
A Recíproca do Teorema de Denjoy-Schwartz

Tiago de Carvalho

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 16 de fevereiro de 2007

Assinatura: _____

A Recíproca do Teorema de Denjoy-Schwartz

Tiago de Carvalho

Orientador: *Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos

Fevereiro/2007

*Aos meus pais,
Geraldo e Neuza,
com muito amor
e carinho.*

Agradecimentos

Gostaria de lembrar aqui daqueles que tornaram possível a realização deste trabalho.

Primeiramente, aos meus pais, Geraldo e Neuza, pelo apoio e amor incondicionais, aos quais não só agradeço como também dedico este trabalho.

Ao meu orientador Carlos Gutierrez, pelas críticas valiosas e sempre construtivas, pelo suporte e apoio.

Aos colegas do ICMC, em especial ao pessoal das salas 3-023 e 3-024 pelos momentos de descontração e amizade.

Aos professores e funcionários do ICMC que, de forma muito prestativa e educada, sempre forneceram o suporte acadêmico necessário.

Aos professores e amigos deixados no IBILCE, que mesmo distantes sempre foram lembrados com muita saudade.

A agência FAPESP pelo apoio financeiro durante o Mestrado (e também durante a Iniciação Científica).

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta fizeram-me capaz de chegar até aqui.

Resumo

O principal resultado desta dissertação garante que dado qualquer fluxo contínuo φ numa variedade bidimensional compacta e suave, existe um fluxo de classe C^1 que é topologicamente equivalente a ele. Além disso, quando todos os conjuntos minimais de φ são triviais, φ é topologicamente equivalente a um fluxo suave.

Abstract

The main result of this dissertation guarantees that given any continuous flow on a smooth compact 2-manifold, there exists a C^1 -flow topologically equivalent to it. Moreover, when every minimal set of φ is trivial, φ is topologically equivalent to a smooth flow.

Sumário

Introdução	15
1 Motivação	17
1.1 Definições	17
1.2 Teoremas Principais	19
1.3 Exemplos e Aplicações	20
2 Preliminares	27
2.1 Teoria de Poincaré-Bendixson	29
2.2 Transformações de Intercâmbio de Intervalos	30
3 Teorema de Estrutura	33
4 Decomposição em Caixas de Fluxo Suavisáveis	49
5 Teorema de Suavidade	65
Índice Remissivo	72

Introdução

Em busca de obter propriedades qualitativas de um dado sistema dinâmico, é sempre conveniente saber como são os conjuntos limites das trajetórias dos fluxos.

No caso de conjuntos compactos do plano, e até mesmo da esfera S^2 , este problema fora completamente resolvido pelo Teorema de Poincaré-Bendixson que estabelece que o conjunto limite de qualquer trajetória deve ser um ponto fixo, um ciclo limite ou um gráfico.

Já para variedades bidimensionais quaisquer o problema é mais complexo; por exemplo, se tivermos um fluxo irracional no toro, então o conjunto limite de qualquer trajetória é o próprio toro.

Denjoy provou em 1932, no artigo [4], que se considerarmos no toro um fluxo de classe C^2 então todos os conjuntos minimais são triviais, ou seja, os conjuntos minimais são pontos fixos, órbitas fechadas ou então o conjunto minimal é a variedade toda, sendo neste caso o fluxo topologicamente equivalente ao fluxo irracional. Neste mesmo artigo, Denjoy também mostrou a existência de um fluxo de classe C^1 que não é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^2 ou seja, ele mostrou a existência de um fluxo de classe C^1 e que apresenta conjunto minimal não-trivial; a construção deste exemplo será feita neste trabalho (ver página 21).

Posteriormente, em 1963, Schwartz mostrou, no artigo [28], que tal resultado era válido também para variedades bidimensionais compactas, conexas e sem bordo e não apenas para o toro. O Teorema de Denjoy-Schwartz está enunciado na página 19.

O presente trabalho baseia-se no artigo [8] de Gutierrez, cujo principal resultado, o Teorema de Suavidade (veja página 19), nos fornece a recíproca do resultado de Denjoy-Schwartz e nos dá uma boa caracterização dos conjuntos limite em variedades bidimensionais que são compactas, conexas e sem bordo. Outro resultado importante provado aqui é o Teorema de Estrutura (ver página 19) que caracteriza como é a órbita de trajetória recorrentes não-triviais e que torna-se muito importante na demonstração do Teorema de Suavidade.

O Capítulo 1 pretende ser bastante direto no sentido de enunciar logo os principais resultados e de mostrar exemplos e aplicações destes. Aqui, buscamos mostrar como se dá a parte

prática da utilização do Teorema de Estrutura e do Teorema de Suavidade e tentamos motivar o leitor a ler os capítulos posteriores, que tratam da parte teórica e das demonstrações.

No Capítulo 2 daremos a maioria das definições e introduziremos conceitos estritamente necessários para o desenvolvimento do texto.

No Capítulo 3 faremos a demonstração do Teorema de Estrutura em sua versão mais forte. Esta demonstração se desenvolve de forma a podermos estabelecer uma relação entre as Aplicações de Poincaré e as Transformações de Troca de Intervalos; ambas definidas em um círculo transversal à trajetórias recorrentes não-triviais. Dessa forma, poderemos transferir propriedades das Transformações de Troca de Intervalos para as Aplicações de Poincaré e com isso analisar como se dá o comportamento das trajetórias recorrentes não-triviais.

No Capítulo 4 provaremos alguns resultados que servirão basicamente de ferramentas para se obter a demonstração do Teorema de Suavidade. Aqui será estudada uma decomposição da variedade em caixas de fluxo.

No Capítulo final, demonstraremos o Teorema de Suavidade. Aqui utilizaremos a decomposição feita no capítulo 4 e o Teorema de Estrutura para obter um fluxo suave (ou de classe C^1 , dependendo se todos os conjunto minimais são triviais ou não) que seja topologicamente equivalente ao fluxo contínuo dado.

Motivação

Pretendemos que este capítulo inicial sirva como um incentivo ao leitor para que este possa ler os capítulos 2, 3, 4 e 5 com maior interesse.

Faremos, por hora, apenas algumas definições estritamente necessárias para podermos enunciar os dois resultados principais do trabalho: O Teorema de Estrutura e o Teorema de Suavidade. Salientamos porém que tais definições serão repetidas, com maiores detalhes, posteriormente nos capítulos subsequentes, assim como daremos as demonstrações completas dos resultados aqui enunciados.

Procedendo desta forma, buscamos que o leitor tome logo conhecimento do enunciado e de como se dá a utilização destes resultados principais em exemplos e aplicações, tornando assim o texto mais acessível a uma primeira leitura.

1.1 Definições

Denotaremos por M uma variedade bidimensional, compacta e suave e por $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ um fluxo contínuo em M .

Definição 1.1. *Seja γ uma trajetória recorrente, ou seja, $\gamma \subset \alpha(\gamma)$ (ou $\gamma \subset \omega(\gamma)$); dizemos que γ é **trajetória recorrente não-trivial** se γ não for um ponto fixo e também não for uma órbita fechada.*

Definição 1.2. *Sejam Σ_1 e Σ_2 segmentos transversais a φ . A **Aplicação de Poincaré induzida por φ** é a aplicação $f : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$, não necessariamente definida em toda parte, tal*

que $p \in \text{Dom}(f)$ se, e somente se, $\varphi(\tau, p) = f(p) \in \Sigma_2$ para algum $\tau > 0$ e $\{\varphi(t, p) \mid 0 < t < \tau\}$ é disjunto de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Definição 1.3. *Sejam $f, g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são **topologicamente conjugadas** (respectivamente, **topologicamente semi-conjugadas**) se existe um homeomorfismo (respectivamente, uma aplicação monótona e contínua) $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $h(\text{Dom}(f)) = \text{Dom}(g)$ e para todo $x \in \text{Dom}(f)$ tivermos que $h \circ f(x) = g \circ h(x)$.*

Definição 1.4. *Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ fluxos em M . Dizemos que φ e ψ são **topologicamente equivalentes** se existe homeomorfismo de M em M que leva trajetórias de φ em trajetórias de ψ de tal forma a preservar a orientação natural dessas trajetórias.*

Definição 1.5. *Um conjunto $\Lambda \subset M$ compacto, não-vazio e invariante sob φ será chamado de **conjunto minimal** se este não apresentar conjunto próprio com as três propriedades acima citadas. O conjunto minimal Λ será dito **trivial** se for um ponto fixo, uma órbita fechada ou a variedade inteira M ; caso contrário Λ será dito **não-trivial**.*

Definição 1.6. *Seja $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma aplicação definida em todo lugar, exceto possivelmente em um conjunto finito de pontos. Diremos que E é uma **Transformação de Troca de Intervalos** (ou *i.e.t.*) se for injetiva, continuamente diferenciável e $|E'(x)| = 1$ em todo ponto de $\text{Dom}(E)$.*

As aplicações de troca de intervalos terão papel importante do decorrer deste trabalho, pois conseguiremos estabelecer relação entre estas e as Aplicações de Poincaré; podendo assim transferir propriedades "boas" das *i.e.t.*'s para as Aplicações de Poincaré e assim obter propriedades qualitativas para órbitas com trajetória recorrente não-trivial. Na figura (1.1) temos representada uma *i.e.t.*.

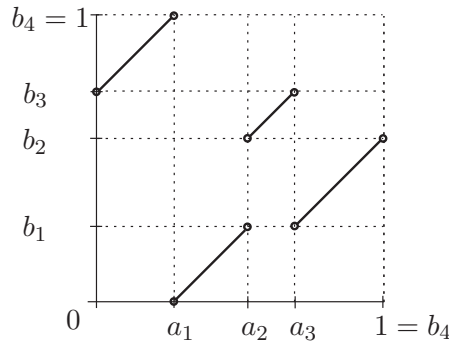


Figura 1.1: Transformação de Troca de Intervalos

1.2 Teoremas Principais

Veremos agora o Teorema de Estrutura que será bastante útil no sentido de estabelecer como são as órbitas de trajetórias recorrentes não-triviais.

Salientamos que o resultado aqui apresentado é uma versão mais fraca do Teorema de Estrutura 3.1 que provaremos no capítulo 3; entretanto tal versão é mais didática e condensa os pontos principais apresentados pelo resultado mais forte.

Teorema 1.1. (Teorema de Estrutura - versão fraca) *O fecho das trajetórias recorrentes não-triviais de φ determina finitos subconjuntos compactos φ -invariantes de M , denotados por $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, tais que qualquer trajetória recorrente não-trivial de φ é densa em algum dos Ω_i . Além disso, passando por cada Ω_i , existe um círculo transversal C_i tal que:*

1. *A Aplicação de Poincaré $T_i : C_i \rightarrow C_i$ é topologicamente semi-conjugada a uma transformação de troca de intervalos $E_i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que tem todas as órbitas densas.*
2. *C_i pode ser tomado de forma a que tenhamos $\Omega_i \cap C_i = C_i$ ou tal que $\Omega_i \cap C_i$ é um Conjunto de Cantor.*

Como estamos interessados em obter propriedades qualitativas de fluxos em variedades, é sempre bom saber como se comportam os conjuntos limite dos fluxos.

No caso de subconjuntos compactos do plano (e para a esfera S^2) este problema fora completamente resolvido pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, que diz que tais conjuntos são pontos fixos, órbitas fechadas ou gráficos. Já para variedade bidimensionais o problema é mais complexo (aqui citamos o caso do toro bidimensional com fluxo irracional, cujo conjunto limite é o próprio toro); veremos a seguir um teorema, provado por Denjoy quando M é o toro e estendido, por Schwartz, para variedades bidimensionais mais gerais, que de certa forma atua como uma generalização do Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 1.2. (Teorema de Denjoy-Schwartz) *Um fluxo φ de classe C^2 em uma variedade bidimensional M que é compacta, conexa e sem bordo, não pode possuir um conjunto minimal μ distinto de um ponto fixo ou de uma trajetória fechada; a menos que $M = \mu$ seja um toro.*

Veremos logo mais um exemplo devido a Denjoy onde fica explícita a necessidade da condição " C^2 " para a classe de diferenciabilidade do fluxo.

Enunciaremos agora o principal resultado deste trabalho, que pode ser visto como a recíproca do Teorema de Denjoy-Schwartz. Observamos que a prova desse teorema será dada no capítulo 5.

Teorema 1.3. (Teorema de Suavidade) *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo contínuo em uma variedade bidimensional M que é compacta e suave. Então existe um fluxo ψ , de classe C^1 , em M que é topologicamente equivalente a φ . Além disso, são equivalentes:*

- (a) Qualquer conjunto minimal de φ é trivial.
- (b) O fluxo φ é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^2 .
- (c) O fluxo φ é topologicamente equivalente a um fluxo suave.

Definição 1.7. *Seja K um subconjunto compacto de M . Uma **folheação** de classe C^r , com $r = 0, 1, \dots, \infty$, (e dimensão um) em M com conjunto de singularidades igual a K é uma partição \mathcal{F} de $M - K$, formada de curvas \mathcal{F}_x , de classe C^r , imersas em $M - K$ tais que todo $x \in M$ exibe uma vizinhança U e um C^r -difeomorfismo $X : U \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$ tal que para todo $y \in (-1, 1)$ tem-se que existe $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo que $X^{-1}((-1, 1) \times \{y\}) \subset F$.*

*Os elementos da partição \mathcal{F} serão chamados de **folhas** de \mathcal{F} .*

Como uma consequência da demonstração do Teorema de Suavidade temos o seguinte resultado:

Corolário 1.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação orientável, unidimensional e contínua, com singularidades em uma variedade M que é bidimensional, sem fronteira, compacta e de classe C^∞ . Se o conjunto de singularidades de \mathcal{F} for compacto, então existe um fluxo que é topologicamente equivalente a \mathcal{F} ; tal fluxo será suave (respectivamente, de classe C^1) se não apresentar conjuntos minimais não-triviais (respectivamente, apresentar conjuntos minimais não-triviais).*

1.3 Exemplos e Aplicações

Faremos agora algumas aplicações do Teorema de Estrutura e do Teorema de Suavidade. Entre tais aplicações iremos dar exemplos de como podemos construir folheações orientáveis em superfícies que são suspensões de transformações de troca de intervalos, bem como analisar estes exemplos segundo o Teorema de Estrutura e o Teorema de Suavidade.

Exemplo 1.1. (Fluxo Irracional no Toro)

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. A aplicação $T_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T_\alpha(x) = x + \alpha$ induz uma aplicação $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ chamada de rotação de ângulo α (veja a figura (1.2)).

Consideremos a folheação unidimensional $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ induzida pelo campo vetorial $(1, 0)$ (campo vertical) (veja a figura(1.3)).

O espaço quociente obtido de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ identificando $(x, 1)$ com $(R_\alpha(x), -1)$ é um toro bidimensional T^2 e a folheação \mathcal{F} em T^2 , induzida por $\tilde{\mathcal{F}}$, é tal que todas as suas folhas são densas quando α é irracional (observe que sempre podemos identificar \mathbb{R}/\mathbb{Z} com o círculo S^1).

Este exemplo é conhecido como "suspensão de uma rotação no círculo".

Note que existe círculo C no toro tal que $\bar{\gamma} \cap C = C$, onde γ é uma trajetória do fluxo irracional induzido no toro que está de acordo com o segundo item da versão fraca do Teorema de Estrutura enunciada acima.

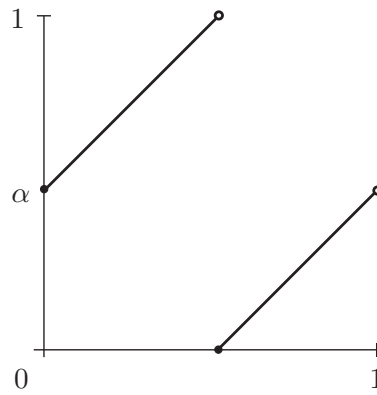


Figura 1.2

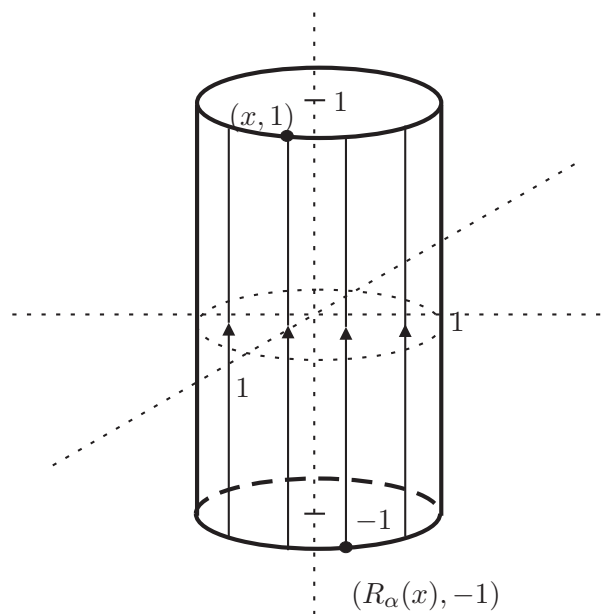


Figura 1.3

Diante ao Teorema de Suavidade, temos que a folheação orientável \mathcal{F} pode ser construída de forma a ser topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^∞ pois o conjunto minimal aqui é toro bidimensional e portanto é um conjunto minimal trivial.

O próximo exemplo mostrará que a condição de o fser de classe C^2 não pode ser subtraída no Teorema de Denjoy-Schwartz.

Exemplo 1.2. (Exemplo de Denjoy)

O Exemplo de Denjoy é obtido como suspensão de um difeomorfismo de classe C^1 , onde tal suspensão possuirá um conjunto minimal não-trivial. Fazamos então a construção desse exemplo.

Inicialmente construiremos um difeomorfismo da seguinte maneira:

Dada uma rotação R_α , conforme o exemplo anterior, com $\alpha > 0$ irracional, identificaremos o conjunto \mathbb{R}/\mathbb{Z} com o círculo S^1 . Cortemos então o círculo S^1 em todos os pontos de uma órbita $\{\theta_n | n \in \mathbb{Z}\}$ de R_α . Em cada corte inserimos um segmento I_n , onde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |I_n| = L < \infty$. Obteremos desta forma um novo círculo S de comprimento maior que o inicial. O conjunto $S - \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ será homeomorfo a um conjunto de Cantor.

Neste novo círculo S construímos um homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ tal que :

- (i) $f|_{S - \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} = R_\alpha$ e
- (ii) f leva homeomorficamente I_n sobre I_{n+1} para todo $n \in \mathbb{Z}$.

É possível provar que $f : S \rightarrow S$ pode ser construído de forma a ser de classe C^1 (vide [2], pg 56 a 60). Assim, supondo que f seja efetivamente de classe C^1 , com o procedimento do exemplo 1.1, suspendemos f a um fluxo Y de classe C^1 no toro T^2 .

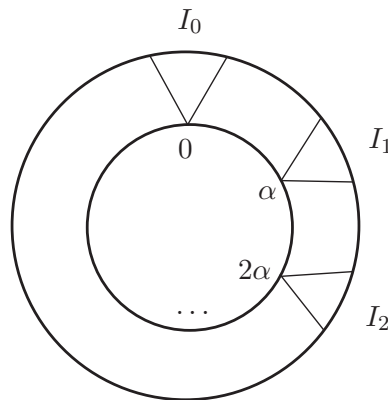


Figura 1.4

Note que neste exemplo existe trajetória recorrente γ tal que $\overline{\gamma} \cap C$ é um Conjunto de Cantor, onde C é um círculo transversal ao fluxo Y em T^2 , o que está em conformidade com o Teorema de Estrutura.

Além disso, como consequência do Teorema de Suavidade temos que Y não pode ser tomado de classe C^2 pois apresenta conjunto minimal não-trivial.

Logo a condição de o fluxo ser de classe C^2 no Teorema de Suavidade não pode ser retirada se quisermos que todos os conjuntos minimais sejam triviais.

Observação 1.1. • Chamamos o processo descrito no exemplo anterior de **engordar uma órbita** de $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$, obtendo assim uma nova transformação $T : C \rightarrow C$.

- Podemos engordar não apenas uma órbita, mas sim um conjunto até enumerável de órbitas. O único cuidado é que a soma total dos comprimentos dos intervalos inseridos seja finita.

Diante do exemplo anterior, podemos enunciar o seguinte teorema, devido a Denjoy:

Teorema 1.4. *Existe um difeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ de classe C^1 tal que:*

1. *Existe intervalo aberto $I_0 \subset S^1$ tal que $\dots, f^{-n}(I_0), \dots, f^{-1}(I_0), I_0, f(I_0), \dots, f^n(I_0), \dots$ são dois a dois disjuntos;*
2. *$\Omega = S^1 - \cup_{n \in \mathbf{Z}} f^n(I_0)$ é um Conjunto de Cantor e*
3. *Se $x \in \Omega$ então $\overline{o(x)} = \Omega$.*

Agora temos, enfim, exemplos onde as duas possibilidades vistas no Teorema de Estrutura aparecem; o caso do fluxo irracional no toro temos que a intersecção do fecho de uma trajetória recorrente não-trivial com o círculo transversal é todo o círculo, enquanto que no exemplo anterior esta intersecção é um Conjunto de Cantor.

Observação 1.2. *Ainda sobre o exemplo anterior, suponha que sobre a folha de \mathcal{F} , cuja intersecção com um certo círculo transversal C é um Conjunto de Cantor, inserimos uma singularidade p . Ora, teremos com isso, que o único conjunto minimal para essa nova folheação é a singularidade p e daí, usando o Teorema de Suavidade esta folheação será topologicamente equivalente a um fluxo suave. Passamos assim de um fluxo de classe C^1 a um fluxo suave através da mera inserção de uma singularidade na trajetória recorrente não-trivial.*

Exemplo 1.3. *(Suspensão de uma i.e.t.)*

Considere uma transformação de troca de intervalos $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E)$ consiste de três pontos $0 < a_1 < a_2 < a_3 < 1$ e seu gráfico (quando \mathbb{R}/\mathbb{Z} é identificado com $[0, 1)$, de forma canônica) é como na figura (1.5).

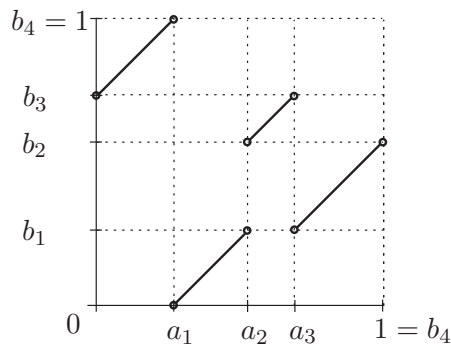


Figura 1.5

Note que nesta figura temos que:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_3 - a_2, \\ b_2 &= b_1 + a_2 - a_1, \\ b_3 &= b_2 + 1 - a_3, \\ 0 &= b_0 \sim b_4 = 1. \end{aligned}$$

Seja C um cilindro compacto de \mathbb{R}^2 , como na figura (1.6), cuja fronteira consiste do círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e do polígono P com seus 12 lados curvilíneos (os símbolos b_0, b_1, b_2, b_3, s_1 e s_2 denotam os vértices de P). Note que, para alguns pares de vértices de P usamos o mesmo símbolo para denotá-los; além disso, b_1, b_2 e b_3 estão denotando tanto pontos de S^1 quanto pontos de P .

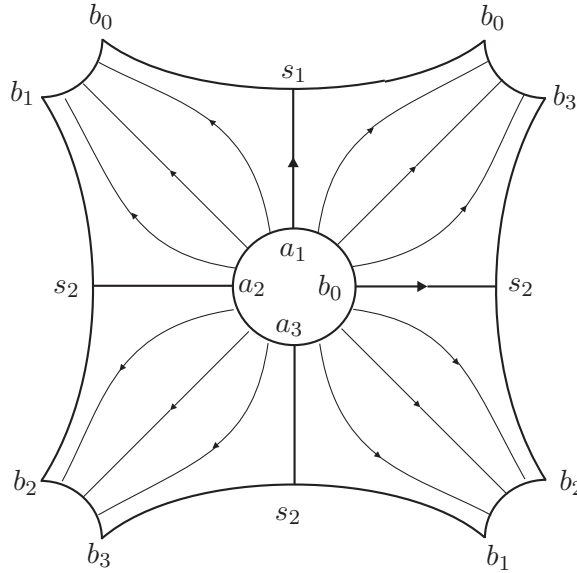


Figura 1.6

Faremos agora as seguintes identificações:

1. Qualquer par de lados de P cujos extremos são denotados pelo mesmo símbolo devem ser identificados (de modo coerente com a notação de seus extremos). Esse processo deve ser aplicado aos segmentos $\overline{s_1 b_3}$, $\overline{s_2 b_1}$, $\overline{s_2 b_2}$ e $\overline{s_2 b_0}$.
2. A fronteira da variedade resultante destas identificações é $P_1 \cup S^1$, onde P_1 é a união dos segmentos $\overline{b_0 b_1}$, $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{b_2 b_3}$ e $\overline{b_3 b_0}$.
3. Considere a folheação orientável \mathcal{F} em C como na figura (1.6). A maior parte das folhas de \mathcal{F} vão de S^1 para P_1 e a única singularidade de \mathcal{F} é s_2 .
4. Identifique o círculo P_1 com S^1 de tal forma que a Aplicação de Poincaré $T : S^1 \longrightarrow P_1 \sim S^1$ induzida por \mathcal{F} seja precisamente a aplicação $E : S^1 \longrightarrow S^1$.

A variedade obtida a partir do cilindro C após feitas essas identificações é um bitoro M e \mathcal{F} dá origem a uma folheação orientável em M com apenas uma singularidade, a saber, s_2 . O retrato de fase local de \mathcal{F} ao redor de s_2 é como na figura (1.7).

Aqui \mathcal{F} é topologicamente equivalente a um fluxo suave.



Figura 1.7

Exemplo 1.4. Seja $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma i.e.t. como no exemplo anterior. Seja N_E a variedade quociente obtida a partir de

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1] - \{(\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E)) \times \{1\}\} \cup \{(\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E^{-1})) \times \{-1\}\}$$

identificando $(x, 1)$ com $(E(x), -1)$, para todo $x \in \text{Dom}(E)$.

Seja \mathcal{F} a folheação orientada e unidimensional induzida em N_E pelo campo vetorial vertical $(1, 0)$. A variedade N_E é um bitoro perfurado com exatamente um "end". Se compactificarmos N_E com um ponto s , a variedade resultante será o bitoro e a folheação \mathcal{F} terá uma singularidade no ponto s .

Observamos por fim, que este exemplo é, essencialmente, o mesmo que o exemplo anterior.

Observação 1.3. Consideremos uma folheação em uma variedade M tal que exista uma multisela como no exemplo anterior de tal forma que esta multisela seja ponto de acumulação de todas as trajetórias recorrentes não-triviais e tais trajetórias não se acumulam em qualquer outro conjunto minimal trivial. Usando o procedimento do exemplo de Denjoy onde "engordamos" a órbita de uma dada trajetória, "engordemos" as separatrizes da multisela, veja a figura (1.8); e completemos a folheação como na figura (1.9). Note que agora, as trajetórias recorrentes não-triviais não se acumulam mais em conjunto minimais triviais, daí, pelo Teorema de Suavidade temos que a folheação é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^1 apenas e não mais a um fluxo suave como anteriormente.

Exemplo 1.5. Consideremos uma configuração local como na figura (1.10).

Pergunta: Existe fluxo suave que, localmente, apresenta esta configuração em seu retrato de fase ?

A resposta é sim, pois mergulhando tal configuração na esfera S^2 e completando a esfera com singularidades teremos uma folheação em uma variedade bidimensional compacta e que possui apenas conjuntos minimais triviais. Logo, pelo Teorema de Suavidade existe um fluxo suave topologicamente equivalente a esta folheação.

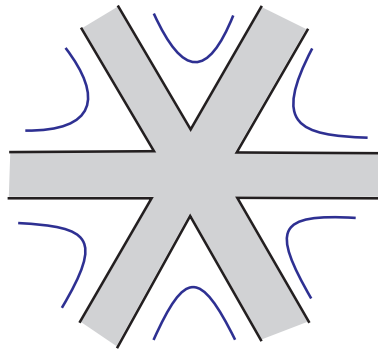


Figura 1.8

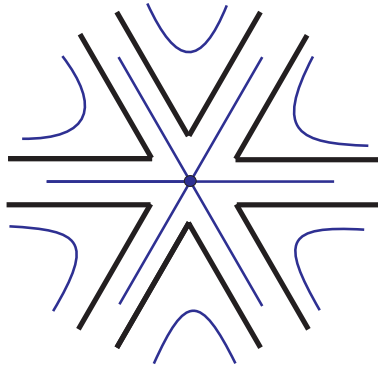


Figura 1.9

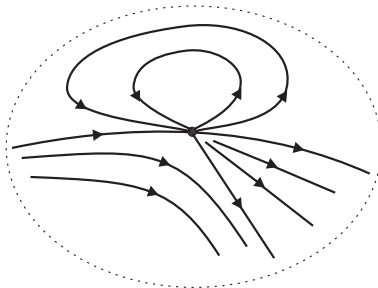


Figura 1.10

Preliminares

Inicialmente iremos ver alguns conceitos cruciais para o bom entendimento do que segue ao longo do texto.

Denotaremos, de agora em diante, por M uma variedade bidimensional, compacta e suave. Consideremos a aplicação contínua $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ para todo $p \in M$ e $\varphi(t + s, q) = \varphi(t, \varphi(s, q))$ para $t, s \in \mathbb{R}$ e $q \in M$; diremos que φ é um **fluxo**.

A *semi-trajetória* positiva (respectivamente negativa) de um ponto $p \in M$ é definida como sendo o conjunto

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) \mid t \in [0, \infty)\}$$

(respectivamente, $\gamma_p^- = \{\varphi(t, p) \mid t \in (-\infty, 0]\}$). A *trajetória* $\gamma_p^+ \cup \gamma_p^-$ será denotada por γ_p .

Um ponto $p \in M$ será chamado de *ponto fixo* de φ se tivermos que $\varphi(t, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$; caso contrário será chamado de *ponto regular* de φ . Dizemos que γ_p é *periódica* se p não é um ponto fixo e se $\varphi(t_0, p) = p$ para algum $t_0 > 0$.

Um ponto $q \in M$ é um *ponto ω -limite* (respectivamente *ponto α -limite*) de p ou de γ_p , se existir uma seqüência de números reais $t_k \rightarrow \infty$ (respectivamente $t_k \rightarrow -\infty$) tal que $\varphi(t_k, p) \rightarrow q$. O conjunto dos *pontos ω -limite* (respectivamente *pontos α -limite*) de γ_p será denotado por $\omega(p)$ ou por $\omega(\gamma_p)$ (respectivamente $\alpha(p)$ ou por $\alpha(\gamma_p)$). Diremos que γ_p é *ω -recorrente* (respectivamente *α -recorrente*) se $\gamma_p \subset \omega(\gamma_p)$ (respectivamente $\gamma_p \subset \alpha(\gamma_p)$). A trajetória γ_p é *recorrente* se for ω ou α -recorrente; dizemos também que uma trajetória recorrente γ_p é *recorrente não-trivial* se γ_p não for um ponto fixo nem uma órbita fechada.

Usaremos a notação \widehat{pq} para nos referirmos ao arco de trajetória (de φ), orientado, começando em p e terminando em q , porém sem incluir tais pontos. A orientação será a mesma induzida pelo fluxo.

Seja N uma subvariedade de M que é disjunta dos pontos fixos de φ . Diremos que N é uma *caixa de fluxo* (de φ) se existir um retângulo $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo $\theta : A \rightarrow N$ tal que, para cada $s \in [c, d]$, temos que $\theta([a, b] \times \{s\})$ é um arco de trajetória de φ . O homeomorfismo θ também será chamado de *caixa de fluxo*. Os segmentos $\theta(\{a\} \times [c, d])$ e $\theta(\{b\} \times [c, d])$ (respectivamente $\theta([a, b] \times \{c\})$ e $\theta([a, b] \times \{d\})$) serão chamados de *lados transversais* (respectivamente *não-transversais*) da caixa de fluxo N . Um ponto $p \in \{\theta(x, y) \mid x \in \{a, b\}, y \in [c, d]\}$ será chamado de *quina* de N . Se p for um ponto regular de φ , então pode-se ver que existirá uma vizinhança de p que seja uma caixa de fluxo (veja [1], teorema 2.9, pg 50 e [32]). Um segmento ou um círculo C é dito *transversal* a φ se para cada $p \in C$, que não seja um de seus extremos, existir uma caixa de fluxo $\theta : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow N$ tal que $\theta(0, 0) = p$ e $\theta(\{0\} \times [-1, 1]) = N \cap C$.

Sejam Σ_1 e Σ_2 segmentos ou círculos transversais a φ . A *Aplicação de Poincaré induzida por φ* é definida como sendo a aplicação $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, não necessariamente definida em toda parte, tal que $p \in \text{Dom}(f)$ e conseqüentemente $f(p) = q$ se, e somente se, $\varphi(\tau, p) = q \in \Sigma_2$ para algum $\tau > 0$ e $\{\varphi(t, p) \mid 0 < t < \tau\}$ é disjunto de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Consideremos as aplicações contínuas f e $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ não necessariamente definidas em toda parte. Dizemos que f e g são *topologicamente conjugadas* se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $h(\text{Dom}(f)) = \text{Dom}(g)$ e para todo $x \in \text{Dom}(f)$ tivermos $h \circ f(x) = g \circ h(x)$.

Um intervalo aberto S que seja transversal a φ será dito *errante* (ou φ -*errante*) se qualquer trajetória de φ intersecta S no máximo uma vez. Um ponto $p \in M$ será dito *errante* se for regular e existir um intervalo aberto transversal errante que contenha o ponto p .

Um subconjunto $X \subset M$ é *invariante* se $x \in X$ implicar que $\gamma_x \subset X$.

Sejam φ e $\psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ dois fluxos contínuos em M . Dizemos que φ e ψ são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo de M em M que leva trajetórias de φ em trajetórias de ψ , de tal forma a preservar a orientação natural dessas trajetórias.

Um conjunto $\Lambda \subset M$ compacto, não-vazio e invariante sob φ é dito um *conjunto minimal* (de φ) se Λ não contém um subconjunto próprio, não-vazio e compacto que é invariante sob φ . Um subconjunto $\Lambda \subset M$ é um *conjunto minimal trivial* (de φ) se este é uma trajetória fechada, um ponto fixo ou então é a variedade M inteira, desde que $\Lambda = M$ seja um toro e o fluxo seja (topologicamente equivalente a) um fluxo irracional; caso o conjunto minimal Λ não seja como acima, ele será chamado de *conjunto minimal não-trivial*.

2.1 Teoria de Poincaré-Bendixson

Nesta seção estudaremos uma extensão para fluxos em variedades (de dimensão dois) do Teorema de Poincaré-Bendixson para \mathbb{R}^2 ; segundo este teorema existem três tipos de conjuntos limite, a saber: pontos fixos, órbitas periódicas e gráficos. Todavia, quando a superfície estudada é um toro e neste consideramos o fluxo irracional, o próprio toro é o conjunto limite.

Nesta linha, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. (*Teorema de Denjoy-Schwartz*) *Um fluxo φ de classe C^2 em uma variedade bidimensional M que é compacta, conexa e sem bordo, não pode possuir um conjunto minimal μ distinto de um ponto singular ou uma trajetória fechada; a menos que $M = \mu$ seja um toro.*

Não faremos aqui a demonstração deste teorema, mas para fazê-la é conveniente ter-se em mente o seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja $\mu \subset M$ um conjunto minimal para φ .*

- (a) *Se μ tem interior não-vazio então $\mu = M$ e M é o toro T^2 .*
- (b) *Se μ é não-trivial e tem interior vazio então para toda seção (segmento) transversal I temos $I \cap \mu$ é um conjunto perfeito (ou seja, é compacto sendo que todos os seus pontos são pontos de acumulação) de interior vazio (magro) em I .*

O Teorema de Schwartz ainda admite a seguinte formulação equivalente:

Teorema 2.2. *Seja X um campo vetorial de classe C^2 numa variedade bidimensional M . Seja γ uma órbita de X . Se $\omega(\gamma)$ não contém pontos singulares, então $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada ou $\omega(\gamma) = T^2$ e neste caso $M = T^2$.*

Diante deste resultado temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1. *Seja X um campo vetorial de classe C^2 em T^2 . Se X não possui pontos fixos, então:*

- (a) *Os conjuntos α -limite e ω -limite de toda órbita de X é uma órbita fechada ou*
- (b) *os conjuntos α -limite e ω -limite de toda órbita de X é T^2 .*

As demonstrações dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontradas em [31].

2.2 Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Estudaremos agora um tipo importante de aplicação, que será bastante utilizada no decorrer deste trabalho. A definição de transformações de intercâmbio (ou troca) de intervalos (ou também I.E.T.'s, abreviação de "interval exchange transformations") é a seguinte:

Definição 2.1. *Seja $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma aplicação definida em todo lugar, exceto possivelmente em um conjunto finito de pontos de \mathbb{R}/\mathbb{Z} ; denotaremos por $\text{Dom}(E)$ o domínio de definição de E . A aplicação E é uma **transformação de troca de intervalos** se for injetiva, continuamente diferenciável e $|E'(x)| = 1$ em todo ponto de $\text{Dom}(E)$.*

Este tipo de transformação será usado para estudarmos as Aplicações de Poincaré; isto é, as aplicações de primeiro retorno, para trajetórias recorrentes não-triviais.

Freqüentemente identificaremos o domínio \mathbb{R}/\mathbb{Z} com $[0, 1)$, ou até mesmo com S^1 , no decorrer deste trabalho, mas isso em nada modifica as propriedades das i.e.t.'s.

Vale ressaltar que na literatura é comum encontrarmos outra definição para transformações de intercâmbio de intervalos que é usada com mais freqüência (vide definição 2.2); neste caso a derivada da aplicação assume sempre o valor 1 além de que a aplicação fica definida em todo o intervalo $[0, 1)$; estas são as transformações mais simples que preservam medida em um intervalo semi-aberto $[0, 1)$.

Sejam $I = [0, 1)$, $m > 1$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $\alpha_i > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. O número α é chamado de *vetor de probabilidade*; usaremos a notação Δ_m para representarmos o conjunto de todos os vetores de probabilidade de \mathbb{R}^m . O conjunto Δ_m é o *simplexo* de dimensão m do \mathbb{R}^{m+1}

Dado $\alpha \in \Delta_m$ definimos os números $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, ..., $\beta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$, ..., $\beta_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j$ e os intervalos $I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i)$, onde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Veja a figura (2.1).

Seja $S(m)$ o conjunto das permutações dos elementos de $\{1, 2, \dots, m\}$; para cada $\tau \in S(m)$, definimos $\alpha^\tau = (\alpha_1^\tau, \alpha_2^\tau, \dots, \alpha_m^\tau) = (\alpha_{\tau(1)}, \alpha_{\tau(2)}, \dots, \alpha_{\tau(m)})$. Pode-se ver que α^τ também é vetor de probabilidade.

Sejam $\beta_{\tau(0)} = 0$, $\beta_{\tau(1)} = \alpha_1^\tau$, $\beta_{\tau(2)} = \alpha_1^\tau + \alpha_2^\tau$, ..., $\beta_{\tau(i)} = \sum_{j=1}^i \alpha_j^\tau$, ..., $\beta_{\tau(m)} = \sum_{j=1}^m \alpha_j^\tau$ e os intervalos $I_{\tau(i)} = [\beta_{\tau(i-1)}, \beta_{\tau(i)})$, onde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Desta forma, α e τ induzem partições $\{I_i\}_{i=1}^m$ e $\{I_{\tau(i)}\}_{i=1}^m$ de $[0, 1)$.

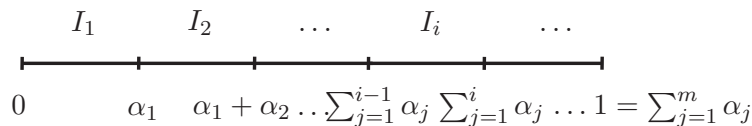


Figura 2.1

Com estas notações, temos a seguinte definição:

Definição 2.2. *Sejam $\alpha \in \Delta_m$, um vetor de probabilidade, e $\tau \in S(m)$, uma permutação. Definimos $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ por*

$$T(x) = Tx = x - \beta_{i-1} + \beta_{\tau(i-1)},$$

se $x \in [\beta_{i-1}, \beta_i)$. A transformação T é chamada uma (α, τ) -Transformação de Troca de Intervalos sobre m intervalos; também escreveremos $T_{\alpha, \tau}$ para designar esta transformação.

Desta forma, uma (α, τ) -transformação de troca de intervalos é uma aplicação bijetiva, de $[0, 1)$ em $[0, 1)$ e que translada cada intervalo I_i . Observe ainda que a derivada desta transformação é igual a 1.

Observação 2.1. *Note que toda rotação é uma (α, τ) -transformação de troca de intervalos pois dado $\theta \in \mathbb{R}$, identificando o círculo com o intervalo $[0, 1)$, temos que a rotação $R_\theta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ coincide com a transformação $T_{\alpha, \pi}$ onde $\alpha = (\theta, 1 - \theta) \in \mathbb{R}^2$ e $\pi = (12)$.*

Observação 2.2. *Podemos definir uma (α, τ) -IET sobre qualquer intervalo semi-aberto $[p, q)$, com $p \leq q$, desde que na definição acima façamos $\sum_{i=1}^m \alpha_i = p - q$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tem todas as entradas positivas.*

Observação 2.3. *Note que os pontos de descontinuidade de T pertencem ao conjunto $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ e T é contínua em β_i se, e somente se, $\tau(i+1) = \tau(i)+1$; isto é, T é descontínua em β_i se, e somente se, $(T\beta_{i-1}, T\beta_i)$ não surgem nesta ordem no conjunto ordenado $\{\beta_{\tau(0)}, \dots, \beta_{\tau(m)}\}$. Veja a figura (2.2).*

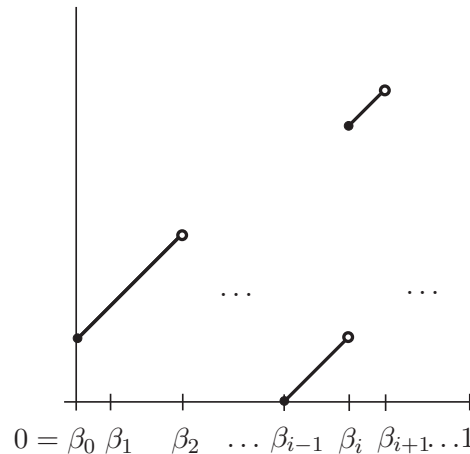


Figura 2.2

Maiores detalhes sobre este tema podem ser encontrados em [25] e [7].

Teorema de Estrutura

Os principais resultados provados neste capítulo são o Teorema de Estrutura 3.1 e a proposição 3.1. O Teorema de Estrutura será bastante útil no sentido de estabelecer como são as órbitas das trajetórias recorrentes não-triviais. Veremos agora algumas definições e lemas afim de provarmos tais resultados.

Definição 3.1. (Relação de Equivalência) *Sejam Σ_1 e Σ_2 segmentos compactos ou círculos que são transversais a φ . Suponha que se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ então $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ é um círculo ou então é um segmento. Denote por $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ a Aplicação de Poincaré induzida por φ . Sejam a e $b \in \Sigma_1$, diremos que a está relacionado com b (e escrevemos $a \sim b$) se, e somente se, existir um subintervalo fechado \overline{pq} de Σ_1 (cujos extremos p e q estão em $\text{Dom}(f)$) contendo $\{a, b\}$ e também existir um disco aberto D_{pq} disjunto de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ e cuja fronteira é*

$$\overline{pq} \cup p\widehat{f}(p) \cup q\widehat{f}(q) \cup \overline{f(p)f(q)},$$

onde $\overline{f(p)f(q)}$ denota um subintervalo fechado de Σ_2 com extremos $f(p)$ e $f(q)$; veja a figura (3.1).

Além disso, o fluxo deve entrar em D_{pq} por \overline{pq} e sair por $\overline{f(p)f(q)}$.

Note que pode acontecer de \overline{pq} e $\overline{f(p)f(q)}$ não serem disjuntos.

Esta relação de equivalência \sim (definida em um subconjunto aberto de Σ_1 que contém $\text{Dom}(f)$) será chamada de *relação \sim associada a f* . Qualquer disco D_{pq} como acima será chamado de *disco associado à terna (p, q, \sim)* .

Exemplo 3.1. *Na figura (3.2) temos pontos a e b tais que $a \sim b$.*

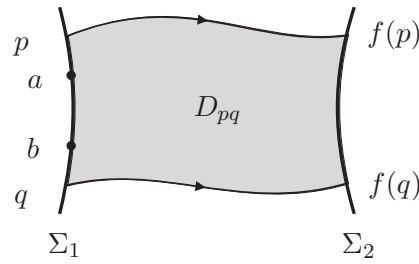


Figura 3.1

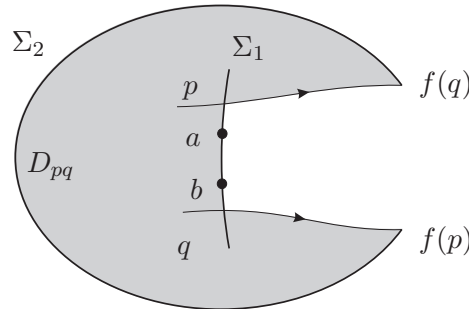


Figura 3.2

Lema 3.1. *Seja $f : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ como na definição 3.1. Então:*

- (a) *A relação \sim associada a f tem finitas classes de equivalência, sendo que estas são subconjuntos abertos e conexos de Σ_1 .*
- (b) *Suponha que τ seja um segmento compacto ou um círculo. Se τ é transversal á φ e disjunto de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ então existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \text{Dom}(f)$ acontece de $x\widehat{f}(x) \cap \tau$ ter menos que λ pontos.*

Demonstração: A prova de (a) pode ser encontrada em [[23], lemas 2.5 e 2.8]. Passemos então à prova de (b).

Seja A uma classe de equivalência de \sim . Para simplificar a argumentação suponha que A é um intervalo com extremos p e q . Certamente existem seqüências monótonas $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ em $A \cap \text{Dom}(f)$ tais que $\lim p_n = p$ e $\lim q_n = q$.

Seja D_n o disco aberto associado a terna (p_n, q_n, \sim) . Podemos escolher D_N tal que

$$\{\text{extremos de } \tau\} \cap (\cup_n D_n) \subset D_N.$$

Observe que τ pode interceptar a fronteira de D_N , no máximo, um número finito de vezes (se a cardinalidade desta intersecção fosse infinita então existiriam infinitos ramos de $\tau \cap D_N$ e assim o segmento τ teria comprimento infinito, contradizendo o fato de ser compacto). Assim, $\tau \cap D_N$ tem finitas componentes conexas.

Como D_N é um disco, se $x \in \text{Dom}(f) \cap A$ então $x\widehat{f}(x)$ deve interceptar uma componente conexa de $\tau \cap D_N$ em, no máximo, um ponto (de fato, caso a intersecção citada não seja um conjunto unitário, é porque existiriam pontos p e q de τ tais que o ângulo formado por $\varphi'(p)$ e $\tau'(p)$ é positivo e o ângulo formado por $\varphi'(q)$ e $\tau'(q)$ é negativo (aqui estamos supondo que o ângulo varia entre $-\pi$ e π), por continuidade, temos que haveria um ponto de tangência, o que é absurdo pois τ é transversal a φ).

Daí, se B for uma componente conexa de $A - \overline{p_N q_N}$, onde $\overline{p_N q_N}$ é um subintervalo fechado de A com extremos p_N e q_N , então dado $x \in B \cap \text{Dom}(f)$ o número cardinal do conjunto $x\widehat{f}(x) \cap \tau$ é finito, sendo o mesmo para todo $x \in B \cap \text{Dom}(f)$. Veja a figura (3.3).

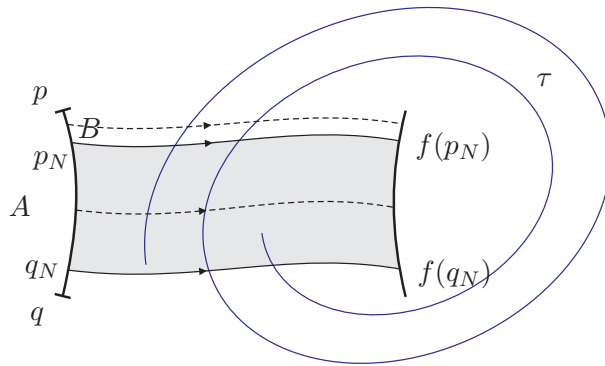


Figura 3.3

Assim, como esta intersecção apresenta finitos pontos em $[p_N, q_N]$ e também finitos pontos em B , temos que esta apresenta finitos pontos em A . Como existem finitas classes de equivalência (pelo item (a)) tomemos λ como sendo o máximo da quantidade de intersecções em cada classe. Isto conclui a demonstração. ■

Definição 3.2. (*A aplicação f_C*): Suponha que γ seja uma trajetória α ou ω -recorrente não-trivial de φ passando através de um círculo (ou segmento) transversal C . Consideremos o conjunto $\mathcal{A}(C)$ formado por todos os intervalos $[a, b]$ de C tais que $[a, b]$ ou é o fecho de uma componente conexa de $C - \overline{\gamma \cap C}$ ou então $a = b$ e a não pertence ao fecho de nenhuma componente conexa de $C - \overline{\gamma \cap C}$ (neste caso a é o limite à direita e à esquerda de seqüências em $\gamma \cap C$). Segue do fato que γ é recorrente não-trivial que $\mathcal{A}(C)$ é uma partição de C .

Seja $f : C \rightarrow C$ a Aplicação de Poincaré induzida por φ .

Sejam $[a, b]$ e $[c, d] \in \mathcal{A}(C)$; escrevemos

$$f_C([a, b]) = [c, d],$$

desde que existam seqüências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ em $\text{Dom}(f) \cap \gamma$ satisfazendo as duas seguintes condições:

(i) $\lim p_n = a, \lim q_n = b, \{\lim f(p_n), \lim f(q_n)\} = \{c, d\}$

(ii) Se \sim é a relação associada a f então $a \sim b \sim p_n \sim q_n$.

Veja a figura (3.4).

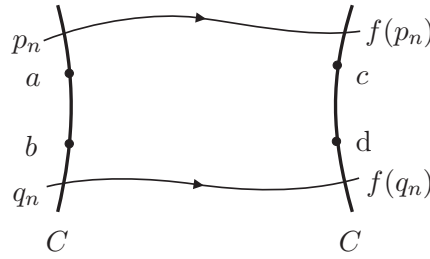


Figura 3.4

Observação 3.1. Na definição acima não estamos excluindo o caso onde $p_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e/ou $q_n = b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos assim definida a aplicação

$$f_C : \mathcal{A}(C) \longrightarrow \mathcal{A}(C)$$

cujos domínios de definição estão geralmente contidos propriamente em $\mathcal{A}(C)$. Da mesma forma, f^{-1} induz a aplicação

$$f_C^{-1} : \mathcal{A}(C) \longrightarrow \mathcal{A}(C).$$

Como $\mathcal{A}(C)$ é uma partição de C , podemos considerar $\mathcal{A}(C)$ com a topologia quociente.

Lema 3.2. Com as condições descritas na definição 3.2, temos que $\mathcal{A}(C) - \text{Dom}(f_C)$ é um conjunto finito.

Demonstração: Seja $[a, b] \in \mathcal{A}(C) - \text{Dom}(f_C)$. Seja \sim a relação associada à Aplicação de Poincaré $f : C \longrightarrow C$ (conforme a definição 3.1). Pelo lema 3.1 as classes de equivalência de \sim são finitos intervalos abertos A_1, A_2, \dots, A_n . Como γ acumula-se nos extremos de $[a, b]$ e $\gamma \cap C \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ temos que existem i e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tais que $a = \lim_k p_k$, $b = \lim_k q_k$, onde $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A_i \cap \gamma$ e $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A_j \cap \gamma$.

Observe que devemos ter $i \neq j$ pois caso contrário $p_k \sim q_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e daí então $[a, b]$ deve pertencer a $\text{Dom}(f_C)$.

Dado o par (A_i, A_j) existem no máximo dois elementos de $\mathcal{A}(C) - \text{Dom}(f_C)$ interceptando $\overline{A_i}$ e $\overline{A_j}$ simultaneamente. De fato, a seqüência $\{p_k\}$ deve se acumular em a por pontos fora do intervalo $[a, b]$, o mesmo acontecendo com a seqüência $\{q_k\}$ e o ponto b ; como A_i e A_j são intervalos, o máximo que pode ocorrer é que exista outro intervalo $[c, d] \in \mathcal{A}(C) - \text{Dom}(f_C)$ para o qual aconteça o mesmo (veja a figura (3.5)), donde verificamos a afirmação feita. Agora, como o conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é finito, temos que $\mathcal{A}(C) - \text{Dom}(f_C)$ também é finito. ■

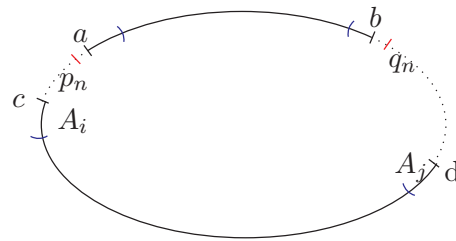


Figura 3.5

Definição 3.3. (*Círculos de um lado*) Uma curva fechada simples γ (isto é, um círculo) é dita de dois lados se esta possui uma vizinhança homeomorfa ao cilindro $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$. Caso contrário, γ é dita de um lado.

Um círculo de um lado possui uma vizinhança homeomorfa a uma faixa de Möbius.

Os dois lemas a seguir encontram-se provados em [[11], lema 2 do parágrafo 1, pg 312] e [[10], lema 5] respectivamente. Tais resultados serão usados na demonstração do lema 3.5.

Lema 3.3. Consideremos uma trajetória recorrente não-trivial γ de φ . Seja Σ um segmento transversal a φ e que passa por γ ; denotemos por $\beta(\Sigma, \gamma)$ o conjunto das curvas fechadas, simples e de dois lados da forma $\widehat{pq} \cup \overline{pq}$, onde \overline{pq} é um segmento de Σ e \widehat{pq} é um sub-arco de γ . Então $\beta(\Sigma, \gamma)$ não é vazio e qualquer círculo $\widehat{pq} \cup \overline{pq}$ de $\beta(\Sigma, \gamma)$ pode ser arbitrariamente aproximado (na topologia C^0) por um círculo que seja transversal a φ . Veja a figura (3.6).

Observação 3.2. Para conseguirmos um círculo tal qual descrito no lema anterior, consideraremos uma vizinhança V de \widehat{pq} , veja a figura (3.6). Tomemos agora um segmento ν começando em um ponto a , da componente conexa relativa a p , de $\Sigma \cap V$, e que corta o arco \widehat{pq} em apenas um ponto; tomemos como extremo de ν um ponto b , da componente conexa de q , de $\Sigma \cap V$. Consideremos agora o círculo $\widehat{ab} \cup \overline{ab}$ e fica assim provada a parte final do lema.

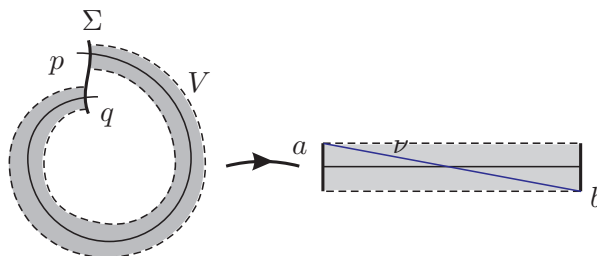


Figura 3.6: Idéia da Demonstração do lema 3.3.

Lema 3.4. Consideremos um círculo C e uma aplicação injetiva e contínua $T : C \rightarrow C$ definida em toda parte, exceto possivelmente em um conjunto finito de pontos. Se T possui semi-órbita positiva densa então T é topologicamente conjugada a uma transformação de intercâmbio de intervalos.

Sejam E uma i.e.t. e $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma aplicação contínua que *cobre* E ; isto é, T é injetiva, seu domínio de definição, $\text{Dom}(T)$, é um subconjunto aberto de \mathbb{R}/\mathbb{Z} e para alguma aplicação de grau um, monótona e contínua, $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tem-se que $h(x) \in \text{Dom}(E)$ e $(E \circ h)(x) = (h \circ T)(x)$, para todo $x \in \text{Dom}(T)$ (veja a figura (3.7)).

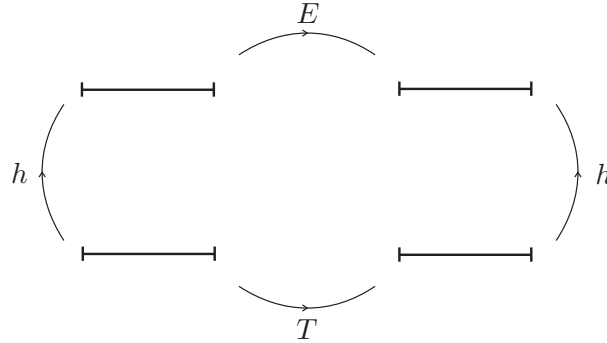


Figura 3.7

Seja N_E a variedade quociente obtida de

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1] - \{(\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E)) \times \{1\}\} \cup \{(\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E^{-1})) \times \{-1\}\}$$

identificando $(x, 1)$ e $(E(x), -1)$, para todo $x \in \text{Dom}(E)$. O par (\mathcal{F}, N_E) , onde \mathcal{F} é uma folheação contínua unidimensional orientada em N_E , é dito uma **suspensão do par** (T, E) , se as duas seguintes condições são satisfeitas:

- (S_1) \mathcal{F} é transversal a $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ e o conjunto das singularidades de \mathcal{F} é vazio ou é compacto e
- (S_2) a aplicação de retorno de Poincaré $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ induzida por \mathcal{F} é $(x, 0) \rightarrow (T(x), 0)$.

Dados E , T e h como acima, podemos dizer também que T cobre E via h .

Nos exemplos do capítulo 1 vimos construções de suspensões deste tipo.

Definição 3.4. (Região de Recorrência) Seja V um subconjunto da variedade M . Dizemos que V é uma região de recorrência se:

- (a) Existe um círculo $C \subset V$ transversal ao fluxo φ , passando através de Ω (onde $\Omega \subset V$ é o fecho da órbita de uma trajetória recorrente não-trivial), e tal que a aplicação de retorno de Poincaré $T : C \rightarrow C$ cobre uma transformação de troca de intervalos $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que tem todas as órbitas densas e que não pode ser estendida continuamente a um subconjunto maior de \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
- (b) O par $(\varphi|_V, V)$ é (topologicamente equivalente a) uma suspensão de (T, E) . Também a fronteira de V , denotada por $\mathcal{F}_r(V)$, pode conter apenas pontos fixos, trajetórias

regulares conectando pontos fixos e finitos segmentos transversais que conectam pontos fixos. Além disso, não existe arco de trajetória de φ localizado em V e conectando dois pontos de $\mathcal{F}_r(V)$.

O próximo resultado será de extrema importância na prova do Teorema de Estrutura 3.1; passemos a ele.

Lema 3.5. *Seja U um subconjunto aberto de M tal que não existe arco de trajetória de φ contido em U e conectando dois pontos da fronteira de U (aqui denotada por $\mathcal{F}_r(U)$). Se γ é uma trajetória recorrente não-trivial disjunta de \overline{U} , então existe um círculo C e um conjunto aberto V contendo C tal que:*

(Est.1)' $U \cap V = \emptyset$ e também, $\overline{\gamma} \cap C = C$ ou então $\overline{\gamma} \cap C$ é um subconjunto de Cantor de C ;

(Est.2)' V é uma região de recorrência associada a $\overline{\gamma}$.

Demonstração: Usando o lema 3.3 podemos construir um círculo $C \subset M - U$, transversal a φ , cortando γ . Seja $f : C \rightarrow C$ a Aplicação de Poincaré induzida por φ ; o argumento principal utilizado nesta demonstração é mostrar que C pode ser construído tal que a aplicação $f_C : \mathcal{A}(C) \rightarrow \mathcal{A}(C)$ (veja definição 3.2) seja (topologicamente conjugada a) uma transformação de troca de intervalos.

Para isto, iremos provar inicialmente que existem no máximo finitos elementos de $\mathcal{A}(C)$ que não satisfazem a seguinte afirmação:

1. Se $[a, b] \in \mathcal{A}(C)$, então $\gamma \cap [a, b]$ é vazio ou então é um conjunto unitário, a saber, $\{a\}$ ou $\{b\}$.

Note que, na consideração anterior, não estamos excluindo o caso onde $a = b$.

Certamente, se $[a, b] \in \mathcal{A}(C)$, com $a \neq b$, satisfaz $[a, b] \cap \gamma = \{a, b\}$ então podemos assumir que $b = f^N(a)$ para algum inteiro positivo N . Daí, existe $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ tal que $(f_C)^n$ não está definido em $[a, b]$; de fato, caso contrário, $\{b\} \subset (f_C)^N([a, b]) \cap [a, b]$ deve implicar que $(f_C)^N([a, b]) = [a, b]$ contradizendo o fato de γ não ser periódica. Similarmente, existe $\hat{n} \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ tal que $(g_C)^{\hat{n}}$ não está definida em $[a, b]$, onde $g = f^{-1}$. Assim, a f_C -órbita de tal elemento $[a, b]$ é finita. Pelo lema 3.2 temos que $(\mathcal{A}(C) - \text{Dom}(f_C)) \cup (\mathcal{A}(C) - \text{Dom}(g_C))$ é um conjunto finito. Estes fatos provam a afirmação feita acima.

Considere agora um segmento aberto $\Sigma_1 \subset C$ tal que Σ_1 intersekte γ . Podemos tomar $\Gamma_1 \in \beta(\Sigma_1, \gamma)$ tal que $\Gamma_1 \cap U = \emptyset$. Se Σ_1 é disjunto dos elementos de $\mathcal{A}(C)$ que não verificam o item 1, e \tilde{C} é um círculo muito próximo a Γ_1 e transversal a φ , então qualquer elemento de $\mathcal{A}(\tilde{C})$ irá satisfazer o item 1 (a escolha de Σ_1 e \tilde{C} como acima é possível pelo lema 3.3). De fato, se não verificasse o item 1 é porque existe $[a, b] \in \mathcal{A}(\tilde{C})$ tal que $\gamma \cap [a, b] = \{a, b\}$; assim existem $a' = \gamma_a^- \cap \Sigma_1$ e $b' = \gamma_b^- \cap \Sigma_1$ tais que $a', b' \in \gamma \cap \Sigma_1$ (pois φ é contínuo), daí como o fluxo é transversal em Σ_1 temos que $[a', b'] \in \mathcal{A}(C)$ não verifica o item 1; isto é um absurdo pois Σ_1 foi escolhido de modo a verificar tal afirmação (veja a figura (3.8)).

Assim, de agora em diante, assumiremos que :

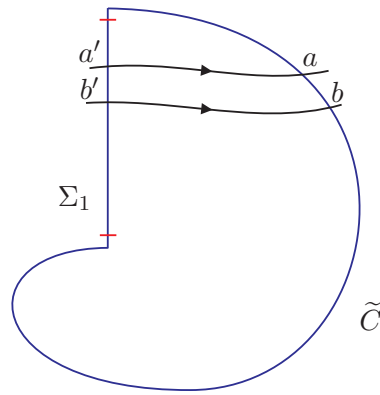


Figura 3.8

2. Existe um círculo C transversal a φ , cortando γ , tal que o ítem 1 é satisfeito.

Provemos agora que:

3. Se $\bar{\gamma} \cap C$ contém um subintervalo A de C então existe um círculo \tilde{C} próximo a $\Gamma_1 \in \beta(A, \gamma)$ (onde $\Gamma_1 = \overline{pq} \cup \widehat{pq}$ com p e $q \in A$) que seja transversal a φ e com $\bar{\gamma} \cap \tilde{C} = \tilde{C}$.

De fato, sem maiores problemas, utilizando um processo já descrito acima, podemos construir o círculo transversal \tilde{C} ; consideremos agora vizinhança V_p de p em A (veja a figura (3.9)), como γ é densa em V_p , temos que γ é densa em \tilde{C} e isso prova que $\bar{\gamma} \cap \tilde{C} = \tilde{C}$.

Podemos então afirmar que existe um círculo C tal que:

4. $\mathcal{A}(C)$ é homeomorfo a C .

De fato, quando $\bar{\gamma} \cap C$ tem interior não-vazio em C então cada elemento de $\mathcal{A}(C)$ nesta intersecção é um ponto e daí utilizamos o ítem 3 temos que $\mathcal{A}(C)$ é homeomorfo a C (pois cada classe em $\mathcal{A}(C)$ é um ponto de C).

Quando $\bar{\gamma} \cap C$ tem interior vazio em C , então $\bar{\gamma} \cap C$ é um Conjunto de Cantor (pois é compacto, totalmente desconexo e perfeito). Neste caso, identificando C com \mathbb{R}/\mathbb{Z} (via um homeomorfismo) e tomando uma função de Cantor (veja [13]) $\mathcal{L} : C \rightarrow C$ que é uma aplicação monótona e contínua de grau um e que é constante em um subintervalo fechado de C se, e somente se, este intervalo é o fecho de uma componente conexa de $C - \bar{\gamma} \cap C$; observamos que o espaço quociente C/\mathcal{L} é homeomorfo a C ; daí, como C/\mathcal{L} é exatamente $\mathcal{A}(C)$ temos que o ítem 4 é verificado.

Agora, seja $\sigma \in \mathcal{A}(C)$ interceptando γ . Pelo ítem 2 e do fato que qualquer semi-trajetória positiva de γ intercepta C infinitas vezes, segue que $(f_C)^n$ está definida em σ para todo $n \in \mathbb{N}$. Estes fatos implicam que:

5. $\{(f_C)^n(\sigma) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é uma semi-órbita densa em $\mathcal{A}(C)$.

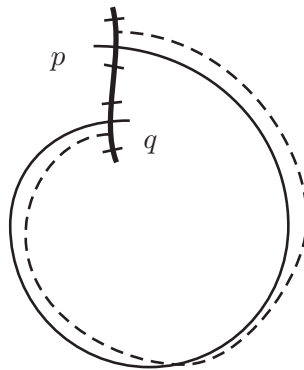


Figura 3.9

Pelo ítem 2 temos que f_C é injetiva; também pode-se ver que f_C é contínua. Daí, o lema 3.2 e o ítem 5 nos permitem aplicar o lema 3.4 para concluir que:

6. f_C é (topologicamente conjugada a) uma transformação de troca de intervalos $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que tem uma órbita densa.

Algumas das propriedades desta aplicação E são as seguintes (veja [15]):

- Qualquer de suas órbitas é densa ou então é finita;
- Possui finitas órbitas finitas;
- O ponto $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pertence a uma órbita finita de E se, e somente se, existem inteiros positivos n e m tais que, tanto E^n , quanto E^{-m} não estão definidas para x .

Seja $\widetilde{\Sigma}_2$ um intervalo aberto de $\mathcal{A}(C)$ disjunto das órbitas finitas de f_C . Então:

7. Qualquer órbita de f_C encontrando $\widetilde{\Sigma}_2$ é densa. Mais ainda, γ intercepta o subintervalo Σ_2 de C , gerado por $\widetilde{\Sigma}_2$, infinitas vezes.

Seja $\Gamma_2 \in \beta(\Sigma_2, \gamma)$. Segue de 7 que se \widehat{C} for um círculo transversal a φ e suficientemente próximo de Γ_2 , então qualquer órbita de $\widehat{f}_{\widehat{C}}$ é densa em $\mathcal{A}(\widehat{C})$, onde $\widehat{f} : \widehat{C} \rightarrow \widehat{C}$ é a Aplicação de Poincaré induzida por φ .

Resumindo, podemos construir um círculo C tal que:

8. f_C é uma transformação de troca de intervalos tendo toda órbita densa e $f : C \rightarrow C$ cobre f_C via a aplicação quociente $h : C \rightarrow \mathcal{A}(C)$.

Temos então que $C - \overline{\gamma} \cap C$ é denso em C ou então $\overline{\gamma} \cap C$ contém um segmento aberto Σ_3 de C ; neste caso, procedendo como acima, podemos construir um novo círculo C' transversal a φ e próximo a um elemento de $\beta(\Sigma_3, \gamma)$. Daí, $\overline{\gamma} \cap C' = C'$.

Desta forma podemos construir C tal que não apenas 8 seja satisfeita, mas também que

9. $C \cap U = \emptyset$ e também $\overline{\gamma} \cap C = C$ ou então $\overline{\gamma} \cap C$ é um conjunto de Cantor de C .

Da forma como fora construída a aplicação f_C temos que:

10. A transformação de troca de intervalos f_C não pode ser estendida continuamente a um subconjunto maior de $\mathcal{A}(C)$.

Iremos agora construir uma suspensão de (f, f_C) ; para isso iremos utilizar os conceitos introduzidos na definição 3.1. Seja \sim (respectivamente \sim') a relação associada a $f : C \rightarrow C$ (respectivamente a $f^{-1} : C \rightarrow C$). Pelo lema 3.1 a relação \sim (respectivamente \sim') possui finitas classes de equivalência, a saber, A_1, A_2, \dots, A_n (respectivamente A'_1, A'_2, \dots, A'_n). Podemos supor que dado $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $x \in A_i \cap \text{Dom}(f)$ temos $f(x) \in A'_i$.

Segue de 10 e da definição de \sim que:

11. Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe uma componente conexa I_i de $\text{Dom}(f_C)$ tal que $I_i \subset h(A_i) \subset \overline{I_i}$ e $f_C(I_i) \subset h(A'_i) \subset \overline{f_C(I_i)}$.

Assumiremos de agora em diante que $n \geq 2$; isto implica que se p e $q \in A_i \cap \text{Dom}(f)$ então existe um único disco D_{pq} associado a terna (p, q, \sim) .

Seja $V(A_i)$ a união de $A_i \cup A'_i$ e todos os discos aberto D_{pq} tais que p e $q \in A_i \cap \text{Dom}(f)$. Então afirmamos que:

12. Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos que $V(A_i) - A_i \cup A'_i$ é um disco aberto cuja fronteira contém $A_i \cup A'_i$. Além disso, $V(A_i)$ é disjunto de U .

De fato, pelo modo como fora construído o conjunto $V(A_i)$, precisamos mostrar apenas que $V(A_i) \cap U = \emptyset$; para tanto é suficiente mostrar que, para quaisquer pontos p e $q \in \text{Dom}(f) \cap A_i$ temos $(\overline{D_{pq}} - D_{pq}) \cap U = \emptyset$. Observe que $p\widehat{f}(p) \cup q\widehat{f}(q)$ é disjunto de U pois $\{p, q, f(p), f(q)\} \cap U = \emptyset$ e não existe arco de trajetória contido em U e conectando dois pontos de $\mathcal{F}_r(U)$.

Como $C \cap U = \emptyset$ tem-se que $(\overline{D_{pq}} - D_{pq}) \cap U = \emptyset$ o que implica 12.

Seja $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; afirmamos que:

13. Se a for um extremo de A_i (respectivamente A'_i) então γ_a^+ (respectivamente γ_a^-) está contida em $\mathcal{F}_r(V(A_i)) - U$ e $\omega(\gamma_a^+)$ (respectivamente $\alpha(\gamma_a^-)$) é um ponto fixo. Mais ainda, o complemento destas semi-trajetórias em $\mathcal{F}_r(V(A_i))$ deve conter apenas pontos fixos e trajetórias regulares conectando tais pontos.

De fato, seja a um extremo de A_i . A demonstração que $\gamma_a^+ \subset \mathcal{F}_r(V(A_i)) - U$ é similar a dada em 12. Suponha agora que $\omega(\gamma_a^+)$ contém um ponto regular p . Seja Σ um intervalo compacto transversal a p e tal que $p \in \Sigma - \{\text{extremos de } \Sigma\}$. Como $(\gamma_a^+ - \{a\}) \cap C = \emptyset$ (pois a é extremidade de A_i e daí f não está definida em a), a trajetória γ_a^+ encontra Σ infinitas

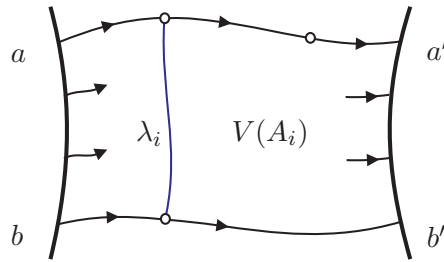


Figura 3.10

vezes; usando o ítem (b) do lema 3.1 obtemos uma contradição. Assim, $\omega(\gamma_a^+)$ é um ponto fixo. O restante da prova de 13 é feito similarmente.

Sejam $\tilde{V}(A_i) = V(A_i) \cup \gamma_a^+ \cup \gamma_b^+ \cup \gamma_{a'}^- \cup \gamma_{b'}^-$ e λ_i sendo curvas simples e contínuas mergulhadas em $V(A_i) - A'_i \cup A_i$ que conectam os pontos fixos de $\omega(\gamma_a^+)$ e $\omega(\gamma_b^+)$ (respectivamente $\alpha(\gamma_{a'}^-)$ e $\alpha(\gamma_{b'}^-)$), onde a e b (respectivamente a' e b') são os extremos de A_i (respectivamente A'_i). Seja $\tilde{V} = \cup_{i=1}^n \tilde{V}(A_i)$. Temos então que:

14. Se $C = \cup_{i=1}^n \overline{A_i} = \cup_{i=1}^n \overline{A'_i}$, então \tilde{V} é um conjunto aberto e $(\varphi|_{\tilde{V}}, \tilde{V})$ é uma região de recorrência.

De fato, neste caso, $\tilde{V} - \cup_{i=1}^n \lambda_i$ é homeomorfo a $C \times (-1, 1)$ e então, usando o ítem 13 e o fato que f cobre f_C , temos que \tilde{V} pode ser vista como uma variedade obtida de $C \times [-1, 1] - \{(C - \text{Dom}(f_C)) \times \{1\} \cup (C - \text{Dom}(f_C^{-1})) \times \{-1\}\}$ identificando cada intervalo $I_i \times \{1\}$ com o intervalo $f_C(I_i) \times \{-1\}$, onde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Diante destas condições (veja 8, 10 e 13) pode-se ver que $(\varphi|_{\tilde{V}}, \tilde{V})$ é a região de recorrência requerida neste lema.

15. Finalmente, se $(C - \cup_{i=1}^n \overline{A_i}) \cup (C - \cup_{i=1}^n \overline{A'_i}) \neq \emptyset$.

Neste caso, $\mathcal{F}_r(\tilde{V}) \cap \tilde{V}$ consiste de finitos segmentos $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ que são da forma $B \cup \gamma_a^+ \cup \gamma_b^+$ ou então da forma $B' \cup \gamma_{a'}^- \cup \gamma_{b'}^-$, onde B (respectivamente B') é o fecho de uma componente conexa de $C - \cup_{i=1}^n \overline{A_i}$ (respectivamente $C - \cup_{i=1}^n \overline{A'_i}$) com extremos c e d . Para cada Σ_j podemos escolher um disco aberto $D_j \supset \Sigma_j$ tal que $\mathcal{F}_r(D_j) \cap (M - \tilde{V})$ é um arco transversal a φ que conecta os extremos de Σ_j (que são pontos fixos) e a folheação $\varphi|_{D_j}$ é, a menos de orientação, a da figura (3.11).

Podemos então escolher estes discos suficientemente pequenos (de forma a que $D_i \cap D_j = \emptyset$ se $i \neq j$ com i e $j \in \{1, 2, \dots, k\}$) tal que, se $V = \tilde{V} \cup (\cup_{j=1}^k D_j)$, por um argumento similar ao dado em 14, tenhamos que $(\varphi|_V, V)$ é a região de recorrência desejada para provarmos este lema. ■

Definição 3.5. *Uma variedade de tipo finito é uma variedade que possui grupo fundamental finito.*

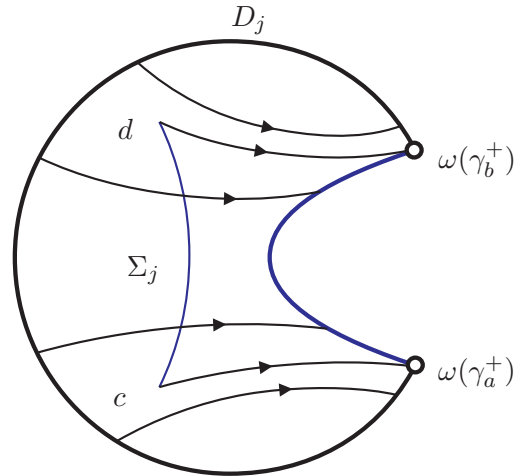


Figura 3.11

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em [[24], lema 1]

Lema 3.6. *Seja M uma variedade de tipo finito, então existe um inteiro positivo N tal que, se $n \geq N$ e $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \subset M$ são curvas fechadas e simples duas a duas disjuntas que não limitam discos, então existem duas delas cercam um cilindro de M .*

Teorema 3.1. (Teorema de Estrutura) *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo contínuo em uma variedade bidimensional M que é compacta e de classe C^∞ . O fecho das trajetórias recorrentes não-triviais de φ determina finitos subconjuntos compactos φ -invariantes de M , a saber $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, tais que qualquer trajetória recorrente não-trivial de φ é densa em algum dos Ω_i . Além disso, existem subconjuntos abertos e conexos de M (de tipo finito) denotados por V_1, V_2, \dots, V_m tais que as seguintes condições são verificadas:*

(Est.1) *Se $i \neq j$ então $V_i \cap V_j = \emptyset$. Além disso, V_i contém todas as trajetórias recorrentes não-triviais encontrando Ω_i .*

(Est.2) *Cada V_i é uma região de recorrência associada a Ω_i .*

(Est.3) *Se V'_i é alguma outra região de recorrência associada a Ω_i , então V_i e V'_i são homeomorfas. Além disso, quando φ tem finitos pontos fixos e não apresenta outra região de recorrência associada a Ω_i contendo menos pontos fixos que V_i (respectivamente V'_i), as folheações $(\varphi|_{V_i}, V_i)$ e $(\varphi|_{V'_i}, V'_i)$ são topologicamente equivalentes.*

(Est.4) *O círculo $C_i \subset V_i$ pode ser tomado tal que $\Omega_i \cap C_i = C_i$ ou tal que $\Omega_i \cap C_i$ é um Conjunto de Cantor.*

Demonstração: Para obter as regiões de recorrência duas a duas disjuntas V_1, V_2, \dots, V_m deste teorema podemos usar recursivamente o lema 3.5. Pelo lema 3.6 aplicado aos círculos

$C_i \subset V_i$, podem haver apenas finitas de tais regiões de recorrência. Daí ficam provados os itens (Est.1) e (Est.2). Note que, com isso também ficam definidas as aplicações T_i e E_i .

Agora, dado V'_i como em (Est.3), sejam $C'_i \subset V'_i$, T'_i e E'_i objetos como C_i , T_i e E_i que surgem na demonstração de (Est.2), respectivamente. Para provarmos (Est.3) observemos que (veja definição 3.2) $(T_i)_{C_i} : \mathcal{A}(C_i) \longrightarrow \mathcal{A}(C_i)$ (respectivamente $(T'_i)_{C'_i} : \mathcal{A}(C'_i) \longrightarrow \mathcal{A}(C'_i)$) e E_i (respectivamente E'_i) são topologicamente conjugadas.

Usando isto podemos ver que qualquer órbita de E_i determina uma única órbita em E'_i de tal forma que:

- (1) Cada $p \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E_i)$ (respectivamente $q \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}((E_i)^{-1})$); está em correspondência com um único $p' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E'_i)$ (respectivamente $q' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}((E'_i)^{-1})$); e
- (2) Para $p \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E_i)$ e $q \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \text{Dom}(E_i^{-1})$ existe um intervalo $I \in \text{Dom}(E_i)$ tal que $p \in \overline{I}$ e $q \in \overline{E_i(I)}$ se, e somente se, para algum intervalo $I' \subset \text{Dom}(E'_i)$ tivermos que $p' \in \overline{I'}$ e $q' \in \overline{E'_i(I')}$.

Pela definição de suspensão, temos que (1) e (2) implicam que V_i e V'_i são homeomorfos. A demonstração do restante de (Est.3) pode ser encontrada em [20] e [5]. Veja também [[12], teorema B].

A prova de (Est.4) é a mesma dada em (Est.1)' do lema 3.5. ■

Corolário 3.1. *Com as mesmas condições e notações do Teorema de Estrutura 3.1, denotemos por $\text{Rec}(C_i)$ a união dos arcos $p\widehat{T}_i(p)$ tais que $p \in \Omega_i \cap \text{Dom}(T_i)$ ou então p pertence a uma componente conexa de $C_i - \Omega_i$ que está contida em $\text{Dom}(T_i)$. Se Ω_i é um conjunto minimal não-trivial, então:*

- (a) *O conjunto $\text{Rec}(C_i)$ é uma variedade (topológica) bidimensional, conexa e compacta cuja fronteira, denotada por $\partial(\text{Rec}(C_i))$, (quando não vazia) é constituída de círculos formados por finitos arcos de trajetória unidos pelo mesmo número de subintervalos de C_i ;*
- (b) *$\Omega_i \subset \text{Rec}(C_i) \subset V_i$ e não existe arco de trajetória de φ contido em $\text{Rec}(C_i) - \partial(\text{Rec}(C_i))$ e conectando dois pontos de $\partial(\text{Rec}(C_i))$.*

Demonstração: Por causa da estrutura de $\mathcal{F}_r(V_i)$ e como $\Omega_i \subset V_i$, podemos ver que se o intervalo $I \subset \text{Dom}(T_i)$ estiver no fecho de uma componente conexa de $C_i - \Omega_i$ então $\{p\widehat{T}_i(p) \mid p \in I\} \subset V_i$ (pois p vai pertencer ao fecho de alguma classe de equivalência A_j); assim $\text{Rec}(C_i) \subset V_i$.

Como $\Omega_i \cap C_i$ é compacto, este está contido em finitas componentes conexas de $\text{Dom}(T_i)$ (que são conjuntos abertos). Desta forma existe um conjunto Σ constituído de finitos intervalos fechados de $C_i \cap \text{Dom}(T_i)$ tal que $\text{Rec}(C_i) = \cup_{p \in \Sigma} p\widehat{T}_i(p)$. Usando este fato e o Teorema de Estrutura a prova pode ser completada. Veja a figura (3.12). ■

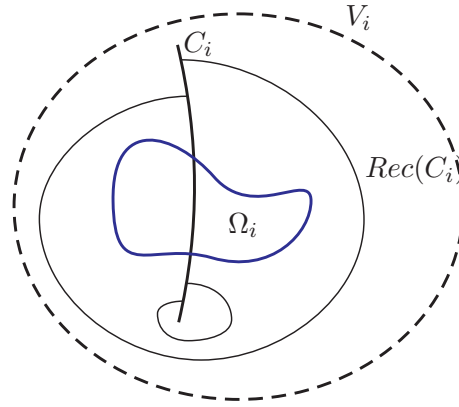


Figura 3.12

Proposição 3.1. *Vamos assumir que φ tenha pontos fixos. Sejam $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ e C_1, C_2, \dots, C_m como no Teorema de Estrutura. Então, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe uma subvariedade bidimensional M_i (de M) que é compacta, C^0 e com fronteira; e também existe um subconjunto Γ_i , formado por finitos arcos compactos dois a dois disjuntos que são transversais a φ satisfazendo o seguinte:*

- (i) $M_1 \cap (\cup_{j=1}^m C_j) = \emptyset$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ temos que $M_{i+1} \subset \text{int}(M_i)$ e ∂M_i é formada de círculos de dois lados; tais círculos são constituídos de finitos segmentos transversais conectados uns aos outros pelo mesmo número de arcos de trajetória;
- (ii) $\cap_{i=1}^{\infty} M_i = F$ é o conjunto dos pontos fixos de φ ;
- (iii) Seja $M_0 = M$ e $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^m C_i$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ temos que $\Gamma_i \cap \partial M_i$ é a união de todos os segmentos transversais a φ contidos em ∂M_i e $\Gamma_i - (\Gamma_i \cap \partial M_i)$ está contido no interior de $M_{i-1} - M_i$;
- (iv) Se $\Gamma = \cup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$, então tanto a Aplicação de Poincaré $T : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ quanto sua inversa $T^{-1} : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, (induzidas por φ) estão definidas em toda parte. Mais ainda, para $\delta \in \{-1, 1\}$ temos que T^δ restrita a uma componente conexa de Γ é descontínua em finitos pontos;
- (v) Para todo $i \in \mathbb{N}$ existe um inteiro positivo λ_i tal que, caso \widehat{pq} seja um arco de trajetória encontrando $\cup_{j=1}^m C_j$ exatamente nos seus extremos p e q , então $\widehat{pq} \cap \Gamma_i$ tem no máximo λ_i elementos.

Demonstração: Iremos provar inicialmente que:

1. Existe uma família enumerável $\{V_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ de subconjuntos abertos de M tais que:

$$(1a) \quad M - \cup_{i=1}^m C_i \supset \overline{V_1} \supset V_1 \supset \overline{V_2} \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \overline{V_{n+1}} \supset V_{n+1} \supset \dots \supset F.$$

(1b) Para todo $i \in \mathbb{N}$ temos que $d(F, M - V_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \min\{\frac{1}{i}, d(F, M - V_i)\}$ e $\partial V_i = \overline{V_i} - V_i$ é formada de finitos círculos de dois lados que são dois a dois disjuntos.

De fato, seja $2\epsilon_1 \leq \min\{1, d(F, \cup_{i=1}^m C_i)\}$. Como F é compacto, se ϵ_1 é suficientemente pequeno existem finitas bolas geodésicas abertas B_1, B_2, \dots, B_{k_1} , fortemente conexas com o mesmo raio ϵ_1 centradas em pontos de F e tais que $F \subset \cup_{i=1}^{k_1} B_i = V_1$.

Certamente $\partial V_1 = \overline{V_1} - V_1$ pode ser escolhida de forma a ser constituída por curvas fechadas, simples, de dois lados e contínuas que se interceptam apenas tangencialmente e em, no máximo, finitos pontos.

Mantendo o centro das bolas B_1, B_2, \dots, B_{k_1} fixado mas reduzindo um pouco seu raio obtemos novas bolas, ainda denotadas por B_1, B_2, \dots, B_{k_1} , que cobrem F mas agora ∂V_1 é formada de círculos de dois lados que são dois a dois disjuntos. Seguindo este processo e diminuindo o raio das bolas a um fator que é menor que $\frac{1}{2} \min\{\frac{1}{i}, d(F, M - V_i)\}$ podemos construir indutivamente a família $\{V_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ requerida para provarmos o ítem 1.

Usando caixas de fluxo tubulares centradas em pontos de ∂V_i , $i \in \mathbb{N}$, aproximemos cada círculo de ∂V_i por um círculo contido em $V_i - \overline{V_{i+1}}$ e formado por finitos segmentos transversais a φ conectados um ao outro por arcos de trajetórias; teremos que a união de todos estes novos círculos formam a fronteira de uma variedade M_i que é compacta, bidimensional e satisfaz $\overline{V_{i+1}} \subset \text{Int}(M_i) \subset \overline{M_i} \subset V_i$.

Usando o ítem 1 pode-se ver que a família $\{M_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ satisfaz (i) e (ii) desta proposição.

Afirmamos agora que:

2. Para todo $i \in \mathbb{N}$, a união de todas as órbitas fechadas de φ contidas em $\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$ é um conjunto compacto.

De fato, seja $\{\gamma_n\}$ uma seqüência de órbitas fechadas em $M_{i-1} - M_i$ que se acumula em uma órbita γ . Pela construção de ∂M_i , com $i \in \mathbb{N}$, temos que $\cup_n \gamma_n$ é disjunta de $\cup_{i=1}^m C_i$, e daí a órbita γ também é disjunta de $\cup_{i=1}^m C_i$. Desta forma, os conjuntos minimais de $\omega(\gamma)$, estando contidos em $\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$, devem ser órbitas fechadas. Isto implica que $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada. Como ainda temos que γ é acumulada por órbitas fechadas, devemos ter que $\omega(\gamma_n) = \gamma$ é uma órbita fechada. Conseqüentemente, como $\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$ é compacto, fica provado o ítem 2.

Dados $i \in \mathbb{N}$ e uma órbita fechada $\gamma \subset \overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$, podemos escolher um par $(V_\gamma, \Sigma_\gamma)$ formado por uma vizinhança aberta V_γ de γ e um intervalo compacto Σ_γ transversal a φ passando por γ (veja a figura (3.13)) e tal que:

3. Σ_γ está contido no interior de $M_{i-1} - M_i$. Mais ainda, para todo $p \in V_\gamma$ existem t_1 e $t_2 \in (0, \infty)$ tais que $\varphi(t_1, p)$ e $\varphi(-t_2, p)$ pertencem a Σ_γ .

Pela compacidade provada no ítem 2, dado $i \in \mathbb{N}$ existem finitos pares $(V_{i1}, \Sigma_{i1}), (V_{i2}, \Sigma_{i2}), \dots, (V_{in_i}, \Sigma_{in_i})$ como acima, tais que $\cup_{j=1}^{n_j} V_{ij}$ contém o conjunto das órbitas

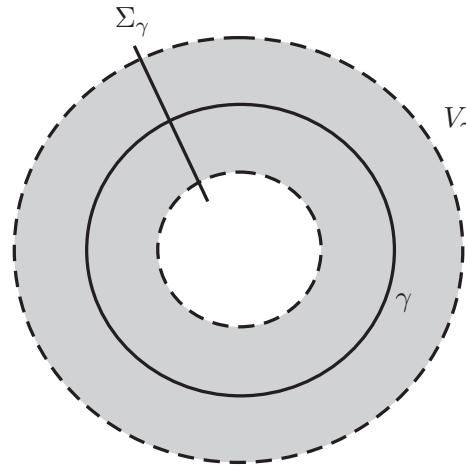


Figura 3.13

fechadas de φ contidas em $\overline{M_{i-1} - M_i}$. Seja $\Gamma_i = (\cup_{j=1}^{n_i} \Sigma_{ij}) \cup \{\text{segmentos transversais a } \varphi \text{ contidos em } \partial M_i\}$.

Dado $p \in \Gamma = \cup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$, o conjunto ω -limite de p (respectivamente o conjunto α -limite de p) contém um ponto fixo ou uma órbita fechada ou então um ponto recorrente não-trivial; em qualquer caso, pela construção de Γ , toda semi-trajetória positiva (respectivamente negativa) começando em p deve retornar a Γ (veja a figura (3.14)).

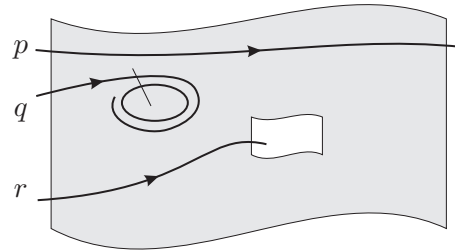


Figura 3.14: $\omega(p)$ é trajetória recorrente não-trivial; $\omega(q)$ é órbita periódica; $\omega(r)$ é ponto fixo.

Isto implica (iii) e (iv) desta proposição. O ítem (v) segue do lema 3.1 e do fato que cada Γ_i possui finitas componentes conexas. ■

Decomposição em Caixas de Fluxo Suavisáveis

Neste capítulo iremos buscar formas de "retalhar" a superfície em caixas de fluxo nas quais o fluxo poderá ser suavizado. Os resultados principais aqui apresentados são as proposições 4.1 e 4.2; porém antes iremos precisar de alguma terminologia.

Definição 4.1. (*μ -coordenadas*) *Seja σ um segmento orientado e fechado, começando em a e terminando em b . Uma medida μ na álgebra de Borel de σ será chamada de **medida distinguida em σ** se $0 < \mu(\sigma) < \infty$ e a aplicação $h : \sigma \rightarrow [0, \mu(\sigma)]$ dada por $h(x) = \mu(\overline{ax})$ for um homeomorfismo, onde \overline{ax} é um subsegmento de σ com extremos a e x . Esta aplicação h será chamada de **μ -homeomorfismo de σ** .*

*Seja $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i \in I}$ tal que as componentes conexas de cada σ_i , com $i \in I$, são círculos ou segmentos. Diremos que μ é uma **medida distinguida na família Σ** se, para todo $i \in I$, e todo segmento orientado e fechado $\lambda \subset \sigma_i$ tivermos que $\mu|_\lambda$ é uma medida distinguida em λ . Quando a família tem apenas um termo então identificamos a família com este termo.*

Seja B uma caixa de fluxo de φ tendo lados transversais A_1 e A_2 (note que, por definição, não temos singularidades no interior de B). Seja $\tau : A_1 \rightarrow A_2$ a Aplicação de Poincaré induzida por $\varphi|_B$ (restrição de φ a B). Suponha também que $\{A_1, A_2\}$ é provido com a medida distinguida μ . Denotemos por h_1 e h_2 os μ -homeomorfismos de A_1 e A_2 respectivamente. A aplicação τ da caixa de fluxo B é dita μ -suave (respectivamente μ - C^1) se a expressão μ -

coordenada de τ dada por

$$\tilde{\tau} = h_2 \circ \tau \circ h_1^{-1} : [0, \mu(A_1)] \longrightarrow [0, \mu(A_2)],$$

for suave (respectivamente de classe C^1). Veja a figura (4.1).

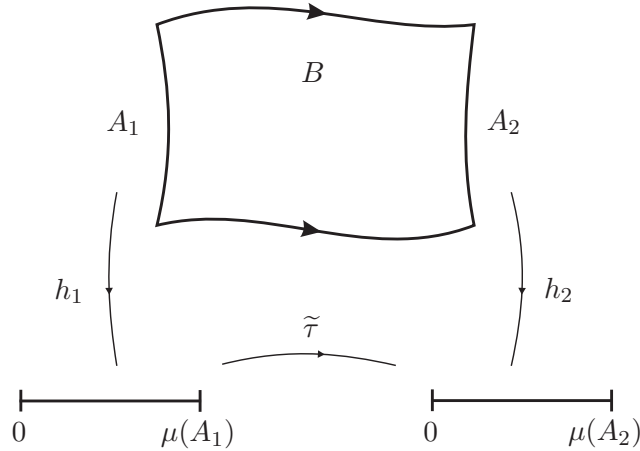


Figura 4.1

Sejam f e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações suaves, onde I é um intervalo de \mathbb{R} . Definimos

$$\|f\|_0 = \sup\{|f(x)|; x \in I\}$$

e para $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_k = \max\{\|f\|_0, \|f'\|_0, \dots, \|f^{(k)}\|_0\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, dizemos que a aplicação f está ϵ -próxima de g , na topologia C^k , se $\|f - g\|_k \leq \epsilon$.

Sejam T e Γ como na proposição 3.1, temos então a seguinte definição.

Definição 4.2. (τ -Seqüências) Fixemos $\tau \in \{T, T^{-1}\}$. Uma seqüência finita $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ de segmentos abertos de Γ , dois a dois disjuntos, é chamada de τ -seqüência se quaisquer dois termos consecutivos Σ_i e Σ_{i+1} desta seqüência satisfazem $\tau(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$.

Seja $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ uma τ -seqüência, então:

- (a) Σ é dita *atratora* se $\tau^n(\Sigma_1) \subset \Sigma_1$, $\tau^n|_{\Sigma_1}$ admite extensão contínua a $\overline{\Sigma_1}$ e esta extensão tem um único ponto fixo que é um atrator e está situado em um dos extremos de Σ_1 .
- (b) Σ é dita *periódica* se $\tau(\Sigma_n) = \Sigma_1$ e cada ponto $p \in \Sigma_1$ for um ponto fixo de τ^n .
- (c) Σ é dita *errante* se Σ_1 for φ -errante.
- (d) Quando Σ é atratora, o segmento semi-aberto $\Sigma_1 - \tau(\Sigma_{n-1})$ será chamado um *domínio fundamental* de Σ . Veja a figura (4.2).

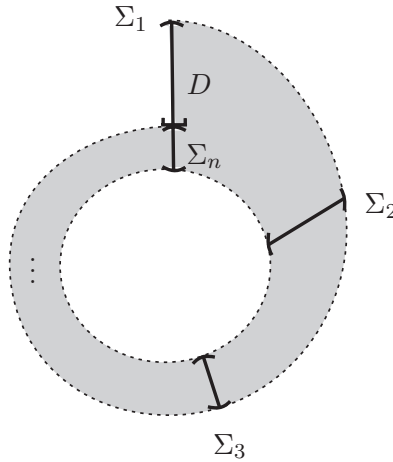


Figura 4.2: τ -seqüência atratora. D é o domínio fundamental.

(e) A união de todos os termos de Σ será denotada por $span(\Sigma)$.

Lema 4.1. *Diante às condições e notações do Teorema de Estrutura 3.1 e corolário 3.1, suponhamos que $\Omega_{l+1}, \Omega_{l+2}, \dots, \Omega_{l+v}$ sejam conjuntos minimais não-triviais de φ . Dado $i \in \{l+1, l+2, \dots, l+v\}$, se V_i^1 (respectivamente $V_i^{(-1)}$) denota a união dos segmentos transversais de $\partial(Rec(C_i))$ por onde as trajetórias entram (respectivamente saem) em $Rec(C_i)$ e $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida em $V_i^1 \cup V_i^{(-1)}$, o "portão" de $Rec(C_i)$, então existe uma medida distinguida μ em C_i estendendo $\tilde{\mu}$ e tal que, em μ -coordenadas,*

$$T_i|_{(C_i - V_i^{(-1)})} : (C_i - V_i^{(-1)}) \longrightarrow C_i$$

é de classe C^1 e tem derivada igual a 1 em todos os extremos das componentes conexas de $C_i - V_i^{(-1)}$ (onde T_i é Aplicação de Poincaré).

Demonstração: Segue do Teorema de Estrutura e do corolário 3.1 que :

1. V_i^1 e $V_i^{(-1)}$ têm o mesmo número de componentes conexas (fechadas). Também, se $V_{i1}^\delta, V_{i2}^\delta, \dots, V_{is_i}^\delta$ denotam as componentes conexas (fechadas) de V_i^δ ($\delta \in \{1, -1\}$) então, para todo $(n, j) \in \mathbb{N} \times \{1, 2, \dots, s_i\}$, a aplicação $T^{n\delta}$ está definida em V_{ij}^δ . Veja a figura (4.3).

Seja B_i o conjunto dos elementos $[a, b] \in \mathcal{A}(C_i)$ tais que $[a, b] \not\subseteq Dom(T_i)$. Dado $[a, b] \in B_i$, existem seqüências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ em C_i tais que $p_n \rightarrow a$ e $q_n \rightarrow b$; consideremos também o disco $D_{p_n q_n}$ associado à terna (p_n, q_n, \sim) (conforme na definição 3.1). Definamos $D[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D_{p_n q_n}}$. Observemos que devem haver singularidades no interior de $D[a, b]$.

Afirmamos que B_i é finito. De fato, se B_i fosse infinito, existiria $p \in C_i$ que é ponto de acumulação dos extremos dos intervalos de B_i ; se este ponto p pertencer a $Dom(T_i)$ existirá

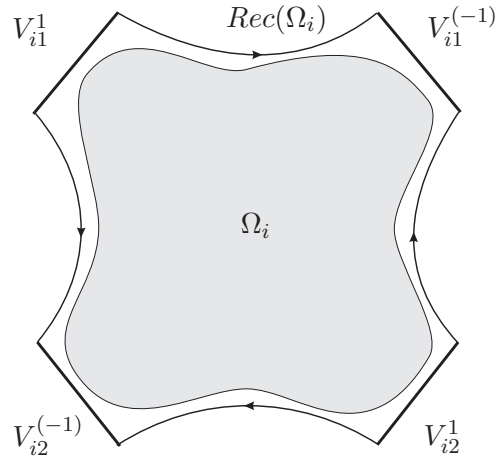


Figura 4.3: $V_i^1 = V_{i1}^1 \cup V_{i2}^1$ e $V_i^{(-1)} = V_{i1}^{(-1)} \cup V_{i2}^{(-1)}$.

intervalo aberto $A \subset \text{Dom}(T_i)$ tal que $p \in A$ (pois $\text{Dom}(T_i)$ é aberto); o que é absurdo pois $B_i \cap A$ seria não vazia; e assim concluímos que $p \notin \text{Dom}(T_i)$. Por outro lado p é acumulado por pontos de $\gamma \cap C_i$ (pois p é acumulado pelos extremos dos intervalos de B_i que por sua vez são acumulados por pontos de $\gamma \cap C_i$) e como $\overline{\gamma \cap C_i} \subset \text{Dom}(T_i)$ (pois γ é recorrente não-trivial) temos que $p \in \text{Dom}(T_i)$, que é uma contradição. Assim B_i é finito.

Escrevamos agora B_i como sendo a união de subconjuntos disjuntos $B_i^1, B_i^2, \dots, B_i^k$ tais que cada B_i^j (com $j = 1, 2, \dots, k$) é maximal com relação a propriedade que todos os seus elementos pertencem à mesma T_C -órbita (vide definição 3.1). Para cada j (com $j = 1, 2, \dots, k$), existe $[a_j, b_j] \in B_i^j$ e um número natural n_j tal que

$$B_i^j \subset \{T_C[a_j, b_j], T_C^2[a_j, b_j], \dots, T_C^{n_j-1}[a_j, b_j]\}.$$

De forma semelhante à feita na definição de relação de equivalência podemos achar seqüências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ tais que $p_n \rightarrow a_j$ e $q_n \rightarrow b_j$ e com estas seqüências podemos encontrar discos abertos $\tilde{D}_{p_n q_n}$ tais que $\tilde{D}_{p_n q_n}$ contêm todos os elementos de B_i^j e os lados horizontais de $\tilde{D}_{p_n q_n}$ são os arcos de trajetória $p_n T^{n_j}(p_n)$ e $q_n T^{n_j}(q_n)$.

Sejam $\tilde{D}[a_j, b_j] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_{p_n q_n}$ e $K = \bigcup_{j=1}^k \tilde{D}[a_j, b_j]$; donde temos que K é compacto.

Sendo assim, é possível construir um círculo transversal \tilde{C} , disjunto de K . Com isso, é possível encontrarmos intervalos de \tilde{C} onde a aplicação T não esteja definida negativamente (aqui chamados de V_i^1) e intervalos de \tilde{C} onde a aplicação T não esteja definida positivamente (aqui chamados de $V_i^{(-1)}$). As outras classes de equivalência em $\mathcal{A}(\tilde{C})$ são formadas por intervalos fechados (abaixo chamaremos alguns destes intervalos de Z_j onde j varia em um conjunto $J \subset \mathbb{N}$) para os quais a aplicação T está bem definida.

2. Existe $J \subset \mathbb{N}$ e uma família de subintervalos fechados $\{Z_j\}_{j \in J}$ de $C_i - (V_i^1 \cup V_i^{(-1)})$, não reduzida a pontos, tal que para todo $(n, j) \in \mathbb{Z} \times J$, a aplicação T^n está definida em Z_j e a família $\{T^n(Z_j), T^{m\delta}(V_{ik}^\delta); n \in \mathbb{Z}, j \in J, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \delta \in \{1, -1\}, k \in \{1, 2, \dots, s_i\}\}$ é formada por intervalos dois a dois disjuntos cuja união é um subconjunto denso de C_i .

Suponhamos agora que M é um toro, que $\text{Rec}(C_i) = M$ (em particular $\text{Dom}(T_i) = C_i$) e que $J = \{1\}$. Neste caso, por Denjoy [4], existe uma medida μ em C_i tal que :

$$3. \mu(C_i) = 1, \mu(C_i - \cup_{n \in \mathbf{Z}} T^n(Z_1)) = 0 \text{ e } T_i : C_i \longrightarrow C_i \text{ é } \mu - C^1.$$

Quando $J \subset \mathbf{N}$ for arbitrário (pelos itens 1 e 2), a mesma idéia pode ser usada para construir uma medida μ em C_i estendendo $\tilde{\mu}$ e satisfazendo este lema. ■

A demonstração do lema seguinte pode ser vista em [27] e [22].

Lema 4.2. *Se p é ponto interior do conjunto dos pontos não-errantes de φ , então p pertence ao fecho do conjunto dos pontos recorrentes de φ .*

No lema seguinte denotaremos por A o conjunto das τ -seqüências atratoras, por P o conjunto das τ -seqüências periódicas e por W o conjunto das τ -seqüências errantes.

Lema 4.3. *Com as condições e notações do Teorema de Estrutura e da proposição 3.1, suponha que $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ (respectivamente $i \in \{l+1, l+2, \dots, l+v\}$) se, e somente se, $\Omega_i \cap C_i = C_i$ (respectivamente Ω_i é um conjunto minimal não-trivial de φ). Dado $\sigma \in \{A, P, W\}$ existe um conjunto de seqüências $\mathbb{A}_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$, no máximo enumerável, tal que:*

(i) *Cada A_i (respectivamente P_i) é uma T^{δ_i} -seqüência atratora (respectivamente T^{ϵ_i} -seqüência periódica) com $\delta_i \in \{-1, 1\}$ (respectivamente $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$). Cada W_i é um intervalo aberto errante.*

(ii) *Se $i \neq j$ então $\text{span}(\sigma_i) \cap \text{span}(\sigma_j) = \emptyset$ e*

$$\left[\cup_n T^n(W_i) \right] \cap \left[\cup_n T^n(W_j) \right] = \emptyset.$$

(iii) *O fecho do conjunto $\cup_{i,j}(\text{span}(A_i) \cup \text{span}(P_j))$ é uma vizinhança do conjunto dos pontos de Γ que pertencem às órbitas fechadas de φ .*

(iv) *O conjunto $\cup_k W_k$ é disjunto dos conjuntos $\cup_{i,j}[(\text{span}(A_i) - \overline{D_i}) \cup \text{span}(P_j)]$, $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$ e $\cup_{r=l+1}^{l+v}[(\text{Rec}(C_r) - G_r) \cap \Gamma]$; onde D_i denota o domínio de A_i e G_r denota o portão de $\text{Rec}(C_i)$.*

(v) *A união dos conjuntos $\cup_{i,j}(\text{span}(A_i) \cup \text{span}(P_j))$, $\cup_k \cup_n T^n(W_k)$, $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$ e $\cup_{r=l+1}^{l+v}(\text{Rec}(C_r) \cap \Gamma)$ é um conjunto aberto e denso de Γ .*

(vi) *Para todo $A_i \in \mathbb{A}_A$ e todo $r \in \{l+1, l+2, \dots, l+v\}$ o conjunto $\cup_k \cup_n T^n(W_k)$ não intersecta o conjunto $\{\text{extremos de } D_i\}$ nem o conjunto $\{\text{extremos das componentes conexas de } G_r\}$.*

Demonstração: Seja \mathcal{A}_P (respectivamente \mathcal{A}_A) um conjunto tal que: $\lambda \in \mathcal{A}_P$ (respectivamente $\lambda \in \mathcal{A}_A$) se, e somente se:

1. Qualquer elemento de λ é uma T^δ -seqüência periódica (respectivamente atratora), com $\delta \in \{-1, 1\}$. Mais ainda, qualquer par $\lambda_k, \lambda_j \in \lambda$ satisfaz que $\text{span}(\lambda_k) \cap \text{span}(\lambda_j) = \emptyset$.

Seja $\sigma \in \{P, A\}$. Se $\mathcal{A}_\sigma \neq \emptyset$, a inclusão de conjuntos " \subset " determina uma relação de ordem parcial em \mathcal{A}_σ . Diante disso, o Lema de Zorn pode ser usado para encontrarmos um elemento maximal $\mathbb{A}_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$ para esta relação de ordem parcial.

Ficam assim provados parcialmente os itens (i) e (ii), para continuarmos, suponhamos que:

2. $\mathbb{A}_A = \{A_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ e $\mathbb{A}_P = \{P_j \mid j = 1, 2, \dots\}$.

Desde que \mathbb{A}_σ , com $\sigma \in \{A, P\}$, é um elemento maximal da relação de ordem parcial " \subset " em \mathcal{A}_σ , o item (iii) deste lema é verdadeiro.

Seja ψ o conjunto de todas as trajetórias de φ que passam através dos extremos do domínio fundamental dos elementos de \mathcal{A}_A . Pode-se ver que:

3. $\psi \cap \Gamma$ é um conjunto discreto de Γ .

Seja $\tilde{\Lambda}$ o complemento, em Γ , da união de $\cup_{i,j}[(\text{span}(A_i) - \overline{D_i}) \cup \text{span}(P_j)]$, $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$ e $\cup_{r=l+1}^{l+v}[(\text{Rec}(C_r) - G_r) \cap \Gamma]$, onde D_i é o domínio fundamental de A_i e G_r é o portão de $\text{Rec}(C_r)$. Seja Λ o interior do conjunto de pontos errantes de $\tilde{\Lambda} - \psi$. Como o item (iii) é verdadeiro, segue do lema 4.2 e do item anterior, que :

4. Λ é (aberto e) denso em $\tilde{\Lambda}$.

Seja \mathcal{A}_W um conjunto caracterizado da seguinte maneira: $\lambda \in \mathcal{A}_W$ se, e somente se:

5. Qualquer elemento de λ é um segmento aberto φ -errante contido em Λ . Mais ainda, qualquer par $\lambda_k, \lambda_j \in \lambda$ satisfaz

$$\left(\cup_n T^n(\lambda_k) \right) \cap \left(\cup_n T^n(\lambda_j) \right) = \emptyset.$$

Se Λ contém algum segmento φ -errante então $\mathcal{A}_W \neq \emptyset$. Procedendo como acima, existe um elemento maximal $\mathbb{A}_W = \{W_k \mid k = 1, 2, \dots\} \in \mathcal{A}_W$ para a relação de ordem parcial determinada pela inclusão de conjuntos " \subset ". Certamente \mathbb{A}_W é no máximo enumerável. Isto encerra a prova dos itens (i) e (ii). A maximalidade de \mathbb{A}_W e o fato que cada W_i é aberto implicam que:

6. $\cup_k \cup_n T^n(W_k)$ é aberto e denso em Λ .

Da construção das seqüências \mathbb{A}_A , \mathbb{A}_P e \mathbb{A}_W segue que o item (iv) é verificado; já os itens 4 e 6 provam (v). Desde que ψ é disjunto de Λ , cada W_k é um intervalo errante e também (para $r \in \{l+1, l, \dots, l+v\}$) cada extremo de qualquer componente conexa de G_r encontra o

conjunto minimal não-trivial Ω_τ ; donde concluímos que (vi) deste lema também é verdadeiro.

■

No que segue, diremos que uma aplicação suave f , entre subintervalos da reta, tem *contato de ordem infinita* em x_0 com a aplicação identidade, se: $1 = f'(x_0)$ e $f^{(k)}(x_0) = 0$ para todo $k > 1$.

Lema 4.4. *Consideremos $\tau \in \{T, T^{-1}\}$ e $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ uma τ -seqüência atratora. Para qualquer $\epsilon \in (0, 1)$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $\rho > 0$ tal que, se $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida no domínio fundamental D de Σ tal que $\tilde{\mu}(D) \leq \rho$, então existe uma medida distinguida canônica μ em Σ , estendendo $\tilde{\mu}$, tendo ordem k e tamanho ϵ . Isto é, se Σ_1 também for denotado por Σ_{n+1} , então:*

(a) *Para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e para orientações apropriadas em Σ_i e em Σ_{i+1} , a expressão μ -coordenada $\tau_i : [0, \mu(\Sigma_i)] \rightarrow [0, \mu(\Sigma_{i+1})]$ de $\tau|_{\Sigma_i} : \overline{\Sigma_i} \rightarrow \overline{\Sigma_{i+1}}$ é suave, 2^{-k} -próxima da aplicação identidade de $[0, \mu(\Sigma_i)]$ na topologia C^k e sua derivada τ'_i tem contato de ordem infinita em $x \in \{0, \mu(\Sigma_i)\}$ com a aplicação constante 1.*

(b) $\sum_{i=1}^n \mu(\Sigma_i) \leq \epsilon$.

Demonstração: Seja $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função suave tal que $\theta^{-1}(0) = (-\infty, 0]$, $\theta^{-1}(1) = [1, \infty)$ e, para todo $t \in (0, 1)$, temos $\theta'(t) > 0$. Dado $0 < \epsilon < 1$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos

1.

$$\rho = \frac{\epsilon^{k+1}}{n^{k+1}(1 + \|\theta\|_k)}.$$

Seja $\tilde{\mu}$ uma medida distinguida no domínio fundamental D de Σ tal que $\tilde{\mu}(D) = \bar{\rho} < \rho$. Definamos $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\sigma(t) = t - \bar{\rho}\theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$. Os seguintes fatos podem ser verificados:

2. A aplicação σ é um difeomorfismo ϵ -próximo da aplicação identidade de \mathbb{R} na topologia C^k . Também temos que σ tem contato de ordem infinita em 0 (respectivamente em $\frac{\epsilon}{n}$) com a aplicação $t \mapsto t$ (respectivamente $t \mapsto t - \bar{\rho}$) definida em \mathbb{R} . Mais ainda, $\sigma|_{[0, \frac{\epsilon}{n}]}$ tem 0 como único ponto fixo e este é um atrator. Finalmente, $\sigma(0, \frac{\epsilon}{n}) = (0, \frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho})$.

De fato,

$$|\sigma(t) - t| = \bar{\rho} \cdot \left| \theta\left(\frac{nt}{\epsilon}\right) \right| \leq \bar{\rho} \cdot \|\theta\|_k < \frac{\epsilon^{k+1}}{n^{k+1}} \left(\frac{\|\theta\|_k}{1 + \|\theta\|_k} \right) < \epsilon, \quad (4.1)$$

e analogamente verifica-se a desigualdade para as derivadas.

As aplicações $\tau^n : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ e $\sigma|_{(0, \frac{\epsilon}{n})} : (0, \frac{\epsilon}{n}) \rightarrow (0, \frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho})$ são topologicamente conjugadas. Seja $h : \Sigma_1 \rightarrow (0, \frac{\epsilon}{n})$ o único homeomorfismo que conjugua τ^n e $\sigma|_{(0, \frac{\epsilon}{n})}$ de tal forma que $(h|_D) - \frac{\epsilon}{n} + \bar{\rho}$ é um $\tilde{\mu}$ -homeomorfismo de D (onde D é o domínio fundamental de τ^n).

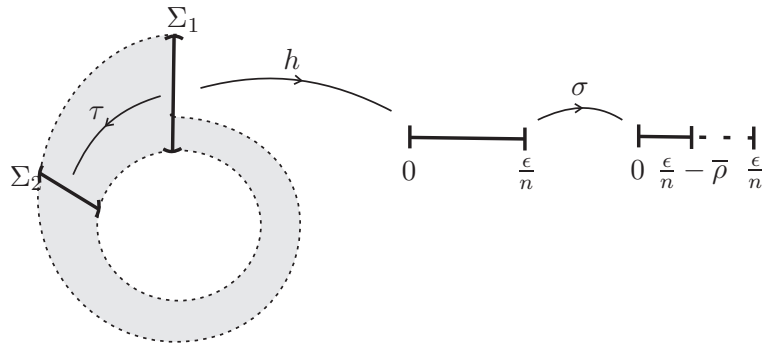


Figura 4.4

A medida de Lebesgue de $(0, \frac{\epsilon}{n})$ (respectivamente $(0, \frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho})$) induz, via h (respectivamente via $\sigma \circ h \circ \tau^{-1}|_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \rightarrow (0, \frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho})$) uma medida distinguida em Σ_1 (respectivamente Σ_2) (veja a figura (4.4)).

Estenda μ a uma medida distinguida em Σ definindo $\mu|_{\Sigma_{i+2}} = \mu(\tau^{-i}|_{\Sigma_{i+2}})$ tal que $i = 1, 2, \dots, n-2$. Segue da construção de μ que a expressão μ -coordenada de $\tau|_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é precisamente $\sigma|_{(0, \frac{\epsilon}{n})} : (0, \frac{\epsilon}{n}) \rightarrow (0, \frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho})$ e mais ainda, a expressão μ -coordenada de $\tau|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$, tal que $i = 2, \dots, n$, é a aplicação identidade de $(0, \frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho})$. Isto, junto com o item 2 implicam (a) e (b) deste lema (para provar o item (a) note que na equação 4.1 temos: $|\sigma(t) - t| < (\frac{\epsilon}{n})^{k+1} < \frac{1}{2^k}$; e para o item (b) note que: $\sum_{i=1}^n \mu(\Sigma_i) = \frac{\epsilon}{n} + (n-1)[\frac{\epsilon}{n} - \bar{\rho}] < \epsilon$). ■

A demonstração do lema a seguir é semelhante àquela dada no lema anterior.

Lema 4.5. Consideremos $\tau \in \{T, T^{-1}\}$ e $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \Sigma_{n+1}\}$ uma τ -seqüência. Seja $\tilde{\mu}$ uma medida distinguida em Σ_1 . Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma medida distinguida canônica μ em Σ estendendo $\tilde{\mu}$ e tendo tamanho ϵ . Isto é, se todo termo de Σ está orientado tal que, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ a aplicação $\tau|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ preserva orientação, então:

- (a) A extensão contínua $\tau_1 : [0, \mu(\Sigma_1)] \rightarrow [0, \mu(\Sigma_2)]$ da expressão μ -coordenada de $\tau|_{\Sigma_1}$ (definida em $(0, \mu(\Sigma_1))$) é suave e sua derivada τ_1' tem contato de ordem infinita com a aplicação constante $\equiv 1$.
- (b) Para todo $i = 2, 3, \dots, n$ a expressão μ -coordenada de $\tau|_{\Sigma_i}$ é a aplicação identidade de $(0, \frac{\epsilon}{n})$.

Seja Γ_i como na proposição 3.1, então temos o seguinte lema:

Lema 4.6. Seja $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_i, \dots\}$ uma seqüência infinita tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ é uma T -seqüência (respectivamente T^{-1} -seqüência). Suponha que para todo $p \in \Sigma_1$ o ω -limite de p (respectivamente o α -limite de p) contenha um ponto fixo de φ . Então para qualquer $k \in \mathbb{N}$ existem j e $l \in \mathbb{N}$ tais que $\Sigma_{2+j} \subset \Gamma_{l+k}$.

Demonstração: Consideremos apenas o caso em que $\Sigma_{i+1} = T(\Sigma_i)$ para $i \in \mathbb{N}$. Seja $k \in \mathbb{N}$. Certamente, por definição, $\Sigma_3 \subset \Gamma_N$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Se $N > k$, o lema

segue imediatamente tomando $j = 1$ e $l = N - k$. Assumamos então que $N \leq k$. Desde que $\omega(p)$ contém um ponto fixo de φ , existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $T^{j+1}(p) \in \Gamma_{k+1}$; de fato, como $\cap M_i = F :=$ conjunto dos pontos fixos, se $T^{j+1}(p) \notin \Gamma_{k+1}$ seria porque $T^{j+1}(p) \in \Gamma_l$ (com $l < k + 1$) $\forall j \in \mathbb{N}$ e então $\omega(p)$ não poderia conter pontos fixos. Daí, usando o fato que $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{j+2}\}$ é uma T -seqüência, segue que $T^{j+1}(\Sigma_1) = \Sigma_{j+2} \subset \Gamma_{k+1}$; e assim o lema está provado. ■

A prova do seguinte lema de cálculo será omitida.

Lema 4.7. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ um homeomorfismo crescente. Então f é suave (em $[a, b]$) e tem contato de ordem infinita em $x \in \{a, b\}$ com a aplicação $t \mapsto t - x + f(x)$ se para alguma seqüência $\{[a_i, b_i]; i \in \mathbb{N}\}$ de subintervalos fechados e disjuntos de $[a, b]$ tivermos que:*

$$(a) [a, b] = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = b - a \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (f(b_i) - f(a_i)) = d - c.$$

(b) *Para todo $i \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \{a_i, b_i\}$ a aplicação $f|_{[a_i, b_i]}$ é suave e tem contato de ordem infinita, em x , com a aplicação $t \mapsto t - x + f(x)$ definida em $[a_i, b_i]$.*

(c) *Existe N tal que, para todo inteiro positivo $i \geq N$, temos*

$$\|f|_{[a_i, b_i]} - (Id|_{[a_i, b_i]} + f(a_i) - a_i)\|_i \leq \frac{1}{i},$$

onde Id é a aplicação identidade de \mathbb{R} .

Proposição 4.1. *Com as considerações da proposição 3.1, existe uma medida distinguida μ em Γ e um inteiro não-negativo n_0 tais que para cada segmento Σ contido em Γ cuja imagem $T(\Sigma)$ também seja um segmento temos que:*

(a) $T|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow T(\Sigma)$ é $\mu - C^1$;

(b) se $\Sigma \subset \Gamma_i$ e $i \geq n_0$, então $T|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow T(\Sigma)$ é μ -suave;

(c) se os conjuntos minimais de φ são triviais então $n_0 = 0$.

Demonstração: Considere as notações e os fatos estabelecidos no lema 4.3. É claro, por este lema, que:

1. Os conjuntos $\cup_j \text{span}(P_j)$, $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$, $\cup_i (\text{span}(A_i) - \overline{D_i})$, $\cup_k \mathcal{B}_k$ e $\cup_{r=l+1}^{l+v} \{Rec(C_r) \cap \Gamma - G_r\}$ são dois a dois disjuntos e sua união é aberta e densa em Γ , onde

$$\mathcal{B}_k = \cup_n T^n(W_k) - [\{\cup_i (\text{span}(A_i) - \overline{D_i})\} \cup \{\cup_{r=l+1}^{l+v} [Rec(C_r) \cap \Gamma - G_r]\}] \quad \text{e} \quad W_k \in \mathbb{A}_W.$$

Iremos definir medidas distinguidas em cada um dos conjuntos descritos acima e como estes são densos em Γ teremos uma medida distinguida em Γ .

Começaremos definindo uma medida distinguida μ em $\cup_j \text{span}(P_j)$. Seja $P_j = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ um elemento arbitrário de \mathbb{A}_P . Por definição P_j é uma T^δ -seqüência, onde $\delta \in \{-1, 1\}$. Definamos μ em P_j tal que para $i = 1, 2, \dots, n$ (e para orientações apropriadas em Σ_i e $T^\delta(\Sigma_i)$), a expressão μ -coordenada de $T^\delta|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow T^\delta(\Sigma_i)$ é a aplicação identidade de $(0, \frac{2^{-i}}{n})$. Isto é possível pois cada $p \in \Sigma_1$ é um ponto fixo de T^n . Daí:

2. μ é uma medida distinguida em $\cup_j \text{span}(P_j)$ tal que $\mu(\cup_j \text{span}(P_j)) \leq 1$ e se I e $T(I)$ são intervalos abertos de $\cup_j \text{span}(P_j)$ então a expressão μ -coordenada de $T|_I : I \rightarrow T(I)$ é a aplicação identidade de $(0, \mu(I))$.

Vamos agora definir μ em $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$. Conforme já denotamos anteriormente (lema 4.3), quando $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ existe uma trajetória recorrente não-trivial densa em C_i . Então, pelo Teorema de Estrutura, existe um homeomorfismo $h_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ conjugando a Aplicação de Poincaré $T_i : C_i \rightarrow C_i$, induzida por φ , com uma transformação de troca de intervalos. A medida de Lebesgue de \mathbb{R}/\mathbb{Z} induz, via h_i , uma medida distinguida μ em C_i , com $i = 1, 2, \dots, l$, que é T_i -invariante. Seja I um intervalo aberto de $\cup_{t=1}^l C_t$. Se para $\delta \in \{-1, 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$, a imagem $T^{n\delta}(I)$ for um intervalo, defina $\mu|_{T^{n\delta}(I)} = \mu \circ T^{-n\delta}|_{T^{n\delta}(I)}$. Esta aplicação está bem definida pois $\mu|_{C_i}$ é T_i -invariante quando $i = 1, 2, \dots, l$. Também temos, por (iv) da proposição 3.1, que dados $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ e $i = 1, 2, \dots, l$, a aplicação $T^{n\delta}|_{C_i} : C_i \rightarrow \Gamma$ é descontínua em finitos pontos. Assim, μ já está definido em $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$ exceto para um conjunto enumerável. Tomemos a medida μ deste conjunto enumerável como sendo zero. Para mostrar que μ é uma medida distinguida em $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$ veremos que:

3. Para todo $j \in \mathbb{N}$ tem-se que $\mu([\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)] \cap \Gamma_j) \leq l\lambda_j$, onde λ_j é como no item (v) da proposição 3.1.

De fato, por (v) da proposição 3.1 e da existência de uma trajetória de φ que é densa em qualquer círculo C_i , com $i = \{1, 2, \dots, l\}$, segue que: Dado $i = \{1, 2, \dots, l\}$ e $j \in \mathbb{N}$, qualquer arco de trajetória, intersectando C_i em um de seus extremos e tendo seu outro extremo em Γ_j , encontra Γ_j no máximo λ_j vezes. Podemos tomar $\mu(T(C_i)) = 1$ e como T preserva medida, temos que $\mu(\cup_n T^n(C_i) \cap \Gamma_j) \leq \lambda_j$; isto prova o item 3, pois são l os círculos a serem considerados.

Sob estas condições temos que:

4. μ é uma medida distinguida em $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$ tal que, se I e $T(I)$ são subintervalos abertos deste conjunto, então a expressão μ -coordenada de $T|_I : I \rightarrow T(I)$ é a aplicação identidade de $(0, \mu(I))$.

Agora iremos definir uma medida distinguida μ em $\cup_k \mathcal{B}_k$. Pelo lema 4.4, dado qualquer termo A_i de \mathbb{A}_A existe um número real positivo $\sigma_i \in (0, 1)$ tal que:

5. Se $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida no domínio D_i de A_i satisfazendo $0 < \tilde{\mu}(D_i) \leq \sigma_i$; então existe uma medida distinguida canônica $\hat{\mu}$ em A_i estendendo $\tilde{\mu}$, tendo ordem i e tamanho 2^{-i} .

Dados $(\delta, s) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$ e um intervalo aberto λ contido em $\cup_k \cup_n T^n(W_k)$ definamos $G(\delta, s, \lambda)$ como a seqüência maximal da forma $\{\lambda, T^\delta(\lambda), \dots, T^{n\delta}(\lambda), \dots\}$ que satisfaz:

6. Quaisquer um de seus termos é um intervalo aberto (de $\cup_k \cup_n T^n(W_k)$) disjunto da união de $\cup_{i,j}(\text{span}(A_i) - \overline{D_i})$ e $\cup_{r=l+1}^{l+v} [\text{Rec}(C_r) \cap \Gamma - G_r]$. Mais ainda, exceto possivelmente para λ e $T^\delta(\lambda)$, qualquer termo de Σ está contido em $\cup_{j=0}^s \Gamma_j$.

Seja λ um intervalo aberto de Γ . Um subintervalo aberto não-vazio I de λ é chamado de *intervalo T^δ -derivado* de λ se este é maximal com respeito à seguinte propriedade: $T^\delta(I)$ é um segmento aberto de Γ .

Desde que, dados $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\delta \in \{-1, 1\}$, a aplicação $T^\delta|_{\Gamma_i} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma$ é descontínua em finitos pontos (item (iv) da proposição 3.1), podemos verificar que:

7. Dado $\delta \in \{-1, 1\}$, o fecho de qualquer intervalo $\lambda \subset \Gamma$ é a união finita do fecho de seus subintervalos T^δ -derivados.

Para cada $W_k \in \mathbb{A}_W$ e $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, defina indutivamente s famílias (finitas ou vazias) denotadas por $\Sigma_k^s = \{\Sigma_{k_1}^s, \Sigma_{k_2}^s, \dots, \Sigma_{k_{s_k}}^s\}$ de T^δ -seqüências errantes, com $\delta = \frac{s}{|s|}$, como segue:

8. Quando $s = \delta \in \{-1, 1\}$, então $s_k = 1$ e $\Sigma_{k_1}^s = G(\delta, k, W_k)$. Suponha que Σ_k^{s-1} tenha sido definida, então $\Sigma_k^s = \{G(\delta, k|s|, \lambda) \mid \lambda \text{ é um intervalo aberto } T^\delta\text{-derivado do último termo de } \Sigma_{k_j}^{s-1}, \text{ com } j \in \{1, 2, \dots, (s-1)_k\}\}$.

Observe que, pelo lema 4.6, cada $G(\delta, k|s|, \lambda)$ acima tem finitos termos, isto é, $G(\delta, k|s|, \lambda)$ é de fato uma T^δ -seqüência. Agora:

9. Para um dado Γ_j , a família $\{\Sigma_{k_r}^s \mid s \in \mathbb{Z} - \{0\}, k \in \{2, 3, \dots, n, \dots\}, r \in \{1, 2, \dots, s_k\}$ e seus primeiros termos estão contidos em $\Gamma_j\}$ é finito.

Para provar isso, primeiro notemos que, desde que j está fixo, existem apenas finitos termos da forma $\Sigma_{k_r}^s$ com $(k-1)|s| \leq j+1$. Agora, se algum $\Sigma_{k_r}^s$, com $k \geq 2$ e $(k-1)|s| > j+1$ tem seu primeiro termo I em Γ_j , então para $\delta = \frac{s}{|s|}$, o termo I não é apenas T^δ -derivado do último termo de alguma seqüência de Σ_k^{k-1} mas também está propriamente contido em tal último termo. Isto implica que T^δ é descontínua em um dos extremos de I . O item 9 segue do fato que $T^\delta|_{\Gamma_j}$ tem finitos pontos de descontinuidade (veja (iv) da proposição 3.1).

Observe que, por (vi) do lema 4.3, o último termo de qualquer seqüência não-vazia $\Sigma_{k_1}^s$ como acima está contido em algum D_{i_0} ou é disjunto de $\cup_i D_i$. Entretanto, se $n(s)$ denota o número de todos os termos das seqüências formando Σ_k^s e Σ_k^{-s} e se $\Sigma_{k_j}^s \in \Sigma_k^s$ é não-vazio, podemos dizer que :

10. $\sigma(\Sigma_{k_j}^s)$ é $[\frac{2^{-k-|s|}}{n(s)}] \cdot \sigma_{i_0}$ ou é $\frac{2^{-k-|s|}}{n(s)}$, dependendo se o último termo de $\Sigma_{k_j}^s$ está contido em algum D_{i_0} ou é disjunto de $\cup_i D_i$, respectivamente.

Iremos agora definir μ em $\cup_{j=1}^{s_k} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{k_j}^s)$.

Seja $W_k \in \mathbb{A}_W$. Seja μ uma medida distinguida em W_k tal que $\mu(W_k) = \sigma(\Sigma_{k_1}^1) \cdot \sigma(\Sigma_{k_1}^{-1})$. Se $\delta \in \{-1, 1\}$ e $T^{\delta j}(W_k)$ é um termo de $\Sigma_{k_1}^\delta$, definamos μ em $T^{\delta j}(W_k)$ como $\mu \circ T^{-\delta j}|_{T^{\delta j}(W_k)}$. Isto implica que:

- 11 Se λ_1 e λ_2 são dois termos consecutivos de $\Sigma_{k_1}^\delta$, então a expressão μ -coordenada de $T^\delta : \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ é a aplicação identidade de $(0, \mu(W_k))$.

Seja $s \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a medida distinguida μ tenha sido definida em todo $\Sigma_{k_j}^t$ de Σ_k^t , quando $t \in \{-s+1, -s+2, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, s-2, s-1\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, t_k\}$. Podemos proceder indutivamente para definir μ em todas as seqüências de $\Sigma_k^{-s} \cup \Sigma_k^s$ da seguinte maneira: Seja $s \in \{-1, 1\}$ e $\Sigma_{k_j}^{\delta s} \in \Sigma_k^{-s} \cup \Sigma_k^s$. Certamente μ já fora definida no primeiro termo de $\Sigma_{k_j}^{\delta s}$. Usando o lema 4.5 existe uma medida distinguida canônica em $\Sigma_{k_j}^{\delta s}$ estendendo μ e tendo tamanho $\sigma(\Sigma_{k_j}^{\delta s})$. Desta forma, podemos assumir que:

12. μ esteja definida nos termos de todas as seqüências de Σ_k^s para $k \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
Mais ainda, se $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n+1}\} \in \Sigma_k^s$, com $k \geq 2$; então, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $\delta = \frac{|s|}{s}$, a expressão μ -coordenada de $T^\delta|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ é a aplicação identidade de $(0, \mu(\Sigma_i))$.

Desde que, para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a aplicação $T|_{\Sigma_j}$ é descontínua em finitos pontos, e pela forma com que as seqüências Σ_k^s , com $k \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, foram construídas, segue que:

13. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\cup_{j=1}^{s_k} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{k_j}^s)$ está contida em \mathcal{B}_k e difere deste conjunto por um conjunto que é, no máximo, enumerável.

Estenda μ a uma medida distinguida em cada \mathcal{B}_k definindo:

$$14. \mu\left(\mathcal{B}_k - \left[\cup_{j=1}^{s_k} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{k_j}^s)\right]\right) = 0.$$

Alguns cálculos nos mostram que :

$$15. \mu(\cup_k \mathcal{B}_k) = \sum_k \sum_{j=1}^{s_k} \sum_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \mu[\text{span}(\Sigma_{k_j}^s)] \leq 1.$$

Agora, μ será estendida a uma medida distinguida em $\cup_i(\text{span}(A_i))$.

Por (v) do lema 4.3, para todo D_i , temos que $(\cup_k \mathcal{B}_k) \cap D_i = \widetilde{D}_i$ é aberto e denso em D_i . Desde que μ está definida em $\cup_k \mathcal{B}_k$ (veja 13 e 14), μ pode ser estendida a D_i definindo-se $\mu(D_i - \widetilde{D}_i) = 0$. Usando o ítem 10, temos que $0 < \mu(D_i) \leq \sigma_i$. Daí, por 5, segue que:

16. Para todo $A_i \in \mathbb{A}_A$, a medida μ pode ser estendida a uma medida distinguida canônica em A_i tendo ordem i e tamanho 2^{-i} .

Segue desta construção que:

$$17. \mu(\cup_i \text{span}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\text{span}(A_i)) \leq 1.$$

Finalmente, μ será estendida a $\cup_{r=l+1}^{l+v} \text{Rec}(C_r) \cap \Gamma$.

Por (iv) e (v) do lema 4.3, para todo $r \in \{l+1, l+2, \dots, l+v\}$, temos que $(\cup_k \mathcal{B}_k) \cap G_r = \widetilde{G}_r$ é aberto e denso em G_r . Desde que μ está definida em $\cup_k \mathcal{B}_k$, estenda μ a G_r definindo $\mu(G_r - \widetilde{G}_r) = 0$. Usando o lema 4.1, μ pode ser estendida a $\cup_{r=l+1}^{l+v} C_r$. Seja I

um intervalo aberto de $\cup_{r=l+1}^{l+v} C_r$, se para algum $n \in \mathbb{N}$ a imagem $T^n(I)$ for um intervalo e $(\cup_{i=1}^n T^i(I)) \cap (\cup_{r=l+1}^{l+v} C_r) = \emptyset$, defina $\mu|_{T^n(I)} = \mu \circ T^{-n}|_{T^n(I)}$. Novamente, como no ítem 3, por (iv) da proposição 3.1, μ já está definida em $\cup_{r=l+1}^{l+v} \text{Rec}(C_r) \cap \Gamma$ exceto para um conjunto enumerável. Tomemos a medida μ deste conjunto enumerável como sendo zero. Como na prova de 3, podemos ver que :

18. Para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se $\mu(\cup_{r=l+1}^{l+v} \text{Rec}(C_r) \cap \Gamma_j) < \infty$.

Sob estas circunstâncias, por 1, μ está definida em um subconjunto aberto e denso de Γ . Estenda μ a todo Γ fazendo zero a medida no conjunto restante, onde μ ainda não fora definida.

Agora será provado que T é μ -suave. Segue de 2, 3, 15, 17 e 18 que para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se $\mu(\Gamma_j) < \infty$. Assim, mediante a maneira como μ fora construída, verifica-se que :

19. μ é uma medida distinguida em Γ .

Seja $\Sigma \subset \Gamma$ tal que Σ e $T(\Sigma)$ são segmentos. Orientemos Σ e $T(\Sigma)$ de tal forma que $T|_{\Sigma} : \Sigma \longrightarrow T(\Sigma)$ esteja preservando orientação. Pela construção de μ , as componentes conexas da intersecção de Σ com a união de $\cup_j \text{span}(P_j)$, $\cup_{t=1}^l \cup_n T^n(C_t)$, $\cup_i (\text{span}(A_i) - \overline{D_i})$, $\cup_k \mathcal{B}_k$ e $\cup_{r=l+1}^{l+v} \{\text{Rec}(C_r) \cap \Gamma - G_r\}$ formam uma família $\{I_s\}_{s \in S}$ de subintervalos de Σ tal que:

20. $\sum_{s \in S} \mu(I_s) = \mu(\Sigma)$.

Ampliando Σ se necessário, podemos assumir que :

21. Os extremos de Σ são disjuntos de $\cup_{s \in S} I_s$.

Segue dos ítems 9, 12, 13 e 14 que existem no máximo finitos termos $I_{\tilde{s}}$ da família $\{I_s\}_{s \in S}$ tais que $I_{\tilde{s}} \subset \cup_k \mathcal{B}_k$ e a expressão μ -coordenada de $T|_{\overline{I_{\tilde{s}}}} : \overline{I_{\tilde{s}}} \longrightarrow T(\overline{I_{\tilde{s}}})$ não é a aplicação identidade de $[0, \mu(I_{\tilde{s}})]$. Similarmente, pode-se checar a expressão μ -coordenada de $T|_{\overline{I_s}}$ para todo intervalo I_s de $\{I_s\}_{s \in S}$; podemos ver, por 20 e 21, que o lema 4.7 pode ser usado para provar que a expressão μ -coordenada \tilde{T} de $T|_{\overline{\Sigma}} : \overline{\Sigma} \longrightarrow T(\overline{\Sigma})$ é de classe C^1 (respectivamente suave) quando Σ encontra (respectivamente não encontra) $\cup_{r=l+1}^{l+v} \text{Rec}(C_r)$, e também que se $x \in \{0, \mu(\Sigma)\}$, a derivada \tilde{T}' de \tilde{T} satisfaz que $\tilde{T}'(x) = 1$ (respectivamente \tilde{T}' tem contato de ordem infinita com a aplicação constante 1). Isto encerra a prova da proposição pois $\cup_{r=l+1}^{l+v} \text{Rec}(C_r)$ está distante dos pontos fixos de φ ; o que implica, por (ii) e (iii) da proposição 3.1, a existência de um inteiro não-negativo n_0 tal que, para todo $i \geq n_0$,

$$\Gamma_i \cap \left(\cup_{r=l+1}^{l+v} \text{Rec}(C_r) \right) = \emptyset$$

e assim $T|_{\Sigma}$ é μ -suave quando $\Sigma \subset \Gamma_i$. ■

Proposição 4.2. *Suponhamos que o conjunto F dos pontos fixos de φ não seja vazio. Então $M - F$ pode ser expresso como a união de caixas de fluxo θ_i , com $i \in \mathbb{N}$, de tal forma que:*

- (a) cada conjunto compacto de $M - F$ está contido em finitas caixas de fluxo θ_i ;
- (b) se $i \neq j$ então $\theta_i \cap \theta_j = \partial\theta_i \cap \partial\theta_j$;
- (c) existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma medida distinguida μ nos lados transversais das caixas de fluxo θ_i tais que, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que θ_i é $\mu - C^1$ e, para todo $i \geq n_0$, a aplicação θ_i é μ -suave;
- (d) se os conjuntos minimais de φ são triviais então $n_0 = 1$.

Demonstração: Assumamos todas as considerações e notações das proposições 3.1 e 4.1. Seja Δ a união do conjunto dos arcos de trajetória \widehat{pq} de φ tais que : $p, q \in \Gamma$ com $T(p) = q$ e, ou T é descontínua em p ou T^{-1} é descontínua em q (veja a figura (4.5)). Seja \mathcal{Y} o conjunto das componentes conexas de $M - (F \cup \Delta \cup \Gamma)$. O fecho \overline{Y} de $Y \in \mathcal{Y}$ deixa de ser uma caixa de fluxo apenas se os "lados transversais" encontrarem um ao outro. Entretanto, neste caso \overline{Y} pode ser expresso como a união de duas caixas de fluxo, a saber Y_1 e Y_2 , tais que a componente de $Y_1 \cap Y_2$ que não pertence a Γ é uma seção transversal global para $\varphi|_{\overline{Y}}$ e também cada Y_i , com $i = 1, 2$, divide com Y exatamente um lado transversal (veja a figura (4.6)). Seja \mathcal{C} a união de todos os lados transversais de Y_i , com $i \in \{1, 2\}$ e $Y \in \mathcal{Y}$.

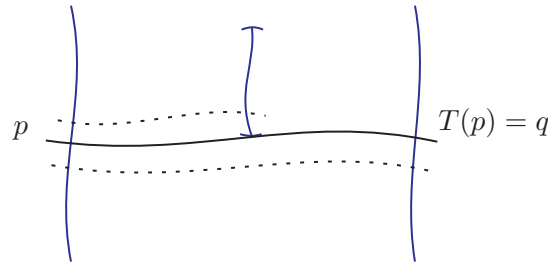


Figura 4.5: T apresenta descontinuidade em p .

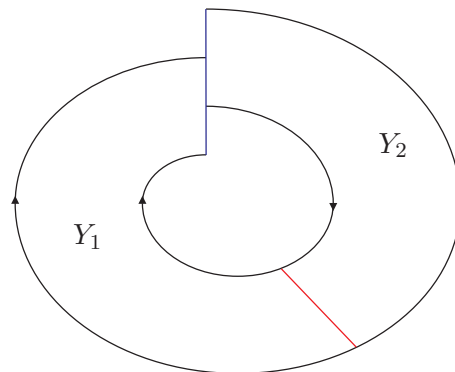


Figura 4.6

Desta construção temos que:

1. $\Gamma \subset \mathcal{C}$.

Por (iv) da proposição 3.1, dado $i \in \mathbb{N}$, existem apenas finitas componentes conexas de $M - (F \cup \Delta \cup \mathcal{C})$ intersectando $M - M_i$. Assim a família $\{Y_i \mid i \in \{1, 2\} \text{ e } Y \in \mathcal{Y}\}$ dos fechos das componentes conexas de $M - (F \cup \Delta \cup \mathcal{C})$ pode ser enumerada como $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j, \dots$ onde para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $k(i) \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq k(i)$ então $\theta_j \cap (M - M_i) = \emptyset$. Certamente :

2. $M - F = \cup_{j \in \mathbb{N}} \theta_j$.

Desde que qualquer subconjunto compacto K de $M - F$ está contido em algum $M - M_i$, a parte (a) desta proposição é verdadeira (a saber, $K \subset \cup_{j=1}^{k(i)} \theta_j$). A parte (b) é verificada pela construção de $\{\theta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Estenderemos agora a medida distinguida μ de Γ a \mathcal{C} . Denotemos por $\tilde{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ a Aplicação de Poincaré induzida por φ . Dado $Y \in \mathcal{Y}$ assumamos que a caixa de fluxo cruza a componente E de $Y_1 \cap Y_2$, não pertencente a Γ , de Y_1 à Y_2 . Definamos $\mu|_E = \mu \circ \tilde{T}^{-1}|_E$. Segue disto e da proposição 4.1, que (c) e (d) desta proposição são verdadeiros. ■

Teorema de Suavidade

O principal resultado estudado neste trabalho é o seguinte teorema, que pode ser visto como a recíproca do Teorema de Denjoy-Schwartz (veja [4] e [28]); porém antes de enunciá-lo faremos alguns comentários.

Seja φ um fluxo como no Teorema de Suavidade 5.1 abaixo enunciado, e seja F o conjunto dos pontos fixos de φ . Suponhamos que qualquer conjunto minimal de φ seja trivial. Para provar que φ é topologicamente equivalente a um fluxo suave iremos decompor a variedade $M - F$ em subvariedades que são quase como caixas de fluxo de φ e para as quais temos modelos suaves; tais subvariedades aparecem disfarçadas como T -seqüências e estão densamente distribuídas em $M - F$, mas podem não cobri-la. Podemos organizar estas T -seqüências de tal forma a que estejamos habilitados a construir uma nova estrutura diferenciável para $M - F$ com respeito a qual a folheação que φ induz em $M - F$ é suave; com isso podemos provar que φ é topologicamente equivalente a um fluxo suave.

Teorema 5.1. (Teorema de Suavidade:) *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo contínuo em uma variedade bidimensional M que é compacta e de classe C^∞ . Então existe um fluxo ψ de classe C^1 em M que é topologicamente equivalente a φ . Mais ainda, as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *qualquer conjunto minimal de φ é trivial;*
- (b) *o fluxo φ é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^2 ;*
- (c) *o fluxo φ é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^∞ .*

Demonstração: É óbvio que (c) implica (b). A afirmação que (b) implica (a) é justamente o Teorema de Denjoy-Schwartz; então iremos provar apenas que (a) implica (c). Para fazer isto, inicialmente iremos supor que :

1. Todos os conjunto minimais de φ são triviais.

Primeiro assumamos que φ não tenha pontos fixos. Então M é um toro ou a garrafa de Klein (ver [6]). Se φ não possuir trajetórias recorrentes não-triviais, então (como φ não tem pontos fixos) pelo Teorema de Suavidade de Neumann [[23], teorema 5.1, pg 342], o fluxo φ é topologicamente equivalente a um fluxo suave. Se φ possuir uma trajetória recorrente não-trivial, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson para a garrafa de Klein [19], M é o toro; este fato e o item 1 implicam que φ é topologicamente equivalente a um fluxo irracional que, em particular, é suave. Assim, podemos continuar com a prova assumindo que:

2. O conjunto F dos pontos fixos de φ é não-vazio.

Podemos assumir também que :

3. Qualquer subintervalo de \mathbb{R} é provido com a orientação positiva.

Seja $M - F = \cup_{i=1}^{\infty} \theta_i$, onde $\theta_1, \theta_2, \dots$ são caixas de fluxo de φ satisfazendo todas as condições da proposição 4.2. Consideremos a partição de M induzida pelas caixas de fluxo. Um arco fechado de trajetória σ com a orientação positiva induzida por φ será chamado de *arco elementar tangente* se este está contido na fronteira de algum θ_i e intersecta o conjunto formado por todas as quinas das caixas de fluxo $\theta_1, \theta_2, \dots$ exatamente em seus extremos. Sejam $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ todos os arcos elementares tangentes formando um dos lados da caixa de fluxo θ_i (a finitude de tais arcos segue da proposição 4.2, item (a)) (veja a figura (5.1)). Escolha números reais positivos $\sigma_1(i), \sigma_2(i), \dots, \sigma_n(i)$ tais que $\sum_{j=1}^n \sigma_j(i) = 1$.

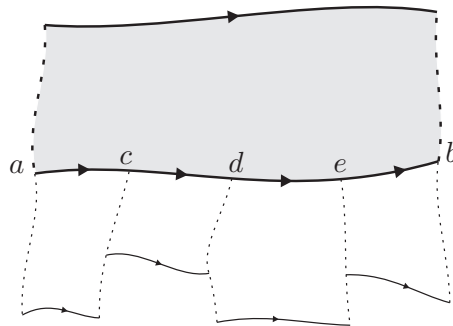


Figura 5.1: $\widehat{ac} = \sigma_1$, $\widehat{cd} = \sigma_2$, $\widehat{de} = \sigma_3$ e $\widehat{eb} = \sigma_4$.

Seja σ um arco elementar tangente. Desde que σ está na fronteira de duas caixas de fluxo, digamos θ_i e θ_j , temos escolhidos dois números reais $\sigma(i)$ e $\sigma(j)$. Agora, iremos escolher para cada $k \in \{i, j\}$ um homeomorfismo preservando orientação $h_{\sigma(k)} : \sigma \rightarrow [0, \sigma(k)]$ tal que:

4. A aplicação $h_{\sigma(i)} \circ h_{\sigma(j)}^{-1}$ é um difeomorfismo suave tendo derivada 1 na vizinhança de 0 e de $\sigma(j)$.

A subvariedade suave $M - F$ de M , considerada como um conjunto de pontos sem sua estrutura diferenciável será denotada por $\widehat{M - F}$. Uma nova estrutura suave será construída em $\widehat{M - F}$. Dado θ_i , denotemos por A_{i1} e A_{i2} os lados transversais de θ_i . Assuma que o fluxo vá de A_{i1} à A_{i2} . Dado $j \in \{1, 2\}$, existem dois μ -homeomorfismos $g_{ijk} : A_{ij} \rightarrow [0, \mu(A_{ij})]$, com $k \in \{1, 2\}$, determinados pelas duas possíveis orientações de A_{ij} .

5. Para cada g_{ijk} escolha uma caixa de fluxo contínua e sobrejetiva,

$$\alpha_{ijk} : [1, 2] \times [0, \mu(A_{ij})] \rightarrow \theta_i, \text{ tal que :}$$

5.a. Para todo $t \in [0, \mu(A_{ij})]$, temos que $\alpha_{ijk}([1, 2] \times \{t\})$ é um arco de trajetória de $\varphi|_{\theta_i}$.

5.b. A primeira coordenada de $(\alpha_{ijk})^{-1}$ restrita a cada arco elementar tangente (orientado) $\sigma = \overline{ab}$ de θ_i , começando em a , coincide com $h_{\sigma(i)} +$ a primeira coordenada de $\alpha_{ijk}^{-1}(a)$.

5.c. $(\alpha_{ijk})^{-1}|_{A_{ij}}$ é o μ -homeomorfismo $g_{ijk} : A_{ij} \rightarrow \{j\} \times [0, \mu(A_{ij})]$.

Seja

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\alpha}_{ijk} = \alpha_{ijk}|_{(1,2) \times (0, \mu(A_{ij}))} : (1, 2) \times (0, \mu(A_{ij})) \rightarrow \widehat{M - F}, \\ \text{tal que } j, k \in \{1, 2\} \text{ e } i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Este conjunto fará parte de um novo sistema de coordenadas para $\widehat{M - F}$. Note que todas as mudanças de coordenadas $\widehat{\alpha}_{ijk} \circ \widehat{\alpha}_{i\tilde{j}\tilde{k}}^{-1}$, com $j, k, \tilde{j}, \tilde{k} \in \{1, 2\}$ são suaves pois, pela proposição 4.2, a caixa de fluxo θ_i é suave (note que estamos no caso onde os conjuntos minimais são triviais).

Seja σ um arco elementar tangente. Suponha que σ esteja contido em $\partial\theta_i \cap \partial\theta_l$. Escolhamos orientações em A_{i1} e A_{l1} , isto é, escolhamos $k, \tilde{k} \in \{1, 2\}$, tais que

$$\sigma = \alpha_{i1k}([\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}] \times \{\mu(A_{i1})\}) = \alpha_{l1\tilde{k}}([\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}] \times \{0\}),$$

onde $[\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}]$ e $[\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}]$ são subintervalos de $[1, 2]$ (veja a figura (5.2)).

Seja $\epsilon = \min\{\mu(A_{i1}), \mu(A_{l1})\}$. Defina $\beta(\sigma) : (\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \widehat{M - F}$ como segue :

$$6. \beta(\sigma)(s, t) = \begin{cases} \alpha_{l1\tilde{k}}(s, t), & \text{se } t \geq 0; \\ \alpha_{i1k}((h_{\sigma(i)} \circ h_{\sigma(l)}^{-1}(s - \epsilon_{l1})) + \epsilon_{i1}, \mu(A_{i1}) + t), & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Note que $h_{\sigma(i)} : \sigma \rightarrow [0, \epsilon_{i2} - \epsilon_{i1}]$ e $h_{\sigma(l)} : \sigma \rightarrow [0, \epsilon_{l2} - \epsilon_{l1}]$. Segue do ítem 5.b. que $\beta(\sigma)$ está bem definida. Todas as possíveis mudanças de coordenadas envolvendo $\beta(\sigma)$, $\widehat{\alpha}_{l1\tilde{k}}$, $\widehat{\alpha}_{i1k}$ são suaves pois $h_{\sigma(i)} \circ h_{\sigma(l)}^{-1}$ é suave. Isto implica que todas as possíveis mudanças de coordenadas envolvendo elementos de

$$\mathcal{A}_2 = \{\beta(\sigma) \mid \sigma \text{ é um arco elementar tangente}\} \cup \mathcal{A}_1$$

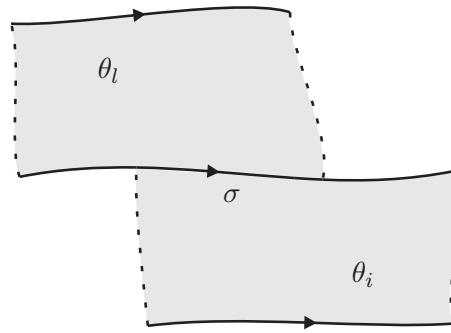


Figura 5.2

são suaves.

Um segmento orientado fechado transversal ao fluxo φ será chamado de *arco elementar transversal* se estiver contido na fronteira de algum θ_i e intersectar o conjunto formado por todas as quinas das caixas de fluxo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ exatamente em seus extremos. Seja Σ um arco elementar transversal. Suponha que $\Sigma \subset A_{i_2} \cap A_{l_1}$, onde A_{i_2} e A_{l_1} são lados transversais de θ_i e θ_l , respectivamente, e também que o fluxo φ cruza Σ de θ_i para θ_l . Estenda a orientação de Σ para uma orientação de ambos, A_{i_2} e A_{l_1} . Sejam $k, \tilde{k} \in \{1, 2\}$ tais que $g_{i_2k} : A_{i_2} \rightarrow [0, \mu(A_{i_2})]$ e $g_{l_1\tilde{k}} : A_{l_1} \rightarrow [0, \mu(A_{l_1})]$ preservam orientação. Sejam $[\delta_1, \delta_2] \subset [0, \mu(A_{i_2})]$ e $[\epsilon_1, \epsilon_2] \subset [0, \mu(A_{l_1})]$ tais que

$$\Sigma = \alpha_{i_2k}(\{2\} \times [\delta_1, \delta_2]) = \alpha_{l_1\tilde{k}}(\{1\} \times [\epsilon_1, \epsilon_2]).$$

Segue do ítem 5.c., que para todo $t \in \Sigma$,

$$7. \quad g_{i_2k}(t) - \delta_1 = g_{l_1\tilde{k}}(t) - \epsilon_1. \quad \text{Em particular, } \epsilon_2 - \epsilon_1 = \delta_2 - \delta_1.$$

Defina $\beta(\Sigma) : (1, 3) \times (\delta_1, \delta_2) \rightarrow \widehat{M - F}$ como

$$\beta(\Sigma)(s, t) = \begin{cases} \alpha_{i_2k}(s, t), & \text{se } s \in (1, 2]; \\ \alpha_{l_1\tilde{k}}(s - 1, t + \epsilon_1 - \delta_1), & \text{se } s \in [2, 3). \end{cases}$$

Pelo ítem 7, temos que $\beta(\Sigma)$ está bem definido. Temos que todas as possíveis mudanças de coordenadas envolvendo $\beta(\Sigma)$, α_{i_2k} e $\alpha_{l_1\tilde{k}}$ são suaves. Isto implica que todas as possíveis mudanças de coordenadas envolvendo elementos de

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{\beta(\Sigma) \mid \Sigma \text{ é arco elementar transversal}\}$$

são suaves.

Agora iremos construir sistemas de coordenadas sobre as quinas das caixas de fluxo $\theta_1, \theta_2, \dots$

$$8. \quad \text{Seja } p \text{ uma quina de } \theta_i. \text{ Existem três casos a serem considerados.}$$

8.a. O conjunto $\{\theta_r \mid r \in \mathbb{N} \text{ e } \theta_r \text{ encontra } p\} = \{\theta_i, \theta_l, \theta_n, \theta_s\}$ e p é quina de todos eles.

8.b. (respectivamente 8.c.). O conjunto $\{\theta_r \mid r \in \mathbb{N} \text{ e } \theta_r \text{ encontra } p\} = \{\theta_i, \theta_l, \theta_n\}$ e p é um extremo de dois arcos elementares tangentes (respectivamente transversais) de θ_l e é quina de θ_n e θ_i . Veja figura (5.3).

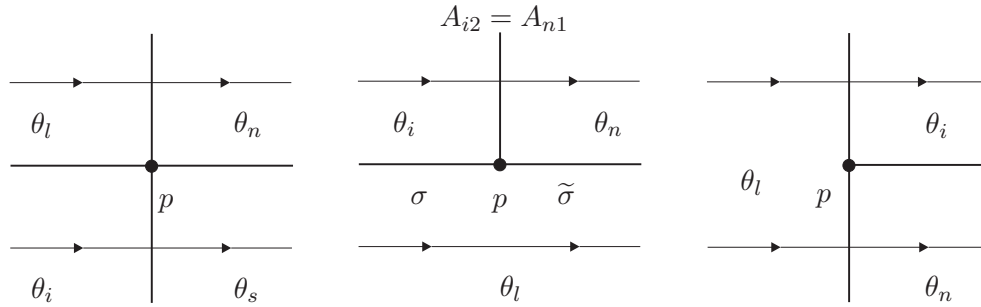


Figura 5.3: Acima temos representados os casos 8.a., 8.b. e 8.c. respectivamente.

Suponha que p seja como no item 8.b.. Seja σ (respectivamente $\tilde{\sigma}$) um arco elementar de θ_l e θ_i (respectivamente θ_n) tendo p como extremo. Suponha que o fluxo φ passe por σ antes de passar por $\tilde{\sigma}$. Acompanhe na figura (5.3). Escolha orientações de A_{i2} , A_{n1} e A_{l1} , isto é, escolha $k, \tilde{k}, \hat{k} \in \{1, 2\}$, tais que para subintervalos $[\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}]$, $[\epsilon_{l2}, \epsilon_{l3}]$, $[\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}]$, $[\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}]$ de $[1, 2]$ aconteça que :

$$\sigma = \alpha_{l1k}([\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}] \times \{\mu(A_{l1})\}) = \alpha_{i2\tilde{k}}([\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}] \times \{0\})$$

$$\tilde{\sigma} = \alpha_{l1k}([\epsilon_{l2}, \epsilon_{l3}] \times \{\mu(A_{l1})\}) = \alpha_{n1\hat{k}}([\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}] \times \{0\}).$$

Seja Σ o arco elementar transversal contido em A_{i2} e tendo p como extremo.

9. Tome $\epsilon \in (0, \mu(\Sigma))$ tão pequeno que para todo $s \in [0, \epsilon]$,

$$(h_{\sigma(l)} \circ h_{\sigma(i)}^{-1})'(s) = (h_{\tilde{\sigma}(l)} \circ h_{\tilde{\sigma}(n)}^{-1})'(s) = 1$$

(observe que isto é possível pelo ítem 4).

Defina $\beta(p) : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \widehat{M - F}$ como segue :

10.

$$\beta(p)(s, t) = \begin{cases} \alpha_{l1k}(s + \epsilon_{l2}, t + \mu(A_{l1})), & t \leq 0; \\ \alpha_{i2\tilde{k}}(s + \epsilon_{i2}, t), & s \leq 0 \text{ e } t \geq 0; \\ \alpha_{n1\hat{k}}(s + \epsilon_{n1}, t), & s \geq 0 \text{ e } t \geq 0. \end{cases}$$

Segue dos itens 5.b., 5.c. e 9, que $\beta(p)$ está não só bem definida, como também todas as mudanças de coordenadas envolvendo $\beta(p), \beta(\sigma), \beta(\tilde{\sigma})$ e $\beta(\Sigma)$ são suaves.

A construção de sistemas de coordenadas quando p é como no item 8.a. ou como no item 8.c. é similar à feita acima. Daí,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_3 \cup \{\beta(p) \mid p \text{ é uma quina de algum } \theta_i; i = 1, 2, \dots\}$$

nos dá um sistema de coordenadas suave para $\widetilde{M - F}$ que dá a este uma estrutura de variedade suave denotada por $\widetilde{M - F}$. Afirmamos que :

11. A folheação $\varphi|_{\widetilde{M - F}}$ em $\widetilde{M - F}$ é suave e topologicamente equivalente a uma folheação contínua $\varphi|_{M - F}$ em $M - F$.

De fato, os elementos de \mathcal{A} são também caixas de fluxo para $\varphi|_{\widetilde{M - F}}$, isto implica que $\varphi|_{\widetilde{M - F}}$ é uma folheação suave em $\widetilde{M - F}$. Desde que cada elemento de \mathcal{A} é uma caixa de fluxo contínua de $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, a aplicação identidade $Id : M - F \rightarrow \widetilde{M - F}$ é um homeomorfismo que dá a equivalência topológica desejada. Isto prova 11.

Procedendo como D. Neumann [[23], teorema 5.1], por [[21], teorema 6.3], existe um difeomorfismo k (de classe C^∞) de $M - F$ sobre $\widetilde{M - F}$ (o teorema 6.3 está feito para variedades tridimensionais, mas o teorema e sua prova são válidos para variedades arbitrárias de dimensão $m \leq 3$); de fato, seja $d : (M - F) \times (M - F) \rightarrow [0, \infty)$ uma métrica compatível com a topologia de $\widetilde{M - F}$; para toda função $\delta : M - F \rightarrow (0, \infty)$ existe um difeomorfismo $k : M - F \rightarrow \widetilde{M - F}$ tal que $d(p, k(p)) < \delta(p)$. Pode ser assumido que $\delta(x)$ tende a zero quando x se aproxima de qualquer ponto de F e daí, k se estende para um homeomorfismo de M que fixa cada singularidade de φ , isto é, $k(q) = q$ para todo $q \in F$.

Seja \mathcal{F} uma folheação orientada em $M - F$ tal que $k(\mathcal{F}) = \varphi|_{\widetilde{M - F}}$. Veremos que:

12. Existe um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}^\infty(M)$ cujo conjunto de singularidades é precisamente F e tal que $Y|_{M - F}$ e \mathcal{F} têm o mesmo retrato de fase.

De fato, seja $X \in \mathcal{X}^\infty(M - F)$ tal que a folheação que este induz é \mathcal{F} . Usando a proposição 3.1, existe uma família $\{M_i \mid i = 2, \dots, n, \dots\}$ de subconjuntos compactos de M tal que $\bigcap_{i=1}^\infty M_i = F$ e para todo $i = 1, 2, \dots$ vale a inclusão $M_{i+1} \subset \text{Int}(M_i)$. Podemos assumir que $M_1 = M$. Defina $V_i = \text{Int}(M_i) - M_{i+2}$. Certamente $\{V_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ é uma cobertura aberta localmente finita de M , ou seja, todo ponto p de M possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos V_i . Seja

$\{\psi_i : M \rightarrow [0, 1] \mid i = 1, 2, \dots\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a esta cobertura, ou seja, dada a cobertura acima, temos que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i = 1$ e o suporte de cada ψ_i está contido em V_i . Para $r = 0, 1, 2, \dots$, dê uma norma $\|\cdot\|_r$ em $\mathcal{X}^\infty(M)$ compatível com sua C^r -topologia e tal que, para todo $Z \in \mathcal{X}^\infty(M)$ valha que $\|Z\|_{r+1} \geq \|Z\|_r$. Estenda X a um campo de vetores \widehat{X} em M identificando $\widehat{X}(p) = 0$ para todo $p \in F$. Certamente cada $\psi_i \cdot \widehat{X}$ pertence a $\mathcal{X}^\infty(M)$.

Dado $i = 1, 2, \dots$ seja c_i um número real positivo tal que $\|c_i \psi_i \widehat{X}\|_i \leq \frac{1}{2^i}$. Desde que, para todo $r = 1, 2, \dots$ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|c_i \psi_i \widehat{X}\|_r \leq \sum_{i=1}^r \|c_i \psi_i \widehat{X}\|_r + \sum_{j>r}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty,$$

a série $(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i) \widehat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \widehat{X}$ converge a um campo de vetores suave Y como requerido em 12.

O fluxo induzido ψ do campo de vetores Y , obtido de 12, é suave e topologicamente equivalente, sob k , à φ . Isto prova o teorema sob a hipótese 1.

13. Agora suponha que φ tenha conjuntos minimais não-triviais.

Procedendo como acima e usando a mesma notação nos casos correspondentes, $\widetilde{M - F}$ pode ser provido com uma estrutura de variedade de classe C^1 denotada por $\widetilde{M - F}$ tal que (veja 11):

14. A folheação $\varphi|_{\widetilde{M - F}}$ em $\widetilde{M - F}$ é de classe C^1 e topologicamente equivalente à folheação $\varphi|_{M - F}$ em $M - F$. Mais ainda, existe um subconjunto compacto $K \subset \widetilde{M - F}$ tal que a subvariedade $M - (\widetilde{F \cup K})$ de $\widetilde{M - F}$ é suave e $\varphi|_{M - (\widetilde{F \cup K})}$ é suave.

Tomando um subatlas adequado, podemos assumir que $\widetilde{M - F}$ seja suave. Certamente, nesta nova estrutura $\varphi|_{\widetilde{M - F}}$ é apenas de classe C^1 . Entretanto, sob estas condições, pelo item 14, a prova que φ é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^1 pode ser feita da mesma forma como acima fora feito usando a hipótese feita no item 1. ■

Corolário 5.1. (Corolário de Suavidade:) *Seja \mathcal{F} uma folheação orientável, unidimensional e contínua, com singularidades em uma variedade M que é bidimensional, sem fronteira, compacta e de classe C^∞ . Se o conjunto de singularidades de \mathcal{F} for compacto, então existe um fluxo C^1 que é topologicamente equivalente a \mathcal{F} .*

Demonstração: Basta seguir os passos da demonstração do Teorema de Suavidade 5.1.

Índice Remissivo

- τ -seqüência, 50
 - atratora, 50
 - errante, 50
 - periódica, 50
- $span(\Sigma)$, 51
- aplicação
 - μ -suave, 49
 - f_C , 35
 - de Poincaré, 28
- arco
 - elementar
 - tangente, 66
 - transversal, 68
- círculo
 - de dois lados, 37
 - de um lado, 37
 - transversal, 28
- caixa de fluxo, 28
- cobre, 38
- conjunto
 - invariante, 28
 - minimal, 28
 - não-trivial, 28
 - trivial, 28
- contato de ordem infinita, 55
- coordenadas
 - μ -coordenadas, 49
- difeomorfismo
 - de Denjoy, 21
- domínio
 - fundamental, 50
- engordar órbitas, 22
- errante
 - intervalo, 28
 - ponto, 28
- fluxo, 27
- Fluxo Irracional no Toro, 20
- folhas, 20
- folheação, 20
- Função
 - de Cantor, 40
- homeomorfismo
 - μ -homeomorfismo, 49
- limite
 - ω e α , 27
- medida
 - distinguida, 49
- ponto
 - fixo, 27
 - regular, 27
- região

- de recorrência, 38
- Relação de equivalência, 33
- segmento
 - transversal, 28
- semi-trajetória
 - negativa, 27
 - positiva, 27
- simplexo, 30
- suspensão, 38
- Teorema
 - de Estrutura, 44
 - de Denjoy, 23
 - de Schwatz, 29
- topologicamente
 - conjugadas, 28
 - equivalentes, 28
 - semi-conjugada, 18
- trajetória, 27
 - periódica, 27
 - recorrente, 27
 - não-trivial, 27
- transformação
 - de troca de intervalos, $(\alpha, \tau)-$, 31
 - de troca de intervalos, 30
- variedade
 - de tipo finito, 43
- vetor
 - de probabilidade, 30

Referências Bibliográficas

- [1] BHATIA, N. P. e SZEGO, B. P.. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Springer-Verlag: New York (1970).
- [2] CAMACHO, C. e LINS NETO, A.. *Teoria Geométrica das Folheações*. Projeto Euclides, IMPA (1979).
- [3] CHERRY, T. M.. *Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on the torus*. Proc. Lond. Math. Soc. 44 (1938) 175-215.
- [4] DENJOY, A.. *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. Mathématique 9 (11)(1932), 333-375.
- [5] GARDINER, C. J.. *The Structure of Flows Exhibiting non-trivial recurrence on Two-dimensional manifolds*. J. Diff. Eqn. 57 (1985), 138-158.
- [6] GODBILLON, C.. *Dynamical Systems on Surfaces*. Springer-Verlag, Berlim Heidelberg.
- [7] GOMES, B. P. V.. *Sobre o Closing Lemma de Classe C^r* . Dissertações de Mestrado do ICMC-USP (2006).
- [8] GUTIERREZ, C.. *Smoothing Continuous Flows on two-manifolds and Recurrences*. Ergodic Theory and Dynamical Systems (6)(1986), 17-44.
- [9] GUTIERREZ, C.. *Smooth non-orientable non-trivial recurrence on two-manifolds*. J. Diff. Eq. 29 (3)(1978), 388-395.
- [10] GUTIERREZ, C.. *Smoothability of Cherry flows on two-manifolds*. Springer Lecture Notes in Mathematics, 1007, Geometric Dynamics, Proc. Rio de Janeiro (1981), 308-331.
- [11] GUTIERREZ, C.. *Structural Stability for flows on the torus with a cross cap*. Trans. Amer. Math. Soc. 241 (1978), 311-320.

- [12] GUTIERREZ, C.. *Smoothing Continuous Flows and the Converse of Denjoy-Schwartz Theorem*. An. Acad. Brasil. Ciências 51 no. 4 (1979). 581-589.
- [13] HALMOS, P. R.. *Measure Theory*. Van Nostrand (1950).
- [14] HARRISON, J.. *Unsmoothable diffeomorphisms*. Ann. of Math. 102 (1975), 85-94.
- [15] KEANE, M.. *Interval Exchange Transformations*. Math. Z. 141 (1975), 85-94.
- [16] LEVITT, G.. *Feuilletages des surfaces*. Ann. Inst. Fourier 32 (2)(1982).
- [17] LEVITT, G.. *La décomposition dynamique et la différentiability des feuilletages des surface*. Preprint.
- [18] LEVITT, G.. *Pantalons et feuilletages des surfaces*. Topology 21 (1)(1982), 9-33.
- [19] MARKLEY, N.. *The Poincaré-Bendixson theorem for the Klein bottle*. Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969), 159-165.
- [20] MENDES, L. H.. *Interval exchange transformations and foliations*. Preprint: to appear in Bol. Soc. Bras. Mat.
- [21] MUNKRES, J.. *Obstructions to smoothing piecewise differentiable homeomorphisms*. Ann. Math. 72 (1960) 521-554.
- [22] NEUMANN, D.. *Central Sequences in Flows on 2-manifolds of Finite Genus*. Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1) (1976), 39-43.
- [23] NEUMANN, D.. *Smoothing continuous flows on 2-manifolds*. J. Diff. Eq. 28 (1978), 327-344.
- [24] PEIXOTO, M.. *Structural Stability on Two-dimensional Manifolds*. Topology 1 (1962) 101-120.
- [25] PIRES, B. F. *Propriedades Dinâmicas e Ergódicas das Transformações de Intercâmbio de Intervalos*. Dissertações de Mestrado do ICMC-USP (2003).
- [26] ROSENBERG, H.. *Labryinths in the disc and surfaces*. Ann. of Math. 117 (1983), 1-33.
- [27] SCHWARTZ, A.J. e THOMAS, E.S.. *The depth of the center of 2-manifolds*. Global Anal. Proc. Symp. Pure Math., 14 Amer. Math. Soc.: Providence, R.I., 253-264 (1970).
- [28] SCHWARTZ, A. J.. *A generalization of the Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds*. Amer. J. Math. 85 (1963), 453-548.
- [29] SCHWEITZER, P.A.. *Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliatons*. Ann. of Math. 100 (1974), 386-400.
- [30] SMALE, S.. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.

-
- [31] SOTOMAYOR, J.. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [32] WHITNEY, H.. *Regular families of curves*. Ann. of Math. 34 (2) (1933), 244-270.