SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 11.12.2001

Assinatura: ______________________

Uma aplicação da teoria quase-linear de T. Kato à KdV em espaços de Sobolev [1]

Daniel dos Santos Viais Neto

Orientador: ***Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Dezembro/2001

[1] Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

Profa. Dra. Hebe Azevedo Biagioni

Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho

"À minha família ."

A fé é o fundamento da esperança,

é a certeza a respeito do que não se vê.

(Hebreus 11:1)

Agradecimentos

À Deus que, incomparável e inconfundível na sua infinita bondade, compreendeu os meus anseios e me deu a necessária coragem para atingir o meu objetivo.

Ao prof. Wagner, pela dedicação, orientação, paciência e principalmente por acreditar em mim.

Aos meus pais, João e Ana, pela oportunidade de estudo, preocupação, apoio, incentivo e amor.

Aos meus irmãos, João Paulo, Carlos Fernando e Matheus, pela força.

À minha amada Fabrícia, pela paciência, dedicação, amor e incentivo.

Ao meu primo Mario, pela admiração e incentivo.

Aos amigos de mestrado, em especial Silvia, Ricardo e Claudemir, pela amizade e companheirismo.

Aos professores Eduardo, Janete, Valdir e José Gaspar pela disposição em me ajudar nas horas que precisei.

E a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria quase-linear de T. Kato para mostrar existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado a equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev.

Abstract

The purpose of this work is to apply the quasi-linear T. Kato's theory to show existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem associated to the Korteweg-de Vries equation in Sobolev space.

Sumário

Introdução

No capítulo 1, enunciamos conceitos e resultados conhecidos que serão essenciais nos outros capítulos. Entre eles, destacam-se a transformada de Fourier e suas propriedades, a desigualdade de Hölder, a generalização da desigualdade de Young e uma conseqüência do teorema de Arzelá-Ascoli.

No capítulo 2, damos ênfase aos espaços de Sobolev de tipo L^2, isto é, enunciamos e demonstramos vários resultados, como por exemplo, o lema de Sobolev e o lema de Rellich. Além disso, frisamos que em certas situações os espaços de Sobolev formam uma álgebra de Banach.

Finalmente, no capítulo 3, enunciamos algumas definições da teoria de semigrupos e aplicamos a teoria quase-linear de T. Kato para mostrar existência e unicidade de soluções da equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo definiremos vários conceitos e apresentaremos algumas notações e resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1. *Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A* ***transformada de Fourier*** *de u é a função $\hat{u} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \tag{1.1}$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2. *A transformada de Fourier de $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{L^1}.$$

Em particular, a aplicação $u \longrightarrow \hat{u}$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, vale o ***lema de Riemann-Lebesgue****, isto é,*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{u}(\xi) = 0.$$

Demonstração: Veja [11] página 303.

Teorema 1.3. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Demonstração: Veja [B] página 56.

Definição 1.4. *Sejam $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A convolução de u e v, denotada por $u * v$, é definida por*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy.$$

Teorema 1.5. *(Desigualdade de Young) Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $u * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|u * v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^p}.$$

Demonstração: Veja [I1] página 306.

Teorema 1.6. *Sejam $u,v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$(u * v)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Veja [I1] página 308.

Definição 1.7. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ uma n-upla de inteiros não negativos. Chamamos α um multi-índice. Se α é um multi-índice e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ escreveremos*

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

e

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial_{x_2}}\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial_{x_n}}\right)^{\alpha_n}.$$

Definição 1.8. *O espaço de Schwartz (ou das funções rapidamente decrescentes), denotado por $S(\mathbb{R}^n)$, é a coleção das $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad e$$

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\, x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty$$

para todo par de multi-índices α, β.

Vale observar que $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo quando munido da distância

$$d(\phi, \psi) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}} \frac{\|\phi-\psi\|_{\alpha,\beta}}{1+\|\phi-\psi\|_{\alpha,\beta}}. \tag{1.2}$$

Observação 1.9. *$\{\phi_m\} \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ converge a $\phi \in S(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \|\phi_m - \phi\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{m\to\infty} 0$ para todo par de multi-índices α, β.*

Definição 1.10. *Dados um espaço métrico X, um espaço vetorial normado Y e uma aplicação $u : X \longrightarrow Y$, o suporte de u é, por definição, o fecho do conjunto*

$$\{x \in X \,;\, u(x) \neq 0\}.$$

Definição 1.11. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto.*

Observação 1.12. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1,\infty]$. Além disso, estas inclusões são densas se $p \in [1,\infty)$. (Veja [B] página 71)*

Teorema 1.13. *Seja $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$ e valem as fórmulas*

$$(-i)^{|\alpha|}(\partial^\alpha u)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi),$$

$$(-i)^{|\alpha|}(x^\alpha u)^\wedge(\xi) = (\partial^\alpha \hat{u})(\xi).$$

Demonstração: Para o caso $n = 1$ uma prova bem detalhada pode ser vista em [I1] página 195 e para o caso geral veja [F] página 21.

Teorema 1.14. *Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1,\infty]$ e $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Então $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\partial^\alpha(u*\phi) = u * (\partial^\alpha \phi)$ para todo multi-índice α.*

Demonstração: Veja [F] página 17.

Definição 1.15. *Seja $u \in S(\mathbb{R}^n)$. A **transformada inversa de Fourier** de u é a função $\check{u} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\check{u}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Observação 1.16. *Os resultados anteriores válidos para a transformada de Fourier também valem para a transformada inversa. Em particular, o teorema 1.2.*

Teorema 1.17. *Sejam u, $v \in S(\mathbb{R}^n)$. Então valem as fórmulas*

$$\check{u}(x) = \hat{u}(-x), \; x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(\hat{u})^{\vee} = u = (\check{u})^{\wedge}. \tag{1.3}$$

Demonstração: Veja [F] página 23.

Corolário 1.18. *Sejam u, $v \in S(\mathbb{R}^n)$. Então valem as fórmulas*

$$(u * v)^{\vee}(x) = (2\pi)^{n/2} \check{u}(x) \check{v}(x), \; x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(\hat{u} * \hat{v})(\xi) = (2\pi)^{n/2} (uv)^{\wedge}(\xi), \; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Conseqüência imediata dos teoremas 1.6 e 1.17.

Teorema 1.19. *Seja $S(\mathbb{R}^n)$ munido da distância (1.2). Então $^{\wedge} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo no sentido de espaços métricos, isto é, é injetiva, sobre, contínua com inversa contínua.*

Demonstração: Para o caso $n = 1$ veja [I1] página 201. Tal demonstração pode ser estendida para o caso geral.

Observe que a transformada de Fourier não pode ser definida em $L^2(\mathbb{R}^n)$ através da fórmula (1.1) uma vez que a integral que ali aparece não faz sentido em geral se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Por exemplo, a função

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-\infty, 1] \\ x^{-1}, & \text{se } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

pertence a $L^2(\mathbb{R})$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$. Porém, utilizando a identidade de Parseval, isto é, $\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2}$ $\forall$ $u \in S(\mathbb{R}^n)$ (Veja [I1] página 314), podemos verificar que tanto a transformada de Fourier quanto sua inversa podem ser estendidas como operadores lineares de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em si próprio satisfazendo a identidade de Parseval. Em particular, se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dada uma seqüência $\{u_n\}$ em $S(\mathbb{R}^n)$ convergindo a u em $L^2(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\hat{u} \doteq \lim_{n\to\infty} \hat{u_n} \quad , \quad \check{u} \doteq \lim_{n\to\infty} \check{u_n} \tag{1.4}$$

onde o limite deve ser interpretado no sentido L^2. Combinando (1.3) e (1.4) segue que $(\hat{u})^\vee = u = (\check{u})^\wedge$ para $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim,

Teorema 1.20. *A transformada de Fourier*

$$\begin{aligned} \wedge : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \hat{u} \end{aligned}$$

definida como a única extensão da transformada em $S(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um operador unitário. Sua inversa é a transformada inversa $^\vee$.

Definição 1.21. *O conjunto das distribuições temperadas, denotado por $S'(\mathbb{R}^n)$, é o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

$$S'(\mathbb{R}^n) = \{\, T : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \; ; \; T \text{ linear contínuo}\}.$$

Além disso, vamos adotar a seguinte notação:

$$u(\psi) \doteq \langle u, \psi\rangle,\ u \in S'(\mathbb{R}^n),\ \psi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$, definindo

$$\langle u, \psi\rangle \doteq \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\psi(x)dx,\ \psi \in S(\mathbb{R}^n),$$

temos que $u \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.22. *A derivada $\partial^\alpha u$ de $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$\langle \partial^\alpha u, \psi\rangle \doteq (-1)^{|\alpha|}\langle u,\ \partial^\alpha \psi\rangle,\ \psi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Definição 1.23. *A transformada de Fourier de $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle \doteq \langle u, \hat{\psi} \rangle, \ \psi \in S(\mathbb{R}^n) \tag{1.5}$$

e a transformada inversa por

$$\langle \check{u}, \psi \rangle \doteq \langle u, \check{\psi} \rangle, \ \psi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

Teorema 1.24. *Seja $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{u}$ e $\check{u}$ definidas por (1.5) e (1.6) são distribuições temperadas. Além disso, $(\hat{u})^\vee = u = (\check{u})^\wedge$ e a aplicação $u \longmapsto \hat{u}$ é contínua com inversa contínua.*

Demonstração: Para o caso $n = 1$ veja [I1] página 212. Tal demonstração pode ser estendida para o caso geral.

Definição 1.25. *A coleção das funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de crescimento lento, denotada por $Q(\mathbb{R}^n)$, é a coleção das $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo multi-índice α existe uma constante C_α e um inteiro não negativo N_α satisfazendo*

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{N_\alpha}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x|$ suficientemente grande.

Teorema 1.26. *Sejam $\phi \in Q(\mathbb{R}^n)$ e $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Então:*

(i) $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\phi\psi \subset S(\mathbb{R}^n)$. Além disso, a aplicação $\psi \longmapsto \phi\psi$ é contínua de $S(\mathbb{R}^n)$ em si próprio.

(ii) O funcional linear ϕu definido por

$$\langle \phi u, \psi \rangle = \langle u, \phi\psi \rangle, \ \psi \in S(\mathbb{R}^n)$$

é um elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$, chamado o produto da distribuição temperada u com a função ϕ.

(iii) Valem as fórmulas

$$\xi^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|} (\partial^\alpha u)^\wedge$$

$$\partial^\alpha \hat{u} = (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha u)^\wedge$$

onde $x^\alpha u$ (resp. $\xi^\alpha \hat{u}$) denota o produto da função $\phi(x) = x^\alpha$ (resp. $\phi(\xi) = \xi^\alpha$) com a distribuição u (resp. $\hat{u}$).

Demonstração: O ítem (i) é conseqüência da regra de Leibnitz e do fato que ϕ cresce menos que um polinômio e ψ decresce mais rápido que o inverso de qualquer polinômio no infinito. A segunda parte segue do ítem (i), enquanto (iii) é conseqüência imediata do ítem (ii) e do teorema 1.13.

Teorema 1.27. *A função $x \longmapsto |x|^\lambda$ definida em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é integrável em uma vizinhança de zero se, e somente se, $\lambda > -n$ e integrável fora de uma vizinhança de zero se, e somente se, $\lambda < -n$.*

Demonstração: Veja [F] página 11.

Teorema 1.28. *(**Generalização da Desigualdade de Young**) Sejam (E, σ, μ) um espaço de medida, $1 \leq p \leq \infty$ e $C > 0$ uma constante. Suponhamos que K é uma função mensurável em $E \times E$ tal que $\int_E |K(x,y)| d\mu(x) \leq C \ \forall x \in E$, $\int_E |K(x,y)| d\mu(y) \leq C \ \forall y \in E$ e $u \in L^p(E)$. Então a função Tu dada por*

$$Tu(x) = \int_E K(x,y) u(y) d\mu(y)$$

está bem definida q.t.p. e pertence a $L^p(E)$. Além disso,

$$\|Tu\|_{L^p} < C\|u\|_{L^p}.$$

Demonstração: Veja [F] página 13.

Definição 1.29. *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $u : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se Lipschitziana quando $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, x, y \in X$, tem-se $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$.*

Definição 1.30. *Sejam X , Y espaços métricos. Um conjunto E de aplicações $u : X \longrightarrow Y$ diz-se eqüicontínuo no ponto $a \in X$ quando $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em X implique $d(u(x), u(a)) < \varepsilon$ em Y, $\forall\, u \in E$. Se E é eqüicontínuo em todos os pontos de X, diz-se simplesmente que E é eqüicontínuo.*

O resultado seguinte é conseqüência do teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 1.31. *Toda seqüência eqüicontínua e pontualmente limitada de aplicações $u_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ possui uma subseqüência que converge uniformemente em cada parte compacta de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Veja [L1] página 247.

Capítulo 2

Os Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

O objetivo principal deste capítulo é definir e apresentar alguns resultados relacionados com os espaços de Sobolev de tipo L^2. Tais espaços serão importantes no desenvolvimento do último capítulo.

Definição 2.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Os* **espaços de Sobolev** *(de tipo L^2) em $\mathbb{R}^n$ são os seguintes subconjuntos de $S'(\mathbb{R}^n)$:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) \ ; \ (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é de Hilbert quando munido do produto interno

$$(u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

A norma correspondente é, evidentemente,

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

De maneira equivalente, podemos definir $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo o completamento de $S(\mathbb{R}^n)$ com relação à norma

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|_{L^2}$$

onde $\Lambda^s : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ é o operador linear definido por

$$(\Lambda^s u)^\wedge(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi).$$

Observemos que $\Lambda^{s+t} = \Lambda^s \Lambda^t$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.2. *Sejam $s, t \in \mathbb{R}$. Então:*

(i) $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^t(\mathbb{R}^n)$ *se* $s \geq t$ *e esta inclusão é contínua e densa.*

(ii) $(H^s(\mathbb{R}^n))^\wedge = L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$.

(iii) O dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, *isto é, a coleção de todos os funcionais lineares contínuos de* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *em* $\mathbb{C}$, *é isometricamente isomorfo a* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) $S(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e esta inclusão é densa.*

Demonstração: Veja [I1] página 337 e [S] página 15. ■

A proposição 2.2 mostra em particular que os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, são funções de quadrado integrável pois neste caso $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Se $s < 0$, os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ definem funcionais lineares contínuos em $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$, portanto em $S(\mathbb{R}^n)$, assim os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ são distribuições temperadas.

Agora veremos uma caracterização para os espaços de Sobolev.

Teorema 2.3. *Sejam k inteiro positivo e $s \in \mathbb{R}$. Então $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\partial^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, onde as derivadas são calculadas no sentido das distribuições. Além disso, as normas*

$$\|.\|_s \quad e \quad \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(.)\|_{s-k} \tag{2.1}$$

são equivalentes.

Demonstração: Pelo teorema 1.26(iii), temos:

$$(\partial^\alpha u)^\wedge = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}, \ u \in S'(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Além disso,

$$|\xi^\alpha| = |\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}| \leq (1+|\xi|^2)^{\alpha_1/2} \dots (1+|\xi|^2)^{\alpha_n/2} = (1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2} \tag{2.3}$$

e

$$\exists\, c > 0 \quad tal\ que \quad (1+|\xi|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|. \tag{2.4}$$

Então, se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$, pela proposição 2.2(ii), (2.2) e (2.3) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k}|(\partial^\alpha u)^\wedge(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k}|\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k}((1+|\xi|^2)^{k/2})^2|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\|\partial^\alpha u\|_{s-k} \leq \|u\|_s \tag{2.5}$$

e $\partial^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, se $\partial^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k$, pela proposição 2.2(ii), (2.2) e (2.4) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} ((1+|\xi|^2)^{k/2})^2(1+|\xi|^2)^{s-k}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (c\sum_{|\alpha|\leq k}|\xi^\alpha|)^2(1+|\xi|^2)^{s-k}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} c^2 d_k \sum_{|\alpha|\leq k}|\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{s-k}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= C\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k}|(\partial^\alpha u)^\wedge(\xi)|^2 d\xi < \infty
\end{aligned}$$

onde $C = c^2 d_k$ e d_k uma constante que depende do número de termos da soma $\sum_{|\alpha|\leq k}|\xi^\alpha|^2$. Portanto,

$$\|u\|_s \leq C^{1/2}\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha u\|_{s-k} \tag{2.6}$$

e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Segue das desigualdades (2.5) e (2.6) que as normas em (2.1) são equivalentes. ■

Corolário 2.4. *Seja k inteiro positivo, $H^k(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cujas derivadas (no sentido das distribuições) $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, e as normas*

$$\|.\|_k \quad e \quad \sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha(.)\|_{L^2}$$

são equivalentes.

É interessante observar que para s suficientemente grande, os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ são funções contínuas e, em certos casos até diferenciáveis. Mas precisamente, valem os seguintes resultados:

Teorema 2.5. ***(Lema de Sobolev)*** *Seja $s > n/2$. Então $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ que tendem a zero quando $|x| \to \infty$. Além disso, vale a desigualdade*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_s,$$

onde $C > 0$ é uma constante.

Demonstração: Vamos mostrar que se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $s > n/2$ então $\hat{u}$ é uma função integrável. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi)|d\xi \\ &\leq \|u\|_s \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right]^{1/2} < \infty \end{aligned}$$

uma vez que a integral no último membro da desigualdade é finita devido à hipótese $s > n/2$. Com isso, pelo Teorema 1.2, u é contínua e vale o lema de Riemann-Lebesgue, isto é,

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Portanto, $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 2.6. *Seja $s > k + n/2$, $k \in \mathbb{N}$. Então $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ tais que as próprias funções e suas derivadas até ordem k tendem a zero quando $|x| \to \infty$.*

Demonstração: Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $s > k + n/2$, $k \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 2.3, $\partial^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$. Visto que $s - k > n/2$, pelo teorema 2.5, $\partial^\alpha u \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$, ou seja, $u \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 2.7. *Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ $\forall\ s \in \mathbb{R}$. Então $u \in C^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $C^\infty_\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ tais que elas e suas derivadas de todas as ordens tendem a zero quando $|x| \to \infty$.*

Para enunciar o próximo resultado, definiremos a aplicação restrição como sendo $R : S(\mathbb{R}^n) \dashrightarrow S(\mathbb{R}^{n-k})$ dado por $Ru(y) = u(y, 0)$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Teorema 2.8. *A aplicação restrição R estende-se a uma aplicação limitada de $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $H^{s-(k/2)}(\mathbb{R}^{n-k})$ se $s > k/2$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que $\|Ru\|_{s-(k/2)}$ é dominado por $\|u\|_s$ para $u \in S(\mathbb{R}^n)$, pois $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Seja $v \doteq Ru$. Com isto, temos que $\hat{v}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} \hat{u}(\eta, \xi) d\xi$.

De fato, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} v(y) &\doteq u(y, 0) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} e^{i\eta \cdot y} \hat{u}(\eta, \xi) d\eta d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} e^{i\eta \cdot y} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{u}(\eta, \xi) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Tomando $\theta(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} \hat{u}(\eta, \xi) d\xi$, vale a seguinte igualdade:

$$v(y) = \check{\theta}(y).$$

Portanto,

$$\hat{v}(\eta) = \theta(\eta).$$

Com isso, usando a desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned} |\hat{v}(\eta)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}^k} \hat{u}(\eta, \xi) d\xi \right|^2 \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^k} \hat{u}(\eta, \xi)(1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^{s/2}(1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^{-s/2} d\xi \right|^2 \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^k} |\hat{u}(\eta, \xi)|^2 (1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^s d\xi \right] \left[\int_{\mathbb{R}^k} (1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Estabelecendo $1 + |\eta|^2 = a^2$ e $|\xi| = r$, o segundo fator da última expressão é igual a

$$w_k \int_0^\infty (a^2 + r^2)^{-s} r^{k-1} dr = a^{k-2s} w_k \int_0^\infty (1 + t^2)^{-s} t^{k-1} dt$$

onde w_k é uma constante dada pelo volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^k$ centrada na origem (as duas integrais são iguais pela mudança de variável $r \to at$). Pelo teorema 1.27 a última integral é finita quando $s > k/2$, assim

$$|\hat{v}(\eta)|^2 < C_{s,k}(1 + |\eta|^2)^{(k/2)-s} \int_{\mathbb{R}^k} |\hat{u}(\eta, \xi)|^2 (1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^s d\xi$$

ou

$$|\hat{v}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{s-(k/2)} \leq C_{s,k}\int_{\mathbb{R}^k}|\hat{u}(\eta,\xi)|^2(1+|\eta|^2+|\xi|^2)^s d\xi$$

onde $C_{s,k}>0$ é uma constante que depende somente de s e k. Integrando ambos os lados com respeito a η, concluímos que

$$\|v\|^2_{s-(k/2)} \leq C_{s,k}\|u\|^2_s.$$

■

Agora mostraremos um lema técnico que nos será útil.

Lema 2.9. *Para todo $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ e $s\in\mathbb{R}$, temos:*

$$(1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}.$$

Demonstração: Claramente temos que

$$|\xi| \leq |\xi-\eta|+|\eta| \quad \text{e} \quad |\xi|^2 \leq 2(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2).$$

Assim,

$$1+|\xi|^2 \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2). \tag{2.7}$$

Se $s\geq 0$, basta elevar ambos os lados de (2.7) a potência s. Se $s<0$, basta elevar ambos os lados de (2.7) a potência $-s$ com ξ e η trocados. ■

Na proposição abaixo veremos que a multiplicação de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ por elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ está em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.10. *Se $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$, então a aplicação $u\longmapsto \phi u$ em $S(\mathbb{R}^n)$ estende-se a um operador limitado em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s\in\mathbb{R}$.*

Demonstração: Isto é equivalente a mostrar que $u\longmapsto \Lambda^s(\phi\Lambda^{-s}u)$ é limitado em $H^0(\mathbb{R}^n)=L^2(\mathbb{R}^n)$ para $s\in\mathbb{R}$. Entretanto,

$$\begin{aligned}
(\Lambda^s\phi\Lambda^{-s}u)^\wedge(\xi) &= (1+|\xi|^2)^{s/2}(\phi\Lambda^{-s}u)^\wedge(\xi)\\
&= (2\pi)^{-n/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{\phi}*(\Lambda^{-s}u)^\wedge)(\xi)\\
&= (2\pi)^{-n/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-s/2}\hat{u}(\eta)d\eta\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-s/2}\hat{u}(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Definamos $K(\xi,\eta) = (2\pi)^{-n/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{-s/2}$. Pelo lema 2.9,

$$|K(\xi,\eta)| \leq (2\pi)^{-n/2}2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)|.$$

Logo, $\int_{\mathbb{R}^n}|K(\xi,\eta)|d\xi$ e $\int_{\mathbb{R}^n}|K(\xi,\eta)|d\eta$ são limitados por

$$(2\pi)^{-n/2}2^{|s|/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{|s|/2}|\hat{\phi}(\xi)|d\xi$$

que é finito, pois $\hat{\phi}$ decresce rapidamente no infinito. A afirmação segue do teorema 1.28. ∎

Enunciaremos agora mais um lema técnico que nos será de grande utilidade.

Lema 2.11. *Para todo $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C_s > 0$, independente de ξ e η, tal que*

$$|(1+|\xi|^2)^{s/2} - (1+|\eta|^2)^{s/2}| < C_s|\xi-\eta|[(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}} + (1+|\eta|^2)^{\frac{s-1}{2}}].$$

Demonstração: Veja [F] página 250. ∎

Para o próximo lema usaremos a seguinte notação: $[A,B] \doteq AB - BA$.

Lema 2.12. *Dado $s \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ e $u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|[\Lambda^s,\phi]u\|_0 \leq C\|\phi\|_{|s|+n+2}\|u\|_{s-1}.$$

Demonstração: Estabelecendo $u = \Lambda^{1-s}v$, devemos mostrar que $\forall v \in H^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\|[\Lambda^s,\phi]\Lambda^{1-s}v\|_0 \leq C\|\phi\|_{|s|+n+2}\|v\|_0.$$

Entretanto,

$$[\Lambda^s,\phi]\Lambda^{1-s}v = \Lambda^s\phi\Lambda^{1-s}v - \phi\Lambda^1 v.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
([\Lambda^s,\phi]\Lambda^{1-s}v)^\wedge(\xi) &= (\Lambda^s\phi\Lambda^{1-s}v)^\wedge(\xi) - (\phi\Lambda^1 v)^\wedge(\xi) = \\
&= (1+|\xi|^2)^{s/2}(\phi\Lambda^{1-s}v)^\wedge(\xi) - (2\pi)^{-n/2}(\hat{\phi} * (\Lambda^1 v)^\wedge)(\xi) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\left[(1+|\xi|^2)^{s/2}(\hat{\phi} * (\Lambda^{1-s}v)^\wedge)(\xi) - \int_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{1/2}\hat{v}(\eta)d\eta\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}} - \hat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{1/2}]\hat{v}(\eta)d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(2\pi)^{-n/2}(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}\hat{\phi}(\xi-\eta)[(1+|\xi|^2)^{s/2} - (1+|\eta|^2)^{s/2}]\hat{v}(\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Estabelecendo $K(\xi,\eta) = (2\pi)^{-n/2}(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}\hat{\phi}(\xi-\eta)[(1+|\xi|^2)^{s/2} - (1+|\eta|^2)^{s/2}]$, pelos lemas 2.9 e 2.11 temos:

$$
\begin{aligned}
|K(\xi,\eta)| &\leq (2\pi)^{-n/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)||\xi-\eta|[(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}+1] \\
&\leq C_1(2\pi)^{-n/2}2^{\frac{|s-1|}{2}}|\hat{\phi}(\xi-\eta)||\xi-\eta|[(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s-1|}{2}}+1] \\
&\leq C_2|\hat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{1+\frac{|s|}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\int_{\mathbb{R}^n}|K(\xi,\eta)|d\xi$ e $\int_{\mathbb{R}^n}|K(\xi,\eta)|d\eta$ são limitadas por

$$
C_2\left[\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\phi}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{|s|+n+2}d\xi\right]^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-n}d\xi\right]^{1/2} = C_3\|\phi\|_{|s|+n+2}
$$

e a afirmação segue novamente do teorema 1.28. ■

Proposição 2.13. *Dado $s\in\mathbb{R}$, existe uma constante $C>0$ tal que para todo $\phi\in S(\mathbb{R}^n)$ e $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$,*

$$
\|\phi u\|_s \leq (\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)|)\|u\|_s + C\|\phi\|_{|s|+n+2}\|u\|_{s-1}.
$$

Demonstração: Pelo lema 2.12 temos:

$$
\begin{aligned}
\|\phi u\|_s &= \|\Lambda^s\phi u\|_0 = \|\phi\Lambda^s u - [\Lambda^s,\phi]u\|_0 \leq \|\phi\Lambda^s u\|_0 + \|\,[\Lambda^s,\phi]u\,\|_0 \\
&\leq (\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)|)\|\Lambda^s u\|_0 + C\|\phi\|_{|s|+n+2}\|u\|_{s-1} \\
&= (\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)|)\|u\|_s + C\|\phi\|_{|s|+n+2}\|u\|_{s-1}.
\end{aligned}
$$

■

Vejamos a seguir dois resultados que serão essenciais para demonstrar o próximo teorema que será utilizado no capítulo 3.

Lema 2.14. *Sejam $\phi,\psi\in S(\mathbb{R}^n)$ reais. Então existe $C>0$ tal que*

$$
\|\phi\psi\|_{[s]} \leq C\{\|\phi\|_A\|\psi\|_{[s]} + \|\phi\|_{[s]}\|\psi\|_A\}
$$

para todo $s\geq 0$ onde

$$
\begin{cases}
\|\phi\|_{[s]} = \|\,|\cdot|^s\hat{\phi}\|_0 \\
\|\phi\|_A = \|\hat{\phi}\|_{L^1}
\end{cases}
$$

Demonstração: Seja $v \doteq \phi\psi$. Logo $\hat{v} = (2\pi)^{-n/2}\hat{\phi} * \hat{\psi}$. Como

$$|\xi|^s \leq C_s(|\xi - \eta|^s + |\eta|^s)$$

para todo par $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$\begin{aligned} |\xi|^s\hat{v}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}|\xi|^s \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi - \eta)\hat{\psi}(\eta)d\eta \\ &< C\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi - \eta|^s + |\eta|^s)|\hat{\phi}(\xi - \eta)||\hat{\psi}(\eta)|d\eta \\ &\leq C(\hat{v}_1(\xi) + \hat{v}_2(\xi)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = (\, |.|^s|\hat{\phi}|\,) * |\hat{\psi}| \\ \hat{v}_2 = |\hat{\phi}| * (\, |.|^s|\hat{\psi}|\,) \end{cases}$$

Pelo teorema 1.2 temos que,

$$\begin{cases} ||\hat{v}_1||_0 \leq ||\, |.|^s\hat{\phi}||_0||\hat{\psi}||_{L^1} = ||\phi||_{[s]}||\psi||_A \\ ||\hat{v}_2|| < ||\hat{\phi}||_{L^1}||\, |.|^s\hat{\psi}||_0 = ||\phi||_A||\psi||_{[s]} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\phi\psi||_{[s]} &= ||\, |.|^s\hat{v}||_0 \leq C||\hat{v}_1 + \hat{v}_2||_0 \leq C\{||\hat{v}_1||_0 + ||\hat{v}_2||_0\} \\ &\leq C\{||\phi||_A||\psi||_{[s]} + ||\phi||_{[s]}||\psi||_A\} \end{aligned}$$

■

Lema 2.15. *Sejam $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ reais. Então*

$$||\,[\Lambda^s, \phi]\psi||_0 \leq C\{||\nabla\phi||_A||\psi||_{s-1} + ||\nabla\phi||_{s-1}||\psi||_A\}$$

para todo $s \geq 1$.

Demonstração: Seja $v \doteq [\Lambda^s, \phi]\psi$. Então,

$$\begin{cases} \hat{v}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(\Lambda(\xi)^s - \Lambda(\eta)^s)\hat{\phi}(\xi - \eta)\hat{\psi}(\eta)d\eta \\ \Lambda(\xi) \doteq (1 + |\xi|^2)^{1/2} \end{cases}$$

Utilizando o lema 2.11, obtém-se

$$\begin{cases} |\hat{v}(\xi)| \leq C_1\{\Lambda^{s-1}(hg) + h\Lambda^{s-1}g\}^{\wedge}(\xi) \\ \hat{h}(\xi) = |\xi||\hat{\phi}(\xi)| \text{ , } \hat{g}(\xi) = |\hat{\psi}(\xi)| \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &< C_1\{\|\Lambda^{s-1}(hg)\|_0 + \|h\Lambda^{s-1}g\|_0\} \\ &\leq C_1\{\|hg\|_{s-1} + \|h\|_{L^\infty}\|g\|_{s-1}\}. \end{aligned}$$

Aplicando o lema 2.14 e usando o fato que $\|.\|_{L^\infty} \leq C_2\|\cdot\|_A$, temos

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &\leq C\{\|h\|_A\|g\|_{s-1} + \|h\|_{s-1}\|g\|_A\} \\ &\leq C\{\|\nabla\phi\|_A\|\psi\|_{s-1} + \|\nabla\phi\|_{s-1}\|\psi\|_A\}. \end{aligned}$$

onde usamos as relações $\|h\|_s = \|\nabla\phi\|_s$, $\|h\|_A = \|\nabla\phi\|_A$, $\|g\|_s = \|\psi\|_s$ e $\|g\|_A = \|\psi\|_A$. Isto conclui a demonstração do lema. ■

Teorema 2.16. *Sejam $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$ reais e $s > 1 + n/2$. Então existe $C_{s,n} > 0$ tal que*

$$\|\ [\Lambda^s, v]Du\|_0 < C_{s,n}\|\nabla v\|_{s-1}\|u\|_s$$

onde $D = \partial^\alpha$ com $|\alpha| = 1$.

Demonstração: Basta tomarmos $\phi = v$ e $\psi = Du$ no lema 2.15 e notar que $\|\cdot\|_A \leq C_s\|\cdot\|_{s-1}$. ■

O próximo resultado nos diz que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra de Banach sempre que $s > n/2$.

Teorema 2.17. *Seja $s > n/2$, $s \in \mathbb{R}$. Então, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra comutativa em relação à operação multiplicação de funções ponto a ponto, isto é, para quaisquer $u, v, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos:*

$$u \cdot v \in H^s(\mathbb{R}^n),$$

$$u \cdot v = v \cdot u,$$

$$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$$

e

$$\alpha(u\cdot v) = (\alpha u)\cdot v.$$

Além disso, a operação acima é uma aplicação bilinear contínua de $H^s(\mathbb{R}^n)\times H^s(\mathbb{R}^n)$ *em* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *na topologia da norma, ou seja, existe uma constante* $C_{s,n}\geq 0$ *tal que*

$$\|u\cdot v\|_s \leq C_{s,n}\|u\|_s\|v\|_s, \ \forall u,v\in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Veja [S] página 20. ∎

Vejamos agora uma versão localizada dos espaços de Sobolev.

Definição 2.18. *Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *um aberto. Definimos* $H_0^s(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Quando Ω é limitado, os espaços $H_0^s(\Omega)$ tem uma interessante propriedade de compacidade: O lema de Rellich. Antes, veremos outro lema que será útil na demonstração deste.

Lema 2.19. *Sejam* Ω *limitado,* $s\in\mathbb{R}$ *e* $\{u_k\}$ *é uma seqüência em* $C_0^\infty(\Omega)$ *tal que* $\|u_k\|_s\leq C<\infty$, *para todo* k. *Então existe uma subseqüência* $\{u_{k_j}\}$ *que converge em* $H^t(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $t<s$.

Demonstração: Seja $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(x)=1, \forall x\in\Omega$. Então $u_k=\phi u_k$ e, assim $\hat{u}_k=(2\pi)^{-n/2}\hat{\phi}*\hat{u}_k$. Pelo lema 2.9 e pela desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}_k(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)||\hat{u}_k(\eta)|d\eta \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\eta|^2)^{-s/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{s/2}|\hat{u}_k(\eta)|d\eta \\
&\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\phi}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{s/2}|\hat{u}_k(\eta)|d\eta \\
&\leq (2\pi)^{-n/2}2^{|s|/2}\|\phi\|_{|s|}\|u_k\|_s
\end{aligned}$$

e para $j=1,2,\ldots,n$, como

$$\partial_j\hat{u}_k(\xi) = -i(2\pi)^{-n/2}((x_j\phi)^\wedge * \hat{u}_k)(\xi)$$

pela mesma razão anterior,

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}|\partial_j\hat{u}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2}2^{|s|/2}\|x_j\phi\|_{|s|}\|u_k\|_s.$$

Como $\|u_k\|_s \leq C, \forall k$, temos

$$|\hat{u}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} 2^{|s|/2} C \|\phi\|_{|s} (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$$

e

$$|\partial_j \hat{u}_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} 2^{|s|/2} C \|x_j \phi\|_{|s|} (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$$

para todo k, j. Deste modo, as seqüências $\{\hat{u}_k\}$ e $\{\partial_j \hat{u}_k\}$ são uniformemente limitadas em compactos de $\mathbb{R}^n$. Segue do teorema do valor médio que as $\hat{u}_k$'s são Lipschitzianas em compactos de $\mathbb{R}^n$ e isto implica que a seqüência $\{\hat{u}_k\}$ é eqüicontínua em compactos de $\mathbb{R}^n$. Então, o teorema 1.31 nos garante que existe uma subseqüência $\{\hat{u}_{k_j}\}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Com isso, afirmamos que $\{u_{k_j}\}$ converge em $H^t(\mathbb{R}^n), \forall t < s$.

De fato, $\forall R > 0$,

$$\begin{aligned}
\|u_{k_i} - u_{k_j}\|_t^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{u}_{k_i}(\xi) - \hat{u}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^t |\hat{u}_{k_i}(\xi) - \hat{u}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^{t-s} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}_{k_i}(\xi) - \hat{u}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq (1 + R^2)^{max(t,0)} \sup_{|\xi| \leq R} |\hat{u}_{k_i}(\xi) - \hat{u}_{k_j}(\xi)|^2 \int_{|\xi| \leq R} d\xi \\
&\quad + (1 + R^2)^{t-s} \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}_{k_i}(\xi) - \hat{u}_{k_j}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq (1 + R^2)^{max(t,0)} n^{-1} w_n R^n \sup_{|\xi| \leq R} |\hat{u}_{k_i}(\xi) - \hat{u}_{k_j}(\xi)|^2 \\
&\quad + (1 + R^2)^{t-s} \|u_{k_i} - u_{k_j}\|_s^2
\end{aligned}$$

onde $w_n = nR^{-n} \int_{|\xi| \leq R} d\xi$. Dado $\varepsilon > 0$, como $t - s < 0$ e $\|u_{k_i} - u_{k_j}\|_s \leq 2C$, podemos escolher R, suficientemente grande, de modo que a segunda parcela na última expressão seja menor que $\varepsilon/2, \forall i, j$. Mas então podemos escolher i, j, suficientemente grande, de modo que a primeira parcela seja também menor que $\varepsilon/2$, pois $\{\hat{u}_{k_j}\}$ converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n$. Logo, $\{u_k\}$ é de Cauchy em $H^t(\mathbb{R}^n)$ para $t < s$, e como este é completo, temos que $\{u_{k_j}\}$ converge em $H^t(\mathbb{R}^n)$ para $t < s$.

■

Teorema 2.20. ***(Lema de Rellich)*** *Sejam $t < s$ e Ω limitado. A inclusão $H_0^s(\Omega) \longrightarrow H_0^t(\Omega)$ é compacta.*

Demonstração: Seja $\{u_k\}$ uma seqüência limitada em $H_0^s(\Omega)$. Para cada k, escolha uma seqüência $\{u_k^j\}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ convergindo para u_k em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Podemos assumir que

$$\|u_k^j\|_s \leq 2\|u_k\|_s, \forall j, k.$$

Assim, $\{u_k^j\}$ é limitada em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Sendo $t < s$, pelo lema 2.19 alguma subseqüência de $\{u_k^k\}$ é convergente em $H^t(\mathbb{R}^n)$. Então para j, k pertencentes a esta subseqüência, temos:

$$\begin{aligned} \|u_j - u_k\|_t &\leq \|u_j - u_j^j\|_t + \|u_j^j - u_k^k\|_t + \|u_k^k - u_k\|_t \\ &\leq \|u_j - u_j^j\|_s + \|u_j^j - u_k^k\|_s + \|u_k^k - u_k\|_s, \end{aligned}$$

e a expressão à direita tende a zero quando $j, k \to \infty$. Logo, $\{u_k\}$ é de Cauchy em $H^t(\mathbb{R}^n)$, que é Hilbert e, portanto converge em $H^t(\mathbb{R}^n)$. Com isto temos que a inclusão $H_0^s(\Omega) \longrightarrow H_0^t(\Omega)$ é compacta. ■

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções para a KdV

Neste capítulo apresentaremos algumas definições da teoria de semi-grupo, enunciaremos o teorema de existência e unicidade da teoria quase-linear de T. Kato e aplicaremos este para mostrar existência e unicidade de soluções da equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev de tipo L^2.

Definição 3.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de operadores lineares limitados de X em X é um* C_0 **grupo** *(ou grupo fortemente contínuo) se:*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$, $\forall\, x \in X$.

De maneira análoga, definimos C_0 semi-grupo para $t \geq 0$.

Definição 3.2. *O gerador infinitesimal A de um C_0 grupo (C_0 semi-grupo) $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ($t \geq 0$), é definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt}T(t)x \mid_{t=0}$$

quando o limite existe. O domínio de A, denotado por $D(A)$, é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ tais que o limite existe (no caso de C_0 semi-grupo, considere $t \to 0^+$).

Considere o problema de Cauchy para a equação de evolução quase-linear

$$\partial_t u + A(t,u)u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = \phi, \tag{3.1}$$

onde $A(t,u)$ é um operador linear para cada $t \in [0,T]$ e cada $u \in X$.

Hipótese (X). Suponhamos X e Y espaços de Banach reais, reflexivos com Y contido em X contínua e densamente e S um isomorfismo de Y sobre X tal que a norma em Y é escolhida de modo que S seja uma isometria, isto é,

$$\|\phi\|_Y = \|S\phi\|_X.$$

Hipótese (A.1). Suponha que para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$, onde W é uma bola aberta em Y centrada em y_0, tem-se $A(t,y) \in \mathbf{B}(Y,X)$ no sentido que

$$\begin{cases} Y \subseteq D(A(t,y)) \quad \forall (t,y) \in [0,T] \times W \\ A(t,y)\mid_Y \in \mathbf{B}(Y,X) \end{cases}$$

Além disso, suponhamos que $\forall\ y \in W$ fixo, a aplicação $t \in [0,T] \longmapsto A(t,y)$ pertence a $C([0,T];\mathbf{B}(Y,X))$ e $\forall\ t \in [0,T]$ fixo, a aplicação $y \in W \longmapsto A(t,y)$ é de Lipschitz no sentido que

$$\|A(t,y) - A(t,z)\|_{\mathbf{B}(Y,X)} \leq \mu_1 \|y - z\|_X$$

onde $\mu_1 \geq 0$ é uma constante.

Hipótese (A.2). Suponhamos que $A(t,y)y_0 \in Y$ para todo $(t,y) \in [0,T] \times W$ e que vale

$$\|A(t,y)y_0\|_Y \leq \mu_2, \quad t \in [0,T], \quad y \in W$$

onde $\mu_2 \geq 0$ é uma constante.

Hipótese (A.3). Suponha que para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$, $-\bar{A}(t,y)$ gera um C_0 semi-grupo tal que

$$\|e^{-s\bar{A}(t,y)}\|_{\mathbf{B}(X)} \leq e^{\beta s}, \ s \in [0,\infty) \text{ e } \beta \in \mathbb{R}$$

(isto é, $\bar{A}(t,y) \in G(X,1,\beta)$, notação de T. Kato).

Hipótese (A.4). Suponhamos que para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$ tem-se

$$\begin{cases} SA(t,y)S^{-1} = A(t,y) + B(t,y) \\ B(t,y) \in \mathbf{B}(X), \ \|B(t,y)\|_{\mathbf{B}(X)} \leq \mu_3 \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\mu_3 \geq 0$ é uma constante. A igualdade em (3.2) deve ser entendida no sentido estrito, isto é,

$$x \in D(A(t,y)) \Leftrightarrow S^{-1}x \in D(A(t,y)) \text{ e } A(t,y)S^{-1}x \in Y.$$

Com isto, temos o teorema de existência e unicidade da teoria quase-linear de T. Kato.

Teorema 3.3. *Suponhamos que as hipóteses (X), (A.1)-(A.4) estão satisfeitas. Se $\phi \in W$, então (3.1) tem uma única solução*

$$u \in C([0,T'];Y) \cap C^1([0,T'];X),$$

para algum $T' \in (0,T]$.

Demonstração: Veja [K3] e [12] página 48. ■

Passemos agora a uma aplicação deste a Equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev de tipo L^2. Para isso, considere o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{KdV}) \\ u(0,x) = \phi(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

Teorema 3.4. *Seja $s > 3/2$, $s \in \mathbb{R}$. Para cada $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, existem $T > 0$ (dependendo somente de $\|\phi\|_s$) e uma única solução u para (3.3) tal que*

$$u \in C([0,T];H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T];H^{s-3}(\mathbb{R})).$$

Afim de demonstrar o teorema 3.4 faremos preliminarmente uma transformação, a saber,

$$u(t) = P(t)v(t) \tag{3.4}$$

onde $P(t) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ é um operador linear definido por

$$(P(t)\phi)^\wedge(\xi) = e^{it\xi^3}\hat{\phi}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$, forma um C_0 grupo unitário em $H^s(\mathbb{R})$.

De fato, se $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, então

$$(P(0)\phi)^\wedge(\xi) = e^{i0\xi^3}\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi) = (I\phi)^\wedge(\xi).$$

Isto implica que $P(0) = I$. Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}(P(t+s)\phi)^\wedge(\xi) &= e^{i(t+s)\xi^3}\hat{\phi}(\xi) = e^{it\xi^3}[e^{is\xi^3}\hat{\phi}(\xi)] \\ &= e^{it\xi^3}(P(s)\phi)^\wedge(\xi) = (P(t)P(s)\phi)^\wedge(\xi),\end{aligned}$$

ou seja, $P(t+s) = P(t)P(s)$. E finalmente, como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\|P(t)\phi - \phi\|_s^2 &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|(P(t)\phi - \phi)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|(e^{it\xi^3}\hat{\phi} - \hat{\phi})(\xi)|^2 d\xi\end{aligned}$$

e para todo $t \in \mathbb{R}$, $(1+|\xi|^2)^s|(e^{it\xi^3}\hat{\phi} - \hat{\phi})(\xi)|^2 \leq 4(1+|\xi|^2)^s|\hat{\phi}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}, d\xi)$, pelo teorema da convergência dominada, segue que

$$\lim_{t\to 0}\|P(t)\phi - \phi\|_s = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\|P(t)\phi\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|e^{it\xi^3}||\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi = \|\phi\|_s^2,\end{aligned}$$

ou seja, $P(t)$ é unitário.

A seguir, mostraremos que o gerador infinitesimal de $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é o operador linear $-\partial_x^3 : H^{s+3}(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ definido por

$$(-\partial_x^3\phi)^\wedge(\xi) = i\xi^3\hat{\phi}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

De fato, se $\phi \in H^{s+3}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{P(t)\phi - \phi}{t} + \partial_x^3\phi\right\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|(\frac{e^{it\xi^3}\hat{\phi} - \hat{\phi}}{t} - i\xi^3\hat{\phi})(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}}|\frac{e^{it\xi^3} - 1}{t} - i\xi^3|^2(1+|\xi|^2)^s|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Observemos que:

(i) Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fixado, $\frac{e^{it\xi^3}-1}{t} - i\xi^3 \longrightarrow 0$ quando $t \to 0$.

(ii) Pelo teorema do valor médio, $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que
$|e^{it\xi^3} - e^{i0\xi^3}| \leq |\frac{d}{dt}e^{it\xi^3}|_{t=t_0} t| = |\xi^3||t| \Rightarrow |\frac{e^{it\xi^3}-1}{t}| \leq |\xi^3|$.
Logo, $|\frac{e^{it\xi^3}-1}{t} - i\xi^3| \leq C^{1/2}|\xi^3|$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\frac{e^{it\xi^3}-1}{t} - i\xi^3|^2(1+|\xi|^2)^s|\hat{\phi}(\xi)|^2 &\leq C|\xi^3|^2(1+|\xi|^2)^s|\hat{\phi}(\xi)|^2 \\ &\leq C(1+|\xi|^2)^{s+3}|\hat{\phi}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}, d\xi). \end{aligned}$$

Com isto, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$||\frac{P(t)\phi-\phi}{t} + \partial_x^3\phi||_s \longrightarrow 0 \text{ quando } t \to 0.$$

Observações:

1. $P(t)L(\partial_x) = L(\partial_x)P(t)$, onde $L(\partial_x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\partial_x^k$ com a_k constante para todo $k \in \{0,1,2,\ldots,N\}$, isto é, $P(t)$ comuta com um operador diferencial linear com coeficientes constantes.

2. Substituindo (3.4) em (3.3) produziremos, como veremos abaixo, uma equação de evolução quase linear para $v = v(t)$ que apresenta apenas uma derivada de primeira ordem em relação a variável x. Isto nos possibilita trabalhar em um espaço maior, como veremos. Vejamos os cálculos:

$$\begin{aligned} (\partial_x u)^\wedge(\xi) &= i\xi\hat{u}(\xi) = i\xi e^{it\xi^3}\hat{v}(\xi) = e^{it\xi^3}i\xi\hat{v}(\xi) \\ &= e^{it\xi^3}(\partial_x v)^\wedge(\xi) = (P(t)\partial_x v)^\wedge(\xi) \Rightarrow \partial_x u = P(t)\partial_x v, \end{aligned}$$

analogamente,

$$(\partial_x^3 u)^\wedge(\xi) = (P(t)\partial_x^3 v)^\wedge(\xi) \Rightarrow \partial_x^3 u = P(t)\partial_x^3 v,$$

e finalmente,

$$\partial_t u = (\partial_t P(t))v + P(t)\partial_t v = -\partial_x^3 P(t)v + P(t)\partial_t v = P(t)\partial_t v - P(t)\partial_x^3 v.$$

Assim, ficamos com o seguinte problema de Cauchy:

$$\frac{dv}{dt} + A(t,v)v = 0, \quad v(0) = \phi, \tag{3.5}$$

onde $A(t,y) = yP(t)\partial_x$ é um operador linear definido em $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$, que só depende de $t \geq 0$ e $y \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$, e tem a seguinte propriedade:

Lema 3.5. *Seja $s > \frac{3}{2}$. Se $(t,y) \in [0,T] \times W$, onde $W = \{y \in H^s(\mathbb{R})\ ;\ \|y\|_s < R\}$, temos que*

$$(A(t,y)\phi, \phi)_0 \geq -\beta\|\phi\|_0^2, \ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.6}$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
-(A(t,y)\phi,\phi)_0 &= -(P(-t)P(t)yP(t)\partial_x\phi,\phi)_0 = -(P(t)y\partial_x P(t)\phi, P(t)\phi)_0 \\
&= -(P(t)y\partial_x\psi,\psi)_0 = -\int_{\mathbb{R}} P(t)y\partial_x\psi.\psi dx \qquad (\psi = P(t)\phi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (P(t)y)\partial_x\frac{\psi^2}{2}dx = \int_{\mathbb{R}} P(t)\partial_x y\frac{\psi^2}{2}dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|P(t)\partial_x y\|_{L^\infty}\|\psi\|_0^2 \leq \frac{C}{2}\|P(t)y\|_s\|\psi\|_0^2 \\
&\leq \frac{C}{2}\sup_{y\subset W}\|y\|_s\|\psi\|_0^2 \leq \frac{CR}{2}\|\psi\|_0^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(A(t,y)\phi,\phi)_0 \geq -\tfrac{CR}{2}\|P(t)\phi\|_0^2 = -\beta\|\phi\|_0^2,$$

onde $\beta = \frac{CR}{2} > 0$. ∎

Note que o lema 3.5 é válido também para $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$, pois $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso neste espaço.

Passemos agora a verificação do teorema 3.3 para o problema de Cauchy (3.5).

No que segue, considere $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$ e $y, z \subset W$, onde $W = \{y \in H^s(\mathbb{R})\ ;\ \|y\|_s < R\}$. Deste modo, é claro que Y está contido contínua e densamente em X. Além disso, $S \doteq (1-\partial_x^2)^{s/2} : Y \longrightarrow X$ definido por

$$S\phi \doteq ((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\phi})^\vee,$$

é um isomorfismo de Y em X e de fato uma isometria, pois

$$\|\phi\|_s = \|S\phi\|_0.$$

Com isso, fica provado a hipótese (X).

Como, para cada $(t,y) \subset [0,T]\times W$, $D(A(t,y)) = Y$, a demonstração da hipótese (A.1) se resume ao seguinte lema:

Lema 3.6. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) $A(t,y) \in \mathbf{B}(Y,X)$, $(t,y) \in [0,T] \times W$.

(ii) Para cada $y \in W$ *fixo,* $t \in [0,T] \longmapsto A(t,y)$ *pertence a* $C([0,T];\mathbf{B}(Y,X))$.

(iii) $\|A(t,y) - A(t,z)\|_{\mathbf{B}(Y,X)} \leq \mu_1 \|y-z\|_0$, *onde* $\mu_1 \geq 0$ *é uma constante.*

Demonstração: Para $(t,y) \in [0,T] \times W$ fixados e $\phi \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}\|A(t,y)\phi\|_0 &= \|yP(t)\partial_x\phi\|_0 < \|P(t)\partial_x\phi\|_{L^\infty}\|y\|_0 \\ &\leq C\|P(t)\partial_x\phi\|_{s-1}\|y\|_0 \leq C\|\phi\|_s\|y\|_0,\end{aligned}$$

isto é, $A(t,y) \in \mathbf{B}(Y,X)$. Portanto (i) esta demonstrado. Quanto a (ii), observe que

$$\begin{aligned}\|A(t,y)\phi - A(t_0,y)\phi\|_0 &= \|yP(t)\partial_x\phi - yP(t_o)\partial_x\phi\|_0 \leq \|y(P(t)-P(t_0))\partial_x\phi\|_0 \\ &\leq \|(P(t)-P(t_0))\phi\|_s\|y\|_0 = C\|(P(t)-P(t_0))\phi\|_s.\end{aligned}$$

Como $P(t)$ é um C_0 grupo, temos que $\lim_{t\to t_0}\|A(t,y)\phi - A(t_0,y)\phi\|_0 \longrightarrow 0$. Isto encerra a demonstração de (ii). Para finalizar, vejamos que vale (iii).

De Fato,

$$\begin{aligned}\|(A(t,y) - A(t,z))\phi\|_0 &= \|(y-z)P(t)\partial_x\phi\|_0 \leq \|P(t)\partial_x\phi\|_{L^\infty}\|y-z\|_0 \\ &\leq C\|P(t)\partial_x\phi\|_{s-1}\|y-z\|_0 \leq C\|\phi\|_s\|y-z\|_0.\end{aligned}$$

Isto implica que $\|A(t,y) - A(t,z)\|_{\mathbf{B}(Y,X)} \leq \mu_1\|y-z\|_0$. ∎

Observe que W é uma bola centrada em $y_0 = 0$. Isto implica que a hipótese (A.2) é satisfeita trivialmente.

Vejamos agora que a hipótese (A.3) é satisfeita.

Lema 3.7. *Para cada* $(t,y) \in [0,T] \times W$, $-A(t,y)$ *gera um* C_0 *semi-grupo tal que*

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_{\mathbf{B}(X)} \leq e^{\beta s}, \; s \in [0,\infty) \text{ e } \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Demonstração: Vejamos que o operador $-A(t,y)$ é fechado. Para isto, seja $\{\phi_n\}$ uma seqüência em Y tal que $\phi_n \to \phi$ na norma Y e $-A(t,y)\phi_n \to \psi$ na norma X. É claro que $\phi \in Y$ e como $s-1>1/2$,

$$\begin{aligned}
\|\psi + A(t,y)\phi\|_0 &\le \|\psi + A(t,y)\phi_n\|_0 + \|-A(t,y)\phi_n + A(t,y)\phi\|_0 \\
&\le \|\psi + A(t,y)\phi_n\|_0 + \|-\partial_x P(t)(\phi_n - \phi)\|_{L^\infty}\|y\|_0 \\
&< \|\psi + A(t,y)\phi_n\|_0 + C\|\phi_n - \phi\|_s.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, concluímos que $-A(t,y)\phi = \psi$. Portanto, $-A(t,y)$ é fechado.

Agora, verificaremos propriedades do operador linear $(-\beta I - A(t,y)) : Y \longrightarrow X$. Observe que pelo lema 3.5,

$$((\beta + A(t,y)\psi, \psi)_0 \ge 0, \ \psi \in Y.$$

Assim, dados $\psi \in Y$ e $\lambda > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda + \beta + A(t,y))\psi\|_0\|\psi\|_0 &\ge |((\lambda + \beta + A(t,y))\psi, \psi)_0| \\
&\ge ((\lambda + \beta + A(t,y))\psi, \psi)_0 \\
&= \lambda\|\psi\|_0^2 + ((\beta + A(t,y))\psi, \psi)_0 \\
&\ge \lambda\|\psi\|_0^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|(\lambda+\beta+A(t,y))\psi\|_0 > \lambda\|\psi\|_0$. Isto é equivalente a dizer que $(-\beta I - A(t,y))$ é dissipativo (Veja [P] página 14). Além disso, como

$$\begin{aligned}
\|A(t,y)\psi\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}} |yP(t)\partial_x\psi|^2 dx \le \|y\|_{L^\infty}^2 \|\partial_x\psi\|_0^2 \\
&\le C_s\|y\|_s^2\|\psi\|_s^2 \le C^2\|\psi\|_s^2,
\end{aligned}$$

onde $C^2 = C_s R^2 > 0$ é uma constante, segue que

$$\|(-\beta - A(t,y))\psi\|_0 \le \beta\|\psi\|_0 + \|A(t,y)\psi\|_0 \le \beta\|\psi\|_0 + C\|\psi\|_s.$$

Mas o operador linear $\beta I : Y \longrightarrow X$ gera um C_0 semi-grupo em X. Logo, pela teoria de perturbação de semi-grupos (Veja [P] página 84, corolário 3.5), $-A(t,y)$ gera um C_0 semi-grupo que satisfaz (3.7). ■

Finalmente, verificaremos que vale a hipótese (A.4).

Lema 3.8. *Para cada* $(t, y) \in [0, T] \times W$ *temos*

$$\begin{cases} SA(t, y)S^{-1} = A(t, y) + B(t, y) \\ B(t, y) \in \mathbf{B}(X), \ \|B(t, y)\|_{\mathbf{B}(X)} \leq \mu_3 \end{cases}$$

onde $\mu_3 \geq 0$ *é uma constante.*

Demonstração: Observe primeiramente que se $\phi \in D(A(t, y)) = Y$, então existe uma única $\psi \in X$ tal que $(1 - \partial_x^2)^{-s/2}\psi = \phi$. Logo,

$$\begin{aligned} A(t, y)S^{-1}\phi &= yP(t)\partial_x S^{-1}\phi \\ &= yP(t)\partial_x S^{-2}\psi \qquad\qquad (\phi = S^{-1}\psi) \\ &= yP(t)\partial_x(1 - \partial_x^2)^{-s}\psi, \end{aligned}$$

mas $(1 - \partial_x^2)^{-s}\psi \in H^{2s}(\mathbb{R})$, portanto, $yP(t)\partial_x(1 - \partial_x^2)^{-s}\psi \in H^{2s-1} \hookrightarrow Y$, pois Y é uma álgebra de Banach. Isto implica que o operador $SA(t, y)S^{-1} : Y \longrightarrow X$ está bem definido. Segue então que

$$\begin{aligned} SA(t, y)S^{-1}\phi &= SyP(t)\partial_x S^{-1}\phi \\ &= A(t, y)\phi + SyP(t)\partial_x S^{-1}\phi - yP(t)\partial_x SS^{-1}\phi \\ &= A(t, y)\phi + B(t, y)\phi, \end{aligned}$$

onde $B(t, y) = [S, yP(t)\partial_x]S^{-1}$. Agora é preciso mostrar que $B(t, y) \in \mathbf{B}(X)$. Para isso note que

$$\begin{aligned} B(t, y)\psi &= [S, yP(t)\partial_x]S^{-1}\psi = S(yP(t)\partial_x S^{-1}\psi) - yP(t)\partial_x\psi \\ &= [S, y]\partial_x P(t)S^{-1}\psi + yS\partial_x P(t)S^{-1}\psi - y\partial_x P(t)\psi \\ &= [S, y]\partial_x P(t)S^{-1}\psi + y\partial_x P(t)\psi - y\partial_x P(t)\psi \\ &= [S, y]\partial_x P(t)S^{-1}\psi \end{aligned}$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Logo, pelo teorema 2.16,

$$\begin{aligned} \|B(t, y)\psi\|_0 &= \|[S, y]\partial_x P(t)S^{-1}\psi\|_0 \\ &= \|[S, y]\partial_x\phi\|_0 \qquad\qquad (\phi = P(t)S^{-1}\psi) \\ &\leq C_{s,n}\|y\|_s\|\phi\|_s \\ &= \mu_3\|\psi\|_0 \end{aligned}$$

onde $\mu_3 = C_{s,n}\|y\|_s < \infty$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em X, segue que

$$\|B(t, y)\|_{\mathbf{B}(X)} \leq \mu_3.$$

■

Demonstração do Teorema 3.4: Verificadas as hipóteses (X), (A.1)-(A.4) para o problema de Cauchy (3.5), o teorema 3.3 garante que existe uma única solução $v \in C([0, T']; Y) \cap C^1([0, T']; X)$, $T' \in (0, T]$, para o problema (3.5). Visto que $u(t) = P(t)v(t)$ e $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$, forma um C_0 grupo unitário, então existe uma única solução $u \in C([0, T']; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T']; H^{s-3}(\mathbb{R}))$, $s > 3/2$, para o problema de Cauchy (3.3). Isto encerra a demonstração do teorema.

Referências Bibliográficas

[B] Brézis, H., *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[F] Folland, G.B., *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, 1976.

[I1] Iório Jr., R.J., Iório, V.M., *Equações Parciais Diferenciais: Uma Introdução*, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[I2] Iório Jr., R.J., Nunes, W.V.L., *Introdução às Equações de Evolução não Lineares*, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[G] Guimarães, C.M., *Um Teorema de Compacidade e a Equação de Korteweg-de Vries* , dissertação de mestrado, ICMC-USP, São Carlos, 1993.

[K1] Kato, T., *On the Cauchy Problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equations*, Studies in Appl. Math., Adv. in Math. Suppl. Studies, Academic Press, Vol.8, (1983), 93-128.

[K2] Kato, T., *On the Korteweg-de Vries Equation*, Manuscripta Math., Vol.28, (1979), 89-99.

[K3] Kato, T., *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Lecture Notes in Math., 448, (1975), 25-70.

[L1] Lages, E.L., *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[L2] Lages, E.L., *Curso de Análise, Volume 2*, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[P] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

[S] Santos, M.M., *A Versão de Kato-Lai do Método de Galerkin e a Equação de Korteweg-de Vries (KdV)* , dissertação de mestrado, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.