UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Números de Betti: aplicações e problemas relacionados

Paulo Damião Christo Martins

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Paulo Damião Christo Martins

Números de Betti: aplicações e problemas relacionados

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
Março de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M379n

Martins, Paulo Damião Christo
Números de Betti: aplicações e problemas relacionados / Paulo Damião Christo Martins; orientador Victor Hugo Jorge Pérez. -- São Carlos, 2023.
126 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Números de Betti. 2. Módulo. 3. Resolução livre minimal. I. Jorge Pérez, Victor Hugo, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Paulo Damião Christo Martins

Betti numbers: applications and related problems

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
March 2023

AGRADECIMENTOS

Ao professor Victor Hugo, pela oportunidade de realizar o mestrado sob sua orientação e pelo suporte dado a mim ao longo destes dois anos.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSM e do Programa de Pós-Graduação em Matemática do ICMC, pelas contribuições à minha formação acadêmica. Em especial, agradeço aos professores Dirceu Bagio e João Lazzarin e às professoras Daiana Flôres e Saradia Della Flora por todo o aprendizado que me proporcionaram ao longo da graduação.

Aos amigos e colegas de curso que fazem parte da minha jornada em São Carlos, pelos momentos de aprendizado e de descontração.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2021/00737-0, pelo apoio financeiro.

"Algebra is generous,
she often gives us more than is asked of her"
(Jean D'alembert)

RESUMO

MARTINS, P. D. C. **Números de Betti: aplicações e problemas relacionados**. 2023. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

O estudo de resoluções livres de módulos sobre um anel comutativo consiste em uma importante ferramenta para se obter propriedades dos módulos que desejamos investigar. Neste trabalho, usando as resoluções livres minimais, estudaremos os números de Betti de módulos finitamente gerados sobre um anel local noetheriano. Apresentaremos aplicações de tais invariantes em Álgebra Comutativa, problemas em aberto e resultados recentes relacionados ao tópico. Além disso, introduziremos uma série de ferramentas de Álgebra Homológica que aplicaremos durante este texto, como os funtores derivados Tor e Ext e o Complexo de Koszul.

Palavras-chave: Números de Betti, Módulo, Resolução livre minimal.

ABSTRACT

MARTINS, P. D. C. **Betti numbers: applications and related problems**. 2023. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

The study of free resolutions of modules over a commutative ring is an important tool to obtain properties of the module that we want to investigate. In this work, using minimal free resolutions, we will study the Betti numbers of finitelly generated modules over a Noetherian local ring. We will present applications of such invariants in Commutative Algebra, open problems and recent results related to the topic. Also, we will introduce a series of Homological Algebra tools that we will apply throughout this text, such as the derived functors Tor and Ext and the Koszul Complex.

Keywords: Betti numbers, Module, Minimal free resolution.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Em Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica, o estudo de resoluções livres de módulos sobre um anel comutativo R é uma ferramenta importante para se obter resultados utilizando métodos de Álgebra Homológica. Por exemplo, podemos usar resoluções livres para estudar o quanto um R-módulo M desvia de ser um R-módulo projetivo (ver Seção 4.2). Além disso, quando $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local noetheriano, podemos estudar a regularidade do anel R a partir de resoluções livres do corpo residual k (ver Teorema B.4). Em virtude disso, problemas envolvendo resoluções livres têm sido abordados por diversos pesquisadores em tais áreas.

Se fixamos $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado, então podemos construir uma resolução livre minimal de M. O posto dos R-módulos que formam uma resolução livre minimal independem da resolução, isto é, são invariantes que dependem apenas do R-módulo M. Tais invariantes são chamados os números de Betti de M e denotados por $\beta_i^R(M)$, para cada número inteiro não negativo i. Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local regular d-dimensional, então, usando o complexo de Koszul associado a um sistema de parâmetros regular de R, verifica-se que os números de Betti do corpo residual k são dados por

$$\beta_i^R(k) = \binom{d}{i},$$

para todo número inteiro não negativo i (ver Exemplo 4.1). Sendo assim, em Buchsbaum e Eisenbud (1977) e em Hartshorne (1979) (atribuída à *Geoffrey Horrocks* (1933-2012)), surgiu a afirmação de que tal complexo de Koszul poderia ser, em certo sentido, a menor resolução livre de um R-módulo de comprimento finito, isto é, a seguinte conjectura:

Conjectura 1 (Conjectura de Buchsbaum-Eisenbud-Horrocks)**.** Sejam R um anel local noetheriano d-dimensional e $M \neq 0$ um R-módulo de comprimento finito tal que $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. Então:

$$\beta_i^R(M) \geq \binom{d}{i},$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Apesar da conjectura de Buchsbaum-Eisenbud-Horrocks (BEH) ter sido apresentada a mais de 40 anos não existem muitos resultados para o caso local que enunciamos acima. Soluções parciais para este problema podem ser encontradas em Avramov e Buchweitz (1993) e Chang (1997). Nesse sentido, Avramov e Buchweitz (1993) introduziram uma conjectura mais fraca, que enunciaremos abaixo.

Conjectura 2 (Total Rank)**.** Sejam R um anel local noetheriano d-dimensional e $M \neq 0$ um R-módulo de comprimento finito tal que $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. Então:

$$\sum_{i=0}^{d} \beta_i^R(M) \geq 2^d.$$

A demonstração de que a validade da conjectura BEH implica na validade da conjectura Total Rank é uma aplicação direta da fórmula binomial de Newton. Além disso, Avramov e Buchweitz (1993) provaram a validade desta conjectura no caso em que $d = 5$. Recentemente, usando ferramentas da K-teoria, Walker (2017), realizou um grande avanço neste problema, tendo resolvendo-o para módulos sobre anéis interseção completa cujo corpo residual tenha característica distinta de 2. Também existe uma afirmação mais forte do que a conjectura BEH, que enunciaremos abaixo.

Conjectura 3. Sejam R um anel local noetheriano d-dimensional e $M \neq 0$ um R-módulo de comprimento finito tal que $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. Se $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$ é uma resolução livre minimal de M, então:

$$\mathrm{rk}(\varphi_i) \geq \binom{d-1}{i-1},$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

A verificação de que a validade da Conjectura 3 implica na validade da conjectura BEH consiste em uma aplicação direta do Teorema A.4. No caso em que estamos abordando, isto é, sob anéis locais, o último problema é menos abordado do que os anteriores.

A existência de diversos problemas em aberto, bem como a aplicabilidade destes em Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica, nos motivou ao estudo dos números de Betti. A escolha do tema fez com que o autor tenha estudado diversos tópicos atuais de Álgebra Comutativa e Álgebra Homológica. Além disso, o autor pode familiarizar-se com a aplicação de métodos de Álgebra Homológica em Álgebra Comutativa, tais como o uso dos funtores derivados.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 2, fazemos uma breve introdução à Álgebra Homológica de módulos sobre um anel comutativo. Para tanto, será necessários introduzirmos diversas noções básicas, tais como complexos e módulos de homologia. As definições e os resultados que apresentamos neste capítulo serão a base para o que estudaremos nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, trataremos sobre as principais ferramentas matemáticas utilizadas ao longo deste trabalho. A saber, os funtores derivados e o Complexo de Koszul.

No Capítulo 4, definiremos os números de Betti e abordaremos algumas de suas aplicações em Álgebra Comutativa . Nesse sentido, estudaremos critérios para que um anel local seja de Gorenstein ou interseção completa em termos de números de Betti.

Por fim, o Capítulo 5 será dedicado ao estudo de resultados à cerca dos números de Betti de certas classes de módulos cíclicos. Alguns dos resultados que estudaremos neste capítulo irão nos fornecer soluções parciais para os problemas que enunciamos acima. Neste capítulo, verificaremos a validade da Conjectura BEH para o corpo residual de um anel local noetheriano e estudaremos cotas inferiores para números de Betti para R-módulos cíclicos da forma R/I, onde I é uma interseção completa. Também, provaremos uma fórmula para os números de Betti do produto de dois ideais Tor-independentes.

Além disso, este trabalho conta com três apêndices. No Apêndice A, recordamos resultados clássicos de Álgebra Comutativa e introduzimos, de forma concisa, as noções de completamento de anéis e módulos e de posto de módulos e alguns resultados relacionados. No Apêndice B, faremos uma breve exposição de conceitos e resultados que, em geral, são apresentados em um segundo curso de Álgebra Comutativa. As noções do Apêndice B serão usadas ao longo dos capítulos 3, 4 e 5. Finalmente, no Apêndice C, mostramos os comandos utilizados nos exemplos computacionais que abordamos neste trabalho.

Ao longo deste trabalho, R e S serão anéis comutativos com unidade $1 \neq 0$. Por fim, denotaremos por $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números inteiros não negativos e o conjunto dos números inteiros positivos, respectivamente.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Neste capítulo, introduziremos noções de Álgebra Comutativa e de Álgebra Homológica que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. A principal referência utilizada neste capítulo é Rotman (2009).

2.1 Funtores na categoria Mod_R

Definição 2.1. Uma **categoria** $\mathscr{C}$ consiste de:

1. Uma classe $Ob(\mathscr{C})$ cujos elementos são chamados de **objetos** de $\mathscr{C}$.
2. Para cada $X,Y \in Ob(\mathscr{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ cujos elementos são chamados de **morfismos** de X para Y.
3. Para cada X,Y e $Z \in Ob(\mathscr{C})$, existe uma aplicação de composição

$$\begin{aligned} \circ : \text{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \times \text{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z) &\to \text{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

   satisfazendo:

   i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   ii) Para cada $X \in Ob(\mathscr{C})$, existe $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ tal que para quaisquer $f \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$, temos $f \circ \text{id}_X = f$ e $\text{id}_X \circ g = g$.

Observação 2.1. Ao longo deste trabalho, nos limitamos à categoria Mod_R, cujos objetos são os R-módulos e os morfismos são os R-homomorfismos.

Definição 2.2. Um **funtor aditivo covariante** da categoria de R-módulos para a categoria de S-módulos é uma correspondência $F : \text{Mod}_R \to \text{Mod}_S$ tal que:

1. Para cada $M \in \text{Mod}_R$, F associa a um único elemento $F(M) \in \text{Mod}_S$.

2. Dados M e $N \in \text{Mod}_R$ e $f \in \text{Hom}_R(M,N)$, F associa a um único S-homomorfismo $F(f) \in \text{Hom}_S(F(M),F(N))$, e além disso:

   (i) F preserva composição, isto é, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, desde que $g \circ f$ esteja definida.

   (ii) F preserva a identidade, isto é, $F(\text{id}_M) = \text{id}_{F(M)}$, para todo $M \in \text{Mod}_R$.

   (iii) F preserva soma, isto é, $F(f+g) = F(f) + F(g)$, para quaisquer R-homomorfismos f e $g \in \text{Hom}_R(M,N)$, onde M e $N \in \text{Mod}_R$.

Definição 2.3. Um **funtor aditivo contravariante** da categoria de R-módulos para a categoria de S-módulos é uma correspondência $F : \text{Mod}_R \to \text{Mod}_S$ tal que:

1. Para cada $M \in \text{Mod}_R$, F associa a um único elemento $F(M) \in \text{Mod}_S$.

2. Dados M e $N \in \text{Mod}_R$ e $f \in \text{Hom}_R(M,N)$, F associa a um único S-homomorfismo $F(f) \in \text{Hom}_S(F(N),F(M))$, e além disso:

   (i) F preserva composição, isto é, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, desde que $g \circ f$ esteja definida.

   (ii) F preserva a identidade, isto é, $F(\text{id}_M) = \text{id}_{F(M)}$, para todo $M \in \text{Mod}_R$.

   (iii) F preserva soma, isto é, $F(f+g) = F(f) + F(g)$, para quaisquer R-homomorfismos f e $g \in \text{Hom}_R(M,N)$, onde M e $N \in \text{Mod}_R$.

Os exemplos abaixo serão fundamentais ao longo deste trabalho.

Exemplo 2.1. Seja M um R-módulo. Então, $M \otimes_R -$ é o funtor aditivo covariante da categoria Mod_R na categoria Mod_R dado por:

$$\begin{aligned} M \otimes_R - : \text{Mod}_R &\to \text{Mod}_R \\ N &\mapsto M \otimes_R N \\ f : N \to P &\mapsto \text{id}_M \otimes f : M \otimes_R N \to M \otimes_R P \end{aligned}$$

Analogamente, define-se o funtor aditivo covariante $- \otimes_R M$.

Exemplo 2.2. Seja M um R-módulo. Então, $\text{Hom}_R(-,M)$ é o funtor aditivo contravariante da categoria Mod_R na categoria Mod_R dado por:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(-,M) : \text{Mod}_R &\to \text{Mod}_R \\ N &\mapsto \text{Hom}_R(N,M) \\ f : N \to P &\mapsto f^* : \text{Hom}_R(P,M) \to \text{Hom}_R(N,M), \end{aligned}$$

onde $f^*(g) = g \circ f$, para quaisquer $g \in \text{Hom}_R(P,M)$.

Exemplo 2.3. Seja M um R-módulo. Então, $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ é o funtor aditivo covariante da categoria Mod_R na categoria Mod_R dado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M,-) : \mathrm{Mod}_R &\to \mathrm{Mod}_R \\ N &\mapsto \mathrm{Hom}_R(M,N) \\ f : N \to P &\mapsto f_* : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,P), \end{aligned}$$

onde $f_*(g) = f \circ g$, para quaisquer $g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Outra noção importante é a noção de funtor exato, que introduziremos a seguir.

Definição 2.4. Sejam M,N e Q três R-módulos e $f : M \to N$ e $g : N \to Q$ dois R-homomorfismos. Então:

i) Um funtor covariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é **exato à esquerda** se a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$$

implicar que a sequência

$$0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(Q)$$

é exata.

ii) Um funtor covariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é **exato à direita** se a exatidão da sequência

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

implicar que a sequência

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(Q) \longrightarrow 0$$

é exata.

iii) Um funtor covariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é **exato** se é exato à esquerda e à direita.

Analogamente, vamos definir para funtores contravariantes.

Definição 2.5. Sejam M,N e Q três R-módulos e $f : M \to N$ e $g : N \to Q$ dois R-homomorfismos. Então:

i) Um funtor contravariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é **exato à esquerda** se a exatidão da sequência

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

implicar que a sequência

$$0 \longrightarrow F(Q) \xrightarrow{F(g)} F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M)$$

é exata.

ii) Um funtor contravariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é **exato à direita** se a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$$

implicar que a sequência

$$F(Q) \xrightarrow{F(g)} F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M) \longrightarrow 0$$

é exata.

iii) Um funtor contravariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é **exato** se é exato à esquerda e à direita.

As proposições que enunciaremos a seguir são frequentemente abordadas em um primeiro curso de Álgebra Comutativa e terão suas demonstrações omitidas neste trabalho. O leitor interessado em tais demonstrações pode consultar a referência Atiyah e Macdonald (1969).

Proposição 2.1. Se M é um R-módulo, então:

i) Os funtores $- \otimes_R M$ e $M \otimes_R -$ são exatos à direita.

ii) Os funtores $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ e $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ são exatos à esquerda.

Observação 2.2. Em geral, os funtores da proposição acima não são exatos.

Definição 2.6. Sejam F e $T : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ dois funtores covariantes. Uma **transformação natural** $\tau : F \to T$ é uma família de R-homomorfismos $\tau = \{\tau_M : FM \to TM\}_{M \in Ob(\mathrm{Mod}_R)}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} FM \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "Ff"'] & TM \arrow[d, "Tf"] \\ FN \arrow[r, "\tau_N"'] & TN \end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo R-homomorfismo $f : M \to N$. Além disso, um **isomorfismo natural** é uma transformação natural τ tal que τ_M é um R-isomorfismo, para cada $M \in \mathrm{Mod}_R$.

Analogamente, vamos definir para funtores contravariantes.

Definição 2.7. Sejam F e $T : \text{Mod}_R \to \text{Mod}_R$ dois funtores contravariantes. Uma **transformação natural** $\tau : F \to T$ é uma família de R-homomorfismos $\tau = \{\tau_M : FM \to TM\}_{M \in Ob(\text{Mod}_R)}$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} FN \arrow[r, "\tau_N"] \arrow[d, "Ff"'] & TN \arrow[d, "Tf"] \\ FM \arrow[r, "\tau_M"'] & TM \end{tikzcd}$$

é comutativo, para todo R-homomorfismo $f : M \to N$. Além disso, um **isomorfismo natural** é uma transformação natural τ tal que τ_M é um R-isomorfismo, para cada $M \in \text{Mod}_R$.

2.2 Módulos projetivos e injetivos

Definição 2.8. Um R-módulo P é **projetivo** se para qualquer R-homomorfismo sobrejetivo $f : M \to N$ e qualquer R-homomorfismo $g : P \to N$ existe um R-homomorfismo $h : P \to M$ tal que $f \circ h = g$, isto é, tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

É fácil ver que a propriedade de ser projetivo é preservada por R-isomorfismos. No decorrer deste texto será importante o fato de que todo R-módulo livre é projetivo. Para verificarmos isso, inicialmente vejamos que o anel R é um R-módulo projetivo.

Lema 2.1. Um anel R é um R-módulo projetivo.

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ um R-homomorfismo sobrejetivo e $g : R \to N$ um R-homomorfismo. Fixemos $n = g(1)$ e seja $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Considerando $h : R \to M$ o R-homomorfismo dado por $h(r) = rm$, temos que

$$f(h(r)) = f(rm) = rf(m) = rn = rg(1) = g(r).$$

Ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo e R é um R-módulo projetivo. $\square$

Proposição 2.2. Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R-módulos. Então, a soma direta $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é um R-módulo projetivo se e somente se cada M_i, $i \in I$, é projetivo.

Demonstração. Suponhamos que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ seja um R-módulo projetivo. Fixado $j \in I$, provaremos que M_j é um R-módulo projetivo. Dados um homomorfismo de R-módulos sobrejetivo $f : M \to N$ e um R-homomorfismo $g : M_j \to N$, então, como $\bigoplus_{i\in I} M_i$ é projetivo, existe um R-homomorfismo $h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[ddl, "h"'] & \\
 & M_j \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde π_j, $j \in I$, é a projeção de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ sobre M_j. Assim, restringindo h a M_j obtemos um R-homomorfismo $\tilde{h} : M_j \to M$ tal que $f \circ \tilde{h} = g$ e M_j é projetivo, para cada $j \in I$. Reciprocamente, suponhamos que cada M_j, $j \in I$, é projetivo. Considerando f como antes e $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ um R-homomorfismo, podemos escrever $g = \sum_{i\in I} g_i$, onde $g_j = g \circ i_j : M_j \to N$ e i_j denota a inclusão de M_j em $\bigoplus_{i\in I} M_i$, para cada $j \in I$. Como M_j é projetivo, para cada $j \in I$, podemos encontrar um R-homomorfismo $h_j : M_j \to M$ tal que $f \circ h_j = g_j$. Assim, definindo $h = \sum_{i\in I} h_i \circ \pi_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$, temos que

$$f(h((m_i)_{i\in I})) = f\left(\sum_{i\in I} h_i(m_i)\right) = \sum_{i\in I} f(h_i(m_i)) = \sum_{i\in I} g_i(m_i) = g((m_i)_{i\in I})$$

para todo $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, isto é $f \circ h = g$ e $\bigoplus_{i\in I} M_i$ é um R-módulo projetivo. □

Corolário 2.1. Todo R-módulo livre é projetivo.

Apesar de sua simplicidade, a construção que faremos na próxima proposição será importante quando tratarmos de resoluções projetivas.

Proposição 2.3. Para todo R-módulo M existe um R-homomorfismo sobrejetivo $f : P \to M$, onde P é um R-módulo projetivo.

Demonstração. Seja $\{m_i\}_{i\in I}$ um conjunto de geradores de M. Considerando o R-módulo livre $R^I = \bigoplus_{i\in I} R$, com base canônica $\{e_i\}_{i\in I}$, podemos construir um R-homomorfismo $f : R^I \to M$ tal que $f(e_i) = m_i$, para cada $i \in I$. Como $\{m_i\}_{i\in I}$ é um conjunto de geradores de M, então f é um R-homomorfismo sobrejetivo. □

Antes de terminarmos esta seção, daremos a definição de R-módulo injetivo e enunciaremos um resultado importante para a construção de resoluções injetivas.

Definição 2.9. Um R-módulo E é **injetivo** se para qualquer R-homomorfismo injetivo $f : M \to N$ e qualquer R-homomorfismo $g : M \to E$ existe um R-homomorfismo $h : N \to E$ tal que $h \circ f = g$, isto é, tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Analogamente ao que ocorre com R-módulos projetivos, a propriedade de ser injetivo é preservada por R-isomorfimos. A demonstração da proposição seguinte demanda uma série de resultados auxiliares, tais como o Critério de Baer, e será omitida.

Proposição 2.4. Se M é um R-módulo, então existem um R-módulo injetivo E e um R-homomorfismo injetivo $f : M \to E$.

Demonstração. Ver Rotman (2009, p. 123). □

2.3 Complexos e cocomplexos

Definição 2.10. Sejam $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos e $\{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-homomorfismos. Uma sequência

$$(M_\bullet, d_\bullet) : \cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

é um **complexo** se $d_i \circ d_{i+1} = 0$, ou seja, se $\operatorname{Im}(d_{i+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(d_i)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.3. Em geral, denotaremos um complexo $(M_\bullet, d_\bullet)$ simplesmente por $M_\bullet$, quando isto não causar confusão. Além disso, iremos nos referir aos R-homomorfismos d_i, $i \in \mathbb{Z}$, como diferenciais.

Exemplo 2.4. Se $M_\bullet$ é um complexo com i-ésimo diferencial d_i, então o complexo $M_\bullet[-1]$ é o complexo cujo i-ésimo R-módulo é M_{i-1} e o i-ésimo diferencial é $-d_{i-1}$.

Exemplo 2.5. Se $M_\bullet$ é um complexo com i-ésimo diferencial d_i e $p \in \mathbb{Z}$, então o complexo $M_{\geq p}$ é obtido a partir dos R-módulos

$$(M_{\geq p})_q = \begin{cases} M_q, & \text{se } q \geq p; \\ 0, & \text{se } q < p. \end{cases}$$

e diferenciais

$$d_q^{M_{\geq p}} = \begin{cases} d_q, & \text{se } q > p; \\ 0, & \text{se } q \leq p. \end{cases}$$

Nesta seção, não daremos exemplos concretos de complexos. No entanto, este conceito irá aparecer repetidamente ao longo deste trabalho. A seguir, veremos como relacionar dois complexos e introduziremos os módulos de homologia, que serão fundamentais ao longo deste trabalho.

Definição 2.11. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos. Um **morfismo de complexos** $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ é uma família de R-homomorfismos $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & M_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "e_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "e_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

é comutativo.

Definição 2.12. Seja $(M_\bullet, d_\bullet)$ um complexo. A i-ésima **homologia** de $(M_\bullet, d_\bullet)$ é definida como o R-módulo quociente

$$H_i(M_\bullet) := \frac{\mathrm{Ker}(d_i)}{\mathrm{Im}(d_{i+1})}.$$

No próximo resultado, a cada morfismo de complexos, associaremos uma família de morfismos entre as suas respectivas homologias.

Proposição 2.5. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos e $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ um morfismo de complexos. Então, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe um R-homomorfismo $H_i(f_\bullet) : H_i(M_\bullet) \to H_i(N_\bullet)$ definido por

$$H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})) = f_i(x) + \mathrm{Im}(e_{i+1}),$$

para todo $x + \mathrm{Im}(d_{i+1}) \in H_i(M_\bullet)$.

Demonstração. Fixemos $i \in \mathbb{Z}$. Dado $x \in \mathrm{Ker}(d_i)$, então, pela comutatividade do diagrama 2.1, $e_i(f_i(x)) = f_{i-1}(d_i(x)) = 0$, isto é, $f_i(x) \in \mathrm{Ker}(e_i)$. Com isso, vemos que faz sentido considerar a aplicação $H_i(f_\bullet)$. Agora, verificaremos sua boa definição. Sejam $x, y \in \mathrm{Ker}(d_i)$ e suponhamos que $x + \mathrm{Im}(d_{i+1}) = y + \mathrm{Im}(d_{i+1})$, então $x - y \in \mathrm{Im}(d_{i+1})$. Ou seja, existe $z \in M_{i+1}$ tal que $d_{i+1}(z) = x - y$. Portanto, usando a comutatividade do diagrama 2.1, temos que

$$f_i(x) - f_i(y) = f_i(x-y) = f_i(d_{i+1}(z)) = e_{i+1}(f_{i+1}(z)) \in \mathrm{Im}(e_{i+1}).$$

Assim, $f_i(x) + \mathrm{Im}(e_{i+1}) = f_i(y) + \mathrm{Im}(e_{i+1})$ e $H_i(f_\bullet)$ está bem definida. A verificação de que cada $H_i(f_\bullet)$, $i \in \mathbb{Z}$, é um R-homomorfismo é trivial, notando que cada f_i é um R-homomorfismo. $\square$

Observação 2.4. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos e $f_\bullet$ e $g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ dois morfismos de complexos. Podemos definir o morfismo de complexos $f_\bullet + g_\bullet := \{f_i + g_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : M_\bullet \to N_\bullet$.

Proposição 2.6. Se $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ são dois complexos e $f_\bullet$ e $g_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ são dois morfismos de complexos, então $H_i(f_\bullet + g_\bullet) = H_i(f_\bullet) + H_i(g_\bullet)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Fixemos $i \in \mathbb{Z}$. Dado $x + \mathrm{Im}(d_{i+1}) \in H_i(M_\bullet)$, temos que

$$\begin{aligned} H_i(f_\bullet + g_\bullet)(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})) &= (f_i + g_i)(x) + \mathrm{Im}(e_{i+1}) \\ &= (f_i(x) + g_i(x)) + \mathrm{Im}(e_{i+1}) \\ &= (f_i(x) + \mathrm{Im}(e_{i+1})) + (g_i(x) + \mathrm{Im}(e_{i+1})) \\ &= H_i(f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})) + H_i(g_\bullet)(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})) \\ &= (H_i(f_\bullet) + H_i(g_\bullet))(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})). \end{aligned}$$

Ou seja, $H_i(f_\bullet) + H_i(g_\bullet) = H_i(f_\bullet + g_\bullet)$. □

Proposição 2.7. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$, $(N_\bullet, e_\bullet)$ e $(Q_\bullet, h_\bullet)$ três complexos e $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ e $g_\bullet : N_\bullet \to Q_\bullet$ dois morfismos de complexos. Se $g_\bullet \circ f_\bullet : M_\bullet \to Q_\bullet$ é o morfismo de complexos obtido via $\{g_i \circ f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, então $H_i(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Fixemos $i \in \mathbb{Z}$. Dado $x + \mathrm{Im}(d_{i+1}) \in H_i(M_\bullet)$, temos que

$$\begin{aligned} (H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet))(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})) &= H_i(g_\bullet)(f_i(x) + \mathrm{Im}(e_{i+1})) \\ &= g_i(f_i(x)) + \mathrm{Im}(h_{i+1}) \\ &= H_i(g_\bullet \circ f_\bullet)(x + \mathrm{Im}(d_{i+1})). \end{aligned}$$

Ou seja, $H_i(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_i(g_\bullet) \circ H_i(f_\bullet)$. □

Definição 2.13. Sejam $f, g : (M_\bullet, d_\bullet) \to (N_\bullet, e_\bullet)$ dois morfismos de complexos. Dizemos que $f_\bullet$ é **homotópico** a $g_\bullet$ se existe uma coleção de R-homomorfismos $h := \{h_i : M_i \to N_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $f_i - g_i = e_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Podemos ilustrar a situação da definição acima usando o diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & M_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h_{i-1}"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "e_{i+1}"] & N_i \arrow[r, "e_i"] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

onde as flexas verticais representam f_i e g_i, para todo $i \in \mathbb{Z}$. A noção de homotopia entre morfismos de complexos é importante, tendo vista que dois morfismos homotópicos induzem os mesmos R-homomorfismos considerados na Proposição 2.5.

Proposição 2.8. Sejam $f_\bullet$ e $g_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \to (N_\bullet, e_\bullet)$ dois morfismos de complexos. Se $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicos, então $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Fixado $i \in \mathbb{Z}$, consideremos $x + \operatorname{Im}(d_{i+1}) \in H_i(M_\bullet)$, para algum $x \in \operatorname{Ker}(d_i)$. Escrevendo

$$f_i = e_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i + g_i,$$

onde h é como na definição 2.13, temos que

$$\begin{aligned} H_i(f_\bullet)(x + \operatorname{Im}(d_{i+1})) &= f_i(x) + \operatorname{Im}(e_{i+1}) \\ &= (e_{i+1}(h_i(x)) + h_{i-1}(d_i(x)) + g_i(x)) + \operatorname{Im}(e_{i+1}) \\ &= g_i(x) + \operatorname{Im}(e_{i+1}) \\ &= H_i(g_\bullet)(x + \operatorname{Im}(d_{i+1})). \end{aligned}$$

Ou seja, $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$. □

Definição 2.14. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$, $(N_\bullet, e_\bullet)$ e $(Q_\bullet, h_\bullet)$ três complexos. Uma sequência de complexos e morfismos de complexos

$$0 \longrightarrow M_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} Q_\bullet \longrightarrow 0$$

é dita ser uma **sequência exata curta de complexos** se o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_{i+1}"'] & N_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"'] & Q_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i+1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_i"'] & N_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "e_i"'] & Q_i \arrow[r] \arrow[d, "h_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d] & N_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[d] & Q_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

é comutativo com linhas exatas.

No próximo teorema, associaremos a cada sequência exata curta de complexos uma sequência exata longa formada por suas homologias.

Observação 2.5. Dado um diagrama comutativo de R-módulos e R-homomorfismos

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & N_1 \arrow[d, "\beta"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2. \end{tikzcd}$$

Então, existem R-homomorfismos induzidos $\overline{f_1} : \operatorname{Ker}(\alpha) \to \operatorname{Ker}(\beta)$ e $\overline{f_2} : \operatorname{Coker}(\alpha) \to \operatorname{Coker}(\beta)$ dados por $\overline{f_1}(x) = f_1(x)$, para todo $x \in \operatorname{Ker}(\alpha)$ e $\overline{f_2}(x + \operatorname{Im}(\alpha)) = f_2(x) + \operatorname{Im}(\beta)$, para todo $x + \operatorname{Im}(\alpha) \in \operatorname{Coker}(\alpha)$.

Teorema 2.1. Consideremos uma sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow M_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} Q_\bullet \longrightarrow 0.$$

Então, existe um sequência exata longa de R-módulos de homologia

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(Q_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{i+1}} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(f_\bullet)} H_i(N_\bullet) \xrightarrow{H_i(g_\bullet)} H_i(Q_\bullet) \xrightarrow{\Phi_i} H_{i-1}(M_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

onde os R-homomorfismos $\Phi_i : H_i(Q_\bullet) \to H_{i-1}(M_\bullet)$, $i \in \mathbb{Z}$, são chamados os **morfismos conectantes** de R-módulos de homologia.

Demonstração. Inicialmente, fixado $i \in \mathbb{Z}$, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_{i+1}"] & N_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] \arrow[d, "e_{i+1}"] & Q_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_i"] & N_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "e_i"] & Q_i \arrow[r] \arrow[d, "h_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "d_{i-1}"] & N_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[d, "e_{i-1}"] & Q_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{i-2} \arrow[r, "f_{i-2}"] & N_{i-2} \arrow[r, "g_{i-'2}"] & Q_{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

cujas linhas são exatas e que representa uma parte da sequência exata curta de complexos dada no enunciado. Aplicando o Lema da Serpente (A.1) às duas primeiras linhas do diagrama 2.3 obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Coker}(d_{i+1}) \xrightarrow{\overline{f_i}} \mathrm{Coker}(e_{i+1}) \xrightarrow{\overline{g_i}} \mathrm{Coker}(h_{i+1}) \longrightarrow 0.$$

Analogamente, aplicando o Lema da Serpente às duas últimas linha deste diagrama, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{i-1}) \xrightarrow{\overline{f_{i-1}}} \mathrm{Ker}(e_{i-1}) \xrightarrow{\overline{g_{i-1}}} \mathrm{Ker}(h_{i-1}).$$

Assim, podemos considerar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Coker}(d_{i+1}) \arrow[r, "\overline{f_i}"] \arrow[d, "d"'] & \mathrm{Coker}(e_{i+1}) \arrow[r, "\overline{g_i}"] \arrow[d, "e"] & \mathrm{Coker}(h_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_{i-1}) \arrow[r, "\overline{f_{i-1}}"] & \mathrm{Ker}(e_{i-1}) \arrow[r, "\overline{g_{i-1}}"] & \mathrm{Ker}(h_{i-1}) &
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

onde $d(m + \mathrm{Im}(d_{i+1})) = d_i(m)$, é um R-homomorfismo que está bem definido, tendo vista $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_i)$ e $\mathrm{Im}(d_i) \subseteq \mathrm{Ker}(d_{i-1})$. Analogamente, define-se e e h. Além disso, é fácil ver que o diagrama 2.4 é comutativo. Agora, notemos que

$$\mathrm{Ker}(d) = \{m + \mathrm{Im}(d_{i+1}) : d_i(m) = 0\} = \frac{\mathrm{Ker}(d_i)}{\mathrm{Im}(d_{i+1})} = H_i(M_\bullet)$$

e analogamente $\mathrm{Ker}(e) = H_i(N_\bullet)$ e $\mathrm{Ker}(h) = H_i(Q_\bullet)$. Também, temos que

$$\mathrm{Coker}(d) = \frac{\mathrm{Ker}(d_{i-1})}{\mathrm{Im}(d)} = \frac{\mathrm{Ker}(d_{i-1})}{\mathrm{Im}(d_i)} = H_{i-1}(M_\bullet)$$

e analogamente $\mathrm{Coker}(e) = H_{i-1}(N_\bullet)$ e $\mathrm{Coker}(h) = H_{i-1}(Q_\bullet)$. Portanto, aplicando o Lema da Serpente ao diagrama 2.4, para cada $i \in \mathbb{Z}$, obtemos a sequência exata longa do enunciado. □

Nas próximas proposições, veremos métodos para obtermos novos complexos a partir de complexos dados. A demonstração da proposição seguinte é trivial e será omitida.

Proposição 2.9. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos. A sequência de R-módulos e R-homomorfismos $M_\bullet \oplus N_\bullet$, cujo n-ésimo R-módulo é $(M_\bullet \oplus N_\bullet)_n := M_n \oplus N_n$ e o n-ésimo R-homomorfismo é $d_n \oplus e_n : M_n \oplus N_n \to M_{n-1} \oplus N_{n-1}$, é um complexo.

Definição 2.15. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos. A **soma direta** de $M_\bullet$ com $N_\bullet$ é o complexo $M_\bullet \oplus N_\bullet$ considerado na proposição acima.

Proposição 2.10. Se $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ são complexos, então $H_i(M_\bullet \oplus N_\bullet) \cong H_i(M_\bullet) \oplus H_i(N_\bullet)$.

Demonstração. Por definição, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos que

$$H_i(M_\bullet \oplus N_\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(d_i \oplus e_i)}{\mathrm{Im}(d_{i+1} \oplus e_{i+1})} = \frac{\mathrm{Ker}(d_i) \oplus \mathrm{Ker}(e_i)}{\mathrm{Im}(d_{i+1}) \oplus \mathrm{Im}(e_{i+1})}.$$

Assim, via isomorfismos canônicos, temos que:

$$H_i(M_\bullet \oplus N_\bullet) \cong \frac{\mathrm{Ker}(d_i)}{\mathrm{Im}(d_{i+1})} \oplus \frac{\mathrm{Ker}(e_i)}{\mathrm{Ker}(e_{i+1})} = H_i(M_\bullet) \oplus H_i(N_\bullet).$$

□

Proposição 2.11. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos. A sequência de R-módulos e R-homomorfismos $M_\bullet \otimes N_\bullet$, cujo n-ésimo R-módulo é $(M_\bullet \otimes N_\bullet)_n := \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes_R N_j$ e o n-ésimo R-homomorfismo é o único R-homomorfismo $f_n : (M_\bullet \otimes N_\bullet)_n \to (M_\bullet \otimes N_\bullet)_{n-1}$ satisfazendo

$$f_n(x \otimes y) = d_i(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes e_j(y),$$

para quaisquer $x \in M_i$ e $y \in N_j$, é um complexo

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{Z}$, suponhamos que i e $j \in \mathbb{Z}$ sejam tais que $i + j = n + 1$. É suficiente verificarmos que $(f_n \circ f_{n+1})(x \otimes y) = 0$, para quaisquer $x \in M_i$ e $y \in N_j$. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
f_n(f_{n+1}(x \otimes y)) &= f_n(d_i(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes e_j(y)) \\
&= f_n(d_i(x) \otimes y) + f_n((-1)^i x \otimes e_j(y)) \\
&= d_{i-1}(d_i(x)) \otimes y + (-1)^{i-1} d_i(x) \otimes e_j(y) + (-1)^i d_i(x) \otimes e_j(y) + x \otimes e_{j-1}(e_j(y)) \\
&= ((-1)^{i-1} d_i(x) + (-1)^i d_i(x)) \otimes e_j(y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $f_n \circ f_{n+1} = 0$. □

Definição 2.16. Sejam $(M_\bullet, d_\bullet)$ e $(N_\bullet, e_\bullet)$ dois complexos. O **produto tensorial** de $M_\bullet$ por $N_\bullet$ é o complexo $M_\bullet \otimes N_\bullet$ considerado na proposição acima.

Proposição 2.12. Seja $f_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \to (N_\bullet, e_\bullet)$ um morfismo de complexos. A sequência de R-módulos e R-homomorfismos $\mathrm{cone}(f_\bullet)$, cujo i-ésimo R-módulo é $\mathrm{cone}(f_\bullet)_i = M_{i-1} \oplus N_i$ e o i-ésimo R-homomorfismo é $D_i : \mathrm{cone}(f_\bullet)_i \to \mathrm{cone}(f_\bullet)_{i-1}$ dado por

$$D_i(m_{i-1}, n_i) = (-d_{i-1}(m_{i-1}), e_i(n_i) - f_{i-1}(m_{i-1})),$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, é um complexo.

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, $m_{i-1} \in M_{i-1}$ e $n_i \in N_i$, temos que:

$$\begin{aligned} D_{i-1}(D_i(m_{i-1}, n_i)) &= D_{i-1}(-d_{i-1}(m_{-1}), e_i(n_i) - f_{i-1}(m_{i-1})) \\ &= (-d_{i-2}(-d_{i-1}(m_{i-1})), e_{i-1}(e_i(n_i) - f_{i-1}(m_{i-1})) - f_{i-2}(-d_{i-1}(m_{i-1}))) \\ &= (0, -e_{i-1}(f_{i-1}(m_{i-1})) + f_{i-2}(d_{i-1}(m_{i-1}))) \\ &= (0,0). \end{aligned}$$

Assim, $D_{i-1} \circ D_i = 0$. □

Definição 2.17. Seja $f_\bullet : (M_\bullet, d_\bullet) \to (N_\bullet, e_\bullet)$ um morfismo de complexos. O **cone de mapeamento** de $f_\bullet$, ou simplesmente o cone de $f_\bullet$, é o complexo $\mathrm{cone}(f_\bullet)$ considerado na proposição acima.

Proposição 2.13. Se $f_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ é um morfismo de complexos, então a sequência de complexos

$$0 \longrightarrow N_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} \mathrm{cone}(f_\bullet) \xrightarrow{p_\bullet} M_\bullet[-1] \longrightarrow 0\ ,$$

onde $i_j(n_j) = (0, n_j)$ e $p_j(m_{j-1}, n_j) = -m_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$, é exata.

Omitiremos a demonstração da proposição anterior, que consiste em verificar a comutatividade de um diagrama semelhante a 2.2. Pelo Teorema 2.1, a sequência exata curta de complexos da proposição anterior induz uma sequência exata longa da forma:

$$\cdots \longrightarrow H_i(N_\bullet) \longrightarrow H_i(\mathrm{cone}(f_\bullet)) \longrightarrow H_{i-1}(M_\bullet) \xrightarrow{H_{i-1}(f_\bullet)} H_{i-1}(N_\bullet) \longrightarrow \cdots . \tag{2.5}$$

Proposição 2.14. Sejam $(M_\bullet, d_i^M)$ e $(N_\bullet, d_i^N)$ dois complexos. A sequência formada pelos R-módulos

$$(M *_R N)_n = \begin{cases} (M_{\geq 1} \otimes N_{\geq 1})_{n+1}, & \text{se } n \geq 1; \\ M_0 \otimes_R N_0, & \text{se } n = 0; \\ 0, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

e pelos R-homomorfismos

$$d_n^{M*_RN} = \begin{cases} d_{n+1}^{M_{\geq 1}\otimes N_{\geq 1}}, & \text{se } n \geq 2; \\ d_1^M \otimes d_1^N, & \text{se } n = 1; \\ 0, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

é um complexo.

Demonstração. Como sabemos que o produto tensorial de complexos é um complexo, é suficiente verificarmos que $d_1^{M*_RN} \circ d_2^{M*_RN} = 0$. Note que

$$(M *_R N)_2 = (M_{\geq 1} \otimes N_{\geq 1})_3 = (M_2 \otimes_R N_1) \oplus (M_1 \otimes_R N_2).$$

Além disso, se $f_i \in M_i$ e $g_i \in N_i$, para $i \in \{1,2\}$, então

$$\begin{aligned}(d_1^{M*_RN} \circ d_2^{M*_RN})(f_1 \otimes g_2 + f_2 \otimes g_1) &= d_1^{M*_RN}(d_3^{M_{\geq 1}\otimes N_{\geq 1}}(f_1 \otimes g_2 + f_2 \otimes g_1)) \\ &= d_1^{M*_RN}(0 - f_1 \otimes d_2^N(g_2) + d_2^M(f_2) \otimes g_1 + 0) \\ &= -d_1^M(f_1) \otimes d_1^N(d_2^N(g_2)) + d_1^M(d_2^M(f_2)) \otimes d_1^N(g_1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, $d_1^{M*_RN} \circ d_2^{M*_RN} = 0$. □

Definição 2.18. Sejam $(M_\bullet, d_i^M)$ e $(N_\bullet, d_i^N)$ dois complexos. O **produto estrela** de $M_\bullet$ por $N_\bullet$ é o complexo $M *_R N$ considerado na proposição acima.

Antes de encerrarmos esta seção, definiremos cocomplexo e os módulos de cohomologia. Por fim, enunciaremos alguns resultados análogos aos que provamos anteriormente para complexos.

Definição 2.19. Sejam $\{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos e $\{d^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-homomorfismos. Uma sequência

$$(M^\bullet, d^\bullet) : \cdots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é um **cocomplexo** se $d^i \circ d^{i-1} = 0$, ou seja, se $\mathrm{Im}(d^{i-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d^i)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.6. Em geral, denotaremos um cocomplexo $(M^\bullet, d^\bullet)$ simplesmente por $M^\bullet$, quando isto não causar confusão.

Definição 2.20. Seja $(M^\bullet, d^\bullet)$ um cocomplexo. A i-ésima **cohomologia** de $(M^\bullet, d^\bullet)$ é definida como o R-módulo quociente

$$H^i(M^\bullet) := \frac{\mathrm{Ker}(d^i)}{\mathrm{Im}(d^{i-1})}.$$

Analogamente ao que fizemos para complexos, define-se as noções de morfismos de cocomplexos, suas homotopias e as sequências exatas curtas de cocomplexos. A seguir, enunciaremos alguns resultados sobre cocomplexos e omitiremos suas demonstrações, tendo vista que são análogas às que fizemos neste capítulo para complexos.

Proposição 2.15. Sejam $(M^\bullet, d^\bullet)$, $(N^\bullet, e^\bullet)$ e $(Q^\bullet, h^\bullet)$ três cocomplexos e $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ e $g^\bullet : N^\bullet \to Q^\bullet$ dois morfismos de cocomplexos. Então:

i) Para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe um R-homomorfismo $H^i(f^\bullet) : H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet)$ dado por

$$H^i(f^\bullet)(x + \mathrm{Im}(d^{i-1})) = f^i(x) + \mathrm{Im}(e^{i-1}),$$

para todo $x + \mathrm{Im}(d^{i-1}) \in H^i(M^\bullet)$.

ii) $H^i(f^\bullet + g^\bullet) = H^i(f^\bullet) + H^i(g^\bullet)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

iii) $H^i(g^\bullet \circ f^\bullet) = H^i(g^\bullet) \circ H^i(f^\bullet)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

iv) Se $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são homotópicos, então $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.7. Seja $(M^\bullet, d^\bullet)$ um cocomplexo. Se consideramos $M_i = M^{-i}$ e $d_i = d^{-i}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, então $(M_\bullet, d_\bullet)$ é um complexo. Por conta disso, ao longo de algumas demonstrações que faremos neste trabalho podemos não fazer distinção entre complexos e cocomplexos. Além disso, note que $H_i(M_\bullet) = H^{-i}(M^\bullet)$.

2.4 Resoluções projetivas, livres e injetivas

Definição 2.21. Seja M um R-módulo. Uma **resolução projetiva** de M é uma sequência exata

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

onde cada P_i, $i \in \mathbb{N}_0$, é um R-módulo projetivo. Além disso, se P_i é um R-módulo livre, $i \in \mathbb{N}_0$, então tal resolução é dita ser uma **resolução livre** de M.

Dada uma resolução projetiva $P_\bullet$ de um R-módulo M, é comum trabalharmos com a **resolução projetiva deletada**, que consiste no complexo

$$P_{\bullet,M} : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

É importante observar que este complexo, em geral, não é exato. Além disso, quando deletamos M não estamos perdendo informação alguma, haja vista que

$$\mathrm{Coker}(d_1) = \frac{P_0}{\mathrm{Im}(d_1)} = \frac{P_0}{\mathrm{Ker}(d_0)} \cong M.$$

Proposição 2.16. Todo R-módulo M admite uma resolução projetiva.

Demonstração. Inicialmente lembremos que, pelo Corolário 2.1, todo R-módulo livre é projetivo. Assim, pela Proposição 2.3, existe um R-módulo projetivo P_0 e um R-homomorfismo sobrejetivo $d_0 : P_0 \to M$. Portanto, podemos considerar a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{p_0} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

onde $K_0 = \mathrm{Ker}(d_0)$ e p_0 é a inclusão. Repetindo este processo, podemos considerar as sequências exatas curtas

$$\begin{array}{c}
0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{p_0} P_0 \xrightarrow{b_0} M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{p_1} P_1 \xrightarrow{b_1} K_0 \longrightarrow 0 \\
\vdots \\
0 \longrightarrow K_i \xrightarrow{p_i} P_i \xrightarrow{b_i} K_{i-1} \longrightarrow 0 \\
\vdots
\end{array}$$

onde cada P_i, $i \in \mathbb{N}_0$, é um R-módulo projetivo, cada p_i, $i \in \mathbb{N}_0$, é um R-homomorfismo injetivo e $b_0 = d_0$. A partir destas sequências, podemos obter o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[dr, "b_i"'] & & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & K_{i-1} \arrow[ur, "p_{i-1}"'] \arrow[dr] & & & & & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & & &
\end{tikzcd}$$

onde $d_i = p_{i-1} \circ b_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Assim, temos que

$$\mathrm{Im}(d_i) = \mathrm{Im}(b_i) = K_{i-1} = \mathrm{Ker}(b_{i-1}) = \mathrm{Ker}(d_{i-1}),$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de M. $\square$

Observação 2.8. Pela construção que fizemos acima, todo R-módulo admite uma resolução livre. Além disso, como, sobre um anel noetheriano, todo submódulo de um módulo finitamente gerado é ainda finitamente gerado, a partir da demonstração da proposição anterior, obtemos o corolário seguinte.

Corolário 2.2. Se R é um anel noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, então M admite uma resolução livre formada apenas por R-módulos de posto finito.

Exemplo 2.6. Sejam $R = k[[x,y,z]]$, onde k é um corpo e $I = (x^3, y^3, xyz)$. Usando o método da Proposição 2.16, é possível obter a seguinte resolução projetiva de I:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^3 & xy & 0 \\ -x^3 & 0 & xz \\ 0 & -x^2 & -y^2 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^3 & y^3 & xyz \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0 .$$

Trata-se de um exemplo relativamente simples, mas trabalhoso, em virtude do trabalho necessário para se obter manualmente os geradores dos núcleos necessários para esta construção. Os detalhes desta construção podem ser encontrados em Swanson (2018, p. 6).

Exemplo 2.7. Se x é um elemento não divisor de zero do anel R, então a sequência

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{(x)} \longrightarrow 0$$

onde π denota projeção canônica, é uma resolução projetiva do R-módulo quociente $R/(x)$.

Definição 2.22. Sejam M um R-módulo e

$$P_\bullet : 0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M. Dizemos, neste caso, que $P_\bullet$ tem **comprimento** finito e igual a n.

Definição 2.23. Seja M um R-módulo. Se M admite uma resolução projetiva de comprimento finito, então a **dimensão projetiva** de M é o menor comprimento de uma tal resolução, que denotaremos por $\mathrm{pd}_R(M)$. Por outro lado, se M não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, então escreveremos $\mathrm{pd}_R(M) = \infty$.

Observação 2.9. É trivial verificar que $\mathrm{pd}_R(M) = 0$ se e somente se M é um R-módulo projetivo.

Lema 2.2 (Lema da Ferradura)**.** Dado um diagrama de R-módulos e R-homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P_1 \arrow[d, "d_1"] & & W_1 \arrow[d, "e_1"] & \\
 & P_0 \arrow[d, "d_0"] & & W_0 \arrow[d, "e_0"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde as colunas são resoluções projetivas de M e Q e a linha é exata. Então, existe uma resolução projetiva $K_\bullet$ de N e homomorfismos de complexos $f_\bullet : P_\bullet \to K_\bullet$ e $g_\bullet : K_\bullet \to W_\bullet$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "d_1"] & K_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h_1"] & W_1 \arrow[r] \arrow[d, "e_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "d_0"] & K_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "h_0"] & W_0 \arrow[r] \arrow[d, "e_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, suas linhas são exatas e $K_i = P_i \oplus W_i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Vamos fazer esta construção de forma indutiva. Inicialmente, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[d, "\varphi_0"] & & R_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

e tomemos $K_0 = P_0 \oplus R_0$, que é projetivo, pela Proposição 2.2. Além disso, tomemos $i_0 : P_0 \to K_0$ a inclusão de P_0 em K_0 e $g_0 = \pi_0 : K_0 \to R_0$ a projeção canônica de K_0 sobre R_0. Como R_0 é projetivo, então existe um R-homomorfismo $h : R_0 \to N$ tal que $g \circ h = \alpha_0$. Portanto, podemos definir $\beta_0 : K_0 \to N$ o R-homomorfismo dado por $\beta_0(x,y) = (f \circ \varphi_0)(x) + h(y)$. Vejamos que β_0 é sobrejetivo. Dado $n \in N$, então $g(n) \in Q$ e existe $y \in R_0$ tal que $\alpha_0(y) = g(n)$. Como

$$g(n - h(y)) = g(n) - g(h(y)) = g(n) = \alpha_0(y) = 0,$$

então $n - h(y) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ e podemos escrever $n - h(y) = f(\varphi_0(x))$, para algum $x \in P_0$. Neste caso, temos que

$$\beta_0(x,y) = f(\varphi_0(x)) + h(y) = n - h(y) + h(y) = n$$

e β_0 é sobrejetivo. Além disso, é fácil ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & K_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas. Agora, suponhamos, por indução, que tenhamos construído até a n-ésima componente da resolução $K_\bullet$ de N e tenhamos encontrado os R-homomorfismos $f_0,\dots,f_{n-1}$ e $g_0,\dots,g_{n-1}$ nas condições do enunciado. Assim, podemos considerar os diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_n \arrow[d, "p_n^\varphi"] & & R_n \arrow[d, "p_n^\alpha"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\varphi_{n-1}) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] & \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde $p_n^\varphi = \varphi_n : P_n \to \mathrm{Ker}(\varphi_{n-1}) = \mathrm{Im}(\varphi_n)$, $p_n^\alpha = \alpha_n : R_n \to \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) = \mathrm{Im}(\alpha_n)$ e $\overline{f_{n-1}}$ e $\overline{g_{n-1}}$ são as restrições de f_{n-1} e g_{n-1} aos conjuntos $\mathrm{Ker}(\varphi_{n-1})$ e $\mathrm{Ker}(\alpha_{n-1})$. Repetindo o que fizemos no passo inicial, podemos encontrar um R-homomorfismo sobrejetivo $p_n^\beta : K_n = P_n \oplus R_n \to \mathrm{Ker}(\beta_{n-1})$ e R-homomorfismos $f_n : P_n \to K_n$ e $g_n : K_n \to R_n$ tais que o diagrama abaixo é comutativo e suas linhas e colunas são exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "p_n^\varphi"] & K_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "p_n^\beta"] & R_n \arrow[r] \arrow[d, "p_n^\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\varphi_{n-1}) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Assim, tomando $i_{n-1}^\varphi : \mathrm{Ker}(\varphi_{n-1}) \to P_{n-1}$, $i_{n-1}^\beta : \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}) \to K_{n-1}$ e $i_{n-1}^\alpha : \mathrm{Ker}(\alpha_{n-1}) \to R_{n-1}$ aplicações de inclusão, então, sendo $\varphi_n = i_{n-1}^\varphi \circ p_n^\varphi$, $\beta_n = i_{n-1}^\beta \circ p_n^\beta$ e $\alpha_n = i_{n-1}^\alpha \circ p_n^\alpha$, obtemos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & K_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & R_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & K_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

que é comutativo, com linhas e colunas exatas. Sendo assim, o resultado segue por indução. $\square$

Antes de encerrarmos esta seção, definiremos resolução injetiva e verificaremos sua existência para cada R-módulo M.

Definição 2.24. Seja M um R-módulo. Uma **resolução injetiva** de M é uma sequência exata

$$E^\bullet : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

onde cada E_i, $i \in \mathbb{N}_0$, é um R-módulo injetivo.

Analogamente ao que fizemos para resoluções projetivas, é comum trabalharmos com a **resolução injetiva deletada**, que consiste no cocomplexo

$$E^{\bullet,M} : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

É importante observarmos que este cocomplexo, em geral, não é exato. Além disso, quando deletamos M, não estamos perdendo informação alguma, haja vista que $M \cong \mathrm{Ker}(d^0)$.

Proposição 2.17. Todo R-módulo M admite uma resolução injetiva.

Demonstração. Pela Proposição 2.4, existe um R-módulo injetivo E^0 e um R-homomorfismo injetivo $d^{-1} : M \to E^0$. Consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^{-1}} E^0 \xrightarrow{p^0} V^0 \longrightarrow 0,$$

onde $V^0 = \mathrm{Coker}(d^{-1})$ e p^0 é a projeção natural. Repetindo este argumento, podemos tomar um R-módulo injetivo E^1 e um R-homomorfismo injetivo $i^0 : V^0 \to E^1$. Considerando $d^0 = i^0 \circ p^0$, temos que: $\mathrm{Ker}(d^0) = \mathrm{Ker}(i^0 \circ p^0) = \mathrm{Im}(d^{-1})$. Ou seja, o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d^{-1}"] & E^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, "p^0"'] & & E^1 \\
 & & & V^0 \arrow[ur, "i^0"'] &
\end{tikzcd}$$

tem linha exata. Repetindo este processo, obtemos uma resolução injetiva de M. $\square$

Apesar das contruções que fizemos nesta seção não serem muito práticas em geral, para fins teóricos estas construções são extremamente relevantes, como veremos. Além disso, para casos particulares, é possível utizarmos sistemas de computação algébrica, tais como Decker *et al.* (2022).

CAPÍTULO

3

FUNTORES DERIVADOS E O COMPLEXO DE KOSZUL

Neste capítulo, trataremos sobre ferramentas importantes em Álgebra Comutativa e Álgebra Homológica. Introduziremos os funtores derivados e o Complexo de Koszul, que serão importantes para introduzirmos os resultados e as definições dos capítulos seguintes. A partir deste capítulo, recomendamos que o leitor conheça as noções de sequência regular e de grau de um ideal sobre um módulo. O leitor não familiarizado com estas noções, pode encontrá-las na apresentação breve que fizemos no Apêndice B.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram Rotman (2009), Simis (2020), Bruns e Herzog (1998) e Greuel e Pfister (2002).

3.1 Funtores derivados

3.1.1 *Funtores derivados à esquerda*

Nesta subseção, associaremos a cada funtor aditivo covariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ uma família de funtores derivados $L_iF : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ indexada em $\mathbb{N}_0$.

Teorema 3.1 (Teorema da Comparação)**.** Seja $f : M \to N$ um R-homomorfismo e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet : \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
N_\bullet : \cdots \arrow[r] & N_2 \arrow[r, "e_2"] & N_1 \arrow[r, "e_1"] & N_0 \arrow[r, "e_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são complexos. Se P_i é projetivo para todo $i \geq 0$ e $N_\bullet$ é uma sequência exata, então existe um morfismo de complexos $f_\bullet : P_\bullet \to N_\bullet$ que estende f, ou seja, tal que $f_{-1} = f$. Além disso, quaisquer duas extensões com esta propriedade são homotópicas.

Demonstração. Inicialmente, vamos construir $f_\bullet$ indutivamente. Como P_0 é projetivo, então existe um R-homomorfismo $f_0 : P_0 \to N_0$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_0 \arrow[d, "d_0"] \arrow[ddl, dashed, "f_0"'] & \\
& M \arrow[d, "f"] & \\
N_0 \arrow[r, "e_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Ou seja $f \circ d_0 = e_0 \circ f_0$ e assim construímos a primeira função f_0. Agora, supondo que tenhamos construído $f_\bullet$ até a n-ésima função, $n \geq 0$. Neste caso, temos que:

$$e_n \circ f_n \circ d_{n+1} = f_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0.$$

Assim, $\mathrm{Im}(f_n \circ d_{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(e_n) = \mathrm{Im}(e_{n+1})$. Usando o fato de P_{n+1} ser projetivo, obtemos um R-homomorfismo $f_{n+1} : P_{n+1} \to N_{n+1}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "f_n \circ d_{n+1}"] & \\
N_{n+1} \arrow[r, "e_{n+1}"] & \mathrm{Im}(e_{n+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $f_n \circ d_{n+1} = e_{n+1} \circ f_{n+1}$. Assim, construímos o $n+1$-ésimo R-homomorfismo de $f_\bullet$ e indutivamente podemos construir o morfismo de complexos $f_\bullet$. Agora, suponhamos que $f_\bullet$ e $g_\bullet$ sejam dois morfismos de complexos nas condições do enunciado. Inicialmente, consideremos $h_{-1} : M \to N_0$ o R-homomorfismo nulo. Note que

$$e_0 \circ (f_0 - g_0) = e_0 \circ f_0 - e_0 \circ g_0 = f \circ d_0 - f \circ d_0 = 0,$$

isto é, $\mathrm{Im}(f_0 - g_0) \subseteq \mathrm{Ker}(e_0) = \mathrm{Im}(e_1)$. Como P_0 é projetivo, então existe um R-homomorfismo $h_0 : P_0 \to N_1$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_0 \arrow[dl, dashed, "h_0"'] \arrow[d, "f_0 - g_0"] & \\
N_1 \arrow[r, "e_1"] & \mathrm{Im}(e_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, obtemos h_{-1} e h_0 com as propriedades desejadas para construirmos uma homotopia entre $f_\bullet$ e $g_\bullet$. Vamos construir a homotopia h indutivamente. Supondo que tenhamos construído $h_{-1}, h_0, \ldots, h_n$ R-homomorfismos de h, então temos que

$$\begin{aligned}
e_{n+1} \circ (f_{n+1} - g_{n+1} - h_n \circ d_{n+1}) &= e_{n+1} \circ (f_{n+1} - g_{n+1}) - e_{n+1} \circ h_n \circ d_{n+1} \\
&= (f_n - g_n) \circ d_{n+1} - e_{n+1} \circ h_n \circ d_{n+1} \\
&= (f_n - g_n - e_{n+1} \circ h_n) \circ d_{n+1} \\
&= h_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim

$$\operatorname{Im}(f_{n+1}-g_{n+1}-h_n\circ d_{n+1})\subseteq \operatorname{Ker}(e_{n+1})=\operatorname{Im}(e_{n+2}).$$

Por fim, novamente usando o fato de P_{n+1} ser projetivo, obtemos um R-homomorfismo $h_{n+1}:P_{n+1}\to N_{n+2}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "h_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}-h_n\circ d_{n+1}"] & \\ N_{n+2} \arrow[r, "e_{n+2}"] & \operatorname{Im}(e_{n+2}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, construímos o $n+1$-ésimo R-homomorfismo de h e indutivamente podemos construir a homotopia h. □

Corolário 3.1. Se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são resoluções projetivas de dois R-módulos M e N, respectivamente, e $f:M\to N$ é um R-homomorfismo, então existe um morfismo de complexos $f_\bullet:P_{\bullet,M}\to Q_{\bullet,N}$ que estende f, ou seja, tal que $f_i\circ d_{i+1}=e_{i+1}\circ f_{i+1}$, para todo $i\geq 0$, e $f\circ d_0=e_0\circ f_0$. Além disso, quaisquer dois morfismos de complexos $f_\bullet,g_\bullet:P_{\bullet,M}\to Q_{\bullet,N}$ com estas propriedades são homotópicos.

Observação 3.1. Se $P_\bullet$ é uma resolução projetiva de um R-módulo M, então, como $d_i\circ d_{i+1}=0$, temos que $F(d_i)\circ F(d_{i+1})=0$, sempre que $F:\operatorname{Mod}_R\to\operatorname{Mod}_R$ é um funtor aditivo covariante. Isto é, podemos considerar o complexo

$$F(P_\bullet):\cdots\longrightarrow F(P_i)\xrightarrow{F(d_i)}F(P_{i-1})\longrightarrow\cdots\longrightarrow F(P_0)\xrightarrow{F(d_0)}F(M)\longrightarrow 0.$$

Analogamente, podemos considerar o complexo $F(P_{\bullet,M})$. Se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são resoluções projetivas dos R-módulos M e N, respectivamente, $f:M\to N$ é um homomorfismo de R-módulos e $f_\bullet:P_{\bullet,M}\to Q_{\bullet,N}$ é uma sua extensão, vamos considerar o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} P_\bullet:\cdots \arrow[r] & P_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & P_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\ Q_\bullet:\cdots \arrow[r] & Q_i \arrow[r, "e_i"] & Q_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "e_1"] & Q_0 \arrow[r, "e_0"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A partir deste diagrama, deletando e aplicando F, podemos obter o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F(P_{\bullet,M}):\cdots \arrow[r] & F(P_i) \arrow[r, "F(d_i)"] \arrow[d, "F(f_i)"'] & F(P_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "F(f_{i-1})"'] & \cdots \arrow[r] & F(P_1) \arrow[r, "F(d_1)"] \arrow[d, "F(f_1)"'] & F(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "F(f_0)"'] & 0 \\ F(Q_{\bullet,N}):\cdots \arrow[r] & F(Q_i) \arrow[r, "F(e_i)"] & F(Q_{i-1}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F(Q_1) \arrow[r, "F(e_1)"] & F(Q_0) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

cujas linhas são complexos. Neste caso, a família $F(f_\bullet):=\{F(f_i)\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ é um morfismo de complexos de $F(P_{\bullet,M})$ em $F(Q_{\bullet,N})$. Nesta situação, pela Proposição 2.5, obtemos uma família de R-homomorfismos $H_i(F(f_\bullet)):H_i(F(P_{\bullet,M}))\to H_i(F(Q_{\bullet,N}))$, indexada em $\mathbb{N}_0$.

Proposição 3.1. Sejam M e N dois R-módulos, $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ resoluções projetivas de M e N, respectivamente, e $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante. Se $f : M \to N$ é um R-homomorfismo, então, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $H_i(F(f_\bullet)) : H_i(F(P_{\bullet,M})) \to H_i(F(Q_{\bullet,N}))$ independe da escolha da aplicação de complexos $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ que estende f.

Demonstração. Supondo que $f_\bullet, g_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ são dois morfismos de complexos que estendem $f_\bullet$, então, pelo Corolário 3.1, $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicas. Assim, é fácil ver que $F(f_\bullet)$ e $F(g_\bullet)$ são homotópicas. Portanto, pela Proposição 2.8, temos que $H_i(F(f_\bullet)) = H_i(F(g_\bullet))$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. □

Agora, podemos introduzir a noção de funtor derivado à esquerda de um funtor aditivo covariante.

Definição 3.1. Seja $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante. Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, o i-ésimo **funtor derivado à esquerda** de F é o funtor:

$$\begin{aligned} L_iF : \mathrm{Mod}_R &\to \mathrm{Mod}_R \\ M &\mapsto H_i(F(P_{\bullet,M})) \\ f : M \to N &\mapsto H_i(F(f_\bullet)) : H_i(F(P_{\bullet,M})) \to H_i(F(Q_{\bullet,N})), \end{aligned}$$

onde $P_{\bullet,M}$ e $Q_{\bullet,N}$ são resoluções projetivas deletadas de M e N, respectivamente, e além disso $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ é uma extensão de f.

Nas condições da definição acima, usando as proposições 2.6 e 2.7 e o fato de F ser um funtor aditivo covariante, é fácil ver que, L_iF é um funtor aditivo covariante. Note, é claro, que da forma como definimos os funtores derivadores à esquerda, estamos considerando feita a escolha de uma resolução projetiva deletada para cada R-módulo. Veremos que, a menos de um isomorfismo natural, a definição dos funtores derivados à esquerda independe desta tal escolha.

Lema 3.1. Sejam M um R-módulo, $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ duas resoluções projetivas de M e $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante. Se $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,M}$ é um morfismo de complexos que estende id_M, então $H_i(F(f_\bullet)) : H_i(F(P_{\bullet,M})) \to H_i(F(Q_{\bullet,M}))$ é um isomorfismo, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Inicialmente, usando o Corolário 3.1, vamos considerar $g_\bullet : Q_{\bullet,M} \to P_{\bullet,M}$ um morfismo de complexos que estende id_M. Assim, o morfismo de complexos $g_\bullet \circ f_\bullet : P_{\bullet,M} \to P_{\bullet,M}$ estende id_M e analogamente para $f_\bullet \circ g_\bullet$. Logo, pelo Corolário 3.1, $g_\bullet \circ f_\bullet$ e $f_\bullet \circ g_\bullet$ são homotópicos aos morfismos de complexos $\mathrm{id}_{P_{\bullet,M}} = \{\mathrm{id}_{P_i}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ e $\mathrm{id}_{Q_{\bullet,N}} = \{\mathrm{id}_{Q_i}\}_{i\in\mathbb{N}_0}$, respectivamente. Como $F(\mathrm{id}_{P_i}) = \mathrm{id}_{F(P_i)}$ e $F(\mathrm{id}_{Q_i}) = \mathrm{id}_{F(Q_i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, então $F(g_\bullet \circ f_\bullet)$ e $F(f_\bullet \circ g_\bullet)$ são homotópicos aos morfismos de complexos $\mathrm{id}_{F(P_\bullet,M)}$ e $\mathrm{id}_{F(Q_{\bullet,M})}$, respectivamente. Além disso, note que $F(g_\bullet \circ f_\bullet) = F(g_\bullet) \circ F(f_\bullet)$ e $F(f_\bullet \circ g_\bullet) = F(f_\bullet) \circ F(g_\bullet)$. Assim, usando as proposições

2.7 e 2.8, temos que

$$\begin{aligned} H_i(F(g_\bullet)) \circ H_i(F(f_\bullet)) &= H_i((F(g_\bullet) \circ F(f_\bullet)) \\ &= H_i(F(g_\bullet \circ f_\bullet)) \\ &= H_i(\mathrm{id}_{F(P_{\bullet,M})}) \\ &= \mathrm{id}_{H_i(F(P_{\bullet,M}))}, \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Analogamente $H_i(F(f_\bullet)) \circ H_i(F(g_\bullet)) = \mathrm{id}_{H_i(F(Q_{\bullet,M}))}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Assim $H_i(F(f_\bullet)) : H_i(F(P_{\bullet,M})) \to H_i(F(Q_{\bullet,M}))$ é um isomorfismo, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. □

Proposição 3.2. Seja $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante. Suponha que tenhamos definido os funtores derivados à esquerda de F, isto é, os funtores L_iF, $i \in \mathbb{N}_0$, a partir da escolha de uma resolução projetiva deletada para cada R-módulo. Além disso, consideremos $\widetilde{L_i}F$, $i \in \mathbb{N}_0$, uma família de funtores derivados à esquerda de F obtidos a partir da escolha de outras resoluções projetivas deletadas, para cada R-módulo. Então, L_iF é naturalmente isomorfo a $\widetilde{L_i}F$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Seja $f : M \to N$ um R-homomorfismo e para $i \in \mathbb{N}_0$, suponhamos que L_iF seja obtido a partir de resoluções projetivas deletadas $P_{\bullet,M}$ e $Q_{\bullet,N}$ e que $\widetilde{L_i}F$ seja obtido a partir de resoluções projetivas deletadas $\widetilde{P_{\bullet,M}}$ e $\widetilde{Q_{\bullet,N}}$. Pelo Corolário 3.1, existem morfismo de complexos $g_\bullet : P_{\bullet,M} \to \widetilde{P_{\bullet,M}}$ e $h_\bullet : Q_{\bullet,N} \to \widetilde{Q_{\bullet,N}}$ que estendem id_M e id_N, respectivamente. Pelo Lema 3.1, os R-homomorfismos $\tau_M = H_i(g_\bullet) : L_iF(M) \to \widetilde{L_i}F(M)$ e $\tau_N = H_i(h_\bullet) : L_iF(N) \to \widetilde{L_i}F(N)$ são R-isomorfismos. Portanto, resta verificarmos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} L_iF(M) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "L_iF(f)"'] & \widetilde{L_i}F(M) \arrow[d, "\widetilde{L_i}F(f)"] \\ L_iF(N) \arrow[r, "\tau_N"'] & \widetilde{L_i}F(N) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Observemos que, pela Proposição 2.7, $\tau_N \circ L_iF(f)$ é a i-ésima homologia do morfismo de complexos $h_\bullet \circ f_\bullet$, onde $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ é uma extensão de f. Analogamente, $\widetilde{L_i}F(f) \circ \tau_M$ é a i-ésima homologia do morfismo de complexos $\widetilde{f_\bullet} \circ g_\bullet$, onde $\widetilde{f_\bullet} : \widetilde{P_{\bullet,M}} \to \widetilde{Q_{\bullet,N}}$ é uma extensão de f. É fácil ver que $h_\bullet \circ f_\bullet : P_{\bullet,M} \to \widetilde{Q_{\bullet,N}}$ e $\widetilde{f_\bullet} \circ g_\bullet : P_{\bullet,M} \to \widetilde{Q_{\bullet,N}}$ são morfismos de complexos que estendem f. Assim, pela Proposição 3.1, temos que $\widetilde{L_i}F(f) \circ \tau_M = \tau_N \circ L_nF(f)$ e o diagrama acima é comutativo. □

Em virtude da proposição acima, trabalharemos com funtores derivados à esquerda sem precisar fixar quaisquer escolha de resoluções projetivas deletadas. O próximo resultado verifica que um funtor aditivo covariante e exato à direita F é naturalmente isomorfo ao funtor L_0F. Ou seja, os funtores F e L_0F são indistinguíveis.

Teorema 3.2. Se $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é um funtor aditivo covariante e exato à direita, então F é naturalmente isomorfo ao funtor L_0F.

Demonstração. Fixemos M um R-módulo e $(P_\bullet, d_\bullet)$ uma resolução projetiva de M. Por definição, $L_0F(M) = \text{Coker}(F(d_1))$. Como F é exato à direita, então a sequência

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} F(M) \longrightarrow 0$$

é exata. Assim,

$$\text{Coker}(F(d_1)) = \frac{F(P_0)}{\text{Im}(F(d_1))} = \frac{F(P_0)}{\text{Ker}(F(d_0))}$$

e, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, obtemos um R-isomorfismo $\tau_M : L_0F(M) \to F(M)$ dado por

$$\tau_M(x + \text{Im}(F(d_1))) = F(d_0)(x),$$

para todo $x \in F(P_0)$. Por fim, vamos provar que a família $\{\tau_M\}_{M \in Ob(\text{Mod}_R)}$ é uma transformação natural. Para tanto, consideremos $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Além disso, consideremos $(Q_\bullet, e_\bullet)$ uma resolução projetiva de N e $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ uma extensão de f, que existe, pelo Teorema da Comparação (3.1). Assim, para cada $x + \text{Im}(F(d_1)) \in L_0F(M)$ temos que

$$\tau_N(L_0F(f)(x + \text{Im}(F(d_1)))) = \tau_N(F(f_0)(x) + \text{Im}(F(e_1))) = F(e_0)(F(f_0)(x)).$$

Por outro lado, temos que

$$F(f)(\tau_M(x + \text{Im}(T(d_1)))) = F(f)(F(d_0)(x)).$$

Assim, como $f_\bullet$ estende f, temos que $F(f)(F(d_0)(x)) = F(e_0)(F(f_0)(x))$ e L_0F é naturalmente isomorfo à F. $\square$

Lema 3.2. Seja $F : \text{Mod}_R \to \text{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante e exato à direita. Se a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

cinde, então a sequência

$$0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(Q) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Como funtor aditivo F é exato à direita, então é suficiente verificarmos que $F(f) : F(M) \to F(N)$ é injetiva. Como a sequência exata do enunciado cinde, então existe um R-homomorfismo $j : N \to M$ tal que $j \circ f = \text{id}_M$. Assim, temos que $F(j) \circ F(f) = \text{id}_{F(M)}$. Logo, $F(f)$ é um R-homomorfismo injetivo. $\square$

Teorema 3.3. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata e $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é um funtor aditivo covariante e exato à direita, então existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow L_nF(M) \xrightarrow{L_nF(f)} L_nF(N) \xrightarrow{L_nF(g)} L_nF(Q) \xrightarrow{\partial_n}$$

$$L_{n-1}F(M) \xrightarrow{L_{n-1}F(f)} L_{n-1}F(N) \xrightarrow{L_{n-1}F(g)} L_{n-1}F(Q) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

que termina em

$$\cdots \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(Q) \longrightarrow 0$$

Demonstração. Usando o Lema 2.2, obtemos uma sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow P_{\bullet,M} \xrightarrow{f_\bullet} K_{\bullet,N} \xrightarrow{g_\bullet} W_{\bullet,Q} \longrightarrow 0,$$

tal que $P_\bullet$, $K_\bullet$ e $W_\bullet$ são resoluções projetivas de M, N e Q, respectivamente. Além disso, a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow P_i \xrightarrow{f_i} K_i \xrightarrow{g_i} W_i \longrightarrow 0$$

cinde, para todo $i \geq 0$. Pelo Lema 3.2, o funtor F preserva sequências exatas que cindem. Portanto, a sequência de complexos

$$0 \longrightarrow F(P_{\bullet,M}) \xrightarrow{F(f_\bullet)} F(K_{\bullet,N}) \xrightarrow{F(g_\bullet)} F(W_{\bullet,Q}) \longrightarrow 0$$

é exata. Assim, aplicando os teoremas 2.1 e 3.2 obtemos o resultado. $\square$

Proposição 3.3. Sejam $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante e M um R-módulo. Se

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\ .$$

é uma resolução projetiva de M e $K_i = \mathrm{Ker}(d_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, então:

$$L_{n+1}F(M) \cong L_nF(K_0) \cong \cdots \cong L_1F(K_{n-1}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como $P_\bullet$ é exata, então $K_0 = \mathrm{Ker}(d_0) = \mathrm{Im}(d_1)$ e consequentemente

$$Q_\bullet : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de K_0. Assim, temos que:

$$L_nF(K_0) = \frac{\mathrm{Ker}(F(d_{n+1}))}{\mathrm{Im}(F(d_{n+2}))} = L_{n+1}F(M).$$

Repetindo este argumento, temos os isomorfismos desejados. $\square$

3.1.1.1 *O funtor* Tor

Definiremos os funtores derivados à esquerda do funtor produto tensorial na primeira e na segunda entrada. Pela Proposição 2.1, estes funtores são exatos à direita.

Definição 3.2. Sejam N um R-módulo e $F = -\otimes_R N$, definimos o funtor $\mathrm{Tor}_n^R(-,N) := L_nF$.

Logo, se M é um R-módulo dado e $(P_\bullet, d_\bullet)$ é uma resolução projetiva de M, temos que

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) = H_n(P_{\bullet,M}\otimes N) = \frac{\mathrm{Ker}(d_n\otimes \mathrm{id}_N)}{\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes \mathrm{id}_N)}.$$

Analogamente, podemos considerar o n-ésimo funtor derivado à esquerda de $M\otimes_R -$, para cada R-módulo M.

Definição 3.3. Sejam M um R-módulo e $F = M\otimes_R -$, definimos o funtor $\mathrm{tor}_n^R(M,-) := L_nF$.

Logo, se N é um R-módulo dado e $(Q_\bullet, e_\bullet)$ é uma resolução projetiva de N, temos que

$$\mathrm{tor}_n^R(M,N) = H_n(M\otimes Q_{\bullet,N}) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\otimes e_n)}{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\otimes e_{n+1})}.$$

As proposições que enunciaremos abaixo são consequências imediatas do Teorema 3.3.

Proposição 3.4. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata, então existe uma sequência exata longa de R-módulos e R-homomorfismos da forma

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^R(N,M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_2^R(f,M)} \mathrm{Tor}_2^R(P,M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_2^R(g,M)} \mathrm{Tor}_2^R(Q,M) \xrightarrow{\partial_2}$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(N,M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(f,M)} \mathrm{Tor}_1^R(P,M) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(g,M)} \mathrm{Tor}_2^R(Q,M) \xrightarrow{\partial_1}$$

$$N\otimes_R M \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_M} P\otimes_R M \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_M} Q\otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Proposição 3.5. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata, então existe uma sequência exata longa de R-módulos e R-homomorfismos da forma

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{tor}_2^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{tor}_2^R(M,f)} \mathrm{tor}_2^R(M,P) \xrightarrow{\mathrm{tor}_2^R(M,g)} \mathrm{tor}_2^R(M,Q) \xrightarrow{\partial_2}$$

$$\mathrm{tor}_1^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{tor}_1^R(M,f)} \mathrm{tor}_1^R(M,P) \xrightarrow{\mathrm{tor}_1^R(M,g)} \mathrm{tor}_1^R(M,Q) \xrightarrow{\partial_1}$$

$$M\otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M\otimes f} M\otimes_R P \xrightarrow{\mathrm{id}_M\otimes g} M\otimes_R Q \longrightarrow 0.$$

A seguir, veremos dois lemas necessários para verificar que $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{tor}_n^R(M,N)$, para quaisquer R-módulos M e N e qualquer $n \in \mathbb{N}_0$. O lema a seguir é um caso particular da Proposição 3.3.

Lema 3.3. Sejam M e N dois R-módulos e $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet, e_\bullet)$ resoluções projetivas de M e N, respectivamente. Se $K_n = \mathrm{Ker}(d_n)$ e $V_n = \mathrm{Ker}(e_n)$, para todo $n \geq 0$, temos que

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(K_0,N) \cong \cdots \cong \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},N)$$

e

$$\mathrm{tor}_{n+1}^R(M,N) \cong \mathrm{tor}_n^R(M,V_0) \cong \cdots \cong \mathrm{tor}_1^R(M,V_{n-1}),$$

para todo $n \geq 1$.

Lema 3.4. Dado um diagrama comutativo de R-módulos e R-homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[d] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d] & \\
\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r] & M'' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

com linhas e colunas exatas e tal que i e j são inclusões, então:

$$\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Ker}(\alpha) \text{ e } \mathrm{Ker}(h) \cong \mathrm{Ker}(\beta).$$

Demonstração. Usando o Lema da Serpente (A.1), obtemos uma sequência exata

$$\mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(g)\ .$$

Como as colunas deste diagrama são exatas, então $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$, $\mathrm{Coker}\, f \cong M''$ e $\mathrm{Coker}\, g \cong N''$. Além disso como o diagrama que consideramos inicialmente é comutativo, então podemos considerar a sequência exata acima como sendo a sequência

$$0 \longrightarrow \ker(h) \longrightarrow M'' \xrightarrow{\beta} N''\ .$$

Assim, $\mathrm{Ker}(h) \cong \mathrm{Ker}(\beta)$. Para mostrarmos o segundo isomorfismo, note que, como o diagrama do enunciado é comutativo, então $f \circ j = 0$. Assim, $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(i)$. Por outro lado, temos que $\alpha \circ i = 0$ e consequentemente:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Im}(j).$$

Assim, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\alpha)$. $\square$

Teorema 3.4. Sejam M e N dois R-módulos e $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet, e_\bullet)$ resoluções projetivas de M e N, respectivamente. Então, $H_n(P_{\bullet,M} \otimes N) \cong H_n(M \otimes Q_{\bullet,N})$, para todo $n \geq 0$. Sendo assim,

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{tor}_n^R(M,N),$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, tendo vista que $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N \cong \mathrm{tor}_0^R(M,N)$, pelo Teorema 3.2. Agora, vamos mostrar o caso $n = 1$. Como a resolução projetiva $P_\bullet$ é exata, então considerando $K_n = \mathrm{Ker}(d_n)$, analogamente ao que fizemos na Proposição 2.16, podemos considerar um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_i \arrow[rr, "d_i"] \arrow[dr, "b_i"'] & & P_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0. \\
& & K_{i-1} \arrow[ur, "p_{i-1}"'] \arrow[dr] & & & & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Denotando $M = K_{-1}$, para $i \geq 0$ obtemos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \longrightarrow K_{i-1} \longrightarrow 0.$$

Analogamente, fazendo o mesmo para $Q_\bullet$, com $V_j = \mathrm{Ker}(e_j)$, para cada $j \geq 0$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow V_j \longrightarrow Q_j \longrightarrow V_{j-1} \longrightarrow 0.$$

Tensorizando, podemos obter, para cada $i, j \geq 0$, o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & W \arrow[d] & \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & K_i \otimes_R V_j \arrow[r] \arrow[d] & K_i \otimes_R Q_j \arrow[r] \arrow[d] & K_i \otimes_R V_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_i \otimes_R V_j \arrow[r] \arrow[d] & P_i \otimes_R Q_j \arrow[r] \arrow[d] & P_i \otimes_R V_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Z \arrow[r] & K_{i-1} \otimes_R V_j \arrow[r] \arrow[d] & K_{i-1} \otimes_R Q_j \arrow[r] \arrow[d] & K_{i-1} \otimes_R V_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

com linhas e colunas exatas, onde os R-módulos W, X, Y e Z são, por definição, núcleos dos homomorfismos que compoem este diagrama. Assim, usando sequências exatas longas, podemos concluir que $W \cong \mathrm{Tor}_1^R(K_{i-1}, V_{j-1})$, $X \cong \mathrm{Tor}_1^R(K_{i-1}, V_j)$, $Y \cong \mathrm{tor}_1^R(K_i, V_{j-1})$ e $Z \cong \mathrm{tor}_1^R(K_{i-1}, V_{j-1})$.

Pelo Lema 3.4, para cada $i,j \geq -1$, temos que $\mathrm{Tor}_1^R(K_{i-1},V_{j-1}) \cong \mathrm{tor}_1^R(K_{i-1},V_{j-1})$. Fazendo $i = j = 0$, obtemos $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{tor}_1^R(M,N)$, pois $K_1 = M$ e $V_{-1} = N$. Além disso, para $n \geq 1$, usando o Lema 3.3, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{tor}_{n+1}^R(M,N) &\cong \mathrm{tor}_1^R(M,V_{n-1}) = \mathrm{tor}_1^R(K_{-1},V_{n-1}), \\ \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N) &\cong \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},N) = \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},V_{-1}). \end{aligned}$$

Por fim, usando o caso $n = 1$ e que para cada $i,j \geq 0$ $\mathrm{Tor}_1^R(K_{i-1},V_j) \cong \mathrm{tor}_1(K_i,V_{j-1})$, obtemos a seguinte cadeia de isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathrm{tor}_{n+1}^R(M,N) &\cong \mathrm{tor}_1^R(K_{-1},V_{n-1}) \\ \mathrm{Tor}_1^R(K_{-1},V_{n-1}) &\cong \mathrm{tor}_1^R(K_0,V_{n-2}) \\ \mathrm{Tor}_1^R(K_0,V_{n-2}) &\cong \mathrm{tor}_1^R(K_1,V_{n-3}) \\ &\vdots \\ \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-2},V_0) &\cong \mathrm{tor}_1^R(K_{n-1},V_{-1}) \\ \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},V_{-1}) &\cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\mathrm{tor}_{n+1}^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N)$. □

Como consequência do teorema acima, deixaremos de usar a notação $\mathrm{tor}_n^R(M,N)$ e tomaremos como padrão a notação $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$. Além disso, usando este teorema, é trivial ver que $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M)$.

Exemplo 3.1. Se M é um R-módulo e $x \in R$ não é divisor de zero sobre R e sobre o M, então $\mathrm{Tor}_i^R(M,R/(x)) = 0$, para todo $i > 0$ e $\mathrm{Tor}_0^R(M,R/(x)) = M/xM$. De fato, como x é R-regular, então a sequência

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{(x)} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $R/(x)$. Deletando e tensorizando com M, obtemos:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow 0\ .$$

Assim, o resultado segue calculando as homologias do complexo acima.

3.1.2 Funtores derivados à direta

Nesta subseção, associaremos a cada funtor aditivo covariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ uma família de funtores aditivos covariantes $R^iF : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ com índices em $\mathbb{N}_0$. Também iremos associar a cada funtor aditivo contravariante $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ uma família de funtores aditivos contravariantes $R^iF : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ com índices em $\mathbb{N}_0$. Tendo vista a similaridade com os argumentos que apresentamos na subseção anterior, nesta subseção, omitiremos as demonstrações. O resultado que enunciaremos a seguir é uma versão injetiva do Teorema 3.1.

Teorema 3.5. Seja $f : M \to N$ um R-homomorfismo e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} M^\bullet : 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f"] & M^0 \arrow[r, "d^0"] & M^1 \arrow[r, "d^1"] & M^2 \arrow[r] & \cdots \\ E^\bullet : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "e^{-1}"] & E^0 \arrow[r, "e^0"] & E^1 \arrow[r, "e^1"] & E^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

onde as linhas são cocomplexos. Se E_i é injetivo para todo $i \geq 0$ e $M^\bullet$ é uma sequência exata, então existe um morfismo de cocomplexos $f^\bullet : M^\bullet \to E^\bullet$ que estende f, ou seja, tal que $f^{-1} = f$. Além disso, quaisquer duas extensões com esta propriedade são homotópicas.

Demonstração. Ver Swanson (2018, p. 73). □

Analogamente ao que fizemos para resoluções projetivas, temos o corolário seguinte.

Corolário 3.2. Se $E^\bullet$ e $Q^\bullet$ são resoluções injetivas de dois R-módulos M e N, respectivamente, e $f : M \to N$ é um R-homomorfismo, então existe um morfismo de cocomplexos $f^\bullet : E^{\bullet,M} \to Q^{\bullet,N}$ que estende f, ou seja, tal que $e^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i$, para todo $i \geq 0$, e $e^{-1} \circ f = f^0 \circ d^{-1}$. Além disso, quaisquer dois morfismos de cocomplexos $f^\bullet, g^\bullet : E^{\bullet,M} \to Q^{\bullet,N}$ com estas propriedades são homotópicos.

Sendo assim, basta repetir os passos que fizemos na Subseção 3.1.1 para garantirar a boa definição do funtor aditivo covariante que definiremos abaixo. Além disso, semelhante ao que fizemos na Proposição 3.2, verifica-se que a menos de transformações naturais, esta definição independe da escolha de resoluções injetivas deletadas.

Definição 3.4. Seja $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo covariante. Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, o i-ésimo **funtor derivado à direita** de F é o funtor:

$$\begin{aligned} R^iF : \mathrm{Mod}_R &\to \mathrm{Mod}_R \\ M &\mapsto H^i(F(E^{\bullet,M})) \\ f : M \to N &\mapsto H^i(F(f^\bullet)) : H^i(F(E^{\bullet,M})) \to H^i(F(Q^{\bullet,N})), \end{aligned}$$

onde $E^\bullet$ e $Q^\bullet$ são resoluções injetivas de M e N, respectivamente, e $f^\bullet : E^{\bullet,M} \to Q^{\bullet,N}$ é uma extensão de f.

Também pode-se repetir os passos que fizemos na Subseção 3.1.1 para garantir a boa definição do funtor aditivo contravariante que definiremos abaixo. Além disso, semelhante ao que fizemos na Proposição 3.2, verifica-se que a menos de transformações naturais, esta definição independe da escolha de resoluções projetivas deletadas.

Definição 3.5. Seja $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ um funtor aditivo contravariante. Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, o i-ésimo **funtor derivado à direita** de F é o funtor

$$\begin{aligned} R^iF : \mathrm{Mod}_R &\to \mathrm{Mod}_R \\ M &\mapsto H^i(F(P_{\bullet,M})) \\ f : M \to N &\mapsto H^i(F(f_\bullet)) : H^i(F(Q_{\bullet,N})) \to H^i(F(P_{\bullet,M})), \end{aligned}$$

onde $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são resoluções projetivas de M e N, respectivamente, e $f_\bullet : P_{\bullet,M} \to Q_{\bullet,N}$ é uma extensão de f.

Na Subseção 3.1.1, consideramos funtores derivados à esquerda de funtores aditivos covariantes exatos à direita e esta última condição foi fundamental para verificarmos que L_0F e F são naturalmente isomorfos. Nesta subseção, consideramos funtores exatos à esquerda para que tenhamos resultados análogos ao Teorema 3.2.

Teorema 3.6. Se $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é um funtor aditivo covariante e exato à esquerda, então F é naturalmente isomorfo ao funtor R^0F.

Teorema 3.7. Se $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é um funtor aditivo contravariante e exato à esquerda, então F é naturalmente isomorfo ao funtor R^0F.

Encerraremos esta breve introdução geral aos funtores derivados à direita enunciando resultados análogos ao Teorema 3.3 neste contexto.

Teorema 3.8. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata e $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é um funtor aditivo covariante e exato à esquerda, então existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow R^nF(M) \xrightarrow{R^nF(f)} R^nF(N) \xrightarrow{R^nF(g)} R^nF(Q) \xrightarrow{\partial^n}$$

$$R^{n+1}F(M) \xrightarrow{R^{n+1}F(f)} R^{n+1}F(N) \xrightarrow{R^{n+1}F(g)} R^{n+1}F(Q) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \cdots$$

que começa com

$$0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(Q) \longrightarrow \cdots .$$

Teorema 3.9. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata e $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ é um funtor aditivo contravariante e exato à esquerda, então existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow R^nF(Q) \xrightarrow{R^nF(g)} R^nF(N) \xrightarrow{R^nF(f)} R^nF(M) \xrightarrow{\partial^n}$$

$$R^{n+1}F(Q) \xrightarrow{R^{n+1}F(g)} R^{n+1}F(N) \xrightarrow{R^{n+1}F(f)} R^{n+1}F(M) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \cdots$$

que começa com

$$0 \longrightarrow F(Q) \xrightarrow{F(g)} F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M) \longrightarrow \cdots .$$

3.1.2.1 *O funtor* Ext

Definiremos os funtores derivados à direita dos funtores $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ e $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ onde M e N são R-módulos. Pela Proposição 2.1, estes funtores são exatos à esquerda.

Definição 3.6. Seja M um R-módulo e $F = \mathrm{Hom}_R(M,-)$, definimos o funtor $\mathrm{Ext}^n_R(M,-) := R^nF$.

Logo, se N é uma R-módulo e $(E^\bullet, d^\bullet)$ é uma resolução injetiva de N, temos que

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(M, E^{\bullet,N})) = \frac{\mathrm{Ker}(d^i_*)}{\mathrm{Im}(d^{i+1}_*)}.$$

Definição 3.7. Seja N um R-módulo e $F = \mathrm{Hom}_R(-,N)$, definimos o funtor $\mathrm{ext}^n_R(-,N) := R^nF$.

Logo, se M é um R-módulo e $(P_\bullet, d_\bullet)$ é uma resolução projetiva de M, temos que

$$\mathrm{ext}^n_R(M,N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M}),N) = \frac{\mathrm{Ker}(d^*_{i+1})}{\mathrm{Im}(d^*_i)}.$$

As próximas proposições são consequências dos teoremas 3.8 e 3.9.

Proposição 3.6. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata, então existe uma sequência exata longa de R-módulos e R-homomorfismos da forma

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M,P) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M,Q) \xrightarrow{\partial^0} \quad .$$

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(M,f)} \mathrm{Ext}^1_R(M,P) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_R(M,g)} \mathrm{Ext}^1_R(M,Q) \xrightarrow{\partial^1}$$

$$\mathrm{Ext}^2_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_R(M,f)} \mathrm{Ext}^2_R(M,P) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_R(M,g)} \mathrm{Ext}^2_R(M,Q) \xrightarrow{\partial^2} \cdots$$

Proposição 3.7. Se a sequência de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

é exata, então existe uma sequência exata longa de R-módulos e R-homomorfismos da forma

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q,N) &\xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(P,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\partial^0} \\ \mathrm{ext}^1_R(Q,N) &\xrightarrow{\mathrm{ext}^1_R(g,N)} \mathrm{ext}^1_R(P,N) \xrightarrow{\mathrm{ext}^1_R(f,N)} \mathrm{ext}^1_R(M,N) \xrightarrow{\partial^1} \\ \mathrm{ext}^2_R(Q,N) &\xrightarrow{\mathrm{ext}^2_R(g,N)} \mathrm{ext}^2_R(P,N) \xrightarrow{\mathrm{ext}^2_R(f,N)} \mathrm{ext}^2_R(M,N) \xrightarrow{\partial^2} \cdots . \end{aligned}$$

O próximo teorema é o análogo ao Teorema 3.4 para Ext.

Teorema 3.10. Sejam M e N dois R-módulos, $P_\bullet$ uma resolução projetiva de M e $E^\bullet$ uma resolução injetiva de N. Então, $H^n(\mathrm{Hom}_R(P_{\bullet,M},N)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(M,E^{\bullet,N}))$, para todo $n \geq 0$. Sendo assim,

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \cong \mathrm{ext}^n_R(M,N),$$

para todo $n \geq 0$.

Como consequência do teorema acima, deixaremos de usar a notação $\mathrm{ext}^n_R(M,N)$ e tomaremos como padrão a notação $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$. O teorema acima nos garante diferentes formas de calcular o R-módulo $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$, seja via resoluções projetivas de M ou resoluções injetivas de N.

3.2 Complexo de Koszul

Antes de tratarmos sobre o complexo de Koszul, trataremos brevemente sobre a álgebra exterior de um R-módulo M. Para tanto, é necessário considerarmos a **álgebra tensorial** de M.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, denotaremos por $M^{\otimes i}$ o produto tensorial de i cópias de M. Além disso, convencionaremos $M^{\otimes 0} = R$. Assim, fixamos

$$\bigotimes M := \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}.$$

Fixados $m,n \in \mathbb{N}_0$, a função $f : M^{m+n} \to M^{\otimes(m+n)}$ dada por

$$f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n,$$

induz uma função R-bilinear de $M^{\otimes m} \times M^{\otimes n} \to M^{\otimes(m+n)}$, cuja extensão aditiva de $\bigotimes M \times \bigotimes M$ em $\bigotimes M$ é um produto em $\bigotimes M$. Assim, $\bigotimes M$ é uma R-álgebra. Em geral, $\bigotimes M$ não é comutativa.

No que segue, vamos denotar por $\mathfrak{J}$ o ideal bilateral de $\bigotimes M$ gerado pelo elementos da forma $x \otimes x$, onde $x \in M$. Enfim, temos condições de definir a **álgebra exterior de** M, dada pelo quociente:

$$\bigwedge M := \frac{\bigotimes M}{\mathfrak{J}}.$$

O produto de elementos x e y de $\bigwedge M$ é denotado por $x \wedge y$.

Observação 3.2. Se M é um R-módulo e $x_1, \ldots, x_n \in M$, então:

i) Se $x_i = x_j$ para algum $i \neq j$, então $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$.

ii) Se $\pi \in S_n$ é uma permutação, então $x_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi(n)} = \operatorname{sgn}(\pi) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$.

iii) Se $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ é um subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $i_1 < \cdots < i_m$, então escrevemos $x_I := x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_m}$.

iv) Se $1 \leq i \leq n$, então $x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$ denota elemento de $\bigwedge M$ obtido de $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ omitindo x_i.

Denotaremos por $\bigwedge^i M$ a i-ésima componente graduada de $\bigwedge M$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$. É fácil ver que $\bigwedge^0 M \cong R$ e $\bigwedge^1 M \cong M$. Além disso, se $i \geq 1$, então $\bigwedge^i M$ é o R-módulo gerado pelos elementos da forma $x_1 \wedge \cdots \wedge x_i$, onde $x_1, \ldots, x_i \in M$. A seguir, enunciaremos propriedades universais que caracterizam, a menos de isomorfismos, a álgebra exterior de um R-módulo M e as **potências exteriores** $\bigwedge^i M$.

Propriedade Universal da Álgebra Exterior $\bigwedge M$: Para todo R-homomorfismo $\varphi : M \to E$, onde E é uma R-álgebra, tal que $\varphi(x)^2 = 0$, para todo $x \in M$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $\psi : \bigwedge M \to E$, que estende φ.

Proposição 3.8. Se $\varphi : M \to N$ é um R-homomorfismo, então existe um homomorfismo de R-álgebras $\bigwedge \varphi : \bigwedge M \to \bigwedge N$ tal que

$$\bigwedge \varphi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n),$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in M$. Além disso, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, o homomorfismo $\bigwedge \varphi$ induz um R-homomorfismo $\bigwedge^i \varphi : \bigwedge^i M \to \bigwedge^i N$.

Demonstração. Consideremos $\varphi : M \to \bigwedge N$. Assim, temos que $(\varphi(x))^2 = \varphi(x) \wedge \varphi(x) = 0$, para todo $x \in M$. Portanto, pela Propriedade Universal da Álgebra Exterior, existe um homomorfismo de R-álgebras $\bigwedge \varphi : \bigwedge M \to \bigwedge N$ que estende φ. Ou seja, tal que para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in M$, temos que:

$$\bigwedge \varphi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \left(\bigwedge \varphi(x_1)\right) \wedge \cdots \wedge \left(\bigwedge \varphi(x_n)\right) = \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n).$$

A segunda parte segue trivialmente restringindo $\bigwedge \varphi$ a $\bigwedge^i M$. $\square$

Propriedade Universal da i-ésima Potência Exterior $\bigwedge^i M$: Para quaisquer função i-linear alternada $\alpha : M^i \to N$, onde N é um R-módulo, existe um único R-homomorfismo $\lambda : \bigwedge^i M \to N$ satisfazendo $\lambda(x_1 \wedge \cdots \wedge x_i) = \alpha(x_1, \ldots, x_i)$, para quaisquer $x_1, \ldots, x_i \in M$.

Um caso particularmente interessante para este trabalho é o caso em que M é um R-módulo livre de posto finito, que denotaremos por F. Neste caso, veremos que se $\mathrm{rk}(F) = n$, então $\bigwedge^i F$ é um R-módulo livre de posto $\binom{n}{i}$, sempre que $0 \leq i \leq n$. Além disso, se $i > n$, então $\bigwedge^i F = 0$.

Proposição 3.9. Se F é um R-módulo livre de posto n, então $\bigwedge^l F$ é um R-módulo livre de posto $\binom{n}{l}$, para todo $0 \leq l \leq n$. Além disso, se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base de F, então os elementos da forma e_I, com $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ e $|I| = l$, formam uma base de $\bigwedge^l F$.

Demonstração. Sabemos que $\bigwedge^l F$ é gerado pelos elementos da forma $x_1 \wedge \cdots \wedge x_l$, com $x_j \in F$, para todo $j = 1, \ldots, l$. Assim, se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base de F, então é fácil ver que $\bigwedge^l F$ é gerado pelos elementos da forma $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_l}$, com $\{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Além disso, note que se $\{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ não tem elementos repetidos, então podemos usar uma permutação, digamos $\pi \in S_l$, para reordenar em ordem crescente o conjunto $\{j_1, \ldots, j_l\}$. Como $e_{\pi(j_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\pi(j_l)} = \mathrm{sgn}(\pi) x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_l}$, então garantimos que $\bigwedge^l F$ é gerado pelos elementos da forma e_I, $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|I| = l$. Por fim, precisamos provar que tais elementos formam uma base de $\bigwedge^l F$. Inicialmente, vamos provar para $l = n$. Sabemos que $\bigwedge^n F$ é gerado por $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Consideremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a base dual de $\mathrm{Hom}_R(F, R)$. Ou seja, $\lambda_i(e_j) = \delta_{ij}$, para cada $1 \leq i, j \leq n$ (onde δ_{ij} denota o tradicional delta de Kronecker). Para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in F$, definimos:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \lambda_1(x_{\pi(1)}) \cdots \lambda_n(x_{\pi(n)}).$$

Se $x_i = x_j$ para $i \neq j$, então, para cada $\pi \in S_n$, fixemos i' e j' índices tais que $\pi(i') = i$ e $\pi(j') = j$ e seja $s = (ij)$. Neste caso, os $n!$ somandos na expressão de φ se cancelam em pares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{sgn}(\pi)\lambda_1(x_{\pi(1)}) \cdots \lambda_n(x_{\pi(n)}) + \mathrm{sgn}(s\pi)\lambda_1(x_{s\pi(1)}) \cdots \lambda_n(x_{s\pi(n)}) \\ &= \mathrm{sgn}(\pi) \left(\prod_{l \neq i', j'} \lambda_l(x_{\pi(l)}) \right) (\lambda_{i'}(x_i)\lambda_{j'}(x_j) - \lambda_{i'}(x_j)\lambda_{j'}(x_i)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, φ é n-linear e alternada. Portanto, pela Propriedade Universal da Potência Exterior, φ induz um R-homomorfismo $\Phi : \bigwedge^n F \to R$. Note que:

$$\Phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Portanto, se $r \in R$ é tal que $re_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0$, então:

$$0 = \Phi(re_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = r\Phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = r.$$

Sendo assim, $\{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\}$ é uma base de $\bigwedge^n F$. Por fim, vamos provar o caso em que $l < n$. Suponhamos que

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_l} r_{i_1 \ldots i_l} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l} = 0.$$

Novamente usando a Propriedade Universal da Potência Exterior, para cada l-upla crescente $j_1 < \cdots < j_l$, garantimos que existe um R-homomorfismo $f : \bigwedge^l F \to \bigwedge^n F$ dado por:

$$f(x) = x \wedge (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_l}} \wedge \ldots e_n).$$

Assim, temos que:

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_l} r_{i_1 \ldots i_l} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}\right) = \pm r_{j_1 \ldots j_l} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Assim, pelo que provamos acima para $l = n$, temos que $r_{j_1 \ldots j_l} = 0$, para quaisquer l-upla crescente $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq n$. $\square$

Finalmente, vamos construir o complexo de Koszul. Sejam L um R-módulo e $f : L \to R$ um R-homomorfismo. Para cada $n \geq 1$, a função $\varphi : L^n \to \bigwedge^{n-1} L$ dada por

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

é n-linear e alternada. Assim, pela propriedade universal da n-ésima potência exterior, existe um R-homomorfismo $d_f^{(n)} : \bigwedge^n L \to \bigwedge^{n-1} L$ satisfazendo

$$d_f^{(n)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n,$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in L$.

Proposição 3.10. Se L é um R-módulo e $f : L \to R$ é um R-homomorfismo, então

$$K_\bullet(f) : \cdots \longrightarrow \bigwedge^n L \xrightarrow{d_f^{(n)}} \bigwedge^{n-1} L \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 L \xrightarrow{d_f^{(2)}} L \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0$$

é um complexo.

Demonstração. Considerando $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in \bigwedge^n L$, temos que

$$\begin{aligned}(d_f^{(n-1)} \circ d_f^{(n)})(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) &= d_f^{(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) d_f^{(n-1)}(x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots x_n).\end{aligned}$$

Além disso, escrevendo

$$
\begin{aligned}
d_f^{(n-1)}(x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_n) &= \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+1}f(x_j)x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\ldots\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_n\\
&+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{j}f(x_j)x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\wedge x_n
\end{aligned}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
d_f^{(n-1)}(d_f^{(n)}(x_1\wedge\cdots\wedge x_n)) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j}f(x_i)f(x_j)x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\ldots\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_n\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j+1}f(x_i)f(x_j)x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{x_j}\wedge\cdots\wedge x_n\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Definição 3.8. O complexo $K_\bullet(f)$ é chamado o **complexo de Koszul de** f. Além disso, se M é um R-módulo, então o complexo $K_\bullet(f,M) := K_\bullet(f)\otimes_R M$ é chamado **o complexo de Koszul de f com coeficientes em M**.

Denotaremos por $H_i(f)$ a i-ésima homologia do complexo $K_\bullet(f)$ e por $H_i(f,M)$ a i-ésima homologia do complexo $K_\bullet(f,M)$.

Proposição 3.11. Se $f: L\to R$, $f': L'\to R$ e $\varphi: L\to L'$ são R-homomorfismos tais que $f = f'\circ\varphi$, então a família de R-homorfismos $\{\bigwedge^i\varphi\}_i$ é um morfismo de complexos de $K_\bullet(f)$ em $K_\bullet(f')$.

Demonstração. Vamos verificar que para cada $n\geq 1$, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\bigwedge^n L \arrow[r, "d_f^{(n)}"] \arrow[d, "\bigwedge^n\varphi"] & \bigwedge^{n-1} L \arrow[d, "\bigwedge^{n-1}\varphi"] \\
\bigwedge^n L \arrow[r, "d_{f'}^{(n)}"'] & \bigwedge^{n-1} L
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. De fato, se $x_1,\ldots,x_n\in L$, temos que

$$
\begin{aligned}
d_{f'}^{(n)}\left(\bigwedge^n\varphi(x_1\wedge\cdots\wedge x_n)\right) &= d_{f'}^{(n)}(\varphi(x_1)\wedge\cdots\wedge\varphi(x_n))\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f'(\varphi(x_i))\varphi(x_1)\wedge\cdots\wedge\widehat{\varphi(x_i)}\wedge\cdots\wedge\varphi(x_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f(x_i)\varphi(x_1)\wedge\cdots\wedge\widehat{\varphi(x_i)}\wedge\cdots\wedge\varphi(x_n)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\bigwedge^{n-1} \varphi(d_f^{(n)}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)) &= \bigwedge^{n-1} \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) \bigwedge^{n-1} \varphi(x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\varphi(x_i)} \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n).
\end{aligned}$$

□

A proposição seguinte decorre parcialmente do isomorfismo canônico que enunciaremos a seguir: Se $f : R \to S$ é um homomorfismo de anéis e M é um R-módulo, considerando $\bigwedge_R^i(M)$ a i-ésima potência exterior de M com relação a R, para $i \geq 1$, então temos um isomorfismo canônico de S-módulos $S \otimes_R \bigwedge_R^i(M) \cong \bigwedge_S^i(S \otimes_R M)$. Mais detalhes sobre este isomorfismo podem ser vistos em Konrad (2018).

Proposição 3.12. Se $f : L \to R$ é um R-homomorfismo e $\varphi : R \to S$ é um homomorfismo de anéis, então existe um isomorfismo natural $K_\bullet(f) \otimes_R S \cong K_\bullet(f \otimes \mathrm{id}_S)$, como complexos de S-módulos. Além disso, se M é um R-módulo e S é um R-módulo plano, então:

$$H_i(f, M) \otimes_R S \cong H_i(f \otimes \mathrm{id}_S, M \otimes_R S),$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Ver Bruns e Herzog (1998, p. 46). □

Agora, estudaremos o complexo de Koszul associado a uma sequência de elementos $x_1, \ldots, x_n \in R$. Se F é um R-módulo livre com base $e_1, \ldots, e_n$, então qualquer R-homomorfismo $f : F \to R$ é unicamente determinado pelo valores $x_i = f(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Reciprocamente, toda sequência de n elementos de R define um tal R-homomorfismo.

Definição 3.9. Sejam $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência de elementos de R, F um R-módulo livre com base $e_1, \ldots, e_n$ e $f : F \to R$ o R-homomorfismo induzido pela sequência $\mathbf{x}$. O **complexo de Koszul asssociado a x** é o complexo $K_\bullet(\mathbf{x}) := K_\bullet(f)$.

Observação 3.3. Quando trabalharmos com o complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$ associado a uma sequência de elementos de R, também adaptaremos o restante da notação, trocando f por $\mathbf{x}$.

Exemplo 3.2. Vejamos, explicitamente, como é o complexo de Koszul associado a uma sequência de 2 e 3 elementos. Se $\mathbf{x} = x_1, x_2$, então o complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$ é o complexo de Koszul associado ao R-homomorfismo $f : R^2 \to R$ satisfazendo $f(e_1) = x_1$ e $f(e_2) = x_2$. Neste caso, temos que:

$$d_{\mathbf{x}}^{(2)}(e_1 \wedge e_2) = (-1)^2 x_1 e_2 + (-1)^3 x_2 e_1 = -x_2 e_1 + x_1 e_2.$$

Assim, neste caso, $K_\bullet(\mathbf{x})$ é o complexo:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}} R \longrightarrow 0\,.$$

Agora, considerando $\mathbf{y} = y_1, y_2, y_3$, temos que $K_\bullet(\mathbf{y})$ é complexo associado ao R-homomorfismo $g : R^3 \to R$ satisfazendo $g(e_1) = y_1$, $g(e_2) = y_2$ e $g(e_3) = y_3$. Como

$$d_{\mathbf{y}}^{(2)}(e_1 \wedge e_2) = -y_2e_1 + y_1e_2, \quad d_{\mathbf{y}}^{(2)}(e_1 \wedge e_3) = -y_3e_1 + y_1e_3,$$
$$d_{\mathbf{y}}^{(2)}(e_2 \wedge e_3) = -y_3e_2 + y_2e_3$$

e além disso

$$d_{\mathbf{y}}^{(3)}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = y_3(e_1 \wedge e_2) - y_2(e_1 \wedge e_3) + y_1(e_2 \wedge e_3),$$

então $K_\bullet(\mathbf{y})$ é o complexo

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y_3 \\ -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y_2 & -y_3 & 0 \\ y_1 & 0 & -y_3 \\ 0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}} R \longrightarrow 0\,.$$

A próxima proposição nos fornece uma caracterização do complexo de Koszul em termos do produto tensorial de complexos.

Proposição 3.13. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, $n \geq 2$, é uma sequência de elementos de R e além disso $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$, então:

$$K_\bullet(\mathbf{x}) \cong K_\bullet(\mathbf{x}') \otimes K_\bullet(x_n) \cong K_\bullet(x_1) \otimes \cdots \otimes K_\bullet(x_n).$$

Demonstração. Por indução, é suficiente mostrarmos que para cada $n \geq 2$ verifica-se o primeiro isomorfismo do enunciado. Inicialmente, observemos que $K_\bullet(x_n)$ é o complexo:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x_n} R \longrightarrow 0\,.$$

Assim, temos que

$$(K_\bullet(\mathbf{x}') \otimes K_\bullet(x_n))_p = \left(\bigwedge^p R^{n-1} \otimes_R R\right) \oplus \left(\bigwedge^{p-1} R^{n-1} \otimes_R R\right)$$
$$\cong \bigwedge^p R^{n-1} \oplus \bigwedge^{p-1} R^{n-1}.$$

Além disso, o diferencial $f_p : \bigwedge^p R^{n-1} \oplus \bigwedge^{p-1} R^{n-1} \to \bigwedge^{p-1} R^{n-1} \oplus \bigwedge^{p-2} R^{n-1}$ é dado por:

$$f_p(y,z) = (d_{\mathbf{x}'}^{(p)}(y) + (-1)^{p-1}x_nz, d_{\mathbf{x}'}^{(p-1)}(z)),$$

para quaisquer $y \in \bigwedge^p R^{n-1}$ e $z \in \bigwedge^{p-1} R^{n-1}$. Consideremos $\{r_I\}_{|I|=p}$, uma base de $\bigwedge^p R^{n-1}$, como na Proposição 3.9, para cada $p = 0, \ldots, n-1$. Além disso, seja $\{e_I\}_{|I|=p}$ uma base de $\bigwedge^p R^n$, como consideramos na Proposição 3.9. Para cada p, consideremos o isomorfismo de R-módulos $g_p : \bigwedge^p R^n \to \bigwedge^p R^{n-1} \oplus \bigwedge^{p-1} R^{n-1}$ dado por:

$$g_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} (r_{i_1} \wedge \cdots \wedge r_{i_p}, 0), \text{ se } i_p < n \\ (0, r_{i_1} \wedge \cdots \wedge r_{i_{p-1}}), \text{ se } i_p = n. \end{cases}$$

Por fim, verificando que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^p R^n \arrow[r, "d_{\mathbf{x}}^{(p)}"] \arrow[d, "g_p"'] & \bigwedge^{p-1} R^n \arrow[d, "g_{p-1}"] \\ \bigwedge^p R^{n-1} \oplus \bigwedge^{p-1} R^{n-1} \arrow[r, "f_p"] & \bigwedge^{p-1} R^{n-1} \oplus \bigwedge^{p-2} R^{n-1} \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

é comutativo, temos o resultado. Com efeito, consideremos $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ um elemento da base de $\bigwedge^p R^n$ considerada na Proposição 3.9 e suponhamos que $i_p < n$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} g_{p-1}(d_{\mathbf{x}}^{(p)}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})) &= g_{p-1}\left(\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} x_{i_j} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} x_{i_j} (r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{r_{i_j}} \wedge \cdots \wedge r_{i_p}, 0). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} f_p(g_p(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})) &= f_p(r_{i_1} \wedge \cdots \wedge r_{i_p}, 0) \\ &= (d_{\mathbf{x}'}^{(p)}(r_{i_1} \wedge \cdots \wedge r_{i_p}), 0) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} x_{i_j} r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{r_{i_j}} \wedge \cdots \wedge r_{i_p}, 0\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} x_{i_j} (r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{r_{i_j}} \wedge \cdots \wedge r_{i_p}, 0). \end{aligned}$$

Assim, $(g_{p-1} \circ d_{\mathbf{x}}^{(p)})(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = (f_p \circ g_p)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})$. Analogamente verifica-se o caso em que $i_p = n$ e o diagrama 3.1 é comutativo. □

Proposição 3.14. Se $x \in R$ e $M_\bullet$ é um complexo, então $xH_i(M_\bullet \otimes K_\bullet(x)) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $\overline{(y,z)}$ um elemento de $H_i(M_\bullet \otimes K_\bullet(x))$, onde $y \in M_i$ e $z \in M_{i-1}$. Neste caso, temos que $d_i(y) + (-1)^{i-1} xz = 0$ e $d_{i-1}(z) = 0$. Assim,

$$x(y,z) = (xy, xz) = d'_{i+1}(0, (-1)^i y),$$

onde d'_{i+1} denota o $(i+1)$-ésimo diferencial do produto tensorial $M_\bullet \otimes K_\bullet(x)$. Logo, temos a igualdade $x\overline{(y,z)} = 0$. □

Combinando as proposições 3.13 e 3.14, obtemos o corolário abaixo.

Corolário 3.3. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência de elementos de R, então $(x_1, \ldots, x_n)H_i(\mathbf{x}) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Se $x \in R$ e M é um R-módulo, então o complexo de Koszul $K_\bullet(x, M)$ é extremamente simples. Neste caso, tal complexo é:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow 0\ .$$

Assim, o elemento $x \in R$ é M-regular, isto é, não é um divisor de zero sobre M, se e somente se $H_1(x, M) = 0$. No que segue, estenderemos este argumento para sequências M-regulares.

Proposição 3.15. Se $x \in R$ e $C_\bullet$ é um complexo, então:

i) Existe uma sequência exata curta de complexos da forma:

$$0 \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow C_\bullet \otimes K_\bullet(x) \longrightarrow C_\bullet(-1) \longrightarrow 0\ ,$$

onde $C_\bullet(-1)$ é o complexo obtido a partir de $C_\bullet$ apenas adicionando -1 a cada índice.

ii) A sequência exata longa de homologias induzida pela sequência exata curta de complexos acima é da forma:

$$\cdots \longrightarrow H_i(C_\bullet) \longrightarrow H_i(C_\bullet \otimes K_\bullet(x)) \longrightarrow H_{i-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\pm x} H_{i-1}(C_\bullet) \longrightarrow \cdots\ .$$

Demonstração. Inicialmente, note que o complexo $K_\bullet(x)$ é simplesmente:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R \longrightarrow 0\ .$$

Assim, o i-ésimo módulo do complexo $C_\bullet \otimes K_\bullet(x)$ é portanto

$$(C_i \otimes_R R) \oplus (C_{i-1} \otimes_R R) \cong C_i \oplus C_{i-1},$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Em cada índice $i \in \mathbb{Z}$, temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow C_i \xrightarrow{j} C_i \oplus C_{i-1} \xrightarrow{\pi} C_{i-1} \longrightarrow 0\ ,$$

onde j denota a inclusão e π a projeção canônica de $C_i \oplus C_{i-1}$ sobre C_{i-1}. Além disso, o i-ésimo diferencial do produto tensorial $f_i : C_i \oplus C_{i-1} \to C_{i-1} \oplus C_{i-2}$ é dado por:

$$f_i(x, y) = (d_i(x) + (-1)^{i-1} xy, d_{i-1}(y)),$$

para quaisquer $x \in C_i$ e $y \in C_{i-1}$, onde d_i denota o i-ésimo diferencial do complexo $C_\bullet$. Assim, é fácil ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "d_i"'] & C_i \oplus C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{i-1} \arrow[r] & C_{i-1} \oplus C_{i-2} \arrow[r] & C_{i-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, verificando o item i). O item ii) é uma consequência de i) e do Teorema 2.1. $\square$

Corolário 3.4. Sejam $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência de elementos de R e M um R-módulo. Se $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$, então existe uma sequência exata longa forma

$$\cdots \xrightarrow{\pm x_n} H_i(\mathbf{x}', M) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{x}', M) \xrightarrow{\pm x_n} H_{i-1}(\mathbf{x}', M) \longrightarrow \cdots .$$

Proposição 3.16. Sejam $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência de elementos de R e M um R-módulo. Se $\mathbf{x}$ é uma M-sequência, então $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como no último corolário, vamos denotar $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$. Faremos a prova por indução em n. No caso $n = 1$, o argumento é trivial. Suponhamos que $n > 1$ e que o resultado vale para $n-1$, então considerando a sequência exata do lema acima

$$H_i(\mathbf{x}', M) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{x}', M) \ ,$$

temos que $H_i(\mathbf{x}', M) = H_{i-1}(\mathbf{x}', M) = 0$, pois como $\mathbf{x}$ é uma M-sequência, o mesmo ocorre com a sequência $\mathbf{x}'$. Assim, temos que $H_i(\mathbf{x}, M) = 0$, para todo $i > 1$. Por fim, para $i = 1$, usamos novamente o lema acima para obter uma sequência exata

$$0 = H_1(\mathbf{x}', M) \longrightarrow H_1(\mathbf{x}, M) \longrightarrow M/(\mathbf{x}')M \xrightarrow{\pm x_n} M/(\mathbf{x}')M$$

de onde obtemos que $H_1(\mathbf{x}, M) \cong \operatorname{Ker}(\cdot x_n) = 0$, pois x_n é um elemento $M/(\mathbf{x}')M$-regular. $\square$

Proposição 3.17. Sejam $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência em R e $0 \to U \to M \to N \to 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então, a sequência induzida

$$0 \longrightarrow K_\bullet(\mathbf{x}, U) \longrightarrow K_\bullet(\mathbf{x}, M) \longrightarrow K_\bullet(\mathbf{x}, N) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos. Em particular, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, U) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, N) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{x}, U) \longrightarrow \cdots$$

de R-módulos de homologia.

Demonstração. Para simplificar a notação, vamos denotar por K_i o i-ésimo R-módulo do complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$, para cada $i = 0, \ldots, n$. Neste caso, como K_i é livre, então K_i é plano e a sequência

$$0 \longrightarrow K_i \otimes_R U \xrightarrow{\mathrm{id}_{K_i} \otimes f} K_i \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_{K_i} \otimes g} K_i \otimes_R N \longrightarrow 0$$

é exata, para todo $i = 0, \ldots, n$. Além disso, é fácil ver que o diagrama abaixo, onde as setas verticais representam os i-ésimos diferenciais dos complexos $K_\bullet(\mathbf{x}, U)$, $K_\bullet(\mathbf{x}, M)$ e $K_\bullet(\mathbf{x}, N)$, é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \otimes_R U \arrow[r, "\mathrm{id}_{K_i} \otimes f"] \arrow[d] & K_i \otimes_R M \arrow[r, "\mathrm{id}_{K_i} \otimes g"] \arrow[d] & K_i \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{i-1} \otimes_R U \arrow[r, "\mathrm{id}_{K_{i-1}} \otimes f"] & K_{i-1} \otimes_R M \arrow[r, "\mathrm{id}_{K_{i-1}} \otimes g"] & K_{i-1} \otimes_R N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos a sequência exata curta de complexos do enunciado. $\square$

Lema 3.5. Sejam M e N dois R-módulos e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma M-sequência fraca em $\mathrm{Ann}(N)$. Então:

$$\mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, M).$$

Demonstração. Provaremos este resultado por indução sobre n. No caso em que $n = 0$, não há o que provarmos. Considerando $n \geq 1$ e $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_{n-1}$, então a hipótese de indução implica que $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}'M)$. Como x_n é $(M/\mathbf{x}'M)$-regular, então concluímos que $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M) = 0$ (ver B.2). Assim, pela Proposição 3.6, a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{.x_1} M \longrightarrow \frac{M}{x_1 M} \longrightarrow 0$$

induz uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1 M) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}_R^n(N, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}_R^n(N, M)\ ,$$

onde $\varphi = \mathrm{Ext}_R^n(N, x_1)$. Como $x_1 \in \mathrm{Ann} N$, então $\varphi = 0$. Assim, ψ é um R-isomorfismo, ou seja, $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(N, M)$. Por fim, como $\mathbf{x}$ é uma M-sequência fraca em $\mathrm{Ann}(N)$, então $x_2, \ldots, x_n$ é uma M/x_1M-sequência fraca em $\mathrm{Ann}(N)$. Logo, pela hipótese de indução, temos que:

$$\mathrm{Ext}_R^n(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(N, M/x_1M) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M).$$

$\square$

Teorema 3.11. Sejam $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência em R e M um R-módulo. Se $I = (\mathbf{x})$ contém uma M-sequência fraca $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_m$, então $H_{n+1-i}(\mathbf{x}, M) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Além disso, temos que

$$H_{n-m}(\mathbf{x}, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M) \cong \mathrm{Ext}_R^m(R/I, M).$$

Demonstração. Inicialmente, note que é suficiente mostrarmos os isomorfismos acima (ver B.2). Além disso, note que o isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M) \cong \mathrm{Ext}_R^m(R/I, M)$ segue do Lema 3.5. Mostraremos o isomorfismo $H_{n-m}(\mathbf{x}, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M)$ por indução em m. No caso em que $m = 0$, identificando $\bigwedge^n R^n \otimes_R M \cong M$ e $\bigwedge^{n-1} R^n \otimes_R M \cong M^n$ é fácil ver que:

$$H_{n-m}(\mathbf{x}, M) \cong \{m \in M : Im = 0\} \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M).$$

Suponhamos que $m \geq 1$ e que o resultado é verdadeiro para $m-1$. Fixando $\overline{M} = M/y_1M$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{y_1} M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0\ .$$

Aplicando a Proposição 3.17, obtemos uma sequência exata da forma

$$\cdots \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, M) \xrightarrow{y_1} H_i(\mathbf{x}, M) \longrightarrow H_i(\mathbf{x}, \overline{M}) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{x}, M) \xrightarrow{y_1} \cdots\ .$$

Pelo Corolário 3.3, temos que $y_1 H_i(\mathbf{x},M) = 0$ e consequentemente, a partir da sequência exata longa acima, obtemos sequência exatas curtas da forma

$$0 \longrightarrow H_i(\mathbf{x},M) \longrightarrow H_i(\mathbf{x},\overline{M}) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{x},M) \longrightarrow 0\ .$$

Tomando $i = n-(m-1) = n-m+1$ obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_{n-m+1}(\mathbf{x},M) \longrightarrow H_{n-m+1}(\mathbf{x},\overline{M}) \longrightarrow H_{n-m}(\mathbf{x},M) \longrightarrow 0\ .$$

Denotando $\mathbf{y}' = y_1,\dots,y_{m-1}$, pela hipótese de indução, existe um isomorfismo

$$H_{n-m+1}(\mathbf{x},M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}'M) = 0 \text{ (ver B.2)}.$$

Assim, $H_{n-m+1}(\mathbf{x},\overline{M}) \cong H_{n-m}(\mathbf{x},M)$. Por fim, usando a hipótese de indução novamente, temos que:

$$H_{n-m}(\mathbf{x},M) \cong H_{n-m+1}(\mathbf{x},\overline{M}) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M).$$

□

A próxima proposição nos fornece uma recíproca para a Proposição 3.16 no caso local.

Proposição 3.18. Sejam R um anel local noetheriano, $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado e $I \subseteq \mathfrak{m}$ um ideal gerado por $\mathbf{x} = x_1,\dots,x_n$. Então, são equivalentes:

i) $\mathrm{grade}(I,M) = n$.

ii) $H_i(\mathbf{x},M) = 0$, para todo $i > 0$.

iii) $H_1(\mathbf{x},M) = 0$.

iv) $\mathbf{x}$ é uma M-sequência.

Demonstração. As implicações ii) ⇒ iii) e iv) ⇒ i) são triviais. Se $\mathrm{grade}(I,R) = n$, então existe uma sequência M-regular $y_1,\dots,y_n$ formada por elementos de I. Assim, $H_i(\mathbf{x},M) = 0$, para todo $i > 0$, pelo Teorema 3.11, verificando que i) implica em ii). Por fim, mostraremos que iii) implica em iv) por indução em n. O caso em que $n = 1$ é trivial, tenso vista que o complexo de Koszul $K_\bullet(x_1,M)$ é simplesmente complexo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x_1} M \longrightarrow 0\ .$$

Além disso, supondo que esta implicação seja verdadeira para $n-1$, $n > 1$, considerando a sequência exata do Corolário 3.4, obtemos a sequência exata

$$H_1(x_1,\dots,x_{n-1},M) \xrightarrow{\pm x_n} H_1(x_1,\dots,x_{n-1},M) \longrightarrow H_1(x_1,\dots,x_n,M) = 0.$$

Assim, $H_1(x_1,\ldots,x_{n-1},M)=(x_n)H_1(x_1,\ldots,x_{n-1},M)$ e pelo Lema de Nakayama (A.1) temos que $H_1(x_1,\ldots,x_{n-1},M)=0$. Portanto, pela hipótese de indução segue que a sequência $x_1,\ldots,x_{n-1}$ é M-regular. Por fim, novamente usando o Corolário 3.4, obtemos a sequência exata

$$0=H_1(x_1,\ldots,x_n,M)\longrightarrow H_0(x_1,\ldots,x_{n-1},M)\xrightarrow{\pm x_n} H_0(x_1,\ldots,x_{n-1},M)\ .$$

Usando a exatidão da sequência acima, concluímos que x_n é regular sobre o R-módulo

$$H_0(x_1,\ldots,x_{n-1},M)=\frac{M}{(x_1,\ldots,x_{n-1})M}$$

e a sequência $\mathbf{x}=x_1,\ldots,x_n$ é M-regular. □

O próximo resultado garante a unicidade, a menos de isomorfismos, do complexo de Koszul associado a uma sequência minimal de geradores de um ideal. Este resultado será importante para definirmos o primeiro desvio de um anel local noetheriano. Por se tratar de um resultado cuja demonstração é extensa e demanda uma série de noções e resultados auxiliares, sua demonstração será omitida.

Teorema 3.12. Seja R um anel local noetheriano. Se $\mathbf{x}=x_1,\ldots,x_n$ e $\mathbf{y}=y_1,\ldots,y_n$ são sequências minimais de geradores de um ideal I de R, então os complexos $K_\bullet(\mathbf{x})$ e $K_\bullet(\mathbf{y})$ são isomorfos.

Demonstração. Ver Wagstaff (2011, p. 16). □

CAPÍTULO

4

NÚMEROS DE BETTI E APLICAÇÕES

Enfim, estamos em condições de introduzir os números de Betti de um R-módulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano. Para tanto, será necessário tratarmos sobre resoluções livres minimais, o que nos proporcionará um algoritmo para obtermos os números de Betti. Estudaremos critérios para que um determinado anel seja de Gorenstein ou interseção completa utilizando números de Betti, com o objetivo de verificar a aplicabilidade deste invariante. Além disso, verificaremos que a dimensão projetiva de um R-módulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano pode ser escrita, de forma simples, em termos de números de Betti do R-módulo.

A partir deste capítulo, recomendamos que o leitor tenha familiaridade com as classes de anéis que introduzimos brevemente no Apêndice B. As principais referências utilizadas ao longo deste capítulo foram Bruns e Herzog (1998) e Huneke (2012).

4.1 Resoluções livres minimais e números de Betti

Na construção que faremos agora, $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado. Se

$$\beta_0 = \dim_k\left(\frac{M}{\mathfrak{m}M}\right) < \infty,$$

então M é minimalmente gerado por β_0 elementos (ver A.2). Fixando $F_0 := R^{\beta_0}$, então, analogamente ao que fizemos na Proposição 2.16, podemos considerar um R-homomorfismo sobrejetivo $\varphi_0 : F_0 \to M$. Assim, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega_1(M) \xrightarrow{p_0} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

onde $\Omega_1(M) := \mathrm{Ker}(\varphi_0)$ e p_0 denota a inclusão. Como R é noetheriano, então $\Omega_1(M)$ é finitamente gerado. Como na Proposição 2.16, podemos repetir esta construção considerando

$$\mathrm{rk}(F_i) = \beta_i := \dim_k \left(\frac{\Omega_i(M)}{\mathfrak{m}\Omega_i(M)} \right),$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Isto é, o R-módulo $\Omega_i(M)$ é minimalmente gerado por β_i elementos. Assim, analomente ao que fizemos na Proposição 2.16, obtemos o diagrama comutativo abaixo, cuja linha é exata.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_i \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "b_i"'] & & F_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "b_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\varphi_0"] & M \arrow[r] & 0. \\
& & \Omega_i(M) \arrow[ur, "p_{i-1}"'] \arrow[dr] & & & & \Omega_1(M) \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

As condições de minimalidade consideradas na construção anterior darão origem à noção de resolução livre minimal.

Definição 4.1. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Uma sequência exata

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

como construída acima é chamada uma **resolução livre minimal** de M. Além disso, o R-módulo $\Omega_i(M)$ como na construção acima, $i \in \mathbb{N}$, é chamado o i-ésimo módulo **syzygy** de M.

Veremos que os postos dos R-módulos F_i, $i \in \mathbb{N}_0$, em uma resolução livre minimal não dependem das escolhas feitas para construir uma tal resolução. Isso nos dará condições de definirmos os números de Betti de um R-módulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano.

Lema 4.1. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Supondo que

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre minimal de M, então $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demonstração. É suficiente mostrarmos que $\varphi_1(F_1) \subseteq \mathfrak{m}F_0$. Inicialmente, observemos que

$$\varphi_1(F_1) = \Omega_1(M) = \mathrm{Ker}(\varphi_0).$$

Agora, considerando a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \Omega_1(M) \xrightarrow{p_0} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

e tensorizando com $k = R/\mathfrak{m}$, pela Proposição 2.1, obtemos a seguinte sequência exata curta de k-espaços vetoriais

$$\frac{\Omega_1(M)}{\mathfrak{m}\Omega_1(M)} \xrightarrow{\overline{p_0}} \frac{F_0}{\mathfrak{m}F_0} \xrightarrow{\overline{\varphi_0}} \frac{M}{\mathfrak{m}M} \longrightarrow 0.$$

Como $M/\mathfrak{m}M$ e $F_0/\mathfrak{m}F_0$ são k-espaços vetoriais de mesma dimensão, então $\overline{\varphi_0}$ é um k-isomorfismo e $0 = \mathrm{Ker}(\overline{\varphi_0}) = \mathrm{Im}(\overline{p_0})$. Assim, $\varphi_1(F_1) = \Omega_1(M) \subseteq \mathfrak{m}F_0$. □

Proposição 4.1. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Supondo que

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre minimal de M, então:

$$\mathrm{rk}(F_i) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(k, M)),$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Calculemos $\mathrm{Tor}_i^R(k, M)$ usando a resolução livre minimal $F_\bullet$. Denotaremos $\overline{\varphi_i} = \mathrm{id}_k \otimes \varphi_i$ e $\mathrm{rk}(F_i) = \beta_i$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$. Tensorizando por k a resolução dada inicialmente, podemos obtemos o complexo

$$k \otimes F_{\bullet,M} : \cdots \longrightarrow k \otimes_R F_i \xrightarrow{\overline{\varphi_i}} k \otimes_R F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow k \otimes_R F_1 \xrightarrow{\overline{\varphi_1}} k \otimes_R F_0 \longrightarrow 0\ .$$

Como $k \otimes_R F_i \cong k^{\beta_i}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, então podemos obter os R-módulos $\mathrm{Tor}_i^R(k, M)$ calculando as homologias do complexo

$$k \otimes F_{\bullet,M} : \cdots \longrightarrow k^{\beta_i} \xrightarrow{\overline{\varphi_i}} k^{\beta_{i-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow k^{\beta_1} \xrightarrow{\overline{\varphi_1}} k^{\beta_0} \longrightarrow 0\ .$$

Por fim, pelo Lema 4.1 $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ e, consequentemente, temos que $\overline{\varphi_i} = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Assim:

$$\mathrm{Tor}_i^R(k, M) = \frac{\mathrm{Ker}(\overline{\varphi_i})}{\mathrm{Im}(\overline{\varphi_{i+1}})} = \frac{k^{\beta_i}}{0} \cong k^{\beta_i},$$

para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Logo, $\mathrm{rk}(F_i) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(k, M))$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. □

A Proposição 4.1 faz com que a definição que daremos abaixo tenha sentido e fornece uma expressão para os números de Betti.

Definição 4.2. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, o i-ésimo **número de Betti** de M sobre R é o número inteiro $\beta_i^R(M) := \mathrm{rk}(F_i)$, onde $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$ é uma resolução livre minimal de M. Além disso, a **série de Poincaré** de M é definida por:

$$P_M^R(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^R(M) t^i.$$

A proposição que provaremos abaixo verifica que as propriedades provadas no Lema 4.1 e na Proposição 4.1 caracterizam as resoluções livres minimais. As condições equivalentes de seu enunciado serão frequentemente utilizadas ao longo deste trabalho.

Proposição 4.2. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano e

$$F_\bullet : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

uma resolução livre de um R-módulo finitamente gerado M. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $F_\bullet$ é uma resolução livre minimal.

ii) $\varphi_i(F_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

iii) $\overline{\varphi_i} := \mathrm{id}_k \otimes \varphi_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

iv) $\mathrm{rk}(F_i) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(k,M)) = \beta_i^R(M)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Vamos provar apenas que iv) implica em i). As demais implicações são consequências imediadas do Lema 4.1 e da Proposição 4.1. Se $F_\bullet$ é uma resolução livre que satisfaz iv), então, supondo que $F_\bullet$ não é minimal, existe um menor inteiro não negativo $i \in \mathbb{N}_0$ tal que:

$$\mathrm{rk}(F_i) > \dim_k\left(\frac{\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})}{\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})}\right).$$

Pela minimalidade de i, temos que:

$$\beta_i^R(M) = \mathrm{rk}(F_i) > \dim_k\left(\frac{\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})}{\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\varphi_{i-1})}\right) = \beta_i^R(M).$$

Logo, por contradição, concluímos que $F_\bullet$ é uma resolução livre minimal. □

Exemplo 4.1. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local regular n-dimensional. Assim, podemos considerar $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n$ um sistema de parâmetros regular de R. Em consequência disso, $\mathbf{x}$ é uma sequência regular e $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_n)$. Usando as proposições 3.16 e 4.2, temos que o complexo

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n R^n \xrightarrow{d_{\mathbf{x}}^{(n)}} \bigwedge^{n-1} R^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^1 R^n \xrightarrow{d_{\mathbf{x}}^{(1)}} R \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0\,,$$

onde π denota a projeção canônica, é uma resolução livre minimal do corpo residual k. Logo:

$$\beta_i^R(k) = \binom{n}{i},$$

para todo $i = 0,1,\ldots,n$.

Os exemplos computacionais que faremos a seguir serão usados ao longo do texto.

Exemplo 4.2. Sejam $R = \mathbb{Q}[a,b,c,d,e]_{(a,b,c,d,e)}$ e $I = (ab,bc,cd,de,ae)$. Usando o sistema de computação algébrica Decker *et al.* (2022), obtemos uma resolução livre minimal para o R-módulo quociente R/I da forma:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R^5 \longrightarrow R^5 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0 \ \text{(ver 1)}.$$

Assim, temos que:

$$\beta_0^R(R/I) = 1, \quad \beta_1^R(R/I) = \beta_2^R(R/I) = 5 \text{ e } \beta_3^R(R/I) = 1.$$

Além disso, $\beta_i^R(R/I) = 0$, para todo $i > 3$.

Exemplo 4.3. Sejam $R = \mathbb{Q}[x,y,z]_{(x,y,z)}$ e $I = (x^3,y^3,z^3)$. Usando o sistema de computação algébrica Decker *et al.* (2022), obtemos uma resolução livre minimal para o R-módulo quociente R/I da forma:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R^3 \longrightarrow R^3 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0 \text{ (ver 2)} .$$

Assim, temos que:

$$\beta_0^R(R/I) = \beta_3^R(R/I) = 1 \text{ e } \beta_1^R(R/I) = \beta_2^R(R/I) = 3.$$

Além disso, $\beta_i^R(R/I) = 0$, para todo $i > 3$.

Proposição 4.3. Sejam R um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se $F_\bullet \to M \to 0$ é uma resolução livre de M de comprimento finito e cujos R-módulos possuem posto finito, então podemos decompor $F_\bullet = G_\bullet \oplus Q_\bullet$, onde $G_\bullet$ é uma resolução livre minimal de M e $Q_\bullet$ é uma resolução livre de 0.

Demonstração. Suponhamos que d_i, $i \geq 0$, sejam os diferenciais de $F_\bullet$. Se $F_\bullet$ é uma resolução livre minimal de M, então não há o que provar. Caso contrário, usando a Proposição 4.2, temos que $\overline{d_i} \neq 0$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Assim, a matriz associada a d_i nas bases canônicas, digamos $A \in M_{n,m}(R)$ é tal que $a_{jk} \notin \mathfrak{m}$, para certos j e k. Portanto, a_{jk} é uma unidade de R. Logo, caso necessário, aplicando operações elementares na matriz A, garantimos que existem matrizes $B \in \mathrm{GL}_n(R)$ e $C \in \mathrm{GL}_m(R)$ tais que:

$$BAC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix},$$

onde $A' \in M_{n-1,m-1}(R)$. Na notação que estamos considerando, $F_i = R^m$ e $F_{i-1} = R^n$. Denotando, $F_i' = R^{m-1}$ e $F_{i-1}' = R^{n-1}$, temos que, a partir das matrizes C^{-1} e B, respectivamente, existem R-isomorfismos $\alpha : F_i \to R \oplus F_i'$ e $\gamma : F_{i-1} \to R \oplus F_{i-1}'$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha"'] & F_{i-1} \arrow[d, "\gamma"] \\ R \oplus F_i' \arrow[r, "\mathrm{id} \oplus d_i'"] & R \oplus F_{i-1}' \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

é comutativo, onde d'_i é o R-homomorfismo associado à matriz A'. Neste caso, podemos considerar o diagrama comutativo abaixo, cujas setas verticais fornecem um isomorfismo de complexos.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{i+2}"] & F_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F_{i+1}}"'] & F_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha"'] & F_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "\gamma"] & F_{i-2} \arrow[r, "d_{i-2}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F_{i-2}}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{i+2}"] & F_{i+1} \arrow[r, "\alpha\circ d_{i+1}"] & R\oplus F'_i \arrow[r, "\mathrm{id}\oplus d'_i"] & R\oplus F'_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}\circ\gamma^{-1}"] & F_{i-2} \arrow[r, "d_{i-2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se $x \in \mathrm{Im}(d_{i+1}) = \mathrm{Ker}(d_i)$, então podemos escrever $\alpha(x) = (r, x')$. Usando a comutatividade do diagrama 4.1, temos que:

$$(r, d'_i(x)) = \gamma(d_i(x)) = \gamma(0) = (0,0).$$

Logo, $r = 0$ e consequentemente $\mathrm{Im}(\alpha \circ d_{i+1}) \subseteq F'_i$. Além disso, se $(r,0) \in R \oplus F'_{i-1}$, então, novamente usando a comutatividade do diagrama 4.1, temos que:

$$\gamma^{-1}(r,0) = d_i(\alpha^{-1}(r,0)).$$

Sendo assim, $\gamma^{-1}(r,0) \in \mathrm{Im}(d_i) = \mathrm{Ker}(d_{i-1})$ e $d_{i-1} \circ \gamma^{-1}|_R = 0$. Portanto, podemos escrever:

$$F_\bullet = F'_\bullet \oplus (R_i \xrightarrow{\mathrm{id}} R_{i-1}),$$

onde $R_i = R_{i-1} = R$ e $F'_\bullet \to M \to 0$ é uma resolução livre de M dada por:

$$F'_\bullet : \cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\alpha\circ d_{i+1}} F'_i \xrightarrow{d'_i} F'_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}\circ\gamma^{-1}} F_{i-2} \longrightarrow \cdots .$$

A verificação de que o complexo $F'_\bullet$ é exato consiste simplesmente em aplicarmos a Proposição 2.10 à decomposição $F_\bullet = F'_\bullet \oplus (R_i \xrightarrow{\mathrm{id}} R_{i-1})$. Como a resolução livre $F_\bullet$ tem comprimento finito e é formada por R-módulos livres de posto finito, então podemos repetir este processo até obtermos uma resolução livre minimal de M e a descomposição desejada. □

Observação 4.1. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e $f : M \to N$ um homomorfismo de R-módulos. Denotaremos por $\mathrm{rank}_k(f)$ o k-posto do k-homomorfismo $f \otimes \mathrm{id}_k : M \otimes_R k \to N \otimes_R k$.

O corolário a seguir nos garante uma forma de obtermos os números de Betti de um R-módulo M a partir de uma resolução livre de M, que pode não ser minimal. Este corolário será utilizado na Seção 5.2. Em sua demonstração, utilizaremos o Teorema A.4, provado em Buchsbaum e Eisenbud (1973)

Corolário 4.1. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se $F_\bullet \to M \to 0$ é uma resolução livre de M de comprimento finito e cujos R-módulos possuem posto finito, então

$$\beta_i^R(M) = \mathrm{rk}(F_i) - (\mathrm{rank}_k(d_i) + \mathrm{rank}_k(d_{i+1})),$$

onde d_i, é o i-ésimo diferencial de $F_\bullet$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Pela Proposição 4.3, podemos decompor $F_\bullet = G_\bullet \oplus Q_\bullet$, onde $G_\bullet$ é uma resolução livre minimal de M e $Q_\bullet$ é uma resolução livre de 0. Pela forma como construimos $Q_\bullet$ na proposição anterior, é trivial verificar que o complexo $Q_\bullet \otimes k$ é exato. Assim, se q_i é o i-ésimo diferencial de $Q_\bullet$, temos que:

$$\operatorname{rk}(Q_i) = \operatorname{rank}_k(q_i) + \operatorname{rank}_k(q_{i+1}) \text{ (ver A.4)} .$$

Além disso, temos que $\operatorname{rk}(F_i) = \operatorname{rk}(G_i) + \operatorname{rk}(Q_i)$. Logo:

$$\begin{aligned} \beta_i^R(M) &= \operatorname{rk}(G_i) = \operatorname{rk}(F_i) - \operatorname{rk}(Q_i) \\ &= \operatorname{rk}(F_i) - (\operatorname{rank}_k(q_i) + \operatorname{rank}_k(q_{i+1})). \end{aligned}$$

Por fim, note que como, pela Proposição 4.2, os diferencias de $G_\bullet$ se anulam quando tensorizamos com id_k, temos que $\operatorname{rank}_k(d_i) = \operatorname{rank}_k(q_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Substituindo na igualdade acima, temos o resultado. □

4.2 Dimensão Projetiva via números de Betti

Sob as condições que estamos considerando neste capítulo, a saber, R-módulos finitamente gerados sobre um anel local noetheriano, daremos uma caracterização de $\operatorname{pd}_R(M)$ usando o funtor Tor que pode ser escrita em termos dos números de Betti de M.

Proposição 4.4. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e n um número inteiro não negativo. Então, são equivalentes:

i) $\operatorname{pd}_R(M) \leq n$.

ii) $\operatorname{Tor}_i^R(N, M) = 0$, para todo $i > n$ e para qualquer R-módulo N.

iii) $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(k, M) = 0$.

Demonstração. As demonstrações de que i) implica em ii) e que ii) implica em iii) são triviais e serão omitidas. Para demonstrarmos que iii) implica em i) basta usarmos a Proposição 4.1. Com efeito, como $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(k, M) = 0$, então dada uma resolução livre minimal $F_\bullet$ de M, pela Proposição 4.1 temos que $F_{n+1} = 0$. Ou seja, $F_\bullet$ tem comprimento menor ou igual a n e consequentemente $\operatorname{pd}_R(M) \leq n$. □

O corolário a seguir caracteriza a dimensão projetiva de R-módulos finitamente gerados sobre anéis locais noetherianos e decorre imediatamente da Proposição 4.4.

Corolário 4.2. Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local noetheriano e M é um R-módulo finitamente gerado, então:

$$\operatorname{pd}_R(M) = \sup\{i : \operatorname{Tor}_i^R(k, M) \neq 0\}.$$

Utilizando o corolário acima e a Proposição 4.1, temos que: se um R-módulo finitamente gerado M sobre um anel local noetheriano tem dimensão projetiva $\mathrm{pd}_R(M) = n < \infty$, então M admite um resolução livre minimal de comprimento finito. Isto é, uma resolução livre minimal da forma

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0\,.$$

Além disso, note que a expressão dada no Corolário 4.2 para dimensão projetiva de um R-módulo M em termos dos R-módulos $\mathrm{Tor}_i^R(k,M)$, $i \in \mathbb{N}_0$, pode ser reescrita em termos dos números de Betti de M, tendo vista que $\beta_i^R(M) = \dim_k(\mathrm{Tor}_i^R(k,M))$, pela Proposição 4.1. Neste caso, temos que

$$\mathrm{pd}_R(M) = \sup\{i : \beta_i^R(M) \neq 0\}. \tag{4.2}$$

4.3 Caracterizações de anéis interseção completa e de Gorenstein via números de Betti

4.3.1 Anéis interseção completa

Começaremos esta seção fixando uma série de notações que usaremos no próximo teorema. Inicialmente, se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local, então denotaremos

$$\mathrm{edim}(R) := \mu(\mathfrak{m}).$$

Fixemos $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano e $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n$ uma sequência de elementos de R tal que $\mathfrak{m}$ é minimalmente gerado por $x_1,\ldots,x_n$. Também, $(S,\mathfrak{n},k)$ é um anel local regular tal que $R = S/I$, com $I \subseteq \mathfrak{n}^2$. Neste caso, vamos considerar $\mathbf{a} = a_1,\ldots,a_m$ uma sequência de elementos de S cujos elementos formam um conjunto minimal de geradores de I e $\mathbf{y} = y_1,\ldots,y_n$ um sistema de parâmetros regular de S tal que x_i é a classe de equivalência de y_i, para cada $i = 1,\ldots,n$. Além disso, podemos escrever:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j,$$

com $a_{ji} \in \mathfrak{n}$, para cada $i = 1,\ldots,m$.

Com a notação que introduzimos acima, podemos considerar um R-homomorfismo $\varphi : S^m \to S^n$ obtido através da matriz (a_{ji}). Também vamos considerar $g : S^n \to S$ e $h : S^m \to S$ os R-homomorfismos obtidos através das sequências $\mathbf{y}$ e $\mathbf{a}$, respectivamente. Sendo assim, $h = g \circ \varphi$. De fato, se $e_1,\ldots,e_m$ é a base canônica de S^m e $r_1,\ldots,r_n$ é a base canônica de S^n então:

$$g(\varphi(e_i)) = g\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} r_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j = a_i = h(e_i),$$

para todo $i = 1,\ldots,m$. Assim, pela Proposição 3.11, a família de R-homomorfismos $\bigwedge \varphi = \{\bigwedge^i \varphi\}$ é um morfismo de complexos de $K_\bullet(\mathbf{a})$ em $K_\bullet(\mathbf{y})$.

Proposição 4.5. Com a notação introduzida acima, temos que $K_\bullet(\mathbf{y}) \otimes_S R \cong K_\bullet(\mathbf{x})$, como complexos de R-módulos. Além disso, o complexo $K_\bullet(\mathbf{a}) \otimes_S R$ tem diferenciais nulos.

Demonstração. Usando a Proposição 3.12, temos que $K_\bullet(\mathbf{y}) \otimes_S R \cong K_\bullet(g \otimes_S \mathrm{id}_R)$. Considerando $f = g \otimes_S \mathrm{id}_R : R^n \to R$, temos que f é o R-homomorfismo induzido por $\mathbf{x}$. De fato, se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base canônica de S^n, então:

$$\begin{aligned}(g \otimes_S \mathrm{id}_R)(e_i \otimes \overline{1}) &= g(e_i) \otimes \overline{1} \\ &= y_i \otimes \overline{1} \\ &= 1 \otimes \overline{y_i} \\ &= 1 \otimes x_i.\end{aligned}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, segue o isomorfismo de complexos desejado. Analogamente, $K_\bullet(\mathbf{a}) \otimes_S R \cong K_\bullet(h \otimes_S \mathrm{id}_R)$. Além disso, como $h \otimes_S \mathrm{id}_R : R^m \to R$ é nulo, então $K_\bullet(\mathbf{a}) \otimes_S R$ tem diferenciais nulos. □

Vamos denotar o complexo $K_\bullet(\mathbf{a}) \otimes_S R$ simplesmente por $\bigwedge R^m$.

Observação 4.2. Pela Proposição 4.5, usando o morfismo de complexos $\bigwedge \varphi : K_\bullet(\mathbf{a}) \to K_\bullet(\mathbf{y})$ e tensorizando com R, obtemos um morfismo de complexos de R-módulos:

$$\bigwedge \varphi \otimes_S \mathrm{id}_R : \bigwedge R^m \to K_\bullet(\mathbf{x}).$$

Como o complexo $\bigwedge R^m$ tem diferenciais nulos, tal morfismo induz um R-homomorfismo de R^m em $H_1(\mathbf{x})$. Além disso, pelo Corolário 3.3, temos que $\mathfrak{m}H_1(\mathbf{x}) = 0$. Portanto, tensorizando em R com k, obtemos um k-homomorfismo:

$$\lambda : k^m \to H_1(\mathbf{x}).$$

Teorema 4.1. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano e $(S, \mathfrak{n}, k)$ um anel local regular tal que $R = S/I$, onde I é um ideal de S, tal que $I \subseteq \mathfrak{n}^2$. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência de elementos de R tal que $\mathfrak{m}$ é minimalmente gerado por $x_1, \ldots, x_n$ e $\lambda : k^m \to H_1(\mathbf{x})$ é o k-homomorfismo considerado acima, temos que:

i) λ é um k-isomorfismo.

ii) $\mu(I) = \dim_k(H_1(\mathbf{x}))$.

iii) $\beta_2^R(k) = \binom{\mathrm{edim}(R)}{2} + \dim_k(H_1(\mathbf{x}))$.

Demonstração. Inicialmente, vamos fixar $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n$ e $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_m$ sequências como consideradas no início desta seção. Ou seja, I é minimalmente gerado por $a_1, \ldots, a_m$ e $\mathbf{y}$ é um sistema regular de parâmetros de S, tal que x_i é a classe de equivalência de y_i, para cada $i = 1, \ldots, n$. Além disso, fixemos $f_1, \dots, f_n$ uma base de S^n e $e_1, \dots, e_m$ uma base de S^m. Também, consideremos $u_i = \varphi(e_i) \in S^n$, para cada $i = 1, \dots, m$, onde $\varphi : S^m \to S^n$ é o S-homomorfismo associado à matriz (a_{ji}) que consideramos no início desta seção. Neste caso, temos que:

$$d_{\mathbf{a}}^{(1)}(e_i) = a_i = d_{\mathbf{y}}^{(1)}(u_i),$$

para todo $i = 1, \dots, m$, onde tais R-homomorfismos representam os primeiros diferenciais dos complexos de Koszul associados a $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{y}$, respectivamente. Agora, observemos que uma resolução livre minimal de k pode ser obtida começando com a sequência

$$R^n \xrightarrow{\mathbf{x}} R \longrightarrow k \longrightarrow 0 .$$

Note que, neste caso, $\mathbf{x}$ denota exatamente o diferencial do complexo de Koszul $d_{\mathbf{x}}^{(1)}$. Fixando $Z_1(\mathbf{x}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{x})$, temos que $\beta_2^R(k) = \mu(Z_1(\mathbf{x}))$. Vamos provar que os elementos $d_{\mathbf{x}}^{(2)}(\overline{f_p} \wedge \overline{f_q})$, $1 \leq p < q \leq n$ e $\overline{u_i}$, $i = 1, \dots, m$, formam um conjunto minimal de geradores de $Z_1(\mathbf{x})$. É trivial verificar que os elementos da forma $d_{\mathbf{x}}^{(2)}(\overline{f_p} \wedge \overline{f_q})$, $1 \leq p < q \leq n$, pertencem ao conjunto $Z_1(\mathbf{x})$. Além disso, para cada $i = 1, \dots, m$, temos que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}}^{(1)}(\overline{u_i}) &= d_{\mathbf{x}}^{(1)}(\overline{\varphi(e_i)}) \\ &= d_{\mathbf{x}}^{(1)}\left(\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j}\right) \\ &= d_{\mathbf{x}}^{(1)}(\overline{a_i}) \\ &= d_{\mathbf{x}}^{(1)}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também, dado $\overline{b} \in Z_1(\mathbf{x})$, $b \in S^n$, temos que $d_{\mathbf{y}}^{(1)}(b) \in I$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{y}}^{(1)}(b) &= c_1 a_1 + \cdots + c_m a_m \\ &= c_1 d_{\mathbf{y}}^{(1)}(u_1) + \cdots + c_m d_{\mathbf{y}}^{(1)}(u_m). \end{aligned}$$

Logo, $b - \sum_{i=1}^m c_i u_i \in \mathrm{Ker}(d_{\mathbf{y}}^{(1)})$. Como $\mathbf{y}$ é uma sequência regular, então, pela Proposição 3.16, o complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{y})$ é exato e $b - \sum_{i=1}^m c_i u_i \in \mathrm{Im}(d_{\mathbf{y}}^{(2)})$. Assim, $b - \sum_{i=1}^m c_i u_i$ é combinação dos elementos da forma $d_{\mathbf{y}}^{(2)}(f_p \wedge f_q)$, com $1 \leq p < q \leq n$. Assim, obtemos que $\overline{b}$ é combinação dos elementos considerados inicialmente. Ou seja, os elementos $d_{\mathbf{x}}^{(2)}(\overline{f_p} \wedge \overline{f_q})$, $1 \leq p < q \leq n$ e $\overline{u_i}$, $i = 1, \dots, m$, geram $Z_1(\mathbf{x})$. Para verificar a minimalidade, suponhamos que $\overline{\alpha_{pq}}$, $1 \leq p < q \leq n$, e $\overline{\beta_i}$, $i = 1, \dots, m$, sejam elementos de R, tais que:

$$\sum_{p,q} \overline{\alpha_{pq}} d_{\mathbf{x}}^{(2)}(\overline{f_p} \wedge \overline{f_q}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\beta_i}\,\overline{u_i} = 0.$$

Assim, temos que

$$\sum_{p,q} \alpha_{pq} d_{\mathbf{y}}^{(2)}(f_p \wedge f_q) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \in IS^n$$

e aplicando $d_{\mathbf{y}}^{(1)}$, temos que $\sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i \in \mathfrak{n}I$. Pela forma como tomamos os elementos a_i, para cada $i = 1, \ldots, m$, temos que $\beta_i \in \mathfrak{n}$, tendo vista que I é minimalmente gerado pelos elementos a_i, $i = 1, \ldots, m$. Além disso, como $I \subseteq \mathfrak{n}^2$, temos que

$$\sum_{p,q} \alpha_{pq} d_{\mathbf{y}}^{(2)}(f_p \wedge f_q) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \in \mathfrak{n}^2 S^n$$

e assim $\sum_{p,q} \alpha_{pq} d_{\mathbf{y}}^{(2)}(f_p \wedge f_q) \in \mathfrak{n}^2 S^n$. Como $d_{\mathbf{y}}^{(2)}(f_p \wedge f_q) = y_p f_q - y_q f_p$ e os elementos de $\mathbf{y}$ formam um conjunto minimal de geradores de $\mathfrak{n}$, então analisando as entradas da soma $\sum_{p,q} \alpha_{pq} d_{\mathbf{y}}^{(2)}(f_p \wedge f_q)$, vemos que a i-ésima entrada desta soma é

$$\sum_{1 \leq j < i} \alpha_{ji} y_j - \sum_{i < j \leq n} \alpha_{ij} y_j \in \mathfrak{n}^2$$

e concluímos que $\alpha_{pq} \in \mathfrak{n}$. Assim, temos que $\overline{\alpha_{pq}} \in \mathfrak{m}$ e $\overline{\beta_i} \in \mathfrak{m}$, para cada $1 \leq p < q \leq n$ e $i = 1, \ldots, m$. Ou seja, pela Proposição A.2, os elementos que verificamos anteriormente que constituem um conjunto de geradores de $Z_1(\mathbf{x})$, formam um conjunto minimal de geradores de $Z_1(\mathbf{x})$. Assim, temos que

$$\beta_2^R(k) = \binom{\operatorname{edim}(R)}{2} + \mu(I).$$

Agora, vejamos que $\mu(I) = \dim_k(H_1(\mathbf{x}))$ e teremos verificado os itens ii) e iii). É fácil ver que as classes de equivalência dos elementos $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}$ em $H_1(\mathbf{x})$ formam um conjunto de geradores de $H_1(\mathbf{x})$ sobre k, tendo vista o conjunto de geradores que consideramos antes para $Z_1(\mathbf{x})$. Além disso, se não fosse uma base de $H_1(\mathbf{x})$ sobre k, então teriamos como diminuir o conjunto minimal de geradores de $Z_1(\mathbf{x})$ considerado anteriormente. Logo, concluimos que as classes de $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}$ em $H_1(\mathbf{x})$ formam uma base para este conjunto. Portanto $\mu(I) = \dim_k(H_1(\mathbf{x}))$. O item i) segue dos resultados que provamos anteriormente, bastando notar que λ associa a base canônica de k^m à base de $H_1(\mathbf{x})$ que consideramos acima. □

Observação 4.3. Suponhamos que $(S, \mathfrak{n})$ é um anel local regular e R é um anel quociente S/I, onde I é um ideal de S. Se $I \not\subseteq \mathfrak{n}^2$, então podemos considerar $x \in I$ tal que $x \notin \mathfrak{n}^2$. Assim, temos que

$$R = \frac{S}{I} \cong \frac{\frac{S}{(x)}}{\frac{I}{(x)}} = \frac{S'}{I'},$$

onde S' é um anel local regular (ver Proposição B.13). Além disso, como x pertence a um sistema minimal de geradores de I, haja vista que $x \notin \mathfrak{n}^2$, então I é gerado por uma sequência regular se e somente se I' é gerado por uma sequência S'-regular. Isso ocorre em virtude da validade da seguinte afirmação: I é gerado por uma sequência S-regular se e somente se todo sistema minimal de geradores de I é uma sequência S-regular. De fato, se I é gerado por uma sequência S-regular, digamos $a_1, \ldots, a_m$, então, pela Proposição 3.18, temos que $\operatorname{grade}(I, S) = m$. Assim, usando o Corolário B.3 e o Teorema A.3, temos:

$$\mu(\mathfrak{m}) \leq m = \operatorname{grade}(I, S) \leq \operatorname{ht}(I) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{m}) \leq \mu(\mathfrak{m}).$$

Logo, $\mu(\mathfrak{m}) = m$ e novamente pela Proposição 3.18, garantimos que todo sistema minimal de geradores de I é uma sequência S-regular. Repetindo o processo que realizamos antes, obtemos uma representação minimal

$$R \cong \frac{S''}{I''},$$

onde $(S'', \mathfrak{n}'')$ é um anel local regular, I'' é um ideal de $\mathfrak{n}''$ tal que $I'' \subseteq (\mathfrak{n}'')^2$. Neste caso, temos que:

$$\operatorname{edim}(R) = \mu(\mathfrak{n}''/I'') = \mu(\mathfrak{n}'') = \dim(S'').$$

Observação 4.4. Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência de elementos de R cujos elementos formam um conjunto minimal de geradores de $\mathfrak{m}$, então, como consequência do Teorema 3.12, o complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$ independe, a menos de isomorfismos, da escolha de $\mathbf{x}$. Assim, os R-módulos de homologia $H_i(\mathbf{x})$, $i \in \mathbb{N}_0$, também não dependem da escolha de $\mathbf{x}$. Sendo assim, vamos denotar:

$$H_i(R) := H_i(\mathbf{x}),$$

para cada $i \in \mathbb{N}_0$.

Definição 4.3. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano. O número inteiro não negativo

$$\varepsilon_1(R) := \dim_k(H_1(R))$$

é chamado o **primeiro desvio** de R.

Lema 4.2. Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local noetheriano, então $\varepsilon_1(R) = \varepsilon_1(\hat{R})$.

Demonstração. Fixemos $\mathbf{x}$ um sistema minimal de geradores de $\mathfrak{m}$. Além disso, denotaremos por $\hat{\mathbf{x}}$ a sequência $\mathbf{x}$ considerada em $\hat{R}$. Neste caso, $\hat{\mathbf{x}}$ é um sistema minimal de geradores do ideal maximal $\hat{\mathfrak{m}}$ do anel local noetheriano $\hat{R}$. Assim, pela Proposição 3.12, temos que:

$$H_1(\hat{R}) \cong H_1(\hat{\mathbf{x}}) \cong H_1(\mathbf{x}) \otimes_R \hat{R}.$$

Além disso, como $H_1(\mathbf{x})$ tem comprimento finito, então usando os isomorfismos canônicos das proposições A.7 e A.9, temos que:

$$H_1(\mathbf{x}) \otimes_R \hat{R} \cong \widehat{H_1(\mathbf{x})} \cong H_1(\mathbf{x}) \cong H_1(R).$$

Logo, $H_1(\hat{R}) \cong H_1(R)$ e temos a igualdade do enunciado. $\square$

Combinando o Teorema 4.1 e o lema acima, obtemos o próximo teorema, que nos garante uma caracterização de anéis locais que são interseção completa em termos de dois números de Betti do corpo residual e da dimensão de Krull do anel.

Teorema 4.2. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. São equivalentes:

i) R é interseção completa.

ii) $\varepsilon_1(R) = \operatorname{edim}(R) - \dim(R)$

iii) $\beta_2^R(k) = \binom{\beta_1^R(k)}{2} + \beta_1^R(k) - \dim(R)$.

Demonstração. Pelo lema anterior e pela definição de interseção completa, para provarmos que os itens i) e ii) são equivalentes, podemos assumir que o anel R é completo e tem representação minimal $R = S/I$. Se R é um anel interseção completa, então, conforme observamos em 4.3, existe uma tal representação com I gerado por uma S-sequência que é também um sistema minimal de geradores de I. Assim, combinando os teoremas 4.1 e B.3, obtemos a igualdade:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(R) &= \mu(I)\\ &= \dim(S) - \dim(R)\\ &= \operatorname{edim}(R) - \dim(R).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\varepsilon_1(R) = \operatorname{edim}(R) - \dim(R)$, então, pelo Teorema 4.1, temos que:

$$\mu(I) = \dim(S) - \dim(R).$$

Neste caso, novamente usando o Teorema B.3 verifica-se que I é minimalmente gerado por uma sequência S-regular e R é interseção completa. Por fim, usando o item iii) do Teorema 4.1, sabemos que:

$$\beta_2^R(k) = \binom{\beta_1^R(k)}{2} + \varepsilon_1(R).$$

Logo:

$$\beta_2^R(k) = \binom{\beta_1^R(k)}{2} + \beta_1^R(k) - \dim(R) \iff \varepsilon_1(R) = \beta_1^R(k) - \dim(R),$$

verificando a equivalência entre os itens ii) e iii), tendo vista que $\beta_1^R(k) = \operatorname{edim}(R)$. $\square$

Observação 4.5. Com o objetivo de caracterizar anéis interseção completa usando apenas números de Betti, é possível, em certo sentido, obter uma expressão melhor do que a do teorema acima. Em Avramov (1998), prova-se que um local noetheriano $(R,\mathfrak{m},k)$ é interseção completa se e somente se verifica-se a igualdade:

$$\beta_3^R(k) = \binom{\beta_1^R(k)}{3} + \beta_1^R(k)\left(\beta_2^R(k) - \binom{\beta_1^R(k)}{2}\right).$$

Além disso, a demonstração deste resultado é dada a partir do estudo da Série de Poincaré $P_k^R(t)$.

Exemplo 4.4. Fixemos $R = \mathbb{Q}[a,b,c,d,e]_{(a,b,c,d,e)}$ e $I = (ab,bc,cd,de,ea)$. Usando o sistema de computação algébrica Decker *et al.* (2022), é possível verificar que o anel quociente $S = R/I$ não satisfaz a igualdade do item iii) do Teorema 4.2. De fato, neste caso temos que:

$$\dim(S) = 2,\ \beta_1^S(k) = 5 \text{ e } \beta_2^S(k) = 15 \text{ (ver 3)}.$$

Logo:

$$\binom{\beta_1^S(k)}{2} + \beta_1^S(k) - \dim(S) = 13 \neq \beta_2^S(k).$$

Assim, o anel S não é interseção completa.

4.3.2 Anéis de Gorenstein

Observação 4.6. Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local, então denotamos

$$\operatorname{Soc}(R) := \{x \in R : x\mathfrak{m} = 0\}.$$

Além disso, é fácil ver que $\operatorname{Soc}(R)$ é um k-espaço vetorial.

Teorema 4.3. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local regular d-dimensional e $I \subseteq R$ um ideal de R tal que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Então, R/I é um anel de Gorenstein se e somente se $\beta_d^R(R/I) = 1$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que como $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, então $\dim(R/I) = 0$. Além disso, como R é regular, então o ideal maximal $\mathfrak{m}$ é gerado por um sistema de parâmetros regular, digamos $\mathbf{x} = x_1,\dots,x_d$. Assim, analogamente ao que fizemos no Exemplo 4.1, podemos garantir que o complexo de Koszul $K_\bullet(\mathbf{x})$ nos fornece uma resolução livre minimal de k. Assim, tensorizando com R/I e calculando a d-ésima homologia, temos que:

$$\operatorname{Tor}_d^R(k,R/I) = \operatorname{Ker}(\ R/I \xrightarrow{[\pm\overline{x_1}\cdots\pm\overline{x_n}]} (R/I)^d\ ) = \operatorname{Soc}(R/I).$$

Assim, como R/I é 0-dimensional, então, pelo Teorema B.10, temos que R/I é um anel de Gorenstein se e somente se satisfaz:

$$\beta_d^R(R/I) = \dim_k(\operatorname{Tor}_d^R(k,R/I)) = \dim_k(\operatorname{Soc}(R/I)) = 1.$$

$\square$

Observação 4.7. Nas condições do teorema acima, como R é um anel local regular, então $\operatorname{pd}_R(R/I) < \infty$ (ver Teorema B.4). Assim, usando a Fórmula de Auslander-Buchsbaum (B.2), temos que:

$$\operatorname{pd}_R(R/I) = d.$$

De fato, como $\operatorname{depth}(R/I) \leq \dim(R/I) = 0$ (ver Corolário B.2), então $\operatorname{depth}(R/I) = 0$ e portanto

$$\begin{aligned} d &= \dim(R) \\ &= \operatorname{depth}(R/I) + \operatorname{pd}_R(R/I) \\ &= \operatorname{pd}_R(R/I). \end{aligned}$$

Assim, o teorema acima garante que o anel quociente R/I é de Gorenstein se e somente se o último número de Betti não nulo do R-módulo R/I é igual a 1.

Observação 4.8. Se M e N são R-módulos e $P_{\bullet,M}$ e $Q_{\bullet,N}$ são resoluções projetivas deletadas de M e N, respectivamente, então podemos obter os R-módulos $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ calculando as homologias do produto tensorial de complexos $P_{\bullet,M} \otimes Q_{\bullet,N}$. Este fato é frequentemente usado para provar o Teorema 3.4, como em Weibel (1995, p. 58), e será usado na demonstração do próximo teorema.

Lema 4.3. Sejam R um anel local regular e I um ideal de R. Então, R/I é Cohen-Macaulay se e somente se $\operatorname{ht}(I) = \operatorname{pd}_R(R/I)$.

Demonstração. Como R é regular, então $\operatorname{pd}_R(R/I) < \infty$ (ver B.4). Além disso, como R é Cohen-Macaulay, então, pela fórmula de Auslander-Buchsbaum (B.2), temos que:

$$\operatorname{depth}(R/I) + \operatorname{pd}_R(R/I) = \operatorname{depth}(R) = \dim(R).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{pd}_R(R/I) &= \dim(R) - \operatorname{depth}(R/I) \\ &\geq \dim(R) - \dim(R/I) \\ &= \operatorname{ht}(I), \end{aligned}$$

pelo Corolário B.4. Além disso, note que temos igualdade se e somente se:

$$\operatorname{depth}(R/I) = \dim(R/I).$$

Isto é, se e somente se R/I é Cohen-Macaulay. □

Teorema 4.4. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local regular d-dimensional e $I \subseteq R$ um ideal de R tal que $\operatorname{ht}(I) = h$. Então, R/I é de Gorenstein se e somente se R/I é Cohen-Macaulay e $\beta_h^R(R/I) = 1$.

Demonstração. Observemos que, como, por definição, todo anel de Gorenstein é Cohen-Macaulay, então R/I é Cohen-Macaulay em ambas implicações deste teorema. Como R/I é Cohen-Macaulay, então

$$\operatorname{pd}_R(R/I) = \operatorname{ht}(I) = h,$$

pelo Lema 4.3. Além disso, como R é regular e consequentemente Cohen-Macaulay, então $\dim(R/I) = d - h$, pelo Corolário B.4. Consideremos $F_\bullet$ uma resolução livre minimal de R/I e

$\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}}$ um sistema de parâmetros do anel quociente R/I. Como R é Cohen-Macaulay, então podemos assumir que a sequência $x_1,\ldots,x_{d-h}$ é regular (ver B.9). Neste caso, analogamente ao que fizemos no Exemplo 4.1, podemos garantir que o complexo de Koszul $K_\bullet := K_\bullet(x_1,\ldots,x_{d-h},R)$ nos fornece uma resolução livre minimal deletada de $R/(x_1,\ldots,x_{d-h})$. Logo, tensorizando $K_\bullet$ com R/I, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_i^R(R/I,R/(x_1,\ldots,x_{d-h})) &\cong H_i(x_1,\ldots,x_{d-h},R/I)\\ &\cong H_i(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}},R/I).\end{aligned}$$

Observemos que, como R/I é Cohen-Macaulay e $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}}$ forma um sistema de parâmetros de R/I, então a sequência $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}}$ é R/I-regular (ver B.8) e pela Proposição 3.16, temos que:

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/I,R/(x_1,\ldots,x_{d-h})) \cong H_i(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}},R/I)=0,$$

para todo $i\in\mathbb{N}$. Assim, pela observação que fizemos acima, o complexo $F_{\bullet,R/I}\otimes K_\bullet$ nos fornece uma resolução livre minimal sobre R do anel 0-dimensional:

$$\frac{R}{I}\otimes_R\frac{R}{(x_1,\ldots,x_{d-h})}\cong\frac{R}{I+(x_1,\ldots,x_{d-h})}:=S.$$

A minimalidade segue da Proposição 4.2. Por fim, observemos que R/I é um anel de Gorenstein se e somente se S é um anel de Gorenstein, pois temos que:

$$S\cong\frac{R/I}{(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}})}.$$

De fato, isso ocorre pois o ideal $(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{d-h}})$ é irredutível sobre R/I se e somente se o ideal nulo é irredutível sobre o anel 0-dimensional S. Além disso, pelo Teorema 4.3, S é um anel de Gorenstein se e somente se o último número de Betti não nulo do R-módulo S é igual a 1. No entanto, como $F_{\bullet,R/I}\otimes K_\bullet$ nos fornece uma resolução livre minimal de S, cujo último termo não nulo é o R-módulo:

$$F_h\otimes_R K_{d-h}\cong F_h\otimes_R R\cong F_h.$$

Então, R/I é um anel de Gorenstein se e somente se $\beta_h^R(R/I)=1$. □

Exemplo 4.5. Consideremos $R=\mathbb{Q}[x,y,z]_{(x,y,z)}$ e $I=(x^2,y^2,z^2,xy)$. Usando o sistema de computação algébrica Decker *et al.* (2022), obtemos uma resolução livre minimal para o R-módulo quociente R/I da forma:

$$0\longrightarrow R^2\longrightarrow R^5\longrightarrow R^4\longrightarrow R\longrightarrow R/I\longrightarrow 0 \text{ (ver 4).}$$

Assim, temos que:

$$\beta_0^R(R/I)=1,\quad \beta_1^R(R/I)=4,\quad \beta_2^R(R/I)=5 \text{ e } \beta_3^R(R/I)=2.$$

Assim, o anel 0-dimensional R/I não é de Gorenstein, pelo Teorema 4.3, tendo vista que $\beta_3^R(R/I)=2\neq 1$.

Exemplo 4.6. Consideremos $R=\mathbb{Q}[a,b,c,d,e]_{(a,b,c,d,e)}$ e $I=(ab,bc,cd,de,ea)$ como no exemplo 4.2, então, novamente usando o sistema Decker *et al.* (2022), temos que $\mathrm{ht}(I)=3$ (ver 3). Como o anel R/I é Cohen-Macaulay (ver 5) e $\beta_3^R(R/I)=1$, então, pelo Teorema 4.4, R/I é um anel de Gorenstein.

Observação 4.9. O anel quociente R/I, onde $R=\mathbb{Q}[a,b,c,d,e]_{(a,b,c,d,e)}$ e $I=(ab,bc,cd,de,ea)$ é de Gorenstein mas não é interseção completa, como verificamos nos exemplos 4.2 e 4.4.

CAPÍTULO

5

NÚMEROS DE BETTI DE QUASE INTERSEÇÕES COMPLETAS, CORPOS RESIDUAIS E PRODUTOS DE IDEAIS

Neste capítulo, estudaremos resultados à cerca dos números de Betti de certas classes de módulos cíclicos e verificaremos soluções parciais para as conjecturas que enunciamos no Capítulo 1. Além disso, para ideais Tor-independentes I e J, iremos provar uma expressão para os números de Betti do R-módulo cíclico R/IJ como somas de produtos dos números de Betti dos R-módulos R/I e R/J.

As principais referências para este capítulo são Huneke (2012), Dugger (2000) e Geller (2022). O Teorema 5.1, que provamos na Seção 5.1, foi escrito utilizando a referência Huneke (2012). O Teorema 5.2 e seus corolários, que demonstramos na Seção 5.2, foram apresentados em Dugger (2000). Por fim, o Teorema 5.3 e seus corolários, que demonstramos na Seção 5.3, foram apresentados em Geller (2022).

5.1 Números de Betti do corpo residual

Observação 5.1. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano e M um R-módulo. Denotaremos:

$$\overline{M} = \frac{R}{\mathfrak{m}} \otimes_R M \cong \frac{M}{\mathfrak{m}M}.$$

Além disso, se $f : M \to N$ é um R-homomorfismo, então denotaremos $\overline{f} = \mathrm{id}_k \otimes f$.

Lema 5.1. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano, $M = R^m$ e $N = R^n$, onde m,n são números inteiros positivos, e $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Se $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{N}$ é injetivo, então existe um R-homomorfismo $j : N \to M$ tal que $j \circ f = \mathrm{id}_M$.

Demonstração. Inicialmente, consideremos $\{e_1,\ldots,e_m\}$ base canônica de M. Como $\overline{f}$ é injetiva, então $\{\overline{f}(\overline{e_1}),\ldots,\overline{f}(\overline{e_m})\}$ é um conjunto linearmente independente em $\overline{N}\cong k^n$, sobre o corpo k. Agora, consideremos $\overline{x_{m+1}},\ldots,\overline{x_n}\in\overline{N}$, tais que $\{\overline{f}(\overline{e_1}),\ldots,\overline{f}(\overline{e_m}),\overline{x_{m+1}},\ldots,\overline{x_n}\}$ seja uma base para o k-espaço vetorial $\overline{N}$. Além disso, via isomorfismo canônicos, temos que $\overline{N}\cong N/\mathfrak{m}N$. Assim, temos que

$$N=\langle f(e_1),\ldots,f(e_m),x_{m+1},\ldots,x_n\rangle+\mathfrak{m}N.$$

Logo, $N=\langle f(e_1),\ldots,f(e_m),x_{m+1},\ldots,x_n\rangle$ (ver Corolário A.1). Sendo assim, pelo Corolário A.2, o conjunto $\{f(e_1),\ldots,f(e_m),x_{m+1},\ldots,x_n\}$ é uma base de N. Enfim, podemos definir $j:N\to M$ o R-homomorfismo dado por:

$$j(r_1f(e_1)+\cdots+r_mf(e_m)+r_{m+1}x_{m+1}+\cdots+r_nx_n)=r_1e_1+\cdots+r_me_m,$$

para $r_1,\ldots,r_n\in R$. Vamos verificar que $j\circ f=\mathrm{id}_M$. Com efeito, fixando $x=\sum_{i=1}^m r_ie_i\in M$, temos que:

$$j(f(x))=j\left(\sum_{i=1}^m r_if(e_i)\right)=\sum_{i=1}^m r_ie_i=x.$$

$\square$

Observação 5.2. Nas condições do lema anterior, garantimos que f é um R-homomorfismo injetivo e a sequência exata $0\longrightarrow M\xrightarrow{f}N$ cinde.

Teorema 5.1. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano. Se $\mu(\mathfrak{m})=n$, então

$$\beta_l^R(k)\geq\binom{n}{l},$$

para todo $l\in\mathbb{N}_0$.

Demonstração. Suponhamos $\mathfrak{m}$ minimalmente gerado pelos elementos $x_1,\ldots,x_n\in R$ e fixemos $\mathbf{x}=x_1,\ldots,x_n$. Além disso, consideremos $F_\bullet$ uma resolução livre minimal de k. Vamos mostrar que $K_l(\mathbf{x})$ é um somando direto de F_l, para cada $l\geq 0$. Na verdade, como $K_l(\mathbf{x})=0$ sempre que $l>n$, podemos nos limitar ao caso em que $0\leq l\leq n$. Para simplificar a notação, vamos denotar $K_l(\mathbf{x})$ simplesmente por K_l, para cada $l=0,\ldots,n$. Repetindo o método utilizado na demonstração do Teorema da Comparação (3.1), garantimos que existem R-homomorfismos $f_l:K_l\to F_l$, para cada $0\leq l\leq n$, tais que $f_0=\mathrm{id}_R$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & R \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & k \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_n \arrow[r, "\varphi_n"] & F_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & R \arrow[r, "\varphi"] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo, com $d=\varphi=\pi:R\to k$. Verificaremos que $\overline{f_l}$ é um R-homomorfismo injetivo, para cada $l=0,\ldots,n$. Isto é trivial no caso $l=0$. Assumindo a validade desta afirmação para $l-1$, vamos verificar para l, $0 < l \leq n$. Usando o Lema 5.1, podemos considerar um R-homomorfismo $j_{l-1} : F_{l-1} \to K_{l-1}$ tal que $j_{l-1} \circ f_{l-1} = \mathrm{id}_{K_{l-1}}$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} K_l \arrow[r, "d_l"] \arrow[d, "f_l"] & K_{l-1} \arrow[d, shift left, "f_{l-1}"] \\ F_l \arrow[r, "\varphi_l"] & F_{l-1} \arrow[u, shift left, "j_{l-1}"] \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

é comutativo. Suponhamos que $y \in K_l$ seja tal que $\overline{f_l}(\bar{y}) = 0$, ou seja, que $f_l(y) \in \mathfrak{m}F_l$. Pela minimalidade de $F_\bullet$, sabemos que $\varphi_l(F_l) \subseteq \mathfrak{m}F_{l-1}$. Logo, $(\varphi_l \circ f_l)(y) \in \mathfrak{m}^2 F_{l-1}$ e, pela comutatividade do diagrama 5.1, $(f_{l-1} \circ d_l)(y) \in \mathfrak{m}^2 F_{l-1}$. Sendo assim, $(j_{l-1} \circ f_{l-1})(d_l(y)) \in \mathfrak{m}^2 K_{l-1}$ e consequentemente $d_l(y) \in \mathfrak{m}^2 K_{l-1}$, tendo vista que $j_{l-1} \circ f_{l-1} = \mathrm{id}_{K_{l-1}}$. Para concluirmos a prova de que $\overline{f_l}$ é um R-homomorfismo injetivo, precisamos mostrar que $\bar{y} = 0$, isto é, que $y \in \mathfrak{m}K_l$. Vamos denotar por S o conjunto de todas as sequências $i_1 \dots i_j$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$ formadas por até n elementos. Além disso, se $H = i_1 \dots i_l \in S$ é formada por l elementos, $1 \leq l \leq n$, então escrevemos $|H| = l$. Nesta notação, pela Proposição 3.9, K_l tem como base o conjunto dos elementos da forma e_H, $H \in S$ e $|H| = l$. Além disso, temos que

$$d_l(e_H) = \sum_{h \in H} \pm x_h e_{H \setminus \{h\}}.$$

Portanto, escrevendo

$$y = \sum_{\substack{H \in S \\ |H| = l}} r_H e_H,$$

onde $r_H \in R$, para todo $H \in S$, e apenas uma quantidade finita destes é não nula, temos que

$$\begin{aligned} d_l(y) &= \sum_{\substack{H \in S \\ |H| = l}} r_H d_l(e_H) \\ &= \sum_{\substack{H \in S \\ |H| = l}} \sum_{h \in H} \pm r_H x_h e_{H \setminus \{h\}} \\ &= \sum_{\substack{H \in S \\ |H| = l-1}} \left(\sum_{h \notin H} \pm r_{H \cup \{h\}} x_h \right) e_H. \end{aligned}$$

Assim, usando o fato de que $d_l(y) \in \mathfrak{m}^2 K_{l-1}$, temos que:

$$\sum_{h \notin H} \pm r_{H \cup \{h\}} x_h \in \mathfrak{m}^2,$$

para cada $H \in S$ tal que $|H| = l - 1$. Como $\mathfrak{m}$ é minimalmente gerado por $x_1, \dots, x_n$, então, $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ é uma base para o k-espaço vetorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Passando para o quociente, devemos ter que $r_{H \cup \{h\}} \in \mathfrak{m}$, para $H \in S$, $|H| = l - 1$ e $h \notin H$. Consequentemente, $y \in \mathfrak{m}K_l$ e $\overline{f_l}$ é injetiva, para cada $l = 0, \dots, n$. Sendo assim, pelo Lema 5.1, temos que f_l cinde, para cada $l = 0, \dots, n$.

Logo, K_l é um somando direto de F_l, para cada $l = 0,\ldots,n$ (ver Proposição A.5). Assim, segue a desigualdade

$$\beta_l^R(k) = \mathrm{rk}(F_l) \geq \binom{n}{l},$$

para todo $l = 0,\ldots,n$. Além disso, no caso em que $l > n$, a desigualdade desejada é trivialmente verificada. $\square$

Observação 5.3. Nas condições do teorema acima, em virtude do Teorema do Ideal Principal de Krull (ver Teorema A.3), temos que

$$n = \mu(\mathfrak{m}) \geq \dim R = d$$

e

$$\beta_l^R(k) \geq \binom{n}{l} \geq \binom{d}{l},$$

para todo $l \in \mathbb{N}_0$. Isto é, o teorema acima verifica a conjectura BEH (1) para o corpo residual de anéis locais noetherianos.

5.2 Números de Betti de quase interseções completas

Definição 5.1. Sejam R um anel noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. O **grau** de M é definido por $\mathrm{grade}(M) := \min\{i : \mathrm{Ext}_R^i(M,R) \neq 0\}$. Além disso, se $M = I$ é um ideal de R, então denotamos $\mathrm{grade}(I) := \mathrm{grade}(R/I)$.

Observação 5.4. Note que, se R é um anel noetheriano e I é um ideal de R, então é facilmente verificada a igualdade:

$$\mathrm{grade}(I) = \mathrm{grade}(I,R).$$

Ou seja, $\mathrm{grade}(I)$ denota o comprimento das sequência regulares maximais contidas em I.

Definição 5.2. Sejam R um anel noetheriano. Um R-módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é dito ser **perfeito** se satisfaz $\mathrm{grade}(M) = \mathrm{pd}_R(M)$. Além disso, um ideal I é dito ser **perfeito** se o R-módulo R/I é perfeito, isto é, se $\mathrm{grade}(I) = \mathrm{pd}_R(R/I)$.

Observação 5.5. Se R é um anel noetheriano e $M \neq 0$ é um R-módulo finitamente gerado, então, usando propriedades sobre o grau de M, verifica-se que:

$$\mathrm{grade}(M) = \mathrm{grade}(\mathrm{Ann}(M)) \leq \mathrm{ht}(\mathrm{Ann}(M)) < \infty.$$

Ou seja, no caso em que M é perfeito, temos que $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$. Maiores detalhes sobre a primeira igualdade acima podem ser vistos em Bruns e Herzog (1998, p. 12). Além disso, a desigualdade $\mathrm{grade}(\mathrm{Ann}(M)) \leq \mathrm{ht}(\mathrm{Ann}(M))$ segue do Corolário B.3.

Exemplo 5.1. Consideremos $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local regular. Usando a igualdade 4.2 e o Exemplo 1, concluímos facilmente que:

$$d = \dim(R) = \operatorname{depth}(R) = \operatorname{grade}(\mathfrak{m}) = \operatorname{pd}_R(k).$$

Ou seja, o ideal maximal $\mathfrak{m}$ é perfeito.

Exemplo 5.2. Consideremos $R = \mathbb{Q}[a,b,c,d,e]_{(a,b,c,d,e)}$ e $I = (ab, bc, cd, de, ea)$, como no Exemplo 4.2. Assim, novamente usando a igualdade 4.2, garantimos que $\operatorname{pd}_R(R/I) = 3$. Novamente usando o sistema Decker *et al.* (2022), garantimos que $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{ht}(I) = 3$ (ver B.3 e 3). Assim, o ideal I é perfeito. Analogamente, verifica-se que os ideais dos exemplos 4.3 e 4.5 são perfeitos.

Definição 5.3. Seja R um anel local noetheriano. Um ideal I é dito ser **quase interseção completa** se I é perfeito e $\mu(I) = \operatorname{grade}(I) + 1$.

Observação 5.6. Nesta seção, estudaremos cotas inferiores para números de Betti para R-módulos cíclicos da forma R/I, onde $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano e I é um ideal que é quase interseção completa. Para provarmos os resultados desta seção não é necessários nos restringirmos à nenhuma classe específica de anéis locais. No entanto, os resultados obtidos serão em termos de $d = \operatorname{grade}(I)$. No caso particular em que I é $\mathfrak{m}$-primário e $\operatorname{ht}(I) = \operatorname{grade}(I)$ (por exemplo, para anéis Cohen-Macaulay (B.4)), temos que:

$$d = \operatorname{grade}(I) = \operatorname{ht}(I) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = \dim(R).$$

Assim, os resultados que veremos nos darão soluções parciais para as conjecturas que enunciamos no Capítulo 1.

Observação 5.7. No caso em que I é um ideal perfeito de R e $\mu(I) = \operatorname{grade}(I)$, então o ideal I é dito ser **interseção completa** e os números de Betti do R-módulo cíclico R/I são obtidos através do complexo de Koszul, semelhante ao que fizemos no Exemplo 4.1.

Exemplo 5.3. Consideremos $R = \mathbb{Q}[a,b,c,d,e]_{(a,b,c,d,e)}$ e $I = (ab, bc, cd, de, ea)$ como no exemplos 4.2. Em 5.2, verificamos que o ideal I é perfeito. Além disso, como $\mu(I) = \beta_1^R(R/I) = 5$ e $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{ht}(I) = 3$, então I não é quase interseção completa.

Exemplo 5.4. Consideremos $R = \mathbb{Q}[x,y,z]_{(x,y,z)}$ e $I = (x^2, y^2, z^2, xy)$, como no exemplo 4.5. Analogamente ao que fizemos para o ideal do exemplo acima, é fácil ver que o ideal I é perfeito. Além disso, como $\mu(I) = \beta_1^R(R/I) = 4$ e $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{ht}(I) = 3$, então I é quase interseção completa.

Exemplo 5.5. Consideremos $R = \mathbb{Q}[x,y,z]_{(x,y,z)}$ e $I = (x^3, y^3, z^3)$, como no exemplo 4.3. Analogamente ao que fizemos para o ideal do exemplo 5.3, é fácil ver que o ideal I é perfeito. Além disso, como $\mu(I) = \beta_1^R(R/I) = 3$ e $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{ht}(I) = 3$, então I é interseção completa.

Lema 5.2. Sejam R um anel local noetheriano e I um ideal de R tal que $\operatorname{grade}(I) = d$. Se I é quase interseção completa, então existe um sistema minimal de geradores de I, digamos $x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}$, tal que $x_1, \ldots, x_d$ é uma sequência regular.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre d. No caso em que $d = 0$ não há o que provarmos. Supondo que o resultado vale para $d \geq 0$, vamos provar para o seu sucessor. Se $\operatorname{grade}(I) = d+1 > 0$, então I contém um elemento que não é divisor de zero. Ou seja, o ideal I não está contido em $\operatorname{ZD}(R) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)} \mathfrak{p}$ (ver Teorema A.1). Além disso, usando o Lema de Nakayama, obtemos que $I \nsubseteq \mathfrak{m}I$. Assim, pelo Teorema A.2 (Prime Avoidance), existe $x_1 \in I$ tal que $x_1 \notin \operatorname{ZD}(R) \cup \mathfrak{m}I$. Assim, x_1 é um elemento regular e faz parte de um sistema minimal de geradores de I. Neste caso, é fácil ver que:

$$\mu(I/(x_1)) = \mu(I) - 1.$$

Além disso:

$$\operatorname{grade}(I/(x_1), R/(x_1)) = \operatorname{grade}(I,R) - 1 \text{ (ver B.5)}.$$

Portanto, podemos usar a hipótese de indução para garantir que existem $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{d+1}}$ tais que $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$ é uma sequência $R/(x_1)$-regular e $(\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{d+1}}) = I/(x_1)$. Assim, é fácil ver que a sequência $x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}$ satisfaz as condições do enunciado. $\square$

Lema 5.3. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e I um ideal de R que é quase interseção completa com $\operatorname{grade}(I) = d$. Se $F_\bullet \to R/I \to 0$ é uma resolução livre minimal de R/I, então $F_\bullet^*$ é uma resolução livre minimal de $\operatorname{Ext}_R^d(R/I, R)$.

Demonstração. Consideremos uma resolução livre minimal de R/I, digamos

$$0 \longrightarrow F_d \xrightarrow{\varphi_d} F_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.$$

Dualizando, obtemos o cocomplexo

$$0 \longrightarrow F_0^* \xrightarrow{\varphi_1^*} F_1^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{d-1}^* \xrightarrow{\varphi_d^*} F_d^* \longrightarrow 0,$$

onde $F_i^* = \operatorname{Hom}_R(F_i, R)$, para cada $i = 0, 1, \ldots, d$. Por definição, a i-ésima cohomologia deste cocomplexo é o R-módulo $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, R)$. Como $\operatorname{grade}(I) = d$, então:

$$\operatorname{Ext}_R^0(R/I,R) = \operatorname{Ext}_R^1(R/I,R) = \cdots = \operatorname{Ext}_R^{d-1}(R/I,R) = 0.$$

Além disso, como $\operatorname{Coker}(\varphi_d^*) = \operatorname{Ext}_R^d(R/I,R)$, então podemos considerar $F_\bullet^*$ como resolução livre de $\operatorname{Ext}_R^d(R/I,R)$. Por fim, para justificarmos a minimalidade, note que, usando o Corolário 4.2, temos que as matrizes associadas aos diferenciais φ_i, para $0 \leq i \leq d$, tem suas entradas em $\mathfrak{m}$. Além disso, sabemos que, a menos de escolha de bases, a matriz associada ao R-homomorfismo φ_i^*, $0 \leq i \leq d$, é a transposta da matriz associada a φ_i. Sendo assim, a matriz associada a φ_i^*, $0 \leq i \leq d$, tem coeficientes em $\mathfrak{m}$. Portanto, novamente usando o Corolário 4.2, garantimos que $F_\bullet^*$ é uma resolução livre minimal de $\operatorname{Ext}_R^d(R/I,R)$. $\square$

Lema 5.4. Se R é um anel noetheriano e I é um ideal de R tal que $d = \operatorname{grade}(I)$ é positivo, então $\operatorname{rk}(R/I) = 0$.

Demonstração. Como $d = \operatorname{grade}(I)$ é positivo, então I contém um elemento de R que não é divisor de zero, digamos $x \in I$. Assim, se $\overline{r} \otimes \frac{r'}{s} \in R/I \otimes_R Q$, onde Q é o anel total de frações de R, então temos que:

$$\overline{r} \otimes \frac{r'}{s} = \overline{r} \otimes \frac{r'x}{sx} = \overline{xr} \otimes \frac{r'}{sx} = \overline{0} \otimes \frac{r'}{sx} = 0.$$

Logo $R/I \otimes_R Q = 0$ e $\operatorname{rk}(R/I) = 0$. □

No próximo teorema usaremos o cone de um morfismo de complexos para construir uma resolução livre. Esta noção está definida em 2.17.

Teorema 5.2. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano, I um ideal de R que é quase interseção completa com $\operatorname{grade}(I) = d$ e $r_i(R/I) := \operatorname{rk}(\varphi_i)$, onde $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$ é uma resolução livre minimal do R-módulo quociente R/I. Então, existem números inteiros não negativos Γ_i, $0 \leq i \leq d+1$, tais que:

i) $\max\{0, \beta_i^R(R/I) - \binom{d+1}{i}\} \leq \Gamma_i \leq \beta_i^R(R/I)$,

ii) $\beta_i^R(R/I) + \beta_{d-i+1}^R(R/I) = \Gamma_i + \Gamma_{i+1} + \binom{d+1}{i}$,

iii) $r_i(R/I) + r_{d-i+2}(R/I) = \Gamma_i + \binom{d}{i-1}$,

iv) $\Gamma_i = \Gamma_{d-i+2}$.

Demonstração. Pelo Lema 5.2, podemos considerar um sistema minimal de geradores de I, digamos $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}$, tal que $x_1, \ldots, x_d$ é uma sequência regular. Pelo Teorema 3.11, temos que:

$$H_2(\mathbf{x}) = \cdots = H_{d+1}(\mathbf{x}) = 0$$

e

$$H_1(\mathbf{x}) = \operatorname{Ext}_R^d(R/I, R).$$

Assim, se $F_\bullet \to R/I \to 0$ é uma resolução livre minimal de R/I, então, pelo Lema 5.3, $F_\bullet^*$ é uma resolução livre minimal de $H_1(\mathbf{x})$. Por simplicidade, vamos denotar $K_\bullet(\mathbf{x})$ simplesmente por $K_\bullet$ e $Z_1 := \operatorname{Ker} d_{\mathbf{x}}^{(1)}$. Como o complexo

$$0 \longrightarrow K_{d+1} \longrightarrow K_d \longrightarrow K_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_2 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow H_1(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$$

é exato, então, pelo Teorema da Comparação (3.1), existem R-homomorfismos $\psi_0,\dots,\psi_d$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{d+1} \arrow[r] & K_d \arrow[r] & K_{d-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & H_1(\mathbf{x}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0^* \arrow[r] \arrow[u, "\psi_0"] & F_1^* \arrow[r] \arrow[u, "\psi_1"] & F_2^* \arrow[r] \arrow[u, "\psi_2"] & \cdots \arrow[r] & F_{d-1}^* \arrow[r] \arrow[u, "\psi_{d-1}"] & F_d^* \arrow[r] \arrow[u, "\psi_d"] & H_1(\mathbf{x}) \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Para simplificar a notação, vamos identificar via isomorfismos canônicos os R-módulos livres F_i e F_i^*, para todo $i=0,\dots,d$. Como ψ_d toma valores em Z_1, podemos considerar o morfismo de complexos obtido a partir de $\psi_0,\dots,\psi_d,\psi_{d+1}$ como abaixo. Digamos que seja $\psi_\bullet=\{\psi_i\}_{i=0}^{d+1}$ tal morfismo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{d+1} \arrow[r] & K_d \arrow[r] & K_{d-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[u, "\psi_0"] & F_1 \arrow[r] \arrow[u, "\psi_1"] & F_2 \arrow[r] \arrow[u, "\psi_2"] & \cdots \arrow[r] & F_{d-1} \arrow[r] \arrow[u, "\psi_{d-1}"] & F_d \arrow[r] \arrow[u, "\psi_d"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "\psi_{d+1}"] & 0
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Fixemos $C_\bullet=\operatorname{cone}(\psi_\bullet)$. Então, $C_0=K_0$, $C_1=K_1$ e o primeiro diferencial de $C_\bullet$ é $d_{\mathbf{x}}^{(1)}$. Assim, usando a sequência exata longa 2.5, verifica-se que $C_\bullet$ é uma resolução livre de R/I. Com efeito, podemos considerar a sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow H_i(K_\bullet) \longrightarrow H_i(C_\bullet) \longrightarrow H_{i-1}(F_\bullet^*) \xrightarrow{H_{i-1}(\psi_\bullet)} H_{i-1}(K_\bullet) \longrightarrow \cdots . \tag{5.3}$$

Assim, é trivial verificar que $H_i(C_\bullet)=0$, para todo $i\geq 3$. Para $i=1,2$, usamos a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_2(C_\bullet) \longrightarrow H_1(F_\bullet^*) \xrightarrow{H_1(\psi_\bullet)} H_1(K_\bullet) \longrightarrow H_1(C_\bullet) \longrightarrow 0 .$$

Como o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r] & H_1(\mathbf{x}) \\
F_d \arrow[r] \arrow[u, "\psi_d"] & H_1(\mathbf{x}) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo, então, para cada $x\in F_d$, temos que $x+\operatorname{Im} d_{\mathbf{x}}^{(2)}=\psi_d(x)+\operatorname{Im} d_{\mathbf{x}}^{(2)}$. Portanto, $H_1(\psi_\bullet)=\mathrm{id}_{H_1(\mathbf{x})}$. Assim, concluimos que:

$$H_2(C_\bullet)=H_1(C_\bullet)=0.$$

Além disso, usando a sequência exata longa 5.3, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_0(K_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0 .$$

Logo:

$$H_0(C_\bullet)\cong H_0(K_\bullet)=R/I.$$

Como os diferenciais nos complexos do diagrama 5.2 tem matrizes com coeficientes em $\mathfrak{m}$, então o k-posto do i-ésimo diferencial de $C_\bullet$ é igual a $\operatorname{rank}_k(\psi_{d+2-i})$. Portanto, pelo Corolário 4.1, temos que

$$\beta_i^R(R/I) = \operatorname{rk}(C_i) - (\operatorname{rank}_k(\psi_{d+2-i}) + \operatorname{rank}_k(\psi_{d+1-i})), \tag{5.4}$$

para cada $i \in \mathbb{N}_0$. Fixando

$$\Gamma_i = \operatorname{rk}(F_i) - \operatorname{rank}_k(\psi_i),$$

$0 \leq i \leq d+1$, e usando a igualdade

$$\operatorname{rk}(C_i) = \operatorname{rk}(K_i) + \operatorname{rk}(F_{d+2-i}),$$

obtemos a expressão:

$$\begin{aligned}
\beta_i^R(R/I) &= \operatorname{rk}(K_i) + \operatorname{rk}(F_{d+2-i}) + (\Gamma_{d+2-i} - \operatorname{rk}(F_{d+2-i})) + (\Gamma_{d+1-i} - \operatorname{rk}(F_{d+1-i})) \\
&= \binom{d+1}{i} - \beta_{d+1-i}^R(R/I) + \Gamma_{d+2-i} + \Gamma_{d+1-i}.
\end{aligned}$$

Trocando i por $d+1-i$, obtemos a igualdade

$$\beta_i^R(R/I) + \beta_{d+1-i}^R(R/I) = \binom{d+1}{i} + \Gamma_i + \Gamma_{i+1}$$

para cada $i = 0, \ldots, d$. Assim, verificamos os itens i) e ii). Substituindo

$$\beta_j^R(R/I) = \binom{d+1}{j} + \Gamma_j + \Gamma_{j+1} - \beta_{d+1-j}^R(R/I)$$

na expressão $r_i(R/I) = \sum_{j=i}^d (-1)^{j-i} \beta_j^R(R/I)$ (ver Corolário A.4), $1 \leq i \leq d$, obtemos:

$$\begin{aligned}
r_i(R/I) + \sum_{j=i}^d (-1)^{j-i} \beta_{d+1-j}^R(R/I) &= \sum_{j=i}^d (-1)^{j-i} \binom{d+1}{j} + \Gamma_i \\
&= \sum_{j=i}^d (-1)^{j-i} \binom{d}{j} + \sum_{j=i}^d (-1)^{j-i} \binom{d}{j-1} + \Gamma_i \\
&= \sum_{j=i}^d (-1)^{j-i} \binom{d}{j} + \sum_{j=i+1}^d (-1)^{j-i} \binom{d}{j-1} + \Gamma_i + \binom{d}{i-1}.
\end{aligned}$$

Como $\beta_{d+1-j}^R(R/I) = r_{d+1-j}(R/I) + r_{d+2-j}(R/I)$ (ver Teorema A.4), temos que:

$$r_i(R/I) + r_{d+2-i}(R/I) + (-1)^{d-i} r_1(R/I) = (-1)^{d-i} + \Gamma_i + \binom{d}{i-1}.$$

Podemos assumir que $d > 0$, pois caso contrário $\operatorname{pd}_R(R/I) = 0$ e não há o que provarmos. Assim, pelo Lema 5.4, temos que $\operatorname{rk}(R/I) = 0$ e assim, como $F_0 = R$, então $r_1(R/I) = 1$ (ver Proposição A.10), pois R/I tem apresentação finita

$$F_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0\,.$$

Logo, temos que:

$$r_i(R/I) + r_{d+2-i}(R/I) = \Gamma_i + \binom{d}{i-1}, \tag{5.5}$$

para todo $i = 1, \ldots, d$, verificando o item iii). Por fim, pela equação 5.5, temos que:

$$\Gamma_i = r_i(R/I) + r_{d+2-i}(R/I) - \binom{d}{i-1}. \tag{5.6}$$

Trocando i por $d+2-i$ na equação 5.6, obtemos facilmente o item iv). $\square$

Corolário 5.1. Se R é um anel local noetheriano e I um ideal de R que é quase interseção completa com $\operatorname{grade}(I) = d$, então:

$$\sum_{i=0}^{d} \beta_i^R(R/I) \geq 2^d.$$

Demonstração. Como Γ_i é um número inteiro não negativo, para todo $0 \leq i \leq d+1$, pela igualdade $\beta_i^R(R/I) + \beta_{d-i+1}^R(R/I) = \Gamma_i + \Gamma_{i+1} + \binom{d+1}{i}$, temos que:

$$\beta_i^R(R/I) + \beta_{d-i+1}^R(R/I) \geq \binom{d+1}{i}, \tag{5.7}$$

para todo $0 \leq i \leq d+1$. Assim, somando estas desigualdades, temos que:

$$2\sum_{i=0}^{d+1} \beta_i^R(R/I) \geq \sum_{i=0}^{d+1} \binom{d+1}{i} = 2^{d+1}.$$

Notando que, $\beta_{d+1}^R(R/I) = 0$, obtemos a desigualdade

$$2\sum_{i=0}^{d} \beta_i^R(R/I) \geq 2^{d+1}.$$

Logo, temos que $\sum_{i=0}^{d} \beta_i^R(R/I) \geq 2^d$. $\square$

Corolário 5.2. Sejam R um anel local noetheriano, I um ideal de R que é quase interseção completa com $\operatorname{grade}(I) = d$ e $r_i(R/I) := \operatorname{rk}(\varphi_i)$, onde $(F_\bullet, \varphi_\bullet)$ é uma resolução livre minimal de R/I. Então:

i) Se $0 \leq i \leq d$, então $\beta_i^R(R/I) \geq \binom{d}{i}$ ou $\beta_{d+1-i}^R(R/I) \geq \binom{d}{d+1-i}$.

ii) Se $1 \leq i \leq d$, então $r_i(R/I) \geq \binom{d-1}{i-1}$ ou $r_{d+2-i}(R/I) \geq \binom{d-1}{d+1-k}$.

iii) Se $d = 2m+1$, então $\beta_{m+1}^R(R/I) \geq \binom{d}{m+1}$.

iv) Se $d = 2m$, então $r_{m+1}(R/I) \geq \binom{d-1}{m}$.

Demonstração. Vamos provar o item i) por contradição. Se fosse verdadeiro que $\beta_i^R(R/I) < \binom{d}{i}$ e $\beta_{d+1-i}^R(R/I) < \binom{d}{d+1-i}$, então teriamos que:

$$\begin{aligned}\beta_i^R(R/I) + \beta_{d+1-i}^R(R/I) &< \binom{d}{i} + \binom{d}{d+1-i} \\ &= \binom{d}{i} + \binom{d}{i-1} \\ &= \binom{d+1}{i},\end{aligned}$$

contradizendo a desigualdade 5.7. O item iii) segue imediatamente do item i), considerando $i = m+1$. Analogamente verifica-se os itens ii) e iv). $\square$

Observação 5.8. Os corolários acima nos fornecem soluções parciais para as conjecturas que enunciamos no Capítulo 1. Nas condições que enunciamos na Observação 5.6, o Corolário 5.1 verifica a Conjectura Total Rank (2). Além disso, sob as mesmas condições, os itens i) e ii) do Corolário 5.2 verificam que ao menos a metade das desigualdades das conjecturas 1 e 3 são verdadeiras.

5.3 Números de Betti de produtos de ideais Tor-independentes

Definição 5.4. Dois R-módulos M e N são ditos Tor-**independentes** se $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso, se I e J são ideais de R tais que os R-módulos R/I e R/J são Tor-independentes, então dizemos que I e J são Tor-**independentes**.

Exemplo 5.6. Sejam k um corpo e $R = k[[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]]$. Para simplificar a notação, vamos escrever $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ e $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_m$. Vamos provar que os ideais $(\mathbf{x})$ e $(\mathbf{y})$ são Tor-independentes. Pela Proposição 3.16, os complexos $K_\bullet(\mathbf{x})$ e $K_\bullet(\mathbf{y})$ são resoluções livres deletadas dos R-módulos $R/(\mathbf{x})$ e $R/(\mathbf{y})$, respectivamente. Além disso, pela Proposição 3.13, temos que

$$K_\bullet(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes K_\bullet(\mathbf{y}).$$

Assim, calculando os R-módulos $\mathrm{Tor}_i^R(R/(\mathbf{x}), R/(\mathbf{y}))$ a partir das homologias do produto tensorial de resoluções livres $K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes K_\bullet(\mathbf{y})$ (como introduzimos na Observação 4.8), pela Proposição 3.16, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_i^R(R/(\mathbf{x}), R/(\mathbf{y})) &= H_i(K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes K_\bullet(\mathbf{y})) \\ &= H_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lema 5.5. Sejam $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ dois R-homomorfismos. Se f e g são sobrejetivos, então $f \otimes g$ é um R-homomorfismo sobrejetivo cujo núcleo é gerado pelo conjunto

$$S = \{x \otimes y : f(x) = 0 \text{ ou } f(y) = 0\}.$$

Demonstração. A demonstração de que $f \otimes g$ é sobrejetivo é trivial e será omitida. Além disso, como $S \subseteq \mathrm{Ker}(f \otimes g)$, então considerando $T = \langle S \rangle$, temos que $T \subseteq \mathrm{Ker}(f \otimes g)$. Assim, $f \otimes g$ induz um R-homomorfismo $\alpha : (M \otimes_R N)/T \to M' \otimes_R N'$, satisfazendo:

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{p} m_i \otimes n_i + T\right) = \sum_{i=1}^{p} f(m_i) \otimes g(n_i).$$

Além disso, podemos definir uma função R-bilinear $a : M' \times N' \to (M \otimes_R N)/T$ dada por $a(m', n') = m \otimes n + T$, onde $f(m) = m'$ e $f(n) = n'$. Note que podemos considerar a desta forma, tendo vista que f e g são R-homomorfismos sobrejetivos. A R-bilinearidade de a segue facilmente, bastando verificar que a está bem definida. Suponhamos que $m' \in M'$, $n' \in N'$ e $f(m_1) = f(m_2) = m'$ e $g(n_1) = g(n_2) = n'$, para certos m_1 e m_2 elementos de M e n_1 e n_2 elementos de N. Neste caso, temos que

$$f(m_1 - m_2) = f(m_2 - m_1) = 0$$

e

$$g(n_1 - n_2) = g(n_2 - n_1) = 0$$

Assim

$$m_1 \otimes n_1 - m_2 \otimes n_2 = (m_1 - m_2) \otimes (n_1 + n_2) + m_2 \otimes (n_1 - n_2) + (m_2 - m_1) \otimes n_2 \in T.$$

Ou seja, $m_1 \otimes n_1 + T = m_2 \otimes n_2 + T$ e a está bem definida. Logo a induz um R-homomorfismo $\beta : M' \otimes_R N' \to (M \otimes_R N)/T$ satisfazendo

$$\beta(m' \otimes n') = m \otimes n + T,$$

para cada $m' \in M'$ e $n' \in N'$, onde $f(m) = m'$ e $g(n) = n'$. Note que, para cada $m \in M$ e $n \in N$, temos que:

$$\begin{aligned}\beta(\alpha(m \otimes n + T)) &= \beta(f(m) \otimes f(n)) \\ &= m \otimes n + T\end{aligned}$$

e para cada $m' \in M'$ e $n' \in N'$, temos que:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(m' \otimes n')) &= \alpha(m \otimes n + T) \\ &= f(m) \otimes g(n) \\ &= m' \otimes n'.\end{aligned}$$

Ou seja, $\beta = \alpha^{-1}$. Além disso, recordemos que via Primeiro Teorema do Isomorfismo, obtemos um isomorfismo de R-módulos $\gamma : (M \otimes_R N)/\mathrm{Ker}(f \otimes g) \to M' \otimes_R N'$ satisfazendo:

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{p} m_i \otimes n_i + \mathrm{Ker}(f \otimes g)\right) = \sum_{i=1}^{p} f(m_i) \otimes g(n_i).$$

Por fim, suponhamos que $\sum_{i=1}^{p} m_i \otimes n_i \in \operatorname{Ker}(f \otimes g) - T$. Assim, aplicando γ, verificamos que $\sum_{i=1}^{p} f(m_i) \otimes g(n_i) = 0$. Por outro, lado, como $\sum_{i=1}^{p} m_i \otimes n_i \notin T$ e α é um isomorfismo, então, aplicando α, verificamos que $\sum_{i=1}^{p} m_i \otimes n_i \neq 0$, causando uma contradição. Logo, segue a igualdade $\operatorname{Ker}(f \otimes g) = T$. $\square$

Lema 5.6. Sejam I e J dois ideais de R. Se I e J são Tor-independentes, então o R-homomorfismo canônico $\mu : I \otimes_R J \to IJ$ satisfazendo $\mu(i \otimes j) = ij$, para quaisquer $i \in I$ e $j \in J$, é um isomorfismo.

Demonstração. A sobrejetividade de μ é trivialmente verificada. Além disso, considerando a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/J \longrightarrow 0$$

obtemos a Tor-sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(I,J) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(I,R) \longrightarrow \operatorname{Tor}_i^R(I,R/J) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{i-1}^R(I,J) \longrightarrow \cdots .$$

Como $\operatorname{Tor}_1^R(I,R) = 0$, então obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(I,R/J) \longrightarrow I \otimes_R J \longrightarrow I \otimes_R R \longrightarrow I \otimes_R R/J \longrightarrow 0 .$$

Além disso, note que, se $F_\bullet$ é um resolução livre de R/I, então $F_{\geq 1}$ é uma resolução livre deletada de I. Note que

$$\operatorname{Tor}_1^R(I,R/J) = \operatorname{Tor}_2^R(R/I,R/J) = 0.$$

Logo, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow I \otimes_R J \xrightarrow{\rho} I \otimes_R R \longrightarrow I \otimes_R R/J \longrightarrow 0 .$$

Assim, ρ é um R-homomorfismo injetivo. Para concluir que μ é injetivo, basta verificar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_R J \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{I\otimes_R J}"'] & I \otimes_R R \arrow[d, "\alpha"] \\
I \otimes_R J \arrow[r, "\mu"] & I
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $\alpha : I \otimes_R R \to I$ denota o R-isomorfismo canônico. $\square$

No próximo teorema usaremos o produto estrela de complexos para construir uma resolução livre. Esta noção está definida em 2.18.

Teorema 5.3. Sejam R um anel local noetheriano, I e J dois ideais de R e $F_\bullet$ e $G_\bullet$ resoluções livres de R/I e R/J, respectivamente. Se I e J são Tor-independentes, então o produto estrela $F *_R G$ é uma resolução livre de R/IJ. Além disso, se $F_\bullet$ e $G_\bullet$ são minimais, então $F *_R G$ é minimal.

Demonstração. Inicialmente, vamos provar que o complexo $F *_R G$ satisfaz $H_n(F *_R G) = 0$, para todo $n > 0$. Para cada $n \geq 2$, calculando o R-módulo $\operatorname{Tor}_{n-1}^R(I,J)$ conforme descrevemos na Observação 4.8 e notando que as truncações $F_{\geq 1}$ e $G_{\geq 1}$ são resoluções livres deletadas de I e J, respectivamente, temos que:

$$\begin{aligned} H_n(F *_R G) &= H_{n+1}(F_{\geq 1} \otimes G_{\geq 1}) \\ &= \operatorname{Tor}_{n-1}^R(I,J) \\ &\cong \operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/I, R/J) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $d_1^F : F_1 \to I$ e $d_1^G : G_1 \to J$ são R-homomorfismos sobrejetivos, note que, identificando via isomorfismo canônico $F_0 \otimes_R G_0 = R \otimes_R R \cong R$, podemos considerar $d_1^{F *_R G} : F_1 \otimes_R G_1 \to IJ$ um R-homomorfismo sobrejetivo. Além disso, podemos considerar o R-homomorfismo sobrejetivo $d_1^F \otimes d_1^G : F_1 \otimes_R G_1 \to I \otimes_R J$. Assim, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} F_1 \otimes_R G_1 \arrow[rr, "d_1^{F *_R G}"] \arrow[dr, "d_1^F \otimes d_1^G"'] & & IJ \\ & I \otimes_R J \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

onde μ denota o R-isomorfismo canônico que consideramos no Lema 5.6. Assim

$$\operatorname{Ker}(d_1^{F *_R G}) = \operatorname{Ker}(d_1^F \otimes d_1^G).$$

Além disso, usando o Lema 5.5, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(d_1^F \otimes d_1^G) &= \operatorname{Ker}(d_1^F) \otimes_R G_1 + F_1 \otimes_R \operatorname{Ker}(d_1^G) \\ &= \operatorname{Im}(d_2^F) \otimes_R G_1 + F_1 \otimes_R \operatorname{Im}(d_2^G). \end{aligned}$$

Também, como o diferencial $d_2^{F *_R G} = d_3^{F_{\geq 1} \otimes G_{\geq 1}}$ é dado por

$$d_2^{F *_R G}(f_2 \otimes g_1) = d_2^F(f_2) \otimes g_1,$$

para quaisquer $f_2 \in F_2$ e $g_1 \in G$ e por

$$d_2^{F *_R G}(f_1 \otimes g_2) = -f_1 \otimes d_2^G(g_2),$$

para quaisquer $f_1 \in F_1$ e $g_2 \in G_2$, então:

$$\operatorname{Ker}(d_1^F \otimes d_1^G) = \operatorname{Im}(d_2^F) \otimes_R G_1 + F_1 \otimes_R \operatorname{Im}(d_2^G) = \operatorname{Im}(d_2^{F *_R G}).$$

Assim, $H_1(F *_R G) = 0$. Além disso, temos que

$$H_0(F *_R G) = \frac{F_0 \otimes_R G_0}{\operatorname{Im}(d_1^{F *_R G})} = \frac{R \otimes_R R}{IJ} \cong \frac{R}{IJ}.$$

Assim, $F *_R G$ é um resolução livre do R-módulo R/IJ. Por fim, se $F_\bullet$ e $G_\bullet$ são minimais, então a minimalidade de $F *_R G$ segue facilmente da Proposição 4.2, tendo vista que os diferenciais de $F *_R G$ são definidos em termos dos diferenciais de $F_\bullet$ e $G_\bullet$. $\square$

Como consequência do Teorema 5.3 anterior, podemos obter os números de Betti do R-módulo R/IJ como soma de produtos dos números de Betti de R/I e R/J.

Corolário 5.3. Sejam R um anel local noetheriano e I e J dois ideais de R. Se I e J são Tor-independentes, então:

$$\beta_l^R(R/IJ) = \sum_{i=1}^{l} \beta_i^R(R/I)\beta_{l+1-i}^R(R/J),$$

para cada $l \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.3, se $F_\bullet$ e $G_\bullet$ são resoluções livres minimais de R/I e R/J, então $F *_R G$ é uma resolução livre minimal de R/IJ. Além disso, como os complexos $F_{\geq 1}$ e $G_{\geq 1}$ são formados por R-módulos nulos em seus índices não positivos, para cada número inteiro positivo l, temos que

$$(F *_R G)_l = (F_{\geq 1} \otimes G_{\geq 1})_{l+1} = \bigoplus_{i=1}^{l} F_i \otimes_R G_{l+1-i}.$$

Assim, o resultado segue do isomorfismo canônico $R^n \otimes_R R^m \cong R^{mn}$, para quaisquer números inteiros não negativos m e n. $\square$

A igualdade obtida no Corolário 5.3 nos garante uma expressão a para a série de Poincaré $P_{R/IJ}^R$ em termos de $P_{R/I}^R$ e $P_{R/I}^R$.

Corolário 5.4. Sejam R um anel local noetheriano e I e J dois ideais de R. Se I e J são Tor-independentes, então:

$$P_{R/IJ}^R(t) = 1 + \frac{1}{t}(P_{R/I}^R(t) - 1)(P_{R/J}^R(t) - 1).$$

Demonstração. Usando a igualdade do corolário acima, temos que

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{t}(P_{R/I}^R(t) - 1)(P_{R/J}^R(t) - 1) &= 1 + \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^R(R/I)t^i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^R(R/J)t^j\right) \\
&= 1 + \sum_{i,j} (\beta_i^R(R/I)\beta_j^R(R/J))t^{i+j-1} \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i^R(R/I)\beta_{l+1-i}^R(R/J)\right)t^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l^R(R/IJ)t^l \\
&= P_{R/IJ}^R(t).
\end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, inicialmente estudamos ferramentas de Álgebra Homológica que utilizamos durantes os capítulos 4 e 5. As principais ferramentas apresentadas foram os funtores derivados Tor e Ext e o Complexo de Koszul. Apresentamos resultados importantes sobre os módulos de homologia do Complexo de Koszul, que foram recorrentemente utilizados ao longo deste texto.

Ao longo deste trabalho, verificamos que os números de Betti possuem aplicações em Álgebra Comutativa, ao fornecer critérios para que anéis sejam de Gorenstein ou interseção completa, que consistem em classes de anéis frequentemente estudadas por pesquisadores da área. Além disso, apresentamos uma série de problemas em aberto acerca deste tópico e resultados sobre números de Betti de certas classes de módulos cíclicos, aplicando os resultados dos capítulos 2 e 3.

É notável que ainda existem muitas questões acerca destes invariantes para serem trabalhadas em projetos futuros. Este trabalho fornece as ferramentas básicas para o estudo de números de Betti de módulos finitamente gerados sobre anéis locais noetherianos e aborda a aplicação de ferramentas de Álgebra Homológica em problemas atuais relacionados ao tema. Por fim, é importante notar que, apesar de não terem sidos apresentados resultados originais, o trabalho apresenta muitas técnicas algébricas que devem ser exploradas pelo autor ao longo do doutorado e que podem ajudar outros estudantes no desenvolvimento de seus projetos.

REFERÊNCIAS

ATIYAH, M.; MACDONALD, I. G. **Introduction to Commutative Algebra**. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1969. Citado nas páginas 22, 107 e 108.

AVRAMOV, L. L. Infinite free resolutions. In: ____. **Six Lectures on Commutative Algebra**. Basel: Birkhäuser Basel, 1998. p. 1–118. Citado na página 81.

AVRAMOV, L. L.; BUCHWEITZ, R.-O. Lower bounds for betti numbers. **Compositio Mathematica**, v. 86, n. 2, p. 147–158, 1993. Citado na página 16.

BORGES, H.; TENGAN, E. **Álgebra comutativa em quatro movimentos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Citado nas páginas 107 e 108.

BRUNS, W.; HERZOG, J. **Cohen-macaulay rings**. New York: Cambridge university press, 1998. Citado nas páginas 41, 60, 69, 90, 107, 111, 113, 116, 118 e 123.

BUCHSBAUM, D. A.; EISENBUD, D. What makes a complex exact? **Journal of Algebra**, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 259–268, 1973. Citado nas páginas 74 e 111.

____. Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 99, n. 3, p. 447–485, 1977. Citado na página 15.

CHANG, S.-T. Betti numbers of modules of exponent two over regular local rings. **Journal of Algebra**, Elsevier, v. 193, n. 2, p. 640–659, 1997. Citado na página 16.

DECKER, W.; GREUEL, G.-M.; PFISTER, G.; SCHÖNEMANN, H. **Singular 4-3-0 — A computer algebra system for polynomial computations**. 2022. <http://www.singular.uni-kl.de>. Citado nas páginas 39, 73, 82, 84, 85 e 91.

DUGGER, D. Betti numbers of almost complete intersections. **Illinois Journal of Mathematics**, Duke University Press, v. 44, n. 3, p. 531–541, 2000. Citado na página 87.

EISENBUD, D. **Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 150. Citado nas páginas 107, 108 e 110.

GELLER, H. Minimal free resolutions of fiber products. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 150, n. 10, p. 4159–4172, 2022. Citado na página 87.

GRECO, S.; SALMON, P. **Topics in m-adic Topologies**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 58. Citado na página 110.

GREUEL, G. M.; PFISTER, G. **A Singular Introduction to Commutative Algebra**. Berlin: Springer, 2002. Citado na página 41.

HARTSHORNE, R. Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list. **Topology**, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 117–128, 1979. Citado na página 15.

HUNEKE, C. **Commutative Algebra II**. 2012. Disponível em: <https://home.adelphi.edu/~bstone/commalg-notes/commalg-2/algebra-notes-II.pdf>. Citado nas páginas 69, 87 e 113.

KONRAD, K. **Base extension and exterior powers**. 2018. Disponível em: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/extmodbaseextn.pdf>. Citado na página 60.

MATSUMURA, H. **Commutative ring theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1989. Citado na página 107.

ROTMAN, J. J. **An Introduction to Homological Algebra**. New York: Springer, 2009. Citado nas páginas 19, 25 e 41.

SIMIS, A. **Commutative algebra**. Boston: De Gruyter, 2020. Citado na página 41.

SWANSON, I. **Homological Algebra**. 2018. Disponível em: <https://www.math.purdue.edu/~iswanso/homologicalalgebra.pdf>. Citado nas páginas 35 e 52.

WAGSTAFF, K. S. **Koszul Complexes**. 2011. Disponível em: <https://www.ndsu.edu/pubweb/~ssatherw/sp14/790/koszul120611.pdf>. Citado na página 67.

WALKER, M. E. Total betti numbers of modules of finite projective dimension. **Annals of Mathematics**, Department of Mathematics of Princeton University, v. 186, n. 2, p. 641–646, 2017. Citado na página 16.

WEIBEL, C. A. **An introduction to homological algebra**. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. Citado na página 83.

APÊNDICE

A

TÓPICOS DE ÁLGEBRA COMUTATIVA

As principais referências para este apêndice são Atiyah e Macdonald (1969), Eisenbud (2013), Borges e Tengan (2015) e Bruns e Herzog (1998). Como referência para o estudo de tópicos de Álgebra Comutativa, também recomendamos Matsumura (1989).

A.1 Resultado auxiliares

Lema A.1 (Lema da serpente)**.** Dado um diagrama comutativo de R-módulos e R-homomorfismos

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & N_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & Q_2 & \end{tikzcd}$$

cujas linhas são sequências exatas. Então, existe um R-homomofismo $\Phi : \operatorname{Ker}(\gamma) \to \operatorname{Coker}(\alpha)$ tal que, na notação da Observação 2.5, a sequência

$$\operatorname{Ker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f_1}} \operatorname{Ker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g_2}} \operatorname{Coker}(\gamma)$$

é exata. Além disso, se f_1 é injetiva e g_2 é sobrejetiva, então $\overline{f_1}$ é injetiva e $\overline{g_2}$ é sobrejetiva.

Demonstração. Ver Atiyah e Macdonald (1969, p. 23). □

Teorema A.1. Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo. Então, o conjunto $\operatorname{ZD}(M)$ dos divisores de zero de M é a união dos ideais primos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.

Demonstração. Ver Borges e Tengan (2015, p. 292). □

Teorema A.2 (Prime Avoidance)**.** Seja $\mathfrak{a} \subseteq R$ um ideal arbitrário e sejam $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideais primos de R para $i = 3, 4, \ldots, n$. Então:

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{1 \le i \le n} \mathfrak{p}_i \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i, \text{ para algum } i.$$

Demonstração. Ver Borges e Tengan (2015, p. 102). □

Proposição A.1 (Lema de Nakayama)**.** Sejam M um R-módulo finitamente gerado e $\mathfrak{a}$ um ideal de R contido no Radical de Jacobson de R. Se $\mathfrak{a}M = M$, então $M = 0$.

Demonstração. Ver Atiyah e Macdonald (1969, p. 21). □

Corolário A.1. Sejam M um R-módulo finitamente gerado, N um submódulo de M e $\mathfrak{a}$ um ideal de R contido no radical de Jacobson de R. Se $M = N + \mathfrak{a}M$, então $M = N$.

Proposição A.2. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local, M um R-módulo finitamente gerado e $m_1, \dots, m_n$ elementos de M. Então

$$M = Rm_1 + \cdots + Rm_n \iff \frac{M}{\mathfrak{m}M} = k\overline{m_1} + \cdots + k\overline{m_n}.$$

Em particular, qualquer conjunto minimal de geradores de M possui exatamente $\dim_k(M/\mathfrak{m}M)$ elementos.

Demonstração. Ver Borges e Tengan (2015, p. 138). □

Proposição A.3. Seja M um R-módulo finitamente gerado e $\alpha : M \to M$ um R-homomorfismo. Se α é sobrejetivo, então α é um R-isomorfismo.

Demonstração. Ver Eisenbud (2013, p. 120). □

Corolário A.2. Se N é um R-módulo livre de posto n e $x_1, \dots, x_n \in N$ formam um conjunto de geradores de N, então $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base de N.

Lema A.2. Se M é um R-módulo, então $\mathrm{Supp}(M) \subseteq V(\mathrm{Ann}(M))$, com igualdade se M é finitamente gerado sobre R.

Demonstração. Ver Borges e Tengan (2015, p. 289). □

Proposição A.4. Sejam R um anel noetheriano, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ e M um R-módulo finitamente gerado. Então:

i) $\mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} : \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M),\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

ii) $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M)} V(\mathfrak{q})$. Em particular, $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$ e estes dois conjuntos possuem os mesmos primos minimais.

Demonstração. Ver Borges e Tengan (2015, p. 295). □

Teorema A.3. Se $x_1, \dots, x_d \in R$ e $\mathfrak{p}$ é um primo minimal contendo $x_1, \dots, x_d$, então $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$.

Demonstração. Ver Eisenbud (2013, p. 233). □

Definição A.1. Uma sequência exata $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ **cinde** se existe um R-homomorfismo $j : N \to M$ tal que $j \circ f = \mathrm{id}_M$. Analogamente, uma sequência exata $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ cinde se existe um R-homomorfismo $j : N \to M$ tal que $g \circ j = \mathrm{id}_N$.

Em ambos os casos da definição acima, o R-homomorfismo j é chamado uma **cisão** de f.

Proposição A.5. Se a sequência exata $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ cinde, então $N = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(j)$, onde j é uma cisão de f.

Demonstração. Dado $n \in N$, então $j(n) \in M$ e podemos calcular $f(j(n)) \in N$. Considerando $x = n - f(j(n))$, então $x \in \mathrm{Ker}(j)$. De fato:

$$j(x) = j(n) - j(f(j(n))) = j(n) - j(n) = 0,$$

onde a segunda igualdade acima segue de $j \circ f = \mathrm{id}_M$. Assim, $n = f(j(n)) + x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(j)$. Para concluir, vejamos que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(j) = 0$. Com efeito, se $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(j)$, então $y = f(m)$, para algum $m \in M$ e $j(y) = 0$. Sendo assim

$$0 = j(y) = j(f(m)) = m,$$

isto é, $y = f(m) = 0$ e $N = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(j)$. □

A.2 Completamento I-ádico

Definição A.2. Se I é um ideal de um anel R, então o **completamento I-ádico** de R é o limite inverso dos anéis quocientes R/I^n, que denotaremos por $\hat{R}^I$.

Assim, por definição, o completamento I-ádico de um anel R é o subanel do produto direito $\prod_j R/I^j$ dado por:

$$\hat{R}^I = \varprojlim R/I^j = \{g = (\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots) \in \prod_j R/I^j : r_k \equiv r_j \ (\mathrm{mod}\, I^j),\ \forall\, k > j\}.$$

Para cada $j \geq 1$, temos o seguinte ideal de $\hat{R}^I$:

$$\hat{I}^j := \{g = (\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots) : \overline{g_k} = 0,\ \forall\, k \leq j\}.$$

Além disso, iremos denotar $\hat{I}^1 = \hat{I}$.

Definição A.3. Seja I um ideal de um anel R. Se a aplicação natural $i : R \to \hat{R}^I$ dada por $i(r) = (\overline{r}, \overline{r}, \dots)$ é um isomorfismo de anéis, então R é dito ser **completo com respeito a I**. Além disso, quando trabalhamos com um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, então dizemos simplesmente que R é um **anel local completo**.

Observação A.1. É comum trabalharmos com um anel local noetheriano $(R,\mathfrak{m})$ e com o completamento $\hat{R}^{\mathfrak{m}}$. Neste caso, veremos que $\hat{R}^{\mathfrak{m}}$ é um anel local noetheriano com ideal maximal $\hat{\mathfrak{m}}$ e com mesma dimensão que R. Além disso, neste caso, denotaremos $\hat{R}^{\mathfrak{m}}$ simplesmente por $\hat{R}$.

Proposição A.6. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano, então $\hat{R}$ é um anel local noetheriano com ideal maximal $\hat{\mathfrak{m}}$. Além disso, $\hat{R}$ é completo com respeito a $\hat{\mathfrak{m}}$.

Demonstração. Ver Eisenbud (2013, p. 181 e 183). □

Definição A.4. Se I é um ideal de um anel R e M é um R-módulo, então o **completamento I-ádico** de M é o $\hat{R}^I$-módulo $\hat{M}^I = \varprojlim M/I^jM$.

Proposição A.7. Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo. Então:

i) Se M é finitamente gerado, então a função canônica $f : \hat{R}^I \otimes_R M \to \hat{M}^I$ dada por:

$$f((\overline{r_1},\overline{r_2},\dots)\otimes m) = (\overline{r_1m},\overline{r_2m},\dots)$$

é um isomorfismo de R-módulos.

ii) $\hat{R}^I$ é um R-módulo plano.

Demonstração. Ver Eisenbud (2013, p. 183). □

Corolário A.3. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano, então $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{R}$.

Proposição A.8. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local, então $\dim(R) = \dim(\hat{R})$.

Demonstração. Ver Greco e Salmon (2012, p. 34). □

Proposição A.9. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano e $M \neq 0$ é um R-módulo de comprimento finito, então $\hat{M} \cong M$.

Demonstração. Como M tem comprimento finito, então a cadeia descendente

$$M \supseteq \mathfrak{m}M \supseteq \mathfrak{m}^2M \supseteq \mathfrak{m}^3M \supseteq \dots$$

é estacionária. Assim, existe $i > 0$ tal que $\mathfrak{m}^iM = \mathfrak{m}^{i+1}M$ e pelo Lema de Nakayama (A.1), temos que $\mathfrak{m}^iM = 0$. Considerando $f : M \to \hat{M}$ o R-homomorfismo canônico, temos que

$$\operatorname{Ker} f = \bigcap_{j\geq 0} \mathfrak{m}^jM = 0.$$

Logo, f é um R-homomorfismo injetivo. Por fim, note que, se $(m_j + \mathfrak{m}^jM)_j \in \hat{M}$, então, por contrução, temos que $m_i + \mathfrak{m}^jM = m_j + \mathfrak{m}^jM$, para todo $j < i$. Além disso, se $j > i$, temos que $m_j - m_i \in \mathfrak{m}^iM = 0$, isto é, $m_j = m_i$. Assim $(m_j + \mathfrak{m}^jM)_j = (m_i + \mathfrak{m}^jM)_j$ e o R-homomorfismo canônico f é sobrejetivo e consequentemente um isomorfismo de R-módulos. □

A.3 Posto de R-módulos

Definição A.5. Seja $S \subseteq R$ o conjunto de todos os elementos que não são divisores de zero em R. O **anel total de frações** de R é o anel $Q := S^{-1}R$.

Definição A.6. Sejam M um R-módulo e Q o anel total de frações de R. Dizemos que M tem **posto** r e denotamos $\mathrm{rk}(M) = r$ se $M \otimes_R Q$ é um Q-módulo livre de posto r. Além disso, se $f : M \to N$ é um R-homomorfismo, então dizemos que f tem posto r e denotamos $\mathrm{rk}(f) = r$ se $\mathrm{Im}\, f$ tem posto r.

Proposição A.10. Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo com apresentação finita

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

Então, $\mathrm{rk}(M) = r$ se e somente se $\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(F_0) - r$.

Demonstração. Ver Bruns e Herzog (1998, p. 20). □

Mais detalhes sobre o próximo teorema podem ser encontrados em Buchsbaum e Eisenbud (1973).

Teorema A.4. Sejam R um anel noetheriano e

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

um complexo de R-módulos livres tal que $\varphi_k \neq 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Então $F_\bullet$ é exato se e somente se para $k = 1, \ldots, n$, são satisfeitas:

i) $\mathrm{rk}(\varphi_{k+1}) + \mathrm{rk}(\varphi_k) = \mathrm{rk}(F_k)$,

ii) $I(\varphi_n)$ contém uma R-sequência de comprimento k ou $I(\varphi_n) = R$.

Como aplicação direta do teorema acima, obtemos o corolário seguinte.

Corolário A.4. Sejam R um anel noetheriano e

$$F_\bullet : 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

um complexo de R-módulos livres de posto finito tal que $\varphi_k \neq 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Se o complexo $F_\bullet$ é exato, então

$$\mathrm{rk}(\varphi_k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \mathrm{rk}(F_j),$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

APÊNDICE

B

GRAU, PROFUNDIDADE E ALGUMAS CLASSES ESPECIAIS DE ANÉIS

As principais referências para este apêndice são Bruns e Herzog (1998) e Huneke (2012).

B.1 Grau e profundidade

Definição B.1. Seja M um R-módulo. Um elemento $x \in R$ é M-**regular** se $xm = 0$, $m \in M$, implicar que $m = 0$.

Em outras palavras, um elemento $x \in R$ é M-regular quando não é um divisor de zero sobre M. A próxima definição estende esta noção para sequências de elementos de R.

Definição B.2. Seja M um R-módulo. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ de elementos de R é uma sequência M-regular, ou simplesmente uma M-sequência, se satisfaz:

i) x_i é um elemento $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$-regular, para todo $i = 1, \ldots, n$.

ii) $M/\mathbf{x}M \neq 0$.

Além disso, dizemos que $\mathbf{x}$ é uma sequência M-**regular fraca**, ou simplesmente uma M-sequência fraca, se satisfaz o item i) acima.

Observação B.1. As sequências R-regulares são frequentemente chamadas de sequências regulares.

Proposição B.1. Sejam M um R-módulo, $\mathbf{x}$ uma M-sequência fraca de elementos de R, $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis e N um S-módulo que é um R-módulo plano. Então, $\mathbf{x} \subset R$ e $\varphi(\mathbf{x}) \subseteq S$ são $(M \otimes_R N)$-sequências fracas. Além disso, se $\mathbf{x}(M \otimes_R N) \neq M \otimes_R N$, então $\mathbf{x}$ e $\varphi(\mathbf{x})$ são $(M \otimes_R N)$-sequências.

Demonstração. Inicialmente, observemos que a multiplicação por x_i em $M\otimes_R N$ é a mesma operação do que a multiplicação por $\varphi(x_i)$. Logo, é suficiente considerarmos a sequência $\mathbf{x}$. Fixado $i\in\{1,\ldots,n\}$, vamos mostrar que x_i é um elemento $M\otimes_R N/(x_1,\ldots,x_{i-1})M\otimes_R N$-regular. Via isomorfismos canônicos, é fácil ver que

$$\frac{M\otimes_R N}{(x_1,\ldots,x_{i-1})M\otimes_R N}\cong\frac{M}{(x_1,\ldots,x_{i-1})M}\otimes_R N.$$

Como $\mathbf{x}$ é uma M-sequência regular, então a multiplicação por x_i em $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$ define um R-homomorfismo injetivo, que denotaremos por f. Como N é um R-módulo plano, então $f\otimes\mathrm{id}_N$ é um R-homomorfismo injetivo. No entanto, é fácil ver que $f\otimes\mathrm{id}_N$ é a multiplicação por x_i no R-módulo $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M\otimes_R N$. Assim, usando o isomorfismo que demos acima, concluímos que x_i é um elemento $M\otimes_R N/(x_1,\ldots,x_{i-1})M\otimes_R N$-regular.

□

Corolário B.1. Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo e $\mathbf{x}$ uma M-sequência. Se $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M)$ contém $\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}$ é uma $M_{\mathfrak{p}}$-sequência.

Proposição B.2. Sejam M e N dois R-módulos e $I=\mathrm{Ann}(N)$. Se I contém um elemento M-regular, então $\mathrm{Hom}_R(N,M)=0$.

Demonstração. Suponhamos que $f:N\to M$ seja um R-homomorfismo não nulo. Então, existe $n\in N$ tal que $f(n)\neq 0$. Assim, se $r\in I$ é M-regular, então

$$0=f(0)=f(rn)=rf(n).$$

Contradizendo o fato de r ser M-regular. Assim, $\mathrm{Hom}_R(N,M)=0$. □

Proposição B.3. Sejam $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$ ideais primos de R, M um R-módulo e $x_1,\ldots,x_n\in M$. Fixemos $N=\sum_{i=1}^n Rx_i$. Se $N_{\mathfrak{p}_j}\nsubseteq\mathfrak{p}_jM_{\mathfrak{p}_j}$, para todo $j=1,\ldots,m$, então existem $a_2,\ldots,a_n\in R$ tais que $x_1+\sum_{i=2}^n a_ix_i\nsubseteq\mathfrak{p}_jM_{\mathfrak{p}_j}$, para $j=1,\ldots,m$.

Demonstração. Vamos verificar por indução em m. Supondo verdade para $m-1$, então existem $a'_2,\ldots,a'_n$ de modo que

$$x'_1=x_1+\sum_{i=2}^n a'_ix_i\notin\mathfrak{p}_jM_{\mathfrak{p}_j},$$

para todo $j=1,\ldots,m-1$. Além disso, vamos supor que os ideais primos $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$ são distintos entre sí e que $\mathfrak{p}_m$ é um elemento minimal dentre tais ideais primos. Logo, é fácil ver que existe $r\in\bigcap_{j=1}^{m-1}\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_m$. Para cada $i=2,\ldots,n$, fixemos $x'_i=rx_i$ e além disso fixemos $N'=\sum_{i=1}^n Rx'_i$. Como $r\notin\mathfrak{p}_m$, então $N'_{\mathfrak{p}_m}=N_{\mathfrak{p}_m}$. Por fim, como $r\in\mathfrak{p}_j$, para cada $j=1,\ldots,m-1$, então $x'_i\in\mathfrak{p}_jM_{\mathfrak{p}_j}$, para todo $i=2,\ldots,n$ e todo $j=1,\ldots,m-1$. Assim, temos que $x'_1+x'_i\notin\mathfrak{p}_jM_{\mathfrak{p}_j}$, para todo $i=2,\ldots,n$ e para todo $j=1,\ldots,m-1$. Logo, se $x'_1\notin\mathfrak{p}_mM_{\mathfrak{p}_m}$, então x'_1 é o elemento desejado. Por outro lado, se $x'_1\in\mathfrak{p}_mM_{\mathfrak{p}_m}$, então basta considerarmos $i\in\{2,\ldots,n\}$ tal que $x_1+x'_i\notin\mathfrak{p}_mM_{\mathfrak{p}_m}$ e escolher o elemento $x'_1+x'_i$. □

Proposição B.4. Sejam R um anel noetheriano, M e N dois R-módulos finitamente gerados e $I = \operatorname{Ann} N$. Se $\operatorname{Hom}_R(N,M) = 0$, então I contém um elemento M-regular.

Demonstração. Por contradição, vamos supor que I contém apenas divisores de zero de M. Assim, existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ tal que $I \subseteq \mathfrak{p}$ (Ver A.1). Como $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}(N)) = \operatorname{Supp}(N)$ (Ver A.2), temos que

$$N_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) \cong N_\mathfrak{p}/k(\mathfrak{p})N_\mathfrak{p} \neq 0,$$

pelo Lema de Nakayama (A.1), e existe um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo sobrejetivo

$$N_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{p}).$$

Assim, existe um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo sobrejetivo $f : N_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p})$. Como $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, temos que $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M_\mathfrak{p}$. Logo, existe um $R_\mathfrak{p}$-homomorfismo injetivo $g : k(\mathfrak{p}) \to M_\mathfrak{p}$ e a composição $g \circ f \in \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p})$ é não nula. Assim:

$$\operatorname{Hom}_R(N,M) \cong \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \neq 0,$$

contradizendo a hipótese $\operatorname{Hom}_R(N,M) = 0$. □

Definição B.3. Sejam M um R-módulo e I um ideal de R. Uma sequência M-regular $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n$ formada por elementos de I é **maximal** em I se $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}$ não é uma sequência M-regular, para todo $x_{n+1} \in I$.

Teorema B.1 (Teorema de Rees)**.** Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se I é um ideal de R e $IM \neq M$, então toda M-sequência maximal em I tem o mesmo comprimento n, dado por:

$$n = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

Demonstração. Se fixamos $\mathbf{x} = x_1,\ldots,x_n$ uma sequência regular maximal em I, então x_i é um elemento $M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M$-regular, para todo $i = 1,\ldots,n$, por definição. Assim, combinando o Lema 3.5 e a Proposição B.2, temos que

$$\operatorname{Ext}^{i-1}_R(R/I, M) \cong \operatorname{Hom}_R(R/I, M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M) = 0,$$

para todo $i = 1,\ldots,n$. Além disso

$$\operatorname{Ext}^n_R(R/I, M) \cong \operatorname{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{x}M) \neq 0,$$

pela maximalidade da sequência $\mathbf{x}$ e pela Proposição B.4. Assim:

$$n = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

□

Como consequência do teorema acima, não há ambiguidade na definição que daremos a seguir.

Definição B.4. Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $IM \neq M$. O comprimento comum das M-sequências maximais em I é chamado o **grau** de I em M e é denotado por $\operatorname{grade}(I,M)$. Além disso, quando $IM = M$, definimos $\operatorname{grade}(I,M) = \infty$.

Observação B.2. Nas condições da definição acima, a convenção $\operatorname{grade}(I,M) = \infty$ quando $IM = M$ está de acordo com o Teorema B.1, tendo vista que $IM = M$ se e somente se $\operatorname{Ext}^n_R(R/I,M) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma discussão mais detalhada deste fato pode ser encontrada em Bruns e Herzog (1998, p. 10).

Proposição B.5. Sejam R um anel noetheriano, I um ideal de R e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\mathbf{x} = x_1,\dots,x_n$ é uma M-sequência em I, então:

$$\operatorname{grade}(I/(\mathbf{x}), M/\mathbf{x}M) = \operatorname{grade}(I, M/\mathbf{x}M) = \operatorname{grade}(I,M) - n.$$

Demonstração. Inicialmente, note que, fixando $\overline{R} = R/(\mathbf{x})$, $\overline{I} = I/(\mathbf{x})$ e $\overline{M} = M/\mathbf{x}M$, temos que:

$$IM = M \iff I\overline{M} = \overline{M} \iff \overline{I}\,\overline{M} = \overline{M}.$$

Além disso, $y_1,\dots,y_n \in I$ é uma $\overline{M}$-sequência se e somente se $\overline{y_1},\dots,\overline{y_n} \in \overline{I}$ é uma $\overline{M}$-sequência, verificando a primeira igualdade. Para a segunda igualdade, note que se $\mathbf{y}$ é uma sequência $\overline{M}$-regular maximal em I, então a sequência $\mathbf{x},\mathbf{y}$ é uma sequência M-regular maximal em I e consequentemente, temos a expressão:

$$\operatorname{grade}(I,M) = \operatorname{grade}(I,\overline{M}) + n.$$

Assim, $\operatorname{grade}(I,\overline{M}) = \operatorname{grade}(I,M) - n$. □

Definição B.5. Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. O grau de $\mathfrak{m}$ em M é chamado a **profundidade** de M e é denotado por $\operatorname{depth}(M)$.

Como aplicação imediata do Teorema B.1, temos que

$$\operatorname{depth}(M) = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(k,M) \neq 0\},$$

para todo R-módulo não nulo finitamente gerado sobre um anel local noetheriano $(R,\mathfrak{m},k)$.

Proposição B.6. Sejam R um anel noetheriano e I um ideal de R. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então $\operatorname{grade}(I,M) = \inf\{\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}$.

Demonstração. No caso em que $\operatorname{grade}(I,M) = \infty$, isto é, quando $M = IM$, então, pelo Lema de Nakayama, é fácil ver que $M_\mathfrak{p} = 0$, para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$. Ou seja, que $\operatorname{depth}(M_\mathfrak{p}) = \infty$, para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$. Assim, temos a igualdade desejada. Por outro lado, se $IM \neq M$, então, usando o Corolário B.1, é fácil ver que

$$\operatorname{grade}(I,M) \leq \operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}), \tag{B.1}$$

para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$. Além disso, se $\mathbf{x}$ é uma M-sequência maximal em I, então, por definição, temos que $I \subseteq \operatorname{ZD}(M/\mathbf{x}M)$. Assim, $I \subseteq \mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/\mathbf{x}M)$ (ver A.1). Como $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{p}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{p}})$, então $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ consiste de divisores de zero de $M_{\mathfrak{p}}/\mathbf{x}M_{\mathfrak{p}}$ e $\mathbf{x}$ é uma $M_{\mathfrak{p}}$-sequência maximal, ou seja $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{grade}(I,M)$. Assim, combinando a igualdade anterior e a desigualdade B.1 obtemos o resultado. □

Proposição B.7. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano e $M \neq 0$ é um R-módulo finitamente gerado, então $\operatorname{depth} M \leq \dim R/\mathfrak{p}$, para todo $p \in \operatorname{Ass} M$.

Demonstração. Vamos provar por indução em $\operatorname{depth} M$. No caso em que $\operatorname{depth} M = 0$ não há o que provarmos. Se $\operatorname{depth} M > 0$, então existe $x \in \mathfrak{m}$ que é M-regular. Fixado $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, consideremos $z \in M$ tal que Rz é maximal dentre os submódulos cíclicos de M anulados por $\mathfrak{p}$. Neste caso, usando esta condição de maximalidade, é fácil ver que $z \notin xM$. Logo $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{ZD}(M/xM)$ e, pelo teoremas A.1 e A.2, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M/xM)$. Como $x \notin \mathfrak{p} = \operatorname{ann}(m)$, temos que $p \notin \operatorname{Supp}(M/xM)$, pois

$$\operatorname{Supp}(M/xM) = V(\operatorname{Ann}(M/xM)) \subseteq V(x),$$

pelo Lema A.2. Por fim, note que como $\operatorname{Ass}(M/xM) \subseteq \operatorname{Supp}(M/xM)$ (Ver A.4), então temos que $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}(M/xM)$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ e $\dim(R/\mathfrak{q}) < \dim(R/\mathfrak{p})$. Assim, usando indução e a Proposição B.5, obtemos a desigualdade:

$$\dim(R/\mathfrak{p}) > \dim(R/\mathfrak{q}) \geq \operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth}(M) - 1.$$

Logo, $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq \operatorname{depth}(M)$. □

Corolário B.2. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local noetheriano e $M \neq 0$ é um R-módulo finitamente gerado, então $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$.

Corolário B.3. Se R é um anel noetheriano e I é um ideal de R, então $\operatorname{grade}(I,R) \leq \operatorname{ht}(I)$.

Demonstração. Como $\operatorname{ht}(I) = \inf\{\dim(R_{\mathfrak{p}}) : \mathfrak{p} \in V(I)\}$, então esta proposição segue facilmente combinando a Proposição B.6 e o Corolário acima. □

Definição B.6. Sejam R um anel noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo finitamente gerado. O **grau** de M é definido por $\operatorname{grade}(M) = \min\{i : \operatorname{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\}$.

O próximo teorema nos garante uma relação entre as noções de profundidade e dimensão projetiva.

Teorema B.2 (Fórmula de Auslander-Buchsbaum)**.** Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado não nulo. Se $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$, então

$$\mathrm{pd}_R(M) + \mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(R).$$

Demonstração. Ver Bruns e Herzog (1998, p. 17). □

B.2 Anéis e módulos Cohen-Macaulay

Definição B.7. Seja R um anel local noetheriano. Um R-módulo finitamente gerado não nulo M é um **módulo Cohen-Macaulay** se $\mathrm{depth}(M) = \dim(M)$. Além disso, se o anel R é um R-módulo Cohen-Macaulay, isto é, $\mathrm{depth}(R) = \dim(R)$, então R é chamado um **anel Cohen-Macaulay**.

Lema B.1. Se R é um anel noetheriano e $M \neq 0$ é um R-módulo finitamente gerado, então:

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(M/IM)} = \sqrt{I + \mathrm{Ann}(M)}.$$

Demonstração. Temos que:

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(M/IM)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathrm{Ann}(M/IM))} \mathfrak{p} \quad \text{e} \quad \sqrt{I + \mathrm{Ann}(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I+\mathrm{Ann}(M))} \mathfrak{p}.$$

Logo, é suficiente verificar que $V(\mathrm{Ann}(M/IM)) = V(I + \mathrm{Ann}(M))$. Como

$$I + \mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathrm{Ann}(M/IM),$$

então $V(I + \mathrm{Ann}(M)) \subseteq V(\mathrm{Ann}(M/IM))$. Além disso, se $\mathfrak{p} \in V(I + \mathrm{Ann}(M))$, então $\mathfrak{p} \in V(I)$ e $\mathfrak{p} \in V(\mathrm{Ann}(M)) = \mathrm{Supp}(M)$. Assim, combinando o Lema de Nakayama e a propriedade $M_\mathfrak{p} \neq 0$, temos que $M_\mathfrak{p} \neq I_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p}$. Ou seja, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M/IM) = V(\mathrm{Ann}(M/IM))$. Assim, obtemos a inclusão contrária $V(I + \mathrm{Ann}(M)) \subseteq V(\mathrm{Ann}(M/IM))$. □

Teorema B.3. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano e $M \neq 0$ um R-módulo Cohen-Macaulay. Então:

i) $\dim(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}(M)$, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.

ii) $\mathrm{grade}(I,M) = \dim(M) - \dim(M/IM)$, para todo ideal $I \subseteq \mathfrak{m}$.

iii) $\mathbf{x} = x_1,\dots,x_r$ é uma M-sequência se e somente se $\dim(M/\mathbf{x}M) = \dim(M) - r$.

Demonstração. Para verificarmos o item i), note que $\mathrm{depth}\, M \leq \dim R/\mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$, pela Proposição B.7. Além disso, por definição, temos que $\dim R/\mathfrak{p} \leq \dim M = \mathrm{depth}\, M$, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$, pois $\mathrm{Ass}\, M \subseteq \mathrm{Supp}\, M$. Vamos provar o item ii) por indução em $\mathrm{grade}(I,M)$. No caso em que $\mathrm{grade}(I,M) = 0$, combinando os teoremas A.2 e A.1, temos que $I \subseteq \mathfrak{p}$, para algum

$\mathfrak{p} \in Ass(M)$. Como $\operatorname{Supp}(M/IM) \subseteq \operatorname{Supp}(M)$, então $\dim(M/IM) \leq \dim(M)$. Além disso, como M é Cohen-Macaulay, pelo item i), temos que $\dim(M) = \dim(R/\mathfrak{p})$. Finalmente, notando que $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}(M))$, temos que $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ e consequentemente $I + \operatorname{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}$. Assim, pelo Lema B.1, temos que:

$$\sqrt{\operatorname{Ann}(M/IM)} = \sqrt{I + \operatorname{Ann}(M)} \subseteq \mathfrak{p}$$

e $\dim(M) \leq \dim(M/IM)$, verificando o caso em que $\operatorname{grade}(I,M) = 0$. Se $\operatorname{grade}(I,M) > 0$, então existe $x \in I$ um elemento M-regular. Assim, basta aplicar a hipótese de indução no R-módulo M/xM para obter o resultado desejado, tendo vista que:

$$\operatorname{grade}(I, M/xM) = \operatorname{grade}(I,M) - 1, \quad \dim(M/xM) = \dim(M) - 1,$$
$$\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth}(M) - 1.$$

O item iii) segue facilmente do item ii). □

Proposição B.8. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay. Se $x_1, \ldots, x_i \in \mathfrak{m}$ e temos $h((x_1, \ldots, x_i)) = i$, então $x_1, \ldots, x_i$ é uma sequência regular.

Demonstração. Inicialmente, vamos estender $x_1, \ldots, x_i$ a um sistema de parâmetros de R. No caso em que $i = \dim(R)$ não há o que fazermos. Caso contrário, basta tomarmos x_{i+1} que não esteja em nenhum ideal primo minimal de $(x_1, \ldots, x_i)$ e assim sucessivamente até x_d, onde $d = \dim(R)$. Neste caso, temos que $i + 1 \leq \operatorname{ht}(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1})$, por construção e

$$\operatorname{ht}(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}) \leq i + 1,$$

pelo Teorema A.3. Logo, temos a igualdade $\operatorname{ht}(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}) = i + 1$ e sucessivamente garantimos que $\operatorname{ht}(x_1, \ldots, x_d) = d$. Por fim, vejamos que $x_1, \ldots, x_d$ é uma sequência regular. Por contradição, vamos mostrar que x_1 é um elemento regular. De fato, se x_1 não fosse um elemento regular, então, pelo Teorema A.1, temos que $x_1 \in \mathfrak{p}$, para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)$. Neste caso, $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$ é um sistema de parâmetros em $R/\mathfrak{p}$. No entanto, pelo Teorema B.3, temos que $d = \dim(R) = \dim(R/\mathfrak{p})$, o que causa uma contradição com o Teorema A.3, tendo vista o comentário que fizemos antes sobre a sequência $\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$. Logo, x_1 é um elemento regular. Por fim, recordemos que

$$\operatorname{depth}(R/(x_1)) = \operatorname{depth}(R) - 1 \text{ e } \dim(R/(x_1)) = \dim(R) - 1 \text{ (Ver B.5 e B.3)}$$

e assim o anel quociente $R/(x_1)$ é Cohen-Macaulay. Logo, repetindo o argumento que fizemos antes, garantimos que a sequência $x_1, \ldots, x_d$ é regular e consequentemente a sequência $x_1, \ldots, x_i$ é regular. □

Corolário B.4. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay. Então, para todo ideal I de R, temos que:

i) $\operatorname{ht}(I) = \operatorname{grade}(I, R)$.

ii) $\mathrm{ht}(I)+\dim(R/I)=\dim(R)$.

Demonstração. Em geral, sabemos que $\mathrm{grade}(I,R)\leq \mathrm{ht}(I)$, pela Proposição B.3. Além disso, se I é um ideal de R tal que $\mathrm{ht}(I)=s$, então existem $x_1,\dots,x_s\in I$ tais que $\mathrm{ht}(x_1,\dots,x_s)=s$. Portanto, pela proposição anterior, a sequência $x_1,\dots,x_s$ é regular e além disso

$$\mathrm{grade}(I,R)\geq s=\mathrm{ht(I)},$$

verificando o item i). Por fim, o item ii) segue facilmente de i) e do Teorema B.3. □

Proposição B.9. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local Cohen-Macaulay d-dimensional e I um ideal de R tal que $\mathrm{ht}(I)=h$. Dado um sistema de parâmetros $\overline{y_1},\dots,\overline{y_{d-h}}$ em R/I, então existem $y_1,\dots,y_{d-h}\in R$ que formam uma sequência regular em R.

Demonstração. Como R é Cohen-Macaulay, pela Proposição B.8, é suficiente mortrarmos que existem representantes $t_1,\dots,t_{d-h}$ tais que $\mathrm{ht}(t_1,\dots,t_{d-h})=d-h$. Portanto, vamos encontrar $t_1,\dots,t_{d-h}\in R$ tais que $\mathrm{ht}(t_1,\dots,t_i)=i$, para todo $i=1,\dots,d-h$. Inicialmente, consideremos $z_1,\dots,z_{d-h}\in R$ tais que $\overline{z_i}=\overline{y_i}$, para todo $i=1,\dots,d-h$. Como

$$(z_1)+I\nsubseteq\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p},$$

então, pelo Teorema A.2 (Prime Avoidance), existe $r\in I$ tal que $z_1+r\notin\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}$. Logo, fixando $t_1=z_1+r$, pelo Teorema A.3, temos que $\mathrm{ht}(y_1)=1$. Além disso $\overline{t_1}=\overline{y_1}$. Agora, suponhamos $1<i<d-h$ e que $t_1,\dots,t_i$ sejam tais que $\mathrm{ht}(t_1,\dots,t_i)=i$ e $\overline{t_j}=\overline{y_j}$, para todo $j=1,\dots,i$. A ideia para prosseguirmos consistem em encontrarmos $t_{i+1}\in x_{i+1}+I$ tal que $t_{i+1}\notin\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(t_1,\dots,t_i)}\mathfrak{p}$. Verificando que:

$$(z_{i+1})+I\nsubseteq\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(t_1,\dots,t_i)}\mathfrak{p},$$

podemos repetir o argumento que usamos antes. Por contradição, suponhamos que $(z_{i+1})+I\subseteq\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(t_1,\dots,t_i)}\mathfrak{p}$. Portanto, pelo Teorema A.2, existe um ideal primo $\mathfrak{q}\in\mathrm{Min}(t_1,\dots,t_i)$ tal que $(z_{i+1})+I\subseteq\mathfrak{q}$. Como $\mathrm{ht}(t_1,\dots,t_i)=i$, então $\mathrm{ht}(\mathfrak{q})=i$ e, pelo Corolário B.4 temos que $\dim(R/Q)=d-i$. Por fim, note que, como $J=I+(t_1,\dots,t_i,z_{i+1})\subseteq\mathfrak{q}$, então $R/\mathfrak{q}$ é imagem homomorfa do anel quociente R/J. Sendo assim, é fácil ver que:

$$d-i=\dim(R/\mathfrak{q})\leq\dim(R/J)=d-h-(i+1)<d-i,$$

causando uma contradição. Logo, $(z_{i+1})+I\nsubseteq\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(t_1,\dots,t_i)}\mathfrak{p}$ e podemos repetir o argumento inicial para construir a sequência $t_1,\dots,t_{d-h}$ com as propriedades do enunciado. □

B.3 Anéis de Gorenstein

Definição B.8. Um anel local noetheriano $(R, \mathfrak{m}, k)$ é de **Gorenstein** se satisfaz:

i) R é Cohen-Macaulay.

ii) Existe um sistema de parâmetros, digamos $x_1, \ldots, x_d$, tal que o ideal $(x_1, \ldots, x_d)$ é irredutível. Isto é, se I e J são ideais de R tais que $I \neq (x_1, \ldots, x_d)$ e $J \neq (x_1, \ldots, x_d)$, então $I \cap J \neq (x_1, \ldots, x_d)$.

Observação B.3. Quando desejamos estudar critérios para que um ideal $(x_1, \ldots, x_d)$, gerado por um sistema de parâmetros, seja irredutível, podemos nos concentar no caso 0-dimensional, pois $(x_1, \ldots, x_d)$ é irredutível em R se e somente se (0) é irredutível no anel 0-dimensional $R/(x_1, \ldots, x_d)$.

Definição B.9. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local. O **Socle** de R é o k-espaço vetorial:

$$\mathrm{Soc}(R) = \{x \in R : x\mathfrak{m} = 0\}.$$

Definição B.10. Seja $N \subseteq M$ um submódulo do R-módulo. Então, M é dito ser essencial sobre N se todo submódulo não nulo $K \subseteq M$ tem interseção não nula com N.

Lema B.2. Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local noetheriano 0-dimensional, então R é essencial sobre $\mathrm{Soc}(R)$.

Demonstração. Seja $I \subseteq R$ um ideal qualquer e consideremos n um inteiro não negativo maximal para a propriedade $\mathfrak{m}^n I \neq 0$. Sendo assim, temos que:

$$\mathfrak{m}^n I \subseteq (0 : \mathfrak{m}) \cap I.$$

Logo, $\mathrm{Soc}(R) \cap I \neq (0)$ e R é essencial sobre $\mathrm{Soc}(R)$. □

Proposição B.10. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano 0-dimensional. Então, (0) é irredutível (isto é, R é de Gorenstein) se e somente se $\dim_k(\mathrm{Soc}(R)) = 1$.

Demonstração. Assumindo que $\dim_k(\mathrm{Soc}(R)) = 1$, consideremos $x \in \mathrm{Soc}(R)$ um elemento básico. Supondo que I e J sejam dois ideais de R tais que $I \cap J = (0)$, então é fácil ver que $I = (0)$ ou $J = (0)$, pois caso contrário, como R é essencial sobre $\mathrm{Soc}(R)$ teriamos que $0 \neq x \in I \cap J$. Reciprocamente, por contradição, assuma que (0) é irredutível e que $\dim_k(\mathrm{Soc}(R)) \geq 2$. Neste caso, existem $x, y \in \mathrm{Soc}(R)$ linearmente independentes sobre k. Assim, é fácil ver que $(x) \cap (y) = (0)$, contradizendo a irredutibilidade de (0). Logo, $\dim_k(\mathrm{Soc}(R)) = 1$. □

B.4 Anéis regulares

Definição B.11. Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local noetheriano tal que $\dim(R) = d$. Um **sistema de parâmetros** de R é uma sequência de elementos $x_1,\ldots,x_d \in R$ tais que $\sqrt{(x_1,\ldots,x_d)} = \mathfrak{m}$.

Observação B.4. Se $(R,\mathfrak{m})$ é uma anel local noetheriano e $x_1,\ldots,x_n$ é um sistema de parâmetros de R, então $(x_1,\ldots,x_n)$ é $\mathfrak{m}$-primário.

Definição B.12. Um anel local noetheriano $(R,\mathfrak{m})$ é **regular** se admite um sistema de parâmetros que gera $\mathfrak{m}$. Além disso, um tal sistema de parâmetros é chamado um **sistema de parâmetros regular**.

Em geral, nas condições da definição acima, temos que $\mu(\mathfrak{m}) \geq \dim(R)$. Além disso, uma sequência de geradores de $\mathfrak{m}$ tem $\dim(R)$ elementos exatamente quando é um sistema de parâmetros. Sendo assim, podemos caracterizar a regularidade de um anel local noetheriano $(R,\mathfrak{m})$ através da condição $\mu(\mathfrak{m}) = \dim(R)$.

Proposição B.11. Se $(R,\mathfrak{m})$ é um anel local regular, então R é um domínio de integridade.

Demonstração. Vamos provar este resultado por indução em $\dim(R)$. No caso em que $\dim(R) = 0$, é fácil ver que R é um corpo e o resultado segue imediatamente. Além disso, se $\dim(R) > 0$ e $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$ são os primos minimais de R, então, pela Proposição B.3, existe $x \in \mathfrak{m}$ que não pertence a nenhum dos ideais $\mathfrak{m}^2,\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$. Assim, pela Proposição A.2, x é parte de um sistema minimal de geradores de $\mathfrak{m}$ e consequentemente de um sistema de parâmetros. Logo, o anel $R/(x)$ é regular. Usando indução, como $\dim(R/(x)) < \dim(R)$, podemos considerar que o anel quociente $R/(x)$ é um domínio. Assim, (x) é um ideal primo e consequentemente contém um ideal primo minimal, digamos $\mathfrak{p}_j$. Neste caso, como $\mathfrak{p}_j$ é primo e $x \notin \mathfrak{p}_j$, temos que $\mathfrak{p}_j = (x)\mathfrak{p}_j$. Assim, segue do Lema de Nakayama que $\mathfrak{p}_\mathrm{j} = 0$ e R é um domínio de integridade. □

Proposição B.12. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano e $x_1,\ldots,x_n$ um sistema minimal de geradores de $\mathfrak{m}$. Se R é regular, então $x_1,\ldots,x_n$ é uma sequência regular.

Demonstração. Como R é um anel regular e $x_1,\ldots,x_n$ é um sistema minimal de geradores de $\mathfrak{m}$, então tais elementos formam um sistema de parâmetros regular. Logo, o anel $R/(x_1,\ldots,x_i)$ é regular, para cada i. Isto é, x_{i+1} é um elemento $R/(x_1,\ldots,x_i)$-regular. Logo, a sequência $x_1,\ldots,x_n$ é regular. □

Note que, como consequência da proposição acima, todo sistema de parâmetros regular é uma sequência regular. O teorema que enunciaremos a seguir nos fornece uma importante caracterização dos anéis locais regulares.

Teorema B.4 (Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre)**.** Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel local noetheriano. Então, são equivalentes:

i) R é regular.

ii) $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$, para todo R-módulo finitamente gerado M.

iii) $\mathrm{pd}_R(k) < \infty$.

Demonstração. Ver Bruns e Herzog (1998, p. 66). □

Proposição B.13. Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local noetheriano $0 \neq x \in \mathfrak{m}$. Então, $R/(x)$ é um anel local regular se e somente se $x \notin \mathfrak{m}^2$.

Demonstração. Como R é um anel local regular, então R é um domínio, pela Prosposição B.11. Logo, temos que:

$$\dim(R/x) = \dim(R) - 1.$$

Assim, R/x é um anel regular se e somente se

$$\mu(\mathfrak{m}/x) = \dim R - 1.$$

Usando a Proposição A.2, é fácil ver que

$$\mu(\mathfrak{m}/x) = \begin{cases} \mu(\mathfrak{m}), & \text{se } x \in \mathfrak{m}^2, \\ \mu(\mathfrak{m}) - 1, & \text{se } x \notin \mathfrak{m}^2, \end{cases}$$

onde $\mu(\mathfrak{m}) = \dim(R)$. Assim, segue a equivalência desejada. □

Definição B.13. Um anel local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ é um anel **interseção completa** se o seu completamento $\mathfrak{m}$-ádico $\widehat{R}$ é isomorfo a um anel quociente S/I, onde S é um anel local regular e I é um ideal de S gerado por uma S-sequência.

Observação B.5. Quando consideramos $(R, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano, a sequência de implicações abaixo é muito útil.

$$R \text{ é regular } \Rightarrow R \text{ é interseção completa } \Rightarrow R \text{ é de Gorenstein } \Rightarrow R \text{ é Cohen-Macaulay.}$$

Mais destalhes sobre estas implicações podem ser encontrados em Bruns e Herzog (1998).

APÊNDICE

C

EXEMPLOS COMPUTACIONAIS

Código-fonte 1 – Exemplo 4.2

```
ring R=0,(a,b,c,d,e),ds;
ideal I=ab,bc,cd,de,ea;
resolution rs=mres(I,0);
rs;
==> R <-- R^5 <-- R^5 <-- R
    0       1       2       3
```

Código-fonte 2 – Exemplo 4.3

```
ring R=0,(x,y,z),ds;
ideal I=x3,y3,z3;
resolution rs=mres(I,0);
rs;
==> R <-- R^3 <-- R^3 <-- R
    0       1       2       3
```

Código-fonte 3 – Exemplos 4.4 e 5.2

```
ring R=0,(a,b,c,d,e),ds;
ideal I=ab,bc,cd,de,ea;
dim(I);
==> // ** I is no standard basis
    2
qring S=std(I);
ideal m=maxideal(1);
```

```
resolution rs=mres(m,2);
rs;
==> S <-- S^5 <-- S^15
    0      1       2
```

Código-fonte 4 – Exemplo 4.5

```
ring R=0,(x,y,z),ds;
ideal I=x2,y2,z2,xy;
resolution rs=mres(I,0);
rs;
==> R^1 <-- R^4 <-- R^5 <-- R^2
     0       1       2       3
dim(I);
==> // ** I is no standard basis
    0
```

Código-fonte 5 – Exemplo 4.6

```
LIB "homlog.lib";
ring R=0,(a,b,c,d,e),ds;
module M=ab,bc,cd,de,ea;
isCM(M);
==> 1 (Este valor nos diz que o quociente de R por I é C-M)
```

ICMC USP
SÃO CARLOS