

Teorema 5.2.1. Seja M uma variedade fechada e $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(M)$. Se $\Gamma^u(f) = \{M\}$ então $\#(\Gamma^s(f)) = 1$. Além disso, se existe uma medida de máxima entropia ergódica com expoente central nulo, então $\Gamma^s(f) = \{M\}$.

Demonstração. A Proposição 5.1.1 aplicado para f^{-1} e o Teorema B implicam que existe uma única u-mme para f^{-1}. Se $\#\Gamma^s(f) > 1$, seja $K_1, K_2 \in \Gamma^s(f)$, $K_1 \neq K_2$, o Lema 3.2.2 implica a existência de duas medidas ergódicas de máxima u-entropia para f^{-1} μ_1^+, μ_2^+ tal que $\text{supp}(\mu_1^+) = K_1$ e $\text{supp}(\mu_2^+) = K_2$. Em particular, $\mu_1^+ \neq \mu_2^+$, ou seja, f^{-1} admite duas medidas de máxima u-entropia. Esta contradição implica que

$$\#(\Gamma^s(f)) = 1.$$

Agora, suponha que exista uma medida ergódica de máxima entropia μ com $\lambda_c(\mu) = 0$, então μ é também uma u-m.m.e. Como $\Gamma^u(f) = M$, temos que toda medida ergódica de máxima entropia com expoente central não positivo tem suporte total, uma vez que o suporte de medidas de u-máxima entropia é um conjunto compacto u-saturado. Em particular $\text{supp}(\mu) = M$. Se $\Gamma^s(f) \neq \{M\}$ então existe $K^s \in \Gamma^s(f) = \Gamma^u(f^{-1})$ tal que $K^s \neq M$. O Lema 5.1.1 fornece uma medida ergódica da máxima entropia ν com $\text{supp}(\nu) = K^s$. Como $K^s \neq M$ e toda medida ergódica de máxima entropia com expoente central não positivo tem suporte total, temos que $\lambda_c(\nu) > 0$. A Proposição 5.1.1 aplicada a f^{-1} implica que $\text{supp}(\nu) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$. Logo,

$$K^s = K^s \cap M = \text{supp}(\nu) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset.$$

Esta contradição completa a prova do teorema. □

Observação 5.2.1. Quando M ser o único conjunto invariante minimal u-saturado é dito também que a folheação $\mathscr{F}^u$ é dinamicamente minimal. Note que o fato de M ser o único conjunto invariante minimal u-saturado não significa que $\mathscr{F}^u$ seja mínimal, mas sim que

$$cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(x))) = M, \text{ para todo } x \in M.$$

Por exemplo, se f_c é topologicamente transitiva e $S \subset M$ é uma folha central fixa e $f|_S$ tem rotação irracional, então M é o único conjunto invariante mínimal u-saturado. De fato, se Λ é um conjunto mínimal invariante u-saturado, então Λ intercepta cada folha central (Corolário 3.2.1). Em particular $\Lambda \cap S \neq \emptyset$. Seja $x_0 \in \Lambda \cap S$, já que Λ é f-invariante temos que $\mathscr{O}(x_0) \subset M$, onde $\mathscr{O}(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 5.2.2 (DENJOY)**.** Seja $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo da classe C^2 com número de rotação irracional ρ. Então f é conjugado com a rotação R_ρ. Consequentemente, todo ponto tem uma órbita densa.

Pelo teorema acima temos que $\mathscr{O}(x_0) = S$, logo $S \subset \Lambda$, então $\mathscr{F}^u(S) \subset \Lambda$. Como M_c é uma nilvariedade então a folheação centro-instável de M é mínimal, logo

$$M = cl(\mathscr{F}^{cu}(x_0)) = cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(x_0))) \subset \Lambda.$$

Portanto $M = \Lambda$, assim M é o único conjunto minimal invariante e u-saturado.

Prova do Teorema B. Sejam os sistemas Margulis $\{m_x^u\}_{x\in M}$, $\{m_x^{cs}\}_{x\in M}$ e $\{m_x^s\}_{x\in M}$ fornecida pela Proposição 4.3.2. A partir de agora, vamos supor que $\mathscr{F}^c$ é orientável e que f preserva esta orientação. Vamos mostrar que essas suposições não são restritivas. Suponha que o Teorema B seja válido nestas condições. Logo, seja $f : M \to M$ um difeomorfismo satisfazendo a hipótese do Teorema B. Se $\mathscr{F}^c$ não é orientável, tomamos um recobrimento duplo e obtemos um difeomorfismo $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{M}$ tal que $\overline{M}$ é conexo e compacto; $\mathscr{F}^c$ é orientável e $g = \overline{f}^2$ preserva a orientação de $\mathscr{F}^c$.

Afirmamos que $\overline{M}$ também é o único conjunto mínimal g-invariante u-saturado. Para isso, vejamos primeiro que $\overline{M}$ é o único conjunto $\overline{f}$-invariante mínimal u-saturado. De fato, se $\{\overline{M}\} \neq \Gamma^u(\overline{f})$ então existem $\tilde{x}$ e $\tilde{x}'$ pre-imagens de algum ponto $x \in M$ pelo recobrimento tal que $cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_{\overline{f}}(\tilde{x})))$ e $cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_{\overline{f}}(\tilde{x}')))$ são subconjuntos próprios minimais u-saturados e disjuntos de $\overline{M}$. Então $\overline{M}$ coincide com a união disjunta

$$cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_{\overline{f}}(\tilde{x}))) \cup cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_{\overline{f}}(\tilde{x}'))),$$

o qual é a uma contradição, uma vez que $\overline{M}$ é conexo. Agora, suponha que $g = \overline{f}^2$ tenha um conjunto u-saturado mínimal g-invariante $K \neq \overline{M}$. Logo, $K = cl(\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_g(z)))$ para todo $z \in K$. Como $K \cup \overline{f}(K)$ é um conjunto compacto $\overline{f}$-invariante u-saturado temos que $K \cup \overline{f}(K) = \overline{M}$. Então $C = K \cap \overline{f}(K) \neq \emptyset$ é um conjunto compacto $\overline{f}$-invariante u-saturado, assim, $C = \overline{M}$. Isso implica que $K = \overline{M}$, e portanto $\overline{M}$ é o único conjunto g-invariante u-saturado.

Analogamente à subseção 3.2 de (HERTZ *et al.*, 2012), pode-se verificar que a dicotomia do Teorema B para $g = \overline{f}^2$ implica a dicotomia para f.

Agora, suponha que exista uma medida de máxima entropia μ com $\lambda_c(\mu) = 0$. Como M é o único conjunto invariante minimal u-saturado, então $\text{supp}(\mu) = M$. Da Observação 3.7.1 temos $\text{MME}(f) = \text{MME}^u(f) \cup \text{MME}^u(f^{-1})$, logo, a Proposição 5.1.1 implica que não existe uma medida de máxima entropia ergódica com expoente de Lyapunov central diferente de zero. Portanto, medidas ergódicas de máxima entropia hiperbólicas e não hiperbólicas não coexistem, ou seja, apenas um dos seguinte items ocorre:

- Todas as medidas de máxima entropia tem expoente central cero.
- Todas as medidas ergódicas de máxima entropia são hiperbólicas.

Vamos dividir a prova deste teorema em três partes. Na primeira parte, assumindo a existência de uma medida de máxima entropia ergódica μ como $\lambda_c(\mu) = 0$, provamos que ela é única. Na segunda parte, assumindo a não existência de medidas de máxima entropia ergódicas não hiperbólicas, mostramos que existem exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia μ^+, μ^-, com expoente central positivo e negativo, respectivamente. A parte três corresponde à prova da estrutura de produto local de uma das medidas de máxima entropia.

Parte 1: Unicidade da medida de máxima entropia não hiperbólica. Para provar a unicidade, aplicamos o princípio de invariância de Avila-Viana (AVILA; VIANA, 2010) para concluir que μ admite uma desintegração ao longo da folheação central $\{\mu^c_{x^*}\}_{x^* \in M_c}$ é s-invariante e u-invariante e $x^* \to \mu_{x^*}$ varia continuamente com x^* em $\text{supp}\,(\pi_*(\mu)) = M_c$. Apresentamos o resultado Avila-Viana adaptado ao nosso contexto.

Teorema 5.2.3 (Teorema D, (AVILA; VIANA, 2010))**.** Seja $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(M)$. Suponha que dado $y \in \mathscr{F}^\sigma(x)$ a σ-holonomia definida naturalmente entre $\mathscr{F}^c(y)$ e $\mathscr{F}^c(x)$ é um homeomorfismo para $\sigma = s, u$. Seja μ uma medida de probabilidade tal que $\lambda_c(\mu) = 0$ e $\mu^* = \pi_*\mu$ tem estrutura de produto. Então, μ admite uma desintegração $\{\mu^c_{x^*} : x^* \in M_c\}$ que é s- invariante e u-invariante e cujas medidas condicionais μ_{x^*} variam continuamente com x^* no suporte de $\mu^* = \pi_*\mu$.

A seguinte proposição é uma consequência do teorema da unicidade da desintegração de Rokhlin, do Teorema do princípio de invariância acima.

Proposição 5.2.1. Seja $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(M)$ e μ uma medida ergódica de máxima entropia com expoente central nulo. Se f_c é topologicamente transitiva e $\{\mu^c_{x^*} : x^* \in M_c\}$ é a desintegração de μ ao longo $\mathscr{F}^c$ então

(1) $(f_c)_*\mu^c_{x^*} = \mu^c_{f_c(x^*)}$, para todo $x^* \in M_c$.

(2) $\operatorname{supp}(\mu^c_{x^*}) \neq \emptyset$, para todo $x^* \in M_c$.

(3) Se $\Gamma^u = \{M\}$ então $\mu^c_{x^*}$ não possui átomos e $\operatorname{supp}(\mu^c_{x^*}) = \mathscr{F}^c(x)$ para todo $x \in M$, $x^* = \pi_c(x)$.

Demonstração. Item (1). Pela f-invariância de μ e a unicidade da desintegração temos que $(f_c)_*\mu^c_{x^*} = \mu^c_{f_c(x^*)}$ para $\pi_*\mu$-quase todo ponto. Como $x^* \to \mu^c_{x^*}$ é contínua em $\operatorname{supp}(\pi_*\mu) = M_c$, obtemos que $(f_c)_*\mu^c_{x^*} = \mu^c_{f_c(x^*)}$ para todo $x^* \in M_c$.

Item (2). Tome $y^* \in M_c$ tal que $\operatorname{supp}(\mu^c_{y^*}) \neq \emptyset$. Pela continuidade da desintegração $\{\mu^c_{x^*} : x^* \in M_c\}$, existe um aberto $U \subset M_c$ tal que $\operatorname{supp}(\mu^c_{x^*}) \neq \emptyset$ para todo $x^* \in U$. Como f é topologicamente transitiva, existe um ponto $p^* \in U$ tal que $\operatorname{supp}(\mu^c_{p^*}) \neq \emptyset$ e $cl(\mathscr{O}(p)) = M_c$. Como $(f_c)_*\mu^c_{p^*} = \mu^c_{f_c(p^*)}$ e $\mu^c_{p*}(\mathscr{F}^c(\pi_c^{-1}(p^*))) = 1$ temos que $\mathscr{O}(p^*) \subset \{x^* \in M_c : \mu^c_{x*}(\mathscr{F}^c(\pi_c^{-1}(x^*))) = 1\}$. Pela continuidade da desintegração e densidade de $\mathscr{O}(p^*)$ devemos ter que $\mu^c_{x^*}(\mathscr{F}^c(x^*)) = 1$ para todo $x^* \in M_c$. Isto conclui a prova do item (2).

Item (3). Seja $x^* \in M_c$, pelo Item (2), $\mu^c_{x^*}$ é não trivial. Seja $x \in M$ tal que $\pi_c(x) = x^*$, tome $p \in \mu^c_{x^*}$ tal que $p \in \operatorname{supp}(\mu^c_{x^*})$. Dado $y^* \in M_c$, para cada $y \in \pi_c^{-1}(y^*)$ e $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que $\mu^c_{y^*}(\mathscr{F}^c(y,\varepsilon)) > 0$. Para isso, considere o disco $D^{cs}(y,\varepsilon)$, definido da seguinte maneira

$$D^{cs}(y,\varepsilon) := \bigcup_{z \in \mathscr{F}^c(y,\varepsilon)} \mathscr{F}^s_{loc}(z).$$

Seja $\pi^s_{loc} : D^{cs}(y,\varepsilon) \to \mathscr{F}^c(y,\varepsilon)$, a projeção ao longo das variedades estáveis locais. Como $D^{cs}(y,\varepsilon)$ é um disco transversal a $\mathscr{F}^u$ e $\mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p))$ é denso em M, temos que $D^{cs}(y,\varepsilon) \cap \mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p))$ é denso em $D^{cs}(y,\varepsilon)$. Portanto

$$\#\Big(\pi^s_{loc}\big(D^{cs}(y,\varepsilon) \cap \mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p))\big)\Big) = \infty.$$

Seja $z \in \mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p)) \cap D^{cs}(y,\varepsilon)$, então existe $n_z \in \mathbb{Z}$, tal que $z \in \mathscr{F}^u(f^{n_z}p) \cap D^{cs}(y,\varepsilon) \neq \emptyset$, e $\pi^s_{loc}(z) \in \mathscr{F}^c(y,\varepsilon)$.

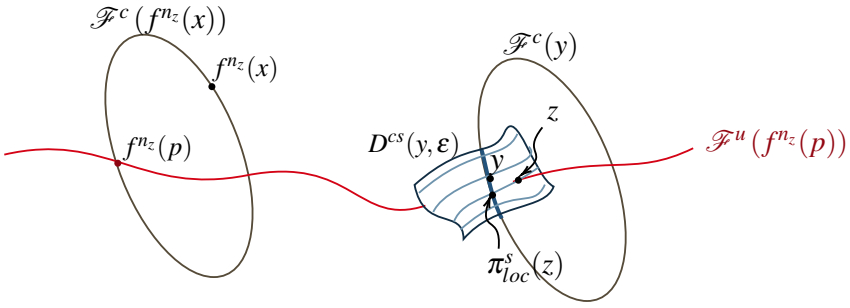

Figura 11 – Suporte da medida $\mu^c_{x^*}$

Como $p \in \operatorname{supp}(\mu^c_{x^*})$, o Item (1) implica que $f^{n_z}(p) \in \operatorname{supp}(\mu^c_{f_c^{n_z}(x^*)})$. Como $\pi^s_{loc}(z) \in AC(f^{n_z}(p))$ e a desintegração $[x^* \to \mu^c_{x^*}]$ é s, u-invariante, temos que $\pi^s_{loc}(z) \in \operatorname{supp}(\mu^c_{y^*})$. Em

particular, se p é um átomo então $\mu(\pi^s_{loc}(z)) = \mu_{y^*}(\{p\}) = \alpha > 0$. Como $\#\big(\pi^s_{loc}(D^{cs}(y,\varepsilon) \cap \mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p))\big) = \infty$, então

$$1 = \mu^c_{y^*}(\mathscr{F}^c(y)) \geq \mu^c_{y^*}\big(\pi^s_{loc}(D^{cs}(y,\varepsilon) \cap \mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p))\big) = \#\big(\pi^s_{loc}(D^{cs}(y,\varepsilon) \cap \mathscr{F}^u(\mathscr{O}_f(p))\big).\alpha = \infty.$$

Esta contradição implica que $\mu^c_{x^*}$ não pode ser atômica. Finalmente, como $z \in \mathscr{F}^c(y,\varepsilon)$ e $\pi^s_{loc}(z) \in \operatorname{supp}(\mu^c_{y^*})$ temos que

$$\mu^c_{y^*}(\mathscr{F}^c(y,\varepsilon)) > 0. \tag{5.2}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, (5.2) implica que $y \in \operatorname{supp}(\mu^c_{y^*})$ para todo $y \in \pi_c^{-1}(y^*)$, ou seja, a medida $\mu^c_{y^*}$ tem suporte total. Isto conclui a prova da proposição. □

Observação 5.2.2. Em (HERTZ *et al.*, 2012) e (URES; VIANA; YANG, 2021), o fato principal para provar a unicidade é que toda medida condicional μ^c_x de uma medida de máxima entropia μ com $\lambda_c(\mu) = 0$ tem suporte total em $\mathscr{F}^c(x)$ e não possui átomos, e para isso, os autores usaram fortemente a hipótese de acessibilidade. Porém, na Proposição (5.2.1) obtivemos o mesmo, usando a hipótese $\Gamma^u(f) = M$ no lugar de acessibilidade.

Prova da unicidade. Da Proposição 5.2.1 e usando um método como em (AVILA; VIANA, 2010), obtemos uma S^1-ação em M que comuta com f, ou seja, $\rho_\theta : M \to M$ tal que $\rho_\theta \circ f = f \circ \rho_\theta, \theta \in S^1$. Para isso, definimos ρ_θ da seguinte maneira: $\rho_\theta(x) = y$ onde y é o ponto em $\mathscr{F}^c(x)$ tal que o arco da folha centro estável que une x com y (usando a orientação positiva) tem medida condicional $\mu^c_x([x,y]_c) = \theta$ (estamos identificando S^1 com $[0,1]$ mod . 1).

Analogamente a (HERTZ *et al.*, 2012) concluímos que f é conjugado a $\hat{f}$, onde $\hat{f}$ é uma extensão de rotação rígida do homeomorfismo de Anosov f_c. Como M é o único conjunto mínimal invariante u-saturado para f, pela conjugação topológica temos também que M é o único conjunto mínimal invariante u-saturado para $\hat{f}$.

Para mostrar que μ é a única medida de máxima entropia, pela conjugação topológica de f e $\hat{f}$ é suficiente mostrar que $\hat{\mu}$ é a única medida de máxima entropia para $\hat{f}$. Como a dinâmica quociente f_c em $M/\mathscr{F}^c$ é um homeomorfismo hiperbólico transitivo, f_c tem uma única medida de máxima entropia que é localmente produto de medidas nas variedades estáveis e instáveis. Suponha que ν seja uma medida de máxima entropia para $\hat{f}$. Então ν projeta sobre a única medida de máxima entropia de f_c. Como M é o único conjunto invariante mínimal u-saturado para $\hat{f}$, temos que as medidas condicionais ao longo das folhas centrais não possuem átomos, são totalmente suportadas em $\mathscr{F}^c$ e são invariantes por rotações (AVILA; VIANA, 2010). Isso resulta que as medidas condicionais são Lebesgue e $\hat{\mu} = \nu$. □

Parte 2: Quantidade de medidas de máxima entropia hiperbólicas

Pelo argumentado no inicio da prova do Teorema B, vamos supor que não existe medidas de máxima entropia com expoente Layapunov central nulo.

Seja μ uma medida ergódica com $\lambda_c(\mu) \neq 0$. Podemos supor que $\lambda_c(\mu) < 0$. A Proposição 3.2.2 implica a existência de outra medida de probabilidade f-invariante ν que é isomórfica a μ e $\lambda_c(\nu) = 0$ ou o sinal de $\lambda_c(\nu)$ é oposto ao sinal de $\lambda_c(\mu)$. Pelo Corolário 5.1.1 temos que f é a única medida de máxima entropia com expoente central não positivo. Assim, $\lambda(\nu) > 0$.

Agora, suponha que exista outra medida ergódica de máxima entropia η com expoente central positivo. Tomando f^{-1} por f na Proposição 3.2.2 obtemos μ_1, μ_2 medidas ergódicas f-invariantes com expoente de Lyapunov centrais negativos e $Z_1, Z_2 \subset M$ tal que $\nu(Z_1) = 1 = \eta(Z_2)$, $\beta_1 : (Z_1, \nu) \to (\beta_1(Z_1), \mu_1)$ e $\beta_2 : (Z_2, \eta) \to (\beta_2(Z_2), \mu_2)$ como na Proposição 3.2.2. Pela unicidade das medidas de máxima entropia com expoente central negativo (Corolário 5.1.1) temos que $\mu_1 = \mu = \mu_2$. Então $\mu(Z) = 1$ onde $Z = \beta_1(Z_1) \cap \beta_2(Z_2)$. Portanto, para todo $z \in Z$ temos que $\beta_1^{-1}(z), \beta_2^{-1}(z) \in (z, \sup \mathscr{W}_s^c(z,f)]_c$. Isso implica que $\beta_2^{-1}(z) \in \mathscr{W}_s^c(\beta_1^{-1}(z), f^{-1})$ for ν, η-a.e. $z \in Z$. Isto, juntamente com a ergodicidade das medidas η e ν implicam que $\nu = \eta$. Portanto, f possui exatamente duas medidas ergódicas de máxima entropia $\mu^- := \mu$, e $\mu^+ = \nu$, onde μ^- tem expoente central negativo e μ^+ tem expoente central positivo. Isso conclui o prova da primeira parte do Teorema B.

Parte 3: Estrutura de produto local.

Procedemos como em (BUZZI; FISHER; TAHZIBI, 2019), construindo uma medida de probabilidade Boreliana invariante como um produto local de m_x^u e m_x^{cs}. Defina medidas locais $\{m_p\}_{p \in M}$. Para cada $p \in M$, tomamos uma caixa bifolheada pequena para $\mathscr{F}^u$ e $\mathscr{F}^{cs}$, U_p contendo p da seguinte maneira: Tome $\mathscr{F}^u_{\text{loc}}(p), \mathscr{F}^{cs}_{\text{loc}}(p)$ vizinhanças pequenas de p em $\mathscr{F}^u(p), \mathscr{F}^{cs}(p)$ respectivamente, e seja U_p a imagem de $\mathscr{F}^u_{\text{loc}}(p) \times \mathscr{F}^{cs}_{\text{loc}}(p)$ pelo mapa do produto local $(x,y) \mapsto \mathscr{F}^{cs}_{\text{loc}}(x) \cap \mathscr{F}^u_{\text{loc}}(y)$.

Para qualquer $z \in U_p$ denotamos por $\mathscr{F}^u(z, U_p)$ à placa de $\mathscr{F}^u$ passando por z contido em U_p. Analogamente definimos $\mathscr{F}^{cs}(z, U_p)$. Em seguida, definimos as projeções $\pi_p^{cs} : U_p \to \mathscr{F}^{cs}_{\text{loc}}(p)$ e $\pi_p^u : U_p \to \mathscr{F}^u_{\text{loc}}(p)$ ao longo das placas instáveis e centro-estáveis respectivamente. Por definição, para qualquer $y \in \mathscr{F}^{cs}(p, U_p), \pi_p^u$ manda $\mathscr{F}^u(y, U_p)$ homeomorficamente para $\mathscr{F}^u(p, U_p)$.

Agora, vamos definir uma medida m_p em U_p integrando as medidas m_y^u com respeito da medida m_p^{cs}. Definimos

$$m_p := \int_{\mathscr{F}^{cs}(p,U_p)} m_y^u dm_p^{cs}(y)$$

e justifique esta definição da seguinte forma: Seja $\phi \in C(M)$ uma função contínua com $\operatorname{supp} \phi \subset$

U_p. Seja $\alpha_\phi^p : \mathscr{F}^{cs}(p,U_p) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha_\phi^p(y) := m_y^u\left(1_{\mathscr{F}^u(y,U_p)}.\phi\right) = \int (1_{\mathscr{F}^u(y,U_p)}\phi)(z)dm_y^u.$$

Pelo Teorema A, temos que o mapa $x \mapsto m_x^u\left(1_{\mathscr{F}^u(y,U_p)}.\phi\right)$ é continuo e portanto, α_ϕ^p esta bem definido e é mensurável. Como U_p é uma caixa bifolheada pequena existe $r > 0$ tal que $\mathscr{F}^u(y,U_p) \subset \mathscr{F}^u(y,r)$ para todo $y \in U_p$. Como $\{m_x^u\}_{x\in M}$ é localmente finito existe $K_r > 0$ tal que $m_y^u(\mathscr{F}^u(y,U_p)) \leq K_r$ para todo $y \in U_p$. Portanto,

$$m_y^u(\mathscr{F}^u(y,U_p)) \leq K_r$$

Isto implica que a função mensurável α_ϕ^p é limitado, portanto, integrável para a medida de Radon m_p^{cs}. Conforme anunciado, obtemos medidas de Borel bem definidas, finitas e positivas para cada $p \in M$ definindo:

$$m_p(\phi) := \int_{\mathscr{F}_{loc}^{cs}(p)} \alpha_\phi^p(y)dm_p^{cs}(y). \tag{5.3}$$

Note que estas medidas são medidas Borel finitas e positivas, definidas para cada $p \in M$.

Afirmação 5.2.1. A medida m_p definida anteriormente, para cada $p \in M$, com suporte contido em alguma vizinhança U_p satisfaz a seguinte condição de compatibilidade: se $q \in M$ e $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, podemos construir m_q tal que

$$\phi \in C(U_p \cap U_q), \text{ então } m_p(\phi) = m_q(\phi). \tag{5.4}$$

Demonstração. Uma vez que U_p e U_q são pequenos (e podemos supor que se interceptam), existe uma u-holonomia bem definida $h : \pi_p^{cs}(U_p \cap U_q) \to \pi_q^{cs}(U_p \cap U_q)$. Logo,

$$\begin{aligned}
m_p(\phi) &= \int_{\pi_p^{cs}(U_p\cap U_q)} \alpha_\phi^p(y)dm_p^{cs}(y) \\
&= \int_{h(\pi_p^{cs}(U_p\cap U_q))} \alpha_\phi^p(h^{-1}(z))dm_{h(p)}^{cs}(z) \\
&= \int_{\pi_q^{cs}(U_p\cap U_q)} \alpha_\phi^p(h^{-1}(z))dm_q^{cs}(z) \\
&= \int_{\pi_q^{cs}(U_p\cap U_q)} \alpha_\phi^q(z)dm_q^{cs}(z) = m_q(\phi).
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova da afirmação. □

Agora definimos uma medida Borel finita m em M escolhendo uma partição da unidade $1 = \chi_1 + \cdots + \chi_r$ subordinada a uma cobertura finita $U_1, \ldots, U_r$ determinado por pontos $p_1, \ldots, p_r \in M$, e definimos:

$$m(\phi) = m_{p_1}(\phi\chi_1) + \cdots + m_{p_r}(\phi\chi_r)$$

Finalmente, definimos $\mu^{cs\otimes u} = m(M)^{-1}.m$. Observe que $\mu^{cs\otimes u}$ é uma medida de probabilidade Boreliana de M. Note que m e $\mu^{cs\otimes u}$ não dependem da escolha da partição da unidade. De fato,

se $1 = \chi_1' + \cdots + \chi_{r'}'$ é outra partição da unidade subordinada a alguma cobertura finita definida por pontos $p_1', \ldots, p_{r'}'$, então, para cada $\phi \in C(M)$,

$$\begin{aligned} m_{p_1}(\phi\chi_1) + \cdots + m_{p_r}(\phi\chi_r) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r'} m_{p_i}\left(\phi\chi_i\chi_j'\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r'} m_{p_j'}\left(\phi\chi_i\chi_j'\right) \\ &= m_{p_1'}(\phi\chi_1) + \cdots + m_{p_r'}(\phi\chi_{r'}) \end{aligned}$$

Para mostrar a f-invariância de $\mu^{cs\otimes u}$, observe que para qualquer subconjunto mensurável $A \subset U_p \cap f(U_q)$ com $p, q \in M$, temos

$$\begin{aligned} m(f^{-1}(A)) = m_q(f^{-1}(A)) &= \int_{\pi_q^{cs}(f^{-1}(A))} m_x^u(f^{-1}(A))dm_q^{cs}(x) \\ &= D_u^{-1}\int_{\pi_q^{cs}(f^{-1}(A))} m_{f(x)}^u(A)dm_q^{cs}(x) \\ &= D_u^{-1}\int_{\pi_q^{cs}(f^{-1}(A))} m_{f(x)}^u(A)\frac{dm_q^{cs}}{df_*^{-1}\left(m_q^{cs}\right)}(x)df_*^{-1}\left(m_q^{cs}\right) \\ &= D_u^{-1}.D_{cs}\int_{\pi_p^{cs}(A)} m_y^u(A)dm_p^{cs}(y) \\ &= D_u^{-1}.D_{cs}.m(A). \end{aligned}$$

Na 4ª igualdade acima, usamos que $\pi_p^{cs}(f(\pi_q^{cs}(f^{-1}(A)))) = \pi_p^{cs}(A)$. O mesmo se aplica a qualquer subconjunto mensurável de M. O caso que $A = M$ implica que $D_u = D_{cs}$. Logo, a medida m e $\mu^{cs\otimes u}$ são f-invariantes.

Dada uma caixa bifolheada $B \subset M$ note que a desintegração de $\mu^{cs\otimes u}$ ao longo das placas instáveis $\mathscr{F}_B^u$ é dado por $\dfrac{m_x^u|_{\mathscr{F}_B^u(x)}}{m_x^u(\mathscr{F}_B^u(x))}$. Isto juntamente com a Proposição 4.1.2 implicam que $h_{\mu^{cs\otimes u}}^u(f,\varphi) = \log D_u = h_{\text{top}}(f)$. Isto conclui a prova da es estrutura local e portanto a prova do Teorema B.

5.2.1 Corolário B.1

Corolário B.1. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f é não acessível e M é o único conjunto invariante minimal u-saturado, então f é conjugado (a menos de iterações finitas e recobrimento finito) com*

$$N \times S^1 \to N \times S^1, \ \ (x,t) \mapsto (Ax, t+\theta)$$

onde a N é uma nilvariedade. Além disso, possui uma única medida de máxima entropia, a qual tem suporte total e expoente central nulo.

Demonstração. Seja $g \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\overline{M})$ um AB-sistema que levanta alguma iterada de f para um recobrimento finito $\overline{M}$ (conexo) de M. Semelhante ao Teorema B, temos que g é um AB-sistema

com $\Gamma^u(g) = \{\overline{M}\}$. Portanto, basta considerar f como sendo um AB-sistema.

Agora, como f é um AB-sistema não acessível, o Teorema 2.6 de (HAMMERLINDL, 2017) implica a existência de uma su-folha compacta $\mathbf{N}_{su}$ homeomorfo a uma nilvariedade compacta hiperbólica N. Logo, $\mathbf{N}_{su}$ não é periódica, uma vez que M é o único conjunto minimal invariante u-saturado. Como $cl\big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathbf{N}_{su})\big)$ é um conjunto fechado, invariante e u-saturado, temos

$$cl\big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathbf{N}_{su})\big) = M.$$

Portanto, $AC(x) \subset M$ não pode ser um conjunto aberto para todo $x \in M$. Então, pelo Teorema 2.5 de (HAMMERLINDL, 2017), E^u e E^s são juntamente integráveis.

Como $\Gamma^u(f) = \{M\}$ então f é topologicamente transitivo (como já vimos na prova da Proposição 4.3.2), em particular $NW(f) = M$. Agora, como $NW(f) = M$ e $E^s \oplus E^u$ é integrável, o Teorema 1.5 de (HAMMERLINDL, 2017) implica que f é topologicamente conjugado a

$$N \times S^1 \to N \times S^1, \;\; (x,t) \mapsto (Ax, t+\theta),$$

onde A é um automorfismo hiperbólico de N. Além disso, o número θ é irracional, caso contrário, o Corolário 8.6 em (HAMMERLINDL, 2017) implica que f tem uma su-folha compacta e periódica. Então $(x,t) \mapsto (Ax, t+\theta)$ possui uma única medida de máxima entropia. Pela conjugação topológica, concluímos que f possui uma única medida de máxima entropia μ, e o Teorema B implica que $\lambda_c(\mu) = 0$. □

5.3 Prova do Teorema C

Teorema C. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f admite uma medida de máxima entropia μ com $\lambda_c(\mu) = 0$, então*

(1) $\mathrm{supp}(\mu) = M$, *ou*

(2) o suporte de toda medida de máxima entropia com expoente central zero contém uma su-folha periódica compacta.

Suponha que $\mathrm{supp}(\mu) \neq M$. O Teorema 1 de (HERTZ *et al.*, 2012) implica que f não é acessível, ou seja, f é um infra-AB-sistema não acessível. Além disso, existe $n_0 \geq 1$ tal f^{n_0} se levanta para um AB-sistema g, para um recobrimento finito $\pi : \overline{M} \to M$. Seja $\overline{\mu}$ uma medida de u-máxima entropia para $\overline{f}$ que se projeta sob μ, os Corolários 4.3.1 e 4.1.1 implicam que $\mathrm{supp}(\overline{\mu})$ é um conjunto compacto u-saturado diferente de $\overline{M}$ e $\lambda_c(\overline{\mu}) = 0$. Se $\mathrm{supp}(\overline{\mu})$ contém

uma *su* folha compacta periódica K então $\pi(K)$ é uma *su*-folha compacta e periódica para f. Então o Teorema C é consequência do seguinte resultado:

Proposição 5.3.1. Seja M uma variedade fechada e $g \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um AB-sistema e μ uma medida ergódica de máxima u-entropia com $\lambda_c(\mu) \geq 0$. Se $\mathrm{supp}(\mu) \neq M$ então $\mathrm{supp}(\mu)$ contém a órbita de uma *su*-folha compacta periódica.

Demonstração. Como μ é uma u-m.m.e ergódica então $\mathrm{supp}(\mu)$ é u-saturado e compacto. Logo existe $K \in \Gamma^u(g)$ tal que $K \subset \mathrm{supp}(\mu)$. Como $K \in \Gamma^u$, pelo Lema 5.1.1 existe uma medida de máxima entropia ν com $\mathrm{supp}(\nu) = K$ e pela Proposição 5.1.1 devemos ter que $\lambda_c(\nu) \geq 0$.

Como ν é uma m.m.e. ergódica com $K = \mathrm{supp}(\nu)$ e $\lambda_c(\nu) \geq 0$ então K é um conjunto s,u-saturado. Como o AB-sistema protótipo f_{AB} tem uma folha central invariante que é um círculo, pela conjugação por folhas centrais com f_{AB}, g possui uma folha central invariante S. Observe que $g|_S$ tem um número de rotação racional $\rho(g|_S) = p/q \in \mathbb{Q}$. Trocando g por g^q, defina

$$\mathscr{K}(g) := \{x \in S : AC(x) \text{ é um } su\text{-variedade compacta invariante}\}.$$

Observe que $\mathscr{K}(g)$ é um conjunto não vazio fechado e $U = S \backslash \mathscr{K}(g)$ é um subconjunto aberto de S.

Afirmamos que $K = AC(x)$ para algum $x \in \mathscr{K}(g)$. De fato, seja $K_0 \subset K$ uma componente conexa de K. Se $K \neq AC(x)$ para todo $x \in \mathscr{K}(g)$ então $K \cap U \neq \emptyset$. Logo, existe uma componente conexa J de U tal que $K \cap J \neq \emptyset$. Como $g(J) = J$ e $K \in \Gamma^u(g)$ temos que $K \subset AC(J)$. Seja $J_0 = K \cap J$, defina

$$x_+ = \max J_0.$$

Como $g(J) = J$ e $g(K) = K$ temos que $g(J_0) = J_0$ e $x_+ \in Fix(g)$. Como $AC(x_+) \subset K$, $K \in \Gamma^u(g)$ e $x_+ \in Fix(g) \cap K$ temos que

$$K = cl(AC(x_+)).$$

Afirmação 5.3.1. $g|AC(J)$ é um AI-sistema não acessível.

Demonstração. Comece por notar que se $AC(x_+)$ for aberto, então $AC(x_+) \cap J$ é aberto. Isso implica a existência de um ponto $y \in AC(x_+) \cap J \subset K$ tal que $x_+ < y$, ou seja, $\max J_0 > x_+$, isto gera uma contradição. Finalmente, o Lema 8.9 de (HAMMERLINDL, 2017) implica que $g|AC(J)$ é um AI-sistema. Como $x_+ \in J$ e $AC(x_+)$ não são abertos, concluímos que $g|AC(J)$ é não acessível. □

Seguimos as notações da Seção 3.5 para o AI-sistema $g|_{AC(J)}$. Como $AC(x_+)$ não é aberto e $K = cl\big(AC(x_+)\big)$ temos que $J_0 \subset \{y \in S : AC(y) \text{ não é aberto}\}$. Por definição de AI-sistema, cada folha central em $AC(J)$ é propriamente imersa. Portanto, K intercepta cada folha central em um conjunto compacto. Se $\widetilde{K}$ e $\widetilde{J_0}$ são as pré-imagens de K e J_0 no recobrimento universal $P : \widetilde{AC(J)} \to AC(J)$, então $\widetilde{K}$ intercepta cada folha central a $\widetilde{AC(J)}$ num conjunto compacto. Em

particular, $\widetilde{J_0} = \widetilde{K} \cap L$ é compacto. Como $J_0 \subset \{y \in S : AC(y) \text{ não é aberto}\}$ temos que $\widetilde{J_0} \subset \Lambda_g$.

Além disso, como K é um conjunto *su*-saturado, $K = AC(K)$ e do fato que $J_0 = K \cap S$ é claro que $K = AC(J_0)$. Logo

$$J_0 = K \cap S = AC(J_0) \cap S. \tag{5.5}$$

Agora, vamos provar que se $t_+ = \max \widetilde{J_0}$ então $t_+ \in Fix(G)$. De fato, como $G < Homeo^+(\Lambda_g)$ temos que $t_+ \leq \beta(t_+)$ para todo $\beta \in G$. De (5.5) temos que $\widetilde{J_0}$ é igual à órbita $G(\widetilde{J_0}) = \{\beta(t) : \beta \in G \text{ e } t \in \widetilde{J_0}\}$, ou seja, $\widetilde{J_0} = G(\widetilde{J_0})$. Então $t_+ = \beta(t_+)$ para todo $\beta \in G$, isto é, $t_+ \in Fix(G)$.

Como $t_+ = \max \widetilde{J_0}$ e $g(J_0) = J_0$ temos que $t_+ \in Fix(\widetilde{g})$ e $P(t_+) = x_+$. Logo, $t_+ \in Fix(G) \cap Fix(\widetilde{g})$, por Lema 3.5.3, $AC(x_+) \subset AC(J)$ é um variedade compacta invariante, ou seja, $x_+ \in \mathscr{K}(g)$. Esta contradição completa a prova da proposição. □

Observação 5.3.1. Seja N_{su} uma *su*-folha compacta periódica, de período τ como no teorema acima. Seguindo as notações do teorema acima temos que existe uma nilvariedade $N \subset \overline{M}$ tal que $\pi|_N$ é um levantamento finito de N_{su} tal que $\pi \circ g^\tau|_N = f^\tau|_{N_{su}} \circ \pi$. Como $g^\tau|_N$ é um homeomorfismo hiperbólico sobre a nilvariedade N então g^τ é topologicamente transitivo. Pelo recobrimento finito debemos ter que $f^\tau|_{N_{su}}$ também é um homeomorfismo hiperbólico topologicamente transitivo. Portanto $f^\tau|_{N_{su}}$ possui uma única medida de máxima entropia. Seja η tal medida, então

$$\mu = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{\tau-1} f_*^j \eta$$

é a única medida de máxima entropia para $f|_{\mathbf{N}_{su} \cup \ldots \cup f^{\tau-1}(\mathbf{N}_{su})}$.

5.4 Prova do Teorema D

Teorema D. *Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f é topologicamente transitiva, então $\#\mathrm{MME}_0(f) \leq 2$. Além disso, se $\mu \in \mathrm{MME}_0(f)$, então:*

- $\mathrm{supp}(\mu) = M$, *ou*
- $\mathrm{supp}(\mu)$ *é a órbita de uma su-folha compacta e periódica.*

Antes de provar o Teorema D, note que se f é acessível por (HERTZ *et al.*, 2012) temos que $\#\mathrm{MME}_0(f) = 1$. Então vamos assumir que f é não acessível. O seguinte lema que será crucial para a prova do teorema:

Lema 5.4.1. Seja M uma variedade fechada e $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(M)$ um infra-AB-sistema. Se f é topologicamente transitiva então admite no máximo duas órbitas de *su*-folhas compactas periódicas.

Demonstração. Seja S uma folha central fixa e $K_S \subset S$ o conjunto de pontos $x \in S$ tal que $AC(x)$ é uma *su*-folha compacta periódica. Suponha que K_S é diferente do vazio, a transitividade topológica de f implica que $K_S \subsetneq S$, casso contrario a órbita de qualquer ponto esta contida na órbita de uma *su*-folha compacta, e portanto não pode ser densa. Como K_S é fechado, então $S \backslash K_S$ é um conjunto aberto não vazio. Seja J uma componente conexa de $S \backslash K_S$, então existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $f^\tau(J) = J$, assim $f^\tau(AC(J)) = AC(f^\tau(J)) = AC(J)$. Se I é uma outra componente conexa de $S \backslash K_S$; como $AC(J) = f^\tau(AC(J))$ é um conjunto aberto e f é transitivo, temos que existe $n \in \{1, \ldots, \tau\}$ tal que $f^n(AC(J)) \cap AC(I) \neq \emptyset$ e $f^n(\partial(AC(J)) = \partial(AC(I))$, uma vez que $AC(I)$ e $AC(J)$ não contem *su*-folhas compacta periódicas. Assim,

$$K_S = \partial(AC(J)) \cup f(\partial(AC(J))) \ldots \cup f^{\tau-1}(\partial(AC(J))).$$

Isso completa a prova do lema. □

Prova do Teorema D. Supondo $\#(\mathrm{MME}_0) > 1$, vamos mostrar que $\#(\mathrm{MME}_0) = 2$. Em efeito, como $\#(\mathrm{MME}_0) > 1$, o Teorema B implica que $\Gamma^u(f) \neq \{M\}$ e portanto f é infra-AB-sistema não acessível. Pelo Teorema 3.4.3 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f^{n_0} é levantado por um AB-sistema $g : \overline{M} \to \overline{M}$, para um recobrimento finito de $\pi : \overline{M} \to M$. Seja S uma folha central fixa para g, como $\Gamma^u(f) \neq \{M\}$, usando o Teorema B e Corolário B.1, temos que o número de rotação $\rho(g|_S)$ é racional. Além disso, como f admite uma quantidade finita de *su*-folhas compactas periódicas, temos que g admite também uma quantidade finita de *su*-folhas compactas periódicas. Tomando uma outra iterada de f, se for necessário, podemos assumir que todos as *su*-folhas compactas de g são fixas. Como g é não acessível, temos que

$$K_g = \{x \in S : AC(x) \subset M \text{ é uma } su\text{-folha compacta}\} \neq \emptyset.$$

Suponha que J é uma componente conexa de $S \backslash K_g$, pelo Lema 8.9 de (HAMMERLINDL, 2017), isso implica que $g|_{AC(J)}$ é uma AI-sistema. Como f é topologicamente transitiva e g é um levantamento de f^{n_0} para um recobrimento finito, existem pontos $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l \in \overline{M}$ tal que

$$cl\Big(\mathscr{O}^+(\bar{x}_1, g) \cup \ldots \cup \mathscr{O}^+(\bar{x}_l, g)\Big) = \overline{M},$$

onde $\mathscr{O}^+(z, g) := \{g^n(z) : n = 0, 1, \ldots\}$. Como $g(J) = J$, então $g(AC(J)) = AC(J)$e podemos supor que $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l\} \cap AC(J) = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_\ell\}$ para algum $\ell \leq l$. Então

$$cl\Big(\mathscr{O}^+(\bar{x}_1, g) \cup \ldots \cup \mathscr{O}^+(\bar{x}_\ell, g)\Big) = cl\big(AC(J)\big). \tag{5.6}$$

Teorema 5.4.1. (HAMMERLINDL, 2017) Suponha que $g : \hat{M} \to \hat{M}$ é um AI-sistema sem *su*-folhas compactas invariantes. Então

(1) g é acessível,

(2) existe um conjunto aberto $V \subset \hat{M}$ tal que

$$\overline{g(V)} \subset V, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g^k(V) = \hat{M}, \quad \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} g^k(V) = \varnothing,$$

e a fronteira de V é uma *su*-folha compacta, ou

(3) não existem *su*-folhas compactas em $\hat{M}$, existem uma quantidade não enumerável de *su*-folhas não compactas em $\hat{M}$ e $\lambda \neq 1$ tal que g é semi-conjugada a

$$N \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R}, \quad (v,t) \mapsto (Av, \lambda t).$$

Afirmação 5.4.1. $g|_{AC(J)}$ é acessível.

Demonstração. Observe que $g|_{AC(J)}$ é um AI-sistema sem *su*-folhas compactas invariantes. Então $g|_{AC(J)}$ satisfaz o caso (1), (2) ou (3) do teorema acima.

Se $g|_{AC(J)}$ não for acessível. Então, a restrição $g|_{AC(J)}$ ou satisfaz o caso (2) ou satisfaz o caso (3). Primeiro suponha que $g|_{AC(J)}$ satisfaz o caso (2) e seja V como no Teorema acima. É claro que $V \neq AC(J)$, logo a relação (5.6) implica que $g(V) \cap \mathscr{O}^+(\bar{x}_i, g) \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, \ell$. Então

$$cl\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^k(V)\big) = cl\big(AC(J)\big).$$

Como $cl(g(V)) \subset V$ temos que $g^n(V) \subset g(V)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$cl\big(AC(J)\big) = cl\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^k(V)\big) = cl\big(g(V)\big) \subset V \neq AC(J).$$

Esta contradição implica que $g|_{AC(J)}$ não satisfaz o caso (2).

Agora, suponha que $g|_{AC(J)}$ satisfaz o caso (3). Então $g|_{AC(J)}$ é semiconjugado ao mapa $A_\lambda : N \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R}, \quad (v,t) \mapsto (Av, \lambda t)$ com $\lambda \neq 1$ por uma semiconjugação $h : AC(J) \to N \times \mathbb{R}$. Seja $z_i = h(\bar{x}_i)$ para $i = 1, \ldots, \ell$; a sobrejetividade de h e (5.6) implicam que

$$cl\Big(\mathscr{O}^+(z_1, A_\lambda) \cup \ldots \cup \mathscr{O}^+(z_\ell, A_\lambda)\Big) = N \times \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $z_i \notin N \times \{0\}$ para todo $i = 1, \ldots, \ell$. Logo, existem $b > a > 0$ tais que $\{z_1, \ldots, z_\ell\} \subset N \times [(-b,-a) \cup (a,b)]$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathscr{O}^+(z_1, A_\lambda) \cup \ldots \cup \mathscr{O}^+(z_\ell, A_\lambda) &\subset N \times \big(-b, b\big), \text{ quando } \lambda < 1, \text{ e} \\ \mathscr{O}^+(z_1, A_\lambda) \cup \ldots \cup \mathscr{O}^+(z_\ell, A_\lambda) &\subset N \times \big((-\infty, -a) \cup (a, \infty)\big), \text{ quando } \lambda > 1. \end{aligned}$$

Isso contradiz (5.6). Portanto $g|_{AC(J)}$ não satisfaz o caso (3). Isto conclui a prova da afirmação. □

Seja $N_{su}(f) := \{x \in M : Ac(x)$ é uma *su*-folha compacta periódica$\}$. Como $g|AC(J)$ é acessível e $\partial(AC(J))$ projeta sobre *su*-folhas compactas periódicas, para qualquer componente conexa J de $S\backslash K_g$, temos que f é acessível em cada componente conexa de $M\backslash N_{su}(f)$. Como o complemento da união das *su*-folhas periódicas tem uma quantidade finita de componentes conexas, a transitividade topológica implica que existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que

$$M\backslash N_{su}(f) = AC(x) \cup \ldots \cup f^{\tau}(AC(x)) \quad \text{para todo } x \in M\backslash N_{su}(f). \tag{5.8}$$

Afirmação 5.4.2. Se f admite uma *su*-folha periódica compacta e μ é uma medida ergódica de máxima entropia com $\lambda_c(\mu) = 0$ então $\text{supp}(\mu)$ é a órbita de uma *su*-folha compacta e periódica.

Demonstração. Suponha que $\text{supp}(\mu)$ contém um ponto x_0 tal que $AC(x_0)$ não é a órbita de uma *su*-folha compacta periódica, então $AC(x_0)$ é aberto como vimos na afirmação 5.4.1; por (5.8) temos que $cl(AC(x_0) \cup \ldots \cup f^{\tau}(AC(x_0))) = M$, assim $\text{supp}(\mu) = M$. Logo, se $\{\mu_x^c\}_{x\in M}$ são as medidas condicionais ao longo das folhas centrais, então $\text{supp}(\mu_x^c) = \mathscr{F}^c(x)$ para todo $x \in M$, toda vez que existe $x_1 \in AC(x_0)$ tal que $x_1 \in \text{supp}(m_{x_1}^u)$ e a desintegração é s,u-invariante. Além disso, se $S = \mathscr{F}^c(a)$ é uma folha central fixa, pela a Proposição 5.2.1 temos que μ_a^c é uma medida invariante de $f|_S$. Como f admite uma *su*-folha compacta periódica $\mathbb{N}_{su}$ então $\rho(f|_S) \in \mathbb{Q}$. Como μ_a^c tem suporte total e $f|_S$ tem número de rotação racional,

$$S = \text{supp}(\mu_a^c) \subset (f|_S) = \Omega(f|_S).$$

Então $Per(f|_S) = S$ e μ_a^c é equivalente à medida de Lebesgue no círculo S, e por continuidade da desintegração de μ ao longo da folheação central (Teorema 5.2.3) temos que μ_x^c é equivalente à medida de Lebesgue em $\mathscr{F}^c(x)$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina $B_c^{\mu}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathscr{F}^c(x) : \mu((x,y))$ o $\mu((y,x)) < \varepsilon\}$, então $B_c^{\mu}(x,\varepsilon) \subset \mathscr{F}^c(x)$ é um conjunto aberto, uma vez que μ_x^c é equivalente à medida de Lebesgue. Consequentemente, $V_{\varepsilon}(\mathbb{N}_{su}) = \bigcup_{x\in\mathbb{N}_{su}} B_c^{\mu}(x,\varepsilon)$ é um conjunto aberto em M.

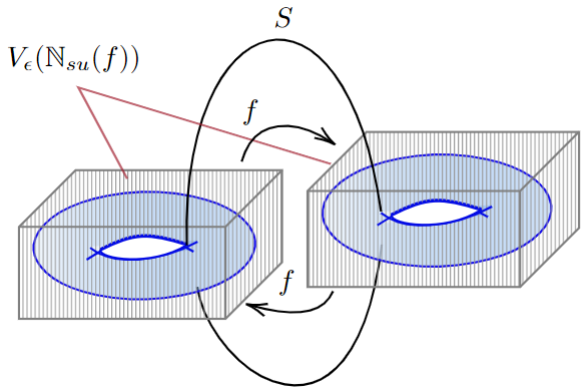

Figura 12 – Dinâmica na direção central de acordo ao expoente central

A Proposição 5.2.1 implica que $\mu_{f^k(x)}^c(f^k(B_c^{\mu}(x,\varepsilon))) = B_c^{\mu}(f^k(x),\varepsilon)$. Assim, se τ é o período de $\mathbb{N}_{su}$ temos que

$$f^{\tau}(V_{\varepsilon}(\mathbb{N}_{su})) = V_{\varepsilon}(\mathbb{N}_{su}). \tag{5.9}$$

Considerando $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno para que $M \backslash V_\varepsilon(\mathbb{N}_{su})$ contenha um aberto, temos que a igualdade (5.9) contradiz a transitividade topológica de f. $\square$

Para finalizar a prova do Teorema D, note que, do fato que existem no máximo duas órbitas periódicas de *su*-folhas compactas e pela observação 5.3.1 sabemos que toda órbita de uma *su*-folha compacta suporta uma única medida ergódica de máxima entropia, o Lema 5.4.2 implica que $\mathrm{MME}_0(f) \leq 2$. isso completa a prova do teorema.

5.5 Prova das Proposições E.1, E.2 e E.3

Para o caso $M = \mathbb{T}^3$ a *su*-folha compacta do item 2 do Teorema C é um toro bidimensional $\mathbb{T}^2_{su}$, o qual chamamos de *su*-toro. Se $\mathbb{T}^2_{su}$ é um *su*-toro periódico de período $\tau \geq 1$ então $f^\tau|_{\mathbb{T}^2_{su}}$ é um homeomorfismo hiperbólico transitivo e portanto possui uma única medida de máxima entropia. Usando esse fato, juntamente com o Teorema (AVILA; VIANA, 2010) e Teorema C provamos a seguinte proposição:

Proposição E.1.

Proposição E.1. *Seja $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ e S é uma folha central fixa. Se $NW(f|_S) < \infty$, então $\#\mathrm{MME}_0(f) \leq \#\mathrm{NW}(f|_S)$. Além disso, se $\mu \in \mathrm{MME}_0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathrm{card}\left(\mathrm{supp}(\mu) \cap \mathscr{F}^c(x)\right) = n_0, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{T}^3.$$

Demonstração. Seja $a \in M$ tal que $S = \mathscr{F}^c(a)$, podemos assumir que f preserva a orientação e que f é não acessível. Como $NW(f|S) < \infty$ então $f|S$ tem número de rotação $\rho(f|S) = p/q \in \mathbb{Q}$. Então $NW(f|S) = Per(f|_S)$. Tomando uma iterada de f, podemos assumir que todo ponto periódico é fixo, ou seja, considerar $NW(f|S) = Fix(f|_S)$. Seja μ uma medida de máxima entropia com $\lambda_c(\mu) = 0$. Pelo Teorema D, existe um *su*-toro fixo $\mathbb{T}^2_{su} \subset \mathrm{supp}(\mu)$. Além disso, como f_c é transitivo, pelo Corolário 3.2.1 temos que $\mathbb{T}^2_{su} \cap \mathscr{F}^c(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathbb{T}^3$. Seja $\{\mu^c_{\pi_c(x)}\}_{x \in M}$ a decomposição de μ ao longo de $\mathscr{F}^c$, A proposição 5.2.1 temos que $\mu^c_{\pi_c(a)}$ é uma medida de probabilidade invariante.

Tome $x_0 \in \mathbb{T}^2_{su} \cap \mathscr{F}^c(a)$ e $J \subset \mathscr{F}^c(a)$ um arco aberto contendo x_0 e $J \cap Fix(f|S) = \{x_0\}$ então $AC(J)$ é aberto tal que $\mathrm{supp}(\mu) \cap AC(J) \neq \emptyset$ e portanto $\mu(AC(J)) > 0$, o que implica existe um ponto $z \in AC(J)$ tal que $z \in \sup(\mu^c_z)$. Pela s,u invariância, existe um ponto em J que está no suporte de $\mu^c_{\pi_c(a)} \subset Fix(f|S)$. Logo $x_0 \in \mathrm{supp}(\mu^c_a)$. Seja $\mathbb{T}^2_{su} \cap \mathscr{F}^c(a) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset Fix(f)$ então $\mu^c_{\pi_c(a)} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$. Pela s,u-invariância devemos ter que $\mu^c_{\pi_c(x)}(\{x\}) = \dfrac{1}{n}$ para todo $x \in \mathbb{T}^2_{su}$. Isto implica que $\mu(\mathbb{T}^2_{su}) \geq 0$, pela ergodicidade de μ temos que $\mu(\mathbb{T}^2_{su}) = 1$. Como $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbb{T}^2_{su}$, então $\mu^c(\mathbb{T}^2_{su}) = 1$. E como $\mu^c_{\pi_c(x)}(\{x\}) = 1/n$ para todo $x \in \mathbb{T}^2_{su}$ devemos ter que

$$card(\mathbb{T}^2_{su} \cap \mathscr{F}^c(x)) = n.$$

Finalmente, como $\text{supp}(\mu) = \mathbb{T}^2_{su}$ então μ é a única medida de máxima entropia para $f|\mathbb{T}^2_{su}$. Portanto

$$\text{MME}_0(f) \leq Fix(f).$$

□

Proposição E.2.

Seja $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$, $\mathbb{T}^2_{cu}$ um *cu*-toro periódico para f. No que segue vamos denotar por η à única medida de máxima entropia de $f|_{\mathscr{O}(\mathbb{T}^2_{su})}$.

Definição 5.5.1. Dizemos que um *su*-toro $\mathbb{T}^2_{su}$ periódico é transversalmente hiperbólico se $\lambda_c(\eta) \neq 0$, ou seja, se

$$\int_{\mathbb{T}^2_{\text{su}}} \log \|Df \mid E^c\| \, d\eta \neq 0.$$

Proposição E.2. *Seja $f \in \text{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ tal que todo su-toro é transversalmente hiperbólico. Então f tem um número finito de medidas ergódicas de máxima entropia e todas são hiperbólicas.*

Demonstração. Se todo *su*-toro é transversalmente hiperbólico, pelo Teorema C e o Lema 5.1.1 temos que f não admite medidas ergódicas de máxima entropia com expoente central zero. Suponha que existe uma sequência de medidas ergódicas de máxima entropia $(\mu_j^-)_{j\in\mathbb{N}}$ com $\lambda_c(\mu_j^-) < 0$ para $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\mu_j^- \neq \mu_i^-$ para $i \neq j$. Seja $K_i = \text{supp}(\mu_i^-)$ então K_i é um conjunto compacto invariante *u*-saturado. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos assumir que a sequência (K_i) converge (na topologia de Hausdorff para subconjuntos fechados) para um conjunto compacto *u*-saturado invariante K. Podemos supor que $K \in \Gamma^u(f)$, pelo Lema 5.1.1 existe uma medida ergódica de máxima entropia ν tal que $\text{supp}(\nu) = K$. Por hipótese temos que $\lambda_c(\nu) \neq 0$.

Primeiro, suponha que $\lambda_c(\nu) < 0$. Tome $x \in K$ um ponto regular Pesin e seja $W^s_{loc}(x)$ a variedade estável local Pesin de x. Como $W^s_{loc}(x)$ é transversal à folheação instável e K_i acumula em x para todo $i \geq i_0$ para alguns $i_0 \in \mathbb{N}$ temos que $K_i \cap W^s_{loc}(x) \neq \emptyset$ para todo $i \geq i_0$. Seja $x_i \in K_i \cap W^s_{loc}(x)$ temos que $d(f^n(x_i), f^n(x)) \to 0$. Tomando uma subsequência se for necessário, podemos supor que $f^n(x) \to z \in K$. Então $d(f^n(x_i), z) \to 0$ implica que $z \in K_i$ para todo $i \geq i_0$. Como $K \in \Gamma^u(f)$ e $z \in K$ temos que

$$K = cl(\bigcup_{\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}^u(z)) \subset K_i \text{ for all } i \geq i_0.$$

Pela Proposição 5.1.1 implica que $\mu_i^- = \nu$ para todo $i \geq i_0$. Esta contradição prova que $\lambda_c(\nu)$ é não negativo.

Seja μ_i^+ como na Proposição 3.2.2 para a medida μ_i^-. O Lema 3 de (HERTZ *et al.*, 2012) implica que a sequência (μ_i^+) converge para ν. Considere f^{-1}, μ_i^+ no lugar de f e μ_i^- como acima, temos que $\mu_i^+ = \nu$ para todo $i \geq i_0$ para alguns $i \in \mathbb{N}$. Isso implica que μ_-^i é uma medida gêmea de ν, então $\mu_i^- = \mu_{i_0}^-$ para todo i_0. Esta contradição completa a prova do corolário. □

Proposição E.3.

Proposição E.3. *Seja $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ topologicamente transitiva. Se f possui um su-toro transversalmente hiperbólico, então*

$$2 \leq \#\mathrm{MME}(f) \leq 3.$$

Demonstração. Seja $\mathbb{T}^2_{su}$ o *su*-toro transversalmente hiperbólico e η a única medida de máxima de máxima entropia para $f|_{\mathscr{O}(\mathbb{T}^2_{su})}$. Sem perda de generalidade vamos supor que

$$\int_{\mathbb{T}^2_{\mathrm{su}}} \log \|Df \mid E^c\| \, d\eta < 0.$$

Como f é não acessível, pelo Teorema 3.4.3 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f^{n_0} se levanta para um AB-sistema $g : \overline{M} \to \overline{M}$, para um recobrimento finito $\pi : \overline{M} \to \mathbb{T}^3$. Observe tabém que se $\widehat{\nu}$ é medida de máxima entropia para g então a projeção $\nu = \pi_* \widehat{\nu}$ é uma medida de máxima entropia para f^{n_0}. Assim

$$\mu = \frac{1}{n_0} \sum_{i=0}^{n_0-1} f_* \nu$$

é uma medida de máxima entropia para f.

Seja S uma folha central fixa para g, a existência de um *su*-toro periódico implica que o número de rotação $\rho(g|_S)$ é racional. Sem perda de generalidade, podemos supor que todo ponto periódico é fixo e seja $x_1 \in Fix(g|S)$ tal que $AC(x_1)$ projeta sobre $\mathbb{T}^2_{su}$. Note que $AC(x_1)$ é também um *su*-toro hiperbólico, que denotamos por $\overline{\mathbb{T}^2}_{su}$. Logo, tome $J = (x_1, x_2) \subset S$ tal que $AC(x_2)$ projeta sobre $\mathbb{T}^2_{su}$ e a projeção de $AC(z)$ não intersecta a $\mathscr{O}(\mathbb{T}_{su})$ para todo $z \in (x_1, x_2)$. Portanto, o (Lema 8.9 em (HAMMERLINDL, 2017) implica que $g|AC(J)$ é um AI-sistema.

Seja $\widehat{\eta}_1$ é a medida de máxima entropia para $g|_{\overline{\mathbb{T}^2}_{su}}$ então $\lambda_c(\widehat{\eta}_1) < 0$, uma vez que $\overline{\mathbb{T}^2}_{su}$ projeta sobre $\mathbb{T}^2_{su}$. Vamos tomar uma medida de máxima entropia $\widehat{\nu}$ com $\lambda_c(\widehat{\nu}) \leq 0$ de tal maneira que $\mathrm{supp}(\widehat{\nu})$ seja o conjunto u-saturado minimal invariante mais "proximo" de $\overline{\mathbb{T}^2}_{su}$. Como $\lambda_c(\widehat{\eta}_1) < 0$, existe $\widehat{\eta}_2$ medida gêmea de $\widehat{\eta}_1$ como na Proposição 3.2.2, tomando a orientação positiva da folha central. Se $\lambda_c(\widehat{\eta}_2) = 0$, então tomamos $\widehat{\nu} = \widehat{\eta}_2$. Se $\lambda_c(\widehat{\eta}_2) > 0$, novamente pela Proposição 3.2.2 tomando a orientação positiva da folha central existe uma medida de máxima entropia $\widehat{\eta}_3$ com $\lambda_c(\widehat{\eta}_3) \leq 0$. Tome $\widehat{\nu} = \widehat{\eta}_3$.

Identificando cada folha central de $AC(J)$ com $(0,1)$, podemos considerar $AC(J) \equiv \mathbb{T}^2 \times (0,1)$. Seja $\Lambda = \mathrm{supp}(\widehat{\nu}) \subset \mathbb{T}^2 \times (0,1]$. Note que $\Lambda \cap I_z \neq \emptyset$ para todo $z \in AC(J)$. Para cada

$(z,t) \in AC(J) = \mathbb{T}^2 \times (0,1)$, $t_z^- = \min(I_z \cap \Lambda)$. Defina os conjuntos

$$\begin{aligned} V &= \left\{(z,t) \in AC(J) : t < t_z^-\right\} \text{ e} \\ V^+ &= \left\{(z,t) \in AC(J) : t \geq t_z^-\right\}. \end{aligned}$$

Como g preserva orientação das fibras centrais, temos que V e V^+ são subconjuntos invariantes. Além disso, como Λ é compacto, existe $\delta > 0$, tal que $I_z \cap V$ é um arco de comprimento maior que δ, ou seja, $\delta < t_z^- \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{T}^2$.

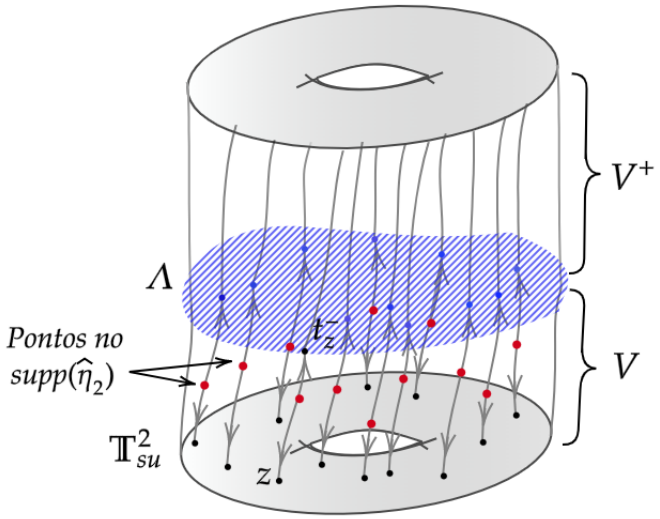

Figura 13 – Suporte da medida $\widehat{\eta}_2$

Vamos mostrar que V^+ é um subconjunto fechado de $AC(J)$. De fato, seja $((z_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset V^+$ uma sequencia de pontos tal que $(z_n,t_n) \to (z,a) \in AC(J)$. Como $\delta \leq t_{z_n}^- \leq t_n$, por lo tanto $(z,a) \in \mathbb{T}^2 \times [\delta,1]$. Além disso, como Λ é compacto, tomando uma subsequencia, podemos supor que $(z_n, t_{z_n}^-) \to (z,\omega^-) \in \Lambda$. Logo

$$t_z^- \leq \omega^- \leq a.$$

Portanto $(z,a) \in V^+$, ou seja, V^+ é fechado em $AC(J)$. Portanto, temos que V é um aberto, g-invariante. Como V é g-invariante, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_0}(\pi(V)) = \pi(V)$. Agora, defina

$$U = \bigcup_{i=0}^{k_0} f^i(\pi(V)).$$

Como U é um aberto f-invariante então $\overline{U} = M$. Além disso, note que $\partial(U) \subset (\mathscr{O}(\overline{\mathbb{T}^2}_{su}) \cup K)$, com $K = \mathscr{O}(\pi(\Lambda))$. Por definição de V, se $\widehat{\mu}$ é uma medida de máxima entropia com $\text{supp}(\widehat{\mu}) \cap V \neq \emptyset$ então $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$. Como as medidas de máxima entropia de g projetam sobrejetivamente sobre as medidas de máxima entropia de f^{n_0} é claro que se $\mu' \in \text{MME}(f^{n_0})$ com $\text{supp}(\mu') \cap \pi(V) \neq \emptyset$ então $\mu' = \pi_* \widehat{\nu}$. Isso implica que, se $\mu \in \text{MME}(f)$ com $\text{supp}(\mu) \cap U \neq \emptyset$, então

$$\mu = \frac{1}{n_0} \sum_{i=0}^{n_0-1} f_*^i \nu, \;\; \pi_*(\widehat{\nu}) = \nu.$$

Se $\eta_1 = \pi_*(\widehat{\eta}_1)$ e $\eta_3 = \pi_*(\widehat{\eta}_3)$, então as únicas medidas de máxima entropia que pode ter f são $\mu_1 = \dfrac{1}{n_0}\sum_{i=0}^{n_0-1} f_*^i \eta_1$, $\mu_2 = \dfrac{1}{n_0}\sum_{i=0}^{n_0-1} f_*^i \nu$ e $\mu_3 = \dfrac{1}{n_0}\sum_{i=0}^{n_0-1} f_*^i \eta_3$ (note que $\mu_1 = \eta$ e também pode acontecer que $\mu_1 = \mu_3$). Isso conclui a prova da proposição. $\square$

Para parcialmente hiperbólicos em $\mathbb{T}^3$, todos os exemplos conhecidos até agora, possuem no máximo três medidas ergódicas de máxima entropia ergódicas ((ROCHA; TAHZIBI, 2021)). Isto nos leva à a seguinte questão:

Questão 5.5.1. Se $f \in \mathrm{PHC}^2_{c=1}(\mathbb{T}^3)$ topologicamente transitiva então $\#(\mathrm{MME}_{\mathrm{erg}}(f)) \leq 3$?.

REFERÊNCIAS

AOKI, N.; HIRAIDE, K. Topological theory of dynamical systems: recent advances. Elsevier, 1994. Citado na página 38.

AVILA, A.; VIANA, M. Extremal lyapunov exponents: an invariance principle and applications. **Inventiones mathematicae**, Springer, v. 181, n. 1, p. 115–178, 2010. Citado nas páginas 71, 73 e 83.

AVILA, A.; VIANA, M.; WILKINSON, A. Absolute continuity. **Lyapunov exponents, and rigidity (in preparation)**, 2011. Citado nas páginas 32 e 55.

BOHNET, D. **Partially hyperbolic diffeomorphisms with a compact center foliation with finite holonomy**. Tese (Doutorado) — Universität Hamburg, 2011. Citado nas páginas 39 e 40.

BOURBAKI, N. **General Topology: Chapters 1–4**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 18. Citado na página 39.

BOWEN, R. Markov partitions for axiom a diffeomorphisms. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 92, n. 3, p. 725–747, 1970. Citado nas páginas 19 e 40.

____. Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms. **Springer Lecture Notes in Math**, Springer, v. 470, p. 78–104, 1975. Citado na página 19.

BUZZI, J.; FISHER, T.; SAMBARINO, M.; VÁSQUEZ, C. Maximal entropy measures for certain partially hyperbolic, derived from anosov systems. **Ergodic theory and dynamical systems**, Cambridge University Press, v. 32, n. 1, p. 63–79, 2012. Citado na página 19.

BUZZI, J.; FISHER, T.; TAHZIBI, A. A dichotomy for measures of maximal entropy near time-one maps of transitive anosov flows. **arXiv preprint arXiv:1904.07821**, 2019. Citado nas páginas 20, 21, 41, 53, 54, 56, 58 e 74.

CARRASCO, P. D.; RODRIGUEZ-HERTZ, F. Equilibrium states for center isometries. **arXiv preprint arXiv:2103.07323**, 2021. Citado na página 39.

CORRASCO, P. D. **Compact Dynamical Foliations**. Tese (Doutorado), 2011. Citado nas páginas 39 e 40.

EPSTEIN, D. B. Periodic flows on three-manifolds. **Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 95, n. 1, p. 66–82, 1972. Citado na página 64.

GOGOLEV, A. Partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliations. **arXiv preprint arXiv:1104.5464**, 2011. Citado nas páginas 37 e 39.

HAMMERLINDL, A. Ergodic components of partially hyperbolic systems. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 92, n. 1, p. 131–184, 2017. Citado nas páginas 22, 43, 44, 46, 77, 78, 80 e 85.

HAMMERLINDL, A.; POTRIE, R. Pointwise partial hyperbolicity in 3-dimensional nilmanifolds. preprint (2013). **arXiv preprint arXiv:1302.0543**. Citado na página 38.

HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; TAHZIBI, A.; URES, R. Maximizing measures for partially hyperbolic systems with compact center leaves. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge University Press, v. 32, n. 2, p. 825–839, 2012. Citado nas páginas 21, 64, 71, 73, 77, 79 e 85.

HERTZ, F. R.; HERTZ, M. R.; URES, R. A survey of partially hyperbolic dynamics. **Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow**, v. 51, p. 35–87, 2007. Citado na página 38.

____. A non-dynamically coherent example on t3. In: ELSEVIER. **Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire**. [S.l.], 2016. v. 33, n. 4, p. 1023–1032. Citado nas páginas 20 e 35.

HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. Invariant manifolds. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 76, n. 5, p. 1015–1019, 1970. Citado nas páginas 20, 35 e 38.

HU, H.; HUA, Y.; WU, W. Unstable entropies and variational principle for partially hyperbolic diffeomorphisms. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 321, p. 31–68, 2017. Citado na página 48.

LEDRAPPIER, F.; WALTERS, P. A relativised variational principle for continuous transformations. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford Academic, v. 2, n. 3, p. 568–576, 1977. Citado nas páginas 19 e 30.

LEDRAPPIER, F.; YOUNG, L.-S. The metric entropy of diffeomorphisms: Part ii: Relations between entropy, exponents and dimension. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 122, n. 3, p. 540–574, 1985. ISSN 0003486X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1971329>. Citado na página 47.

MARGULIS, G. A. Certain measures that are connected with u-flows on compact manifolds. **Funkcional. Anal. i Prilozen., 4(1):62–76,**, n. 4(1), p. 62–76, 1970. Citado na página 40.

____. On some aspects of the theory of anosov systems. In: **On Some Aspects of the Theory of Anosov Systems**. [S.l.]: Springer, 2004. p. 1–71. Citado na página 19.

MARTINO, V. D.; MARTINCHICH, S. Codimension one compact center foliations are uniformly compact. **arXiv preprint arXiv:1809.02355**, 2018. Citado na página 39.

NEWHOUSE, S. E.; YOUNG, L.-S. Dynamics of certain skew products. In: **Geometric dynamics**. [S.l.]: Springer, 1983. p. 611–629. Citado na página 19.

OLIVEIRA, K.; VIANA, M. Fundamentos da teoria ergódica. **IMPA, Brazil**, p. 3–12, 2014. Citado nas páginas 26 e 30.

OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. characteristic ljapunov, exponents of dynamical systems. **Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva**, Moscow Mathematical Society, v. 19, p. 179–210, 1968. Citado na página 36.

ROCHA, J. E.; TAHZIBI, A. On the number of ergodic measures of maximal entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center leaves. **arXiv e-prints**, p. arXiv–2106, 2021. Citado nas páginas 22 e 87.

RODRIGUEZ-HERTZ, F.; RODRIGUEZ-HERTZ, M.; URES, R. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1d-center bundle. **arXiv preprint math/0610864**, 2006. Citado na página 37.

ROKHLIN, V. A. On the fundamental ideas of measure theory. **Matematicheskii Sbornik**, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian ..., v. 67, n. 1, p. 107–150, 1949. Citado na página 27.

SARIG, O. Symbolic dynamics for surface diffeomorphisms with positive entropy. **Journal of the American Mathematical Society**, v. 26, n. 2, p. 341–426, 2013. Citado na página 19.

TAHZIBI, A. Unstable entropy in smooth ergodic theory. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 34, n. 8, p. R75, 2021. Citado nas páginas 51 e 67.

URES, R. Intrinsic ergodicity of partially hyperbolic diffeomorphisms with a hyperbolic linear part. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 140, n. 6, p. 1973–1985, 2012. Citado na página 19.

URES, R.; VIANA, M.; YANG, J. Maximal entropy measures of diffeomorphisms of circle fiber bundles. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 103, n. 3, p. 1016–1034, 2021. Citado nas páginas 21, 48 e 73.

WANG, L.; ZHU, Y. Center specification property and entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms. **arXiv preprint arXiv:1505.07177**, 2015. Citado na página 48.

YANG, J. Entropy along expanding foliations. **arXiv preprint arXiv:1601.05504**, 2016. Citado na página 47.

ICMC USP
SÃO CARLOS