

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

A vida em setas: uma introdução à teoria de categorias aplicada

Violeta Martins de Freitas

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Violeta Martins de Freitas

A vida em setas: uma introdução à teoria de categorias aplicada

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

USP – São Carlos
Agosto de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M386v Martins de Freitas, Violeta
A vida em setas: uma introdução a teoria de
categorias aplicada / Violeta Martins de Freitas;
orientador Carlos Henrique Grossi Ferreira. -- São
Carlos, 2019.
119 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Teoria de Categorias Aplicada. 2. Teoria de
Categorias. 3. Álgebra Linear. 4. Teoria de
Sistemas. 5. Teoria de Controle. I. Grossi
Ferreira, Carlos Henrique, orient. II. Título.

Violeta Martins de Freitas

Life in arrows: an introduction to applied category theory

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

USP – São Carlos
August 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda a flora e fauna de São Carlos. Agradeço aos labradores de fogo, aos geminianos cafeinados, aos ursinhos Pooh nihilistas, às virginianas de lua, aos arianos apaixonados, aos escorpianos gamers buscadores, aos comunistas sensíveis e inquietos, aos sapos pretos eternamente crianças, aos cavalheiros russos psicodélicos, aos piscianos terrâneos, aos cancerianos baixistas, às sagitarianas dos papagaios e às luas de rosas. Agradeço ao ar e à lua. Agradeço a tudo.

*“O ar demanda a destruição
do próprio palácio que constrói.”
(Gui Araujo)*

RESUMO

DE FREITAS, V. **A vida em setas: uma introdução à teoria de categorias aplicada**. 2018. 119 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho é uma introdução à área de Teoria de Categorias Aplicada. Após um breve capítulo introdutório à Teoria de Categorias, direcionado a um público geral, discutimos categorias monoidais e seu cálculo gráfico, ferramentas imprescindíveis para esta nascente área. Enfim, apresentamos duas aplicações, uma à Álgebra Linear e outra à Teoria de Sistemas.

Palavras-chave: Teoria de Categorias Aplicada, Teoria de Categorias, Álgebra Linear, Teoria de Sistemas.

ABSTRACT

DE FREITAS, V. **Life in arrows: an introduction to applied category theory**. 2018. 119 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This work is an introduction to the field of Applied Category Theory. Following a brief introductory chapter on Category Theory, aimed at a general audience, we discuss monoidal categories and their graphic calculus which are indispensable tools to this nascent field. Finally, we present two applications, one to Linear Algebra and another to Systems Theory.

Keywords: Applied Category Theory, Category Theory, Linear Algebra, Systems Theory.

SUMÁRIO

Introdução	16	
1	TEORIA DE CATEGORIAS	17
1.1	Categorias e suas manifestações na natureza	17
1.2	Construções Categóricas	21
1.2.1	<i>Categorias conversando entre si: Funtores e Transformações Naturais</i>	22
1.2.2	<i>Construções Universais e (Co)Limites de Diagramas</i>	28
2	CATEGORIAS MONOIDAIS	37
2.1	Categorias Monoidais e Diagramas de Barbante	38
2.2	Aplicação: Álgebra Linear com Barbante	48
2.2.1	<i>Props, Aeis e Tomadas</i>	48
2.2.2	<i>Fluxo de Sinais e uma Apresentação para $\text{Mat}(\mathbb{R})$</i>	56
2.2.3	<i>Feedback e Relações</i>	63
2.2.4	<i>Brincando com Diagramas</i>	67
3	TEORIA DE SISTEMAS	75
3.1	Approach Comportamental em Teoria de Sistemas	75
3.2	Comportamentos LTI	80
3.2.1	<i>Cospans e Corelações</i>	81
3.2.2	<i>A Prop de Comportamentos LTI</i>	104
REFERÊNCIAS	119	

INTRODUÇÃO

A Teoria de Categorias é uma área que, apesar de ter sido iniciada nos anos sessenta, está se tornando uma fonte inesgotável de inovações e se encontra, sem dúvida, na vanguarda da matemática. Suas ideias estão sendo disseminadas e desenvolvidas por matemáticos de todo o mundo, e um grupo relevante destes começou a se interessar por aplicações destas ferramentas em problemas fora da matemática. Centradas ao redor de algumas filosofias e técnicas em comum, existem aplicações em biologia (estudos de biodiversidade, ecologia), física (mecânica quântica categórica, teoria quântica de campos topológica, computação quântica), probabilidade (cadeias de Markov, redes bayesianas), computação (processamento de linguagem natural, machine learning), teoria de redes, e por aí vai...

Neste texto, começamos no primeiro capítulo introduzindo noções básicas da teoria de categorias (de forma amigável a alunos novos da matemática!). O conteúdo é canônico, mas podemos citar como referência (RIEHL, 2017), que contém (muito bem explicado) tudo que falamos e muito mais. Com a base estabelecida, apresentamos no segundo capítulo duas ferramentas importantes, as categorias monoidais e o cálculo gráfico que vem com elas. Estas categorias e seus desenhos são bastante recorrentes na cena de Teoria de Categorias Aplicada. Ilustramos a utilidade delas com o desenvolvimento de uma teoria gráfica para a Álgebra Linear. O fantástico livro (FONG; SPIVAK, 2019) é nossa principal referência para este capítulo, e é, provavelmente, a melhor introdução a este nascente universo de aplicações de categorias. Usamos no texto os mesmos estilos de diagramas do livro, feitos com código desenvolvido pelo David Spivak e o Patrick Schultz e gentilmente cedido por eles. Já a teoria gráfica de Álgebra Linear está sendo desenvolvida e discutida abertamente pelo Pawel Sobocinski no ótimo e divertido blog dele, em (SOBOCINSKI, 2019). Aqui, vale a pena mencionar também o artigo (BAEZ; STAY, 2010), em que um dos autores é uma das principais figuras desta cena, o John Baez. Neste artigo altamente inspirador, ele introduz as categoria monoidais e segue animadamente mostrando exemplos de categorias monoidais na física, lógica, topologia e computação. Finalmente, terminamos com um exemplo de aplicação no capítulo três, onde nos adentramos ao mundo de Teoria de Sistemas e mostramos como o approach categórico pode dar uma nova perspectiva a esta área. Este capítulo é uma exposição do paper (FONG; SOBOCIŃSKI; RAPISARDA, 2016) de Brendan Fong, Pawel Sobocinski e Paolo Rapisarda.

Além das referências matemáticas, no campo de considerações financeiras e burocráticas, o presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil(CAPES) - Código de Financiamento 001. Sem este apoio fundamental,

esta dissertação não poderia ter acontecido.

A comunidade de pessoas desta área é extremamente motivada e cheia de ideias novas que entendem a matemática como parte de um contexto maior. A nota pessoal do livro (FONG; SPIVAK, 2019), escrita por David Spivak e Brendan Fong, me parece uma perspectiva extremamente relevante para nós matemáticos mantermos em mente. Vamos terminar esta introdução com uma tradução dela.

“Nossas motivações para aplicar teoria de categorias fora da matemática são, talvez inocentemente, fundadas na esperança de que isto pode ajudar a trazer a humanidade junta para resolver grandes problemas. Mas teoria de categorias é uma ferramenta para pensar, e como qualquer ferramenta ela pode ser usada para propósitos que nós nos alinhamos e para os que não.

Nesta nota pessoal, nós pedimos que leitores tentem usar o quê eles aprenderem neste livro para fazer algo que eles chamariam de “bom”, em termos de estarem contribuindo para a sociedade que eles queriam viver. Por exemplo, se você está planejando estudar este material com outros, considere especificamente convidar alguém de uma minoria mal representada - um grupo que é mais representado na sociedade do que em aulas mais avançadas de matemática - para o seu grupo de estudos. Como um outro exemplo, talvez você possa usar o material neste livro para desenvolver software que ajuda pessoas a se relacionar e se alinhar entre si. Qual é a matemática de uma sociedade em bom funcionamento?

O jeito que usamos nossas ferramentas afeta todas as nossas vidas. Nossa sociedade viu os resultados - ambos as maravilhas e o desperdício - resultando de egoísmo desenfreado. Nós ficaríamos honrados se leitores encontrassem jeitos de usar teoria de categorias como uma parte de um esforço para conectar pessoas, criar terreno comum, explorar as interseccionais categorias nas quais a vida, sociedade e ambiente podem ser representadas, e para acabar com a ignorância implicada em limitar nós mesmos a uma única perspectiva ontológica sobre qualquer coisa.

Se você fizer algo do tipo, por favor deixe nós e a comunidade saber sobre.”

TEORIA DE CATEGORIAS

A filosofia central de teoria de categorias é o motto: objetos são uma ilusão, as setas são a única realidade. Ou, colocado menos intensamente: para entender como um sistema funciona, o importante não são seus componentes, mas sim como estes componentes interagem entre si. Nascido após um processo de abstração e formalização da matemática no começo do século XX, o framework categórico permitiu que inúmeras construções e ferramentas matemáticas fossem enxergadas sob uma nova luz, sendo assim clarificadas e unificadas.

1.1 Categorias e suas manifestações na natureza

Uma categoria basicamente consiste de duas coisas: objetos e setas. As setas representam, grosso modo, as maneiras como os objetos se relacionam entre si e consigo mesmos. Pedimos também uma transitividade desta relação: se uma seta relaciona um objeto A a um objeto B , e outra seta relaciona o objeto B a um outro objeto C , vamos postular que existe uma seta (chamada de composição) que relaciona A a C . Todos os conceitos categóricos são necessariamente baseados em setas e suas composições, e o poder categórico está no fato que uma quantidade enorme de construções matemáticas podem ser vistas como casos especiais destes conceitos. Isto ilustra o poder unificador e clarificador da teoria de categorias.

Vamos à definição formal:

Definição 1.1.1 (Categoria). Uma *categoria* C consiste de

- uma classe de *objetos* $\text{Ob}(C)$
- para quaisquer dois objetos $A, B \in \text{Ob}(C)$, uma classe de *setas* $\text{Hom}(A, B)$. Diremos que estas setas começam em A e terminam em B , e também iremos chamar setas de *morfismos*

- uma operação com setas, onde dadas duas setas $f \in \text{Hom}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}(B, C)$, existe uma terceira seta $f \circ g \in \text{Hom}(A, C)$, dita a *composição* de f com g . Esta operação é associativa e admite unidade, ou seja, para quaisquer setas f, g, h (para as quais faz sentido compor: f termina onde g começa e g termina onde h começa), temos

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

e existe, para cada objeto A , uma seta 1_A tal que

$$1_A \circ f = f$$

$$g \circ 1_A = g$$

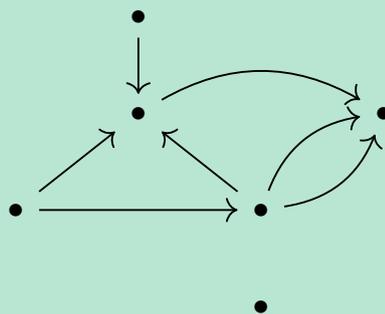
para qualquer seta f começando em A , e qualquer seta g terminando em A .

(Note que usamos classes ao invés de conjuntos na definição. Quando objetos e morfismos formam um conjunto, a categoria é dita *pequena*. Quando $\text{Hom}(A, B)$ é um conjunto para todo par de objetos A, B , a categoria é *localmente pequena*.)

Normalmente, denotamos $A \in C$ quando $A \in \text{Ob}(C)$, e $f : A \rightarrow B$ quando $f \in \text{Hom}(A, B)$.

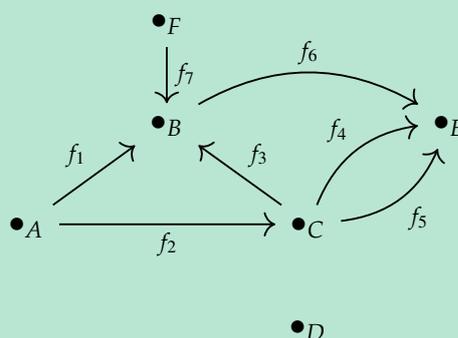
Vamos começar os exemplos com uma intuição visual:

Exemplo 1.1.1 (Categorias Livres).



Podemos visualizar uma categoria como vários pontos ligados entre si por setas. No caso onde a quantidade de objetos e setas é finita, podemos realizar este desenho, como na imagem acima. Pensando assim, então, qualquer desenho de pontos ligados por setas, conhecidos popularmente como *grafos direcionados*, pode dar origem a uma categoria. Decretamos que os objetos são os pontos, e qualquer caminho possível entre dois pontos é uma seta. A composição de setas é dada por concatenação de caminhos (faça um caminho e, em seguida, faça o outro), e a seta identidade em um ponto c é o caminho estacionário (simplesmente fique parado no c). Por exemplo, no

desenho anterior, dando nomes aos pontos e às setas,



temos nossos objetos

$$\text{Objetos} = \{A, B, C, D, E, F\}$$

e nossas setas

$$\begin{aligned} \text{Setas} = \{ & 1_A, 1_B, 1_C, 1_D, 1_E, 1_F, \\ & f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, \\ & f_1 \circ f_6, f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_6, f_2 \circ f_4, f_2 \circ f_5, f_3 \circ f_6, f_7 \circ f_6 \} \end{aligned}$$

A primeira linha contém os caminhos estacionários, a segunda as setas, e a terceira todos os caminhos compostos por concatenações possíveis de setas. Neste caso, só existem finitos destes, mas nem sempre isto vai acontecer.

Chamamos esta categoria de *categoria livre* gerada por um grafo direcionado. Ela é “livre” no sentido de ser “livre de equações”: nenhuma equação entre setas existe fora a trivial, ou seja, dois caminhos só são iguais se eles são exatamente o mesmo caminho. Podemos obter novas categorias forçando igualdades entre caminhos, chamadas, apropriadamente, de “equações de caminho”. Uma categoria dada por um grafo direcionado e equações de caminho é chamada de *categoria finitamente apresentada*. Vamos estrear nosso primeiro diagrama comutativo do texto com um exemplo disto:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \\ f \uparrow & & \uparrow i \\ \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet \end{array}$$

$$f \circ g = h \circ i$$

A categoria livre gerada pelo quadrado, ignorando a equação de caminho, possui 4 objetos e 10 setas: as 4 setas identidades para cada ponto e $\{f, g, h, i, f \circ g, h \circ i\}$. Já a categoria com a equação de caminho possui os mesmos objetos, mas apenas 9 setas: as identidades e $\{f, g, h, i, f \circ g\}$, pois agora $h \circ i = f \circ g$.

Usaremos desenhos como estes grafos durante todo o texto, às vezes usando o nome mais chique de *diagramas*. Os pontos continuam a representar objetos, mas geralmente serão substituídos pelas letras que os nomeiam; e as setas, é claro, serão setas! Mas geralmente não iremos trabalhar na categoria livre gerada pelo diagrama, mas sim em alguma outra categoria. Dizer que o diagrama *comuta* significa dizer que quaisquer caminhos possíveis entre dois objetos representam a mesma seta. Então, no exemplo anterior, o quadrado comuta

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet_B \\
 f \uparrow & & \uparrow i \\
 \bullet_A & \xrightarrow{h} & \bullet
 \end{array}$$

$$f \circ g = h \circ i$$

pois a equação de caminho nos garante exatamente que os dois caminhos de A à B são iguais. Outro exemplo instrutivo para entender a ideia de uma categoria é o seguinte:

Exemplo 1.1.2 (Pré Ordens). Uma pré-ordem em um conjunto X é uma relação binária \leq entre seus elementos que é transitiva, isto é, $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$; e simétrica, $x \leq x$. Uma pré-ordem pode ser vista como uma categoria \mathbf{X} da seguinte forma. Os objetos de \mathbf{X} são os elementos do conjunto X , e postulamos a existência de uma única seta entre dois objetos x e y se e somente se $x \leq y$. A seta identidade é garantida pela simetria da pré-ordem. E para podermos compor uma seta de x para y com uma de y para z , precisamos de uma seta entre x e z . Mas esta seta existe, é aquela garantida pela transitividade da pré-ordem. Temos, então, nossa categoria \mathbf{X} .

A intuição por trás disto é a ideia que em uma pré-ordem, só temos um jeito de “relacionar” dois objetos, que é através da relação \leq . Logo, em nossa categoria \mathbf{X} , só conseguimos relacionar nossos objetos através da única informação de que existe uma seta entre eles ou não. Uma categoria qualquer generaliza uma pré-ordem, permitindo que existam mais setas entre os objetos e, portanto, jeitos mais complicados de relacioná-los entre si.

Vamos agora aos exemplos clássicos.

Exemplo 1.1.3 (toda a matemática).

1. **Set** é a categoria com conjuntos como objetos e funções entre eles como setas.
2. **Rel** é a categoria com conjuntos como e relações entre eles como setas.
3. **Top** é a categoria com espaços topológicos como objetos e funções contínuas como setas.
4. **Grp** é a categoria com grupos como objetos e homomorfismos como setas.

5. **Rng** é a categoria com anéis como objetos e homomorfismos como suas setas.
6. **Vect $_{\mathbb{R}}$** é a categoria com espaços vetoriais sobre \mathbb{R} como objetos e transformações lineares como setas.
7. **Man** é a categoria com variedades suaves como objetos e funções suaves como setas.
8. **Hib** é a categoria com espaços de Hilbert como objetos e transformações lineares contínuas como setas.
9. **Cov(X)** é a categoria com recobrimentos sobre um espaço topológico X como objetos e morfismos de recobrimentos como setas.

A ideia por trás da maioria destes exemplos clássicos é a de que os objetos são conjuntos com alguma estrutura a mais, e as setas são funções que preservam esta estrutura. Mas as nossas setas não precisam ser sempre funções! Em categorias livres, por exemplo, as setas são caminhos; em **Rel**, são relações. A categoria **Rel** será discutida mais profundamente no segundo capítulo, onde veremos que ela possui uma importante estrutura (um produto monoidal).

Em uma categoria cujas setas são funções, veja que a nossa definição de composição *reverte* a ordem de composição das funções como usada na maior parte da matemática. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são funções, a nossa notação $f \circ g : A \rightarrow C$ denota a função $x \mapsto g(f(x))$, a qual é normalmente denotada por $g \circ f$. Isto pode confundir um pouco no começo, mas em teoria de categorias a composição que usamos é muito mais intuitiva. Para facilitar, quando for pensar em uma categoria cujas setas são funções, podemos denotar ações das funções em elementos pela esquerda. Ou seja, em vez de escrever fx ou $f(x)$ para a ação de f em x , escreveríamos xf ou $(x)f$. Assim, a ação de $f \circ g$ em x será $(x)f \circ g = ((x)f)g$.

1.2 Construções Categóricas

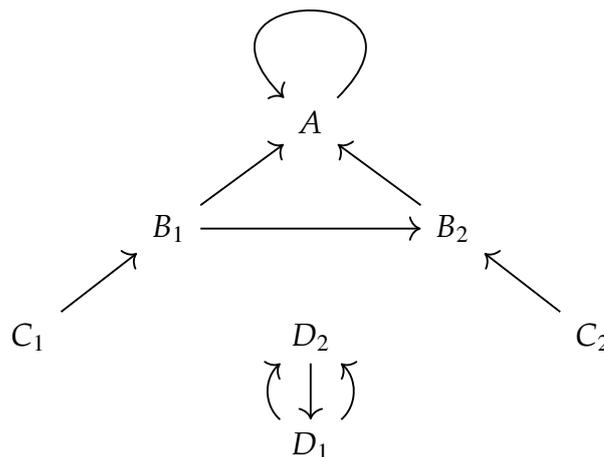
O que podemos fazer com essas categorias, então? Vamos introduzir alguns conceitos que utilizaremos constantemente no texto: funtores e transformações naturais, que são ferramentas para entendermos como categorias conversam entre si; construções universais e limite/colimite, que são ferramentas para, em uma categoria, caracterizarmos objetos importantes puramente em termos de setas.

1.2.1 Categorias conversando entre si: Funtores e Transformações Naturais

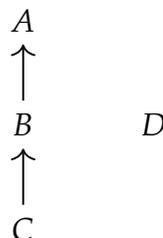
Toda analogia suficientemente boa está ansiando para se tornar um functor.

John Baez

Funtores são jeitos de vermos uma categoria em termos de outra. Um functor permite que informações de setas entre objetos em uma categoria sejam traduzidas para informações sobre setas de outra categoria. Considere a categoria livre gerada por este diagrama (agora com a convenção de que letras denotam objetos):

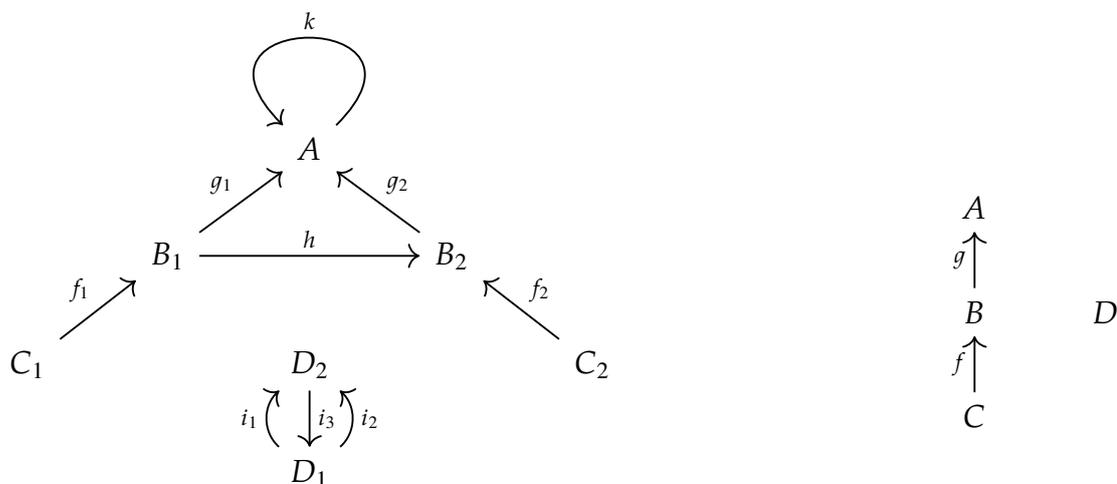


Podemos notar duas propriedades importantes desta categoria: as setas “sobem” dos objetos C_n para o A , e os D_n estão isolados. Isto sugere que esta categoria tem uma relação com esta outra categoria:



Vamos tornar esta relação explícita construindo um mapa da primeira categoria para a segunda. O mapa precisa traduzir informações dos objetos e das setas. Então, vamos associar objetos a objetos, e setas a setas. Associamos, então, o A da primeira categoria ao A da segunda, os B_1 e B_2 ao B , os C_1 e C_2 ao C e os D_1 e D_2 ao D . Já para as setas, associamos as setas de C_n a B_n à seta de C a B , as setas de B_n a A à seta de B a A , e todas as outras setas às setas idênticas.

Dando nome a tudo, temos



<i>Objetos</i>	<i>Setas</i>	
$A \mapsto A$	$f_n \mapsto f$	$1_A \mapsto 1_A$
$B_n \mapsto B$	$g_n \mapsto g$	$1_{B_n} \mapsto 1_B$
$C_n \mapsto C$	$h \mapsto 1_B$	$1_{C_n} \mapsto 1_C$
$D_n \mapsto D$	$k \mapsto 1_A$	$1_{D_n} \mapsto 1_D$
	$i_n \mapsto 1_D$	

Isto que acabamos de construir é um *functor* entre duas categorias. Como estamos trabalhando com categorias livres, só precisamos definir a imagem das setas geradoras, ou seja, as desenhadas. As outras setas, que são caminhos compostos, têm a sua imagem automaticamente definida como sendo as imagens compostas das setas. Por exemplo, o caminho $f_1 \circ h \circ g_2$ de C_1 a A é associado ao caminho $f \circ 1_B \circ g = f \circ g$ de C a A . Já no caso geral de qualquer categoria, precisamos explicitar a imagem de todas as setas, e precisamos garantir que a estrutura de composição e identidade é respeitada pela associação. Isto nos leva a nossa definição formal de functor:

Definição 1.2.1 (Functor). Um *functor* $F : C \rightarrow D$ entre duas categorias C e D é uma regra que associa a cada objeto $A \in C$ um objeto $F(A) \in D$ e a cada seta $f : A \rightarrow B$ em C uma seta $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ em D . Esta associação deve respeitar composições

$$F(f \circ g) = Ff \circ Fg$$

e mandar unidade em unidade

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Podemos também definir funtores que *revertem* a orientação das setas, ou seja, que mapeiam uma seta $A \rightarrow B$ em uma seta $B \rightarrow A$ e satisfazem $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$. Estes funtores são ditos *contravariantes*, e os que mantêm a orientação das setas são chamados de *covariantes*. Em todo o nosso texto, funtores serão sempre covariantes.

A matemática está cheia de situações onde a functorialidade de alguma associação entre objetos matemáticos permitiu a descoberta de inúmeros teoremas. Vamos dar alguns exemplos clássicos:

Exemplo 1.2.1 (Funtores).

1. Os melhores invariantes de objetos matemáticos tendem a ser funtores, desde os mais complicados até os mais simples. Por exemplo, a área de um polígono pode ser vista como um funtor! Definimos categoria **Poly** com objetos sendo os polígonos do plano euclidiano e as setas sendo isometrias; e a categoria **Real**, cujos objetos são os números reais e as únicas setas são as setas identidade (uma categoria sem setas não idênticas é dita *discreta*). A função, então, que associa um polígono a sua área define um funtor. O fato de área ser invariante por isometrias é equivalente ao fato da sua ação em setas estar bem definida: o funtor leva uma isometria de P_1 a P_2 em uma seta idêntica 1_r , logo, o funtor deve levar os objetos P_1 e P_2 à mesma área r .
2. Um invariante mais complicado, e que fundou a área de Topologia Algébrica, é o grupo fundamental. A associação de um espaço topológico a seu grupo fundamental é um funtor da categoria **Top*** para **Grp**. (**Top*** é a categoria de espaços topológicos com um ponto fixado, que precisamos para poder definir o grupo fundamental com base neste ponto; as setas são funções contínuas que preservam o ponto fixado).
3. A associação de uma variedade a seu fibrado tangente é um funtor da categoria **Man** para ela mesma. A sua ação em setas é levar uma função suave para a sua derivada, e a afirmação de que o funtor preserva composição é a regra da cadeia. (Você pode impressionar seus amigos na aula de Cálculo 1 comentando que a regra da cadeia nada mais é do que a functorialidade da derivada.)
4. Em teoria de Galois, dada um extensão de corpos $E \subset F$, podemos construir seu grupo de Galois G . E aí, acontece o seguinte: o conjunto dos corpos K que estão entre E e F , isto é, tais que $E \subset K \subset F$, forma uma categoria; e o conjunto de subgrupos de G também. Construimos, então, algo que se chama conexão de Galois, que é uma associação entre os corpos intermediários e os subgrupos de G , formando exatamente um funtor entre estas duas categorias! Este funtor é a ferramenta principal da teoria de Galois, e é o que permite provar inúmeros teoremas importantes algébricos, como a insolubilidade por radicais de equações polinomiais de grau maior ou igual a 5.

Setas entre objetos em uma categoria representam como objetos conversam entre si; funtores são como categorias conversam entre si... Esse raciocínio implora para definirmos **Cat**, a categoria cujos objetos são categorias e setas são funtores (podemos compor funtores como compomos funções normalmente). E como funtores conversam entre si? Através de transformações naturais! Se queremos relacionar dois funtores $F, G : C \rightarrow D$, devemos relacionar as imagens de todos os objetos de C sob F e sob G , ou seja, precisamos, para cada $A \in C$, de uma seta $F(A) \rightarrow G(A)$. Vamos chamar esta associação de α e a seta de $\alpha(A)$. Agora, para qualquer seta $f : A \rightarrow B$ em C , temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha(A)} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha(B)} & G(B) \end{array}$$

Nossa associação α deveria respeitar o mapeamento das setas pelos funtores, então pedimos para este diagrama comutar. Esta é a definição de transformação natural.

Definição 1.2.2 (Transformação Natural). Uma *transformação natural* $\alpha : F \Rightarrow G$ entre dois funtores $F, G : C \rightarrow D$ é uma associação de objetos $A \in C$ para setas $\alpha(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ de D de forma que o seguinte diagrama comuta para toda seta $f : A \rightarrow B$ em C

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha(A)} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha(B)} & G(B) \end{array}$$

Quando todas as setas $\alpha(A)$ de uma transformação natural α são invertíveis, dizemos que α é um *isomorfismo natural*. Vamos discutir mais a noção de isomorfismo após os próximos exemplos.

Exemplo 1.2.2 (Transformações Naturais).

1. Dado um espaço vetorial V , podemos construir seu dual $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\}$. E, dado um mapa linear $T : V \rightarrow W$ podemos construir um mapa $T^* : W^* \rightarrow V^*$ definido por $f \mapsto T \circ f$. Isto define um funtor contravariante da categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ para ela mesma. Podemos aplicar o funtor duas vezes, o que define o funtor $(_)^{**}$ que leva um espaço V ao seu duplo dual V^{**} . Um espaço vetorial de dimensão finita é sempre isomorfo ao seu duplo dual. Com isto, podemos construir uma transformação natural α do funtor identidade I , que leva um espaço vetorial nele mesmo, para o funtor $(_)^{**}$: dado um espaço vetorial V ,

definimos $\alpha(V) : I(V) \rightarrow V^{**}$ como sendo o isomorfismo conhecido de V ao seu duplo dual, que é o mapa de avaliação $v \mapsto e_v$, onde $e_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional que avalia um $f \in V^*$ em v . Como todos os $\alpha(V)$ são invertíveis, esta transformação natural é um isomorfismo natural.

2. Na categoria **Set**, temos o funtor identidade Id e o funtor $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ que leva um conjunto X ao seu conjunto de partes $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$, e uma seta $f : X \rightarrow Y$ na seta $P(f) : P(X) \rightarrow P(Y)$ definida por $A \mapsto f(A)$. Existe uma transformação natural $\alpha : \text{Id} \Rightarrow P$, que leva um conjunto X na seta $f : X \rightarrow P(X)$ definida por $x \mapsto \{x\}$.
3. Em uma categoria com um único objeto A , todas as setas são da forma $A \rightarrow A$, e portanto podemos compor uma seta com qualquer outra. Logo, a coleção de setas admite uma operação associativa e com unidade, o que é uma estrutura algébrica conhecida como *monoide*. Se pedirmos uma restrição a mais, que todas as setas são invertíveis, então a coleção de setas forma um grupo! Reciprocamente, todo grupo dá origem a uma categoria de um único objeto com todas as setas invertíveis: basta, trivialmente, definir uma categoria com um objeto qualquer, e cujas setas são os elementos do grupo com composição dada pela operação do grupo.

Continuando a interpretar conceitos de grupo categoricamente, seja G um grupo e \mathcal{G} a sua categoria de um único objeto. Uma ação de G em um conjunto é simplesmente um funtor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$. O único objeto de \mathcal{G} é mapeado para um conjunto X , e as setas de \mathcal{G} , ou seja, os elementos do grupo, são mapeados para setas *invertíveis* de X em X , ou seja, bijeções de X em X . E mais, o requerimento functorial de preservar composições é exatamente o requerimento de que a operação de grupo é levada em composição das funções, como é pedido na definição de ação. Para descrever ações que preservam mais estrutura (como por exemplo, representações) basta substituir **Set** pela categoria desejada (no caso de representações, substituímos por **Vect**).

O que seria, então, uma transformação natural entre dois funtores $F_1, F_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$? Ela deve mapear o único objeto de \mathcal{G} em uma seta $f : X_1 \rightarrow X_2$, onde X_1 e X_2 são os conjuntos em que G está agindo (ou seja, as imagens do único objeto de \mathcal{G} por F_1 e F_2). E devemos ter que, para todo $g, h \in G$, este diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ F_1(g) \downarrow & & \downarrow F_2(h) \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

Mas isto é exatamente pedir que f é G -equivariante! Uma transformação natural entre duas ações de G , então, é apenas uma função G -equivariante.

Em qualquer categoria, temos a noção de isomorfismo entre objetos: dois objetos A e B são ditos *isomorfos* quando existem setas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ tais que $f \circ g = 1_A$ e $g \circ f = 1_B$. Estas setas são ditas *isomorfismos*, e isto generaliza a noção usual de isomorfismo em qualquer contexto matemático, como em todos os exemplos em 1.1.3. Com a ferramenta de funtores, podemos generalizar esta ideia para categorias! Duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} são isomorfas quando existem funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que suas composições (em ambas as direções) resultam na identidade. No item 4 do exemplo 1.2.1, o funtor é invertível e portanto um isomorfismo de categorias! Esta é a propriedade principal de tal funtor, e é isto o que diz o Teorema Fundamental de Teoria de Galois.

No entanto, na maior parte dos casos, esta noção de isomorfismo de categorias é rígida demais. Por exemplo, considere a categoria $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$, que iremos estudar mais detalhadamente no próximo capítulo. Seus objetos são os números naturais \mathbb{N} e uma seta de um número n para m é uma matriz $n \times m$. A composição é dada por multiplicação de matrizes. É simples interpretar esta categoria: os objetos são as possíveis dimensões de um espaço vetorial real de dimensão finita com base escolhida, isto é, um \mathbb{R}^n , e a multiplicação matricial representa a composição de transformações lineares. É natural pensar que esta categoria deveria ser isomorfa a \mathbf{Vect} , por, digamos, o funtor (contravariante) $F : \mathbf{Mat}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vect}$ que leva um número n para o espaço vetorial \mathbb{R}^n e leva uma matriz $n \times m$ para a correspondente transformação linear $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Porém, F não é invertível. Mas ele satisfaz uma propriedade mais fraca: existe um funtor $G : \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}$ tal que $F \circ G \cong 1_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}}$ e $G \circ F \cong 1_{\mathbf{Vect}}$! A definição de \cong para funtores é dada por transformações naturais: $F_1 \cong F_2$ quando existe um isomorfismo natural $\alpha : F_1 \Rightarrow F_2$, isto é, uma transformação natural α tal que para todo objeto A , a seta $\alpha(A)$ é invertível. Esta propriedade é a que vamos usar, então, para definir equivalência de categorias.

Definição 1.2.3. Duas categorias \mathcal{C}, \mathcal{D} são ditas *equivalentes* se existem funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $F \circ G \cong 1_{\mathcal{C}}$ e $G \circ F \cong 1_{\mathcal{D}}$.

Temos um teorema útil para caracterizar quando um funtor F dá origem a uma equivalência de categorias (vide (LANE, 1998, p. 93)):

Teorema 1.2.1. Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dá origem a uma equivalência de categorias (ou seja, existe $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $F \circ G \cong 1_{\mathcal{C}}$ e $G \circ F \cong 1_{\mathcal{D}}$) se e somente se F é

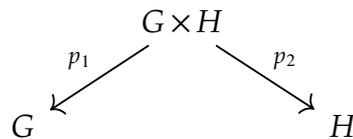
1. *pleno*: para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ o mapa $\mathrm{Hom}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ é sobrejetivo
2. *fiel*: para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ o mapa $\mathrm{Hom}(A, B) \rightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ é injetivo
3. *denso*: para qualquer $A \in \mathcal{D}$, existe $B \in \mathcal{C}$ tal que $F(B)$ é isomorfo a A .

1.2.2 Construções Universais e (Co)Limites de Diagramas

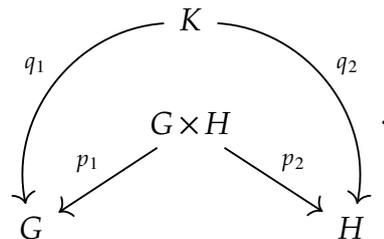
Construções universais são jeitos de caracterizar um objeto em uma categoria puramente em termos de setas. Por exemplo, digamos que você tem dois grupos G e H , e você quer construir o seu produto direto $G \times H$. Nós conhecemos o produto direto de grupo pela sua descrição usual conjuntista em termos de elementos:

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\},$$

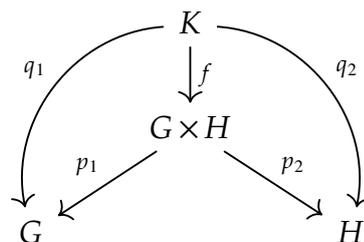
com produto definido coordenada a coordenada, isto é, $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$. Mas, se queremos entender grupos puramente em termos de suas setas, que são os homomorfismos, deveríamos ter um jeito de descrever $G \times H$ sem fazer referência aos elementos de G e H . Vamos tentar encontrar esta descrição usando o que já sabemos do produto. Quais são as setas entre G, H e $G \times H$? Bom, podemos sempre esquecer uma das coordenadas e descer de $G \times H$ de volta pra G ou H , isto é, temos os mapas projeções



É claro que a mera existência destas duas setas não é suficiente para caracterizar o produto. Assim, consideremos outro grupo K com setas pra G e H ,



Podemos usar as setas q_1 e q_2 pra construir uma seta pra $G \times H$



$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow G \times H \\ k &\mapsto (q_1(k), q_2(k)) \end{aligned}$$

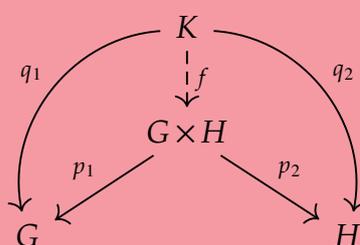
Esta seta faz este diagrama comutar (e é a única com esta propriedade):

$$f \circ p_1(k) = p_1(f(k)) = p_1(q_1(k), q_2(k)) = q_1(k) \implies f \circ p_1 = q_1$$

$$f \circ p_2(k) = p_2(f(k)) = p_2(q_1(k), q_2(k)) = q_2(k) \implies f \circ p_2 = q_2$$

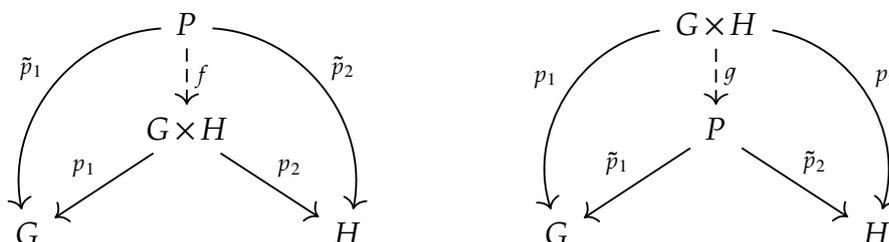
Então, de certa forma, $G \times H$ é o *menor* objeto com uma seta pra G e uma pra H , isto é, ele satisfaz a seguinte propriedade:

(Propriedade Universal do Produto) Para qualquer objeto K com setas q_1 e q_2 respectivamente para G e H , existe uma única seta f para $G \times H$ que realiza as setas de K pra G e H , isto é, $q_1 = f \circ p_1$ e $q_2 = f \circ p_2$

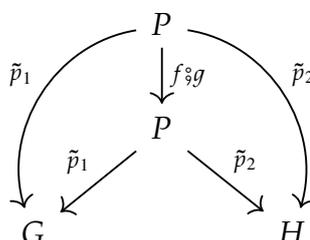


(Desenhamos a seta f pontilhada para denotar que ela existe e é única.)

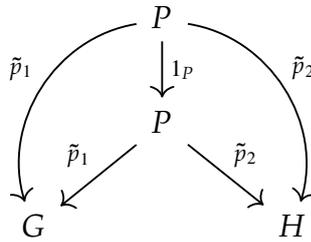
A propriedade universal do produto caracteriza $G \times H$ completamente a menos de isomorfismo: se há algum outro grupo P com setas \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 satisfazendo a propriedade universal do produto, então, P tem que ser isomorfo a $G \times H$. Por quê? Porque usando a propriedade universal de $G \times H$ com $K = P$, obtemos uma seta f de P para $G \times H$, e usando a propriedade universal de P com $K = G \times H$, obtemos uma seta g de $G \times H$ para P .



Estas setas têm que ser inversas uma da outra. De fato, $f \circ g$ faz o seguinte diagrama comutar



pois $f \circ g \circ \tilde{p}_1 = f \circ p_1 = \tilde{p}_1$ e igualmente para \tilde{p}_2 . Mas a seta identidade também faz o diagrama comutar



Mas, pela propriedade universal de P , a seta que faz esse diagrama comutar é única. Logo $f \circ g = 1_P$. Analogamente, provamos que $g \circ f = 1_{G \times H}$ e encontramos assim uma seta invertível de P para $G \times H$, ou seja, $P \cong G \times H$.

Isto pode parecer um jeito muito complicado de fazer algo simples, mas na verdade esse tipo de construção é abundante na matemática, o que não é sempre claro se estamos olhando para as especificidades de cada caso. Este produto que construímos é um caso específico de um *limite*.

A definição de limite é um pouco complicada, mas é uma generalização natural da propriedade universal do produto. O poder dela está no fato de unificar uma quantidade enorme de construções matemáticas: produto, união disjunta, quociente, elemento maximal e minimal, kernel, cokernel, produto livre, e muitos outros. Vamos a uma rápida definição antes de definirmos limite:

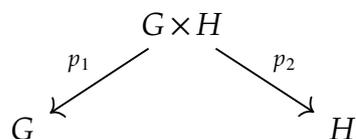
Definição 1.2.4 (Objeto Terminal e Inicial). Em uma categoria \mathcal{C} , um objeto T é dito *terminal* se para qualquer objeto A , existe uma única seta de A para T . Analogamente, um objeto I é dito *inicial* se para qualquer objeto A , existe uma única seta de I para A .

Em **Set**, qualquer conjunto com um único elemento é terminal. O espaço de um ponto só em **Top** também. Em **Grp**, o grupo com um único elemento $\{e\}$ é inicial e terminal.

Objetos terminais são sempre isomorfos: se T e T' são terminais, então existe uma única seta f de T para T' , e uma única seta g de T' para T . Compondo-as, temos uma seta $f \circ g$ de T para T . Mas, partindo de qualquer objeto, só pode existir uma única seta terminando em T , e a identidade 1_T já é uma seta de T em T . Logo, $f \circ g = 1_T$. Igualmente, $g \circ f = 1_{T'}$, e portanto f é um isomorfismo de T em T' . Podemos nos referir, então, a um objeto terminal como o objeto terminal, mas sempre lembrando que isto é a menos de isomorfismo. Por exemplo, em **Set**, todo conjunto com um único elemento é terminal, e portanto eles são todos isomorfos. Já sabíamos disso, é claro, pois isomorfismos em **Set** são bijeções, e conjuntos de um único elemento claramente estão em bijeção entre si. Mas, é claro, não são necessariamente iguais!

Perceba a similaridade da demonstração anterior que T e T' são isomorfos com a demonstração que P e $G \times H$ são isomorfos. Isto se dá pelo fato que o produto é na verdade um

objeto terminal, mas de uma categoria diferente de **Grp**. Para definir tal categoria, só precisamos de mais uma coisa: o fato de que diagramas podem ser visto como funtores. Por exemplo, o diagrama do produto



pode ser visto como um funtor da categoria livre gerada pelo grafo do diagrama, para a categoria **Grp**



O funtor F simplesmente mapeia os pontos para $G \times H$, G e H , e as setas para p_1 e p_2 . Qualquer diagrama em uma categoria C pode ser visto como um funtor da categoria livre gerada pelo grafo do diagrama para C .

Vamos finalmente definir limite:

Definição 1.2.5 (Limite). Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow C$ um diagrama em C , visto como um funtor de alguma categoria \mathcal{I} . Um *cone* (A, a_*) sobre D consiste de

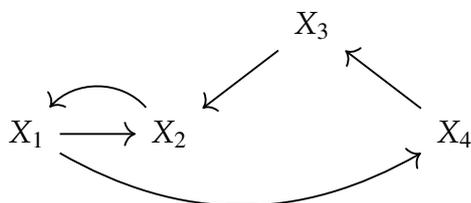
- um objeto A de C
- para cada objeto i de \mathcal{I} , um morfismo $a_i : A \rightarrow D_i$

tal que a seguinte propriedade vale:

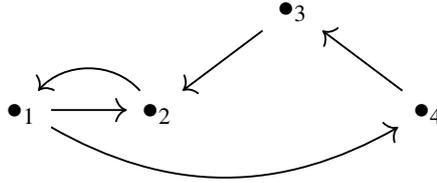
- para cada seta $f : i \rightarrow j$ em \mathcal{I} , temos $a_j = a_i \circ Df$

Definimos a categoria **Cone**(D) com objetos sendo os cones sobre o diagrama D ; uma seta entre cones $(A, a_*) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{a}_*)$ é um morfismo $g : A \rightarrow \tilde{A}$ tal que para todo objeto i de \mathcal{I} , temos $a_i = g \circ \tilde{a}_i$. O *limite* de um diagrama D é o objeto terminal de **Cone**(D), se ele existe.

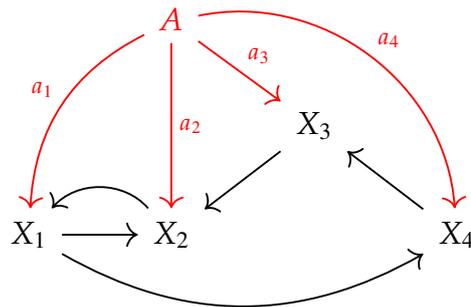
A definição formal é complicada, mas é simples visualizar o limite. Digamos que o diagrama D é este:



Então, a categoria \mathcal{I} é a livre gerada pelo grafo

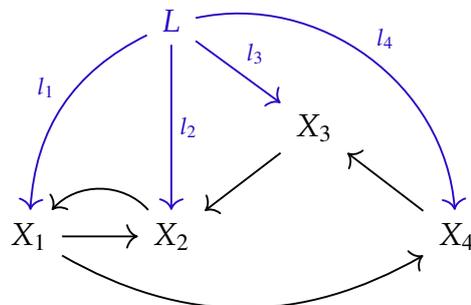


Um cone (A, a_*) é um objeto A com quatro setas

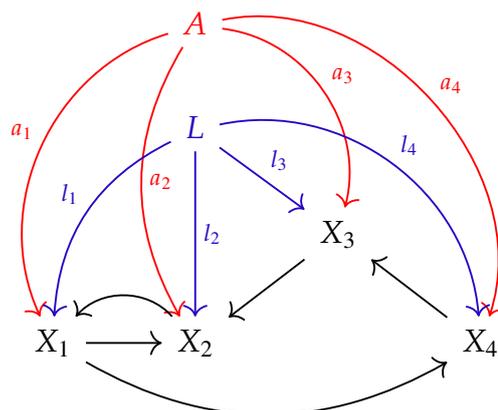


que fazem o diagrama acima comutar. Em outras palavras, imagine o objeto A como o vértice de um cone, o diagrama como sendo a base do cone e as setas a_* como as arestas que ligam o vértice à base. A propriedade 1 nos diz que as “faces” desse cone comutam. Mais formalmente, diz que dois caminhos começando em A e terminando em um mesmo ponto são iguais.

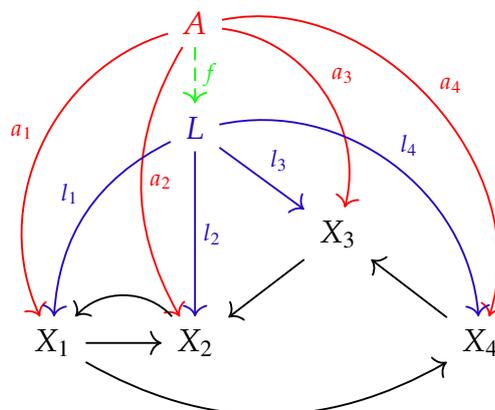
O limite (L, l_*) , então, é um cone



tal que para qualquer outro cone (A, a_*)

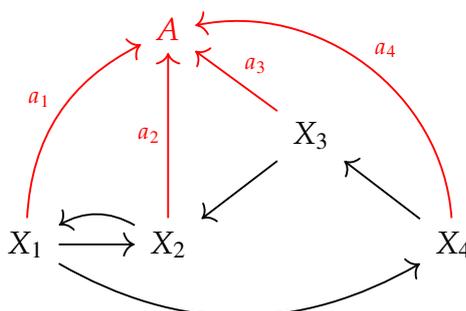


existe uma única seta de A para L



onde todos os triângulos com arestas de três cores diferentes comutam, isto é, $f \circ l_i = a_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Um colimite é a definição *dual* de limite: basta reverter a orientação das setas do cone. Isto é, definimos um cocone (A, a_*) de um diagrama da mesma forma que um cone, mas com as setas trocadas:



Na definição, então, temos apenas que corrigir as composições que garantem as comutatividades dos diagramas, e fazer uma última modificação: o colimite será o objeto *inicial* na categoria de cocones.

Definição 1.2.6 (CoLimite). Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um diagrama em \mathcal{C} , visto como um funtor de alguma categoria \mathcal{I} . Um *cocone* (A, a_*) sobre D consiste de

- um objeto A de \mathcal{C}
- para cada objeto i de \mathcal{I} , um morfismo $a_i : Di \rightarrow A$

tal que a seguinte propriedade vale:

- para cada seta $f : i \rightarrow j$ em \mathcal{I} , temos $a_i = Df \circ a_j$

Definimos a categoria $\mathbf{CoCone}(D)$ com objetos sendo os cocones sobre o diagrama D ; uma seta entre cocones $(A, a_*) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{a}_*)$ é um morfismo $g : A \rightarrow \tilde{A}$ tal que para todo objeto i de \mathcal{I} , temos $\tilde{a}_i = a_i \circ g$. O *colimite* de um diagrama D é o objeto inicial de $\mathbf{CoCone}(D)$, se ele existe.

Exemplo 1.2.3 (Limites e Colimites). 1. Como discutido, o produto cartesiano de dois grupos é um limite, do diagrama discreto

$$G \qquad H$$

Em geral, em qualquer categoria, o *produto* de uma família de objetos $A_i, i \in I$, é o limite do diagrama discreto com todos os objetos da família:

$$A_i \qquad A_j \qquad A_k \qquad \dots$$

Em **Set**, o produto é o produto cartesiano usual. Em **Top**, o produto é o produto cartesiano dos espaços com a topologia usual do produto. Em **Rel**, produto é a união disjunta de relações.

Já o *coproduto* de uma família de objetos $A_i, i \in I$, é o colimite deste mesmo diagrama. Em **Set**, o coproduto é a união disjunta. Em **Top**, o coproduto é a união disjunta dos espaços com a topologia usual. Em **Grp**, o coproduto é o chamado produto livre, muito usado, por exemplo, em Topologia Algébrica. Em **Vect**, o coproduto é a soma direta.

2. O limite usual de uma sequência de números reais é um limite categórico também. A reta \mathbb{R} tem estrutura de pré-ordem, através da relação usual de menor ou igual \leq . Assim como no exemplo 1.1.2, então, definimos a categoria **RealOrd** como a categoria gerada por esta pré-ordem (os objetos são os números reais, e existe uma única seta entre dois números se e só se um é menor ou igual que o outro). Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vamos determinar quais são o limite e o colimite do diagrama

$$x_1 \qquad x_2 \qquad \dots \qquad x_n \qquad \dots$$

Bom, um cone é um número real a menor que todos os x_n (pois existe uma seta do a para todos os x_n). Ou seja, é uma cota inferior. O cone terminal, então, é uma cota inferior l tal que para toda outra cota inferior a , temos uma seta de a para l , ou seja, temos que $a \leq l$. Logo l é a *maior* cota inferior, ou seja, é o ínfimo da sequência! Igualmente, um cocone é uma cota superior, e o cocone inicial é o supremo. Ou seja, o colimite é o supremo da sequência. Logo, para uma sequência monótona limitada, seu limite é exatamente o limite ou o colimite do diagrama discreto com seus elementos.

3. Podemos definir a categoria **Par**, cujos objetos são os números naturais pares, e uma seta $f : n \rightarrow m$ é um número k tal que $m = nk$. A composição é dada pelo produto usual de números. Existe um objeto especial nesta categoria, o número 2. Ele divide todos os pares, logo existe uma (única) seta $2 \rightarrow n$ para todo n natural. Isto é um colimite, mas de um diagrama bem simples, o diagrama vazio. Qualquer objeto é um cocone do diagrama vazio, logo um co-cone inicial é apenas um objeto com uma única seta dele para todos os outros objetos. Ou seja, é um objeto inicial da categoria original. Logo, 2 pode ser caracterizado em **Par** como objeto inicial ou, equivalentemente, como o colimite do diagrama vazio. Igualmente, o limite de um diagrama vazio é o objeto terminal da categoria original. Os conceitos de limite e colimite, então, generalizam objetos iniciais e finais.

4. O kernel de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é o limite do diagrama em **Vect**:

$$\begin{array}{ccc}
 & T & \\
 V & \xrightarrow{\quad} & W \\
 & 0 & \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

onde $0 : V \rightarrow W$ é o mapa que manda todo vetor no vetor nulo. De fato, $K = \text{Ker} T$ é um cone

$$\begin{array}{ccc}
 & K & \\
 & \downarrow i & \\
 V & \xrightarrow{\quad} & W \\
 & 0 & \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

pois este diagrama comuta, onde i é a inclusão. E para qualquer outro cone K' ,

$$\begin{array}{ccc}
 & K' & \\
 & \downarrow f & \\
 V & \xrightarrow{\quad} & W \\
 & 0 & \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

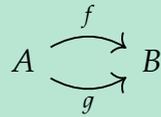
a comutatividade $f \circ 0 = g$ implica que $g = 0$ e a outra equação $f \circ T = g = 0$ implica que a imagem de f está contida no kernel de T . Logo f define um mapa para K

$$\begin{array}{ccc}
 & K' & \\
 & \downarrow f & \\
 V & \xrightarrow{\quad} & W \\
 & 0 & \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

e claramente $f \circ i = f$ e $f \circ 0 = 0 = g$, como pede a definição de morfismo de cones. Logo,

K é o limite do diagrama.

Em geral, em qualquer categoria, dadas duas setas $f, g : A \rightarrow B$, o limite do diagrama



é chamado de *equalizador*. Por exemplo, para motivar o nome, em **Set**, o equalizador de duas funções f, g é o conjunto $\{x \in A \mid fx = gx\}$.

CATEGORIAS MONOIDAIS

Categorias monoidais são abundantes no mundo de teoria de categorias aplicada. Frequentemente encontramos categorias cujos objetos podem ser interpretados como “sistemas”, setas como “processos” que transformam um sistema em outro e a composição de setas como sendo a realização de um processo seguido do outro. As noções de o que um sistema e um processo é podem variar muito. Por exemplo, na física, eles podem ser sistemas e processos quânticos, como na categoria **Hib**, e na lógica e na computação, podemos ver sistemas como fórmulas formais ou dados e processos como manipulações formais de fórmulas ou programas. De qualquer forma, uma coisa em comum em todos estes casos é a necessidade de se falar de *processos em paralelo*. Se temos dois processos $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$, deveríamos ter algum tipo de operação \otimes que realiza as duas setas em paralelo, $f \otimes g : A \otimes C \rightarrow B \otimes D$.

Um exemplo lúdico para entender a ideia é a categoria **Cook**, cujos objetos são ingredientes de cozinha, setas são processos de cozinha e composição é realizar processos em série. Por exemplo, temos a seta **amassar** : **batata** \rightarrow **batata amassada** que amassa batatas. Nesta categoria, podemos definir uma operação binária \otimes nos objetos, que simplesmente coloca um ingrediente um do lado do outro: **leite** \otimes **achocolatado** por exemplo, é o objeto da categoria que representa um copo de leite do lado de um pote de achocolatado (em paralelo!). E também podemos definir uma operação binária nas setas, que denotamos com o mesmo símbolo \otimes , que pega dois processos e realiza os dois simultaneamente. Por exemplo, temos as setas **esquentar** : **pão** \rightarrow **pão na chapa** e **misturar** : **leite** \otimes **achocolatado** \rightarrow **leite achocolatado** que podemos realizar em paralelo: **esquentar** \otimes **misturar** : **pão** \otimes (**leite** \otimes **achocolatado**) \rightarrow **pão na chapa** \otimes **leite achocolatado**.

Uma categoria monoidal, então, vai ser uma categoria na qual existe uma definição de uma operação binária nos objetos e nas setas, a qual vamos rotineiramente interpretar como representando a realização de processos em paralelo.

2.1 Categorias Monoidais e Diagramas de Barbante

Existem sutilezas na definição formal da operação de “realizar processos em paralelo” em uma categoria. Uma delas é a seguinte: nós vamos querer a noção de um sistema vazio, isto é, um sistema que quando posto em paralelo com qualquer outro sistema não o altera em nada. Ou seja, precisamos de um objeto I na nossa categoria tal que $I \otimes A = A$ pra qualquer outro objeto A . O problema está no fato que pedir *igualdade* é demais: a maior parte das nossas categorias só vão satisfazer $I \otimes A \cong A$.

Vamos ignorar essas sutilezas por agora, e vamos definir um tipo especial de categoria monoidal.

Definição 2.1.1 (Categoria Monoidal Estrita). Uma categoria C é *monoidal estrita* quando existem operações binárias em $\text{Ob}(C)$ e $\text{Hom}(C)$, que denotamos pelo mesmo símbolo \otimes e chamamos de *produto monoidal*, tais que:

1. Em $\text{Ob}(C)$, \otimes é associativa e existe identidade. Isto é, para quaisquer objetos A, B e C , temos

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

e existe um objeto I , chamado de *identidade*, tal que para todo objeto A

$$I \otimes A = A \otimes I = A$$

2. Em $\text{Hom}(C)$, para duas setas $f : A \rightarrow B$ e $g : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, a operação nos dá uma seta $f \otimes g : A \otimes \tilde{A} \rightarrow B \otimes \tilde{B}$. Além disso, ela é associativa e existe identidade. Isto é, para quaisquer setas f, g e h , temos

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

e a seta identidade (em relação a composição) $1_I : I \rightarrow I$ é também identidade para o produto monoidal, ou seja, para toda seta f

$$1_I \otimes f = f \otimes 1_I = f$$

3. Vale a igualdade:

$$(f \circledast g) \otimes (h \circledast k) = (f \otimes h) \circledast (g \otimes k)$$

4. Para quaisquer A e B , temos

$$1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$$

onde 1_A denota a seta identidade usual do objeto A (a garantida pela definição de categoria, a identidade em relação a operação de composição \circledast).

Note que as duas igualdades do item 2 só fazem sentido pois as igualdades do item 1 garantem que as setas que estão sendo igualadas têm os mesmos objetos de início e fim (por exemplo, dada $f : A \rightarrow B$, a seta $1_I \otimes f$ é uma seta de $I \otimes A$ para $I \otimes B$, mas o item 1 garante que $I \otimes A = A$ e $I \otimes B = B$, logo $1_I \otimes f$ pode ser igual a f , que também é uma seta de A para B).

As últimas duas igualdades podem parecer misteriosas, mas elas não precisam ser. Um primeiro jeito de entendê-las é ver que elas afirmam que \otimes é um funtor da categoria $C \times C$ em C . Mas, mais intuitivamente, veremos que após desenvolvermos nosso cálculo gráfico, elas se tornarão perfeitamente óbvias.

O nosso cálculo gráfico vai funcionar da seguinte forma. Fixe uma categoria monoidal estrita C . Vamos representar uma seta $f : A \rightarrow B$ com o desenho:

$$\text{---} A \quad \boxed{f} \quad B \text{---}$$

Como discutido, agora vamos imaginar setas como *processos*, e objetos como *tipos de sistemas* nos quais os processos irão agir. Ou seja, a nossa seta $f : A \rightarrow B$ é um processo que recebe um *input* de tipo A e retorna como *output* um sistema do tipo B . De acordo com essa filosofia, desenhamos, então, f como uma caixinha, que recebe da esquerda um barbante do tipo A e retorna um barbante do tipo B para a direita. Também vamos passar a chamar setas de *morfismos*, para reforçar a ideia de que setas são processos.

Podemos compor morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ visualmente:

$$\text{---} A \quad \boxed{f} \quad B \quad \boxed{g} \quad C \text{---}$$

Este é o desenho representando $f \circ g : A \rightarrow C$.

Para um objeto A , vamos tornar a caixinha representando a identidade $1_A : A \rightarrow A$ invisível, desenhando-a, então, assim:

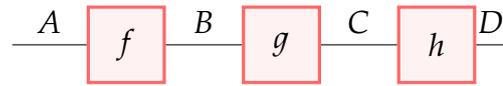
$$\text{---} A \text{---}$$

E aí, para um morfismo $f : A \rightarrow B$, a equação $1_A \circ f = f$ é representada por

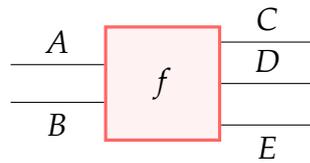
$$\text{---} A \quad \boxed{f} \quad B \text{---} = \text{---} A \quad \boxed{f} \quad B \text{---}$$

Ou seja, nossos barbantes são infinitamente elásticos, podemos esticá-los e contraí-los indefinidamente!

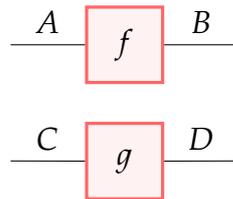
Associatividade está implícita nos nossos desenhos. Não há diferença no desenho de $(f \circledast g) \circledast h$ e no de $f \circledast (g \circledast h)$, ambos são



Por enquanto apenas falamos da operação de composição, presente em qualquer categoria. Agora, com a presença do produto monoidal \otimes , vamos adicionar uma nova dimensão para nossos desenhos (literalmente). Primeiramente, objetos do tipo $A \otimes B$ vão ser denotados com dois barbantes. Por exemplo, um morfismo $f : A \otimes B \rightarrow C \otimes D \otimes E$ será desenhado assim:



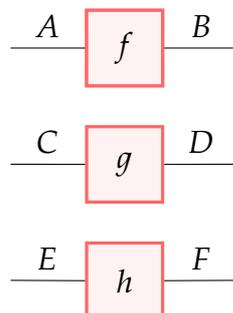
Dados dois morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, o seu produto $f \otimes g : A \otimes C \rightarrow B \otimes D$ vai ser simplesmente o desenho de f em cima do desenho de g :



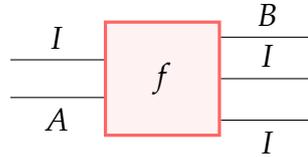
Note que isto não conflita com a nossa notação anterior:



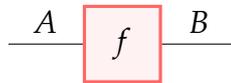
Novamente, a associatividade é implícita, $(f \otimes g) \otimes h$ e $f \otimes (g \otimes h)$ ambas vão ter o mesmo desenho:



Para o objeto identidade I , deveríamos ter barbantes do tipo I . Mas, vamos deixá-los invisíveis. Ou seja, um morfismo $f : I \otimes A \rightarrow B \otimes I \otimes I$ que iria ser desenhado assim



vai ser desenhado simplesmente como

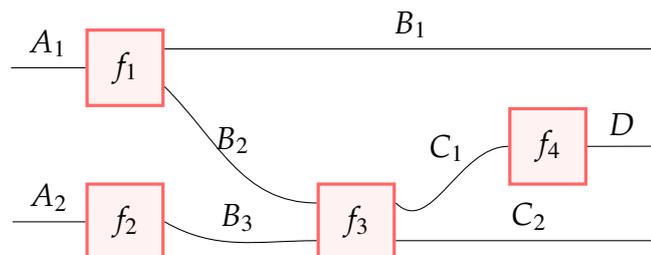


O que é perfeitamente consistente com o fato que $I \otimes A = A$ e $B \otimes I \otimes I = B$. Morfismos da forma $t : A \rightarrow I$ e $i : I \rightarrow A$, então, vão ser desenhados como:

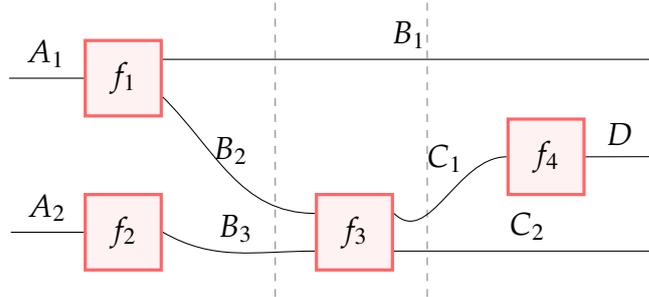


Finalmente, o morfismo identidade 1_I vai ser deixado completamente invisível. Como $1_I \otimes f = f \otimes 1_I = f$ para qualquer morfismo f , imaginamos que podemos colocar espaços em branco (representando o morfismo 1_I) embaixo ou em cima do desenho de f , sem alterá-lo. Assim como podemos colocar qualquer quantidade de barbantes invisíveis em ambos os lados da caixinha de f .

E é isto! Vamos chamar estes desenhos de *diagramas de barbante*, conhecidos em inglês como *string diagrams*. Vejamos um exemplo:



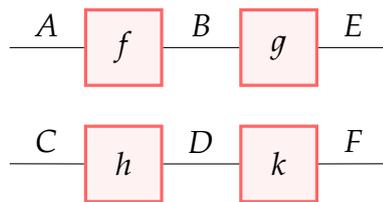
Isto representa algum morfismo f . Para representá-lo na notação usual usando composições e produtos monoidais, dividimos o diagrama em seções:



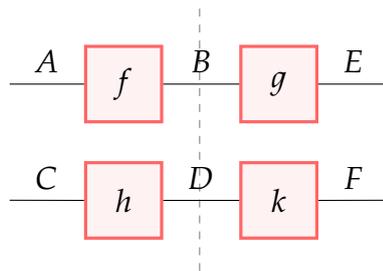
Cada uma das três seções é um morfismo, e os três estão sendo compostos. O primeiro é $f_1 \otimes f_2$, o segundo $1_{B_1} \otimes f_3$ e o terceiro $1_{B_1} \otimes f_4 \otimes 1_{C_2}$. Logo, nosso morfismo f é dado por

$$(f_1 \otimes f_2) \circ (1_{B_1} \otimes f_3) \circ (1_{B_1} \otimes f_4 \otimes 1_{C_2}),$$

o que é, eu espero que todos concordem, muito menos claro e intuitivo do que o correspondente diagrama de barbante. Para mais exemplos, vamos ver como as equações dos itens 3 e 4 na definição de categoria monoidal já estão embutidas no nosso cálculo gráfico. Para o item 3, o lado esquerdo é o morfismo $(f \circ g) \otimes (h \circ k)$, que é:

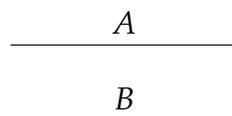


Mas este mesmo diagrama poderia ser interpretado de outra forma:



De fato, temos dois morfismos sendo compostos, o da esquerda é $f \otimes h$ e, o da direita, $g \otimes k$. Logo, este diagrama também representa o morfismo $(f \otimes h) \circ (g \otimes k)$, que é exatamente o lado direito da igualdade do item 3. Em palavras, a igualdade em questão diz que realizar f e g em seqüência enquanto que em paralelo realizamos h e k em seqüência, é a mesma coisa que realizar f e h em paralelo e em seqüência realizar g e k em paralelo.

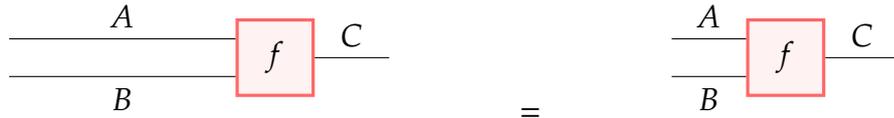
Já para o item 4, veja que $1_A \otimes 1_B$ tem como diagrama



Compondo este morfismo com qualquer $f : A \otimes B \rightarrow C$, temos o diagrama



Mas nossos barbantes podem ser esticados e contraídos, logo



Em outras palavras, $(1_A \otimes 1_B) \circ f = f$. Igualmente, vemos que $g \circ (1_A \otimes 1_B) = g$ para todo morfismo g que termina em $A \otimes B$. Logo, $1_A \otimes 1_B$ deve ser o morfismo identidade de $A \otimes B$, que é o que afirma o item 4.

Como foi discutido, demos a definição de categorias monoidais *estritas*. Mas, a maioria das categorias do dia-a-dia com produtos monoidais não vão ser estritas. Vejamos um exemplo simples: **Set** tem um produto monoidal natural, o produto cartesiano \times . Em objetos, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, e para morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, temos $f \times g : A \times C \rightarrow B \times D$ definido como $(a, c) \mapsto (f(a), g(c))$. Os itens 3 e 4 são facilmente verificáveis (vamos usar aqui a notação de ação de função em elementos pela esquerda, como discutido no final da seção 1.1):

$$\begin{aligned} (a, b)((f \circ g) \times (h \circ k)) &= ((a)f \circ g, (b)h \circ k) \\ &= (((a)f)g, ((b)h)k) \\ &= ((a, b)(f \times h))(g \times k) \\ &= (a, b)(f \times h) \circ (g \times k) \end{aligned}$$

$$(a, b)(1_A \times 1_B) = ((a)1_A, (b)1_B) = (a, b) = 1_{A \times B}$$

Note, no entanto, que há um problema nos itens 1 e 2, a associatividade e a identidade. De fato, $A \times (B \times C)$ e $(A \times B) \times C$ não são formalmente iguais na teoria de conjuntos. No entanto, há uma bijeção entre eles, o que os torna isomorfos na categoria **Set**. Similarmente, não pode haver identidade, já que formalmente $I \times A$ é diferente de A para quaisquer conjuntos. Mas, poderíamos continuar a fazer as coisas a menos de isomorfismo, e escolher um conjunto I tal que $I \times A$ e $A \times I$ são isomorfos (ou seja, estão em bijeção) a A para qualquer conjunto A . Este I é qualquer conjunto de um único elemento.

Iremos, então, definir uma categoria monoidal como uma categoria com um produto monoidal \otimes que é “associativo” a menos de isomorfismo: para quaisquer objetos A, B, C , existe um isomorfismo $\alpha_{A, B, C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$, chamado associador. Além disso, vamos pedir que o produto monoidal “possui identidade” a menos de isomorfismo: existe um objeto I tal que para qualquer objeto A , existem isomorfismos $l_A : I \otimes A \rightarrow A$ e $r_A : A \otimes I \rightarrow A$.

Estes isomorfismos são podem ser quaisquer. Veja que no item 2, não podemos mais pedir igualdade daqueles morfismos, já que agora eles têm objetos iniciais e finais diferentes:

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes C & & A \otimes (B \otimes C) \\ \downarrow (f \otimes g) \otimes h & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (A \otimes B) \otimes C & & A \otimes (B \otimes C) \end{array}$$

No entanto, podemos relacionar estes morfismos através do associador:

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & A \otimes (B \otimes C) \\ \downarrow (f \otimes g) \otimes h & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & A \otimes (B \otimes C) \end{array}$$

Pedimos, então, que este diagrama comute, ou seja, que $(f \otimes g) \otimes h$ e $f \otimes (g \otimes h)$ são “iguais” a menos do isomorfismo associador.

Isto ainda não resolve todos os problemas. O isomorfismo associador pode ser usado de diferentes maneiras para construir isomorfismos entre objetos que devem ser isomorfos. Por exemplo, $((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z$ deve ser isomorfo a $W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))$. Usamos o associador para construir esse isomorfismo:

$$\begin{array}{c} ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \\ \downarrow \alpha_{W \otimes X, Y, Z} \\ (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \\ \downarrow \alpha_{W, X, Y \otimes Z} \\ W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \end{array}$$

Mas esse não é o único jeito de realizar tal isomorfismo usando associadores. Poderíamos ter feito deste outro jeito também:

$$\begin{array}{ccc} ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ \downarrow \alpha_{W, X, Y \otimes 1_Z} & & \\ (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z & & \\ \downarrow \alpha_{W, X \otimes Y, Z} & & \\ W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{1_W \otimes \alpha_{X, Y, Z}} & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \end{array}$$

Para manter a consistência, queremos que estes isomorfismos sejam iguais. Precisamos pedir esta igualdade e também que quaisquer dois isomorfismos com mesmo objeto inicial e final,

construídos a partir de identidades, dos isomorfismos associadores $\alpha_{A,B,C}$ e dos isomorfismos de identidade l_A e r_A , são iguais. Surpreendentemente, um teorema de MacLane, (LANE, 1998, seção 2, cap. VII) garante que precisamos apenas de *duas* igualdades, e qualquer outra segue destas. Uma destas igualdades é a que acabamos de usar como exemplo. A outra, mais simples, está presente na definição de categoria monoidal abaixo.

Definição 2.1.2 (Categoria Monoidal). Uma categoria \mathcal{C} é *monoidal* quando existem operações binárias em $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e $\text{Hom}(\mathcal{C})$, que denotamos pelo mesmo símbolo \otimes e chamamos de *produto monoidal*, tais que:

1. Para quaisquer objetos $A, B, C \in \mathcal{C}$, existe um isomorfismo $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$, e existe um objeto I , chamado de *identidade*, tal que para todo objeto A , existem isomorfismos $l_A : I \otimes A \rightarrow A$ e $r_A : A \otimes I \rightarrow A$.
2. Em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, para duas setas $f : A \rightarrow B$ e $g : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, a operação nos dá uma seta $f \otimes g : A \otimes \tilde{A} \rightarrow B \otimes \tilde{B}$. Além disso, este diagrama sempre comuta

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & A \otimes (B \otimes C) \\ \downarrow (f \otimes g) \otimes h & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} & A \otimes (B \otimes C) \end{array}$$

e, para toda seta $f : A \rightarrow B$, este diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes A & \xrightarrow{l_A} & A & \xleftarrow{r_A} & A \otimes I \\ 1_I \otimes f \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f \otimes 1_I \\ I \otimes B & \xrightarrow{l_B} & B & \xleftarrow{r_B} & B \otimes I \end{array}$$

3. Vale a igualdade

$$(f \circledast g) \otimes (h \circledast k) = (f \otimes h) \circledast (g \otimes k)$$

4. Para quaisquer A e B , temos

$$1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$$

onde 1_A denota a seta identidade usual do objeto A (aquela garantida pela definição de categoria, a identidade em relação a operação de composição \circledast).

5. Para quaisquer objetos $A, B, C, D \in \mathcal{C}$, o diagrama do pentágono comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & ((D \otimes A) \otimes B) \otimes C & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & & \alpha_{D \otimes A, B, C} & & \alpha_{D, A, B} \otimes 1_C \\ (D \otimes A) \otimes (B \otimes C) & & & & (D \otimes (A \otimes B)) \otimes C \\ \downarrow \alpha_{D, A, B \otimes C} & & & & \downarrow \alpha_{D, A \otimes B, C} \\ D \otimes (A \otimes (B \otimes C)) & \xleftarrow{1_D \otimes \alpha_{A, B, C}} & & & D \otimes ((A \otimes B) \otimes C) \end{array}$$

e o diagrama do triângulo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes B & \\
 r_{A \otimes I} \otimes 1_B \nearrow & & \nwarrow 1_A \otimes I_B \\
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B)
 \end{array}$$

Ainda podemos usar os diagramas de barbante para visualizar morfismos de uma categoria monoidal não estrita. Mas, no caso estrito, cada diagrama tem uma única interpretação como morfismo. No caso geral isto não acontece. Existe ambiguidade, por conta da falta de associatividade e identidade estritas. Por exemplo, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \boxed{f} & B \\
 \hline
 C & \boxed{g} & D \\
 \hline
 E & \boxed{h} & F
 \end{array}$$

pode ser interpretado como $(f \otimes g) \otimes h$ ou $f \otimes (g \otimes h)$, que são formalmente diferentes. A solução, então, é entender que os diagramas denotam morfismos e objetos *a menos de isomorfismo*. Isto está bem justificado devido a um outro teorema de MacLane que garante que toda categoria monoidal é equivalente à uma estrita. (LANE, 1998, seção 3, cap. XI)

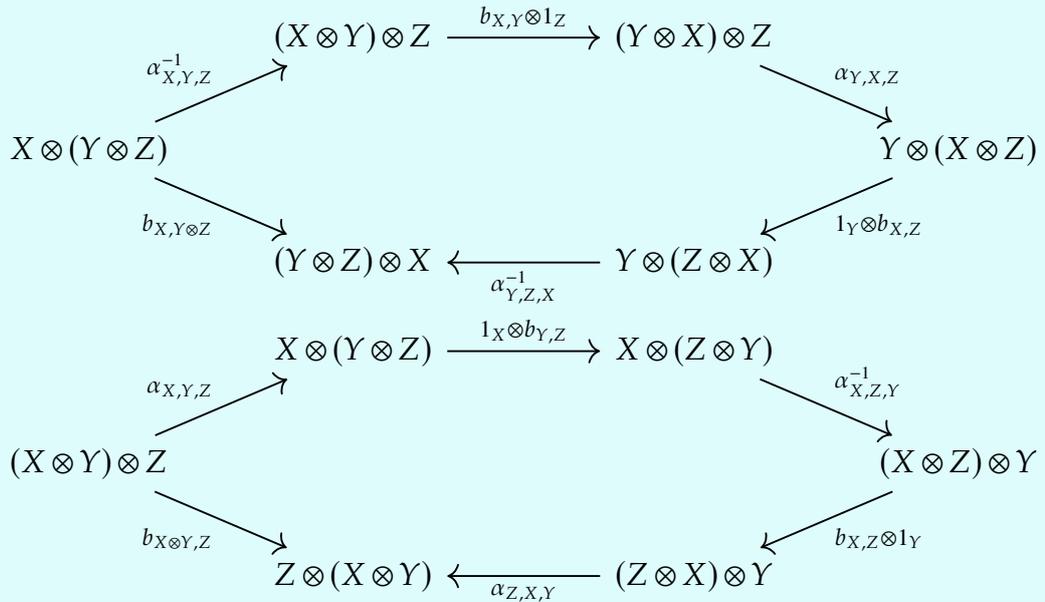
Antes de ir para os exemplos, vamos apenas definir um tipo especial de categoria monoidal que será importante para nosso trabalho. Uma categoria monoidal é *simétrica estrita* quando podemos trocar a ordem de dois objetos, ou seja, $X \otimes Y = Y \otimes X$. Novamente, isto quase nunca acontece nas categorias do dia-a-dia, então relaxamos a definição, pedindo apenas que existe um isomorfismo $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ que realiza essa troca de ordem. Adicionamos também condições para que estes morfismos respeitem as estruturas categóricas e monoidais de nossa categoria, o que resulta nas equações de naturalidade e hexagonais dos itens 1 e 2.

Definição 2.1.3 (Categorias Monoidais Simétricas). Uma categoria monoidal \mathcal{C} é *simétrica* quando, para quaisquer dois objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, existe um morfismo $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, que chamamos de *morfismo entrelaçador*, tal que

1. os morfismos entrelaçadores são naturais, isto é, para quaisquer morfismos $f : X \rightarrow Y, g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Y & \xrightarrow{\sigma_{X,Y}} & Y \otimes X \\ f \otimes g \downarrow & & \downarrow g \otimes f \\ \tilde{X} \otimes \tilde{Y} & \xrightarrow{\sigma_{\tilde{X},\tilde{Y}}} & \tilde{Y} \otimes \tilde{X} \end{array}$$

2. os diagramas hexagonais comutam



3. trocar de ordem duas vezes não faz nada, isto é, $b_{X,Y} ; b_{Y,X} = 1_{X \otimes Y}$

Nos nossos diagramas de barbante, vamos denotar a caixinha do morfismo entrelaçador de um jeito especial:

$$\begin{array}{c} X \quad Y \\ \hline \boxed{\sigma_{X,Y}} \\ \hline Y \quad X \end{array} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \hline \boxed{\text{crossing}} \\ \hline Y \quad X \end{array} = \begin{array}{c} X \quad Y \\ \hline \text{crossing} \\ \hline Y \quad X \end{array}$$

Com esta notação, os nossos diagramas de barbante agora podem conter barbantes passando um por cima do outro livremente! A equação do item 3, por exemplo, se torna

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad X \\ \hline \text{crossing} \\ \hline Y \quad X \quad Y \end{array} = \begin{array}{c} X \\ \hline \\ \hline Y \end{array}$$

que diz que podemos puxar o barbante de X por cima do barbante de Y e deixá-los retos.

Vamos finalmente dar exemplos.

Exemplo 2.1.1 (Categorias Monoidais). 1. Como discutido, **Set** é uma categoria monoidal com o produto cartesiano. Qualquer conjunto de apenas um elemento serve como identidade, e os isomorfismos associadores e de identidade são os esperados:

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B,C} : (A \times B) \times C &\rightarrow A \times (B \times C) & l_A : \{*\} \times A &\rightarrow A & r_A : A \times \{*\} &\rightarrow A \\ ((a,b),c) &\mapsto (a,(b,c)) & (*,a) &\mapsto a & (a,*) &\mapsto a \end{aligned}$$

Os diagramas de barbante nesta categoria são uma boa forma de visualizar composições de funções de múltiplas entradas e saídas.

2. **Vect** $_{\mathbb{R}}$ é uma categoria monoidal com produto dado pela *soma disjunta* \oplus . $V \oplus W$ é o espaço vetorial de somas formais $v + w$, com $v \in V, w \in W$. A soma disjunta de duas transformações lineares $T : V_1 \rightarrow V_2, S : W_1 \rightarrow W_2$ é

$$\begin{aligned} T \oplus S : V_1 \oplus W_1 &\rightarrow V_2 \oplus W_2 \\ v + w &\mapsto Tv + Sw \end{aligned}$$

Na última seção deste capítulo, vamos usar esta estrutura monoidal para desenvolver um cálculo visual para matrizes.

3. A categoria **Rel** admite duas estruturas monoidais: tanto a união disjunta quanto o produto cartesiano dão origem a um produto monoidal. Vamos usar na próxima seção a estrutura dada pelo produto cartesiano para estender nosso cálculo visual de matrizes para incluir subespaços também.
4. Na física, uma das categorias monoidais mais importantes é a categoria de espaços de Hilbert **Hib**, com o produto monoidal dado pelo produto tensorial.

2.2 Aplicação: Álgebra Linear com Barbante

Vamos agora usar nossos diagramas de barbante para fazer álgebra linear com desenhos! Para isso, vamos trabalhar com *props*, um tipo especial de categoria monoidal.

2.2.1 Props, Aeis e Tomadas

Definição 2.2.1 (Prop). Uma *prop* é uma categoria monoidal estrita e simétrica, onde os objetos são os números naturais \mathbb{N} e o produto monoidal em objetos é dado pela soma usual de números.

Para especificar uma prop, precisamos escolher quem são os morfismos, como os compor, quem é o produto monoidal de morfismos e qual é o morfismo entrelaçador (e, é claro, verificar que todos os axiomas da definição de categoria monoidal estrita simétrica são satisfeitos).

Matrizes sobre um anel formam uma prop. Mais geralmente, matrizes sobre um *ael* formam uma prop. Um ael é um anel (possivelmente) sem negativos:

Definição 2.2.2 (Ael). Um *ael* é um conjunto R com duas operações binárias $+, *$ associativas e com elemento neutro tal que

1. $+$ é comutativa
2. $a * (b + c) = a * b + a * c$ e $(b + c) * a = b * a + c * a$ para $a, b, c \in R$
3. $a * 0 = 0 * a = 0$ para $a \in R$, onde 0 é o elemento neutro em relação a $+$

Como exatamente matrizes sobre um ael formam uma prop? Fixado um ael R , definimos, para dois números naturais n e m , um morfismo $n \rightarrow m$ como sendo uma matriz $n \times m$ cujas entradas são elementos de R . Vamos permitir que matrizes vazias existam, e podem ser morfismos de tipo $0 \rightarrow n$ ou $n \rightarrow 0$ para qualquer n . A composição é dada pelo produto de matrizes usual, que já sabemos ser associativo e ter unidade (a fórmula continua a fazer sentido no caso das matrizes vazias, ou seja, as com zero colunas ou zero linhas). Já para o produto monoidal, precisamos, para dados $A : n \rightarrow m$ e $B : s \rightarrow p$, definir um morfismo $A + B : n + s \rightarrow m + p$. (vamos denotar o produto monoidal em morfismos com o símbolo $+$ em vez de \otimes para manter consistência com o fato que o produto monoidal em uma prop é adição de números naturais). Usamos a soma direta de matrizes para isso. Nosso $A + B$ será a matriz $(n + s) \times (m + p)$ em blocos

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}'$$

onde 0 denota matrizes com todas as entradas nulas do tamanho necessário (aquela embaixo de A é $s \times m$ e aquela em cima de B é $n \times p$). Esta operação é claramente associativa, e a identidade para ela é apenas a matriz vazia 0×0 . A equação do item 3 da definição de categoria monoidal é a famosa fórmula de multiplicação em blocos de matrizes:

$$(A \ ; B) + (C \ ; D) = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & CD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = (A + C) \ ; (B + D)$$

Além disso, como 1_n é apenas a matriz identidade $n \times n$, o item 4 é imediato:

$$1_n + 1_m = \begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_m \end{bmatrix} = 1_{n+m}$$

Finalmente, o morfismo entrelaçador $\sigma_{n,m} : n + m \rightarrow m + n$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$$

Temos $\sigma_{n,m}^{-1} = \sigma_{m,n}$ pois $\sigma_{n,m}^{-1} = \sigma_{n,m} = \sigma_{m,n}$. Com todos os axiomas verificados, chegamos à seguinte definição.

Definição 2.2.3 (Matrizes sobre um Ael). Dado um ael R , $\mathbf{Mat}(R)$ é a prop cujos morfismos $n \rightarrow m$ são matrizes $n \times m$. A composição é dada por multiplicação de matrizes, o produto monoidal em morfismos é a soma direta de matrizes, isto é, para $A : n \rightarrow m, B : s \rightarrow p$, temos que $A + B : n + s \rightarrow m + p$ é a matriz em blocos

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

O morfismo entrelaçador $\sigma_{n,m} : n + m \rightarrow m + n$ é a matriz em blocos

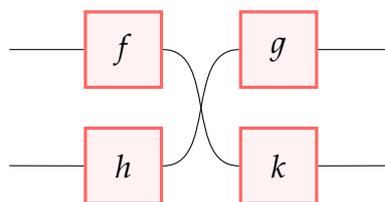
$$\begin{bmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos agora usar diagramas de barbante para visualizar uma prop. Os objetos de uma prop são os números naturais e, portanto, qualquer objeto n é o objeto 1 somado n vezes, $n = 1 + 1 + \dots + 1$. Logo, nos nossos diagramas, desenhamos o barbante do tipo n como n barbantes do tipo 1

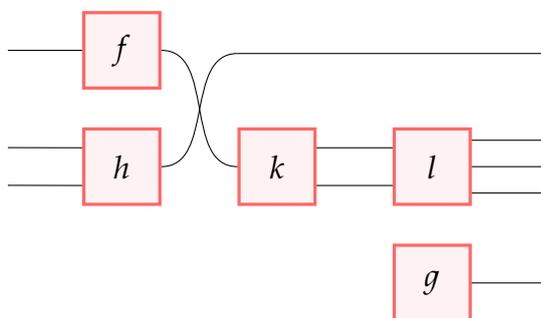
$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{1} \\ \text{-----} \\ \text{1} \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ \text{1} \\ \text{-----} \end{array} = \text{-----} \\ \text{n}$$

Isto mostra que, em uma prop, essencialmente só há um tipo de objeto, o de tipo 1. Qualquer outro é constituído de objetos do tipo 1 em paralelo. Não há necessidade, portanto, de nomear

nossos barbantes em diagramas. Outra coisa que podemos fazer com os diagramas é passar um fio em cima de outro, pois uma prop é simétrica:



O morfismo acima é $(f \otimes h) \circ \sigma_{1,1} \circ (g \otimes k)$. Portanto, um morfismo qualquer de uma prop será algo do tipo



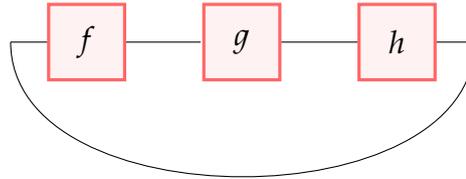
O que compõe este desenho? Uma quantidade de barbantes entrando e saindo do desenho, caixinhas com $n \geq 0$ entradas pela esquerda e $m \geq 0$ saídas pela direita, e barbantes ligando as caixinhas entre si. Chamamos desenhos deste tipo de *diagramas de tomada*. Vamos formalizar este conceito:

Definição 2.2.4 (Diagramas de Tomada). Fixados $n, m \in \mathbb{N}$, um (n, m) -diagrama de tomada é especificado por 4 objetos (C, ent, sai, b)

1. um conjunto C , cujos elementos chamamos de *caixas*
2. funções $ent, sai : C \rightarrow \mathbb{N}$, onde $ent(c)$ e $sai(c)$ são respectivamente os *número de entradas* e *número de saídas* de cada $c \in C$
3. uma bijeção $b : S \rightarrow I$, onde $S = \{(c, i) \mid c \in C, 1 \leq i \leq sai(c)\} \cup \{1, 2, \dots, m\}$ e $I = \{(c, i) \mid c \in C, 1 \leq i \leq ent(c)\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$

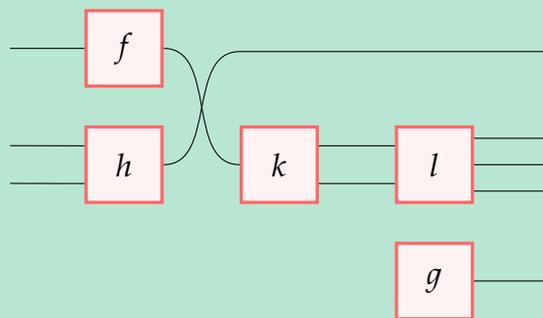
Tudo isto deve satisfazer a seguinte condição de aciclicidade. Construa o grafo direcionado cujos vértices são os elementos de C ; existe uma aresta direcionada de c a \tilde{c} se existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $b(c, i) = (\tilde{c}, j)$. Pedimos que este grafo não contenha nenhum ciclo.

Ugh. A formalização é densa e difícil de seguir. Mas veja: o conjunto C é simplesmente o conjunto de caixinhas do grafo. As funções *ent* e *sai* nos dão o número de barbantes entrando pela esquerda e saindo pela direita, respectivamente. A bijeção é a garantia de que existem n barbantes entrando pela esquerda, m saindo pela direita, e que todos os barbantes saindo e entrando em caixas se conectam. A condição de aciclicidade é para garantir que nenhum barbante que sai de uma caixa entre em outra caixa que está conectada a ela pela esquerda, criando um “feedback loop”, como por exemplo neste diagrama



Mais tarde iremos retirar esta condição, o que vai permitir o estudo de sistemas com feedback e uma melhora de nossa álgebra linear gráfica. Vamos ver como esta definição funciona em um exemplo.

Exemplo 2.2.1. O diagrama da página anterior é um $(3,5)$ –diagrama de tomada



1. o conjunto de caixas é $C = \{f, h, k, l, g\}$
2. as funções de entrada e saída são

$$\text{ent} : C \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \mapsto 1$$

$$h \mapsto 2$$

$$k \mapsto 1$$

$$l \mapsto 2$$

$$g \mapsto 0$$

$$\text{sai} : C \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f \mapsto 1$$

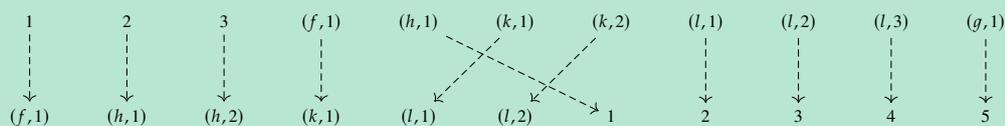
$$h \mapsto 1$$

$$k \mapsto 2$$

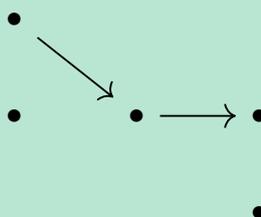
$$l \mapsto 3$$

$$g \mapsto 1$$

3. a bijeção b é



4. o grafo deste diagrama é



que não contém ciclos.

Podemos compor e fazer produto monoidal destes diagramas de tomada do mesmo jeito que fizemos para os diagramas de barbante. Para compor, encaixamos os barbantes do fim de um diagrama nos barbantes do início do outro, se este número é o mesmo. Na linguagem formal da definição anterior, a composição de um (n, m) -diagrama $T_1 = (C_1, ent_1, sai_1, b_1)$ com um (m, s) -diagrama $T_2 = (C_2, ent_2, sai_2, b_2)$ é o (n, s) -diagrama $T_1 \circ T_2 = (C, ent, sai, b)$ com $C = C_1 \sqcup C_2$, $ent = ent_1 \sqcup ent_2$, $sai = sai_1 \sqcup sai_2$; e b é a bijeção $b : \{(c, i) \mid c \in C, 1 \leq i \leq sai(c)\} \cup \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{(c, i) \mid c \in C, 1 \leq i \leq ent(c)\} \cup \{1, 2, \dots, s\}$ que leva

$$i \mapsto b_1(i)$$

$$(c, i) \mapsto b_1(c, i) \text{ se } c \in C_1, b_1(c, i) \neq j \text{ para } 1 \leq j \leq m$$

$$(c, i) \mapsto (c', k) \text{ se } c \in C_1, b_1(c, i) = j \text{ para } 1 \leq j \leq m \text{ e } b_2(j) = (c', k)$$

$$(c, i) \mapsto b_2(c, i) \text{ se } c \in C_2$$

Já para o produto monoidal, apenas colocamos um diagrama em cima do outro. Formalmente, o produto monoidal de um (n_1, m_1) -diagrama $T_1 = (C_1, ent_1, sai_1, b_1)$ e um (n_2, m_2) -diagrama $T_2 = (C_2, ent_2, sai_2, b_2)$ é o $(n_1 + n_2, m_1 + m_2)$ -diagrama $T = (C, ent, sai, b)$ com $C = C_1 \sqcup C_2$, $ent = ent_1 \sqcup ent_2$, $sai = sai_1 \sqcup sai_2$; e b é a bijeção $b : \{(c, i) \mid c \in C, 1 \leq i \leq sai(c)\} \cup \{1, 2, \dots, n_1 + n_2\} \rightarrow \{(c, i) \mid c \in C, 1 \leq i \leq ent(c)\} \cup \{1, 2, \dots, m_1 + m_2\}$ que leva

$$i \mapsto b_1(i) \text{ se } 1 \leq i \leq n_1$$

$$i \mapsto b_2(i - n_1) \text{ se } n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2, b_2(c, i) \neq j \text{ para } 1 \leq j \leq m_2$$

$$i \mapsto b_2(i - n_1) + m_1 \text{ se } n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2, b_2(c, i) = j \text{ para } 1 \leq j \leq m_2$$

$$(c, i) \mapsto b_1(c, i) \text{ se } c \in C_1$$

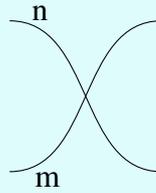
$$(c, i) \mapsto b_2(c, i) \text{ se } c \in C_2, b_2(c, i) \neq j \text{ para } 1 \leq j \leq m_2$$

$$(c, i) \mapsto b_2(c, i) + m_1 \text{ se } c \in C_2, b_2(c, i) = j \text{ para } 1 \leq j \leq m_2$$

Como diagramas de tomada essencialmente representam morfismos arbitrários de uma prop, podemos usá-los para definir uma prop que não possui nenhuma equação entre morfismos fora as triviais, ou seja, uma prop *livre* (de equações). Em outras palavras, escolhemos algum conjunto N de nomes para caixinhas, estabelecemos quantos barbantes podem entrar e sair destas caixinhas através de funções $e, s : N \rightarrow \mathbb{N}$ e definimos a prop **Free**(N) cujos morfismos são todos os diagramas de tomada com caixinhas nomeadas por elementos de N .

Definição 2.2.5 (Props Livres). Uma *assinatura de prop* é um conjunto N com duas funções $e, s : N \rightarrow \mathbb{N}$. Um diagrama de tomada *nomeado por* N é um diagrama de tomada com uma função $n : C \rightarrow N$ tal que $ent(c) = e(n(c))$ e $sai(c) = s(n(c))$ para todo $c \in C$ (ou seja, o número de entradas e saídas de cada caixa é o especificado pela assinatura).

Definimos a *prop livre sobre* N , **Free**(N), como sendo a prop cujos morfismos $n \rightarrow m$ são (n, m) -diagramas de tomada nomeados por N . A composição e o produto monoidal são como descritos no parágrafo acima. O morfismo entrelaçador é o $(n + m, m + n)$ -diagrama de tomada



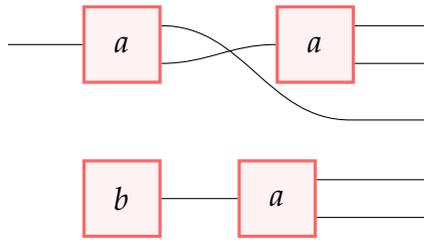
onde, para simplificar o desenho, usamos um barbante com tipo n para denotar n barbantes.

Os axiomas seguem todos imediatamente na linguagem gráfica, como discutimos na seção anterior, mas eles podem ser (entediadamente) provados usando as definições formais.

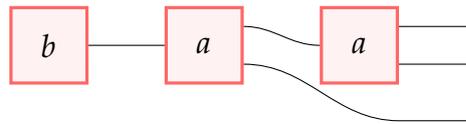
Agora, demos uma definição de prop livre “visual”, mas podemos dar uma interpretação algébrica também. A prop livre **Free**(N) é simplesmente a prop cujos morfismos são *gerados* por composições e produtos monoidais de elementos de N . Um exemplo vai clarificar as coisas. Seja $N = \{a, b\}$, e a função $e(a) = 1, e(b) = 0$; e s a função $s(a) = 2, s(b) = 1$. Então, a prop livre sobre N vai ser a prop cujos morfismos são (n, m) -diagramas de tomada nomeados por N . Mas, veja, qualquer morfismo gerado por composições e produtos monoidais das caixinhas



será um (n, m) -diagrama de tomada nomeado por N . Por exemplo, podemos formar este morfismo



que é um $(1, 5)$ –diagrama de tomada, ou este morfismo



que é um $(0, 3)$ –diagrama de tomada. Reciprocamente, qualquer (n, m) –diagrama de tomada nomeado por N nada mais é do que composições e produtos monoidais de caixinhas nomeadas a ou b . A equivalência destas duas descrições de $\mathbf{Free}(N)$ pode ser formalizada e provada, como discutido em (FONG; SPIVAK, 2019, seção 5.2.4).

Teorema 2.2.1. *Todo morfismo de $\mathbf{Free}(N)$ é uma expressão formada por: os elementos de N , os diagramas de tomada identidade $id_1 : 1 \rightarrow 1$, vazio $id_0 : 0 \rightarrow 0$ e entrelaçador $\sigma : 2 \rightarrow 2$, e as operações \circledast e \otimes .*

Vamos, de agora em diante, chamar os elementos do conjunto N de *geradores*.

Uma prop livre é livre de equações entre morfismos; mas, se quisermos, podemos adicionar a ela um conjunto de equações, criando uma nova prop cujos morfismos são os mesmos, mas agora estas equações valem. Isto é chamado de uma *apresentação*.

Definição 2.2.6 (Apresentação). Seja (N, e, s) uma assinatura de prop, $M = \mathbf{Hom}(\mathbf{Free}(N))$ o conjunto de morfismos da categoria livre gerada por N e $E \subset M \times M$. Definimos \sim_E , a relação de equivalência induzida por E , como a menor relação de equivalência em M que contém E e é fechada pelas operações \circledast e \otimes (isto é, tal que se $f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$, então $f \circledast \tilde{f} \sim g \circledast \tilde{g}$ e $f \otimes \tilde{f} \sim g \otimes \tilde{g}$). Então, a prop *apresentada* por N e E é a prop cujo conjunto de morfismos é M/\sim_E . O morfismo entrelaçador é a classe de equivalência do morfismo entrelaçador de $\mathbf{Free}(N)$.

Como a relação induzida por E é fechada pelas operações em morfismos, isto torna as

operações em M/\sim_E bem definidas

$$\begin{aligned} [f] \circ [g] &:= [f \circ g] \\ [f] \otimes [g] &:= [f \otimes g] \end{aligned}$$

onde $[f]$ denota a classe de equivalência de um morfismo f . Além disso, todos os outros axiomas seguem aplicando o mapa quociente em ambos os lados das respectivas equações válidas na prop $\mathbf{Free}(N)$. Por exemplo, para $f, g, h \in M$,

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) \implies [(f \otimes g) \otimes h] = [f \otimes (g \otimes h)] \implies ([f] \otimes [g]) \otimes [h] = [f] \otimes ([g] \otimes [h])$$

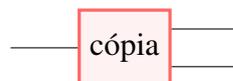
Vamos usar apresentações para caracterizar props. Para isso, precisamos de uma noção de equivalência de props, que será a natural:

Definição 2.2.7. Um funtor $F : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ é um *morfismo de props* se ele preserva o produto monoidal, ou seja, $F(n + m) = F(n) + F(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ e $F(f + g) = F(f) + F(g)$ para todos morfismos f, g . Um morfismo de props F é um *isomorfismo de props* se é uma equivalência de categorias.

2.2.2 Fluxo de Sinais e uma Apresentação para $\mathbf{Mat}(R)$

Vamos agora introduzir uma prop livre que servirá de base para construirmos uma apresentação para a categoria de matrizes sobre um ael. Fixe um ael R . Nossa prop livre terá os seguinte geradores:

- uma caixinha com 1 entrada e 2 saídas;



- uma caixinha com 2 entradas e 1 saída;



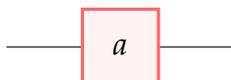
- uma caixinha com 0 entradas e 1 saída;



- uma caixinha com 1 entrada e 0 saídas;

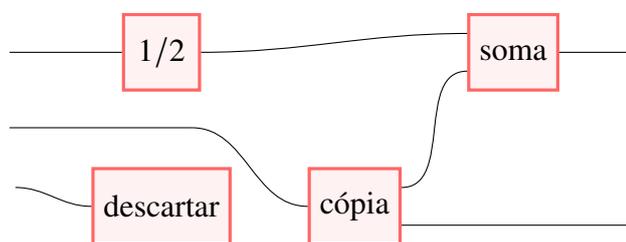


- uma caixinha com 1 entrada e 1 saída pra cada $a \in R$.



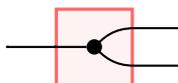
Os nomes que demos a estas caixinhas estão lá por uma razão. Vamos interpretar diagramas de tomada formados por estes geradores da seguinte forma: vamos imaginar que existe um sinal que está sendo passado pelos barbantes da esquerda para a direita, como por exemplo, o sinal analógico do som de múltiplos instrumentos musicais eletrônicos viajando por cabos. A primeira caixinha, então, *copia* o sinal, levando um sinal a duas cópias dele. A segunda caixinha *soma* dois sinais. A terceira caixinha gera um sinal *nulo*. A quarta caixinha *descarta* um sinal. A quinta caixinha *amplifica* um sinal na proporção de a .

Por exemplo, com (digamos) $R = \mathbb{R}$, poderíamos ter este diagrama formado pelos geradores

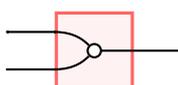


que representa um possível circuito que recebe três sinais, descarta o último, divide por dois o primeiro (ou seja, diminuí pela metade a amplitude do sinal), copia o segundo, soma uma cópia do segundo com o primeiro reduzido, e aí retorna este sinal, junto com uma cópia do segundo sinal.

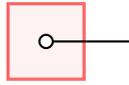
Vamos agora fazer uma adaptação visual aos diagramas de tomada gerados por estes geradores. Ao invés de escrever “cópia” dentro de uma caixinha para denotar este morfismo, vamos fazer o seguinte desenho dentro dela



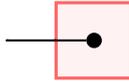
Da mesma forma, substituímos a palavra “soma” por este desenho



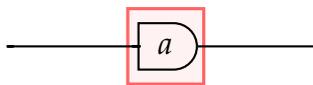
a palavra “zero” por este



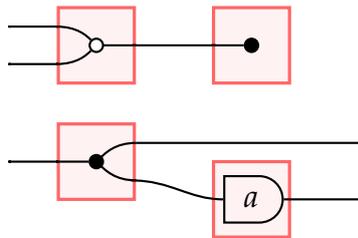
a palavra “descartar” por este



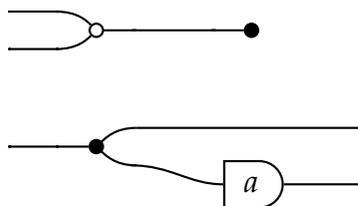
e os morfismos nomeados por elementos a de R por este



Assim, um diagrama formado por estes geradores será algo do tipo



Como agora as demarcações das caixinhas são desnecessárias, vamos deixá-las invisíveis:



Estes serão o que vamos chamar de *diagramas de fluxo de sinal simplificados*. Eles são simplesmente morfismos na prop livre gerada pelos geradores que descrevemos, porém com esta leve adaptação visual que descrevemos.

Definição 2.2.8 (Diagrama de Fluxo de Sinal Simplificado). Dado um ael R , a prop $\mathbf{DFSS}(R)$ é a prop livre $\mathbf{Free}(G)$, onde

$$G = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \right\} \cup \left\{ \text{---} \boxed{a} \text{---} \mid a \in R \right\}$$

com as funções $e, s : G \rightarrow \mathbb{N}$ sendo o número de barbantes que entram e saem, respectivamente, de cada desenho. Morfismos desta prop são chamados de *diagramas de fluxo de sinal simplificados*.

Esta prop livre vai nos permitir construir uma apresentação para $\mathbf{Mat}(R)$! O motivo pelo qual isso acontece é que *todo diagrama de sinal simplificado pode ser interpretado como uma matriz*. Mais formalmente, existe um funtor $I : \mathbf{DFSS}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$. Vamos ver como isso acontece no nível de geradores. Imagine que o sinal que está sendo transmitido é um elemento do ael R . Então, a “ação” imaginária do morfismo de cópia é enviar o sinal $x \in R$ para duas cópias $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$. Podemos interpretar este morfismo, então, como a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ agindo no vetor $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$ pela direita. Já a ação de soma é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, que leva dois sinais $x, y \in R$ representados pelo vetor $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} x + y \end{bmatrix}$. O morfismo zero e o morfismo descarte vão ser ambos dados pela matriz vazia $[\]$, porém interpretamos o primeiro como uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão zero para um espaço vetorial de dimensão 1 (em $\mathbf{Mat}(R)$, então, será a matriz vazia como morfismo $0 \rightarrow 1$) e o segundo como uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão 1 para um de dimensão 0 (em $\mathbf{Mat}(R)$, então, será a matriz vazia como morfismo $1 \rightarrow 0$). Finalmente, para cada $a \in R$, o morfismo de amplificação de sinal será a matriz $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$.

Como interpretar um diagrama qualquer formado por geradores como uma matriz? Simples: basta decompor o diagrama em composições e produtos monoidais de geradores e construir a matriz dada por composições e produtos monoidais (em $\mathbf{Mat}(R)$) das matrizes geradoras. Isto é uma propriedade geral de uma prop livre. Para definir um funtor de uma categoria livre para alguma outra categoria, basta especificar as imagens dos morfismos geradores.

Teorema 2.2.2. *Seja $\mathbf{Free}(G)$ uma prop livre, \mathcal{P} uma prop e $f : G \rightarrow \mathbf{Hom}(\mathcal{P})$ uma função tal que $f(g)$ é um morfismo $e(g) \rightarrow s(g)$ para todo $g \in G$, onde e, s são as funções de entrada e saída de G . Então, existe um morfismo de props $F : \mathbf{Free}(G) \rightarrow \mathcal{P}$ que é a identidade em objetos, e $F(g) = f(g)$ para todo morfismo gerador $g \in G$.*

Demonstração. Defina F como sendo a identidade em objetos. Em morfismos, primeiro defina $F(g) := f(g)$ para $g \in G$, $F(id_{0_{\mathbf{Free}(G)}}) = id_{0_{\mathcal{P}}}$, $F(id_{1_{\mathbf{Free}(G)}}) = id_{1_{\mathcal{P}}}$ e $F(\sigma_{\mathbf{Free}(G)}) = \sigma_{\mathcal{P}}$. Agora, dado um diagrama d de tomada qualquer, sabemos pelo Teorema 2.2.1 que $d = d_1 * \dots * d_n$ onde cada d_1, \dots, d_n é um dos morfismos $g \in G, id_0, id_1$ ou σ ; e $*$ é uma das operações \circledast ou \otimes . Defina então $F(d)$ como sendo $F(d_1) * \dots * F(d_n)$. Para que $F(d)$ esteja bem definido, temos que provar que sempre que duas expressões forem iguais, $d_1 * \dots * d_n = e_1 * \dots * e_m$, então $F(d_1) * \dots * F(d_n) = F(e_1) * \dots * F(e_m)$. Pelo Teorema 2.2.1, duas expressões só são iguais quando são consequência dos axiomas de prop, ou seja, há uma sequência de igualdades que levam $d_1 * \dots * d_n$ a $e_1 * \dots * e_m$. Esta sequência continua válida substituindo pelas imagens de F , e isto permite concluir que $F(d_1) * \dots * F(d_n) = F(e_1) * \dots * F(e_m)$. Logo, nosso funtor está bem definido, e, por definição, preserva composição e produto monoidal e leva identidade em identidade. \square

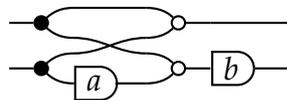
Podemos usar este teorema para definir nosso funtor $I : \mathbf{DFSS}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$ usando as matrizes discutidas no parágrafo anterior como as imagens dos geradores. Definimos a função $f : G \rightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{Mat}(R))$ como

$$\begin{aligned} f(\text{---}\bullet\text{---}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} : 1 \rightarrow 2 \\ f(\text{---}\circ\text{---}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : 2 \rightarrow 1 \\ f(\text{---}\circ\text{---}) &= [\] : 0 \rightarrow 1 \\ f(\text{---}\bullet\text{---}) &= [\] : 1 \rightarrow 0 \\ f(\text{---}\boxed{a}\text{---}) &= [a] : 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Isto toma conta do trabalho formal, mas existe uma interpretação direta e intuitiva para a ação deste funtor em um diagrama de sinal simplificado qualquer. Dado um caminho de um barbante de entrada para um barbante da saída (passando, é claro, por várias caixinhas), ele irá passar por um certo número de caixinhas de amplificação por elementos a do ael R ; definimos a amplificação dessa entrada por esse caminho como o produto de todos estes a . Se não houver nenhuma caixinha desse tipo, a amplificação é apenas 1.

Então, a *amplificação de uma entrada que contribui para uma saída* vai ser a soma das amplificações de todos os possíveis caminhos entre essa entrada e essa saída. Se não há caminhos, a amplificação é 0.

No seguinte diagrama, por exemplo, a amplificação da primeira entrada para a primeira saída é 1; a amplificação da primeira entrada para a segunda saída é b ; a amplificação da segunda entrada para a primeira saída é 1; e a amplificação da segunda entrada para a segunda saída é ab .



Teorema 2.2.3. *Seja d um diagrama de sinal simplificado com m entradas e n saídas. Então, a matriz $I(d)$ é a matriz $m \times n$ cuja entrada (i, j) é a amplificação da i -ésima entrada que contribui para a j -ésima saída.*

Demonstração. Vamos novamente usar o teorema 2.2.1. Veja que o teorema é válido para a

soma, cópia, amplificação, σ e id_1

$$\begin{aligned}
 I(\text{---} \bullet \text{---}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 I(\text{---} \circ \text{---}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 I(\text{---} \boxed{a} \text{---}) &= \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \\
 I(\text{---} \times \text{---}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 I(\text{---}) &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e é trivialmente válido para os morfismos de zero e descarte, e id_0 , pois suas matrizes são vazias. Logo, basta provarmos que se o teorema é válido para diagramas d_1 e d_2 , então ele é válido para $d_1 \circ d_2$ e $d_1 \otimes d_2$. Daí o resultado segue pelo teorema 2.2.1.

Para a composição, sejam $d_1 : m_1 \rightarrow n$, $d_2 : n \rightarrow m_2$, e suponha o teorema válido para eles. Qual é a amplificação da i -ésima entrada de $d_1 \circ d_2$ para a j -ésima saída? Qualquer caminho deve passar por uma saída de d_1 , que é uma entrada de d_2 , por definição de composição de diagramas. Logo, ele se decompõe em um caminho da i -ésima entrada de d_1 para uma k -ésima saída de d_1 e um caminho da k -ésima entrada de d_2 para a j -ésima saída de d_2 . A amplificação de uma concatenação de caminhos é o produto das suas amplificações. A amplificação total, então, fica

$$\sum_{k=1}^n \text{Amp}_1(i, k) * \text{Amp}_2(k, j)$$

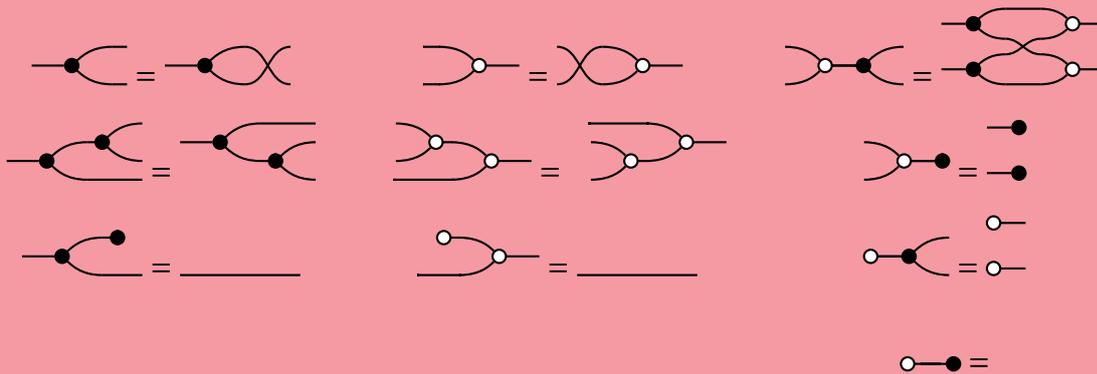
onde $\text{Amp}_1(i, k)$ é a amplificação que a i -ésima entrada contribui para a k -ésima saída de d_1 , e por indução, ela é o elemento (i, k) da matriz $I(d_1)$. Igualmente, $\text{Amp}_2(k, j)$ é o elemento (k, j) da matriz $I(d_2)$. Logo, a soma anterior nada mais é do que o elemento (i, j) do produto das matrizes $I(d_1) \circ I(d_2)$, que já sabemos ser igual a $I(d_1 \circ d_2)$ pela functoriedade de I . Portanto o teorema é válido para a composição $d_1 \circ d_2$;

Agora, para o produto monoidal, sejam $d_1 : m_1 \rightarrow n_1$, $d_2 : m_2 \rightarrow n_2$, e suponha o teorema válido para eles. Como o diagrama $d_1 + d_2$ é apenas um diagrama em cima do outro, não há novos caminhos criados, apenas uma reindexação dos índices. As primeiras $1, \dots, m_1$ entradas de $d_1 + d_2$ são as de d_1 , as últimas $m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$ são as de d_2 ; as primeiras $1, \dots, n_1$ saídas são as de d_1 , e as últimas $n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ saídas são as de d_2 . Então, para obter a matriz de amplificações deste diagrama, basta reorganizar as entradas referentes às amplificações em uma nova matriz $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$, que vai ser exatamente a matriz em blocos dada por $I(d_1) + I(d_2) = I(d_1 + d_2)$, finalizando a prova do teorema. \square

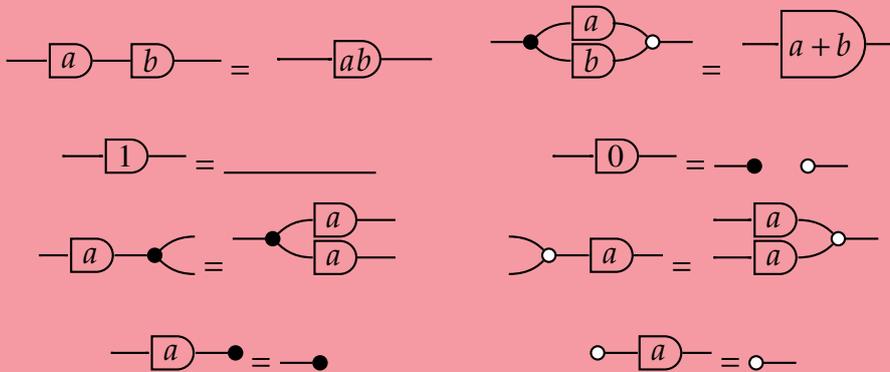
O functor $I : \mathbf{DFSS}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$ não é uma equivalência de categorias. Ele é denso por ser a identidade em objetos, é pleno, como provaremos, mas não é fiel, pois diferentes diagramas

de sinal simplificados podem ter matrizes iguais. Mas podemos resolver isto facilmente. Existem algumas equações que podemos adicionar à prop $\mathbf{DFSS}(R)$, quocientando-a de forma a tornar o funtor fiel.

Teorema 2.2.4. *Seja $\widetilde{\mathbf{DFSS}}(R)$ a prop apresentada pelo conjunto de geradores $\{ \text{diagramas} \} \cup \{ \text{caixa } a \mid a \in R \}$ com as seguintes equações*



e, para quaisquer $a, b \in R$,



Então, $\mathbf{Mat}(R)$ é equivalente a $\widetilde{\mathbf{DFSS}}(R)$ através de um isomorfismo de props $\tilde{I} : \widetilde{\mathbf{DFSS}}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$.

Demonstração. Para que o funtor que construímos previamente $I : \mathbf{DFSS}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$ desça para um funtor $\widetilde{\mathbf{DFSS}}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$, basta verificar que cada uma dessas equações são válidas quando substituimos os diagramas por suas respectivas matrizes, e todas são imediatas, seguindo de propriedades básicas de matrizes e dos axiomas de um ael. Temos, então, nosso funtor $\tilde{I} : \widetilde{\mathbf{DFSS}}(R) \rightarrow \mathbf{Mat}(R)$. Ele já é um morfismo de props por definição. Para que seja um isomorfismo de props, precisamos que ele seja uma equivalência de categorias, e para isso basta provar que ele é denso, pleno e fiel. Ele é denso, por ser idêntico em objetos. Para provar que é

pleno, precisamos encontrar, para qualquer matriz A , um diagrama d tal que $I(d) = A$. Isto pode ser feito facilmente construindo diretamente esse diagrama; ou demonstrado algebricamente usando que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ (para todo $a \in R$) geram o espaço de matrizes sobre um ael R (usando somas diretas e produtos).

Assim, resta provar que ele é fiel; esta é a parte mais difícil. A ideia é que, dada uma matriz A , podemos encontrar um diagrama d em uma certa forma especial, que chamamos de forma normal, tal que $I(d) = A$. E aí, dado qualquer outro diagrama d' tal que $I(d') = A$, conseguimos transformar d em d' usando apenas as equações acima. Logo, d e d' são equivalentes e portanto iguais na categoria $\widetilde{\mathbf{DFSS}}(R)$. Isto mostra que I é fiel, finalizando a prova. Os detalhes podem ser encontrados em (BAEZ; ERBELE, 2015).

□

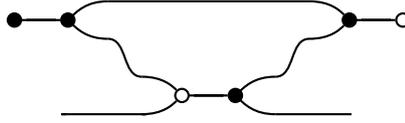
O teorema acima nos dá uma linguagem visual para matrizes, mas ela não permite que denotemos visualmente, por exemplo, subespaços lineares. Vamos na próxima seção estendê-la para que possamos finalmente desenvolver nossa álgebra linear com barbantes.

2.2.3 Feedback e Relações

A lei da causalidade, eu acredito, como muitas coisas que se tornam padrão entre filósofos, é uma relíquia de uma era que se passou, sobrevivendo como a monarquia, apenas por quê é erroneamente suposta não fazer mal algum.

Bertrand Russel

Nossos diagramas de fluxo de sinal até agora são “causais”: um sinal flui da entrada para a saída, sendo copiado e somado por mecanismos ao caminho dele. Vamos mudar nossa perspectiva nessa interpretação, e agora vamos imaginar que simplesmente há sinais fluindo pelos barbantes, não necessariamente direcionados, e que as caixinhas vão apenas denotar *relações* entre os sinais, ao invés de mecanismos causais. Então, por exemplo, não vamos mais interpretar o diagrama , como um sinal que vem da esquerda e é copiado em dois e retornado como saída na direita, e sim como um sinal que está relacionado a dois sinais pela bolinha preta nos dizendo que são todos iguais. Seguindo este raciocínio, o diagrama revertido da cópia  faz perfeito sentido como uma relação entre dois sinais e um sinal, dizendo que são todos iguais. Usando, então, todos os geradores e agora as suas reversões, podemos construir diagramas do tipo



que não podem mais ser interpretados de modo causal e, portanto, não representarão matrizes. Mas poderão representar relações! Vamos definir, então, quem serão estes nossos diagramas de fluxo de sinal não mais simplificados. E, a partir de agora, vamos precisar restringir nossos aéis, pedindo que todos sejam corpos.

Definição 2.2.9 (Diagrama de Fluxo de Sinal). Dado um corpo R , a prop $\mathbf{DFS}(R)$ é a prop livre $\mathbf{Free}(G)$, onde

$$G = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \boxed{a} \text{---} \\ \text{---} \boxed{a} \text{---} \end{array} \mid a \in R \right\}$$

com as funções $e, s : G \rightarrow \mathbb{N}$ sendo o número de barbantes que entram e saem, respectivamente, de cada desenho. Morfismos desta prop são chamados de *diagramas de fluxo de sinal*.

Como discutido, vamos agora interpretar os morfismos de $\mathbf{DFS}(R)$ como *relações*. Vamos imaginar, então, que um diagrama com n barbantes entrando e m saindo vai relacionar n sinais de R com m sinais de R , ou seja, corresponderá a uma relação entre R^m e R^n . Relembrando, uma relação D entre dois conjuntos A e B é um subconjunto $D \subset A \times B$, onde dizemos que um elemento $v \in R^n$ está *relacionado* a $w \in R^m$ quando $(v, w) \in D$, e aí escrevemos $v \sim w$. Vamos geralmente cometer o abuso de notação de usar \sim para se referir à relação D . Agora, as relações que são originárias de diagramas de fluxo de sinal formam uma prop, que é a categoria das relações lineares. Vamos construí-la.

Dado um corpo R , uma relação D entre R^n e R^m é linear quando D é um subespaço de $R^n \times R^m$. Definimos, então, $\mathbf{LinRel}(R)$ como a prop cujos morfismos $n \rightarrow m$ são relações lineares entre R^n e R^m :

- a composição de duas relações $D_1 : n \rightarrow m$ e $D_2 : m \rightarrow k$ é a relação $D_1 \circ D_2 = \{(x, z) \mid \text{existe } y \in R^m \text{ tal que } (x, y) \in D_1 \text{ e } (y, z) \in D_2\}$, ou seja, $x \sim z$ quando existe y tal que $x \sim_1 y$ e $y \sim_2 z$. Ela é claramente associativa, e a identidade $1_n : n \rightarrow n$ é simplesmente a relação idêntica $x \sim x$ para todo $x \in R^n$.
- o produto monoidal de duas relações $D_1 : n_1 \rightarrow m_1$ e $D_2 : n_2 \rightarrow m_2$ é a relação $D_1 \otimes D_2 : n_1 + n_2 \rightarrow m_1 + m_2$ induzida pelo produto cartesiano dos dois, ou seja, é a dada pelo conjunto $\{(x, y) \mid x = (x_1, x_2) \text{ com } x_1 \in R_1^{n_1}, x_2 \in R_2^{n_2}; y = (y_1, y_2) \text{ com } y_1 \in R_1^{m_1}, y_2 \in R_2^{m_2}, \text{ e } (x_1, y_1) \in D_1, (x_2, y_2) \in D_2\}$, ou seja, é a relação $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ sempre que $x_1 \sim_1 y_1$ e $x_2 \sim_2 y_2$. (quando um dos números é zero, a decomposição $x = (x_1, x_2)$ pode ser tal que um dos termos é vazio, ou seja, $x_1 = x$, e aí usamos $x_2 = 0$ para checar se $x_2 \sim_2 y_2$). Ela é claramente associativa,

e a identidade $I : 0 \rightarrow 0$ é a relação idêntica entre R^0 e R^0 , ou seja, a que simplesmente relaciona $0 \sim 0$.

- a igualdade $(D \circledast E) \otimes (D' \circledast E') = (D \otimes D') \circledast (E \otimes E')$ é válida. Seja \sim_1 a relação do lado esquerdo e \sim_2 a do lado direito. Então, veja que $(x_1, x_2) \sim_1 (y_1, y_2)$ se e somente se existem z_1, z_2 tais que $x_1 \sim_D z_1 \sim_E y_1$ e $x_2 \sim'_D z_2 \sim'_E y_2$, o que vale se e somente se $(x_1, x_2) \sim_{D \otimes D'} (z_1, z_2) \sim_{E \otimes E'} (y_1, y_2)$, isto é, se e somente se $(x_1, x_2) \sim_2 (y_1, y_2)$.
- a igualdade $1_n \otimes 1_n = 1_{n+m}$ é clara, a primeira relação é a que associa $(x, y) \sim (z, w)$ sempre que $x = z$ e $y = w$, ou seja, é a relação idêntica 1_{n+m} .
- o morfismo entrelaçador $\sigma_{n,m} : n + m \rightarrow m + n$ é a relação $(x, y) \sim (y, x)$ para $x \in R^n, y \in R^m$. A naturalidade, comutatividade dos diagramas hexagonais e o fato de que este morfismo é sua própria inversa são todos imediatos.

Com tudo verificado, resumimos a definição

Definição 2.2.10. Dado um corpo R , uma relação D entre R^n e R^m é *linear* quando $D \subset R^n \times R^m$ é fechado por adição e multiplicação por elementos de R . Podemos formar, então, a prop **LinRel**(R) cujos morfismos $n \rightarrow m$ são relações lineares entre R^n e R^m . O produto monoidal é dado pelo produto cartesiano e a composta de duas relações $D_1 : n \rightarrow m$ e $D_2 : m \rightarrow k$ é a relação $(x, y) \in D_1 \circledast D_2$ se e só se existe $z \in R^m$ tal que $(x, z) \in D_1$ e $(z, y) \in D_2$. O morfismo entrelaçador $\sigma_{n+m, m+n} : R^{n+m} \rightarrow R^{m+n}$ é a relação $(x, y) \in \sigma_{n+m, m+n}$ se só se $x = (x_1, x_2)$ com $x_1 \in R^n$ e $x_2 \in R^m$ e $y = (y_2, y_1)$.

Assim como diagramas de fluxo de sinal simplificados correspondem a matrizes, diagramas de fluxo de sinal corresponderão mais geralmente a relações lineares. Veja que isso inclui o caso de matrizes: uma matriz $A_{n \times m}$ é caracterizada pelo seu gráfico $\text{Graf}(A) = \{(v, Av) \mid v \in R^n\}$, que nada mais é do que uma relação entre R^n e R^m . A relação à qual um diagrama de fluxo de sinal simplificado corresponderá vai ser exatamente o gráfico de sua matriz.

Esta correspondência, naturalmente, é dada por um funtor $I : \mathbf{DFS}(R) \rightarrow \mathbf{LinRel}(R)$ (que chamamos pelo mesmo nome do funtor anterior para enfatizar o fato que este será uma extensão daquele). Construimos este funtor novamente usando o teorema 2.2.2 e a função $f : G \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{LinRel}(R))$ como

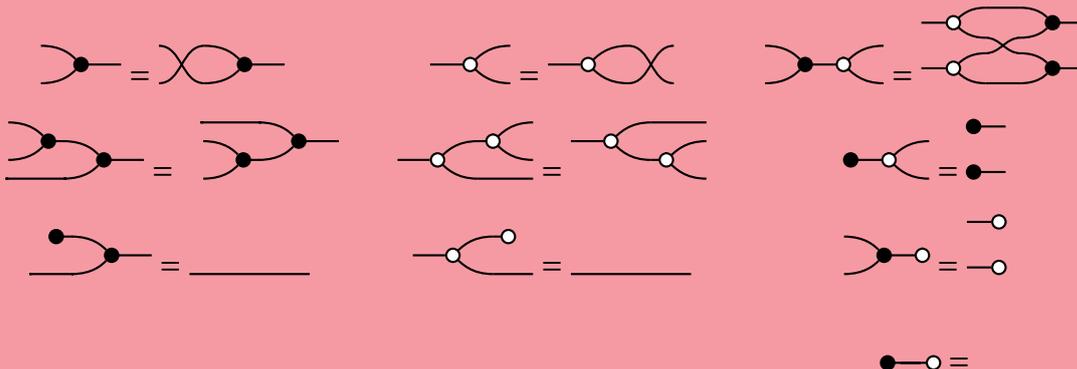
$$\begin{aligned}
 f(\text{---}\bullet\text{---}) &= \text{Graf}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right) : 1 \rightarrow 2 \\
 f(\text{---}\circ\text{---}) &= \text{Graf}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) : 2 \rightarrow 1 \\
 f(\text{---}\bullet\text{---}) &= \{(a, a), a \mid a \in R\} : 2 \rightarrow 1 \\
 f(\text{---}\circ\text{---}) &= \{(a, (b, c)) \mid a, b, c \in R, a = b + c\} : 1 \rightarrow 2 \\
 f(\text{---}\circ\text{---}) &= \text{Graf}([\]) = \{(0, 0)\} : 0 \rightarrow 1 \\
 f(\text{---}\circ\text{---}) &= \{(0, 0)\} : 1 \rightarrow 0 \\
 f(\text{---}\bullet\text{---}) &= \text{Graf}([\]) = \{(v, 0) \mid v \in R\} : 1 \rightarrow 0 \\
 f(\text{---}\bullet\text{---}) &= \{(0, v) \mid v \in R\} : 1 \rightarrow 0 \\
 f(\text{---}\boxed{a}\text{---}) &= \text{Graf}([a]) : 1 \rightarrow 1 \\
 f(\text{---}\boxed{a}\text{---}) &= \{(b, c) \mid b, c \in R, b = ac\} : 1 \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

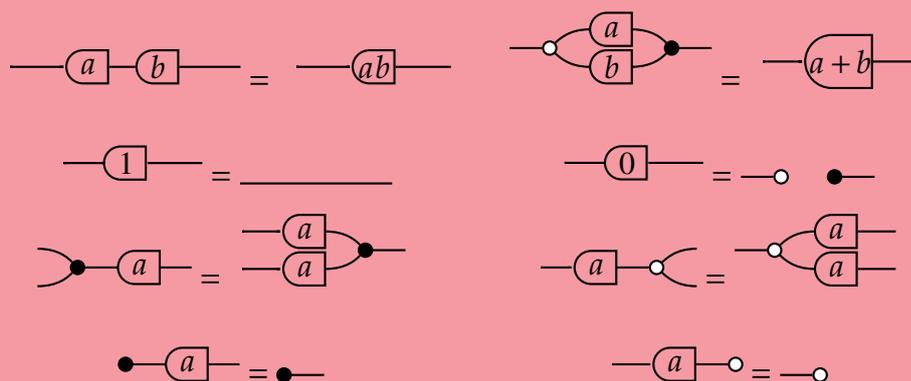
Não vamos ter uma descrição simples da ação desse funtor como o teorema 2.2.3, mas temos um análogo do teorema 2.2.4. Adicionando algumas equações à prop livre, o funtor se torna uma equivalência de categorias.

Teorema 2.2.5. *Seja $I : \mathbf{DFS}(R) \rightarrow \mathbf{LinRel}(R)$ o funtor induzido pela função f definida acima. Ele induz um isomorfismo de props $\tilde{I} : \widetilde{\mathbf{DFS}}(R) \rightarrow \mathbf{LinRel}(R)$, onde $\widetilde{\mathbf{DFS}}(R)$ é a categoria apresentada pelos geradores de $\mathbf{DFS}(R)$ com as equações:*

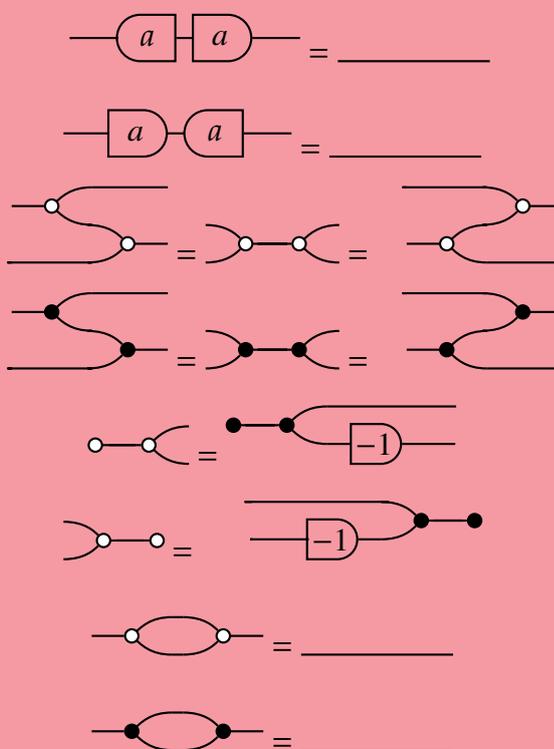
todas as do teorema 2.2.4,

as suas versões revertidas:





e as seguintes, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ não-nulo



Demonstração. A demonstração deste fato é bem mais sofisticada do que o caso de matrizes e pode ser encontrada em (BONCHI; SOBOCIŃSKI; ZANASI, 2017).

□

2.2.4 Brincando com Diagramas

O teorema 2.2.5 nos dá um cálculo visual para álgebra linear: subespaços e matrizes estão todos associados a desenhos. Vamos, nesta seção, mostrar como alguns conceitos usuais da álgebra linear se traduzem para o mundo dos diagramas.

Primeiramente, vamos discutir matrizes. Cada matriz está associada pelo teorema 2.2.4 à uma única classe de diagramas, e vamos usar qualquer um deles para denotá-la. O que podemos fazer com este diagrama? Primeiro, podemos fazer deformações topológicas e usar as equações do teorema 2.2.4 para obter outros diagramas da mesma classe, e, portanto, representando a mesma matriz. Também, pela functoriedade de I , sabemos que podemos colocar um diagrama em cima do outro para representar a soma direta de matrizes, e os compor para representar o produto. Vamos introduzir alguns açúcares sintáticos para simplificar nossos diagramas e denotar algumas novas operações. O seguinte diagrama denotará algum diagrama de uma matriz $A_{n \times m}$



A primeira operação que introduziremos é a de reflexão vertical. Simplesmente pegue o diagrama, e o leia da direita pra esquerda. Vamos denotar o diagrama refletido da seguinte forma



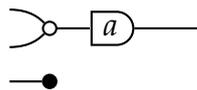
Outra operação que faremos é a de troca de cor, que denotaremos como



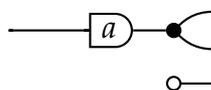
Esta operação consiste em trocar todas as bolinhas brancas por pretas, e as pretas por brancas, e também fazemos a convenção de que a troca de cor da caixa de amplificação é a sua reflexão vertical.

$$\text{---} \blacksquare a \text{---} = \text{---} \square a \text{---} \quad \forall a \in R$$

Assim, por exemplo, se aplicarmos a reflexão vertical e a troca de cor a este diagrama



obtemos este:



A composição destas duas operações será chamada de *bizarro*.

A matriz do primeiro diagrama, pelo teorema 2.2.3, é $\begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, e a da segunda, que é o bizarro dele, é $\begin{bmatrix} a & a & 0 \end{bmatrix}$, a transposta da primeira. Isso acontece sempre:

Teorema 2.2.6. *A matriz do bizarro de um diagrama é a transposta da matriz do diagrama,*

$$\overset{m}{\text{---}} \text{---} \boxed{A} \text{---} \overset{n}{\text{---}} = \overset{m}{\text{---}} \boxed{A^T} \text{---} \overset{n}{\text{---}}$$

Demonstração. O resultado é válido para todos os geradores:

- o bizarro de $\text{---} \bullet \text{---} \text{---} \circ \text{---}$ é $\text{---} \circ \text{---} \text{---} \bullet \text{---}$ e suas matrizes são $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;
- o bizarro de $\text{---} \bullet \text{---}$ é $\text{---} \circ \text{---}$ e suas matrizes são vazias, transpostas uma da outra;
- o bizarro de $\text{---} \boxed{a} \text{---}$ é ela mesma, e sua matriz é $\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$, transposta dela mesma.

Agora, suponha que o resultado vale para duas matrizes A e B . Sejam d_A e d_B os correspondentes diagramas, b a operação bizarro, e I o funtor de $\widetilde{\mathbf{DFS}}(R)$ em $\mathbf{Mat}(R)$. Então, $b(d_A \otimes d_B) = b(d_A) \otimes b(d_B)$ e aí $I(b(d_A \otimes d_B)) = I(b(d_A)) \otimes I(b(d_B)) = A^T \otimes B^T = (A \otimes B)^T = (I(d_A \otimes d_B))^T$. Ou seja, o resultado é válido para o produto monoidal dos diagramas.

Finalmente, suponha que os diagramas podem ser compostos. Então, $b(d_A \circ d_B) = b(d_B) \circ b(d_A)$ e daí $I(b(d_A \circ d_B)) = I(b(d_B)) \circ I(b(d_A)) = B^T A^T = (AB)^T = (I(d_A \circ d_B))^T$. Ou seja, o resultado é válido para a composição dos diagramas.

Logo, como todo diagrama é construído a partir de composições e produtos monoidais dos geradores, o resultado segue por indução. □

O que acontece se fizermos cada uma das operações individualmente? Dado um diagrama de uma matriz A , a relação \sim correspondente ao diagrama refletido é a relação oposta: $Ax \sim x$ para todo x ! Já a troca de cor, veja que ela é a reflexão vertical do bizarro do diagrama, logo ela é a relação oposta da transposta de A , ou seja, ela é a relação $A^T x \sim x$ para todo x .

A reflexão vertical está intimamente relacionada à inversibilidade de uma matriz:

Teorema 2.2.7.

$$\begin{aligned} \overset{n}{\text{---}} \boxed{A} \text{---} \overset{m}{\text{---}} \boxed{A} \text{---} \overset{n}{\text{---}} &= \text{---} \Leftrightarrow A \text{ é injetiva} \\ \overset{m}{\text{---}} \boxed{A} \text{---} \overset{n}{\text{---}} \boxed{A} \text{---} \overset{m}{\text{---}} &= \text{---} \Leftrightarrow A \text{ é sobrejetiva} \end{aligned}$$

Quando $m = n$ e um dos dois vale (e portanto ambos valem), A é inversível e a sua inversa é dada pela reflexão vertical do diagrama de A .

Demonstração. Sejam \sim_1 a relação do diagrama $\begin{array}{c} n \\ \boxed{A} \\ m \end{array}$ e \sim_2 a relação de sua reflexão vertical. Note que a relação \sim composição das duas $\begin{array}{c} n \\ \boxed{A} \\ m \end{array} \begin{array}{c} m \\ \boxed{A} \\ n \end{array}$ relaciona todo x à ele mesmo, pois $x \sim_1 Ax \sim_2 x$. Isso mostra que a relação idêntica está contida em \sim . Mas, se A não for injetiva, então vai existir $y \neq x$ tal que $Ax = Ay$, e aí $x \sim_1 Ax = Ay \sim_2 y$, ou seja, $x \sim y$. Logo, a igualdade de diagramas não pode valer, pois a relação \sim não está contida na idêntica. Reciprocamente, suponhamos A injetiva. Então, se $x \sim y$, temos que $x \sim_1 z \sim_2 y$ para algum z . Como $x \sim_1 z$, então $z = Ax$ e, como $z \sim_2 y$, então $z = Ay$. Logo, $Ax = Ay$ e, portanto, $x = y$. Assim, \sim só relaciona elementos iguais, ou seja, ela está contida na relação idêntica. Como já provamos a inclusão contrária, temos que a igualdade vale. Isso demonstra a primeira afirmação.

Agora, seja \sim a relação da outra composição $\begin{array}{c} m \\ \boxed{A} \\ n \end{array} \begin{array}{c} n \\ \boxed{A} \\ m \end{array}$. Primeiramente, essa relação está contida na idêntica pois, se $x \sim y$, então existe z tal que $x \sim_2 z \sim_1 y$. Logo, $x = Az$ e $Az = y$, isto é, $x = y = Az$. Esta segunda igualdade $x = Az$ mostra que se A não for sobrejetiva, então existe x tal que $x \neq Az$ para todo z ; disto segue que não podemos ter $x \sim x$ pra todo x . Reciprocamente, se A é sobrejetora, então para todo x existe z tal que $x = Az$; assim, $x \sim_2 z \sim_1 Az = x$ e, portanto, $x \sim x$. Em outras palavras, a relação idêntica está contida em \sim . Isso finaliza a segunda afirmação.

Para provar a parte final, basta ver que se A é invertível, então a relação \sim_2 da reflexão vertical de A associa $x \sim_2 y$ quando $y = Ax$, ou seja, quando $x = A^{-1}y$. Ou seja, $x \sim_2 y$ se e só se $x = A^{-1}y$. Portanto, é a mesma relação que a do diagrama da inversa de A , $\begin{array}{c} n \\ \boxed{A^{-1}} \\ n \end{array}$, e como o functor do teorema 2.2.5 é fiel, os diagramas devem ser iguais

$$\begin{array}{c} n \\ \boxed{A^{-1}} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} n \\ \boxed{A} \\ n \end{array}$$

□

Vamos agora falar de subespaços. Uma relação linear $n \rightarrow 0$ é apenas um subespaço linear de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^0 \cong \mathbb{R}^n$. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ este subespaço. A relação associada a ele é simplesmente aquela que associa $x \sim 0$ se e só se $x \in S$. Diagramas com n barbantes entrando e nenhum saindo, então, podem ser vistos como representando subespaços de \mathbb{R}^n . Analogamente, também podemos usar relações $0 \rightarrow m$, e portanto diagramas com m barbantes saindo e nenhum entrando.

Com isso, já podemos encontrar a imagem e o kernel de uma matriz.

Teorema 2.2.8.

$$\bullet \xrightarrow{n} \boxed{A} \xrightarrow{m} \text{ é a imagem de } A$$

$$\xrightarrow{n} \boxed{A} \xrightarrow{m} \circ \text{ é o kernel de } A$$

(o diagrama $\bullet \xrightarrow{n}$ denota, é claro, n cópias em paralelo do diagrama de descartar, assim como o $\xrightarrow{m} \circ$ denota n cópias da reflexão vertical do diagrama do zero).

Demonstração. Seja \sim_1 a relação de $\bullet \xrightarrow{n}$, \sim_2 a relação de $\xrightarrow{n} \boxed{A} \xrightarrow{m}$, \sim a composição das duas e S o subespaço de \mathbb{R}^n associado a \sim . Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, temos $0 \sim_1 x$ e $x \sim_2 Ax$. Logo $0 \sim Ax$ e portanto $Ax \in S$ para todo x . É claro que a recíproca vale: se $0 \sim y$ para algum y , então $0 \sim_1 z \sim_2 y$ e logo $y = Az$ para algum z , ou seja, y está na imagem de A . Concluímos que $S = \text{Im}(A)$.

Agora, seja \sim_1 a relação de $\xrightarrow{m} \circ$, \sim_2 a relação de $\xrightarrow{n} \boxed{A} \xrightarrow{m}$, \sim a composição das duas e S o subespaço de \mathbb{R}^n associado a \sim . Seja $x \in \text{Ker}(A)$. Então, $x \sim_1 Ax = 0 \sim_2 0$. Logo $x \sim 0$, e portanto $x \in S$. Reciprocamente, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \sim 0$. Então, $x \sim_1 z \sim_2 0$ para algum z , mas pela primeira relação temos $z = Ax$ e pela segunda temos $z = 0$; logo, $Ax = 0$ e, portanto, $x \in \text{Ker}(A)$. \square

Vamos ver o que mais podemos fazer com estes subespaços. Primeiro, vamos adicionar mais um açúcar sintático. Vamos denotar o diagrama de um subespaço $S \subset \mathbb{R}^n$ qualquer como

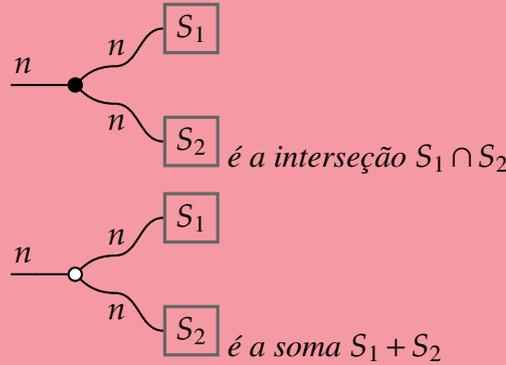
$$\xrightarrow{n} \boxed{S}$$

ou

$$\boxed{S} \xrightarrow{n}$$

dependendo de qual dos dois jeitos de se especificar um subespaço está sendo usado. Interseção e soma de subespaços vêm facilmente.

Teorema 2.2.9.



(onde $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \bullet \text{---} n \\ \text{---} n \end{array}$ é a relação $x \sim (x, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \circ \text{---} n \\ \text{---} n \end{array}$ é a relação $x + y \sim (x, y)$ para todo $x, y, \in \mathbb{R}^n$).

Demonstração. Seja \sim_c a relação $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \bullet \text{---} n \\ \text{---} n \end{array}$, \sim_i a $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \boxed{S_i} \\ \text{---} n \end{array}$ para $i = 1, 2$ e \sim a relação composta por elas indicada no teorema. Seja S o subespaço associado a esta relação. Todo elemento da interseção $S_1 \cap S_2$ está em S : se $x \in S_1 \cap S_2$, então $x \sim_1 0$ e $x \sim_2 0$, logo $(x, x) \sim_1 + \sim_2 0$ e daí $x \sim_c (x, x) \sim_1 + \sim_2 0$; portanto, $x \sim 0$, ou seja, $x \in S$. Reciprocamente, se $x \sim 0$, então $x \sim_1 (z_1, z_2) \sim_1 + \sim_2 0$. Pela segunda relação, temos $z_1 \in S_1$ e $z_2 \in S_2$ e, pela primeira, temos $z_1 = z_2 = x$; logo, $x \in S_1 \cap S_2$.

Seja \sim_s a relação $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \circ \text{---} n \\ \text{---} n \end{array}$, \sim_i a $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \boxed{S_i} \\ \text{---} n \end{array}$ para $i = 1, 2$ e \sim a relação composta por elas indicada no teorema. Seja S o subespaço associado a esta relação. Todo elemento da soma $S_1 + S_2$ está em S : se $x \in S_1 + S_2$, então $x = y_1 + y_2$ com $y_1 \in S_1$ e $y_2 \in S_2$ e daí $(y_1, y_2) \sim_1 + \sim_2 0$. Como $x = y_1 + y_2$, então $x \sim_s (y_1, y_2) \sim_1 + \sim_2 0$ e logo $x \sim 0$, ou seja, $x \in S$. Reciprocamente, se $x \in S$, então $x \sim_s (z_1, z_2) \sim_1 + \sim_2 0$. Pela segunda relação, $z_1 \in S_1$ e $z_2 \in S_2$ e, pela primeira, $x = z_1 + z_2$. Assim, concluímos que $x \in S_1 + S_2$. □

O que acontece se aplicarmos as operações de reflexão vertical e troca de cor para diagramas que representam subespaços? A reflexão vertical não faz “nada”: se o subespaço é dado por uma relação do tipo $x \sim 0$ se e só se $x \in S$, então a reflexão vertical dela é só a relação $0 \sim x$ se e só se $x \in S$, que é simplesmente nosso outro tipo de relação que denota subespaços. É por isso que escolhemos um quadrado verticalmente simétrico para nosso açúcar sintático de subespaços: a reflexão vertical de $\begin{array}{c} \text{---} n \text{---} \boxed{S} \\ \text{---} n \end{array}$ é $\begin{array}{c} \boxed{S} \text{---} n \\ \text{---} n \end{array}$.

Agora, o que faz a troca de cor?

Teorema 2.2.10. $\overset{n}{\square} S$ é o complemento ortogonal de S .

Demonstração. Todo subespaço $S \subset R^n$ pode ser escrito como a imagem de alguma transformação linear $A : R^n \rightarrow R^n$ (por exemplo, a projeção ortogonal sobre S). Então, pelo functor do teorema 2.2.5 ser fiel, temos que $\overset{n}{\square} S = \overset{n}{\circlearrowleft} A \overset{n}{\bullet}$ (onde esta igualdade é válida em $\widetilde{\mathbf{DFS}}(R)$). Assim, aplicando a troca de cor em ambos os diagramas, temos que $\overset{n}{\square} S = \overset{n}{\bullet} A \overset{n}{\circ}$. Mas, note que $\overset{n}{\bullet} A \overset{n}{\circ}$ é o bizarro do diagrama de A , portanto ele corresponde à matriz de A^T .

Deste modo, pelo teorema 2.2.8, o diagrama $\overset{n}{\bullet} A \overset{n}{\circ}$ corresponde ao kernel de A^T . Mas $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp = S^\perp$, finalizando a demonstração. \square

Podemos usar este último teorema para construir projeções ortogonais:

Teorema 2.2.11. $\overset{n}{\square} S \overset{n}{\circlearrowleft} S$ corresponde a projeção ortogonal sobre o subespaço S .

Demonstração. Sejam \sim_1 e \sim_2 as duas relações $\overset{n}{\square} S \overset{n}{\circlearrowleft} S$ e $\overset{n}{\bullet} S \overset{n}{\circ}$ e \sim a composta das duas. Tome $x, z \in R^n$ tais que $x \sim z$. Deve existir y tal que $x \sim_1 y \sim_2 z$. Da primeira relação, temos que $y = x + y'$ para algum $y' \in S^\perp$. Da segunda relação, temos que $z = y$ e $y \in S$, o que implica que $x = y - y'$ é a decomposição de x em elementos de S e S^\perp e, portanto, chamando de P a projeção ortogonal em S , temos que $Px = y$. Logo $x \sim y = Px$. Para terminar a demonstração, basta mostrar que, para todo x , temos $x \sim Px$. Isto é claro: $x = Px + (x - Px)$ com $x - Px \in S^\perp$, logo $x \sim_1 x + (Px - x) = Px$ e $Px \sim_2 Px$ pois $Px \in S$. Deste modo, $x \sim Px$, como queríamos. \square

Vamos finalizar nossas brincadeiras diagramáticas com uma última caracterização visual de um conceito de álgebra linear: o determinante. Dado um diagrama, chamamos de *fluxo viável* uma escolha de n caminhos ligando cada entrada a uma única saída (isto é, dois caminhos não podem acabar na mesma saída). Para um tal fluxo f , seja $p(f)$ o produto das ampliações de

cada um desses caminhos (usando a linguagem do teorema 2.2.3). Veja também que f induz uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ de acordo com a bijeção entre entradas e saídas, e aí defina $\text{sign}(f)$ como sendo o sinal desta permutação. Então:

Teorema 2.2.12. *Seja A uma matriz, d seu diagrama e F o conjunto de fluxos viáveis de d . Então*

$$\det(A) = \sum_{f \in F} \text{sign}(f)p(f)$$

Demonstração. Sejam P o conjunto de permutações de $\{1, \dots, n\}$, $A = [a_{ij}]$ e C_{ij} o conjunto de caminhos da i -ésima entrada pra j -ésima saída. Então:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in P} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P} \text{sign}(\sigma) \sum_{c \in C_{1\sigma(1)}} \text{amp}(c) \cdots \sum_{c \in C_{n\sigma(n)}} \text{amp}(c) \\ &= \sum_{\sigma \in P} \sum_{c_1 \in C_{1\sigma(1)}} \cdots \sum_{c_n \in C_{n\sigma(n)}} \text{sign}(\sigma) \text{amp}(c_1) \cdots \text{amp}(c_n), \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade é a definição de determinante, a segunda usa o teorema 2.2.3 e a terceira é apenas distributividade. Mas note que, para cada permutação σ e escolha de n caminhos $c_1 \in C_{1\sigma(1)}, \dots, c_n \in C_{n\sigma(n)}$, temos um fluxo viável f , e o termo sendo somado é exatamente $p(f)$; reciprocamente, para cada fluxo viável, temos uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ e n caminhos das entradas para as saídas. Logo, temos a igualdade desejada

$$\sum_{\sigma \in P} \sum_{c_1 \in C_{1\sigma(1)}} \cdots \sum_{c_n \in C_{n\sigma(n)}} \text{sign}(\sigma) \text{amp}(c_1) \cdots \text{amp}(c_n) = \sum_{f \in F} \text{sign}(f)p(f)$$

□

TEORIA DE SISTEMAS

Vamos agora adentrar em uma aplicação específica, no mundo da Teoria de Sistemas. Começamos introduzindo o chamado *approach comportamental* em teoria de sistemas, desenvolvido pelo teórsta de sistemas Jan C. Willems como uma alternativa ao jeito usual de se pensar nesta área, muito bem exposta no artigo ([WILLEMS, 2007](#)) de onde tiramos as imagens usadas neste capítulo. A filosofia composicional deste approach foi de grande influência aos teóristas de categoria aplicada de hoje em dia. Através dela, iremos desenvolver um framework categórico para o estudo de uma classe específica de sistemas, os comportamentos LTI, que permite o desenvolvimento de uma linguagem gráfica de raciocínio sobre estes sistemas.

3.1 Approach Comportamental em Teoria de Sistemas

Estamos interessados em estudar sistemas que são *abertos e interconectados*. Aberto significa que o sistema interage com o seu ambiente de alguma forma, trocando algum tipo de recurso ou energia. Interconectado significa que o sistema é constituído de múltiplos subsistemas interconectados entre si. Um sistema sempre possui variáveis que o caracterizam. Elas são os valores que podemos observar nele. A evolução no tempo de suas variáveis é o que define um sistema dinâmico. No approach tradicional de sistemas, modelamos um sistema dividindo suas variáveis em inputs e outputs. Os inputs funcionam para capturar a influência do ambiente no sistema e, os outputs, a influência do sistema no ambiente. Já para representar a interconexão, usamos conexões de inputs-para-outputs.

O approach comportamental começa criticando esta visão. Ele argumenta que a divisão das variáveis do sistema em inputs e outputs é arbitrária. Em geral, quando temos múltiplos sistemas interconectados, não há um jeito natural de se interpretar quais das variáveis estão *causando* umas às outras. O que acontece é simplesmente um *compartilhamento de variáveis*. Os sistemas estão interconectados pois as variáveis que os definem são compartilhadas. Não há um sinal sendo transmitido de um para o outro, e ver interconexões como conexões de

input-para-output geralmente introduz algum tipo de mecanismo de transmissão de sinal que não é parte da física do sistema ou da interconexão.

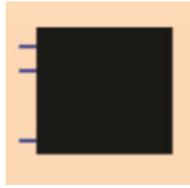
Precisamos, então, tratar todas as variáveis de um sistema num mesmo pé de igualdade. Postulamos, então, que para caracterizar um sistema, precisamos de um conjunto \mathbb{W} que contém todos os estados existentes de um certo número de variáveis. Chamamos este conjunto de *espaço de sinais*. Por exemplo, no caso de um estudo de gás ideal, poderíamos dizer que estamos interessados em estudar as variáveis pressão P , volume V , temperatura T e a massa/número de moles N . Assim, \mathbb{W} seria o conjunto $(0, \infty)^4$. Queremos estudar sistemas que evoluem no tempo, então precisamos de um conjunto \mathbb{T} que chamamos de *eixo do tempo*. Este será geralmente o conjunto dos reais, naturais ou inteiros. As *trajetórias* de um sistema, então, são elementos de $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$. Agora, as leis da natureza não permitem que todas as trajetórias sejam realizadas. Por exemplo, no caso dos gases ideais, temos a lei dos gases ideais que diz que sempre temos $PV = NRT$, onde R é uma constante. Então, qualquer trajetória deve estar contida no subconjunto menor $\mathbb{W}'^{\mathbb{T}}$ onde $\mathbb{W}' = \{(P, V, N, T) \in (0, \infty)^4 \mid PV = NRT\}$. Esta restrição do conjunto de sinais é o principal. Ela é o que chamamos de *comportamento*, que é um subconjunto \mathcal{B} do conjunto de trajetórias $\mathbb{W}^{\mathbb{T}}$. Isto finaliza nossa definição:

Definição 3.1.1. Um *sistema dinâmico* é uma tripla $(\mathbb{T}, \mathbb{W}, \mathcal{B})$, onde \mathbb{T} é o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} ou dos reais \mathbb{R} e é chamado de *eixo do tempo*, \mathbb{W} é um conjunto qualquer chamado *espaço de sinais*, e \mathcal{B} é um subconjunto de $\mathbb{W}^{\mathbb{T}} = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{W} \mid f \text{ é função}\}$ chamado de *comportamento*.

O comportamento é o conceito central deste approach. Usualmente, ele é dado como o conjunto de soluções de alguma equação diferencial, mas existem muitos outros jeitos de se especificar um comportamento.

Veja que esta definição satisfaz o nosso requisito inicial de tratar todas as variáveis no mesmo pé de igualdade. No entanto, é possível e até muitas vezes útil interpretar algumas variáveis como input e outras como output, através de uma partição do espaço de sinais \mathbb{W} . Por exemplo, na modelagem de sistemas abertos, podemos escolher algumas variáveis como inputs e outputs do ambiente.

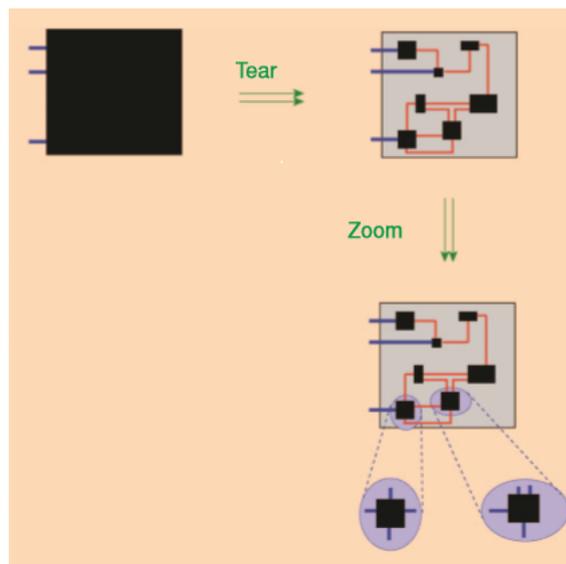
O approach comportamental segue especificando uma filosofia de modelagem de sistemas interconectados. Dado um sistema qualquer, para o modelarmos, isto é, para obter uma descrição matemática dele em termos de um comportamento, seguimos um processo de três partes: *tear*, *zoom* e *link*. Primeiramente, temos um sistema visto como uma “caixa preta”, com terminais conectados a ele representando todas as suas variáveis



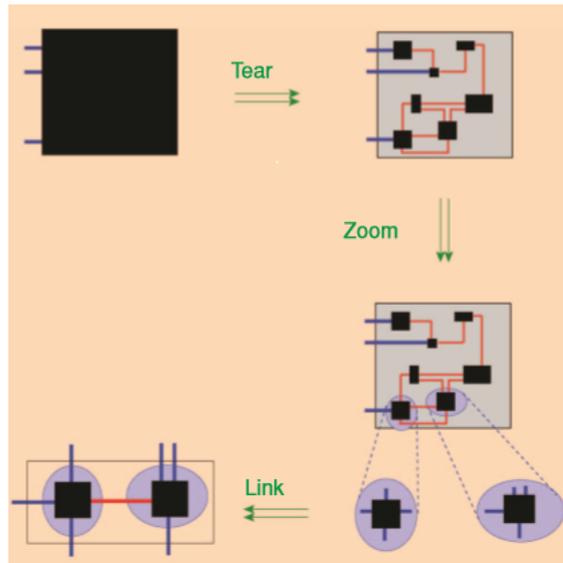
Começamos o processo de modelagem com o *tear*, ou *separação*. Nele, identificamos os subsistemas dos quais o nosso sistema é composto.



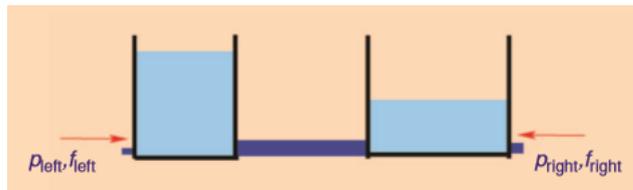
Agora, seguimos para o *zoom*, onde damos “zoom” em cada um dos subsistemas, e recursivamente aplicamos o processo de modelagem em cada um deles. É claro que, eventualmente, devemos chegar a um subsistema cujo funcionamento postulamos por primeiros princípios, digamos, por leis físicas básicas.



Finalmente, terminamos com o *link*, ou *conexão*, onde identificamos como os sistemas estão interconectados, isto é, quais variáveis estão sendo compartilhadas.



Vamos dar um exemplo para ilustrar o processo. Vamos modelar um sistema hidráulico, consistindo de dois tanques cheios de água conectados por um cano.

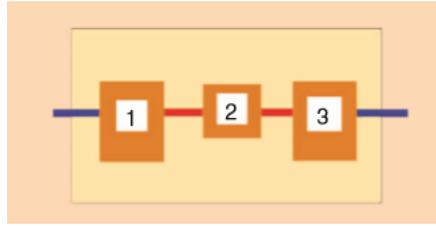


Os tanques possuem saídas na esquerda e na direita respectivamente. As variáveis que estamos interessados serão a pressão e o fluxo em cada uma das saídas. Então, imaginamos este sistema como uma caixa preta com dois terminais, onde cada terminal representa o par $(p_{\text{esquerda}}, f_{\text{esquerda}})$ e $(p_{\text{direita}}, f_{\text{direita}})$ de pressão e fluxo.

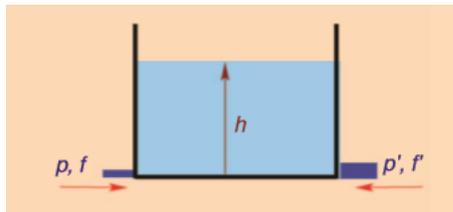


Nosso objetivo é encontrar o comportamento destas variáveis. Ou seja, encontrar as possíveis trajetórias temporais $(p_{\text{esquerda}}, f_{\text{esquerda}}, p_{\text{direita}}, f_{\text{direita}}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Primeiramente, no processo de tear, descobrimos quais são os subsistemas que compõem este sistema. Estes serão os dois tanques e o cano entre eles.



Agora, damos zoom em cada um destes sistemas e aplicamos o processo de modelagem. Os três terão o mesmo número de terminais, ou seja, variáveis: dois pares de pressão e fluxo na esquerda e na direita. Como os três são simples o suficiente, os modelamos por leis físicas diretamente. Seja (p_i, f_i) o par pressão e fluxo da esquerda do i -ésimo sistema e (p'_i, f'_i) o par pressão e fluxo da direita do i -ésimo sistema. (O primeiro tanque é o primeiro sistema, o cano é o segundo e o segundo tanque é o terceiro.) Para modelar os tanques, introduzimos uma variável auxiliar a mais h_i que é a altura do líquido no tanque



E aí usamos a lei de Bernoulli, e conservação de massa, para postularmos as equações

$$A \frac{d}{dt} h_i = f_i + f'_i$$

$$B f_i = \begin{cases} \sqrt{|p_i + D h_i + E|} & \text{se } p_i + E \geq D h_i \\ -\sqrt{|p_i + D h_i + E|} & \text{se } p_i + E \leq D h_i \end{cases}$$

$$C f'_i = \begin{cases} \sqrt{|p'_i + D h_i + E|} & \text{se } p'_i + E \geq D h_i \\ -\sqrt{|p'_i + D h_i + E|} & \text{se } p'_i + E \leq D h_i \end{cases}$$

para $i = 1, 3$, onde A, B, C, D, E são constantes que dependem da geometria e das propriedades materiais dos objetos envolvidos. As trajetórias que são soluções deste sistema de equações constituem os comportamentos dos sistemas 1 e 3.

Já para o cano, escolhemos um modelo simplificado

$$f_2 = -f'_2$$

$$p_2 - p'_2 = \alpha f_2$$

onde α é uma constante que depende da geometria e das propriedades materiais do fluido e do cano. As trajetórias que são soluções deste sistema de equações constituem o comportamento do sistema 2.

Agora, passamos para a parte do link. Descobrimos como os subsistemas estão interconectados, ou seja, quais variáveis estão sendo compartilhadas. Encontramos as relações

$$\begin{aligned}
 p_{\text{esquerda}} &= p_1 \\
 f_{\text{esquerda}} &= f_1 \\
 f'_1 &= -f_2 \\
 p'_1 &= p_2 \\
 f'_2 &= -f_2 \\
 p'_2 &= p_3 \\
 p'_3 &= p_{\text{direita}} \\
 f'_3 &= f_{\text{direita}}
 \end{aligned}$$

Finalmente, então, juntando as equações do link com as equações de modelagem do cano e dos tanques, temos as equações que definem o comportamento do nosso sistema.

3.2 Comportamentos LTI

Vamos agora nos restringir a certos tipos de sistemas dinâmicos. Vamos fixar um corpo k de agora em diante. Nosso eixo temporal será os inteiros \mathbb{Z} , o espaço de sinais será k^n para algum n natural, o qual chamaremos de número de *terminais* do nosso sistema. Um comportamento, então, será um subconjunto \mathcal{B} de $(k^n)^{\mathbb{Z}}$. E, mais ainda, definimos três propriedades que iremos pedir dos nossos comportamentos:

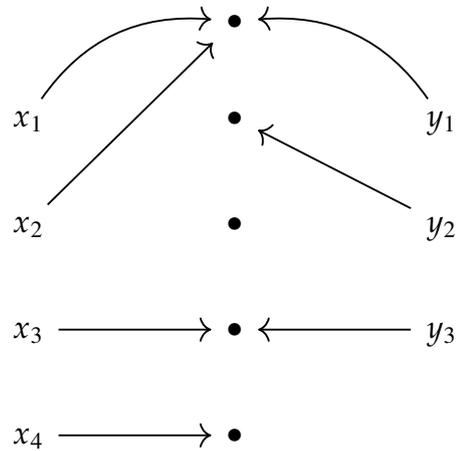
- \mathcal{B} é *linear* quando \mathcal{B} é um subespaço linear de $(k^n)^{\mathbb{Z}}$.
- \mathcal{B} é *tempo-invariante* quando, para qualquer trajetória $w \in \mathcal{B}$ e $i \in \mathbb{Z}$, a trajetória w' definida por $w'(t) = w(t + i)$ também está em \mathcal{B}
- dados dois inteiros $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$, seja $w|_{[t_0, t_1]}$ a restrição de w ao intervalo

$$[t_0, t_1] = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}$$

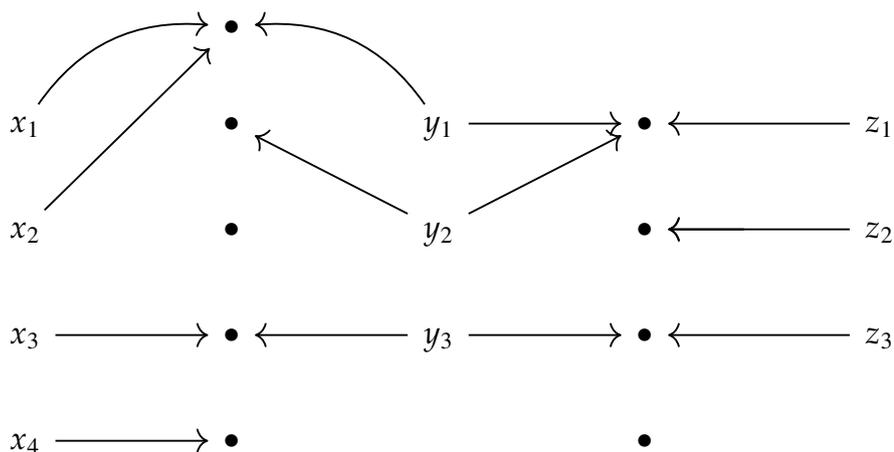
e $\mathcal{B}|_{[t_0, t_1]}$ o conjunto de todas as restrições de trajetórias $w \in \mathcal{B}$. Dizemos que \mathcal{B} é *completo* se vale o seguinte: para qualquer trajetória $w : \mathbb{Z} \rightarrow (k^n)^{\mathbb{Z}}$, se $w|_{[t_0, t_1]} \in \mathcal{B}|_{[t_0, t_1]}$ para todo $t_0 \leq t_1 \in \mathbb{Z}$, então $w \in \mathcal{B}$.

Definimos um *comportamento LTI* como um comportamento que satisfaz essas três propriedades, junto com uma partição do espaço de sinais em duas partes, que chamamos de domínio e codomínio. Formalmente:

Esta é uma definição bem abstrata, mas ela é simples de se visualizar em **Set**. Denotando algum cospan $X \rightarrow N \leftarrow Y$ da seguinte forma

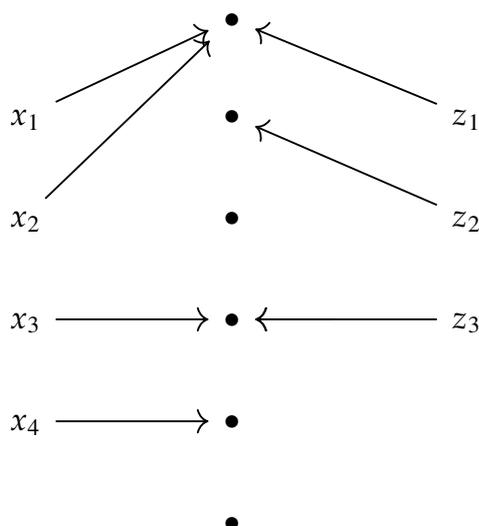


onde o conjunto N é o conjunto de pontos do meio, e as setas são as imagens dos elementos de $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, imaginamos que estamos representando algum sistema que tem como elementos de N os seus “terminais” de entrada e saída; os elementos de X e Y são respectivamente os inputs e outputs. Então, para compor com algum outro cospan $Y \rightarrow M \leftarrow Z$



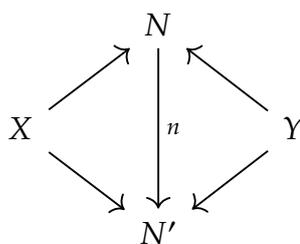
imaginamos que o output de N entra como input de M . Então, o novo sistema deverá ter como terminais os terminais de N e M , porém, com os terminais que são imagens do mesmo elemento de Y identificados, para representar esta “colagem” de outputs com inputs. O cospan resultante

dessa composição é



onde o conjunto do meio é a união disjunta $N \sqcup M$ quocientada pela relação de equivalência que é o fecho transitivo, simétrico e reflexivo da relação que associa os pares de elementos que são imagens de um mesmo elemento de Y pelas funções $Y \rightarrow M$ e $Y \rightarrow N$. Este conjunto é exatamente o pushout na categoria **Set**.

Voltamos agora para o caso geral. Precisamos definir uma noção de equivalência entre cospans para que a composição seja associativa, e então teremos uma categoria de cospans. Definimos que dois cospans $X \rightarrow N \leftarrow Y$ e $X \rightarrow N' \leftarrow Y$ são isomorfos quando existe um isomorfismo $n : N \rightarrow N'$ que comuta o diagrama

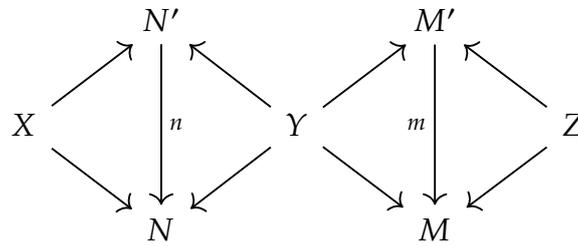


É imediato que isto define uma relação de equivalência no conjunto de cospans. Temos, então:

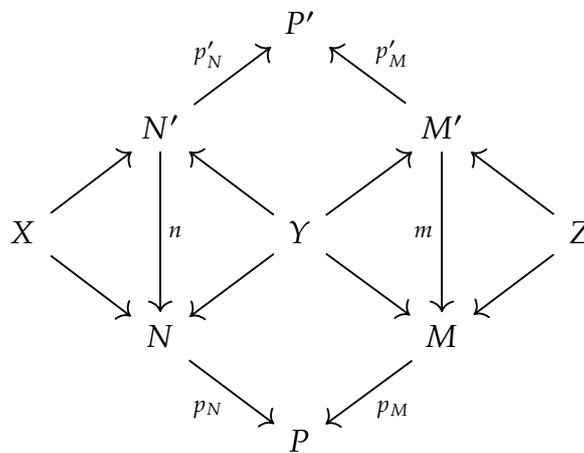
Teorema 3.2.1. *Para qualquer categoria \mathcal{C} com pushouts, existe uma categoria $\mathbf{Cospan}(\mathcal{C})$ cujos objetos são os objetos de \mathcal{C} , os morfismos $X \rightarrow Y$ são classes de equivalência de cospans de X para Y , e a composição é dada pelo pushout como descrito anteriormente.*

Demonstração. Precisamos mostrar que a composição está bem definida, é associativa e possui unidade.

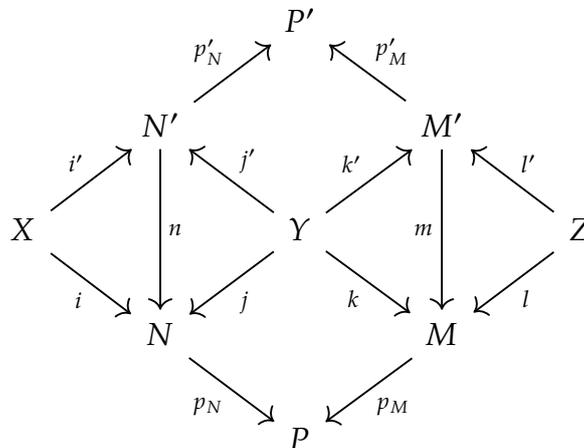
- boa definição: suponha que temos dois cospans de X para Y isomorfos e dois cospans de Y para Z isomorfos



onde n e m são isomorfismos. Precisamos mostrar que o cospan resultante da composição feita com os cospans de N' e M' é isomorfo ao cospan resultante da composição feita com os cospans de N e M . Fazendo o pushout sobre Y nos dois, obtemos:

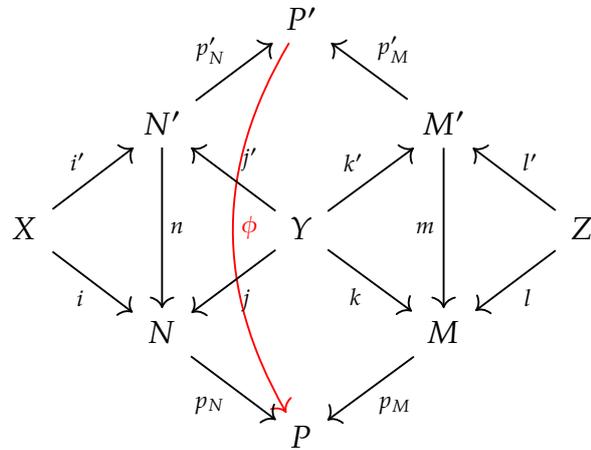


Precisamos construir um isomorfismo de P' para P que comuta o maior quadrado. A ideia é simples: o diagrama $N' \xrightarrow{n \circ p_N} P \xleftarrow{m \circ p_M} M'$ é um co-cone sob o diagrama $N' \leftarrow Y \rightarrow M'$, logo, por definição de colimite, devemos ter um morfismo de P' para P , e este será nosso isomorfismo. Vamos dar nome para todas as setas para que possamos provar estas afirmações.



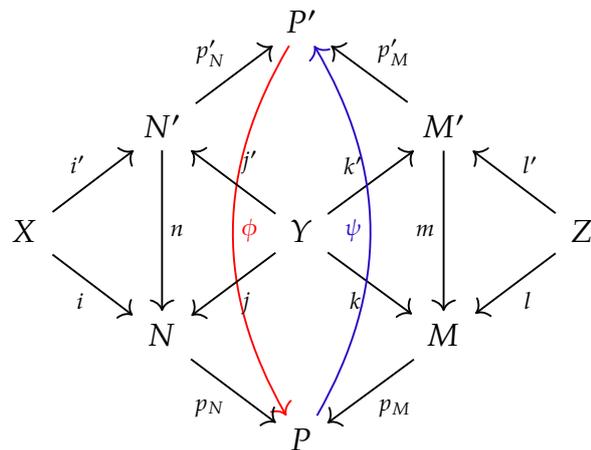
Para provar que o diagrama $N' \xrightarrow{n \circ p_N} P \xleftarrow{m \circ p_M} M'$ é um co-cone, precisamos mostrar que $j' \circ n \circ p_N = k' \circ m \circ p_M$. Mas, veja que $j' \circ n = j$ por definição de isomorfismo de cospans,

$j \circ p_N = k \circ p_M$ por definição de colimite e $k = k' \circ m$ por definição de isomorfismo, e portanto $j' \circ n \circ p_N = j \circ p_N = k \circ p_M = k' \circ m \circ p_m$ que era o que queríamos. Obtemos então, por definição do colimite, um morfismo $\phi : P' \rightarrow P$

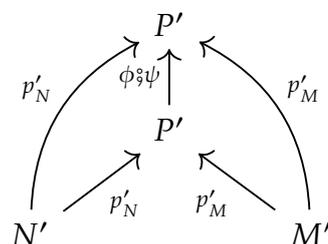


Precisamos mostrar que ele é um isomorfismo que faz o quadrado maior comutar, ou seja, vale que $i' \circ p'_N \circ \phi = i \circ p_N$ e que $l' \circ p'_M \circ \phi = l \circ p_M$. Para ver a primeira igualdade, temos que $p'_N \circ \phi = n \circ p_N$ por definição de colimite e $i' \circ n = i$ por definição de isomorfismo de cospans. Logo, $i' \circ p'_N \circ \phi = i' \circ n \circ p_N = i \circ p_N$. A segunda igualdade é análoga.

Resta apenas mostrar que ϕ é um morfismo invertível. Para isso, repita a construção anterior, usando agora $n^{-1} : N \rightarrow N'$ e $m^{-1} : M \rightarrow M'$ ao invés de n e m . Iremos construir dessa forma um outro morfismo de cospans $\psi : P \rightarrow P'$

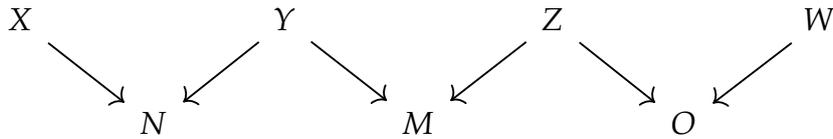


Para ver que $\phi \circ \psi = 1_{P'}$, usamos a unicidade das setas do colimite. Veja que $\phi \circ \psi$ faz o seguinte diagrama comutar

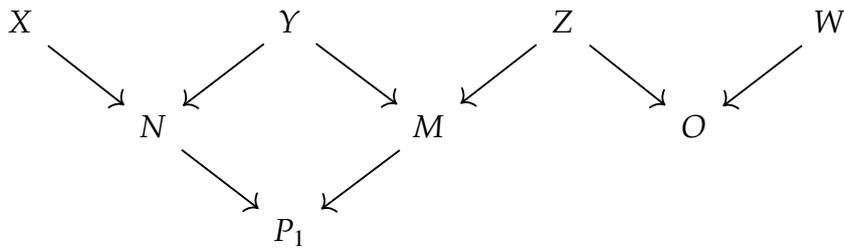


pois $p'_N \circ \phi \circ \psi = (n \circ p_N) \circ \psi = n \circ (n^{-1} \circ p'_N) = p'_N$ pelas propriedades definidoras de ψ e ϕ . Analogamente provamos a outra igualdade. Mas note que a seta idêntica $1_{P'}$ também faz este diagrama comutar, ou seja, ambas são morfismos na categoria de cocones partindo do colimite. Como o colimite é o objeto inicial da categoria de cocones, este morfismo deve ser único, ou seja, temos que ter $\phi \circ \psi = 1_{P'}$

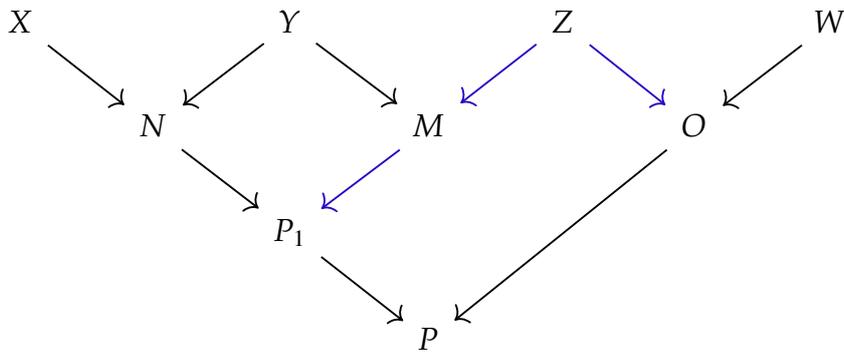
- associatividade: precisamos mostrar que, dados três cospans $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow W$, temos $(f \circ g) \circ h \cong f \circ (g \circ h)$. Tome, então, três cospans, que respectivamente chamamos de f, g e h



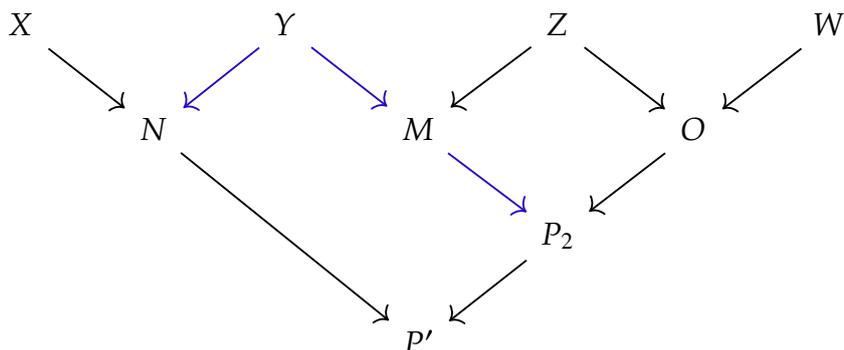
Para calcular $(f \circ g) \circ h$, fazemos primeiro o pushout sobre Y



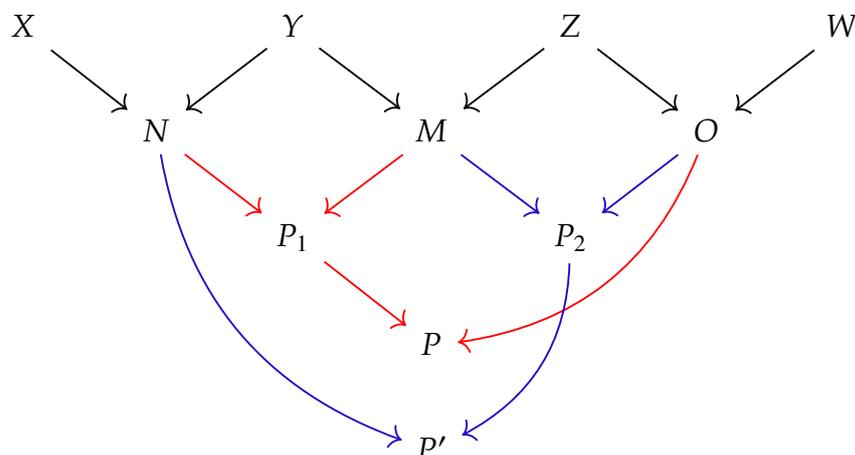
e depois o pushout sobre Z , que é o colimite do diagrama em azul:



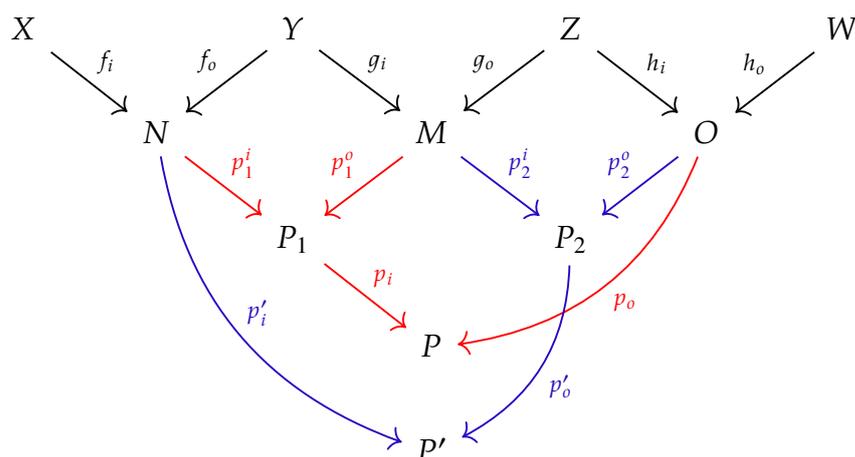
Fazemos a mesma coisa para calcular $f \circ (g \circ h)$, primeiro achando o pushout P_2 do cospan $M \leftarrow Z \rightarrow O$ e depois o pushout P' do diagrama em azul:



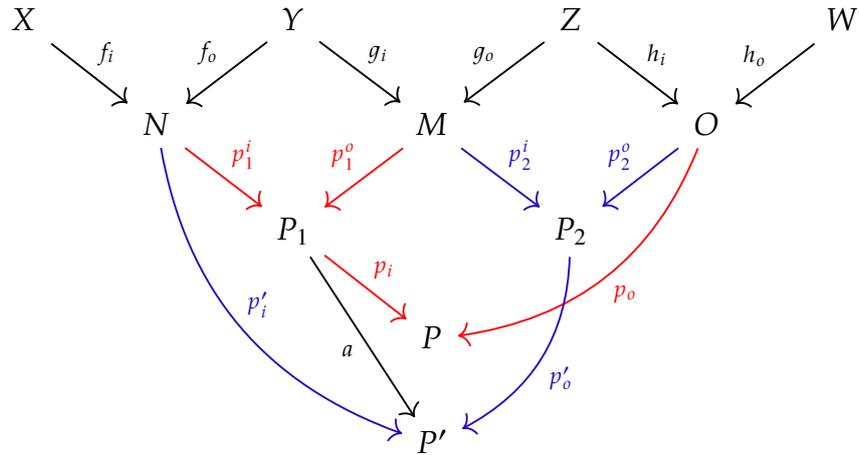
Vamos colocar todos estes pushouts em um único diagrama, colorindo os pushouts referentes a $(f \circledast g) \circledast h$ de vermelho, e os pushouts referentes a $f \circledast (g \circledast h)$ de azul, para (tentar) minimizar a confusão:



Vamos construir um morfismo de P em P' . Vamos ter que dar nomes a todas as setas.



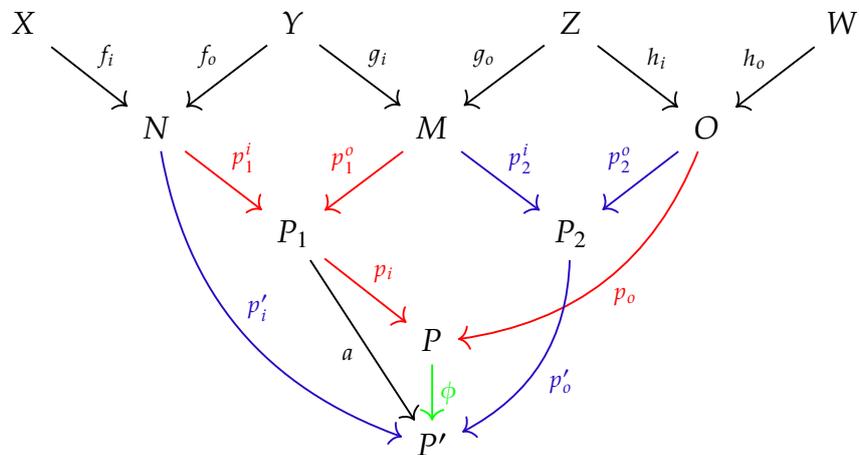
Primeiramente, veja que como $N \xrightarrow{p'_i} P' \xleftarrow{p'_o} P_2$ é o colimite de $N \xleftarrow{f_o} Y \xrightarrow{g_i \circledast p_2^i} P_2$, temos que $N \xrightarrow{p'_i} P' \xleftarrow{p_2^i \circledast p'_o} M$ é um cocone sobre $N \xleftarrow{f_o} Y \xrightarrow{g_i} M$, e portanto existirá uma seta $a : P_1 \rightarrow P'$, pois P_1 é o colimite desse diagrama.



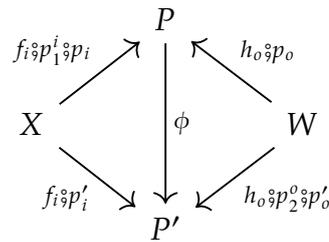
Agora, $P_1 \xrightarrow{a} P' \xleftarrow{p_2^o \circ p_1^o} O$ é um cocone sobre $P_1 \xleftarrow{g_o \circ p_1^o} Z \xrightarrow{h_i} O$ pois

$$\begin{aligned} g_o \circ p_1^o \circ a &= g_o \circ (p_1^o \circ a) \\ &= g_o \circ ((p_2^i) \circ p_1^o) \\ &= (g_o \circ p_2^i) \circ p_1^o \\ &= (h_i \circ p_2^o) \circ p_1^o \end{aligned}$$

onde todas as equações seguem das propriedades que definem o pushout em cada caso. Logo, deve existir uma seta $\phi : P \rightarrow P'$, já que P é o colimite do diagrama $P_1 \xleftarrow{g_o \circ p_1^o} Z \xrightarrow{h_i} O$.



Essa seta será nosso isomorfismo de cospans. Ela faz o diagrama necessário comutar:



pois

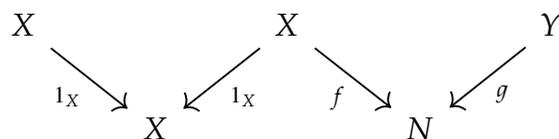
$$\begin{aligned} f_i \circ p_1^i \circ p_i \circ \phi &= f_i \circ p_1^i \circ a \\ &= f_i \circ p'_i \end{aligned}$$

e

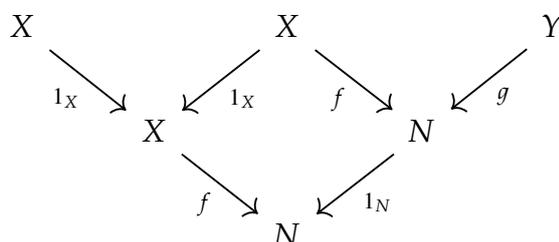
$$\begin{aligned} h_o \circ p_o \circ \phi &= h_o \circ p_2^o \circ p'_o \\ &= h_o \end{aligned}$$

Aqui, novamente, usamos apenas as igualdades garantidas pela definição de pushout. Finalmente, para provar que ela é isomorfismo, basta repetir esta construção, só que agora trocando os papéis de P_1 e P_2 , e de P e P' , construindo um isomorfismo $\psi : P' \rightarrow P$. Este será a inversa de ϕ , o que é provado usando a unicidade do colimite, análogo à demonstração anterior sobre boa definição.

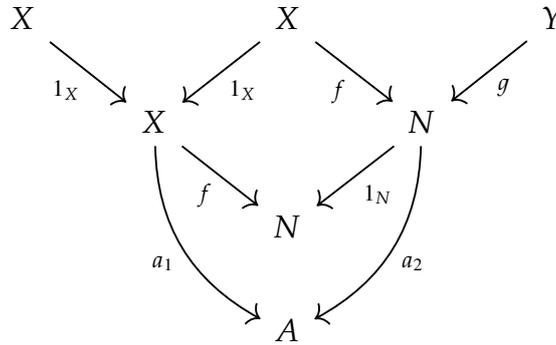
- existência de unidade: o cospan unitário para um objeto X é simplesmente o cospan $X \xrightarrow{1_X} X \xleftarrow{1_X} X$. De fato, tome um cospan $X \rightarrow N \leftarrow Y$



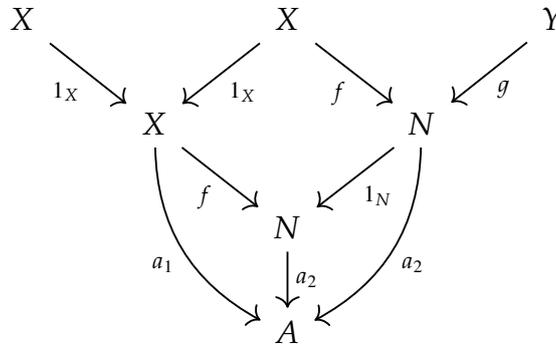
Agora, o próprio cospan será o colimite



Ele é claramente um cocone, pois $1_X \circ f = f \circ 1_N$. E ele será o cocone inicial, ou seja, o colimite, pois, para qualquer outro cocone



simplesmente definimos a seta de N para a A como sendo o próprio a_2



e o diagrama necessário comuta: $1_N \circ a_2 = a_2$ e $f \circ a_2 = a_1$, pois $X \xrightarrow{a_1} A \xleftarrow{a_2}$ é um cocone e, portanto, $1_X \circ a_1 = f \circ a_2$.

A demonstração que este cospan também é unidade quando composto pela esquerda é inteiramente análoga.

□

Agora, cospans de certa forma carregam muita informação desnecessária. Veja que no exemplo que demos de composição de cospans em **Set**, temos dois elementos a mais em N que não são necessários para a composição. Para resolver este problema, poderíamos pedir que os dois mapas do cospan $X \rightarrow N \leftarrow Y$ esgotam os elementos de N . Veja que isto é o mesmo que pedir que o *copareamento* $[i, j] : X + Y \rightarrow N$ é sobrejetivo (em **Set**, $X + Y$ é a união disjunta de X com Y , e $[i, j]$ é apenas a função que em X é i e em Y é j). Isto é o que definimos como uma *corelação*. Ela é, de certa forma, o dual da relação, pois uma relação, em **Set**, pode ser vista como um span $X \leftarrow N \rightarrow Y$ tal que o mapa $(i, j) : N \rightarrow X \times Y$ (definido, é claro, como sendo i na primeira coordenada e j na segunda) é injetor.

Em uma categoria qualquer, precisaríamos fazer sentido de o que é um morfismo sobrejetor para que possamos definir uma corelação. Para isto, fazemos a seguinte definição (lembrando que uma subcategoria \mathcal{D} de \mathcal{C} é uma categoria cujos objetos são os mesmos que \mathcal{C} , os morfismos dela estão contidos nos de \mathcal{C} e a composição é a mesma).

Definição 3.2.2. Um sistema de fatoração $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ em uma categoria \mathcal{C} consiste de duas subcategorias \mathcal{L} e \mathcal{R} tais que

- \mathcal{L} e \mathcal{R} contêm todos os isomorfismos de \mathcal{C}
- todo morfismo f de \mathcal{C} pode ser fatorado como $f = l \circ r$ onde $l \in \mathcal{L}$ e $r \in \mathcal{R}$.
- dado morfismos f, f' com fatorações $f = l \circ r$, $f' = l' \circ r'$ do tipo acima, para quaisquer morfismos u, v tal que $f \circ v = u \circ f'$, existe um único morfismo t tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & \xrightarrow{l} & \bullet & \xrightarrow{r} & \bullet \\
 u \downarrow & & \vdots t & & \downarrow v \\
 \bullet & \xrightarrow{l'} & \bullet & \xrightarrow{r'} & \bullet
 \end{array}$$

Em **Set**, as funções sobrejetivas formam uma subcategoria \mathcal{E} e as funções injetivas uma subcategoria \mathcal{M} . Este par dá origem a um sistema de fatoração. Isto vem do Teorema 3.2.2 (abaixo); para enunciá-lo, precisamos antes de uma rápida definição.

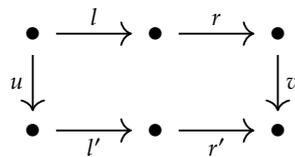
Definição 3.2.3. Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} é um *epimorfismo* quando $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica $g_1 = g_2$ para quaisquer morfismos g_1, g_2 . Ele é um *epimorfismo split* quando existe $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_B$.

Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em uma categoria \mathcal{C} é um *monomorfismo* quando $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica $g_1 = g_2$ para quaisquer morfismos g_1, g_2 . Ele é um *monomorfismo split* quando existe $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_A$.

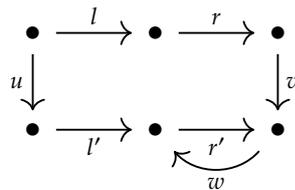
Note que, não contraditoriamente, epimorfismos split são epimorfismos e monomorfismos split são monomorfismos. A inversa nos permite cancelar o morfismo nos dois lados da equação: no caso do epimorfismo split, por exemplo, aplicamos a inversa a esquerda g em ambos os lados de $f \circ g_1 = f \circ g_2$ e obtemos que $g_1 = g_2$.

Teorema 3.2.2. Seja \mathcal{C} uma categoria, \mathcal{E} sua subcategoria de epimorfismos e \mathcal{M} sua subcategoria de monomorfismos split. Se todo morfismo de \mathcal{C} pode ser escrito como um epimorfismo composto com um monomorfismo split, então $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é um sistema da fatoração em \mathcal{C} .

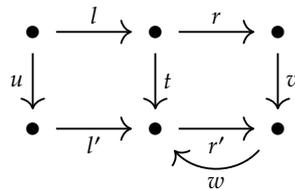
Demonstração. Primeiramente, veja que \mathcal{E} e \mathcal{M} realmente são subcategorias: a composta de dois epimorfismos e, f é epimorfismo, pois se $e \circ f \circ g_1 = e \circ f \circ g_2$, então $f \circ g_1 = f \circ g_2$ por e ser epimorfismo e aí $g_1 = g_2$ por f ser epimorfismo; a composta de dois monomorfismos split e, f é monomorfismo split, pois se g, h são inversas à direita de e e f respectivamente, então $(e \circ f) \circ (g \circ h) = e \circ (f \circ g) \circ h = e \circ 1 \circ h = e \circ h = 1$, ou seja, $g \circ h$ é inversa à direita de $e \circ f$. Agora, precisamos verificar as três condições para que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ seja um sistema de fatoração. A primeira condição é clara: um isomorfismo por definição possui inversa, e logo é um monomorfismo split e um epimorfismo split. A segunda condição faz parte da hipótese do nosso teorema. Vamos provar a terceira. Tome dois morfismos f, f' com fatorações $f = l \circ r$ e $f' = l' \circ r'$, e morfismos u, v tais que o diagrama comuta



Como r' é monomorfismo split, ele admite inversa à direita, ou seja, existe w tal que $r' \circ w = 1$



Defina $t = r \circ v \circ w$



Para mostrar que o diagrama comuta, basta mostrar que os quadrados da esquerda e da direita comutam. Ou seja, que $l \circ t = u \circ l'$ e $t \circ r' = r \circ v$, respectivamente. Para a primeira igualdade, temos

$$\begin{aligned}
 l \circ t &= l \circ r \circ v \circ w \\
 &= u \circ l' \circ r' \circ w \\
 &= u \circ l'
 \end{aligned}$$

onde usamos que $f \circ v = u \circ f'$ e que w é inversa à direita de r' . Para a segunda, começamos compondo $t \circ r'$ com l

$$\begin{aligned}
 l \circ t \circ r' &= l \circ r \circ v \circ w \circ r' \\
 &= u \circ l' \circ r' \circ w \circ r' \\
 &= u \circ l' \circ r' \\
 &= l \circ r \circ v
 \end{aligned}$$

e aí, como l é epimorfismo, concluímos que $t \circ r' = r \circ v$. Isto finaliza a demonstração da comutatividade, e resta apenas mostrar que este morfismo t é único. Suponha que exista algum outro t' que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{l} & \bullet & \xrightarrow{r} & \bullet \\ u \downarrow & & \downarrow t' & & \downarrow v \\ \bullet & \xrightarrow{l'} & \bullet & \xrightarrow{r'} & \bullet \end{array}$$

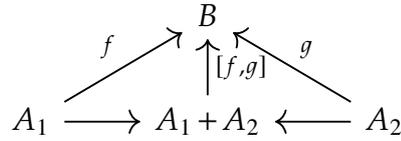
Então, temos $t' \circ r' = r \circ v$. Compondo com w à direita dessa equações, temos $t' \circ r' \circ w = r \circ v \circ w$; no entanto, $r' \circ w = 1$, de onde segue que $t' = r \circ v \circ w = t$. \square

Exemplo 3.2.1. Vamos mostrar que **Set** satisfaz as hipóteses deste teorema. Em **Set**, epimorfismos são funções sobrejetoras e monomorfismos são funções injetoras. De fato, se $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora e temos $f \circ g_1 = f \circ g_2$, então, para todo $y \in B$, existe x tal que $(x)f = y$. Logo, $(y)g_1 = ((x)f)g_1 = (x)f \circ g_1 = (x)f \circ g_2 = (y)g_2$ e, assim, $g_1 = g_2$. Reciprocamente, supondo f não sobrejetora, podemos construir funções $g_1, g_2 : B \rightarrow C$, onde C é um conjunto de dois elementos $\{a, b\}$, tais que $(y)g_1 = a$ para todo $y \in B$, $(y)g_2 = a$ para $y \in f(A)$ e $(y)g_2 = b$ para $y \notin f(A)$. Daí $f \circ g_1 = f \circ g_2$ com $g_1 \neq g_2$. Isto mostra que funções são epimorfismos se e só se são sobrejetoras. A demonstração da equivalência de monomorfismos com funções injetoras é análoga. Uma outra propriedade de **Set**: todo epimorfismo é split e todo monomorfismo é split. Isto vem do simples fato de teoria de conjuntos que toda função sobrejetora tem inversa a esquerda e toda função injetora tem inversa a direita (lembrando que, como a nossa composição está ao contrário da usual, então esta proposição é usualmente afirmada trocada, ou seja, é dito que as sobrejetoras têm inversa a direita e as injetoras inversa a esquerda). Daí, para provar que todo morfismo de **Set** pode ser escrito como um epimorfismo composto com um monomorfismo split, basta provar que toda função $f : A \rightarrow B$ pode ser escrita como uma composta de uma função sobrejetora com uma injetora. A construção é simples: fazemos a corestrição de f , que é a função $g : A \rightarrow f(A)$, $(x)g = (x)f$, e a inclusão $i : f(A) \rightarrow B$. Claramente $f = g \circ i$ com g sobrejetora e i injetora.

Agora podemos definir o que é uma corelação em uma categoria qualquer com um sistema de fatoração $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ e com colimites finitos. Ela é um cospan $X \rightarrow N \leftarrow Y$ tal que o copareamento $[i, j] : X + Y \rightarrow N$ está em \mathcal{E} . Onde, dados dois objetos A_1, A_2 , denotamos o coproduto, ou seja, o colimite do diagrama discreto com estes objetos, como sendo $A_1 + A_2$; e o copareamento de dois morfismos $f : A_1 \rightarrow B$ e $g : A_2 \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \nwarrow g \\ A_1 & & A_2 \end{array}$$

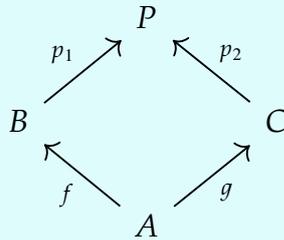
é o morfismo $[f, g] : A_1 + A_2 \rightarrow B$ garantido pela definição de colimite



Definição 3.2.4. Seja C uma categoria com um sistema de fatoração $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ e com colimites finitos (ou seja, todo diagrama com finitos objetos possui um colimite). Então, uma *corelação* é um cospan $X \xrightarrow{i} N \xleftarrow{j} Y$ tal que o copareamento $[i, j] : X + Y \rightarrow N$ está em \mathcal{E} .

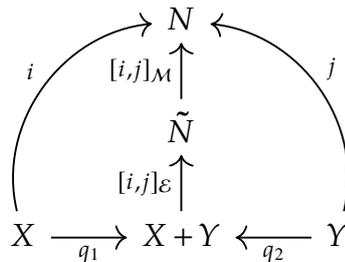
Para compor corelações, podemos compor cospans normalmente, e aí “fatorar” o cospan resultante para obter uma corelação.

Definição 3.2.5. Uma subcategoria \mathcal{D} de uma categoria C é *estável sob pushouts* quando vale a seguinte propriedade: para qualquer diagrama $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$ que tem um pushout $B \xrightarrow{p_1} P \xleftarrow{p_2} C$



temos que $g \in \mathcal{D}$ implica $p_1 \in \mathcal{D}$.

Suponha agora que a subcategoria \mathcal{M} do nossos sistema de fatoração $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de C é estável sob pushouts. Dado um cospan $X \xrightarrow{i} N \xleftarrow{j} Y$, fazemos o copareamento $[i, j] : X + Y \rightarrow N$ e aí o fatoramos $[i, j] = [i, j]_{\mathcal{E}} \circ [i, j]_{\mathcal{M}}$



Definimos que a ϵ -parte do cospan $X \xrightarrow{i} N \xleftarrow{j} Y$ é o cospan $X \xrightarrow{q_1 \circ [i, j]_{\mathcal{E}}} \tilde{N} \xleftarrow{q_2 \circ [i, j]_{\mathcal{E}}} Y$ (provaremos em seguida que esta operação não depende da escolha de representante da classe de equivalência de cospan, nem da escolha de fatoração).

Dadas duas correlações, iremos definir a sua composição como sendo a operação de compor as correlações como cospans, e aí aplicar a operação ϵ -parte no resultado. Isto nos dá a composição necessária para termos nossa categoria de correlações.

Teorema 3.2.3. *Dado uma categoria \mathcal{C} com colimites finitos, um sistema de fatoração $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ com \mathcal{M} estável sob pushouts, existe uma categoria $\mathbf{CoRel}(\mathcal{C})$ tal que os objetos são os objetos de \mathcal{C} e os morfismos $X \rightarrow Y$ são classes de equivalência de correlações $X \rightarrow N \leftarrow Y$, onde a relação de equivalência é a mesma de cospans. A composição é dada da seguinte forma. Dadas duas correlações $X \rightarrow N \leftarrow Y$, $Y \rightarrow N' \leftarrow Z$, definimos a composição de correlações \circ_r como*

$$(X \rightarrow N \leftarrow Y) \circ_r (Y \rightarrow N' \leftarrow Z) = \epsilon\text{-parte}((X \rightarrow N \leftarrow Y) \circ (Y \rightarrow N' \leftarrow Z))$$

onde \circ é a composição de cospans definida previamente.

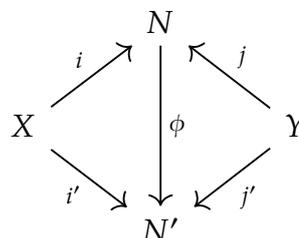
Com isto, temos que ϵ -parte: $\mathbf{CoSpan}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{CoRel}(\mathcal{C})$ é um funtor.

Demonstração. Precisamos mostrar três coisas:

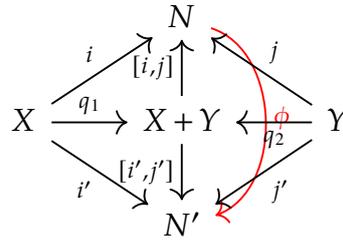
1. um cospan ser uma correlação independe da escolha de representante (para que a relação de equivalência no conjunto de correlações esteja bem definida)
2. a função ϵ -parte está bem definida, ou seja, não depende da escolha de representante da correlação, e nem da escolha da fatoração
3. \circ_r é associativa e possui unidade

Vamos demonstrá-las em ordem.

1. Tome dois cospans isomorfos



e suponha que $X \xrightarrow{i} N \xleftarrow{j} Y$ é corelação, ou seja, $[i, j] \in \mathcal{E}$



Temos as seguintes equações:

$$q_1 \circ [i, j] \circ \phi = i \circ \phi \quad (\text{definição de coproduto})$$

$$= i' \quad (\text{definição de isomorfismo de cospan})$$

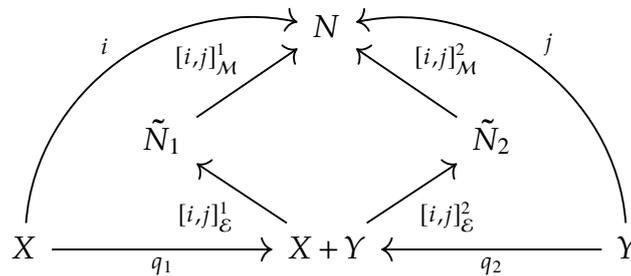
e

$$q_2 \circ [i, j] \circ \phi = j \circ \phi \quad (\text{definição de coproduto})$$

$$= j' \quad (\text{definição de isomorfismo de cospan})$$

Elas mostram que $[i, j] \circ \phi$ é um morfismo de cocones partindo do colimite $X + Y$ e, por unicidade de $[i', j']$, devemos ter $[i, j] \circ \phi = [i', j']$. Como \mathcal{E} contém todos os isomorfismos, devemos ter $\phi \in \mathcal{E}$ e aí por \mathcal{E} ser subcategoria, temos que a composta $[i, j] \circ \phi = [i', j'] \in \mathcal{E}$, que é o que queríamos provar.

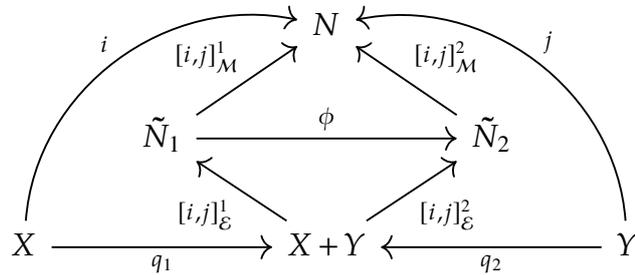
2. Vamos mostrar primeiro que ϵ -parte é independente da fatoração. Seja $X \xrightarrow{i} N \xleftarrow{j} Y$ um cospan com duas fatorações



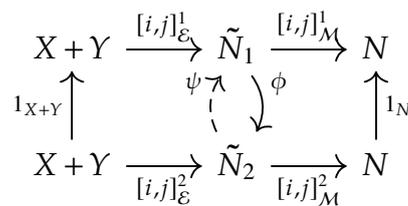
Precisamos mostrar que os cospans $X \xrightarrow{q_1 \circ [i, j]_E^1} \tilde{N}_1 \xleftarrow{q_2 \circ [i, j]_E^1} X + Y$ e $X \xrightarrow{q_1 \circ [i, j]_E^2} \tilde{N}_2 \xleftarrow{q_2 \circ [i, j]_E^2} X + Y$ são isomorfos. Pela terceira propriedade de um sistema de fatoração, podemos concluir que existe uma seta ϕ que faz o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccc}
 X + Y & \xrightarrow{[i, j]_E^1} & \tilde{N}_1 & \xrightarrow{[i, j]_M^1} & N \\
 \downarrow 1_{X+Y} & & \downarrow \phi & & \downarrow 1_N \\
 X + Y & \xrightarrow{[i, j]_E^2} & \tilde{N}_2 & \xrightarrow{[i, j]_M^2} & N
 \end{array}$$

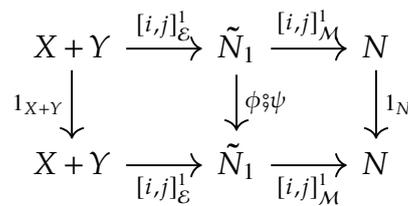
e aí este será nosso morfismo de cospans



Temos que $q_1 \circ [i, j]_{\mathcal{E}}^1 \circ \phi = q_1 \circ [i, j]_{\mathcal{E}}^2$ e $q_2 \circ [i, j]_{\mathcal{E}}^1 \circ \phi = q_2 \circ [i, j]_{\mathcal{E}}^2$ exatamente pela definição de ϕ . Resta apenas mostrar que ϕ é isomorfismo, mas isto segue do mesmo truque de se trocar os papéis das fatorações e construir um morfismo ψ

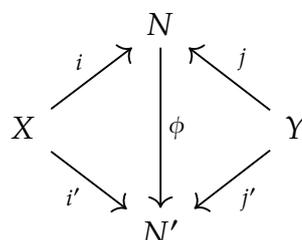


Assim, teremos que $\psi \circ \phi$ comuta o diagrama

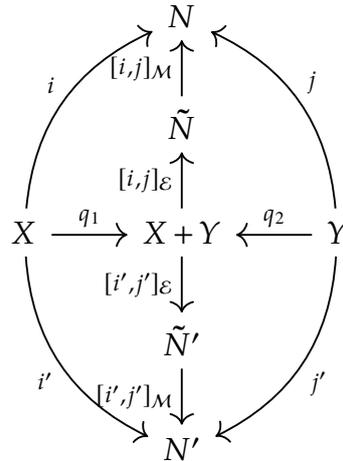


bem como $1_{\tilde{N}_1}$, e, pela unicidade deste morfismo que é pedida na definição de sistema de fatoração, temos $\phi \circ \psi = 1_{\tilde{N}_1}$. É claro que, analogamente, $\phi \circ \psi = 1_{\tilde{N}_2}$.

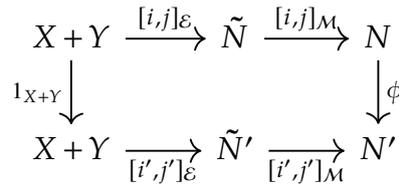
Agora vamos mostrar que ϵ -parte é independente da escolha de representante de cospans. Tome dois cospans isomorfos



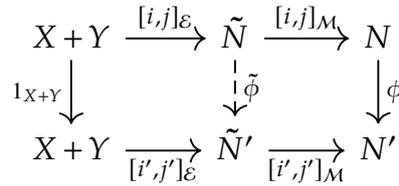
Fazendo a fatoraço



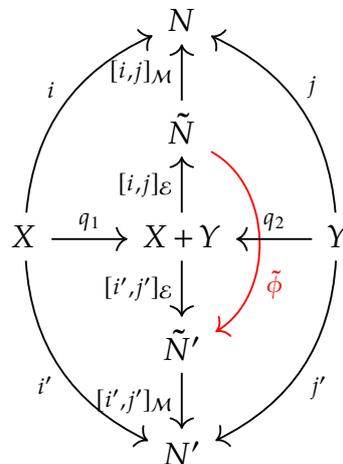
temos que mostrar que os cospans $X \xrightarrow{q_1 \circ [i,j]_E} \tilde{N} \xleftarrow{q_2 \circ [i,j]_E} Y$ e $X \xrightarrow{q_1 \circ [i',j']_E} \tilde{N}' \xleftarrow{q_2 \circ [i',j']_E} Y$ são isomorfos. Pelo argumento inicial do item 1, obtemos $[i,j] \circ \phi = [i',j']$. Logo, o diagrama



comuta. Pelo terceiro item da definição de sistema de fatoraço, existe um único morfismo $\tilde{\phi}$ que comuta o diagrama



Este será nosso isomorfismo de cospans



Pela comutatividade do diagrama que define $\tilde{\phi}$, temos que este é um morfismo de cospans. Novamente, ele é um isomorfismo pelo argumento de se trocar os papeis de N e N' , agora

usando o morfismo ϕ^{-1} no diagrama, para concluir a existência de um morfismo ψ

$$\begin{array}{ccccc} X + Y & \xrightarrow{[i,j]_{\mathcal{E}}} & \tilde{N} & \xrightarrow{[i,j]_{\mathcal{M}}} & N \\ \uparrow 1_{X+Y} & & \uparrow \psi & & \uparrow \phi^{-1} \\ X + Y & \xrightarrow{[i',j']_{\mathcal{E}}} & \tilde{N}' & \xrightarrow{[i',j']_{\mathcal{M}}} & N' \end{array}$$

que será a inversa de $\tilde{\phi}$ pelo mesmo argumento de unicidade do item anterior.

3. Para provar a associatividade, precisamos de uma simples equação: $\epsilon\text{-parte}(\epsilon\text{-parte}(c \circledast d)) = \epsilon\text{-parte}(c \circledast d) = \epsilon\text{-parte}(c \circledast \epsilon\text{-parte}(d))$, para quaisquer cospans c, d . Esta equação pode ser rapidamente (mas trabalhosamente) provada com um simples diagram chase (que omitimos por excesso de diagram chases no texto). Com ela, a associatividade sai imediatamente da associatividade de composição de cospans:

$$\begin{aligned} (c_1 \circledast_r c_2) \circledast_r c_3 &= \epsilon\text{-parte}(\epsilon\text{-parte}(c_1 \circledast c_2) \circledast c_3) \\ &= \epsilon\text{-parte}((c_1 \circledast c_2) \circledast c_3) \\ &= \epsilon\text{-parte}(c_1 \circledast (c_2 \circledast c_3)) \\ &= \epsilon\text{-parte}(c_1 \circledast \epsilon\text{-parte}(c_2 \circledast c_3)) \\ &= c_1 \circledast_r (c_2 \circledast_r c_3) \end{aligned}$$

A existência da unidade é clara: é a mesma unidade da composição de cospans.

□

Para finalizar, provamos que quando C é uma prop cujo produto monoidal é dado pelo coproduto, então **CoSpan**(C) e **CoRel**(C) formam props.

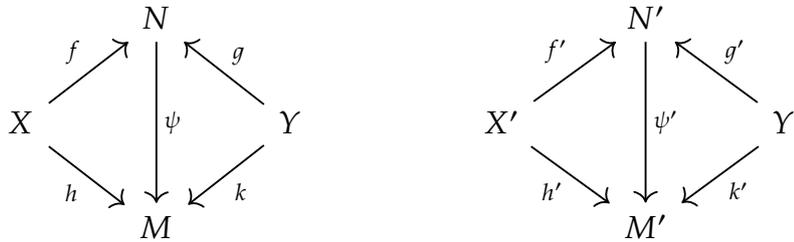
Teorema 3.2.4. *Seja C uma prop com colimites finitos, sistema de fatoração $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ e produto monoidal dado pelo coproduto. Então, **CoSpan**(C) e **CoRel**(C) são props, onde o produto monoidal em objetos é o mesmo de C e em morfismos é dado por*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & f \nearrow & & \nwarrow g & \\ X & & & & Y \\ & & & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & N' & & \\ & f' \nearrow & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \\ & & & & \end{array} = \\ \begin{array}{ccccc} & & N + N' & & \\ & f+f' \nearrow & & \nwarrow g+g' & \\ X + X' & & & & Y + Y' \end{array} \end{array}$$

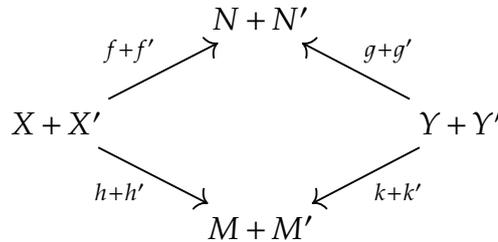
onde usamos $+$ para denotar o produto monoidal que estamos definindo, e o de C (que é o coproduto).

Demonstração. Primeiro mostramos que isto está bem definido, ou seja, que é independente da escolha de representante de cospan. E, no caso do produto em $\mathbf{CoRel}(C)$, também precisamos mostrar que o cospan resultante é uma corelação.

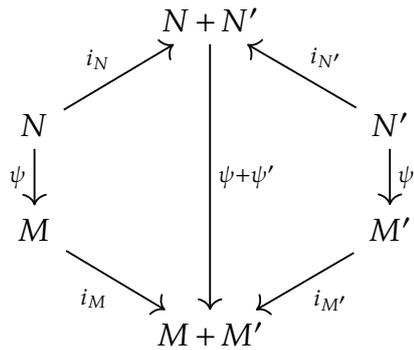
Para o primeiro, tomamos dois pares de cospans isomorfos



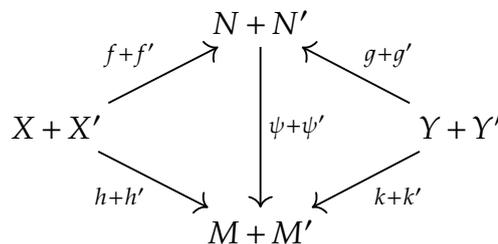
Em seguida, fazemos o produto monoidal nos de cima e nos de baixo



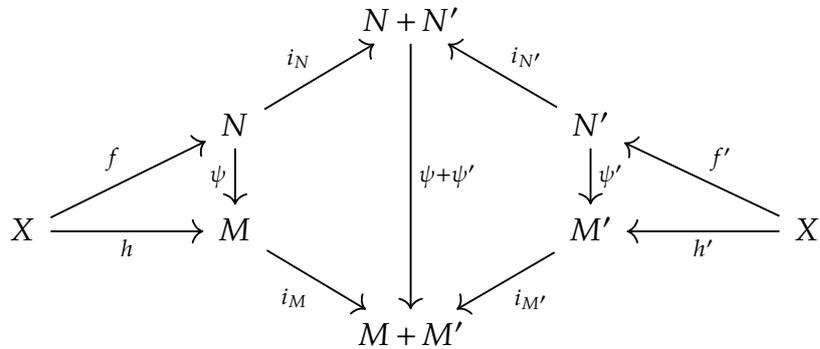
Precisamos mostrar que o cospan de cima é isomorfo ao cospan de baixo. Dados os dois mapas $\psi : N \rightarrow M, \psi' : N' \rightarrow M'$, o seu produto monoidal $\psi + \psi' : N + N' \rightarrow M + M'$ é dado pelo coproduto, ou seja, é o mapa que faz este diagrama comutar



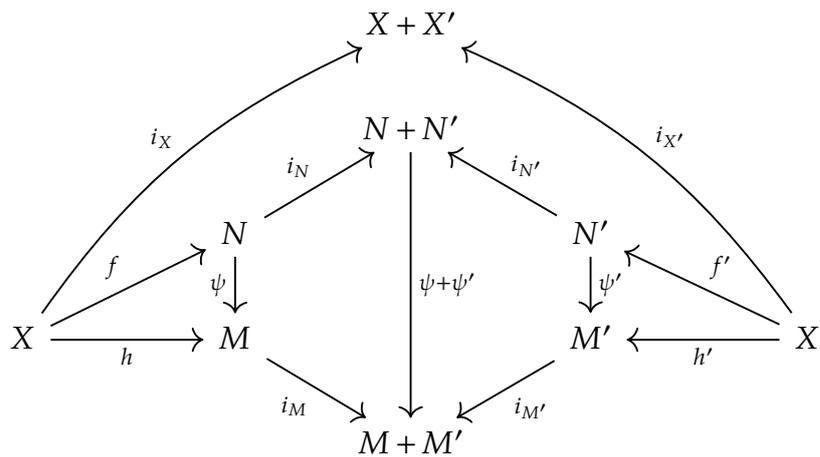
Agora vamos mostrar que este mapa é um morfismo de cospans, ou seja, ele comuta este diagrama



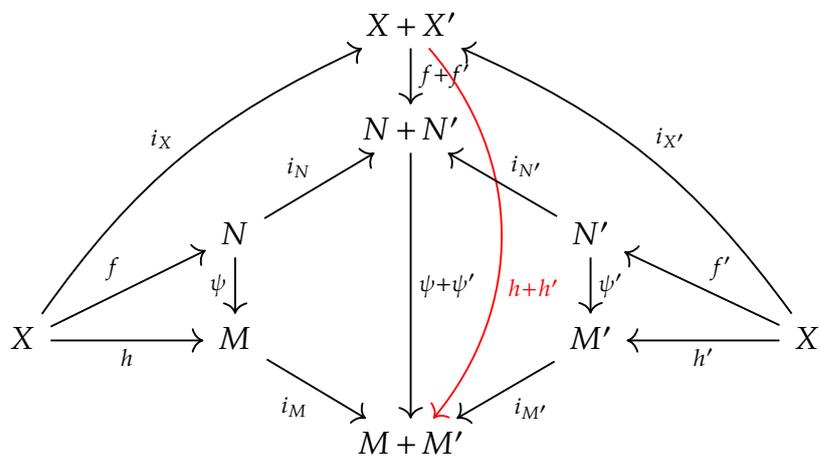
Faremos apenas $f + f'$; $\psi + \psi' = h + h'$; a outra igualdade é análoga. Começamos colocando os mapas f, f' e h, h' no diagrama da definição de $\psi + \psi'$



e então fazemos o coproduto de X e X'



Agora, colocamos os coprodutos $f + f'$ e $h + h'$



O diagrama é complicado, mas a demonstração é simples: $f + f'$; $\psi + \psi'$ vai satisfazer a

propriedade universal da seta coproduto $h + h'$

$$\begin{aligned} i_X \circ f + f' \circ \psi + \psi' &= f \circ i_N \circ \psi + \psi' \\ &= f \circ \psi \circ i_M \\ &= h \circ i_M \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i_{X'} \circ f + f' \circ \psi + \psi' &= f' \circ i_{N'} \circ \psi + \psi' \\ &= f' \circ \psi' \circ i_{M'} \\ &= h' \circ i_{M'} \end{aligned}$$

e, portanto, $f + f' \circ \psi + \psi' = h + h'$.

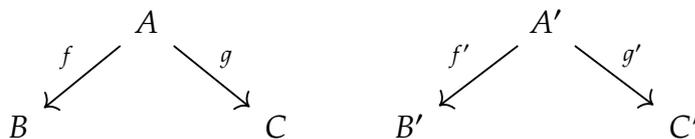
Podemos usar os morfismos inversos ψ^{-1}, ψ'^{-1} para construir um morfismo de cospans para o outro lado $\psi^{-1} + \psi'^{-1} : M + M' \rightarrow N + N'$ e este claramente será a inversa de $\psi + \psi'$. Logo, ele será um isomorfismo de cospans, como queríamos provar.

Definido o produto, resta apenas verificar os axiomas de $\text{prop. CoSpan}(\mathcal{C})$ e $\text{CoRel}(\mathcal{C})$ têm os mesmos objetos de \mathcal{C} , o conjunto dos naturais, e o produto monoidal é o mesmo, a soma, que é associativa e tem identidade. Precisamos mostrar os três últimos itens da definição de categoria monoidal estrita. O segundo item é imediato, a associatividade do produto monoidal em morfismos segue imediatamente da associatividade do produto em \mathcal{C} , e o cospan idêntico $I \xrightarrow{1_I} I \xleftarrow{1_I} I$ é claramente identidade para o produto monoidal. O quarto item também é imediato: o cospan idêntico para um objeto A é $A \xrightarrow{1_A} A \xleftarrow{1_A}$, logo o produto monoidal de cospans idênticos

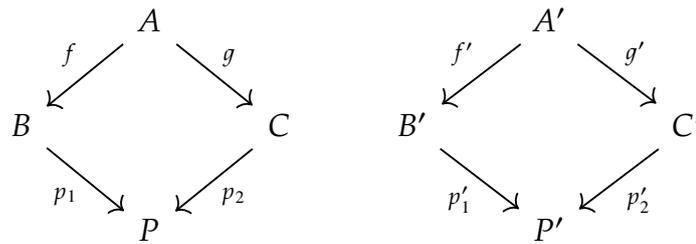
$$\begin{array}{c} A \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \quad \quad A \end{array} \xrightarrow{1_A} A \xleftarrow{1_A} A \quad + \quad \begin{array}{c} B \\ \swarrow \quad \searrow \\ B \quad \quad B \end{array} \xrightarrow{1_B} B \xleftarrow{1_B} B \quad = \quad \begin{array}{c} A+B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A+B \quad \quad A+B \end{array} \xrightarrow{1_{A+B}} A+B \xleftarrow{1_{A+B}} A+B$$

Usando que $1_A + 1_B = 1_{A+B}$ por \mathcal{C} ser monoidal estrita, temos que o cospan resultante é o idêntico para o objeto $A + B$.

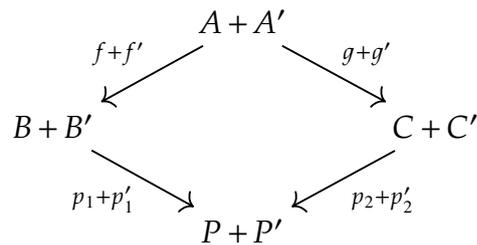
Resta apenas o terceiro item, que é a igualdade $(c_1 \circ c_2) + (c_3 \circ c_4) = (c_1 + c_3) \circ (c_2 + c_4)$ para cospans c_1, c_2, c_3, c_4 . Precisamos de mais diagramas complicados, mas a demonstração é baseada em um simples fato: o pushout do produto monoidal de dois diagramas é o produto monoidal dos pushouts. Tome dois diagramas



e seus pushouts P, P' .



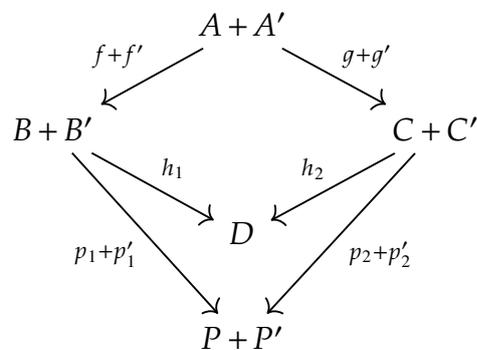
Então, podemos somar os diagramas



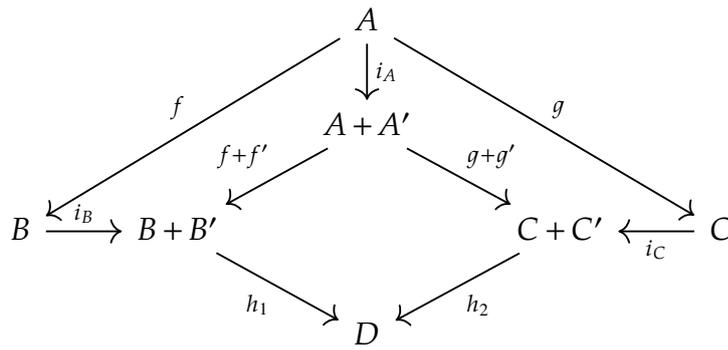
e a afirmação é que $P + P'$ é o pushout do diagrama $B + B' \xleftarrow{f+f'} A + A' \xrightarrow{g+g'} C + C'$. De fato, o diagrama é comutativo

$$\begin{aligned} (f + f') \circ (p_1 + p'_1) &= (f \circ p_1) + (f' \circ p'_1) \\ &= g + g' \end{aligned}$$

A primeira igualdade vem do fato de $+$ ser produto monoidal em \mathcal{C} e a segunda vem da comutatividade dos diagramas de pushout. Ele satisfaz a propriedade universal: tome D que comuta o diagrama



então, D com os mapas $i_B \circ h_1$ e $i_{B'} \circ h_2$ satisfaz a propriedade universal referente ao pushout P pois o seguinte diagrama comuta



Logo, temos um morfismo $h : P \rightarrow D$. Igualmente, D com os mapas $i_{B'} \circ h_1$ e $i_{C'} \circ h_2$ satisfaz a propriedade universal referente ao pushout P' e temos um morfismo $h' : P' \rightarrow D$. Com eles, podemos formar o morfismo $k : P + P' \rightarrow D$ que comuta o diagrama necessário, finalizando a demonstração da propriedade universal.

□

3.2.2 A Prop de Comportamentos LTI

Com o corpo k que fixamos no começo da seção, podemos construir o anel $k[s, s^{-1}]$. Ele é simplesmente o anel com duas indeterminadas $k[x, y]$ quocientado pelo ideal gerado pelo polinômio $xy - 1$. Assim, vamos trabalhar agora com a categoria $\mathbf{M} = (\mathbf{Mat}(k[s, s^{-1}]))^{\text{op}}$, a chamada categoria *oposta* à categoria de matrizes sobre o anel $k[s, s^{-1}]$. Dado uma categoria \mathcal{C} , a categoria \mathcal{C}^{op} é a categoria \mathcal{C} com todos suas setas revertidas, isto é, é a categoria cujos objetos são os mesmos que \mathcal{C} e os morfismos $A \rightarrow B$ são os morfismos $B \rightarrow A$ de \mathcal{C} . Vamos mostrar que ela satisfaz as hipóteses necessárias para construirmos $\mathbf{CoSpan}(\mathbf{M})$ e $\mathbf{CoRel}(\mathbf{M})$. Com estas duas categorias, vamos obter e caracterizar a categoria de comportamentos LTI.

Teorema 3.2.5. *A categoria $\mathbf{M} = \mathbf{Mat}(k[s, s^{-1}])^{\text{op}}$ possui colimites finitos e suas subcategorias de epimorfismos \mathcal{E} e monomorfismos split \mathcal{M} formam um sistema de fatoraçoão $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ com \mathcal{M} estável sob pushouts.*

Demonstração. Seja $R = k[s, s^{-1}]$. Nós vamos simplificar a prova deste teorema usando o fato que a categoria de matrizes \mathbf{M} é equivalente a categoria \mathcal{F} cujos objetos são módulos sobre R livres de posto finito e os morfismos são os homomorfismos de R -módulos, isto é, as transformações R -lineares.

Lema 3.2.1. *\mathbf{M} é equivalente à \mathcal{F}*

Demonstração. A demonstração é igual à demonstração usual da equivalência de matrizes e transformações lineares. Definimos o funtor $\Psi : \mathbf{M} \rightarrow \mathcal{F}$, que em objetos mapeia $n \mapsto R^n$ e em

morfismos, mapeia a matriz $A_{m \times n} : n \rightarrow m$ para o homomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi A : R^n &\rightarrow R^m \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

onde Av é multiplicação de matrizes usual, interpretando v como uma vetor coluna, ou seja, uma matriz $n \times 1$. Precisamos apenas mostrar que este funtor é pleno, fiel e denso, pelo teorema 1.2.1. Estas seguem igualmente como em álgebra linear: o funtor é pleno pois dado um homomorfismo $R^n \rightarrow R^m$, a matriz nas bases canônicas de R^n e R^m é mapeada para ele; o funtor é fiel pois os vetores colunas de uma matriz A são dados pelas imagens Ae_i da base canônica de R^n ; o funtor é denso pois todos os módulos de \mathcal{F} são livres de posto finito, ou seja, admitem uma base com finitos vetores, e portanto são isomorfos à algum R^n . \square

É imediato o fato que se duas categorias são equivalentes, uma tem todos os colimites finitos se e só se a outra tem (de fato, o funtor de equivalência mapeia um colimite de um diagrama para um colimite da imagem do diagrama pelo funtor). Vamos mostrar então que

Lema 3.2.2. \mathcal{F} tem todos colimites finitos

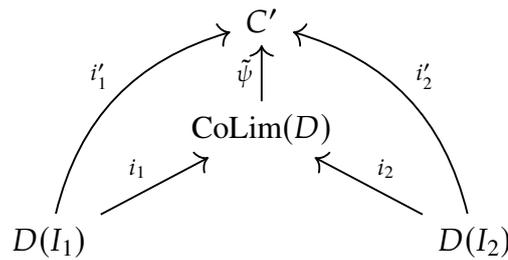
Demonstração. Seja $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F}$ um diagrama finito. Vamos encontrar o seu colimite. Primeiramente, seja \mathcal{FG} a categoria cujos objetos são os módulos sobre R finitamente gerados e os morfismos são os R -homomorfismos. Veja que a classe de objetos de \mathcal{F} está contida na classe de objetos de \mathcal{FG} e, portanto, o diagrama D pode ser considerado como estando em \mathcal{FG} (formalmente, precisaríamos compor D com o funtor inclusão $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{FG}$, mas vamos cometer o abuso de notação de chamar ambos os diagramas de D). Em \mathcal{FG} , é fácil construir seu colimite! A ideia é simples: fazemos a soma direta de todos os objetos do diagrama e quocientamos este módulo pelos submódulos necessários para que os diagramas comutem. Formalmente

$$\text{CoLim}(D) = \frac{\bigoplus_{o \in \text{Ob}(\mathcal{I})} D(I_o)}{\bigoplus_{f \in \text{Mor}(\mathcal{I})} N_f}$$

onde $f : A \rightarrow B$, $N_f = \{i_A(x) - i_B(Df(x)) \mid x \in A\}$ e i_A e i_B são os morfismos inclusão dos objetos $D(A)$ e $D(B)$ na soma direta. Os mapas dos objetos $D(I_o)$ para o $\text{CoLim}(D)$ são os óbvios, a inclusão $D(I_o) \rightarrow \bigoplus_{o \in \text{Ob}(\mathcal{I})} D(I_o)$ composta com o mapa quociente $\bigoplus_{o \in \text{Ob}(\mathcal{I})} D(I_o) \rightarrow \text{CoLim}(D)$. Assim, para todo os morfismos $f : I_1 \rightarrow I_2$ de \mathcal{I} , o diagrama

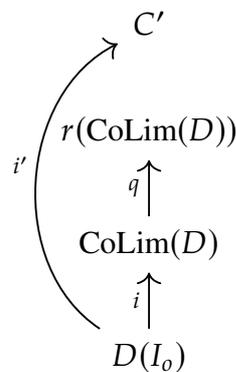
$$\begin{array}{ccc} & \text{CoLim}(D) & \\ & \nearrow i_1 & \nwarrow i_2 \\ D(I_1) & \xrightarrow{Df} & D(I_2) \end{array}$$

comuta, por definição do quociente: $i_1(x) - i_2(Df(x)) = 0$ para todo $x \in D(I_1)$. Estes são os diagramas necessários para que este objeto seja um cocone. Agora, para mostrar que é o colimite, precisamos mostrar que ele é um cocone inicial. Mas isto é imediato: dado um cocone C' sobre o diagrama, com morfismos i'_o para cada objeto $o \in \mathcal{I}$, construímos o morfismo $\psi : \bigoplus_{o \in \text{Ob}(\mathcal{I})} i'_o : \bigoplus_{o \in \text{Ob}(\mathcal{I})} D(I_o) \rightarrow C'$ usual originário da soma direta, e a comutatividade dos diagramas requisitada pela definição de cocone garante que este morfismo está bem definido no quociente $\tilde{\psi} : \text{CoLim}(D) \rightarrow C'$. E ele claramente comuta o diagrama



pela construção de ψ .

Construímos o colimite na categoria dos módulos finitamente gerados \mathcal{FG} ; mas não necessariamente este colimite é livre de posto finito. No entanto, é fácil corrigir isto: basta quocientar este módulo pelo seu submódulo de torção, e aí temos o nosso colimite na categoria \mathcal{F} . Com mais detalhes, dado um módulo qualquer E sobre R , definimos o submódulo $\tau(E) = \{m \in E \mid \text{existe } r \in R \text{ tal que } rm = 0 \text{ e } r \text{ não divide zero}\}$ e aí $r(E) = \frac{E}{\tau(E)}$. Quando E é finitamente gerado, $r(E)$ é livre de posto finito. Então, o colimite de D na categoria \mathcal{F} será $r(\text{CoLim}(D))$ junto com os mapas obtidos pela composição dos mapas $D(I_o) \rightarrow \text{CoLim}(D)$ com o mapa quociente $q : \text{CoLim}(D) \rightarrow r(\text{CoLim}(D))$. Isto dá origem a um cocone simplesmente por $\text{CoLim}(D)$ ser um cocone. Agora, para provar que ele é o cocone inicial, seja C' um módulo livre de posto finito com mapas i'_o sobre D , formando um cocone.



Como $\text{CoLim}(D)$ é o colimite em \mathcal{FG} e C' é um objeto de \mathcal{FG} , deve existir um mapa $p : \text{CoLim}(D) \rightarrow C'$

$$\begin{array}{c}
 C' \\
 \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\
 r(\text{CoLim}(D)) \\
 \uparrow q \\
 \text{CoLim}(D) \\
 \uparrow i \\
 D(I_0)
 \end{array}$$

tal que $i \circ p = i'$.

Agora, veja que $p(\tau(\text{CoLim}(D))) \subset \tau(r(\text{CoLim}(D)))$, mas $r(\text{CoLim}(D))$ é um módulo livre, portanto livre de torção, ou seja, $\tau(r(\text{CoLim}(D))) = \{0\}$. Logo $p(\tau(\text{CoLim}(D))) = \{0\}$ e daí existe um mapa $\tilde{p} : r(\text{CoLim}(D)) \rightarrow C'$ tal que $q \circ \tilde{p} = p$.

$$\begin{array}{c}
 C' \\
 \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\
 r(\text{CoLim}(D)) \\
 \uparrow q \\
 \text{CoLim}(D) \\
 \uparrow i \\
 D(I_0)
 \end{array}$$

Esta é a seta necessária, pois $i \circ q \circ \tilde{p} = i \circ p = i'$. □

Para provar que os epimorfismos e monomorfismos split formam um sistema de fatoração, basta usar o teorema 3.2.2 e o seguinte lema.

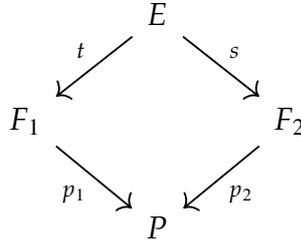
Lema 3.2.3. *Todo morfismo de \mathbf{M} pode ser escrito como um epimorfismo composto com um monomorfismo split.*

Demonstração. Seja A uma matriz $m \times n$ e $T : R^n \rightarrow R^m$ seu homomorfismo correspondente. Como a imagem $T(R^n)$ é um submódulo de R^m , podemos decompor T em duas partes, $T = T' \circ i$, onde $T' : R^n \rightarrow T(R^n)$ é a corestrição de T e $i : T(R^n) \rightarrow R^m$ é a inclusão. T' é sobrejetora, e, portanto, é um epimorfismo; a inclusão é monomorfismo split. Usando o functor de equivalência de categorias, e escolhendo uma base pra $T(R^n)$, temos que $A = BC$, onde B e C são matrizes referentes à T' e i . Estas são epimorfismo e monomorfismo split, respectivamente, em \mathbf{M} . □

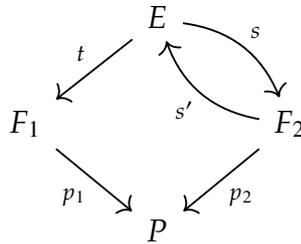
Finalmente, provamos a última parte do teorema.

Lema 3.2.4. *\mathcal{M} é estável sob pushouts.*

Demonstração. Provamos o resultado, novamente, para a categoria \mathcal{F} equivalente à \mathbf{M} . Seja P o pushout de um diagrama $F_1 \xleftarrow{t} E \xrightarrow{s} F_2$.



Precisamos mostrar que, se s é monomorfismo split, então p_1 é. Seja s' a inversa à direita de s



Pela nossa construção de colimites em \mathcal{F} , temos que $P = \frac{E \oplus F_1 \oplus F_2}{N_t \oplus N_s}$. Mas, podemos simplificar esta expressão: $P \cong \frac{F_1 \oplus F_2}{N}$ onde $N = \{t(x) - s(x) \mid x \in E\}$.

Definimos $p'_1 : P \rightarrow F_1$ como mapeando $\overline{f_1 + f_2} \mapsto f_1 + t(s'(f_2))$. Isso está bem-definido: suponha que $f_1 + f_2 = f'_1 + f'_2$. Então, existe $x \in E$ tal que $f_1 - f'_1 = t(x)$ e $f_2 - f'_2 = -s(x)$; logo,

$$\begin{aligned}
 f'_1 + t(s'(f'_2)) &= f'_1 + t(s'(f_2 + s(x))) && \text{(pela segunda igualdade do parágrafo anterior)} \\
 &= f'_1 + t(s'(f_2)) + t(s'(s(x))) && \text{(linearidade)} \\
 &= f'_1 + t(s'(f_2)) + t(x) && \text{(definição de } s') \\
 &= f'_1 + t(s'(f_2)) && \text{(pela primeira igualdade do parágrafo anterior)}
 \end{aligned}$$

Claramente p'_1 é um homomorfismo de R -módulos, e ele inverte p_1 pela direita: $p'_1(p_1(f_1)) = p'_1(f_1 + 0) = f_1$. Portanto, p_1 é um monomorfismo split, como queríamos provar.

□

O teorema está provado.

□

Pelo teorema 3.2.3, existe a categoria de correlações $\mathbf{CoRel}(\mathbf{M})$. Além disso, como pushouts são colimites finitos, segue do teorema 3.2.1 que existe a categoria de cospans $\mathbf{CoSpan}(\mathbf{M})$. Com toda esta maquinaria, vamos agora relacionar estas categorias aos comportamentos LTI. Para isto, começamos descrevendo uma ação do anel $R = k[s, s^{-1}]$ no espaço

de trajetórias. A indeterminada s age em uma trajetória $w \in k^{\mathbb{Z}}$ como um atraso de um passo, e a sua inversa age como um adiantamento de um passo:

$$\begin{aligned} s(w)(t) &= w(t-1) \\ s^{-1}(w)(t) &= w(t+1) \end{aligned}$$

E aí simplesmente estendemos esta ação linearmente para qualquer polinômio $p \in k[s, s^{-1}]$. Se $p = \sum_i \alpha_i s^i$, então

$$p(w)(t) = \sum_i \alpha_i w(t-i)$$

Agora, podemos usar uma matriz $A_{m \times n}$ com coeficientes em $k[s, s^{-1}]$ para agir em uma trajetória $w \in (k^n)^{\mathbb{Z}}$. Fazemos isto usando que $(k^n)^{\mathbb{Z}} \cong (k^{\mathbb{Z}})^n$, e portanto podemos ver w como um vetor

coluna $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$ com $w_i \in k^{\mathbb{Z}}$. Agora, definimos a ação de A em w com o produto de matriz usual

$$A(w)(t) = \left[\sum_j a_{ij} w_j \right]$$

Isto resulta em um vetor em $(k^{\mathbb{Z}})^m \cong (k^m)^{\mathbb{Z}}$. Logo, A induz uma função de $(k^n)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (k^m)^{\mathbb{Z}}$ que leva $w \in (k^n)^{\mathbb{Z}}$ em $A(w) \in (k^m)^{\mathbb{Z}}$. Esta função é claramente uma transformação linear. Podemos, finalmente, definir um funtor da categoria $\mathbf{M} = (\mathbf{Mat}(k[s, s^{-1}]))^{\text{op}}$ em \mathbf{Vect}_k de espaços vetoriais sobre k . Ele levará n no espaço $(k^n)^{\mathbb{Z}}$ e uma matriz A nesta transformação linear que acabamos de descrever (a demonstração de que isto define um funtor, ou seja, que o produto de matriz é levado em composição de homomorfismo é completamente análoga ao caso usual de álgebra linear).

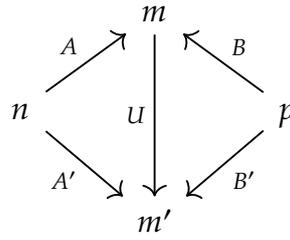
Vamos chamar tal funtor de $\theta : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$. Continuamos a definir: vamos estender este funtor para um funtor $\Theta : \mathbf{CoSpan}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{LinRel}_k$; a imagem dele será justamente os comportamentos LTI, o que culminará na nossa prova de que estes formam uma prop!

Teorema 3.2.6. *Existe um funtor $\Theta : \mathbf{CoSpan}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{LinRel}_k$ que em objetos leva $n \mapsto (k^n)^{\mathbb{Z}}$ e em morfismos*

$$\Theta(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} p) = \{(x, y) \in (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^p)^{\mathbb{Z}} \mid \theta(A)x = \theta(B)y\}$$

Demonstração. Precisamos mostrar que Θ está bem definido, leva identidade em identidade e preserva composição.

- boa definição: tome dois cospans isomorfos



precisamos mostrar que $\{(x, y) \in (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^p)^{\mathbb{Z}} \mid \theta(A)x = \theta(B)y\} = \{(x, y) \in (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^p)^{\mathbb{Z}} \mid \theta(A')x = \theta(B')y\}$. Tome (x, y) no primeiro conjunto. Então,

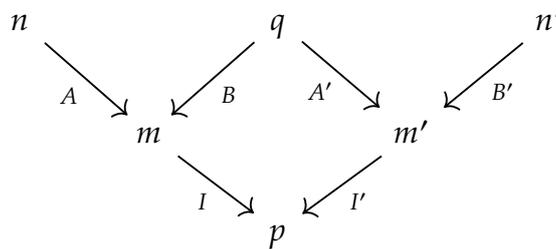
$$\begin{aligned}\theta(A)x &= \theta(B)y \\ \theta(U)\theta(A)x &= \theta(U)\theta(B)y \\ \theta(A')x &= \theta(B')y\end{aligned}$$

e logo (x, y) está no segundo. Analogamente, se (x, y) está no segundo, então

$$\begin{aligned}\theta(A')x &= \theta(B')y \\ \theta(U^{-1})\theta(A')x &= \theta(U^{-1})\theta(B')y \\ \theta(A)x &= \theta(B)y\end{aligned}$$

e logo (x, y) está no primeiro.

- preserva identidade: o cospan identidade é $n \xrightarrow{1_n} n \xleftarrow{1_n} n$ e, como $\theta(1_n)$ é a transformação identidade em $(k^n)^{\mathbb{Z}}$, a imagem do cospan vai ser a relação $\{(x, y) \in (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^n)^{\mathbb{Z}} \mid x = \theta(1_n)x = \theta(1_n)y = y\}$, que é a relação idêntica.
- preserva composição: isto é um rápido corolário do fato de que o funtor θ preserva colimites finitos. De fato, sabendo isso, sejam $n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} q$ e $q \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} n'$ cospans. Temos sua composição

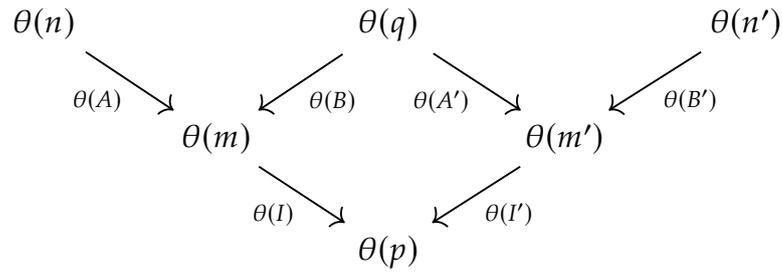


e precisamos provar que $\Theta(n \xrightarrow{A \circ I} p \xleftarrow{B' \circ I'} n') = \Theta(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} q) \circ \Theta(q \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} n')$. Para a inclusão do segundo conjunto no primeiro, tome um par (x, z) tal que existe y onde $(x, y) \in \Theta(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} q)$ e $(y, z) \in \Theta(q \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} n')$. Então,

$$\theta(A \circ I)x = \theta(I)(\theta(A)(x)) = \theta(I)(\theta(B)(y)) = \theta(I')(\theta(A')(y)) = \theta(I')(\theta(B')(z)),$$

o que diz exatamente que $(x, z) \in \Theta(n \xrightarrow{A \circ I} p \xleftarrow{B' \circ I'} n')$.

Para a outra inclusão, primeiro aplicamos o funtor θ ao diagrama anterior



Como θ preserva colimites finitos, ele preserva pushouts. Sabemos a forma do pushout em \mathbf{Vect}_k : $\theta(p) = \frac{\theta(m) + \theta(m')}{S}$ onde $S = \{\theta(B)x - \theta(A')x \mid x \in \theta(q)\}$, e $\theta(I)$ e $\theta(I')$ são os mapas inclusão compostos com quociente (é claro, formalmente deveríamos corrigir estas igualdades para isomorfismos e transformações naturais, mas cometemos este abuso para simplificar a apresentação).

Agora tome $(x, y) \in \Theta(n \xrightarrow{A \circ I} p \xleftarrow{B' \circ I'} n')$. Então, temos

$$\theta(I)(\theta(A)(x)) = \theta(I')(\theta(B')(y)).$$

Devemos ter, então, que $\theta(A)(x)$ e $\theta(B')(y)$ diferem por um elemento de S , ou seja, $\theta(A)(x) = \theta(B)(z)$ e $\theta(B')(y) = \theta(A')(z)$ para algum $z \in \theta(q)$. Mas isto diz exatamente que existe um z tal que $(x, z) \in \Theta(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} q)$ e $(z, y) \in \Theta(q \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} n)$, que é o que queríamos provar.

O caminho para a demonstração que θ preserva colimites finitos está indicado em (FONG; SOBOCIŃSKI; RAPISARDA, 2016), porém, seria bom encontrar uma demonstração direta, provavelmente algébrica, deste fato (como levantado por um dos autores do artigo, Brendan Fong, em comunicação privada).

□

Olhando para a imagem deste funtor, finalmente temos a existência da prop de comportamentos LTI.

Teorema 3.2.7. *Existe uma prop LTI cujos morfismos são comportamentos LTI com domínio $(k^n)^{\mathbb{Z}}$ e codomínio $(k^m)^{\mathbb{Z}}$. A composição é dada pela composição usual de relações e o produto monoidal é a soma direta.*

Demonstração. Um comportamento LTI é um subconjunto \mathcal{B} de $(k^n)^{\mathbb{Z}} \oplus (k^m)^{\mathbb{Z}} \cong (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^m)^{\mathbb{Z}}$ e, portanto, é uma relação. Afirmamos que uma relação é um comportamento LTI se e somente se ela é a imagem $\Theta(c)$ para algum cospan c . Podemos provar isto usando um teorema de Willems, que afirma que uma relação \mathcal{B} é um comportamento LTI se e somente se $\mathcal{B} = \ker \theta(M)$ para

alguma matriz M de $\mathbf{Mat}(k[s, s^{-1}])$ (WILLEMS, 2007). Este teorema demonstra a afirmação, pois podemos escrever a imagem de um cospan $n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} p$ como sendo

$$\Theta(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} p) = \ker \theta \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix}$$

onde $\begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix}$ é a matriz com blocos A e $-B$. Logo, toda imagem de um cospan é um comportamento LTI. Reciprocamente, se $\mathcal{B} \subset (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^m)^{\mathbb{Z}}$ é um comportamento LTI, então $\mathcal{B} = \ker \theta(M)$ para alguma matriz M e aí basta tomarmos A como sendo a matriz composta pelas n primeiras colunas de M e $-B$ como sendo a matriz composta pelas m últimas colunas de M (veja que M tem que ter $n + m$ colunas) e teremos

$$\Theta(n \xrightarrow{A} o \xleftarrow{B} m) = \ker \theta \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix} = \ker \theta M = \mathcal{B}$$

onde o é o número de linhas de M . Em outras palavras, \mathcal{B} está na imagem de Θ .

Para qualquer functor, os objetos e morfismos que são imagens pelo functor formam uma subcategoria. Definimos, então, **LTI** como sendo a prop imagem de Θ . Ela é exatamente aquela descrita no enunciado.

□

Finalizamos esta seção caracterizando exatamente a prop **LTI**. Temos dois funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CoSpan}(\mathbf{M}) & & \\ \downarrow \epsilon\text{-parte} & \searrow \Theta & \\ \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) & & \mathbf{LTI} \end{array}$$

construídos (agora cometendo o abuso de notação de usar o mesmo nome Θ para sua corestrrição à sua imagem). O que provaremos é que existe um terceiro functor, de $\mathbf{CoRel}(\mathbf{M})$ em \mathbf{LTI} , que comuta este diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CoSpan}(\mathbf{M}) & & \\ \downarrow \epsilon\text{-parte} & \searrow \Theta & \\ \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\tilde{\Theta}} & \mathbf{LTI} \end{array}$$

E, mais ainda, ele é um isomorfismo de props!

Teorema 3.2.8. *Existe um isomorfismo de props $\tilde{\Theta} : \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{LTI}$ satisfazendo $\epsilon - parte$; $\tilde{\Theta} = \Theta$.*

Demonstração. Primeiramente, como \mathbf{Vect}_k é simplesmente a categoria de módulos finitamente gerados sobre k , a demonstração do teorema 3.2.4 nos garante que ela tem colimites finitos e possui um sistema de fatoração dado pelos seus epimorfismos e monomorfismos split. Podemos, então, definir a categoria $\mathbf{CoRel}(\mathbf{Vect}_k)$. Usando o funtor original $\theta : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$, definimos o funtor auxiliar $\Theta' : \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{CoRel}(\mathbf{Vect}_k)$ do jeito natural

$$\Theta'(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} p) = \theta(n) \xrightarrow{\theta(A)} \theta(m) \xleftarrow{\theta(B)} \theta(p)$$

Este funtor está bem definido: é claro que ele é independente da escolha de representante da corelação, e a imagem de uma corelação é uma corelação, pois θ preserva fatoraões. De fato, esta última afirmação segue do seguinte lema

Lema 3.2.5. *θ leva epimorfismos em epimorfismos e monomorfismos split em monomorfismos split.*

Demonstração. Qualquer funtor leva monomorfismos split em monomorfismos split: se $A : n \rightarrow m$ é um monomorfismo split, então existe $r : m \rightarrow n$ tal que $A \circ r = 1_n$. Daí $\theta(A) \circ \theta(r) = \theta(1_n) = 1_{\theta(n)}$, ou seja, $\theta(A)$ é monomorfismo split também. Já o fato de θ levar epimorfismos em epimorfismos vem de que a ação que define o funtor é fiel. De fato, supondo que a ação seja fiel, podemos provar que θ é injetiva em morfismos: tome duas matrizes $A, B : n \rightarrow m$ com $\theta(A) = \theta(B)$. Daí, para cada $w \in k^{\mathbb{Z}}$ e i natural entre 1 e n , defina $e_{i,w} \in (k^{\mathbb{Z}})^n$ como o vetor que é zero em todas as coordenadas fora a i -ésima, onde nela a entrada é w . Daí, veja que

$$\theta(A)(w) = \begin{bmatrix} a_{1i}w \\ \dots \\ a_{ji}w \\ \dots \\ a_{ni}w \end{bmatrix}, \text{ ou seja, a coluna } i \text{ de } A \text{ aplicada a } w. \text{ O mesmo é válido para } \theta(B)(w) \text{ e}$$

como ambos devem ser iguais, concluimos variando i entre 1 e n que $a_{ij}w = b_{ij}w$ para quaisquer i, j . Como w era arbitrário, e a ação é fiel, concluimos que $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer i, j , ou seja, $A = B$. Da injetividade de θ em morfismos segue que θ preserva epimorfismos. \square

O fato de Θ' preservar composição é imediato de que θ preserva colimites finitos, como vimos no teorema 3.2.6.

Agora, para obter o funtor $\tilde{\Theta} : \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{LinRel}_k$, usamos o isomorfismo $\phi : \mathbf{CoRel}(\mathbf{Vect}_k) \rightarrow \mathbf{LinRel}_k$ definido por

$$n \mapsto (k^n)^{\mathbb{Z}}$$

$$V \xrightarrow{T} W \xleftarrow{S} U \mapsto \ker \begin{bmatrix} T & -S \end{bmatrix}$$

(isto é simples; veja o apêndice C3 de (FONG; SOBOCIŃSKI; RAPISARDA, 2016)). Definimos, então, $\tilde{\Theta} := \Theta' \circ \phi$. Desta forma, veja que $\tilde{\Theta}$ leva uma corelação na mesma relação que Θ levaria se considerarmos ela como um cospan; portanto, a imagem de $\tilde{\Theta}$ está em **LTI**. Vamos usar o mesmo nome para sua corestrição $\tilde{\Theta} : \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{LTI}$. Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CoSpan}(\mathbf{M}) & & \\ \downarrow \epsilon\text{-parte} & \searrow \Theta & \\ \mathbf{CoRel}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\tilde{\Theta}} & \mathbf{LTI} \end{array}$$

Vamos mostrar que ele comuta. Tome um cospan e o fatore

$$\begin{array}{ccccc} & & p & & \\ & \curvearrowright A & \uparrow (A+B)_M & \curvearrowleft B & \\ & & \tilde{p} & & \\ & \curvearrowleft n & \uparrow (A+B)_E & \curvearrowright m & \\ n & \xrightarrow{i_n} & n+m & \xleftarrow{i_m} & m \end{array}$$

Precisamos mostrar que

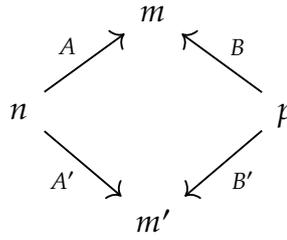
$$\{(x, y) \in (k^{\mathbb{Z}})^n \times (k^{\mathbb{Z}})^m \mid \theta(i_n \circ (A+B)_E)x = \theta(i_m \circ (A+B)_E)y\} =$$

$$\{(x, y) \in (k^{\mathbb{Z}})^n \times (k^{\mathbb{Z}})^m \mid \theta(A)x = \theta(B)y\}$$

A inclusão do primeiro no segundo é imediata; basta aplicar $\theta((A+B)_M)$ em ambos os lados de $\theta(i_n \circ (A+B)_E)x = \theta(i_m \circ (A+B)_E)y$. Para a inclusão contrária, usamos que $(A+B)_M$ é monomorfismo split: tome $r : p \rightarrow \tilde{p}$ que é inversa à direita de $(A+B)_M$, e aí basta aplicar $\theta(r)$ em ambos os lados de $\theta(A)x = \theta(B)y$.

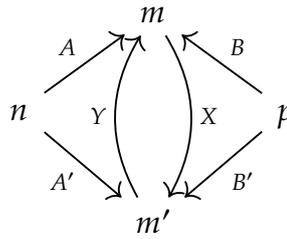
Agora vamos demonstrar que $\tilde{\Theta}$ é uma equivalência de categorias. Usamos novamente o teorema 1.2.1, ou seja, mostramos que o funtor é pleno, fiel e denso. Ele é claramente denso, todo objeto de **LTI** é um $(k^n)^{\mathbb{Z}}$. Também é fácil ver que ele é pleno: todo objeto de **LTI** é uma imagem $\Theta(c)$ de algum cospan c , mas daí $\tilde{\Theta}(\epsilon\text{-parte})(c) = \Theta(c)$, logo ele também é imagem de alguém por $\tilde{\Theta}$.

Vamos mostrar agora que é fiel. Para isso, precisamos de mais um resultado de Willens: se A, B são duas matrizes sobre $k[s, s^{-1}]$, então $\ker \theta A \subset \ker \theta B$ se e somente se existe uma matriz C tal que $CA = B$ (WILLEMS, 2007). Tome duas corelações



que têm a mesma imagem por $\tilde{\Theta}$, ou seja, $\ker \theta \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix} = \ker \theta \begin{bmatrix} A' & -B' \end{bmatrix}$. Pelo teorema que acabamos de citar, temos que existem matrizes X, Y tais que $X \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & -B' \end{bmatrix}$ e $Y \begin{bmatrix} A' & -B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix}$. Usando as duas equações, temos $XY \begin{bmatrix} A' & -B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & -B' \end{bmatrix}$. Daí, como $n \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} p$ é corelação, $\begin{bmatrix} A' & -B' \end{bmatrix}$ é epimorfismo, de onde segue que $XY = 1$. Usando que o outro cospan é uma corelação também, provamos que $YX = 1$.

Agora, por multiplicação de blocos de matrizes, temos $XA = A', XB = B', YA' = A$ e $YB' = B$. Logo, temos morfismos



que são inversos um do outro e comutam o diagrama, ou seja, as corelações são isomorfas, como queríamos mostrar.

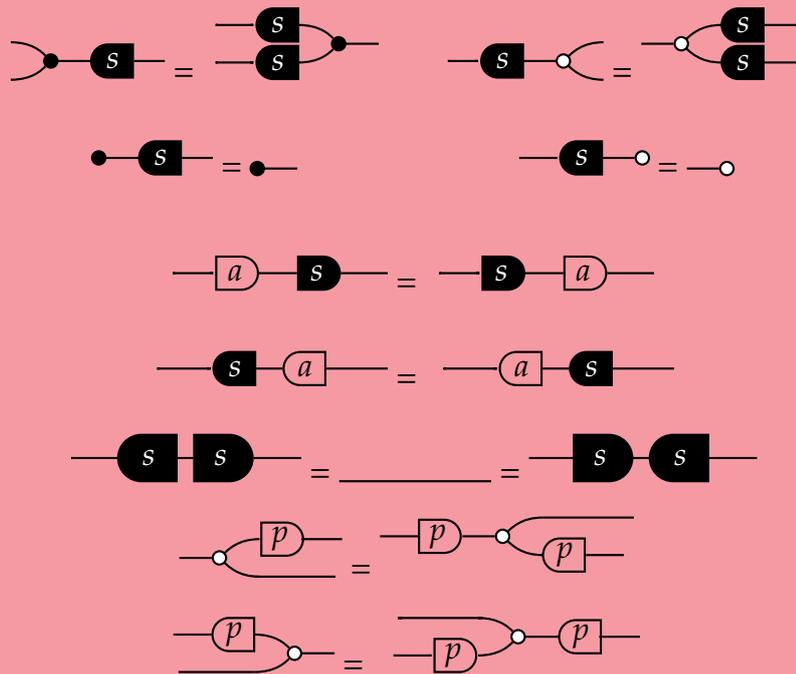
Já temos que $\tilde{\Theta}$ é uma equivalência de categorias. Para que ele seja um isomorfismo de props, resta apenas mostrar que este funtor preserva produto monoidal. Precisamos mostrar que $\tilde{\Theta}((n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} p) + (n' \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} p')) = \tilde{\Theta}(n \xrightarrow{A} m \xleftarrow{B} p) + \tilde{\Theta}(n' \xrightarrow{A'} m' \xleftarrow{B'} p')$. Veja que a primeira relação é

$$\{((x, x'), (y, y')) \mid \theta(A + A')(x, x') = \theta(B + B')(y, y')\}$$

onde $(x, x') \in (k^n)^{\mathbb{Z}} \times (k^{n'})^{\mathbb{Z}}$ e $(y, y') \in (k^p)^{\mathbb{Z}} \times (k^{p'})^{\mathbb{Z}}$. Se soubéssemos que $\theta(A + A') = \theta(A) + \theta(A')$ para quaisquer matrizes A, A' , então teríamos que $\theta(A + A')(x, x') = \theta(B + B')(y, y')$ se e só se $(\theta(A)x, \theta(A')x') = (\theta(B)y, \theta(B')y')$. Logo, reordenando os termos, o primeiro conjunto é isomorfo à

$$\{(x, y) \mid \theta(A)x = \theta(B)y\} + \{(x', y') \mid \theta(A')x' = \theta(B')y'\}$$

lembrando que soma direta de subespaços é isomorfa ao produto cartesiano. Para finalizar, o fato que $\theta(A + A') = \theta(A) + \theta(A')$ para quaisquer matrizes A, A' é imediato de θ ser definido



Demonstração. Esta apresentação é exatamente a apresentação de **CoRel(M)**, que pode ser encontrada por técnicas similares às que encontram apresentações da categoria de matrizes e de relações lineares, como discutidas no segundo capítulo. Para mais detalhes, veja (FONG; SOBOCIŃSKI; RAPISARDA, 2016). \square

REFERÊNCIAS

- BAEZ, J.; STAY, M. Physics, topology, logic and computation: a rosetta stone. In: **New structures for physics**. [S.l.]: Springer, 2010. p. 95–172. Citado na página 15.
- BAEZ, J. C.; ERBELE, J. Categories in control. **Theory and Applications of Categories**, v. 30, n. 24, p. 836–881, 2015. Citado na página 63.
- BONCHI, F.; SOBOCIŃSKI, P.; ZANASI, F. Interacting hopf algebras. **Journal of Pure and Applied Algebra**, Elsevier, v. 221, n. 1, p. 144–184, 2017. Citado na página 67.
- FONG, B.; SOBOCIŃSKI, P.; RAPISARDA, P. A categorical approach to open and interconnected dynamical systems. In: IEEE. **2016 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)**. [S.l.], 2016. p. 1–10. Citado nas páginas 15, 111, 114 e 118.
- FONG, B.; SPIVAK, D. I. **An Invitation to Applied Category Theory: Seven Sketches in Compositionality**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado nas páginas 15, 16 e 55.
- LANE, S. M. Categories for the working mathematician. 1998. **Graduate Texts in Mathematics**, v. 5, 1998. Citado nas páginas 27, 45 e 46.
- RIEHL, E. **Category theory in context**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2017. Citado na página 15.
- SOBOCINSKI, P. **Graphical Linear Algebra**. 2019. [Online; acessado 11-Novembro-2019]. Disponível em: <<https://graphicallinearalgebra.net/>>. Citado na página 15.
- WILLEMS, J. C. The behavioral approach to open and interconnected systems. **IEEE Control Systems Magazine**, IEEE, v. 27, n. 6, p. 46–99, 2007. Citado nas páginas 75, 112 e 114.

