UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Espectro de operadores diferenciais com adjunto elítico numa escala de espaços de Sobolev localizados

Luís Márcio Salge

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Luís Márcio Salge

Espectro de operadores diferenciais com adjunto elítico numa escala de espaços de Sobolev localizados

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Éder Rítis Aragão Costa

USP – São Carlos
Fevereiro de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S164e

Salge, Luís Márcio
Espectro de operadores diferenciais com adjunto elítico numa escala de espaços de Sobolev localizados / Luís Márcio Salge; orientador Éder Rítis Aragão Costa. -- São Carlos, 2021.
115 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Operadores diferenciais elíticos. 2. Espaços de Sobolev localizados. 3. Operadores pseudodiferenciais. 4. Espaços de Fréchet. 5. Equações diferenciais parciais. I. Rítis Aragão Costa, Éder, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Luís Márcio Salge

Spectrum of operators with adjoint elliptic on a scale of localized Sobolev spaces

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Éder Rítis Aragão Costa

USP – São Carlos
February 2022

Este trabalho é dedicado aos meu avós que
sempre me apoiaram e à todos que trabalham para o desenvolvimento da ciência.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados aos meu avós Terezinha Lemos Salge, Márcio Antônio Salge que me criaram e educaram possibilitando que eu pudesse ingressar na universidade e realizar meu trabalho. Agradeço aos meus pais, meus tios e amigos que me apoiaram nos momentos mais difíceis que passei durante a minha formação.

Agradeço também ao orientador Éder Rítis Aragão Costa, meus orientadores da graduação Adalberto Bergamasco e Roberta Wik Atique, à professora Ana Cláudia Nabarro, aos coordenadores Sérgio Monari, que também foi meu supervisor durante o estágio PAE, Daniel Smania e Ederson Moreira que me ajudaram imensamente durante a execução deste trabalho.

Agradecimentos especiais são direcionados a todos os funcionários da pós-gradução da Matemática e do financeiro que sempre foram muito solícitos e me ajudaram sempre que necessário.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa.
Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre."
(Paulo Freire)

RESUMO

SALGE, L. M. **Espectro de operadores diferenciais com adjunto elítico numa escala de espaços de Sobolev localizados**. 2022. 115 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Neste trabalho, apresentamos algumas diferenças que surgem no estudo do espectro de operadores diferenciais com coeficientes constantes, quando mudamos a estrutura do “espaço base" de Banach para Fréchet.

Mostramos aqui que a alteração da topologia acarreta em mudanças significativas no comportamento do espectro de operadores diferenciais com dual elítico, em especial o Laplaciano, como por exemplo, o desaparecimento do conjunto resolvente, mesmo em domínio limitado.

A motivação para este estudo vem da extensão da noção de dicotomia exponencial para espaços de Fréchet, que foi introduzida em (COSTA, 2019), e a ligação que existe entre separação do espectro e a dicotomia.

Palavras-chave: Espectro, Pseudodiferencial, Fréchet, Sobolev Localizados.

ABSTRACT

SALGE, L. M. **Spectrum of operators with adjoint elliptic on a scale of localized Sobolev spaces**. 2022. 115 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

In this work, we present some differences which arise in the spectral analysis of differential operators with constant coefficients when we change the structure of the 'base space' from Banach to Fréchet.

Here is shown that Fréchet topology implies in significant changes on the behavior of the spectrum of differential operators with elliptic dual, specially the Laplacian like, for instance its resolvent disappears even when we consider a limited domain.

The motivation for this work comes from the extension of the notion of exponential dichotomy for Fréchet spaces, that was introduced by the author, and the link between the disconnected spectrum and dichotomy.

Keywords: Spectrum, Pseudo-differential, Fréchet, Localized Sobolev.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

TVS — Espaço Vetorial Topológico - Topological Vector Space

$\mathbb{R}$ — Conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$ — Conjunto dos números complexos

$\mathbb{N}$ — Conjunto dos números naturais

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ — Distribuições Temperadas

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ — Conjunto das Funções de Schwartz

L^1_{loc} — Espaço das funções localmente integráveis

H^s — Espaço de Sobolev de ordem s

$\mathbb{Z}$ — Conjunto dos números inteiros

$\mathscr{D}'$ — Espaço das Distribuições

$C_c^\infty(\Omega)$ — Conjunto das Funções Teste

$\mathscr{E}'$ — Distribuições com Suporte Compacto

$S^m(\Omega)$ — Classe dos símbolos de operadores semi-globais de ordem m

$S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ — Classe dos símbolos de operadores globais de ordem m

$\Psi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ — Conjunto dos operadores pseudodiferenciais de ordem m

$\Psi(\Omega)$ — Conjunto dos operadores pseudodiferenciais semi-globais de ordem m em Ω

$\mathbb{Z}_+$ — Conjuntos dos números inteiros não negativo

$H^s_{loc}(\Omega)$ — Espaço de Sobolev localizado de ordem s em Ω

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A teoria espectral desempenha um papel fundamental no estudo das equações diferenciais, tanto quantitativo quanto qualitativo. Por isso, ela consiste num tema de grande interesse para as áreas de Análise Funcional, Equações Diferenciais, Sistemas Dinâmicos, entre outras.

Nosso trabalho baseia-se no roteiro apresentado em (TAYLOR, 1958), que faz a teoria espectral de operadores fechados em espaços de Banach, e adotamos como definições de operador pseudodiferencial àquelas dadas em (HENRY, 2006) e (RUZHANSKY; TURUNEN, 2000).

Posto isto, para que seja bem entendido o que será desenvolvido ao desenrolar deste trabalho é recomendável um conhecimento básico de Análise Funcional, Teoria das Distribuições, espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $H^s_{loc}(I)$, operadores diferenciais e pseudodiferenciais. De qualquer forma, no capítulo introdutório apresentaremos os conceitos essenciais para o entendimento do que é desenvolvido neste trabalho.

Nossas ideias iniciais para tratar esta questão e as soluções que demos, coincidiram com as já desenvolvidas por (CHAU; WONG; PI, 1993), que dá condições suficientes para assegurar que o espectro de um operador pseudo-diferencial com coeficientes constantes em $\mathscr{S}$ coincida com a imagem do seu símbolo (ou fecho da imagem, mais geralmente), consequentemente, neste caso, o espectro resulta sempre num conjunto conexo. Relembraremos estes resultados no Capítulo 3 e apresentaremos nosso primeiro teorema resultante deste projeto, o qual expõe uma comparação entre o espectro de um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com o do seu transposto em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, mostrando que esses espectros coincidem, quando modificamos as topologias utilizadas para considerar continuidade e densidade.

Por outro lado, nossos principais resultados estão relacionados com operadores diferenciais com coeficientes constantes na escala dos espaços de Sobolev localizados de um intervalo, $H^s_{loc}(I)$, $s \in \mathbb{R}$. Mostraremos que, ao considerar

$$\Delta : H^2_0(0,\pi) \subset L^2_{loc}(0,\pi) \longrightarrow L^2_{loc}(0,\pi),$$

o que consiste em alterar o domínio do operador e a topologia do espaço base, muitas diferenças importantes aparecem como, por exemplo, o desaparecimento do conjunto resolvente, o que constitui nossa maior contribuição à teoria. Nossa conclusão final será que a definição usual de espectro não será útil para o estudo da dicotomia exponencial e nem para o estudo da geração de semi-grupos, quando consideramos um espaço de Fréchet como domínio de um operador diferencial, uma vez que não haverá conjunto resolvente.

Estudamos um operador diferencial com coeficientes constantes da seguinte maneira

$$a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I)$$

com $m \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$, e adjunto

$$a(D)^* : H_c^{-s+m}(I) \subset H_c^{-s}(I) \longrightarrow H_c^{-s}(I)$$

elítico. Nessas condições, foi possível fazer uma análise bastante detalhada do seu espectro e compará-lo com o de $a(D)^*$. Além disso, calculamos o fecho $\overline{a(D)}$, o que possibilitou mapear o deslocamento dos pontos dos espectros (pontual, residual e contínuo) em três estágios, no caso $a(D) = \Delta$ com $s = 0$ e $m = 2$, como explicamos no Capítulo 5.

Sendo assim este trabalho está divido da maneira que descrevemos a seguir.

No capítulo introdutório, apresentamos as ferramentas e resultados de Análise Funcional, Teoria das Distribuição e Equações Diferenciais que foram necessários para o desenvolvimento desta tese.

Já no capítulo seguinte, exibimos a motivação para o desenvolvimento deste estudo. A saber, expomos os conceitos básicos para dicotomia exponencial e as conclusões que já foram obtidas tanto para operadores definidos em espaços de Banach quanto para operadores definidos em espaços de Fréchet e posteriormente o que desejávamos investigar nesta pesquisa.

O quarto capítulo tem como propósito apresentar a primeira alternativa que trabalhamos para responder os questionamentos do capítulo anterior, mais detalhadamente, expomos as conclusões que já haviam sido obtidas e a resultante do nosso trabalho. Mais especificamente, neste capítulo mostramos as conclusão já obtidas por (CHAU; WONG; PI, 1993) e o estudo feito para o espectro de operadores pseudodiferenciais com coeficientes constantes em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ comparando com os espectros de seus transpostos definidos em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

No Capítulo 5, relatamos os resultados mais relevantes que foram conquistados por estudo estudo. Nele constam o cálculo do espectro de operadores diferenciais com coeficientes constantes com transposto elítico definidos numa escala de espaços de Sobolev locais, os espectros de Δ e seu fecho $\overline{\Delta}$ e comparamos os resultados encontrados.

Finalmente, o Capítulo 6 exibe algumas das principais dificuldades que encontramos no decurso do processo de solução dos problemas que nos propusemos a tratar e o que esperamos obter com o continuidade deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CAPÍTULO

2

CONCEITOS PRELIMINARES

Iniciamos este texto apresentando alguns conceitos de Análise Funcional essenciais ao desenvolvimento da teoria espectral e o estudo do espectro de operadores fechados. Dentre estes, encontram-se os de Espaços de Banach, Espaços de Fréchet, Espaços de Sobolev, Operadores Lineares Fechados, Operadores Compactos, além de outros que também são importantes para o estudo das equações diferenciais parciais que emergem de problemas da Geometria Diferencial, Análise Harmônica, Mecânica e Física.

O intuito deste capítulo é deixar os resultados desenvolvidos neste trabalho o mais acessíveis possível àqueles que estiverem interessados no estudo do espectro de operadores lineares, em especial, nas dificuldades que surgem quando se procura entender este conceito aplicado a operadores em espaços de Fréchet.

2.1 Espaços de Banach e Espaços de Fréchet

Consideremos X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, que aqui será sempre, ou o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o dos números complexos $\mathbb{C}$.

Diremos que X é um espaço vetorial topológico, ou TVS, quando X está munido de uma topologia τ de modo que as operações de adição e multiplicação por escalar

$$\begin{array}{rcl} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

definem aplicações contínuas.

Se cada ponto de X possui uma base de vizinhanças formada por conjuntos abertos convexos,[1] diremos que X é um TVS localmente convexo. Notemos que, sendo X um TVS, basta que sua origem tenha uma base de vizinhanças formada por abertos convexos para que X seja localmente convexo, pois as translações $T_p(x) = x + p$ são homeomorfismos.

Quando $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que

(i) $\|x\| \geq 0,\ x \in X$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$,

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ x,y \in X$,

diz-se que $\|\cdot\|$ é uma seminorma em X. Se, além disso, tivermos que $\|x\| = 0$ implica $x = 0$, então $\|\cdot\|$ é dita uma norma definida em X e diz-se que o par $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

Por outro lado, uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y,\ x,y \in X$,

(ii) $d(x,y) \leq d(y,x),\ x,y \in X$,

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),\ x,y,z \in X$,

é chamada uma métrica em X e o par (X,d) um espaço métrico.

Enfatizamos que, dada uma norma $\|\cdot\|$ em X, se definirmos $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$d(x,y) \doteq \|x-y\|,\ x,y \in X,$$

teremos que d é uma métrica em X, a qual é dita induzida por $\|\cdot\|$.

Apresentadas as noções anteriores, podemos definir os conceitos de espaços de Banach e de Fréchet.

Definição 2.1.1 (Espaços de Banach e de Fréchet). Diremos que um espaço vetorial topológico X é um espaço de Fréchet, se for um espaço de Hausdorff com topologia induzida por uma família enumerável de seminormas[2], $\mathscr{F} \doteq (p_j)_{j\in\mathbb{N}}$, e completo relativamente a métrica dada por

$$d(x,y) \doteq \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)},\ x,y \in X.$$

Por outro lado, um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se for completo com relação à métrica induzida por $\|\cdot\|$.

[1] Dados X um espaço vetorial e um subconjunto $A \subset X$, dizemos que A é convexo se $tx + (1-t)y \in A$ para quaisquer $x,y \in A$ e todo $t \in [0,1]$.

[2] Confira a Proposição 5.16 de (FOLLAND, 1999, pg. 167).

Vale mencionar que, como explicado na Seção 3.7 do Capítulo 3 de (OSBORNE, 2014), um espaço de Fréchet também pode ser definido como um espaço de Hausdorff localmente convexo que é primeiro enumerável e completo.[3]

Antes de prosseguirmos, é necessário introduzirmos algumas noções importantes tanto em Análise Funcional quanto em Teoria das Distribuições, as quais são exaustivamente utilizadas aqui.

Dada uma função contínua $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, definimos o seu suporte da seguinte maneira

$$\text{supp } \phi \doteq \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Dadas funções mensuráveis $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos a convolução de f e g em $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$(f \star g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

para todos os $x \in \mathbb{R}^n$ tais que essa integral existe, confira (FOLLAND, 1999, pg. 239).

Uma $n-$upla de inteiros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ será chamada de multi-índice. Dados multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, definimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

e

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

Além disso, indicaremos $D_j = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, em que $i^2 = -1$, e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

ou seja,

$$D^\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Podemos considerar ainda

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Finalmente, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escreveremos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

A seguir, apresentamos alguns exemplos de espaços de Fréchet. Dentre eles, o conjunto das funções suaves definidas em um aberto de $\mathbb{R}^n$ munido da topologia da convergência uniforme

[3] Como podemos ver na seção intitulada *Seminormas e Convexidade Local* do Capítulo 1 de (RUDIN, 1921), a topologia de espaços localmente convexos é gerada por uma família de seminormas, daí sua completude é determinada por esta mesma família.

das funções e suas derivadas, o qual é um exemplo clássico de espaço de Fréchet que não é Banach.

Exemplos 2.1.2. (1) Consideremos o espaço $C^\infty(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, munido da topologia da convergência uniforme das funções e suas derivadas em compactos de Ω. Sua topologia provém das seminormas dadas por

$$p_{(j,\alpha)}(f) \doteq \sup_{x\in K_j} |(\partial^\alpha f)(x)|$$

para $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ e $j \in \mathbb{N}$, sendo que $\overline{K_j} \subset K_{j+1}$, $\overline{K_j}$ compacto e $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}} K_j$.

(2) Consideremos o espaço das funções suaves com suporte compacto $C^\infty_c(K)$, em que $K \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto, munido da topologia da convergência uniforme das funções e suas derivadas no compacto K. Sua topologia provém das seminormas dadas por

$$p_\alpha(f) \doteq \sup_{x\in K} |(\partial^\alpha f)(x)|$$

para $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

(3) O espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet. Ele é formado pelas funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que, para quaisquer multi-índices α, β, vale

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left(\partial^\beta f\right)(x) \right| < \infty.$$

Sua topologia provém das seminormas dadas por

$$p_{\alpha,\beta}(f) \doteq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left(\partial^\beta f\right)(x) \right|, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

para α, β multi-índices. Essa família de seminormas é enumerárel e separante[4] e, além do mais, munido desta topologia o espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet.

(4) O espaço $L^2_{loc}(\Omega)$ é um espaço de Fréchet que desempenhará um papel especial neste trabalho, por isso, o definiremos e o analisaremos aqui com mais cuidado.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e consideremos o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\int_K |f(x)|^2 dx < \infty,$$

para cada compacto $K \subset \Omega$. Denotamos este espaço por $L^2_{loc}(\Omega)$ e o munimos com as seminormas dadas por

$$p_j(f) \doteq \left(\int_{K_j} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

[4] Sejam X um TVS e $\mathscr{A} = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de seminormas em X. Dizemos que a família $\mathscr{A}$ é separante se, para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe $\alpha \in A$ tal que $p_\alpha(x-y) \neq 0$.

para $j \in \mathbb{N}$, sendo que $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$, K_j compacto e $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}} K_j$.

Observemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, p_j é uma seminorma pois ela coincide com a norma de $L^2(K_j)$. Além disso, se $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ for tal que $p_j(f) = 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, segue que $f|_{K_j} = 0$ q.t.p. e então $f = 0$ q.t.p.

Por fim, mostremos que toda sequência de Cauchy em $L^2_{loc}(\Omega)$ é convergente.

De fato, dada uma sequência de Cauchy $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset L^2_{loc}(\Omega)$ temos que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$p_j(f_l - f_k) = \left(\int_{K_j} |f_l(x) - f_k(x)|^2 dx\right)^{1/2} \to 0, \text{ quando } l,k \to \infty$$

e, como $L^2(K_j)$ é um espaço de Banach existe $g_j \in L^2(K_j)$ tal que

$$\int_{K_j} |g_j(x) - f_k(x)|^2 dx \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Dado $x \in \Omega$, existe $j \in \mathbb{N}$ de modo que $x \in K_j$ e assim definamos $g(x) \doteq g_j(x)$.

Notemos que

$$\int_{K_j} |g_{j+1}(x) - g_j(x)|^2 dx \leq \int_{K_{j+1}} |g_{j+1}(x) - f_l(x)|^2 dx + \int_{K_j} |g_j(x) - f_l(x)|^2 dx \to 0$$

quando $l \to \infty$, logo g_{j+1} e g_j coincidem em K_j e g está bem definida. Além do mais, dado $K \subset \Omega$ um compacto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{j_0}$, assim

$$\int_K |g(x)|^2 dx \leq \int_{K_{j_0}} |g(x)|^2 dx = \int_{K_{j_0}} |g_{j_0}(x)|^2 dx < \infty$$

implicando que $g \in L^2_{loc}(\Omega)$.

Por fim, para cada $j \in \mathbb{N}$ pela escolha de g_j segue que

$$p_j(g - f_l) = \left(\int_{K_j} |g(x) - f_l(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_{K_j} |g_j(x) - f_l(x)|^2 dx\right)^{1/2} \to 0$$

quando $l \to \infty$ provando que $f_l \xrightarrow{L^2_{loc}(\Omega)} g$ e, consequentemente, que $L^2_{loc}(\Omega)$ é completo, como queríamos.

Vale ressaltar que podemos ter um TVS completo com topologia induzida por uma família separante de seminormas sem que esta família seja enumerável, nestes casos o espaço resultante não é de Fréchet. Um exemplo dessa situação e que irá figurar aqui é o espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, o qual será definido mais adiante.

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, como podemos ver em (OSBORNE, 2014, pg. 81), o conjunto das funções C^∞ com suporte compacto em Ω, $C_c^\infty(\Omega)$, é um outro exemplo de TVS localmente convexo que não possui estrutura de espaço de Fréchet.

Uma sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ converge em $C_c^\infty(\Omega)$ para ϕ, como podemos conferir também em (FOLLAND, 1999), quando:

(i) $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(K)$, em que $K \subset \Omega$ é um compacto;

(ii) $\phi_j \longrightarrow \phi$ na topologia de $C^\infty(K)$, ou seja, $\partial^\alpha \phi_j \longrightarrow \partial^\alpha \phi$ uniformemente em K para qualquer multi-índice α.

Uma ferramenta de inestimável relevância para as equações diferenciais parciais é a transformada de Fourier. Este operador linear foi usado exaustivamente durante este trabalho. Dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f da seguinte forma

$$\mathscr{F}(f)(\xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi\cdot x} f(x)dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Essa regra define uma função $\mathscr{F}(f)$, a qual é chamada função transformada de Fourier de f, e pode também ser indicada por $\hat{f}$.

Listamos aqui algumas propriedades importantes desta transformação (confira (FOLLAND, 1999)). Na proposição abaixo utilizamos a seguinte notação

$$C_0(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n);\ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

Proposção 2.1.3. Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) $(f \star g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$;

(b) Se existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que vale $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, então $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $\partial^\alpha \hat{f} = [(2\pi i x)^\alpha f]\hat{}$;

(c) Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ com $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, e $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k-1$, então para $|\alpha| \leq k$ tem-se $(\partial^\alpha f)\hat{} = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}$;

(d) $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$;

(e) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$

Tendo em mãos a transformada de Fourier podemos exibir agora um exemplo menos conhecido de espaço de Fréchet.

Exemplo 2.1.4. (TREVES, 1973) Sejam $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as distribuições temperadas em $\mathbb{R}^n$, isto é, o dual topológico do espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis cujo quadrado é integrável em cada compacto de $\mathbb{R}^n$ e consideremos

$$E := \left\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \right\},$$

em que $\widehat{u}$ indica a transformada de Fourier da distribuição temperada $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

E está munido das seminormas

$$p_j^*(u) := \left(\int_{|\xi| \leq j} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \tag{2.1.1}$$

para $j \in \mathbb{N}$ e $u \in E$.

Segue que as mesmas constituem uma família enumerável e separante de seminormas em E de modo que a função

$$d(u,v) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j^*(u-v)}{1+p_j^*(u-v)}$$

fornece uma distância em E.

Definimos $\mathscr{F}L^2_{loc} := \mathscr{F}L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o completamento do espaço métrico (E,d).

Não é difícil provar que as seminormas (2.1.1) têm extensões naturais para $\mathscr{F}L^2_{loc}$ que dão a $\mathscr{F}L^2_{loc}$ a estrutura de espaço de Fréchet.

Quando $[u] \in \mathscr{F}L^2_{loc}$[5] é possível definir sua transformada de Fourier.

Tomando $(u_l)_{l\in\mathbb{N}} \in [u]$ segue que $(\widehat{u_l})_{l\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e por isso existe uma única $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{u_l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} w$ em L^2_{loc} e assim pomos

$$\widehat{[u]} = w.$$

É fácil ver que essa transformada está bem definida, isto é, essa definição é independente da sequência $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ escolhida para representar a classe $[u]$.

Uma pergunta natural a se fazer é se, lançando mão da estrutura topológica dada por uma família enumerável de seminormas de um espaço de Fréchet, existe uma forma de utilizá-las para caracterizar operadores lineares contínuos.

A proposição a seguir caracteriza a continuidade de uma transformação linear entre espaços vetoriais topológicos cuja topologia é dada por uma família de seminormas. (FOLLAND, 1999, pg. - 166)

Proposção 2.1.5. Dados X e Y espaços vetoriais topológicos cujas topologias são induzidas, respectivamente, pelas famílias de seminormas $\mathscr{F}_1 = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ e $\mathscr{F}_2 = (q_\beta)_{\beta\in B}$, e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Nessas condições, T é contínua se, e somente se, para cada $\beta \in B$ existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in A$ e $C > 0$ tais que

$$q_\beta(Tx) \leq C \sum_{j=1}^{l} p_{\alpha_j}(x).$$

[5] Aqui, estamos considerando o completamento como sendo o espaço quociente de todas as sequências de Cauchy em E com respeito a relação de equivalência canônica: $(u_l)_{l\in\mathbb{N}} \sim (v_l)_{l\in\mathbb{N}} \iff \lim_{l\to\infty} d(u_l,v_l) = 0$.

Uma aplicação importante desta proposição é o seguinte teorema, que inclusive será usado ao longo deste texto.

Teorema 2.1.6. A transformada de Fourier $\mathscr{F}$ é uma aplicação contínua de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Confira (FOLLAND, 1999).

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier inversa pondo

$$\check{f}(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)d\xi, x \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que esta transformação é linear e, como podemos imediatamente perceber, $\check{f}(x) = \big(\mathscr{F}f\big)(-x)$ e vale o seguinte corolário.

Corolário 1. A transformada de Fourier é um isomorfismo de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

É notório que tanto o Teorema de Hahn-Banach, quanto suas consequências, são ferramentas indispensáveis para o estudo dos operadores diferenciais e algumas destas consequências fazem uso da norma em suas demonstrações, por isso, nem sempre poderão ser aplicadas a fim de cumprir nossos propósitos. Pensando nisso, a seguir apresentamos um resultado de Análise Funcional que não é muito difundido e será relevante para o que desenvolveremos nos próximos capítulos.

Teorema 2.1.7. Seja $(X,(p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ um espaço de Fréchet. Dado um subespaço $M \subset X$ tal que $\overline{M} \neq X$, então existe funcional linear não nulo $G \in X'$ que satisfaz

$$\langle G,x\rangle = 0,\ \forall\, x \in M.$$

Demonstração. Tomemos $x_0 \in X \setminus \overline{M}$, assim $d(x_0,\overline{M}) > \delta$ para algum $\delta > 0$, em que $d(\cdot,\cdot)$ é a distância dada por $d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}$, para $x,y \in X$.

Consequentemente, $d(x_0,x) \geq \delta$, qualquer que seja $x \in M$, portanto

$$\begin{aligned}
\delta &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(x_0-x)}{1+p_j(x_0-x)} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(x_0-x)}{1+p_j(x_0-x)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(x_0-x)}{1+p_j(x_0-x)} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(x_0-x)}{1+p_j(x_0-x)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j},
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pois

$$\frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \leq 1, \forall\, x,y \in X, j \in \mathbb{N}.$$

Agora, escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\delta}{2},$$

o que unido à desigualdade (2.1.2) nos dá que

$$\frac{\delta}{2} \leq \sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x_0-x)}{1+p_j(x_0-x)} \leq \sum_{j=1}^{n} p_j(x_0-x),$$

para qualquer $x \in M$.

Nessas condições definamos

$$\begin{aligned} g : M \oplus [x_0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x+\lambda x_0 &\mapsto \lambda\frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

a qual é claramente linear e, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in M$, cumpre

$$|\langle g, x+\lambda x_0\rangle| = |\lambda|\frac{\delta}{2} \leq |\lambda| \sum_{j=1}^{n_0} p_j\left(x_0+(1/\lambda)x\right) = \sum_{j=1}^{n_0} p_j\left(x+\lambda x_0\right),$$

provando que $g : M \oplus [x_0] \to \mathbb{C}$ é linear e contínua.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $G \in X'$ tal que $\langle G, x+\lambda x_0\rangle = \langle g, x+\lambda x_0\rangle$ para todo $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{C}$, logo $\langle G, x\rangle = \langle g, x\rangle = 0$, para todo $x \in M$, com $\langle G, x_0\rangle = \langle g, x_0\rangle = \delta/2 > 0$, como queríamos demonstrar.

$\square$

A partir deste momento, a menos que seja dito o contrário, consideraremos X um espaço de Fréchet sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

2.2 Espectro de Operadores Lineares

Iniciamos esta seção apresentando o principal objeto de análise deste projeto que é o espectro $\sigma(A)$ de um operador linear A. Este conceito comprova sua importância no estudo de, por exemplo, a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais (em particular, a Dicotomia Exponencial e a Propriedade do Ponto de Sela).

Definição 2.2.1. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear definido em um subespaço $D(A)$ de X, chamado o seu domínio.

O conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, é o conjunto formado por todos os escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que as seguintes três condições estão satisfeitas:

(a) O operador $\lambda I_X - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, que será indicado apenas por $\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, omitindo-se a identidade, é injetivo.

(b) A imagem de $\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, indicada por $R(\lambda - A)$, é densa em X.

(c) A inversa $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$ é contínua.

Quando $\lambda \in \rho(A)$, o operador $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$ chama-se o resolvente de A em λ.

Finalmente, definimos o espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, como sendo o conjunto dos escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ que não estão no conjunto resolvente de A, isto é,

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

O estudo dos operadores $(\lambda - A)^{-1}$ e dos conjuntos $\rho(A)$ e $\sigma(A)$ é chamado a Teoria Espectral, ou Análise Espectral, de A.

O operador central deste trabalho é o laplaciano que é usualmente indicado por Δ. A fim de estudá-lo adequadamente aqui, fazem-se necessárias as definições de operador fechado e fechável, visto que o operador de Laplace Δ apresenta estas propriedades em diferentes contextos, fato este que será útil na prova do último resultado desta tese.

Definição 2.2.2. Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, definido em um subespaço de um espaço de Fréchet (ou Banach) X é

(a) **Fechado**, quando seu gráfico $G(A) := \{(u, Au) : u \in D(A)\}$ é um subespaço fechado do espaço produto $X \times X$.

(b) **Fechável**, quando o fecho do seu gráfico em $X \times X$ é o gráfico de algum operador linear $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset X \longrightarrow X$. Neste caso, tal operador $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset X \longrightarrow X$ é único e é chamado o fecho de A.

Segue da definição acima, que quando $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador fechável e $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset X \longrightarrow X$ é seu fecho, então vale a igualdade

$$\overline{G(A)} = G(\overline{A}). \tag{2.2.3}$$

Além do mais, $\overline{A}$ é um operador fechado e constitui a menor extensão fechada de A.

Teorema 2.2.3. Dado $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, definido em um subespaço de um espaço de Fréchet (ou Banach) X então A é fechável se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $A(x_n) \to y$ e $x_n \to 0$, quando $n \to \infty$, temos que $y = 0$.

O teorema acima fornece um critério muito útil para verificarmos se um operador linear A é fechado. Para a demonstração desse resultado confira (TAYLOR, 1958).

Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ for um operador linear fechado, as três condições necessárias para que um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ seja um ponto do resolvente $\rho(A)$, apresentadas na Definição 2.2.1, se resumem em uma só, como consequência do seguinte lema.

Lema 1. Dado $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador fechado, tem-se que

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X \text{ é bijetiva}\right\}.$$

Demonstração. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - A$ é bijeção, mostremos que

$$(\lambda - A)^{-1} : X \longrightarrow X$$

é contínua, o que nos dará $\lambda \in \rho(A)$.

Para tanto, basta mostrarmos que o gráfico de $(\lambda - A)^{-1}$ é fechado, pois, com isso, pelo Teorema do Gráfico Fechado para espaços de Fréchet, concluiremos que o operador em questão é contínuo.

Com efeito, seja $(f,u) \in \overline{G((\lambda - A)^{-1})}$, segue que existe uma sequência $(f_j,u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset G((\lambda - A)^{-1})$ tal que $(f_j,u_j) \to (f,u)$ em $X \times X$ em que $(\lambda - A)^{-1} f_j = u_j$, com $u_j \in D(A)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} u_j &\longrightarrow u \\ (\lambda - A)u_j = f_j &\longrightarrow f, \end{aligned}$$

o que implica em $(u,f) \in \overline{G((\lambda - A))} = G((\lambda - A))$. Em outras palavras, $u \in D(A)$ e $f = (\lambda - A)u$ e consequentemente $(f,u) \in G((\lambda - A)^{-1})$, mostrando que o resolvente tem gráfico fechado.

Por fim, consideremos $\lambda \in \rho(A)$ e mostremos que $\lambda - A$ é bijeção. Para tanto, basta mostrar que $R(\lambda - A) = X$, pois $\lambda \in \rho(A)$.

Seja $f \in X = \overline{R(\lambda - A)}$, assim existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$f = X - \lim_{j\to\infty} (\lambda - A)u_j.$$

Denotemos $f_j \doteq (\lambda - A)u_j$, ou equivalentemente $u_j = (\lambda - A)^{-1} f_j$ e mostremos que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Sendo $f_j \to f$, tem-se que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, ou seja, $f_j - f_l \to 0$, se $j,l \to \infty$. Logo,

$$u_j - u_l = (\lambda - A)^{-1} f_j - (\lambda - A)^{-1} f_l = (\lambda - A)^{-1}(f_j - f_l) \to 0,$$

quando $l, j \to \infty$, pois $(\lambda - A)^{-1}$ é contínua.

Finalmente, concluímos que existe $u \in X$ tal que $u_j \to u$ e $(f,u) \in \overline{G((\lambda - A)^{-1})}$ ou, equivalentemente, $(u,f) \in \overline{G(\lambda - A)} = G(\lambda - A)$. Por conseguinte, $u \in D(A)$ e $f = (\lambda - A)u \in R(\lambda - A)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Dentre os elementos do espectro existem três tipos, mutuamente exclusivos, que nascem negando-se, uma a uma, as três condições necessárias para que um escalar λ esteja no conjunto resolvente. Mais especificamente

Definição 2.2.4. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, definimos:

(a) **Espectro Pontual ou Conjunto dos Autovalores de A,** indicado por $\sigma_p(A)$:
É o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - A$ não é injetor;

(b) **Espectro Residual de A,** indicado por $\sigma_r(A)$:
É o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - A$ é injetor com $\overline{R(\lambda - A)} \neq X$;

(c) **Espectro Contínuo de A,** indicado por $\sigma_c(A)$:
É o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que é $\lambda - A$ é injetor, $\overline{R(\lambda - A)} = X$ mas $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \longrightarrow X$ não é contínua.

Dessa forma, tem-se imediatamente a decomposição $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_r(A)$.

Como visto no lema e na definição acima, o espectro de um operador fechado possui uma estrutura mais simples de ser estudada, sendo assim dado um operador fechável poderíamos nos perguntar se existe alguma relação entre o espectro deste operador com o espectro do seu fecho. Para esta pergunta temos uma resposta bastante satisfatória que se mostrará importante em nossos estudos, esta reposta é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.2.5. Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador fechável e $\overline{A} : D(\overline{A}) \subset X \longrightarrow X$ é seu fecho, então

$$\sigma(A) = \sigma(\overline{A}).$$

Demonstração. Evidentemente, mostrar que $\sigma(\overline{A}) = \sigma(A)$ é o mesmo que mostrar que $\rho(\overline{A}) = \rho(A)$. Tomemos então $\lambda \in \rho(\overline{A})$, sendo $D(A) \subset D(\overline{A})$, tem-se

$$\lambda - \overline{A}|_{D(A)} = \lambda - A$$

e consequentemente $\lambda - A$ é injetor.

Seja $f \in X = R(\lambda - \overline{A})$, daí existe $u \in D(\overline{A})$ tal que $(\lambda - \overline{A})u = f$. Pela definição de domínio e imagem do fecho do operador A deve existir uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ com $u_j \to u$ e $(\lambda - A)u_j \to f$, dessa forma $f \in \overline{R(\lambda - A)}$, o que comprova a densidade da imagem de $\lambda - A$.

Resta mostrarmos que

$$(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$$

é um operador contínuo. Para tanto, tomemos $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset R(\lambda - A)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} f_j = f \in R(\lambda - A),$$

donde existe $u \in D(A)$ com $f = (\lambda - A)u$.

Mostremos agora que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$, em que $(\lambda - A)^{-1} f_j = u_j$. Notemos que $f_j = (\lambda - A)u_j = (\lambda - \overline{A})u_j$, $u_j \in D(A) \subset D(\overline{A})$, ou seja, $u_j = (\lambda - \overline{A})^{-1} f_j$ e sendo $(\lambda - \overline{A})^{-1}$ contínua segue que

$$u = (\lambda - \overline{A})^{-1} f = \lim_{j\to\infty} (\lambda - \overline{A})^{-1} f_j = \lim_{j\to\infty} u_j.$$

Portanto

$$\rho(\overline{A}) \subset \rho(A).$$

Reciprocamente, seja $\lambda \in \rho(A)$ daí segue que $\lambda - A$ é injetor, $X = \overline{R(\lambda - A)}$ e

$$(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$$

é contínua.

Mostremos que $\lambda - \overline{A}$ é bijeção. De fato, se $u \in D(\overline{A})$ satisfaz $(\lambda - \overline{A})u = 0$, tem-se que existe $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ com $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ e $\lim_{j\to\infty} f_j = 0$, em que $f_j \doteq (\lambda - A)u_j$.

Observemos que $0 \in R(\lambda - A)$, sendo assim da continuidade do operador $(\lambda - A)^{-1}$ obtemos que

$$\lim_{j\to\infty} u_j = \lim_{j\to\infty} (\lambda - A)^{-1} f_j = (\lambda - A)^{-1} 0 = 0,$$

ou seja, $u = 0$ e segue que $\lambda - \overline{A}$ é injetor.

Finalmente, mostremos que $\lambda - \overline{A}$ é sobrejetor. Seja $f \in X = \overline{R(\lambda - A)}$, daí existe $(u_j) \subset D(A)$ com $f_j = (\lambda - A)u_j$ e $f_j \to f$ quando $j \to \infty$.

Portanto $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, ou seja,

$$\lim_{j,l\to\infty} (f_j - f_l) = \lim_{j,l\to\infty} (\lambda - A)(u_j - u_l) = 0,$$

logo

$$\lim_{j,l\to\infty} (u_j - u_l) = \lim_{j,l\to\infty} (\lambda - A)^{-1}(f_j - f_l) = 0$$

pois $(\lambda - A)^{-1}$ é uma aplicação contínua. Concluímos assim que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, portanto existe $u \in X$ tal que $u_j \to u$ quando $j \to \infty$.

Unindo os fatos, podemos concluir que $(u, f) \in \overline{G(\lambda - \overline{A})} = G(\lambda - \overline{A})$, ou seja, $u \in D(\overline{A})$ e $f = (\lambda - \overline{A})u \in R(\lambda - \overline{A})$ como queríamos demonstrar.

□

2.3 Operador Adjunto e Transposto Formal

Dado um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, muitas vezes é útil, como veremos aqui, considerá-lo como atuando em elementos do espaço dual X^*, ou seja, utilizamos uma espécie de "realização" do operador A em X^*. Em geral, temos topologias mais fracas em X^*, o que muitas vezes, como será no nosso caso, são úteis para melhor compreensão do operador A.

Para a Teoria da Resolubilidade das Equações Diferenciais essa interpretação se mostra extremamente valiosa, sendo que quando estudamos a existência de soluções para, por exemplo, a equação

$$Au = f$$

para $f \in X$ dada, permitindo soluções singulares, ou seja, pertencentes a X^* (que geralmente é "maior" do que X), amplificamos o conjunto de soluções admissíveis para esta equação, o que aumenta as possibilidades de resolubilidade.

Portanto, essa seção tem como objetivo apresentar as definições básicas relacionadas ao adjunto de um operador, bem como suas propriedades que serão utilizadas no decorrer deste estudo.

Definição 2.3.1. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear densamente definido em um espaço de Fréchet X e tomando valores num outro espaço de Fréchet Y.

Seu operador adjunto (ou dual) é o operador linear denotado por $A^* : D(A^*) \subset Y^* \longrightarrow X^*$ e definido da seguinte maneira:

$$D(A^*) := \big\{ y^* \in Y^* : y^* \circ A : D(A) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é contínuo} \big\}. \tag{2.3.4}$$

Daí, se $y^* \in D(A^*)$, então, da continuidade de $y^* \circ A : D(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ em conjunto com a densidade de $D(A)$ em X, obtém-se a existência de um único funcional linear contínuo $x^* \in X^*$ que estende o funcional $y^* \circ A : D(A) \longrightarrow \mathbb{C}$, isto é, que cumpre a condição

$$\langle y^*, Ax \rangle = \langle x^*, x \rangle$$

qualquer que seja $x \in D(A)$.

Por definição pomos $A^*y^* := x^*$, de modo que, em virtude da igualdade acima, é então satisfeita a relação fundamental que caracteriza o adjunto A^* de A

$$\langle y^*, Ax\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle, \tag{2.3.5}$$

para todo $x \in D(A)$ e $y^* \in D(A^*)$.

Os principais resultados deste trabalho, consistem em comparar o espectro de A com o do seu adjunto A^*. No caso em que X é um espaço normado, há um resultado bastante geral, que a seguir enunciamos sem demonstração (confira (TAYLOR, 1958)), que ajudará a guiar nossos argumentos neste texto.

Teorema 2.3.2. Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear densamente definido num espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$, então $\rho(A^*) = \rho(A)$ e tem-se ainda que, para todo $\lambda \in \rho(A)$,

$$(\lambda - A^*)^{-1} = \left[(\lambda - A)^{-1}\right]^*. \tag{2.3.6}$$

Em palavras, o resolvente do adjunto é o adjunto do resolvente.

Por outro lado, dado um operador linear contínuo $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$, quando existe $L' : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$, outro operador linear e contínuo, de modo que

$$\int_\Omega (L\psi)\phi dx = \int_\Omega \psi(L'\phi) dx,$$

para todos $\psi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, dizemos que L' é **Transposto Formal** de L e vice-versa. Podemos também indicar L' por ${}^{\mathrm{t}}L$.

Dessa maneira, dada $u \in [C_c^\infty(\Omega)]'$ podemos definir $Lu \in [C_c^\infty(\Omega)]'$, por meio do transposto formal L', da seguinte forma

$$\langle Lu, \phi\rangle \doteq \langle u, L'\phi\rangle,\ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Este procedimento tem a vantagem de expandir o conjunto de possíveis soluções para certas equações diferenciais, visto que em distribuições é comum termos $X \hookrightarrow X'$. Explicaremos o papel do transposto formal em maiores detalhes mais adiante neste texto, quando apresentarmos os espaços de distribuições.

Em Teoria das Distribuições é mais comum utilizarmos a notação X' para o espaço dual em contraposição a notação mais clássica $X*$ utilizada em Análise Funcional. Neste último parágrafo mudamos a notação para a que é mais utilizada em Teoria das Distribuições, quando for necessário, deixaremos explícito para que não exista ambiguidade.

2.4 Teoria espectral para operadores compactos

As definições de espectro e de resolvente foram, a príncipio, apresentadas para um operador linear arbitrário $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$. Posteriormente, quando A é fechado, em (TAYLOR, 1958) mostra-se que no caso em que X é espaço de Banach, sua teoria espectral apresenta propriedades especiais importantes, como, por exemplo, o fato de $\rho(A)$ ser um aberto de $\mathbb{C}$ e seu corolário, que assegura a analiticidade da aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.

Além do mais, supondo $A \in \mathscr{L}(X)$, é possível demonstrar que seu espectro está contido no círculo de centro na origem e raio norma de A, e obter uma representação em série de Laurent para $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, fora deste círculo, e também a existência de seu raio espectral.

Restringindo ainda mais a classe de operadores, considerando compactos, propriedades ainda mais significativas podem ser obtidas.

Essas restrições relativas aos operadores e espaço em questão pode deixar uma dúvida com relação ao alcance da teoria espectral, sendo que, em se tratando da utilização desta teoria no estudo dos operadores diferenciais (como o operador de Laplace $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, por exemplo), temos muitas vezes que lidar com operadores ilimitados e, a princípio, pode parecer que não seria possível aplicar estas conclusões para estes operadores. Contudo, muitos operadores diferenciais possuem o zero em seus resolventes e seus operadores resolventes são compactos, dessa forma, a teoria mencionada anteriormente tem grande valor e pode ser aplicada a eles mediante o Teorema da Aplicação Espectral que, como pode ser visto em (TAYLOR, 1958), estabelece a igualdade $\sigma(A) = [\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\}]^{-1}$.

Definição 2.4.1. Sejam X e Y espaços de Fréchet sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Um operador linear $T \in \mathscr{L}(X;Y)$ é dito compacto, quando a imagem $T(U)$, por T, de uma vizinhança aberta da origem U em X, é relativamente compacta em Y, ou seja, seu fecho $\overline{T(U)}$ é um compacto de Y.

O conjunto formado pelos operadores lineares compactos de X em Y será denotado por $\mathscr{K}(X;Y)$ e, quando $X = Y$, escreveremos apenas $\mathscr{K}(X)$ para indicar o conjunto $\mathscr{K}(X;X)$.

O resultado a seguir apresenta um princípio básico da Análise Funcional.

Teorema 2.4.2. O conjunto $\mathscr{K}(X;Y)$ é um subespaço de $\mathscr{L}(X;Y)$.

Demonstração. Sejam $U \subset X$ e $V \subset Y$ vizinhanças da origem com $\overline{T(U)}$ compacto.

Segue $T(U) \subset \overline{T(U)}$ é limitado, daí existe $c > 0$ com $T(U) \subset cV$, equivalentemente $T(c^{-1}U) = c^{-1}T(U) \subset V$, ou seja, $c^{-1}U \subset T^{-1}(V)$ e concluímos que T é contínua. $\square$

Para os próximos teoremas, e outras afirmações ao longo do texto, será necessário invocarmos os seguintes resultados da Teoria de Riesz-Fredholm, cujas demonstrações podem ser encontradas em (BREZIS, 2011).

Teorema 2.4.3. Sejam X, Y e Z espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, $A \in \mathscr{L}(X;Y)$ e $B \in \mathscr{L}(Y;Z)$, então:

(a) Se A ou B for um operador compacto, então a composição $B \circ A$ é compacta.

(b) Se $A \in \mathscr{K}(X;Y)$ e sua imagem $R(A)$ é fechada em Y, então $\dim R(A) < \infty$.

(c) (Teorema de Schauder) $A \in \mathscr{K}(X;Y)$ se, e somente se, $A^* \in \mathscr{K}(Y^*;X^*)$

Teorema 2.4.4. Seja X um espaço normado.

(1) **Lema de Riesz**: Seja M um subespaço fechado próprio de X, dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $u_\varepsilon \in X$ com $\|u_\varepsilon\|_X = 1$ tal que $\|u_\varepsilon - u\| \geq 1 - \varepsilon$ para todo $u \in M$.

(2) **Teorema de Riesz**: Em X, a bola unitária fechada

$$B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$$

é compacta para a topologia forte se, e somente se, a dimensão de X é finita.

(3) **A Alternativa de Fredholm**: Se $A \in \mathscr{K}(X)$ valem:

(i) $\dim N(I - A) < \infty$

(ii) $I - A$ é injetivo se, e somente se, é sobrejetivo.

(iii) $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$

(iv) $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$

O teorema a seguir fornece a descrição completa do espectro de um operador compacto em dimensão infinita. Para sua demonstração utiliza-se a propriedade (ii) da Alternativa de Fredholm enunciada acima.

Teorema 2.4.5. Sejam X um espaço de Banach com dimensão infinita e A um operador compacto de X em X. Então, seu espectro satisfaz as seguintes três propriedades:

(a) $0 \in \sigma(A)$. Ou seja, em dimensão infinita, não se pode inverter continuamente um operador compacto.

(b) $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$. Em palavras, com a possível excessão do zero, o espectro de A contém apenas autovalores.

(c) Ocorre uma das seguintes duas situações:

(c1) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ é um conjunto finito, podendo ser vazio, inclusive.

(c2) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ é um conjunto infinito. Neste caso, é infinito enumerável e, mais ainda, consiste na imagem de uma sequência que converge para zero.

Nesta seção, os Teoremas 2.4.4 e 2.4.3, como veremos mais adiante, são ferramentas importantíssimas no estudo do espectro do operador de Laplace em dimensão 1, o qual receberá atenção especial neste trabalho, pois foi pensando nele que formulamos e resolvemos nossos problemas.

Observa-se a grande importância em X ser um espaço normado para a obtenção dos resultados que apresentamos nesta seção, indicando que uma das maiores dificuldades para generalizarmos estes resultados para espaços com estrutura de espaço de Fréchet provêm do fato de não contarmos com uma norma.

Fechamos essa seção com um exemplo que é necessário para apresentarmos o cálculo do espectro do operador Laplaciano definido num espaço de Banach, cálculo este que serviu de inspiração para o desenvolvimento deste trabalho.

Exemplo 2.4.6. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado num espaço de Banach X com $0 \in \rho(A)$. Definimos no espaço vetorial $D(A)$ a seguinte função:

$$D(A) \ni u \longmapsto \|u\|_{G(A)} := \|u\|_X + \|Au\|_X \in \mathbb{R}.$$

Segue imediatamente que $\|\cdot\|_{G(A)} : D(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ define uma norma em $D(A)$ que é chamada **norma do gráfico** de A.

Denotando por Y o espaço normado $(D(A), \|\cdot\|_{G(A)})$, verificam-se as seguintes propriedades:

(a) Y é um espaço de Banach.

(b) A norma do gráfico de A é equivalente a norma

$$D(A) \ni u \longmapsto \|u\|_1 := \|Au\|_X \in \mathbb{R}$$

(c) Y está compactamente contido em X se, e somente se, A^{-1} é um operador compacto [6].

[6] Dados dois espaços de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, diz-se que Y está compactamente imerso em X quando $Y \subset X$ e a aplicaço de inclusão $i : Y \longrightarrow X$, $i(u) = u$, está em $\mathscr{K}(Y;X)$.

Demonstração. (a) Com efeito, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em Y, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são de Cauchy em X. Portanto, existem $u, f \in X$ tais que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ e } Au_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f.$$

Sendo A um operador fechado, tem-se que $u \in D(A)$ e $Au = f$.

Naturalmente

$$\|u_n - u\|_{G(A)} = \|u_n - u\|_X + \|Au_n - Au\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

provando que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em Y, e a afirmação (a) é correta.

(b) Primeiramente, observemos que

$$\|u\|_1 = \|Au\|_X \leq \|u\|_X + \|Au\|_X = \|u\|_{G(A)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u\|_{G(A)} &= \|u\|_X + \|Au\|_X = \left\|A^{-1}Au\right\|_X + \|Au\|_X \leq \\ &\leq \left(\left\|A^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} + 1\right) \|Au\|_X = \left(\left\|A^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} + 1\right) \|u\|_1, \end{aligned}$$

pois, por hipótese $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, e o resultado segue.

(c) Suponhamos que a inclusão de Y em X é compacta e provemos que $A^{-1} \in \mathscr{K}(X)$.

Com efeito, temos que $A^{-1}(B_X) \subset D(A) = Y$. Assim, é suficiente provarmos que $A^{-1}(B_X)$ é limitada em Y, o que é claro, pois se $u \in B_X$ então

$$\left\|A^{-1}u\right\|_{G(A)} = \left\|A^{-1}u\right\|_X + \left\|AA^{-1}u\right\|_X = \left\|A^{-1}u\right\|_X + \|u\|_X \leq \left\|A^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(X)} + 1,$$

uma vez que $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.

Reciprocamente, supondo $A^{-1} \in \mathscr{K}(X)$ tomemos uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B_Y. Então, para todo natural n

$$\|Au_n\|_X \leq \|u_n\|_X + \|Au_n\|_X = \|u_n\|_{G(A)} \leq 1,$$

donde $Au_n \in B_X$ para todo n, consequentemente $u_n = A^{-1}(Au_n)$ e, da compacidade de A, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em X e o exemplo fica estabelecido.

□

2.5 Operadores simétricos e autoadjuntos

Até este ponto, fizemos apenas uso da estrutura de espaço de Fréchet ou de espaço de Banach para apresentar a maiorias dos resultados descritos acima. Os espaços de Hilbert, por outro lado, devido a presença do produto interno compatível com sua norma e sua estrutura algébrica, permitem a utilização de conceitos geométricos na formulação dos resultados a eles associados. Dessa forma, é esperado que algumas das noções destacadas anteriormente apresentem propriedades especiais quando analisadas neste contexto.

Um fato que comprova isto é o seguinte: dado um espaço de Hilbert H, graças ao Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, podemos ver o adjunto de um operador densamente definido $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$, que originalmente atua nos espaços duais, como atuando no mesmo nível que A, o que nos permite indagar sobre a ideia de que o adjunto pode fornecer uma extensão do operador, originando assim a noção de operadores simétricos.

2.5.1 Operadores simétricos

Dado H um espaço de Hilbert complexo com produto interno $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, consideramos $F : H \longrightarrow H^*$ o operador de Riesz-Fréchet, segundo o qual, para cada $u \in H$, $Fu : H \longrightarrow \mathbb{C}$ é o funcional linear contínuo em H dado por

$$\langle Fu, v\rangle := (v,u)_H, \text{ para } v \in H.$$

Do Teorema de representação de Riesz-Fréchet, tem-se que $F : H \longrightarrow H^*$ é uma isometria conjugada-linear, isto é, F é uma bijeção tal que

$$F(u+\alpha v) = Fu + \overline{\alpha} Fv$$

e

$$\|Fu\|_{H^*} = \|u\|_H,$$

para quaisquer $u, v \in H$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Agora, consideremos $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear densamente definido e $A^* : D(A^*) \subset H^* \longrightarrow H^*$ seu operador adjunto, conforme apresentado anteriormente.

Sendo assim, é possível ver A^* como um operador atuando de H em H. Além do mais, é possível identificar A^* com o operador $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \longrightarrow H$ dado por

$$D(A^\bullet) \doteq F^{-1}(D(A^*)) = \left\{u \in H : F(u) \in D(A^*)\right\} \tag{2.5.7}$$

$$A^\bullet u \doteq (F^{-1} \circ A^* \circ F)(u), \text{ para } u \in D(A^\bullet). \tag{2.5.8}$$

Notemos que este novo operador satisfaz a seguinte propriedade:

Se $u \in D(A^\bullet)$ e $v \in D(A)$ então

$$(Av,u)_H = \langle Fu, Av\rangle = \langle A^*(Fu), v\rangle = \left(v, F^{-1}\left[A^*(Fu)\right]\right)_H = (v, A^\bullet u)_H,$$

consequentemente, conjugando, obtemos a seguinte relação fundamental entre A e $A^\bullet$

$$(u,Av)_H = (A^\bullet u, v)_H, \tag{2.5.9}$$

quaisquer que sejam $u \in D(A^\bullet)$ e $v \in D(A)$.

O operador linear $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \longrightarrow H$, definido acima, de agora em diante, será também chamado operador adjunto de A e denotado também A^*. Nessas condições, é possível definir:

Definição 2.5.1. Um operador linear densamente definido $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ em um espaço de Hilbert complexo H, chama-se:

- Simétrico: Quando seu adjunto $A^* : D(A^*) \subset H \longrightarrow H$ é uma extensão sua, ou seja, quando $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^*u = Au$ para todo $u \in D(A)$.
- Autoadjunto: Quando é simétrico e $D(A^*) = D(A)$, ou seja, quando A é igual ao seu adjunto A^*.

Observemos que, se $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é simétrico, então da Igualdade (2.5.9) obtemos que

$$(u, Av)_H = (Au, v)_H, \tag{2.5.10}$$

para $u, v \in D(A)$.

Reciprocamente, se um operador linear satisfaz a condição acima, então ele é simétrico.

O próximo teorema, como veremos mais adiante, contribui para uma descrição mais precisa do espectro do operador de Laplace em dimensão 1 definido em um espaço de Hilbert. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (TAYLOR, 1958).

Teorema 2.5.2 (de Friedrichs)**.** Se $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é um operador linear simétrico em um espaço de Hilbert complexo H, para o qual existe uma constante real $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que, para $u \in D(A)$, tem-se a estimativa

$$(Au, u)_H \geq \alpha \|u\|_H^2, \tag{2.5.11}$$

então A possui uma extensão autoadjunta que preserva esta estimativa.

2.6 Espaços de Sobolev e Laplaciano em dimensão 1

Nesta seção, apresentamos um exemplo concreto de um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert, que possui grande relevância em problemas práticos, para o qual podemos aplicar as técnicas abstratas apresentadas anteriormente a fim de obter informações importantes sobre suas propriedades espectrais, as quais são fundamentais para o estudo das equações diferenciais que envolvem este operador em sua formulação.

O conceito de espaços de Sobolev é indispensável para a Teoria das Equações Diferenciais Parcias e, como é de se esperar, desempenharão um papel fundamental no decorrer desta tese. Por isso, inicialmente, faremos uma breve apresentação destes espaços, que para nossos propósitos neste trabalho, estarão restritos a abertos em dimensão 1 e também ao contexto L^2.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, relembramos que $C_c^\infty(I)$ denota o conjunto formado por todas as funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ possuindo suporte compacto e contido em I. As funções $\phi \in C_c^\infty(I)$ são chamadas funções teste e o espaço $C_c^\infty(I)$ é chamado o espaço das funções teste.

Consideremos também o espaço $L^1_{loc}(I)$ formado pelas funções Lebesgue mensuráveis $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que são integráveis em qualquer compacto $K \subset I$. Se $f \in L^1_{loc}(I)$, f é dita uma função localmente integrável em I.

Definição 2.6.1. Dizemos que uma função $u \in L^1_{loc}(I)$ é **fracamente diferenciável** em I, quando existe $v \in L^1_{loc}(I)$ tal que vale a igualdade

$$\int_I u\phi' = -\int_I v\phi, \; \forall \phi \in C_c^\infty(I). \tag{2.6.12}$$

A função $v \in L^1_{loc}(I)$ acima, que quando existe é única (Confira (BREZIS, 2011)), é chamada derivada fraca de u em I e pode ser indicada pelos símbolos u', $\frac{du}{dt}$, etc.

O conjunto das funções fracamente diferenciáveis em I é indicado $W^1(I)$.

Quando $u : \bar{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função continuamente diferenciável em I, ou seja $u \in C^1(\bar{I})$, dizemos que u é diferenciável em sentido clássico e, mediante uma integração por partes, vemos que u é também fracamente diferenciável e suas derivadas clássica e fraca coincidem.

Portanto, a noção de diferenciabilidade fraca constitui uma extensão da noção usual de diferenciabilidade estudada no Cálculo.

Definição 2.6.2 (Os espaços $H^m(I)$)**.** Dado $m \in \mathbb{N}$ definimos o espaço de Sobolev $H^m(I)$, indutivamente, da seguinte forma:

- Para $m = 1$,
$$H^1(I) \doteq \{u \in L^2(I) \cap W^1(I) : u' \in L^2(I).\}$$

- E quando $m \geq 2$,
$$H^m(I) \doteq \{u \in H^{m-1}(I) : u' \in H^{m-1}(I)\}.$$

Se $m = 2$ e $u \in H^2(I)$, então sua derivada $u' \in H^1(I)$, consequentemente, existe $(u')' \in L^2(I)$. Esta derivada será indicada por u'' e chamada a derivada fraca de segunda ordem de u. De modo análogo definem-se as derivadas até a ordem m de u quando $u \in H^m(I)$.

Nestas condições, $H^m(I)$ se torna um espaço de Hilbert por meio do produto interno

$$(u,v)_{H^m} \doteq (u,v)_{L^2} + \sum_{j=1}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2}, \tag{2.6.13}$$

que induz a norma em H^m dada por

$$\|u\|_{H^m}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{m} \|u^{(j)}\|_{L^2}^2. \tag{2.6.14}$$

Finalmente, definimos o espaço $H_0^m(I)$, para cada natural m, como sendo o fecho do conjunto $C_c^\infty(I)$ relativamente a norma $\|\cdot\|_{H^m}$ de $H^m(I)$.

É importante ressaltarmos as seguintes propriedades destes espaços:

(1) A partir das definições acima segue que o operador derivação de primeira ordem

$$\frac{d}{dx} : H^1(I) \subset L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$$

é um operador linear fechado (e também densamente definido) e, dessa maneira, é possível mostrar que $H^m(I)$ munido de sua norma natural $\|\cdot\|_{H^m}$ dada em (2.6.14) é completo, ou seja, $H^m(I)$ é, de fato, um espaço de Hilbert.

(2) Se $u \in H^1(I)$, então $u \in C(I)$ e vale, para quaisquer $t,s \in I$, a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo (Veja (BREZIS, 2011, p. 128-129))

$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'(\theta)d\theta. \tag{2.6.15}$$

Deste fato resulta que, se $u \in H_0^1(I)$ e I é um intervalo limitado com $a = \inf I$ e $b = \sup I$, então para todo $t \in I$, $u(t)$ pode ser escrito como $u(t) = \int_a^t u'(\theta)d\theta$ donde, aplicando a Desigualdade de Hölder, vem

$$|u(t)| \leq (t-a)^{1/2}\|u'\|_{L^2},$$

consequentemente,

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_I |u(t)|^2 dt \leq \int_I (t-a)\|u'\|_{L^2}^2 dt = \frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|_{L^2}^2,$$

donde obtém-se a importante Desigualdade de Poincaré

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{(b-a)}{2^{1/2}}\|u'\|_{L^2}^2, \tag{2.6.16}$$

mostrando que, quando I é limitado, então, em $H_0^1(I)$, as normas $\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}$ e $\|u\|_{H_0^1} := \|u'\|_{L^2}^2$ são equivalentes:

Com efeito, naturalmente,

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \|u\|_{H^1}$$

e, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \leq \frac{(b-a)}{2^{1/2}}\|u'\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} =: c(I)\|u\|_{H_0^1}.$$

Finalmente, a partir das definições e resultados discutidos acima podemos apresentar o exemplo crucial que nos inspirou a realizar este trabalho.

Exemplo 2.6.3. Seja $H := L^2(0,\pi)$ e consideremos o operador linear

$$A_0 : D(A_0) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi),$$

em que

$$D(A_0) := C_c^\infty(0,\pi)$$

e, para $\varphi \in C_c^\infty(0,\pi)$ e $x \in (0,\pi)$, é dado por:

$$(A_0\varphi)(x) \doteq -\varphi''(x).$$

Observemos que se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(0,\pi)$, integrando por partes duas vezes, obtemos

$$(A_0\varphi, \psi)_{L^2} = -\int_0^\pi \varphi''\overline{\psi}dx = -\int_0^\pi \varphi\overline{\psi''}dx = (\varphi, A_0\psi)_{L^2}.$$

Logo o operador A_0 é simétrico e, integrando por partes mais uma vez, para toda $\varphi \in C_c^\infty(0,\pi)$, em virtude da Desigualdade de Poincaré, tem-se

$$(A_0\varphi, \varphi)_{L^2} = -\int_0^\pi \varphi''\overline{\varphi}dx = \int_0^\pi \varphi'\overline{\varphi'}dx = \|\varphi'\|_{L^2}^2 \geq \frac{2}{\pi^2}\|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Portanto, o operador $A_0 : D(A_0) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Friedrichs e, consequentemente, ele possui uma extensão autoadjunta

$$A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi)$$

tal que, para toda $u \in D(A)$ vale também a estimativa

$$(Au, u)_{L^2} \geq \frac{2}{\pi^2}\|u\|_{L^2}^2.$$

O operador $-A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi)$ é chamado o Operador de Laplace em dimensão 1 com condição de fronteira de Dirichlet, indicado, genericamente por Δ.

Em sequência, desejamos calcular o domímio desta extensão autoajunta de A_0, o qual, segundo a demonstração do Teorema de Friedrichs (vide (TAYLOR, 1958)), é dado por $D(A) = [L^2(0,\pi)]^{1/2} \cap D(A_0^*)$. Na demonstração deste teorema, o espaço $[L^2(0,\pi)]^{1/2}$, associado ao operador A_0, é obtido como a imagem do completamento $\mathscr{H}$ de $C_c^\infty(0,\pi)$ relativamente à norma

$$\|\varphi\|_{1/2} := (A_0\varphi, \varphi)_{L^2} = \int_0^\pi |\varphi'|^2dx = \|\varphi'\|_{L^2} = \|\varphi\|_{H_0^1} \tag{2.6.17}$$

por meio de um isomorfismo $T : \mathscr{H} \longrightarrow [L^2(0,\pi)]^{1/2}$, que preserva o produto interno, convenientemente definido.

Primeiramente, afirmamos que $[L^2(0,\pi)]^{1/2} = H_0^1(0,\pi)$.

Para isso, antes verifiquemos a densidade de $D(A_0)$ em $[L^2(0,\pi)]^{1/2}$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$.

De fato, se $u \in [L^2(0,\pi)]^{1/2}$ segue que $u = T[v]$ para alguma $[v] \in \mathscr{H}$. Daí, se $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [v]$, então $v_n \in D(A_0)$ para todo natural n e, consequentemente, a sequência de classes de equivalência $([v_n])_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{H}$, com $(v_n, v_n, v_n, \cdots) \in [v_n]$, é tal que $\|[v_n]-[v]\|_{\mathscr{H}} \longrightarrow 0$.

Lembre-se que, da definição, temos

$$\|[v_n]-[v]\|_{\mathscr{H}} = \|T[v_n]-T[v]\|_{1/2} = \|v_n - u\|_{1/2}$$

logo $D(A_0) = C_c^\infty(0,\pi)$ é denso em $[L^2(0,\pi)]^{1/2}$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{1/2}$.

Entretanto, a Igualdade (2.6.17) obriga que em $C_c^\infty(0,\pi)$ as normas $\|\cdot\|_{1/2}$ e $\|\cdot\|_{H_0^1}$ sejam equivalentes, donde a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, acima escolhida, é de Cauchy relativamente à norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$ (pois o é relativamente à norma $\|\cdot\|_{1/2}$ já que converge nesta norma).

Portanto, esta sequência converge à alguma $v \in H_0^1(0,\pi)$ na norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$ e, com isso, devemos ter $u = v$, pois a convergência em cada umas das normas $\|\cdot\|_{1/2}$ e $\|\cdot\|_{H_0^1}$ implica convergência em $L^2(0,\pi)$, donde $u = v$ devido a unicidade do limite, o que completa a prova de que $D(A_0) = C_c^\infty(0,\pi)$ é denso em $[L^2(0,\pi)]^{1/2}$ segundo a norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$.

Mas, por definição, o fecho de $D(A_0) = C_c^\infty(0,\pi)$ relativamente a norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$ é o próprio $H_0^1(0,\pi)$ e afirmação segue.

Resta determinar o domínio do adjunto de A_0. Da definição, sabemos que $D(A_0^*)$ é dado por

$$D(A_0^*) = \left\{u \in L^2(0,\pi) : \text{existe } v \in L^2(0,\pi) \text{ tal que se } \phi \in C_c^\infty(0,\pi) \text{ então } (u, A_0\phi)_{L^2} = (v,\phi)_{L^2}\right\}$$

e se $u \in D(A_0^*)$ então $A_0^* u = v$, em que $v \in L^2(0,\pi)$ é a única função que cumpre a condição

$$(u, A_0\phi)_{L^2} = (v,\phi)_{L^2}$$

qualquer que seja $\phi \in C_c^\infty(0,\pi)$. De onde segue que $D(A_0^*)$ é dado pelo seguinte conjunto

$$\left\{u \in L^2(0,\pi) : \text{existe } v \in L^2(0,\pi) \text{ tal que se } \phi \in C_c^\infty(0,\pi) \text{ então } -\int_0^\pi u\phi'' = \int_0^\pi v\phi\right\}$$

o que nos permite concluir que

$$D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$$

com

$$Au = -u''$$

para $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$.

Com efeito, se $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ então $u \in [L^2(0,\pi)]^{1/2}$ e, por também pertencer a $H^2(0,\pi)$, segue a existência de suas derivadas fracas de primeira e segunda ordens $u', u'' \in L^2(0,\pi)$ as quais cumprem, para toda $\phi \in C_c^\infty(0,\pi)$

$$-\int_0^\pi u\phi'' = \int_0^\pi u'\phi' = -\int_0^\pi u''\phi.$$

Esta condição é exatamente a necessária para que $u \in D(A_0^*)$ com $v = -u''$, ou seja, $A_0^* u = -u''$.

Este raciocínio nos mostrou que $H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \subset D(A)$ e que para $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ tem-se $Au = A_0^* u = -u''$.

Reciprocamente, se $u \in D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap D(A_0^*)$ então, como u é um elemento de $D(A_0^*)$ existe $v \in L^2(0,\pi)$ de forma que para toda função teste ϕ vale

$$-\int_0^\pi u\phi'' = \int_0^\pi v\phi \tag{2.6.18}$$

Por outro lado, $u \in H_0^1(0,\pi)$, consequentemente u possui derivada fraca $u' \in L^2(0,\pi)$, a qual satisfaz, para $\phi \in C_c^\infty(0,\pi)$, a seguinte igualdade

$$\int_0^\pi u\phi'' = -\int_0^\pi u'\phi',$$

pois $\phi' \in C_c^\infty(0,\pi)$, o que em concordância com (2.6.18) nos diz que

$$-\int_0^\pi u'\phi' = \int_0^\pi u\phi'' = -\int_0^\pi v\phi,$$

ou seja, para toda $\phi \in C_c^\infty(0,\pi)$

$$\int_0^\pi u'\phi' = \int_0^\pi v\phi.$$

O argumento acima mostrou que u' possui derivada fraca e que a mesma é igual a $-v$, em outras palavras, $u'' = -v \in L^2(0,\pi)$ e portanto $u \in H^2(0,\pi)$ completando a prova de que $D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$.

Provemos agora que o operador de Laplace possui resolvente compacto e localizemos seu espectro.

Primeiramente, segue da prova do Teorema de Friedrichs que

$$(-\infty, 2/\pi^2) \subset \rho(A)$$

donde, em particular, $0 \in \rho(A)$.

Além do mais, como mencionado acima, se $u \in D(A)$, em virtude do Teorema Fundamental do Cálculo e da Desigualdade de Hölder, para $t, s \in (0,\pi)$, vale

$$|u(t) - u(s)| \leq |t-s|^{1/2} \|u\|_{H_0^1} = |t-s|^{1/2} (Au, u)_{L^2}^{1/2} \leq |t-s|^{1/2} \|Au\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{L^2}^{1/2}.$$

Donde vemos que, se B_Y é a bola unitária fechada de $Y := (D(A), \|\cdot\|_{G(A)})$, isto é, o domínio de A munido da norma do gráfico, então B_Y é um subconjunto limitado de $C([0,\pi])$ e que a família formada por seus elementos é uniformemente equicontínua, logo, do Teorema de Arzelá-Ascoli, B_Y é relativamente compacta em $C([0,\pi])$ com a norma do supremo.

Sabemos também que a inclusão de $C([0,\pi])$ em $L^2(0,\pi)$ é contínua o que, juntamente com o que concluímos acima, nos mostra que a inclusão de $Y = (D(A), \|\cdot\|_{G(A)})$ em $L^2(0,\pi)$ é compacta.

Agora, em virtude do Exemplo 2.4.6, resulta que $A^{-1} \in \mathscr{K}\left(L^2(0,\pi)\right)$, portanto

$$\sigma(A^{-1}) = \{0\} \cup \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots\}$$

no qual $0 \in \sigma_c(A^{-1})$ e os demais μ_j's são todos autovalores, como aprendemos no Teorema 2.4.5.

Além disso, se $u \in L^2(0,\pi)$ é uma autofunção associada ao autovalor μ_j, então $A^{-1}u = \mu_j u$ logo, aplicando o operador A, obtemos que $u = \mu_j A u$, provando que μ_j^{-1} é um autovalor do operador A e, portanto,

$$\mu_j^{-1}\|u\|_{L^2}^2 = \mu_j^{-1}(u,u)_{L^2} = (\mu_j^{-1}u,u)_{L^2} = (Au,u)_{L^2} \geq \frac{2}{\pi^2}\|u\|_{L^2}^2,$$

isto é,

$$\mu_j^{-1} \geq \frac{2}{\pi^2} \Longrightarrow \mu_j \leq \frac{\pi^2}{2}.$$

No caso de os μ_j's formarem um conjunto infinito, teremos ainda que $\mu_j \longrightarrow 0$, consequentemente $\mu_j^{-1} \longrightarrow \infty$.

Finalmente, observemos que é possível calcular os autovalores μ_j^{-1}. De fato, μ^{-1} é autovalor de $A = -\Delta$ se $-u'' = \mu^{-1}u$ para algum $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ o que resulta como sabemos das equações diferenciais ordinárias em

$$u(x) = A\cos\left(\sqrt{\mu^{-1}}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\mu^{-1}}x\right),$$

com $u(0) = u(\pi) = 0$, consequentemente $\mu_j^{-1} = j^2$ sendo $u_j(x) = \mathrm{sen}(jx)$ sua respectiva autofunção, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

2.7 Distribuições e Operadores Pseudodiferenciais

Nesta seção introduzimos a noção de espaço de distribuições, que, resumidamente, são espaços duais de espaços de funções. Dentre os espaços distribucionais, o espaço das distribuições temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ terá atenção especial no quarto capítulo deste trabalho. Também apresentaremos os conceitos de operadores pseudodiferenciais, transposto formal de um operador e algumas propriedades importantes destes operadores, as quais são ferramentas que usaremos recorrentemente ao longo deste trabalho.

Dito isso, veremos como as topologias dos espaços 'base' desempenham um papel fundamental na definição de seus espaços duais. Além disso, por meio delas, muitas propriedades dos operadores definidos nestes espaços podem ser destacadas, algumas das quais serão necessárias para formularmos e demonstrarmos os resultados deste trabalho.

2.7.1 Espaços Distribucionais: $\mathscr{D}'(\Omega), \mathscr{E}'(\Omega)$ e $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Relembramos aqui que o espaço de Schwartz é dado por

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty \right\},$$

em que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} \doteq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha (\partial^\beta f)(x) \right|$$

e $(\|\cdot\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$ é a família enumerável e separante de seminormas que geram a topologia de espaço de Fréchet de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. (Veja (FOLLAND, 1999, pg. 167))

Munidos da topologia de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ somos capazes de definir o espaço das distribuições temperadas.

Definição 2.7.1. Definimos o espaço das distribuições temperadas, denotado por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, como sendo o dual topológico de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \doteq \left\{ u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C};\ \text{é linear e contínua} \right\}.$$

Observemos que, se $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ for linear, da Proposição 2.1.5, teremos que $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existem $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|\langle u, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} \|\psi\|_{\alpha,\beta}\,,\ \forall\ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da mesma forma podemos definir o dual de $C^\infty(\Omega)$ como se segue:

Definimos o espaço dual de $C^\infty(\Omega)$, denotado por $[C^\infty(\Omega)]'$ como:

$$[C^\infty(\Omega)]' \doteq \left\{ u : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C};\ \text{é linear e contínua} \right\}.$$

Mais uma vez, fazendo uso da Proposição 2.1.5, se $u : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ for linear teremos que $u \in [C^\infty(\Omega)]'$ se, e somente se, existem $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\langle u, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K_j} |\partial^\alpha \psi(x)|,\ \forall\ \psi \in C^\infty(\Omega). \tag{2.7.19}$$

Como mencionamos anteriormente, o espaço das funções teste, $C_c^\infty(\Omega)$ em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, não possui estrutura de espaço de Fréchet. O espaço das funções teste possui estrutura de TVS localmente convexo e seu dual topológico, denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$, é o espaço das distribuições. Em outras palavras, o espaço das distribuições em Ω é dado por:

$$\mathscr{D}'(\Omega) \doteq \left\{ u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}; u \text{ é linear e contínua } \right\}.$$

A continuidade mencionada acima pode ser descrita da seguinte maneira: $u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear é contínua se, e somente se, para cada compacto $K \subset \Omega$, existem um natural $N \in \mathbb{N}$ e uma constante $C_K > 0$ de maneira que

$$|\langle u, \phi \rangle| \le C_K \sum_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|, \text{ para toda } \phi \in C_c^\infty(K).$$

Observação 1. Observemos que se $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e W é a reunião de todos os abertos $U \subset \Omega$ tais que $\phi|_U \equiv 0$, então o suporte de ϕ satisfaz

$$\text{supp } \phi = \Omega \setminus W.$$

Isso sugere que, dada uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, podemos definir seu suporte pondo supp $u = \Omega \setminus W$, em que W é a reunião de todos os abertos $U \subset \Omega$ tais que $u\,|_U \equiv 0$ [7].

Agora consideremos W o aberto que é definido como a reunião de todos os abertos $U \subset \Omega$ tais que $u\,|_U \in C^\infty(U)$. Nessas condições, o suporte singular de u é definido por

$$\text{sing supp } u \doteq \Omega \setminus W. \tag{2.7.20}$$

Além do mais, a Propriedade 2.7.19 permite identificar $[C^\infty(\Omega)]'$, como podemos ver em (FOLLAND, 1999), com o seguite conjunto

$$\mathscr{E}'(\Omega) \doteq \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega); \text{ supp } u \subset \Omega \text{ é compacto } \right\}.$$

Podemos descrever as relação entre estes espaços de funções teste e seus respectivos espaços duais com o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) & \hookleftarrow & \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

em que o símbolo "$X \hookrightarrow Y$" significa inclusão contínua.

[7] A restrição $u\,|_U$, de uma $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a um aberto $U \subset \Omega$, é o funcional dado por $\langle u\,|_U, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$, para $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Claramente, $u\,|_U$ define uma distribuição em U.

2.7.2 Transposto Formal e Operadores Pseudodiferenciais

Em geral, operações com distribuições e em espaços de distribuições são definidas através do transposto de um operador linear, devido ao fato de suas propriedades topológicas serem previamente conhecidas.

Consideremos, para um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $X = C_c^\infty(\Omega)$, $X' = \mathscr{D}'(\Omega)$, $T : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ um operador linear contínuo e $T' : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ seu transposto formal como definimos anteriormente.

Vamos ilustrar o cálculo de um transposto formal com o exemplo canônico das equações diferenciais, o operador derivada. Com efeito, seja $\frac{d}{dx} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$, e notemos que para quaisquer $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, usando intergração por partes, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi}{dx}(x)\psi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx.$$

Dessa forma, $\frac{d}{dx}$ possui como transposto formal o operador $\left(\frac{d}{dx}\right)' : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$ que, para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, é dado por

$$\left(\frac{d}{dx}\right)' \phi = -\frac{d\phi}{dx}.$$

Com ele, podemos definir $\frac{d}{dx} : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ pondo, para cada $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \frac{du}{dx}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle, \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Procedemos de forma análoga quando temos $X = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $X' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $\frac{d}{dx} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é linear, contínua e satisfaz

$$\left\langle \frac{d\phi}{dx}, \psi \right\rangle = -\left\langle \phi, \frac{d\psi}{dx} \right\rangle, \ \phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Encerramos este capítulo com duas definições de operadores pseudodiferenciais e alguns resultados elementares a eles relacionados.

Definição 2.7.2 (Semi-Global)**.** Sejam $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{R}$. Diremos que a é símbolo (semi-global) de ordem m em Ω, quando para cada compacto $K \subset \Omega$ e para cada par de multi-índices α, β existir uma constante $C_{K,\alpha,\beta} > 0$ de modo que

$$\left| \left[\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta\right] a(x,\xi) \right| \leq C_{K,\alpha,\beta} \, (1 + |\xi|)^{m-|\beta|}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \ x \in K.$$

Denotamos a classe dos símbolos de operadores semi-globais de ordem m por $S^m(\Omega)$.

Definição 2.7.3 (Global). Sejam $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{R}$. Diremos que a é símbolo (global) de ordem m em $\mathbb{R}^n$, quando para cada par de multi-índices α, β existir uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ com

$$\left|\left[\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta\right] a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{m-|\beta|},\ \forall x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos a classe destes símbolos por $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Observação 2. As nomenclaturas, Semi-global e Global, que empregamos acima, não são comuns na literatura e foram aqui adotadas apenas para diferenciar esses dois tipos de símbolos nos resultados que pretendemos discutir. As referências que encontramos não fazem distinção entre essas duas classes.

Quando $a \in S^m(\Omega)$, $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \Omega$ poremos

$$[a(\cdot,D)\psi](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi x} a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi.$$

Analogamente para o caso em que temos um símbolo global.

Proposção 2.7.4. Dado um símbolo $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ para $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se que $a(\cdot,D)\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, está bem definida a aplicação

$$a(\cdot,D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

e, além disso, $a(\cdot,D) \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. (RUZHANSKY; TURUNEN, 2000)

Demonstração. Primeiramente notemos que, dados $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que $a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e como para cada multi-índice α, $\partial_x^\alpha\left[e^{2\pi ix\xi}a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)\right] =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|}\left[(2\pi i\xi)^\beta a(x,\xi) + \left(\partial_x^{\alpha-\beta}a\right)(x,\xi)\right]e^{2\pi ix\xi}\,\hat{\psi}(\xi) = \\ &= \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|}\left[(-1)^{|\beta|}a(x,\xi)(\partial_\xi^\beta\psi)\hat{}(\xi) + (\partial_x^{\alpha-\beta}a)(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)\right]e^{2\pi ix\xi} \end{aligned} \tag{2.7.21}$$

é integrável, derivando sob o sinal de integração, concluímos que $a(x,D)\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial_x^\alpha[a(x,D)\psi](x) = \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\left[(-1)^{|\beta|}a(x,\xi)(\partial_\xi^\beta\psi)\hat{}(\xi) + (\partial_x^\beta a)(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)\right]e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos o seguinte operador

$$L_\xi \doteq \left(1+4\pi^2|x|^2\right)^{-1}\left(I - \mathscr{L}_\xi\right) \tag{2.7.22}$$

em que $\mathscr{L}_\xi$ é o operador de Laplace nas variáveis ξ. Assim

$$\begin{aligned} L_\xi\left(e^{2\pi ix\xi}\right) &= \left(1+4\pi^2|x|^2\right)^{-1}\left(e^{2\pi ix\xi} - \mathscr{L}_\xi\left(e^{2\pi ix\xi}\right)\right) = \\ &= \left(1+4\pi^2|x|^2\right)^{-1}\left(e^{2\pi ix\xi} - \left(-4\pi^2|x|^2\right)\left(e^{2\pi ix\xi}\right)\right) = \\ &= \left(1+4\pi^2|x|^2\right)^{-1}\left(e^{2\pi ix\xi} + 4\pi^2|x|^2 e^{2\pi ix\xi}\right) = e^{2\pi ix\xi} \end{aligned}$$

e portanto, para $N \in \mathbb{N}$, utilizando a integração por partes de forma iterada, obtemos

$$
\begin{aligned}
[a(x,D)\psi](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} L_\xi \left(e^{2\pi i x\xi}\right) a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} L_\xi \left[a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)\right] d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} L_\xi \left(e^{2\pi i x\xi}\right) L_\xi \left[a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)\right] d\xi = \\
&= \ldots = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} L_\xi^N \left[a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)\right] d\xi.
\end{aligned}
$$

Como sabemos que $a(x,\cdot)\hat{\psi}(\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, obtemos que

$$|a(x,D)\psi(x)| \leq C_N \left(1+4\pi^2|x|^2\right)^N.$$

Para completar a demonstração basta aplicar o procedimento acima juntamente com a Equação (2.7.21) e concluíremos que $a(x,D) \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. □

Definição 2.7.5 (Operador Pseudodiferencial de Ordem m)**.** Dado $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, o operador

$$a(x,D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

obtido na proposição anterior, ou seja, o operador dado por

$$a(x,D)\psi(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} a(x,\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi, \ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

será chamado operador pseudodiferencial de ordem m em $\mathbb{R}^n$ com símbolo a. O conjunto dos operadores pseudodiferenciais de ordem m em $\mathbb{R}^n$ será indicado por $\Psi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Os elementos de $\Psi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ serão referidos apenas como OPD's.

De modo inteiramente análogo definimos a classe $\Psi(\Omega)$, dos operadores pseudodiferenciais com símbolo em $S^m(\Omega)$, porém, para $a \in S^m(\Omega)$, teremos $a(x,D) : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$.

Seja $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para o qual existe $m \in \mathbb{R}$ de forma que para cada multiíndice α existe $C_\alpha > 0$ com

$$|\partial^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Daí, se definirmos $a(x,\xi) \doteq a(\xi)$ para $x,\xi \in \mathbb{R}^n$, teremos que $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ e diremos que $a(D) \doteq a(x,D)$ é um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes. Uma construção análoga, restringindo x a um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dá origem a um símbolo $S^m(\Omega)$ com coeficientes constantes.

Exemplos 2.7.6. Listamos aqui alguns exemplos de operadores pseudodiferenciais. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

(i) Dado $m \in \mathbb{N}$, definamos $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, em que cada $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, para $|\alpha| \leq m$. Para $K \subset \Omega$ compacto, existe $C_\alpha \doteq \max_{x\in K}|a_\alpha(x)| < \infty$, daí tomemos $C = \max_{\alpha\leq m} C_\alpha$ e $L_m = \sum_{|\alpha|\leq m} 1$, como $|\xi^\alpha| \leq (1+|\xi|)^m$ para qualquer $|\alpha| \leq m$, temos que

$$|p(x,\xi)| = \left|\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right| \leq L_m C(1+|\xi|)^m, \text{ para quaisquer } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \in K.$$

Além disso, para $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ e $|\alpha| \leq m$, pondo $C_{\alpha,\beta} \doteq \max_{x\in K}|\partial^\beta a_\alpha(x)| < \infty$, como

$$\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma p(x,\xi) = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|\leq m} \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}\partial_x^\alpha a_\alpha(x)\xi^{\alpha-\gamma},$$

existe constante $D_{\beta,\gamma} > 0$ tal que

$$\left|\partial^\beta\partial^\gamma p(x,\xi)\right| \leq \left|\sum_{|\gamma|\leq|\alpha|\leq m} \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}\partial_x^\alpha a_\alpha(x)\xi^{\alpha-\gamma}\right| \leq D_{\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|},$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $x \in K$, provando que que $p \in S^m(\Omega)$.

(ii) Seja $p(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Notemos que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ existe constante $C_m > 0$ tal que

$$|\xi|^m e^{-4\pi^2|\xi|^2} \leq C_m, \ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

pois $\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x^2} = 0$.

Além disso, sendo $\partial^\alpha p(\xi) = q_\alpha(\xi)p(\xi)$, em que $q_\alpha(\xi)$ é um polinômio em ξ cujo grau depende do multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, segue que para cada multi-índice α existe C_α tal que

$$|\partial^\alpha p(\xi)| \leq C_\alpha(1+|\xi|)^{-m-|\alpha|}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

mostrando que $p \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$.

Notemos que, dado $a(D) \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$, tem-se que para quaisquer $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\begin{aligned}
\langle a(x,D)\phi,\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[a\hat{\phi}\right]^\vee(\xi)\psi(\xi)d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} a(\xi)\hat{\phi}(\xi)\check{\psi}(\xi)d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi)\left[a\check{\psi}\right]^\wedge(\xi)d\xi = \langle\phi,[a\check{\psi}]^\wedge\rangle,
\end{aligned}$$

de onde vemos que é possível estender um operador pseudodiferencial de $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ a um operador de $\mathscr{L}(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$.

Definição 2.7.7. Dado um operador pseudodiferencial $a \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$, podemos definir

$$a(D) : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

pondo

$$\langle a(D)u,\psi\rangle \doteq \langle u,[a\check{\psi}]^\wedge\rangle, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2.7.23}$$

para cada $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Em decorrência da Proposição 2.7.4, se $a(D) \in \Psi(\mathbb{R}^n)$, então $a(D) \in \mathscr{L}(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$.

Alguns dos resultados apresentados para espaços de Sobolev em dimensão um podem ser generalizados para dimensão n. Sua própria definição é um exemplo disso, como a seguir destacamos.

Definição 2.7.8. Consideremos, para $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset R^n$ aberto e o seguinte conjunto

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) \doteq \Big\{ f \in L^2(\Omega); \text{para cada } |\alpha| \leq m \text{ existe } f_\alpha \in L^2(\Omega) \\ \text{com } \int_\Omega f \partial^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha \phi, \text{ para } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.7.24}$$

Para cada α, a f_α que aparece na definição acima é chamada a $\alpha-$ésima derivada fraca de f e indica-se por $\partial^\alpha f = f_\alpha$. O conjunto $H^m(\Omega)$ é chamado espaço de Sobolev de ordem m em escala L^2 de Ω e possui estrutura de espaço normado com norma dada por

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}.$$

O conjunto $H_0^m(\Omega)$ é definido com o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na topologia de $H^m(\Omega)$.

Além do mais, como podemos conferir em (FOLLAND, 1995), vale o importante teorema abaixo.

Teorema 2.7.9. Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}.$$

Além disso, a norma

$$\|u\|_m \doteq \left\| (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.7.25}$$

é equivalente a $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$.

O teorema acima sugere uma maneira para se definir espaços de Sobolev de ordem s para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Com efeito, dado $s \in \mathbb{R}$, definimos

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\}.$$

Destacamos também que, como mostrado na referência (BREZIS, 2011), se $\Omega = \mathbb{R}^n$ tem-se $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Agora estamos munidos de todas as ferramentas necessárias para definirmos os espaços de Sobolev localizados, os quais servirão de “espaço base” para o estudo do espectro de nossos operadores no quinto capítulo deste texto.

Definição 2.7.10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev localizado de ordem s em Ω da seguinte forma

$$H^s_{loc}(\Omega) = \left\{u \in \mathscr{D}'(\Omega); \varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n),\ \forall\ \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\right\}.$$

Assim como $L^2_{loc}(\Omega)$, os $H^s_{loc}(\Omega)$ são espaços de Fréchet. Munimos $H^s_{loc}(\Omega)$ das seminormas

$$p_j^{(s)}(u) \doteq \left\|\varphi_j u\right\|_{H^s},\ u \in H^s_{loc}(\Omega),$$

em que $\varphi_j(x) = 1, x \in \Omega_j$, $\varphi_j \in C^\infty_c(\Omega_{j+1})$ e $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de abertos que esgotam o Ω.

Observemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $p_j^{(s)}$ é uma seminorma pois ela provém da norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $f \in H^s_{loc}(\Omega)$ for tal que $p_j^{(s)}(f) = 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, segue que $f|_{\Omega_j} = 0$ em $\mathscr{D}'(\Omega_j)$, ou seja, $\langle f, \phi\rangle = 0$ para qualquer $\phi \in C^\infty_c(\Omega_j)$. Daí, dada $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$ e, sendo supp $\phi \subset \Omega$ compacto, existe $j \in \mathbb{N}$ com supp $\phi \subset \Omega_j$, logo $\langle f, \phi\rangle = 0$. Em outras palavras, $f = 0$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ e assim $f = 0$.

Por fim, mostremos que toda sequência de Cauchy em $H^s_{loc}(\Omega)$ é convergente.

De fato, dada uma sequência de Cauchy $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset H^s_{loc}(\Omega)$ temos que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$p_j^{(s)}(f_l - f_k) = \left\|\varphi_j(f_l - f_k)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ quando } l, k \to \infty,$$

e, como $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $g_j \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left\|g_j - (\varphi_j f_l)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ quando } l \to \infty.$$

Uma vez que $\varphi_j f_l \to g_j$ na topologia de $H^s(\mathbb{R}^n)$, esta convergência também acontece em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\left\langle g_j, \phi\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \varphi_j f_k, \phi\right\rangle$$

para qualquer $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Fazendo a restrição no aberto Ω_j, para cada $j \in \mathbb{N}$, dada $\phi \in C^\infty_c(\Omega_j)$ temos que $\varphi_j \phi = \varphi_{j+1}\phi$, daí obtemos que

$$\langle \varphi_j f_k\, |_{\Omega_j}, \phi\rangle = \langle f_k, \varphi_j \phi\rangle = \langle f_k, \varphi_{j+1}\phi\rangle = \langle \varphi_{j+1} f_k\, |_{\Omega_j}, \phi\rangle, k \in \mathbb{N}$$

e

$$\left\langle g_j\, |_{\Omega_j}, \phi\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \varphi_j f_k\, |_{\Omega_j}, \phi\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \varphi_{j+1} f_k\, |_{\Omega_j}, \phi\right\rangle = \left\langle g_{j+1}\, |_{\Omega_j}, \phi\right\rangle,$$

i.e., $g_j\, |_{\Omega_j} = g_{j+1}\, |_{\Omega_j}$.

Além do mais,

$$\left\langle \varphi_j g_{j+1}, \phi\right\rangle = \left\langle g_{j+1}, \varphi_j \phi\right\rangle = \lim_{l\to\infty} \left\langle \varphi_{j+1} f_l, \varphi_j \phi\right\rangle = \lim_{l\to\infty} \left\langle \varphi_j \varphi_{j+1} f_l, \phi\right\rangle = \lim_{l\to\infty} \left\langle \varphi_j f_l, \phi\right\rangle = \left\langle g_j, \phi\right\rangle$$

para toda $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, pois $\varphi_j \varphi_{j+1} = \varphi_j$ e concluímos que $\varphi_j g_{j+1} = g_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Finalmente, definamos $g\,|_{\Omega_j} \doteq g_j\,|_{\Omega_j}$.

Segue imediatamente que $g \in H^s_{loc}(\Omega)$, pois $\varphi_j g = \varphi_j g\,|_{\Omega_j} = \varphi_j g_{j+1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$\left\|\varphi_j g - \varphi_j f_k\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left\|\varphi_j g_{j+1} - \varphi_j f_k\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left\|g_j - \varphi_j f_k\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

quando $k \to \infty$, provando que $f_k \xrightarrow{H^s_{loc}(\Omega)} g$ e, consequentemente, que $H^s_{loc}(\Omega)$ é completo, como queríamos.

Necessitaremos também do teorema a seguir, que podemos encontrar em (FOLLAND, 1999).

Teorema 2.7.11. Para cada $s \in \mathbb{R}$ e cada $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, a aplicação M_ϕ dada por

$$\begin{aligned} M_\phi : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \phi u, \end{aligned}$$

está bem definida, é linear e contínua.

Neste ponto, apresentamos a definição de ordem de operador linear que encontramos em (HENRY, 2006). Esta definição, juntamente com o Exemplo 2.6.3, serviram de inspiração para o estudo o espectro de Δ, definido em $H^2_0(0,\pi)$ com a topologia de $L^2_{loc}(0,\pi)$, que efetuamos neste trabalho.

Definição 2.7.12. Dado $m \in \mathbb{R}$, dizemos que um operador linear

$$A : C^\infty_c(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$

é um operador de ordem m se, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, A se estende a um operador linear

$$A_s : H^{s+m}_0(\Omega) \subset H^{s+m}_{loc}(\Omega) \longrightarrow H^s_{loc}(\Omega).$$

Teorema 2.7.13. Se $p \in S^m(\Omega)$ é um símbolo, então $p(x,D)$ é um operador de ordem m.

Demonstração. Dados $m \in \mathbb{R}$ e $p \in S^m(\Omega)$, para provar que $p(x,D)$ é de ordem m, de início, notemos que se $a \in C^\infty_c(\Omega)$ então

$$C^\infty_c(\Omega) \ni u \mapsto au \in C^\infty(\Omega)$$

é de ordem 0.

Com efeito, dadas $\psi, \phi \in C^\infty_c(\Omega)$ temos que existe constante $C > 0$ de forma que

$$\|\phi(a\psi)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|a(\phi\psi)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|\phi\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

devido ao Teorema 2.7.11 e ao fato de que $a \in C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, mostrando que $p_j^{(s)}(a\psi) \leq Cp_j^{(s)}(\psi)$, para qualquer $p_j^{(s)}$ seminorma de $H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e daí segue que a multiplicação por a é de ordem 0.

Desse fato, concluímos que para provar este teorema basta provar que $(ap)(x,D)$ se estende a um operador linear

$$\begin{array}{rcl} (ap)(x,D) : H_0^{s+m}(\Omega) & \longrightarrow & H^s(\mathbb{R}^n), \\ u & \longmapsto & (ap)(x,D)(u) \end{array}$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Isso nos diz que, na verdade, podemos provar a afirmação acima supondo que $p(x,\xi) = 0$ para $x \notin K$ em que $K \subset \Omega$ é um compacto.

Dito isso, seja $v \doteq p(x,D)u$. Calculando a transformada de Fourier de p na variável x, temos

$$\hat{p}(\eta,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta x} p(x,\xi)dx,$$

e então

$$\begin{aligned} \hat{v}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta y} [p(x,D)u](y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta y} e^{2\pi i y\xi} p(y,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{p}(\eta - \xi, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Notemos que foi possível aplicar o Teorema de Fubini, pois $p(\cdot,\xi)$ possui suporte compacto, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, para cada $N \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}$ vale

$$|\hat{p}(\eta,\xi)| \leq C_N (1+|\eta|)^{-N} (1+|\xi|)^m,$$

para $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$, daí

$$(1+|\eta|)^s |\hat{v}(\eta)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^N} (1+|\xi|)^{m+s} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^{N/2}} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^{N/2}} (1+|\xi|)^{m+s} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^N} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^N} (1+|\xi|)^{2(m+s)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ &= C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^N} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^N} (1+|\xi|)^{2(m+s)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo, para $N > n$, temos que $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|)^{2s} |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|)^N} dy \right) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^N} (1+|\xi|)^{2(m+s)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right) d\eta \\
&\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|)^N} dy \right) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\eta-\xi|)^N} d\eta\, (1+|\xi|)^{2(m+s)} |\hat{u}(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|)^N} dy \right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2(m+s)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \\
&\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|)^N} dy \right)^2 \|u\|^2_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

pois $1/(1+|\cdot-\xi|^N) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $1/(1+|\eta-\cdot|^N)(1+|\cdot|)^{2(m+s)}|\hat{u}(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$. Por isso, podemos inverter a ordem de integração como feito acima e concluir a existência de uma constante $D_N > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|)^{2s} |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta \leq D_N \|u\|^2_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n)},$$

completando a prova de que $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

□

Encerramos esta seção apresentando algumas definições e o Teorema 6.36 de (FOLLAND, 1995, pg - 216) que serão utilizados na parte final deste trabalho.

Dado um polinômino $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha$, com $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $a_\alpha \in \mathbb{C}$, seja $P^{(\beta)} \doteq \partial^\beta P$, o que nos permite escrever

$$P(D)(fg) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} [\partial^\alpha f] P^{(\alpha)}(D) g, \; f,g \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Consideremos também

$$\mathscr{Z}(P) \doteq \{\zeta \in \mathbb{C}^n; P(\zeta) = 0\}$$

e

$$d_P(\xi) = d\big(\xi, \mathscr{Z}(P)\big) = \inf\{|\xi-\zeta|; \zeta \in \mathscr{Z}(P)\}, \; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 2.7.14. Dado $a(x,D) : \mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ um operador diferencial linear com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$, dizemos que $a(x,D)$ é um operador hipoelítico se, para qualquer $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, vale

$$\text{sing supp } [a(x,D)u] = \text{sing supp } u.$$ [8]

[8] Em que sing supp u denota o suporte singular definido em (2.7.20).

Definição 2.7.15. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $a(x,D) \in \Psi^m(\Omega)$ um operador pseudodiferencial de ordem m e seja $a(x,\xi)$ seu símbolo, dizemos que $a(x,D)$ é um operador elítico se, para qualquer compacto $K \subset \Omega$, existem constantes positivas c_K, C_K tais que

$$|a(x,\xi)| \geq c_K |\xi|^m, \text{ para quaisquer } x \in K \text{ e } |\xi| \geq C_K.$$

Teorema 2.7.16 (Hörmander)**.** Seja $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ um polinômio de grau $m \in \mathbb{N}$ nas variáveis $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $P(D)$ o operador diferencial associado a ele. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Se $|\zeta| \to \infty$ em $\mathscr{Z}(P)$, então $|\Im \zeta| \to \infty$;

(b) Se $|\xi| \to \infty$ em $\mathbb{R}^n$, então $d_P(\xi) \to \infty$;

(c) Existem $\delta, C, R > 0$ tais que $d_P(\xi) \geq C|\xi|^\delta$, se $|\xi| > R$ em $\mathbb{R}^n$;

(d) Existem $\delta, C, R > 0$ tais que $|P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\delta|\alpha|}|P(\xi)|$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e para $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $|\xi| > R$;

(e) Existe $\delta > 0$ tal que, se $f \in H^s_{loc}(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, toda solução u de $P(D)u = f$ pertence a $H^{s+\delta m}_{loc}(\Omega)$;

(f) $P(D)$ é um operador hipoelítico;

Para a demonstração do teorema acima consulte (FOLLAND, 1995), (HÖRMANDER, 1963b) e (HÖRMANDER, 1963a, vol. 2).

CAPÍTULO

3

MOTIVAÇÃO

A separação do espectro [1] de um operador linear T num espaço de Banach X permite realizar um estudo do operador “decompondo-o em pedaços”, como ensina o Teorema da Decomposição Espectral, a saber, o Teorema 6.17 de (KATO, 1995). Essa decomposição pode contribuir para um entendimento mais profundo do mesmo, pois, dependendo do tipo de espectro, o “pedaço” do operador que corresponde a este tipo, pode assumir uma forma bastante simplificada, como é o caso em que se tem um autovalor isolado.

Em particular, observemos que o papel da Teoria espectral é decisivo na determinação de uma das principais propriedades dos sistemas dinâmicos autônomos, ou semigrupos, em espaços de Banach, a saber, a dicotomia exponencial. Mais especificamente, quando um operador linear contínuo num espaço de Banach X, $T \in \mathscr{L}(X)$, é tal que seu espectro é disjunto da circunferência unitária do plano $\mathbb{C}$, então ele possui dicotomia exponencial e reciprocamente.

A dicotomia, por sua vez, dá a um semigrupo linear propriedades de existência e unicidade de soluções para equações não homogênas das quais ele á a parte principal. Não bastando isso, a dicotomia é ainda estável por perturbação, característica indispensável no estudo dos sistemas dinâmicos.

Nosso objetivo com este capítulo é apresentar uma descrição ilustrativa sobre como estes fatos estão relacionados em espaços de Banach e citar as extensões destes resultados que foram obtidas em (COSTA, 2019) para o contexto dos espaços de Fréchet, estudo este que motivou todos os problemas estudados nesta tese.

[1] Isso significa que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, com σ_1 e σ_2 fechados e disjuntos, ou seja, $\sigma(T)$ é desconexo.

3.1 Dicotomia Exponencial

Definição 3.1.1. Seja $X = (X, (p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ um espaço de Fréchet. Um processo de evolução linear discreto em X é uma família a dois parâmetros $\{T_{m,n} : \ m \geq n \in \mathbb{Z}\}$ de operadores lineares contínuos de X em si mesmo tais que

(i) $T_{m,m} = I$, para todo inteiro m.

(ii) $T_{m,p}T_{p,n} = T_{m,n}$, para todos os inteiros $m \geq p \geq n$.

Quando temos um processo de evolução linear $\{T_{m,n} : \ m \geq n \in \mathbb{Z}\}$ podemos associar a ele uma outra sequência de operadores lineares $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ dada por

$$T_n := T_{n+1,n}, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.1}$$

Observemos que, a partir desta nova sequência, podemos recuperar o processo de evolução inicial pois

$$T_{m,n} = T_{m,m-1} \circ T_{m-1,m-2} \circ \cdots \circ T_{m-(m-n)+1,n} = T_{m-1} \circ T_{m-2} \circ \cdots \circ T_n \tag{3.1.2}$$

Reciprocamente, dada uma sequência de operadores lineares contínuos $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ podemos definir um processo de evolução linear $\{T_{m,n} : \ m \geq n \in \mathbb{Z}\}$ usando a igualdade (3.1.2), isto é

(a) $T_{m,n} := T_{m-1} \circ T_{m-2} \circ \cdots \circ T_n, \ se \ m > n \ in \ \mathbb{Z}.$

(b) $T_{m,m} := I, \ m \in \mathbb{Z}.$

Observação 3. Um caso especial muito importante da última construção é quando temos uma sequência constante $T_n := T \in \mathscr{L}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, por (3.1.2), o processo de evolução linear associado a T é

$$T_{m,n} = T_{m-1} \circ T_{m-2} \circ \cdots \circ T_n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{(m-n)-fatores} = T^{m-n}, \ m \geq n,$$

isto é, $\{T_{m,n} : \ m \geq n \in \mathbb{Z}\} = \{T^m : m \geq 0, m \in \mathbb{Z}\}$, o qual é chamado um processo de evolução linear autônomo ou um semigrupo linear discreto.

Definição 3.1.2. Dizemos que um processo de evolução linear discreto $\{T_{m,n} : \ m \geq n \in \mathbb{Z}\}$ em um espaço de Fréchet $X = (X, (p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ possui dicotomia exponencial discreta com constante $M = (M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e expoente $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $M_j > 0$ e $\omega_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, quando existe uma sequência $\{Q_m : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathscr{L}(X)$ de projeções tais que:

(a) Quaisquer que sejam os inteiros $m \geq n$ tem-se

$$T_{m,n}Q_n = Q_mT_{m,n} \tag{3.1.3}$$

(b) Para todos os inteiros $m \geq n$ a restrição $T_{m,n}\,|_{R(Q_n)}\colon R(Q_n) \longrightarrow R(Q_m)$ é um isomorfismo cuja inversa é denotada por

$$T_{n,m} : R(Q_m) \longrightarrow R(Q_n),\ m \geq n. \tag{3.1.4}$$

(c) Para todo $j \in \mathbb{N}$ existem índices $l_1, l_2, \cdots, l_{k_j} \in \mathbb{N}$ tais que as seguintes estimativas valem:

(c1) Para todos $m \geq n$ em $\mathbb{Z}$ e $x \in X$ tem-se

$$p_j\big(T_{m,n}(I - Q_n)x\big) \leq M_j e^{-\omega_j(m-n)} \sum_{r=1}^{k_j} p_{l_r}(x). \tag{3.1.5}$$

(c2) Para todos $m < n$ em $\mathbb{Z}$ e $x \in X$ temos

$$p_j\big(T_{m,n}Q_n x\big) \leq M_j e^{\omega_j(m-n)} \sum_{r=1}^{k_j} p_{l_r}(x). \tag{3.1.6}$$

Em (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013) está demonstrado que, quando $X = (X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach, a dicotomia exponencial é equivalente a propriedades de existência e unicidade de soluções de uma equação não homogênea, conforme a seguir enunciamos:

Teorema 3.1.3. Seja $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ uma sequência de operadores lineares contínuos em um espaço de Banach $X = (X, \|\cdot\|_X)$. São equivalentes:

(1) $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ possui dicotomia exponencial discreta.

(2) Para toda sequência limitada $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in X, a equação

$$x_{n+1} = T_n x_n + f_n,\ n \in \mathbb{Z},$$

possui uma única solução limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em X.

Como sabemos, a partir do que está discutido em (HENRY, 2006; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), quando $X = (X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach e $T : X \longrightarrow X$ é um operador linear contínuo com seu espectro $\sigma(T)$, que é um compacto de $\mathbb{C}$, disjunto do círculo unitário $S^1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, então o semigrupo discreto $\{T^m : m \geq 0, m \in \mathbb{Z}\}$ possui dicotomia exponencial. Expliquemos como isso ocorre:

Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo do espaço de Banach $X = (X, \|\cdot\|_X)$ com $\sigma(T) \cap S^1 = \varnothing$. Considerando os conjuntos

$$\sigma^+ := \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > 1\} \text{ e } \sigma^- := \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| < 1\}$$

e definindo

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} (\lambda - T)^{-1} d\lambda$$

temos que $P : X \longrightarrow X$ é uma projeção contínua de X, de modo a podermos formar uma decomposição $X = X^+ \oplus X^-$ de X como soma direta dos subespaços

$$X^+ = R(P) \text{ e } X^- = N(P),$$

respectivamente a imagem e o núcleo de P.

Além disso, P é tal que $PT = TP$ e com isso as partes T^+ e T^- do operador T em X^+ e X^- coincidem com as restrições $T\mid_{X^+}$ e $T\mid_{X^-}$, respectivamente, pois assim $T(X^+) \subset X^+$ e $T(X^-) \subset X^-$.

Nestas condições é possível mostrar que $\sigma(T^+) = \sigma^+$ e $\sigma(T^-) = \sigma^-$, consequentemente $0 \notin \sigma(T^+)$ o que significa que T^+ é invetível e, do Teorema da Aplicação Espectral, tem-se que $\sigma([T^+]^{-1}) = [\sigma^+]^{-1} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T^+)\}$.

Assim, podemos escolher uma constante $c > 0$ com $r_\sigma(T^-) < c < 1$ e $r_\sigma([T^+]^{-1}) < c < 1$ e da definição do raio espectral [2] concluímos que existe um natural n_0 de modo que

$$\|[T^-]^n\|_{X^-} < c^n \text{ e } \|[T^+]^{-n}\|_{X^+} < c^n, \text{ para todo } n > n_0.$$

Pondo

$$M := e^{n_0} \max\{1, \|[T^-]\|_{X^-}, \cdots, \|[T^-]^{n_0}\|_{X^-}, \|[T^+]^1\|_{X^+}, \cdots, \|[T^+]^{-n_0}\|_{X^+}\} \text{ e}$$

$$\omega = -\log c$$

obtemos que

$$\|[T^-]^n\|_{X^-} \leq Me^{-n} \text{ e } \|[T^+]^{-n}\|_{X^+} \leq Me^{-n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Essas estimativas nos fornecem, exatamente, as condições $(c1)$ e $(c2)$ da Definição 3.1.2 no caso em que o espaço de Fréchet em questão é um espaço de Banach, provando a dicotomia exponencial da sequência $\{T^m : m \geq 0, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathscr{L}(X)$.

O ponto alto do que foi exposto no argumento acima consiste no fato de que foi a teoria espectral do operador $T \in \mathscr{L}(X)$, com X Banach, que possibilitou a dicotomia exponencial e, por isso, é natural querer investigar se, numa possível extensão do conceito de dicotomia exponencial para operadores lineares em espaços de Fréchet, o espectro também desempenha papel semelhante.

A seguir apresentamos uma extensão do conceito de dicotomia exponencial para operadores em espaços de Fréchet que foi proposta em (COSTA, 2019) e que se manteve estável por perturbação. Foi a existência dessa generalização que nos levou a querer entender o que acontece com o espectro de operadores em espaços de Fréchet e se sua relação com a dicotomia exponencial continua visível.

---

[2] Quando $S \in \mathscr{L}(X)$, com $X = (X, \|\cdot\|_X)$ Banach, seu raio espectral $r_\sigma(S)$ é dado por $r_\sigma(S) = \lim_{n\to\infty} \|S^n\|_X^{1/n}$.

Definição 3.1.4 (Dicotomia compatível)**.** Dizemos que um semigrupo linear discreto $\{T^n : n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}\}$ em um espaço de Fréchet $X = (X, (p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ possui dicotomia exponencial discreta, com constantes $M = (M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e expoentes $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $M_j > 0$ e $\omega_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, quando existe um projeção $Q \in \mathscr{L}(X)$ tal que:

(a) $TQ = QT$

(b) A restrição $T\mid_{R(Q)}: R(Q) \longrightarrow R(Q)$ é um isomorfismo cuja inversa é denotada por

$$T^{-1} : R(Q) \longrightarrow R(Q), \tag{3.1.7}$$

(c) Para cada $j \in \mathbb{N}$ existem um $k_j \in \mathbb{N}$ e uma constante $c_j > 0$ de modo que as seguintes estimativas são válidas para todo $x \in X$:

(c1) Para todo $n \geq 0$ em $\mathbb{Z}$ tem-se

$$p_j(T^n(I-Q)x) \leq Me^{-\omega n}p_j(x). \tag{3.1.8}$$

(c2) Para todos $n < 0$ em $\mathbb{Z}$ tem-se

$$p_j(T^nQx) \leq Me^{\omega n}p_j(x). \tag{3.1.9}$$

Em (COSTA, 2019) o autor obteve a seguinte extensões para espaços de Fréchet dos últimos resultados:

Teorema 3.1.5 (Theorem 3.6 in (COSTA, 2019))**.** Seja $\{T^n : n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}\}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em um espaço de Fréchet $X = (X, (p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ possuindo dicotomia exponencial discreta, então para toda sequência limitada $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em X, a equação

$$x_{n+1} = Tx_n + f_n,\ n \in \mathbb{Z}$$

possui uma única solução limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em X.

Ainda em (COSTA, 2019), o autor fornece condições suficientes para que um tipo de estabilidade por perturbação desta generalização do conceito de dicotomia exponencial seja obtida, porém não discutiremos os detalhes sobre isso aqui.

O teorema acima expõe uma grande vantagem em se ter a dicotomia exponencial para um semigrupo, pois ela garante a existência e unicidade de soluções para um certo tipo de equações lineares não homogêneas. Entretanto, para que esse teorema se mostre realmente útil para esta tarefa é necessário que conheçamos condições suficientes sobre a natureza do operador T que nos permitam, a partir delas, concluir sua dicotomia exponencial, como ocorreu linhas acima, quando apresentamos a situação em que $\sigma(T) \cap S^1 = \varnothing$, sendo T um operador contínuo num espaço de Banach.

Tendo em mente os resultados acima, percebemos que existe relevância no estudo de um operador linear quando este possui espectro desconexo. Pensando nisso, buscamos neste trabalho encontrar e estudar operadores diferenciais e, mais geralmente, pseudodiferenciais, definidos em certos espaços de Fréchet e em seus espaços duais, que pudessem ter espectro desconexo e, se possível, relacionar isso aos resultados de (COSTA, 2019) (fase esta que não pôde ser concluída neste projeto de pesquisa).

No próximo capítulo apresentamos os primeiros resultados obtidos de revisões bibliográficas que explicam a relação entre o espectro de um OPCC no espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e seu símbolo.

No quinto capítulo, aquele que contém nossa principal contribuição à Teoria Espectral, estudamos o espectro do operador de Laplace $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, num intervalo limitado, o que já nos impede de utilizar a ferramenta básica para o estudo dos operadores pseudodiferenciais, a saber, a transformada de Fourier. O espaço escolhido para realizar este estudo, como sugerido por (HENRY, 2006), foi o domínio $H_0^2(0,\pi)$ com a topologia induzida do espaço de Fréchet $L^2_{loc}(0,\pi)$.

Um dos maiores ensinamentos do processo de desenvolvimento deste projeto foi que o “simples” movimento de deslocar o operador de Laplace de

$$\frac{d^2}{dx^2} : H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi),$$

que será referido como Δ_{L^2}, para

$$\frac{d^2}{dx^2} : H_0^2(0,\pi) \subset L^2_{loc}(0,\pi) \longrightarrow L^2_{loc}(0,\pi),$$

que será referido apenas como Δ, levantou muito mais dúvidas do que conclusões, pois ele fez com que todo o resolvente $\rho(\Delta_{L^2})$ desaparecesse, abrindo duas possibilidades imediatas: Ou o espectro precisa de uma redefinição totalmente diferente da que é dada em espaços normados, para que isso não aconteça. Ou, se não, seu papel que sempre foi tão decisivo em espaços de Banach é irrelevante quando queremos levar seu estudo para espaços vetoriais topológicos mais gerais (alternativa esta que não acreditamos).

Dentre as principais dificuldades encontradas para desenvolver o estudo que fizemos, podemos citar a impossibilidade de utilizar teoremas sobre operadores compactos, pois, por não ser invertível (e nem possuir fecho invertível) $\frac{d^2}{dx^2} : H_0^2(0,\pi) \subset L^2_{loc}(0,\pi) \longrightarrow L^2_{loc}(0,\pi)$, não tem como possuir inversa compacta.

O ingrediente que permitiu contornar estas dificuldades, foi a determinação do operador adjunto Δ^* de Δ, pois era nele que estava contida toda a resposta deste problema, como apresentaremos no Capítulo 5.

CAPÍTULO

4

TEORIA ESPECTRAL DE OPDS NO ESPAÇO DE SCHWARZ E NAS DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS

A partir deste ponto, seremos capazes de apresentar os principais problemas que tratamos sobre a determinação do espectro de alguns operadores pseudodiferenciais em espaços não normados, que é o propósito original deste trabalho. Começamos descrevendo alguns resultados nessa direção que já haviam sido obtidos por (CHAU; WONG; PI, 1993).

Como mencionado no final do capítulo anterior, neste, apresentamos os primeiros resultados estudados sobre análise espectral nos espaços $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e, nas últimas duas seções, nossas conclusões relacionando $\sigma(a(D))$ com $\sigma(a(D)')$, ou seja, o espectro de um operador pseudodiferencial definido em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\sigma(a(D)')$, que é o espectro do seu transposto formal em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Os resultados que exporemos neste capítulo, com excessão do último teorema que é um dos resultados desta pesquisa, são todos devidos a (CHAU; WONG; PI, 1993).

4.1 Localização do Espectro no Espaço de Schwartz

Antes de tudo, apresentamos o seguinte lema que será substancial para o estudo do espectro de um operador pseudodiferencial com coeficientes constantes em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Denotaremos o espectro de um operador $a(D)$ no nível de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por $\sigma(a(D))$ e, no nível $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, por $\sigma'(a(D))$.

Lema 2. Para todo símbolo de operador pseudodiferencial com coeficientes constantes, $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$, tem-se que

$$a(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(a(D)) \subset \overline{a(\mathbb{R}^n)},$$

em que $a(\mathbb{R}^n)$ é a imagem da função a, ou seja, $a(\mathbb{R}^n) = \{a(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n\}$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{a(\mathbb{R}^n)}$ e mostremos que

$$\lambda - a(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

é uma bijeção. Para tanto, iremos construir, para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{a(\mathbb{R}^n)}$, um símbolo $b_\lambda \in S^{-m}(\mathbb{R}^n)$ tal que $b_\lambda(D) = [\lambda - a(D)]^{-1}$.

Notemos que, como $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{a(\mathbb{R}^n)}$, existe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$|\lambda - a(\xi)| \geq \varepsilon, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e consequentemente

$$b_\lambda(\xi) \doteq \frac{1}{\lambda - a(\xi)}, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

é uma função suave, ou seja, $b_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Além disso,

$$|b_\lambda(\xi)| = \frac{1}{|\lambda - a(\xi)|} \leq \frac{1}{\varepsilon}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.1.1}$$

e então $b_\lambda(\xi)\psi(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Agora podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} b_\lambda(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \\ \psi & \longmapsto & \mathscr{F}^{-1}[b_\lambda \mathscr{F}\psi], \end{array}$$

daí, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, teremos

$$\begin{aligned} b_\lambda(D)\,[(\lambda - a(D))\,\psi]\,(x) &= \mathscr{F}^{-1}\,[b_\lambda \mathscr{F}((\lambda - a(D))\,\psi)]\,(x) = \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left\{b_\lambda \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}[(\lambda - a(\xi))\mathscr{F}\psi(\xi)]\right\}(x) = \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda - a(\xi)}(\lambda - a(\xi))\mathscr{F}\psi(\xi)\right](x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Observemos que se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ vale

$$\partial^\alpha b_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \frac{C_k}{(\lambda - a(\xi))^{k+1}} \partial^{\beta_1(k)} a(\xi) \partial^{\beta_2(k)} a(\xi) \ldots \partial^{\beta_k(k)} a(\xi) \tag{4.1.2}$$

em que C_k são constantes, $\beta_1(k), \beta_2(k), \ldots, \beta_k(k)$ são multi-índices tais que $|\beta_1(k)| + \ldots + |\beta_k(k)| = |\alpha|$ variam de acordo com o índice k.

Com efeito, temos

$$\partial_{e_j} b_\lambda(\xi) = \frac{-1}{(\lambda - a(\xi))^2} \partial_{e_j} a(\xi)$$

em que ∂_{e_j} é a derivada na direção do vetor canônico e_j, para $1 \leq j \leq n$. Assumindo que a fórmula para $\partial^\alpha b_\lambda$ é válida para multi-índices α de comprimento $r > 0$ segue que

$$\partial_{e_j}\partial^\alpha b_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \frac{C_k(-k-1)}{(\lambda - a(\xi))^{k+2}} \partial_{e_j} a(\xi) \partial^{\beta_1(k)} a(\xi) \ldots \partial^{\beta_k(k)} a(\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{|\alpha|} \frac{C_k}{(\lambda - a(\xi))^{k+1}} \sum_{l=1}^{k} \partial^{\beta_1(k)} a(\xi) \ldots \left(\partial_{e_j}\partial^{\beta_l(k)} a(\xi)\right) \partial^{\beta_{l+1}(k)} a(\xi) \ldots \partial^{\beta_k(k)} a(\xi),$$

renomeando os multi-índices obtemos a prova de (4.1.2).

Analogamente, teremos $[\lambda - a(D)] \circ b_\lambda(D) = Id$ e além do mais, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, de (4.1.1), (4.1.2) e do fato de que $a \in S^m$, existem multi-índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l$ e uma constante $C > 0$ de maneira que

$$\|b_\lambda(\cdot)\psi(\cdot)\|_{\alpha,\beta} \leq C \sum_{j=1}^{l} \|\psi\|_{\alpha_j,\beta_j}.$$

Assim $b_\lambda(D) \in \mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ e segue que $\lambda - a(D)$ é um isomorfismo e $\mathbb{C} \setminus \overline{a(\mathbb{R}^n)} \subset \rho(a(D))$.

Resta mostrarmos que a imagem do símbolo de $a(D)$ está contida no espectro $\sigma(a(D))$. Seja $\lambda \doteq a(\xi_0)$, para algum $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e mostremos que

$$\lambda - a(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

não pode ser sobrejetora.

De fato, para que $\lambda - a(D)$ seja sobrejetora, para cada $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, deve existir $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $[\lambda - a(D)]\phi = \psi$. Em outras palavras,

$$(\lambda - a(\xi))(\hat{\phi})(\xi) = (\hat{\psi})(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$$

e assim

$$(\hat{\psi})(\xi_0) = (\lambda - a(\xi_0))(\hat{\phi}(\xi_0)) = 0.$$

Tomando então uma $\psi = \check{\varphi}$, tal que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e valendo 1 numa vizinhança de ξ_0, teremos $(\hat{\psi})(\xi_0) = \varphi(\xi_0) = 1$, não podendo assim existir $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $(\lambda - a(D))\phi = \psi$ e a prova está completa. □

Como veremos no próximo teorema, considerando uma hipótese adicional sobre o crescimento do símbolo a, podemos concluir que o espectro $\sigma(a(D))$ é precisamente a imagem do símbolo de $a(D)$.

Teorema 4.1.1. Se $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ é um símbolo de ordem $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |a(\xi)| = \infty, \tag{4.1.3}$$

então

$$\sigma(a(D)) = \{a(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n\}, \tag{4.1.4}$$

ou seja, o espectro de $a(D)$ é a imagem do símbolo $a(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \overline{a(\mathbb{R}^n)}$ ou, em outras palavras,

$$\lambda = \lim_{j\to\infty} a(\xi_j),$$

em que $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$.

Notemos que necessariamente teremos $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ limitada, caso contrário poderíamos supor $\xi_j \to \infty$ e assim, por hipótese, $|a(\xi_j)| \to \infty$ quando $j \to \infty$, contradizendo que seria $|a(\xi_j)| \to |\lambda|$. Sendo assim, existe $R > 0$ tal que $|\xi_j| \leq R$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e portanto, existe subsequência $(\xi_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de forma que $\lim_{k\to\infty} \xi_{j_k} = \xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Da continuidade do símbolo a, temos

$$\lambda = \lim_{j\to\infty} a(\xi_j) = \lim_{k\to\infty} a(\xi_{j_k}) = a(\xi_0) \in a(\mathbb{R}^n)$$

e consequentemente $\overline{a(\mathbb{R}^n)} \subset a(\mathbb{R}^n)$. Este fato com o Lema 2 nos dão

$$a(\mathbb{R}^n) = \sigma(a(D)) = \overline{a(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Veja que o teorema acima fornece um método muito simples para o cálculo do espectro de operadores em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. No entanto, como $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, o teorema ele diz que o espectro de $a(D)$ será sempre um conjunto conexo, o que não favorece o estudo da dicotomia exponencial como prevíamos inicialmente, já que uma separação para o espectro é impossível. Este fato se repetirá, para nossa surpresa e de um modo muito mais dramático, também quando considerarmos operadores diferenciais na escala $H^s_{loc}(I)$, como discutiremos em detalhes no próximo capítulo.

O lema a seguir, que de forma elegante faz uso dos conceitos da medida de Lesbegue, variedade C^∞ e do Teorema da Função Implícita, será uma ferramenta indispensável na demonstração do próximo teorema que, a partir de uma hipótese intrigante, provê uma condição suficiente para que não existam autovalores para $a(D)$.

Lema 3. Consideremos $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^∞. Se

$$m\left(\{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi \text{ é ponto crítico de } a\}\right) = 0,$$

então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, vale

$$m\left(\{\xi \in \mathbb{R}^n; a(\xi) = \lambda\}\right) = 0,$$

em que m denota a medida de Lesbegue em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja

$$G \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n; \nabla a(\xi) = (0, \cdots, 0)\}$$

e, fixado $\lambda \in \mathbb{C}$, consideremos

$$Z(\lambda) \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n; a(\xi) = \lambda\} = a^{-1}(\lambda).$$

Lembremos que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}_k$, sendo $B_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| < k\}$.

Decorre da hipótese que $m(Z(\lambda)\cap G) = 0$, daí, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um aberto O_j com $Z(\lambda)\cap G \subset O_j$ e $m(O_j) < 1/j$.

Agora, observemos que, pondo $\tilde{O}_j = \mathbb{R}^n \setminus O_j$, para $j,k \in \mathbb{N}$ vale a igualdade

$$Z(\lambda)\cap\overline{B}_k = (Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap O_j)\cup(Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap\tilde{O}_j). \tag{4.1.5}$$

Seja, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo, $\xi \in Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap\tilde{O}_j$, temos que $\lambda = a(\xi)$ é valor regular de a, caso contrário teríamos $\xi \in G\cap Z(\lambda) \subset O_j$, mas $\xi \in \tilde{O}_j$ uma contradição.

Pelo Teorema da Função Implícita, para cada $\xi \in Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap\tilde{O}_j$, existe N_ξ bola centrada em ξ tal que $N_\xi \cap Z(\lambda)$ é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$, consequentemente

$$m(N_\xi \cap Z(\lambda)) = 0.$$

Além disso, sendo $Z(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$ e $\overline{B}_k$ e $\tilde{O}_j$ conjuntos fechados, resulta que $Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap\tilde{O}_j$ é compacto e, dessa forma, existem $\xi_1,\dots,\xi_p$ tais que

$$Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap\tilde{O}_j \subset \bigcup_{l=1}^{p}(N_{\xi_l}\cap Z(\lambda)).$$

Portanto $m(Z(\lambda)\cap\overline{B}_k\cap\tilde{O}_j) = 0$, o que nos dá $m(Z(\lambda)\cap\overline{B}_k) = 0$, pois de (4.1.5) temos

$$m(Z(\lambda)\cap\overline{B}_k) < 1/j,\ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Por fim, como $Z(\lambda) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z(\lambda)\cap\overline{B}_k$, concluímos que $m(Z(\lambda)) = 0$, qualquer que seja o complexo $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Teorema 4.1.2. Suponhamos que $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ seja um símbolo de ordem $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m\big(\{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi \text{ é ponto crítico de } a\}\big) = 0,$$

em que m representa a medida de Lesbegue em $\mathbb{R}^n$. Se

$$a(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

é o operador pseudodiferencial cujo símbolo é a, então $\sigma_p(a(D)) = \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sejam tais que $\psi \neq 0$ e $(\lambda - a(D))\psi \equiv 0$, ou seja,

$$(\lambda - a(\xi))\hat{\psi}(\xi) = 0, \, \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por hipótese

$$m(\{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi \text{ é ponto crítico de } a\}) = 0,$$

então, do *Lema 3*, obtemos

$$m(\{\xi \in \mathbb{R}^n; \lambda - a(\xi) = 0\}) = 0,$$

consequentemente $\hat{\psi}(\xi) = 0$ para quase todo ξ e assim $\hat{\psi} \equiv 0$, já que $\hat{\psi}$ é uma função contínua.

Mas $\hat{\psi} \equiv 0 \implies \psi \equiv 0$, contradizendo a hipótese inicial e nos dizendo que $\lambda - a(D)$ é injetor qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{C}$, logo $\sigma_p(a(D)) = \emptyset$.

□

A seguir apresentamos um exemplo de aplicação do Teorema 4.1.2.

Exemplo 4.1.3. Consideremos a função $a(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2$ para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Notemos que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\partial_k a(\xi) = -8\pi^2\xi_k$ para $1 \leq k \leq m$, daí $\partial_l\partial_k a(\xi) = \partial^\alpha a(\xi) = 0$ para $1 \leq l < k \leq m$ e $|\alpha| \geq 3$.

Portanto $a \in S^2(\mathbb{R}^n)$ com $\nabla a(\xi) = -8\pi^2\xi$ e segue que $\xi = 0$ é o único ponto crítico de a, ou seja, $m(\{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi \text{ é ponto crítico de } a\}) = 0$. Lançando mão do Teorema 4.1.2, segue que $\sigma_p(a(D)) = \emptyset$.

Unindo os resultados acima com o teorema a seguir, chegaremos a uma descrição bastante precisa do espectro de $a(D)$. Concluiremos que os espectros pontual e contínuo são aniquilados, restando apenas o espectro residual, o qual coincidirá com a imagem do seu símbolo.

Teorema 4.1.4. Seja $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ um símbolo que satisfaz as hipóteses dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.2. Então, para o operador $a(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\sigma(a(D)) = \sigma_r(a(D)) = a(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. A fim de obter o resultado do teorema, necessitamos provar que se $\lambda = a(\eta)$, para algum $\eta \in \mathbb{R}^n$, então $\overline{R(\lambda - a(D))} \neq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Tomemos $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\hat{\psi}(\eta) \neq 0$. Suponhamos que existe uma sequência $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) - \lim_{k\to\infty}(\lambda - a(D))\phi_k = \psi.$$

daí

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) - \lim_{k\to\infty}(\lambda - a(\cdot))\hat{\phi}_k)(\cdot) = \hat{\psi}(\cdot).$$

Em particular,

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda - a(\xi))(\hat{\phi}_k)(\xi) = \hat{\psi}(\xi),\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e mais particularmente ainda

$$0 = \lim_{k\to\infty}(\lambda - a(\eta))(\hat{\phi}_k)(\eta) = \hat{\psi}(\eta),$$

contradizendo a escolha de ψ. Com isso, devemos ter $\overline{R(\lambda - a(D))} \neq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e o teorema está provado. □

4.2 Espectro no espaço das distribuições temperadas

Primeiramente, recordamos que dados $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$, um símbolo de ordem m, e uma distribuição temperada $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos $a(D)u$ da seguinte forma:

$$\left\langle a(D)u, \psi \right\rangle = \left\langle u, [a(\check{\psi})]\hat{}\, \right\rangle,\ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definindo também $b(\xi) \doteq a(-\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$, é imediato que $b \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Além do mais, para $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} b(D)\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} b(\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} a(-\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} a(\xi)\hat{\psi}(-\xi)d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} a(\xi)\check{\psi}(\xi)d\xi = [a\check{\psi}]\hat{}\,(x), \end{aligned}$$

pois $\check{\psi}(\xi) = \hat{\psi}(-\xi)$, e consequentemente

$$\langle a(D)u, \psi \rangle = \langle u, b(D)\psi \rangle, \tag{4.2.6}$$

provando que $b(D)$ é o transposto formal de $a(D)$.

O próximo teorema relaciona o espectro de $a(D)$ definido em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ com o espectro de seu transposto $b(D)$. Este resultado ressalta que a natureza destes espectros são distintas e pode ser encontrado em (CHAU; WONG; PI, 1993) Teorema 7.1.

Teorema 4.2.1. Dado um operador pseudodiferencial

$$a(D) : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

cujo símbolo $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as hipóteses dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.2, temos

$$\sigma'(a(D)) = \sigma'_p(a(D)) = \{b(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Demonstração. Inicialmente, consideremos $\lambda = b(\xi_0)$ para algum $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ e mostremos que $\lambda \in \sigma'_p(a(D))$.

Como o símbolo de $b(D)$ também satisfaz as hipóteses dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.2, resulta que $b(\mathbb{R}^n) = \sigma_r(b(D))$, logo $\overline{R(\lambda - b(D))} \neq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e, por isso, deve existir $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ de forma que

$$\langle u, (\lambda - b(D))\phi \rangle = 0, \ \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

o que nos dá

$$\langle (\lambda - a(D))u, \phi \rangle = \langle u, (\lambda - b(D))\phi \rangle = 0, \ \forall\, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

então $(\lambda - a(D))u = 0$ e $\lambda \in \sigma'_p(a(D))$.

Resta mostrar que $\sigma'_p(a(D)) \subset b(\mathbb{R}^n) = \overline{b(\mathbb{R}^n)}$. Para isso, tomemos $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{b(\mathbb{R}^n)} \subset \rho(b(D))$ e mostremos que $\lambda \notin \sigma'_p(a(D))$.

Suponhamos que $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ seja tal que $(\lambda - a(D))\, u = 0$, isto é, $\langle (\lambda - a(D))u, \psi \rangle = 0$ para qualquer $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dada $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, como por hipótese $\lambda - b(D)$ é bijeção, existe $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\phi = (\lambda - b(D))\psi$ e assim

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, (\lambda - b(D))\psi \rangle = \langle (\lambda - a(D))u, \psi \rangle = 0.$$

O argumento acima demonstra que $u \equiv 0$ e, portanto, $\lambda - a(D)$ é injetor, concluindo a demonstração. □

Ressaltamos que quando $a(D)$ tem como transposto formal um operador $b(D)$, este operador continua sendo pseudodiferencial, seu símbolo b herda as propriedades do símbolo a, no entanto o espectro, que originalmente era somente residual, se transforma em $\sigma'(a(D))$ que é puramente pontual. Veremos, no último resultado que será mostrado aqui, um comportamento semelhante com relação a mudança de natureza do espectro, ao passar de um operador para seu adjunto.

4.3 OPCC e seu transposto formal

Consideremos $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ um símbolo de um operador pseudodiferencial de ordem m com coeficientes constantes. Recordamos que o transposto de $a(D)$, denotado agora por $a(D)'$, é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} a(D)' : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto a(D)'u \doteq (a\check{u})\hat{}, \end{aligned}$$

em outras palavras, para $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\left\langle a(D)'u, \psi \right\rangle = \langle (a\check{u})\hat{}, \psi \rangle = \langle u, (a\hat{\psi})\check{} \rangle = \langle u, a(D)\psi \rangle . \tag{4.3.7}$$

Definição 4.3.1. Definimos o operador reflexão $r : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pondo

$$[r(a)](\xi) \doteq a(-\xi).$$

É fácil verificar que o operador reflexão é linear, bijetor e contínuo, ou seja, um isomorfismo pertencente a $\mathscr{L}(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ [1].

A partir de agora, quando a for símbolo, denotaremos $r(a)$ por $\tilde{a}$, dando origem ao operador $\tilde{a}(D)$. Dessa forma, se $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, então

$$[r(\psi)]\hat{}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta\xi} r(\psi)(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\eta\xi}\psi(-\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\eta\xi}\psi(\eta)d\eta = \check{\psi}(\xi),$$

ou seja,

$$[r(\psi)]\hat{}(\xi) = \check{\psi}(\xi) = (\hat{\psi})(-\xi) = [r(\hat{\psi})](\xi)$$

e, por conseguinte, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}\{a(D)[r(\psi)]\}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ix\xi} a(\xi)[r(\psi)]\hat{}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ix\xi} a(\xi)(\hat{\psi})(-\xi)d\xi = \\ \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(-x)\xi}\tilde{a}(\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi &= [\tilde{a}(D)\psi](-x) = [r(\tilde{a}(D)\psi)](x).\end{aligned}$$

Resumidamente, vale a igualdade

$$a(D) = r \circ \tilde{a}(D) \circ r. \tag{4.3.8}$$

Nosso intuito agora é relatar o primeiro resultado obtido neste trabalho, o qual relaciona o espectro de operadores pseudodiferenciais com coeficientes constantes em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com o de seu transposto formal, que é também um operador pseudodiferencial, que será considerado em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Este problema foi estudado com objetivo de generalizar o Teorema 2.3.2, substituindo o adjunto pelo transposto.

Desejavámos mostrar que $\rho(a(D)) = \rho(a(D)')$, considerando $\rho(a(D))$ como o conjunto dos números complexos λ tais que:

(i) $\lambda - a(D)$ é injetora,

(ii) $\overline{R(\lambda - a(D))} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, em que o fecho é considerado com a topologia usual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) $(\lambda - a(D))^{-1} : R(\lambda - a(D)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua;

e $\rho(a(D)')$ como o conjunto dos números complexos λ tais que:

(i) $\lambda - a(D)'$ é injetora,

[1] Também em $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$.

(ii) $\overline{R(\lambda - a(D)')} = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, em que o fecho é considerado com a topologia usual de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, que é a fraca*,

(iii) $(\lambda - a(D)')^{-1} : R(\lambda - a(D)') \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é contínua de acordo com a topologia de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

e assim teríamos generalizado o Teorema 2.3.2.

Entretanto, era de se esperar uma dificuldade extra para demonstrar um resultado desta magnitude, devido as topologias dos espaços em questão, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, não serem provenientes de normas. Mais especificamente, o primeiro é um de espaço de Fréchet (legítmo) e o segundo é localmente convexo, munido da topologia fraca*.

De fato, pois mesmo podendo utilizar o Teorema de Banach-Steinhauss (para espaços de Fréchet), foram encontrados diversos entraves, o que nos obrigou a enfraquecer parte das hipóteses a fim de obter a igualdade destes espectros, como a seguir explicamos:

Consideremos ρ o conjunto dos números complexos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais

(a) $\lambda - a(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é injetora,

(b) $\overline{R(\lambda - a(D))} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, em que $\overline{R(\lambda - a(D))}$ denota o fecho em relação a topologia usual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e

(c) $(\lambda - a(D))^{-1} : R(\lambda - a(D)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua com a relação a topologia induzida por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $a(D)'$ o operador obtido em (4.3.7) e ρ' o conjunto dos números complexos $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisfazem

(a) $\lambda - a(D)' : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é injetor,

(b) $\overline{R(\lambda - a(D)')}^* = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, em que $\overline{R(\lambda - a(D)')}^*$ é o fecho tomado em relação a topologia usual de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e

(c) $(\lambda - a(D)')^{-1} : R(\lambda - a(D)') \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que, para cada $u \in R(\lambda - a(D)')$ e cada sequência $\phi_j \in R(\lambda - a(D)') \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\phi_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$ tem-se

$$(\lambda - a(D)')^{-1} u = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j \to \infty} (\lambda - a(D)')^{-1} \phi_j. \tag{4.3.9}$$

Teorema 4.3.2. Se $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ é um símbolo de ordem m, então $\rho = \rho'$.

Demonstração. A fim de facilitar a compreensão, dividimos a prova de cada inclusão em três etapas. Em primeiro lugar, provemos que $\rho \subset \rho'$.

(a) **Injetividade**

Fixado $\lambda \in \rho$, provemos que o operador $\lambda - a(D)'$ é injetor. Para tanto, consideremos $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ com $(\lambda - a(D)')\,u = 0$, daí, para cada $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se que

$$\langle u, (\lambda - a(D))\,\psi\rangle = \big\langle \big(\lambda - a(D)'\big)\,u, \psi\big\rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle u, \phi\rangle = 0,\ \forall\, \phi \in R\,(\lambda - a(D))\,.$$

Por hipótese, $R\,(\lambda - a(D))$ é um subespaço denso de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, implicando que para toda $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\langle u, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u, (\lambda - a(D))\,\psi_j\rangle = 0,$$

para alguma sequência $(\psi)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi = \mathscr{S} - \lim_{j\to\infty} \big[(\lambda - a(D))\,\psi_j\big]$. Dessa forma, $u = 0$ e a injetividade de $\lambda - a(D)'$ segue.

(b) **Densidade da Imagem**

Para provar a densidade de $R(\lambda - a(D)')$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, começaremos provando que

$$\big(\lambda - a(D)'\big)\,|_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

tem imagem densa em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, o que será obtido por meio da identidade

$$\lambda - a(D)' = r \circ (\lambda - a(D)) \circ r.$$

Com efeito, para toda $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se também $r(\psi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e sendo, por hipótese, o subespaço $R\,(\lambda - a(D))$ denso em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $(\phi_j) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$r(\psi) = \mathscr{S} - \lim_{j\to\infty} (\lambda - a(D))\,\phi_j.$$

O que pode ser escrito como

$$r(\psi) = \mathscr{S} - \lim_{j\to\infty} (\lambda - a(D))\,r(\psi_j),$$

em que $r(\psi_j) = \phi_j$.

Agora, sabendo que a aplicação

$$r : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

é contínua considerando a topologia usual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\begin{aligned}\psi &= r\left(\mathscr{S}-\lim_{j\to\infty}(\lambda-a(D))\,r(\psi_j)\right)=\mathscr{S}-\lim_{j\to\infty} r\left[(\lambda-a(D))\,r(\psi_j)\right]=\\ &= \mathscr{S}-\lim_{j\to\infty}\left(\lambda-a(D)'\right)\psi_j.\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\left(\lambda-a(D)'\right)\psi_j \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \psi \implies \left(\lambda-a(D)'\right)\psi_j \overset{*}{\rightharpoonup} \psi,$$

donde

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)=\overline{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}^{*}=\overline{R(\lambda-a(D)')}^{*},$$

sendo que acima o fecho é considerado na topologia fraca* e a densidade está provada.

(c) **Continuidade do Operador Resolvente**

Neste item, mostramos que o operador

$$\left(\lambda-a(D)'\right)^{-1}: R\left(\lambda-a(D)'\right)\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

satisfaz a condição descrita em (4.3.9).

Antes de tudo, observemos que o operador reflexão r é o inverso de si mesmo e que (4.3.8) se mantém verdadeiro quando considerado em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, donde

$$\left(\lambda-a(D)'\right)^{-1}=r\circ(\lambda-a(D))^{-1}\circ r.$$

Dessa maneira provaremos que o operador

$$(\lambda-a(D))^{-1}: R\left(\lambda-a(D)\right)\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

satisfaz a condição (4.3.9), o que nos dará que $\left(\lambda-a(D)'\right)^{-1}$ também o satisfaz. Para tanto utilizamos a densidade de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e a hipótese $\lambda\in\rho$.

Com a finalidade de evitar possíveis confusões e não sobrecarregar a notação, nesta parte da demonstração denotaremos os conjuntos $(\lambda-a(D))\left[\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\right]\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $(\lambda-a(D)')\left[\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\right]\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, respectivamente, por R e R'.

Consideremos $u\in R\left(\lambda-a(D)'\right)\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, assim existem $w\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e uma sequência $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de forma que $u=(\lambda-a(D)')\,w$ e $\psi_j\overset{*}{\rightharpoonup} w$ quando $j\to\infty$.

Definindo $\phi_j\doteq(\lambda-a(D)')\,\psi_j$, $j\in\mathbb{N}$, temos

$$\phi_j\overset{*}{\rightharpoonup}\left(\lambda-a(D)'\right)w=u$$

quando $j\to\infty$. Em particular,

$$\phi_j-\phi_l\overset{*}{\rightharpoonup}0,\ j,l\to\infty.$$

Como $(\lambda - a(D))^{-1}|_R$ é contínua relativamente à topologia fraca*, $(\lambda - a(D)')^{-1}|_{R'}$ também é contínua com respeito à mesma topologia e, então,

$$\left[\left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}\left(\phi_j - \phi_l\right)\right] \xrightarrow{*} 0,\ j,l \to \infty.$$

Portanto $\left[(\lambda - a(D)')^{-1}\phi_j\right]_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ com relação à sua topologia usual, donde segue a existência de uma única distribuição $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ com

$$\left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}\phi_j \xrightarrow{*} v$$

quando $j \to \infty$.

Além disso, para cada $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\left\langle \left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}\phi_j, (\lambda - a(D))\phi \right\rangle = \left\langle \phi_j, \phi \right\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \left\langle u, \phi \right\rangle$$

e

$$\left\langle \left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}\phi_j, (\lambda - a(D))\,\phi \right\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \left\langle v, \left(\lambda - a(D)\right)\phi \right\rangle.$$

Consequentemente, para $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, obtém-se

$$\langle u, \phi \rangle = \langle v, (\lambda - a(D))\,\phi \rangle = \left\langle \left(\lambda - a(D)'\right) v, \phi \right\rangle,$$

equivalentemente

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} \left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}\phi_j = v = \left(\lambda - a(D)'\right)^{-1} u = \left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}\left[\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty}\phi_j\right].$$

Finalmente, dadas sequências $(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset R(\lambda - a(D)') \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\zeta_j \xrightarrow{*} u$ e $\varphi_j \xrightarrow{*} u$, tem-se $\zeta_j - \varphi_j \xrightarrow{*} 0$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} \left(\lambda - a(D)'\right)^{-1}(\varphi_j - \zeta_j) = 0$$

pois, como concluído no início desta demonstração,

$$\left(\lambda - a(D)'\right)^{-1} : R\left(\lambda - a(D)'\right) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

é contínua com relação a topologia induzida por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, terminando esta parte da demonstração.

Mostremos agora que, reciprocamente, $\rho' \subset \rho$, o que também será feito em três partes. Fixemos $\lambda \in \rho'$ e provemos:

(a) **Injetividade**

Inicialmente, observemos que para $u \in R(\lambda - a(D)')$ e $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ vale o seguinte

$$\left\langle (\lambda - a(D)')^{-1}u, (\lambda - a(D))\psi \right\rangle = \left\langle (\lambda - a(D)')(\lambda - a(D)')^{-1}u, \psi \right\rangle = \langle u, \psi \rangle. \tag{4.3.10}$$

Seja $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $(\lambda - a(D))\psi = 0$, e provemos que $\psi \equiv 0$. De (4.3.10) segue que

$$\langle u, \psi \rangle = \left\langle (\lambda - a(D)')^{-1} u, (\lambda - a(D))\psi \right\rangle = 0, \; \forall \, u \in R(\lambda - a(D)').$$

Dada uma distribuição $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, da hipótese, sabemos que existe uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset R(\lambda - a(D)')$ que converge para v, logo

$$\langle v, \psi \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle u_j, \psi \rangle = 0,$$

ou seja, $\langle v, \psi \rangle = 0$ para qualquer distribuição $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por isso, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixado, tomando $\delta_{x_0} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, a distribuição Delta Dirac suportada em x_0, teremos

$$\psi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \psi \rangle = 0,$$

nos permitindo concluir que $\psi \equiv 0$ e dizer que $\lambda - a(D)$ é injetor.

(b) **Densidade da Imagem**

Consideremos uma distribuição $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left\langle u, (\lambda - a(D))\phi \right\rangle = 0, \; \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

assim

$$\left\langle (\lambda - a(D)')u, \phi \right\rangle = \langle u, (\lambda - a(D))\phi \rangle = 0, \; \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Desse modo $(\lambda - a(D)')u = 0$ e, pela injetividade de $(\lambda - a(D)')$, obtemos que $u = 0$, donde, por meio do Teorema 2.1.7, concluímos que $\overline{R(\lambda - a(D))} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, como queríamos.

(c) **Continuidade do Operador Resolvente**

Finalmente, provemos que

$$(\lambda - a(D))^{-1} : R(\lambda - a(D)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

é contínuo com relação a topologia induzida por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Para isso, consideremos uma sequência $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $R(\lambda - a(D)) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\psi_j \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, ou equivalentemente

$$\langle \psi_j, \phi \rangle \longrightarrow 0, \; \forall \, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Notemos que o resolvente

$$(\lambda - a(D)')^{-1} : R(\lambda - a(D)') \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

satisfaz (4.3.9).

Agora, a cada $u \in R(\lambda - a(D)) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ corresponde uma sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $R(\lambda - a(D)) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\phi_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$, e dessa maneira

$$\begin{aligned}(\lambda - a(D))^{-1}u &= r[(\lambda - a(D)')^{-1}r(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} \phi_j)] = \\ &= \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} [r \circ (\lambda - a(D)')^{-1} \circ r]\phi_j = \\ &= \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} (\lambda - a(D))^{-1}\phi_j,\end{aligned}$$

o que implica que o seguinte operador

$$(\lambda - a(D))^{-1} : R(\lambda - a(D)) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

satisfaz a condição (4.3.9).

Como $0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_j \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} (\lambda - a(D))^{-1}\psi_j &= (\lambda - a(D))^{-1}\left[\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) - \lim_{j\to\infty} \psi_j\right] = \\ &= (\lambda - a(D))^{-1}0 = 0\end{aligned}$$

e, considerando a topologia induzida de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, a continuidade do operador resolvente

$$(\lambda - a(D))^{-1} : R(\lambda - a(D)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

está provada e, com ela, o teorema está demonstrado.

□

Salientamos que o teorema anterior foi o primeiro resultado original deste trabalho. A grande dificuldade enfrentada em sua demonstração foi lidar com as topologias de Fréchet de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e a fraca* de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, pois a imensa maioria das ferramentas que encontramos na literatura para tratar teoria espectral dizem respeito à topologias provenientes de normas. Isso, em partes, nos motivou a querer tratar esse tipo problema, mas estes se mostraram ser bem mais difíceis do que imaginávamos, forçando-nos a demonstrar muito menos resultados do que gostaríamos. Além disso, a mudança nas topologias do domínio e contra-domínio dos operadores impediu até mesmo a utilização de teoremas como o de Banach-Steinhauss (para espaços de Fréchet). A estratégia que adotamos para transpor parte destes obstáculos, foi adaptar convenientemente as definições de resolvente, para que, assim, as propriedades que descobrimos sobre os operadores em questão pudessem ser convenientemente relacionadas.

Resumindo, mesmo diante de toda essa dificuldade técnica, ainda foi possível obter um resultado interessante, relacionando os espectros de $a(D)$ e de $a(D)'$, neste novo cenário. Mais especificamente, flexibilizando as hipóteses (alteramos os 'conjuntos resolventes'), obtivemos uma versão do Teorema 2.3.2 substituindo espaços de Banach por um espaço de Fréchet e seu dual.

Após estudar os resultados de (CHAU; WONG; PI, 1993) e demonstrar nosso Teorema 4.3.2, concluímos que com a definição de operador pseudodiferencial (global) que consideramos neste capítulo não teríamos como encontrar um espectro desconexo, porque, em geral, temos $a(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(a(D)) \subset \overline{a(\mathbb{R}^n)}$ e como $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sua imagem é sempre um conjunto conexo, então, nunca obteríamos a desejada separação do espectro, como o que ocorre em (HENRY, 2006; CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013).

CAPÍTULO

5

ESPECTRO DE ODCCS COM DUAL ELÍTICO EM ESPAÇOS DE SOBOLEV LOCALIZADOS

Neste capítulo, apresentamos, em especial, os resultados obtidos sobre o espectro de um operador diferencial com coeficientes constantes $a(D)$ de ordem $m \in \mathbb{N}$, cujo adjunto é $a(D)^*$ elítico, visto como um operador pseudodiferencial semiglobal, de acordo com a Definição 2.7.12, e em dimensão um, ou seja, do seguinte modo

$$a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I),\ s \in \mathbb{R},$$

em que consideramos $H_{loc}^s(I)$ munido de sua topologia usual gerada pela família enumerável de seminormas $\left(p_j^{(s)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dadas por

$$p_j^{(s)}(f) \doteq \left\|\varphi_j f\right\|_{H^s(\mathbb{R})},\ f \in H_{loc}^s(I),$$

em que, para cada natural $j \in \mathbb{N}, I_j = (a_j, b_j)$, de maneira que $[a_j, b_j] \subset (a_{j+1}, b_{j+1})$, com $I = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}[a_j, b_j]$, e $\varphi_j \in C_c^\infty(I_{j+1})$, fixa, cumpre $\varphi_j = 1$ em $[a_j, b_j]$. Ao indicar $a(D)$ como acima, queremos significar que em $H_0^{s+m}(I)$ consideraremos a topologia induzida de $H_{loc}^s(I)$.

Este estudo, que é o principal deste trabalho, foi inspirado no Exemplo 2.6.3, onde substituímos os espaços $L^2(I)$ por $H_{loc}^s(I)$ e $H_0^1(I) \cap H^2(I)$ por $H_0^{m+s}(I)$, como sugerido pela Definição 2.7.12. Lembremos que esta última define um operador de ordem m como aquele que, para cada $s \in \mathbb{R}$, se estende a um operador linear de H_0^{s+m} tomando valores em H_{loc}^s.

As conclusões mais definitivas que obtivemos são quando consideramos o operador de Laplace definido em dimensão 1 como:

$$\Delta : H_0^2(I) \subset L_{loc}^2(I) \longrightarrow L_{loc}^2(I).$$

Para ele foi possível calcular seu operador fecho e, assim, comparar seus diversos espectros em três estágios:

(1) Quando definido no domínio $H_0^2(I)$.

(2) Quando consierado no domínio $H_0^1(I) \cap H^2(I)$, como no Exemplo 2.6.3; e

(3) Quando definido em $H_{loc}^2(I)$. Este último domínio, como veremos mais adiante, é o domínio do fecho $\overline{\Delta}$.

As conclusões que apresentamos a seguir foram realizadas com o intuito de encontrar um exemplo de um operador pseudodiferencial, em um espaço de Fréchet, que possuísse espectro desconexo. Este objetivo, ao final, não se concretizou, uma vez que, para nossa surpresa, o espectro resultou no plano complexo inteiro. Por outro lado, as hipóteses que fizemos, ainda que não nos dando as conclusões que inicialmente buscávamos, nos permitiu obter um resultado espectral bastante interessante e que, muito provavelmente, sugere a necessidade de uma nova maneira de ver a teoria espectral se quisermos considerá-la em TVS's não normados.

5.1 Contexto da Análise Espectral

Consideremos um operador diferencial de ordem $m \in \mathbb{N}$

$$a(D) : H_0^{m+s}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I),$$

em que, como mencionado acima, consideraremos $H_{loc}^s(I)$ com sua topologia usual e $H_0^{s+m}(I)$ com a topologia de subespaço de $H_{loc}^s(I)$.

Salientamos que os resultados obtidos no capítulo anterior não se aplicam neste novo contexto, visto que, apesar de $a(D)$ poder ser considerado como um operador de $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$, o domínio que consideraremos aqui é completamente diferente, em natureza e, também, pode incluir o caso de um domínio limitado. Isso, como veremos, impõe dificuldades técnicas consideráveis para a reprodução daqueles resultados.

Teorema 5.1.1. O operador $a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I)$ é fechável.

Demonstração. De fato, dada uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $H_0^{s+m}(I)$ tal que

$$u_j \longrightarrow 0 \text{ e } a(D)u_j \longrightarrow f \text{ em } H_{loc}^s(I),$$

segue imediatamente que esta convergência também ocorre em $\mathscr{D}'(I)$, isto é

$$u_j \longrightarrow 0 \text{ e } a(D)u_j \longrightarrow f \text{ em } \mathscr{D}'(I).$$

Entretanto, $a(D) : \mathscr{D}'(I) \longrightarrow \mathscr{D}'(I)$ é um operador contínuo e, sendo assim,

$$f = \lim_{j\to\infty} a(D)u_j = a(D)\big(\lim_{j\to\infty} u_j\big) = a(D)0 = 0,$$

ou seja, $f = 0$ em $H_{loc}^s(I)$, logo do Teorema 2.2.3 segue que $a(D)$ é fechável.

□

A fim de obter nossos resultados, precisaremos considerar o operador adjunto $a(D)^*$. Por isso, também precisaremos conhecer o seu domínio, o qual é um subespaço do espaço $[H^s_{loc}(I)]'$, dual de $H^s_{loc}(I)$. Para tanto, dado $s \in \mathbb{R}$, consideremos o seguinte espaço

$$H^s_c(I) = \{g \in H^s(\mathbb{R}); \text{supp } g \subset I \text{ é um compacto }\}.$$

O próximo teorema identifica os espaços duais dos espaços $H^s_{loc}(I)$ com os $H^{-s}_c(I)$, para $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.1.2. Para cada $s \in \mathbb{R}$, tem-se $[H^s_{loc}(I)]' = H^{-s}_c(I)$ e $[H^{-s}_c(I)]' = H^s_{loc}(I)$, em que $[H^s_{loc}(I)]'$ indica o espaço dual de $H^s_{loc}(I)$, $[H^{-s}_c(I)]'$ o de $H^{-s}_c(I)$ e as igualdades, evidentemente, significam no sentido de existir uma correspondência biunívoca entre os espaços.

Demonstração. Faremos a prova deste teorema para $s \geq 0$. O caso $s < 0$ é análogo.

Primeiramente, provemos que $[H^s_{loc}(I)]'$ é isomorfo a $H^{-s}_c(I)$.

Para isso consideremos $s \geq 0$ e mostremos que, para cada $g \in H^{-s}_c(I)$, existe um único funcional $T_g : H^s_{loc}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$, de maneira que a corrrespondência

$$\begin{array}{rcl} T : H^{-s}_c(I) & \longrightarrow & [H^s_{loc}(I)]' \\ g & \longmapsto & T_g \end{array}$$

seja uma bijeção linear contínua.

Com efeito, dada $g \in H^{-s}_c(I)$, temos que $K \doteq \text{supp } g \subset I$ é um compacto, daí existe $j \in \mathbb{N}$ tal que o intervalo aberto I_j, proveniente do esgotamento de I, contém K. Com isso, definamos T_g por

$$\langle T_g, u \rangle = \langle g, \varphi_j u \rangle,$$

em que $\varphi_j \in C^\infty_c(I)$ é a função teste que comparece na seminorma $p^{(s)}_j(\cdot)$ de $H^s_{loc}(I)$ e a dualidade "$\langle g, \varphi_j u \rangle$" diz respeito a dualidade entre $H^s(\mathbb{R})$ e $H^{-s}(\mathbb{R})$.

A linearidade de T segue imediatamente da sua definição e para a continuidade, por propriedades da Transformada de Fourier, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi_j u \rangle &= \langle \hat{g}, (\varphi_j u)\hat{} \rangle = \left\langle \left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2} \hat{g}, (1+|\xi|^2)^{s/2} (\varphi_j u)\hat{} \right\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2} \hat{g}(\xi) \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} (\varphi_j u)\hat{}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

pois $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{g}, (1+|\xi|^2)^{s/2}(\varphi_j u)\hat{} \in L^2(\mathbb{R})$ pela definição de $H^{-s}(\mathbb{R})$ e $H^s_{loc}(I)$.

Unindo esses fatos, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} |\langle T_g, u \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2} |\hat{g}(\xi)| \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} |(\varphi_j u)\hat{}(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \left\| (1+|\xi|^2)^{-s/2} \hat{g}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| (1+|\xi|^2)^{s/2} (\varphi_j u)\hat{}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \|g\|_{H^{-s}(I)} \left\|\varphi_j u\right\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|g\|_{H^{-s}(I)} p^{(s)}_j(u), \end{aligned}$$

em que a escolha da seminorma $p_j^{(s)}(\cdot)$ só depende de g fixada, demonstrando que $T_g \in [H^s_{loc}(I)]'$.

Observe que a aplicação T é contínua, visto que dada $(g_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset H_c^{-s}(I)$ uma sequência que converge para zero em $H_c^{-s}(I)$ então $(T_{g_l})_{l\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $H^s_{loc}(I)$.

Com efeito, se $g_l \to 0$ em $H_c^{-s}(I)$, então existe compacto $K \subset I$ tal que $\cup_{l\in\mathbb{N}}\text{supp } g_l \subset K$ e $\lim_{l\to\infty} \|g_l\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \to 0$. Tomamos $j \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset I_j$, daí segue que

$$\langle T_{g_l}, u\rangle = \langle g_l, \varphi_j u\rangle, u \in H^s_{loc}(I).$$

Logo

$$\lim_{l\to\infty}\langle T_{g_l}, u\rangle = \lim_{l\to\infty}\langle g_l, \varphi_j u\rangle = 0, u \in H^s_{loc}(I),$$

pois $(g_l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $H^{-s}(\mathbb{R})$ e $\varphi_j u \in H^s(\mathbb{R})$, ou seja, $T_{g_l} \to 0$.

Agora, para $f \in [H^s_{loc}(I)]'$ queremos encontrar $A_f \in H_c^{-s}(I)$ de forma que $T_{A_f} = f$.

Afirmamos que $C^\infty(I) \hookrightarrow H^s_{loc}(I)$. De fato, para $\psi \in C^\infty(I)$, $p_j^{(s)}(\cdot)$ seminorma de $H^s_{loc}(I)$ e $N \in \mathbb{N}$ com $N \geq \max(s,0)$ tem-se que $H^N_{loc}(I) \hookrightarrow H^s_{loc}(I)$ e

$$\begin{aligned}
[p_j^{(N)}(\psi)]^2 &= \|\varphi_j\psi\|^2_{H^N(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^N \left|(\varphi_j\psi)\hat{}(\xi)\right|^2 d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left|\xi^k (\varphi_j\psi)\hat{}(\xi)\right|^2 d\xi = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (2\pi)^{-2k} \int_{\mathbb{R}} \left| \left[\frac{d^k(\varphi_j\psi)}{dx^k}\right]\hat{}(\xi)\right|^2 d\xi = \\
&= \sum_{k=0}^{N} C_k \left\| \left[\frac{d^k(\varphi_j\psi)}{dx^k}\right]\hat{}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{k} C_k \left\| \left[\frac{d^{k-l}(\varphi_j)}{dx^{k-l}}\frac{d^l(\psi)}{dx^l}\right]\hat{}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{k} C_k \left\|\frac{d^{k-l}(\varphi_j)}{dx^{k-l}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \left(\sup_{x\in\text{supp } \varphi_j} \left|\frac{d^l(\psi)}{dx^l}\right|\right)^2,
\end{aligned}$$

em que $C_1, \ldots, C_N$ são constantes. Em outras palavras, existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e constantes $C_1, \ldots, C_{k_0} > 0$ de forma que

$$p_j^{(N)}(\psi) \leq \sum_{l=1}^{k_0} C_j \left\|\frac{d^l\varphi_j}{dx^l}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\sup_{x\in\text{supp } \varphi_j}\left|\frac{d^l(\psi)}{dx^l}\right|\right),$$

ou seja, $C^\infty(I) \hookrightarrow H^N_{loc}(I) \hookrightarrow H^s_{loc}(I)$ como queríamos mostrar.

Passando aos duais, segue, do que observamos acima, que $[H^s_{loc}(I)]' \hookrightarrow \mathscr{E}'(I)$, donde $K \doteq \text{supp } f \subset I$ é compacto. Agora, definamos $A_f = \varphi_j f$, em que $\varphi_j \in C_c^\infty(I)$ é a função teste que comparece na seminorma $p_j^{(s)}(\cdot)$ de modo que o intervalo I_j contém K, logo $A_f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

Mostremos que $A_f \in H^{-s}(\mathbb{R})$.

Com efeito, como $f \in [H^s_{loc}(I)]'$, da definição de dual e a da topologia do limite indutivo, existe uma constante $C > 0$ e uma seminorma $p_l^{(s)}(\cdot)$ de forma que

$$|\langle f, v\rangle| \leq C p_l^{(s)}(v)$$

para $v \in H^s_{loc}(\overline{I_{j+1}})$. Portanto, para $u \in H^s(\mathbb{R})$ tem-se $\varphi_j u \in H^s_{loc}\left(\overline{I_{j+1}}\right)$ e então lançando mão do Teorema 2.7.11, para alguma $\tilde{C} > 0$, temos

$$\left|\left\langle A_f, u\right\rangle\right| = \left|\left\langle f, \varphi_j u\right\rangle\right| \leq C p_l^{(s)}\left(\varphi_j u\right) \leq C\|\varphi_j u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Donde concluímos que $A_f \in [H^s(\mathbb{R})]' = H^{-s}(\mathbb{R})$ com suporte $K \subset I$ compacto, i.e., $A_f \in H_c^{-s}(I)$.

Portanto, dada $f \in \left[H^s_{loc}(I)\right]'$, para $u \in H^s_{loc}(I)$, temos

$$\left\langle T_{A_f}, u\right\rangle = \left\langle A_f, \varphi_k u\right\rangle = \left\langle f, \varphi_j \varphi_k u\right\rangle = \langle f, u\rangle,$$

sendo que $k \in \mathbb{N}$ é tal que I_k contém supp A_f, ou seja, $T_{A_f} = f$. Analogamente, não é difícil verificar que $A_{T_g} = g$ para $g \in H_c^{-s}(I)$ o que implica que T é uma bijeção com inversa A.

Provemos agora que $[H_c^{-s}(I)]' = H^s_{loc}(I)$.

Dada $u \in H^s_{loc}(I)$ definamos

$$T_u : H_c^{-s}(I) \to \mathbb{C}$$

da seguinte forma $\langle T_u, g\rangle \doteq \langle g, u\rangle$, para $g \in H_c^{-s}(I)$.

Percebamos que $\langle g, u\rangle = \left\langle g, \varphi_j u\right\rangle$, em que $\varphi_j \in C_c^\infty(I)$ é a função teste relativa ao intervalo I_j do esgotamento de I de forma que supp $g \subset I_j$ e, como na primeira parte da demonstração, a dualidade "$\left\langle g, \varphi_j u\right\rangle$" diz respeito a dualidade entre $H^{-s}(\mathbb{R})$ e $H^s(\mathbb{R})$.

Demonstremos que $T_u \in [H_c^{-s}(I)]'$, ou seja, que T_u é linear e que, para cada compacto $K \subset I$,

$$T_u\,|_{H_c^{-s}(K)} : H_c^{-s}(K) \to \mathbb{C}$$

é contínua (pois, assim como $C_c^\infty(I)$, a topologia de $H_c^{-s}(I)$ é a do limite indutivo).

De fato, a linearidade de T_u é imediata. Para a continuidade, fixemos um compacto $K \subset I$ e $\varphi_k \in C_c^\infty(I)$ tal que I_k é proveniente do esgotamento de I que contém K.

Dada $g \in H_c^{-s}(K)$ tem-se

$$|\langle T_u, g\rangle| = |\langle g, \varphi_k u\rangle| \leq \|\varphi_k u\|_{H^s(\mathbb{R})}\|g\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} = p_k^{(s)}(u)\|g\|_{H^{-s}(\mathbb{R})},$$

pois $\varphi_k u \in H^s(\mathbb{R})$ e $g \in H_c^{-s}(K) \subset H^{-s}(\mathbb{R})$, donde a continuidade segue, mostrando que $T_u \in [H_c^{-s}(I)]'$ e $T : H_c^{-s}(I) \to [H_c^{-s}(I)]'$.

Agora provemos que $T : H^s_{loc}(I) \to [H_c^{-s}(I)]'$ possui uma inversa.

Dada $f \in [H_c^{-s}(I)]'$, encontremos $A_f \in [H_c^{-s}(I)]'$ tal que $T_{A_f} = f$. Primeiramente observemos que $H_c^{-s}(I) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} H_c^{-s}(I_j)$, em $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de abertos limitados cujos fechos que esgotam I. Do fato de que $C_c^\infty(I) \hookrightarrow H_c^{-s}(I)$, segue que $[H_c^{-s}(I)]' \hookrightarrow \mathscr{D}'(I)$.

Nessas condições, definamos

$$\left\langle A_f, g\right\rangle \doteq \left\langle f\,|_{H_c^{-s}(I_j)}, g\right\rangle,$$

para $g \in H_c^{-s}(I)$ e supp $g \subset I_j$, em que I_j é proveniente do esgotamento de I.

Precisamos provar que, para cada $\phi \in C_c^\infty(I)$, vale $\phi A_f \in H^s(\mathbb{R})$. Com efeito, fixemos $\phi \in C_c^\infty(I)$, daí supp $\phi \subset I$ é compacto, e, para $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left|\langle \phi A_f, \psi\rangle\right| &= \left|\langle A_f, \phi\psi\rangle\right| = \left|\left\langle f\,|_{H^{-s}(I_j)}, \phi\psi\right\rangle\right| \leq \\ &\leq C\|\phi\psi\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \leq CK\|\psi\|_{H^{-s}(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

em que $K > 0$ é uma constante que existe em consequência do Teorema 2.7.11.

Por conseguinte, da Desigualdade (5.1.1) e do fato de que $[H^{-s}(\mathbb{R})]' = H^s(\mathbb{R})$ segue que $A_f \in H^s_{loc}(I)$ e ademais

$$\langle A_{T_f}, g\rangle = \left\langle T_f\,|_{H_c^{-s}(I_j)}, g\right\rangle = \langle f, \varphi_j g\rangle = \langle f, g\rangle,\ f \in H^s_{loc}(I),$$

para $g \in H_c^{-s}(I)$ com supp $g \subset I_j$, ou seja, $T \circ A = Id$.

Por fim, é análogo provar que $A \circ T = Id$, o que completa a demonstração. □

5.2 Espectro de um OD com transposto hipoelítico

Estudemos agora o espectro de um operador diferencial linear com coeficientes constantes cujo transposto é hipoelítico. Para isso, comecemos considerando um símbolo $a \in S^m(\mathbb{R})$ da forma $a(\xi) = \sum_{k=0}^m a_k \xi^k$, $m \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$, e o operador diferencial $a(D) = \sum_{k=0}^m (2\pi i)^{-k} a_k \frac{d^k}{dx^k}$, definido por ele, nas seguintes escalas

$$a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow H^s_{loc}(I),\ s \in \mathbb{R}.$$

Nosso objetivo aqui é comparar seu espectro com o do seu dual

$$a(D)^* : D\left(a(D)^*\right) \subset H_c^{-s}(I) \longrightarrow H_c^{-s}(I),$$

em que

$$D(a(D)^*) \doteq \left\{g \in H_c^{-s}(I); g \circ a(D) : H^{s+m}_{loc}(I) \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é contínuo}\right\}$$

e, para $g \in D(a(D)^*)$, $a(D)^* g$ é o único elemento de $H_c^{-s}(I)$ (funcional contínuo em $H^s_{loc}(I)$) que estende continuamente o funcional linear $g \circ a(D) : H^{s+m}_{loc}(I) \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$, o qual existe, graças a densidade de $H_0^{s+m}(I)$ em $H^s_{loc}(I)$.

Notemos que, por definição, vale a relação entre $a(D)$ e $a(D)^*$

$$\langle a(D)u, g\rangle = \langle u, a(D)^* g\rangle\,, \tag{5.2.2}$$

para todo $u \in H_0^{s+m}(I)$ e $g \in D(a(D)^*)$.

Sabendo que $a(D)^*$ satisfaz a relação (5.2.2), podemos encontrar um candidato para o dual $a(D)^*$. De fato, para $\varphi, \psi \in C_c^\infty(I)$ temos que

$$\langle \varphi, a(D)^*\psi \rangle = \langle a(D)\varphi, \psi \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{m} (2\pi i)^k a_k \frac{d^k\varphi}{dx^k}, \psi \right\rangle = \left\langle \varphi, \sum_{k=0}^{m} (-2\pi i)^{-k} a_k \frac{d^k\psi}{dx^k} \right\rangle.$$

Sugerindo que para $g \in D(a(D)^*)$, arbitrária, a expressão " $\sum_{k=0}^m a_k(-2\pi i)^{-k}\frac{d^k g}{dx^k}$ " define a distribuição $a(D)^*g$. Por outro lado, da equação acima e do que foi apresentado no primeiro capítulo, segue que $\sum_{k=0}^m a_k(-2\pi i)^{-k}\frac{d^k}{dx^k}$ é o transposto formal de $a(D)$.

Notemos ainda que, a fim de que se tenha $\sum_{k=0}^m (-2\pi i)^{-k} a_k g^{(k)} : H^s_{loc}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$ bem definido para $g \in H_c^{-s}(I)$, g precisa ter, ao menos, m derivadas em $H_c^{-s}(I)$, ou seja, $g \in H_c^{m-s}(I)$. Nossos próximos argumentos procuram demonstrar, rigorosamente, a validade dessas sugestões.

Teorema 5.2.1. Seja $a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow H^s_{loc}(I)$ um operador diferencial de ordem m com transposto formal $a(D)'$ hipoelítico. Nestas condições, existe $0 < \delta \leq 1$ tal que

$$H_c^{-s+m}(I) \subset D\left[a(D)^*\right] \subset H_c^{-s+\delta m}(I).$$

Demonstração. **Parte I)** $H_c^{-s+m}(I) \subset D\left[a(D)^*\right]$

Inicialmente, consideremos $u \in H^{s+m}_{loc}(I)$ e $g \in H_c^{-s+m}(I)$. Denotemos $K := \operatorname{supp} g$, daí existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_j \in C_c^\infty(I)$ com $\varphi_j \equiv 1$ numa vizinhança de K, sendo φ_j função teste proveniente da família de seminormas de $H^s_{loc}(I)$.

Nessas condições, como $\frac{d^k g}{dx^k} \in H^{-s}(\mathbb{R})$ para $1 \leq k \leq m$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|\langle g, a(D)u \rangle| &= \left| \left\langle g, \sum_{k=0}^{m} (2\pi i)^k a_k \frac{d^k u}{dx^k} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \sum_{k=0}^{m} (-2\pi i)^k a_k \frac{d^k g}{dx^k}, u \right\rangle \right| = \\
&= \left| \left\langle \sum_{k=0}^{m} (-2\pi i)^k a_k \frac{d^k g}{dx^k}, \varphi_j u \right\rangle \right| \leq \sum_{k=0}^{m} A_k \left\| \frac{d^k g}{dx^k} \right\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \|\varphi_j u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{m} \tilde{A}_k \|g\|_{H^{-s+k}(\mathbb{R})} \|\varphi_j u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C \|g\|_{H^{-s+m}(\mathbb{R})} p_j^{(s)}(u),
\end{aligned}$$

pois $H^{-s+m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{-s+k}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R})$ para cada $1 \leq k \leq m$, em que $A_0, \ldots, A_m$, $\tilde{A}_0, \ldots, \tilde{A}_m$ e C são constantes.

Destacamos que só foi possível obter a continuidade com relação a topologia de $H^s_{loc}(I)$, pois $\operatorname{supp}\left[\sum_{k=0}^m (-2\pi i)^k a_k \frac{d^k g}{dx^k}\right] \subset \operatorname{supp} g \subset K$ e $\frac{d^k g}{dx^k} \in H^{-s}(\mathbb{R})$ para $0 \leq k \leq m$.

Logo concluímos que $g \in D[a(D^*)]$ e

$$a(D)^* g = \sum_{k=0}^{m} (-2\pi i)^k a_k \frac{d^k g}{dx^k}.$$

Em particular, segue que $H_c^{-s+m}(I) \subset D\left[a(D)^*\right]$.

Parte II) $D[a(D)^*] \subset H_c^{-s+\delta m}(I)$

Precisamos mostrarmos que existe $0 < \delta \leq 1$ tal que $D[a(D)^*] \subset H_c^{-s+\delta m}(I)$.

Com efeito, dada $g \in D[a(D)^*]$ tem-se, pela definição do domínio de $a(D)^*$, que existem $M > 0$ e $p_j^{(s)}(\cdot)$, uma seminorma de $H_{loc}^s(I)$, tais que

$$|\langle g, a(D)u\rangle| \leq M p_j^{(s)}(u),\ u \in H_0^{s+m}(I),$$

e que $a(D)^*g \in \left[H_{loc}^s(I)\right]' = H_c^{-s}(I)$ é a extensão contínua de

$$g \circ a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ora, para $\psi \in C_c^\infty(I)$, vale

$$\langle a(D)^*g, \psi\rangle = \langle g, a(D)\psi\rangle = \left\langle g, \sum_{l=0}^m (2\pi i)^l a_l \frac{d^l\psi}{dx^l}\right\rangle = \left\langle \sum_{l=0}^m (-2\pi i)^l a_l \frac{d^l g}{dx^l}, \psi, \right\rangle$$

ou seja, $\sum_{l=0}^m (-1)^l a_l \frac{d^l g}{dx^l} = a(D)^*g$ como distribuições de $\mathscr{D}'(I)$ e, sendo que $a(D)^*g \in H_c^{-s}(I) \hookrightarrow H_{loc}^{-s}(I)$, segue que $\sum_{l=0}^m (-2\pi i)^l a_l \frac{d^l g}{dx^l} \in H_{loc}^{-s}(I)$.

Unindo este fato com a hipótese $\sum_{l=0}^m (-2\pi i)^l a_l \frac{d^l}{dx^l}$ hipoelítico, do Teorema 2.7.16, existe $0 < \delta \leq 1$ tal que $g \in H_{loc}^{-s+\delta m}(I)$. Em resumo, $g \in H_{loc}^{-s+\delta m}(I)$ com supp g compacto, ou seja, $g \in H_c^{-s+\delta m}(I)$, o que completa a prova.

□

Corolário 5.2.2. Se $a(D)'$ for elítico, então $\delta = 1$ no teorema acima e, consequentemente, $D(a(D)^*) = H_c^{-s+m}(I)$. Além do mais, vale que

$$a(D)^*g = \sum_{k=0}^m (-2\pi i)^k a_k \frac{d^k g}{dx^k},\ \text{para } g \in H_c^{-s+m}(I).$$

Temos agora tudo o que precisamos para demonstrar os resultados comparando $\sigma(a(D))$ com $\sigma(a(D)^*)$, em que

$$a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I)$$

é um ODCC com transposto formal hipoelítico e

$$a(D)^* : H_c^{-s+m}(I) \subset H_c^{-s}(I) \longrightarrow H_c^{-s}(I)$$

é seu dual.

Teorema 5.2.3. Seja $a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I)$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes de ordem m cujo transposto formal $a(D)'$ é hipoelítico. Nessas condições, valem as inclusões

(i) $\sigma_p(a(D)) \bigcup \sigma_r(a(D)) \subset \sigma_p(a(D)^*) \bigcup \sigma_r(a(D)^*)$.

(ii) $\sigma_p(a(D)^*) \subset \sigma_p(a(D)) \bigcup \sigma_r(a(D))$; e

(iii) $\sigma_r(a(D)^*) \subset \sigma_p(a(D)) \bigcup \sigma_c(a(D))$.

Demonstração. Procedemos essa prova dividindo-a em quatro passos.

Passo I: $\sigma_r(a(D)) \subset \sigma_p\,(a(D)^*)$.

Para $\lambda \in \sigma_r(a(D))$, pela definição de espectro residual, tem-se que $\lambda - a(D)$ é injetor e $\overline{R(\lambda - a(D))} \neq H^s_{loc}(I)$ e, do Teorema 2.1.7, existe $g \neq 0$ funcional pertencente a $H_c^{-s}(I)$ tal que

$$\langle g, (\lambda - a(D))u\rangle = 0,\ \forall\, u \in H_0^{s+m}(I).$$

Da identidade acima, segue que $g \in D\,[a(D)^*] \subset H_c^{-s+\delta m}(I)$ com

$$\langle (\lambda - a(D)^*)\, g, u\rangle = \langle g, (\lambda - a(D))\, u\rangle = 0,\ \forall\, u \in H_0^{s+m}(I),$$

ou seja, $(\lambda - a(D)^*)\, g = 0$ com $g \neq 0$ e portanto $\lambda \in \sigma_p(a(D)^*)$.

Passo II: $\sigma_p(a(D)) \subset \sigma_p(a(D)^*) \cup \sigma_r(a(D)^*)$.

Se $\lambda \in \sigma_p(a(D))$ tem-se que, para algum $u \in H_0^{s+m}(I)$ não nula, $(\lambda - a(D))u = 0$. Logo, para qualquer $g \in H_c^{-s}(I)$ vale $\langle g, (\lambda - a(D))u\rangle = 0$ e, em particular,

$$\langle (\lambda - a(D)^*)g, u\rangle = \langle g, (\lambda - a(D))u\rangle = 0,\ \forall\, g \in D(a(D)^*) \subset H_c^{-s}(I).$$

Se $\lambda - a(D)^*$ não é injetora, então $\lambda \in \sigma_p(a(D)^*)$.

Por outro lado, se $\lambda - a(D)^*$ é injetora suponhamos por absurdo que $\overline{R(\lambda - a(D)^*)} = H_c^{-s}(I)$. A igualdade anterior implica que $u = 0$ o que contraria nossa hipótese inicial, portanto $\overline{R(\lambda - a(D)^*)} \neq H_c^{-s}(I)$ e por conseguinte $\sigma_p(a(D)) \subset \sigma_p(a(D)^*) \cup \sigma_r(a(D)^*)$.

Resultado este que, unido ao Passo I, nos dá

$$\sigma_p(a(D)) \cup \sigma_r(a(D)) \subset \sigma_p(a(D)^*) \cup \sigma_r(a(D)^*),$$

que é o que está afirmado em (i).

Passo III: $\sigma_p\,(a(D)^*) \subset \sigma_p(a(D)) \cup \sigma_r(a(D))$.

Já, para $\lambda \in \sigma_p(a(D)^*)$, tem-se que $(\lambda - a(D)^*)g = 0$ para algum $g \in D[a(D)^*]$ não nulo e consequentemente

$$\langle (\lambda - a(D)^*)\, g, u\rangle = 0,\ \forall\, u \in H^s_{loc}(I).$$

Em particular, vale

$$\langle g, (\lambda - a(D))u\rangle = \langle (\lambda - a(D)^*)g, u\rangle = 0,\ \forall\, u \in H_0^{s+m}(I).$$

com $g \neq 0$ e, mais uma vez, lançando mão do Teorema 2.1.7, concluímos que $\overline{R(\lambda - a(D))} \neq H^s_{loc}(I)$ e portanto $\lambda \in \sigma_p(a(D)) \cup \sigma_r(a(D))$, estabelecendo também (ii).

Passo IV: $\sigma_r(a(D)*) \subset \sigma_p(a(D)) \cup \sigma_c(a(D))$.

Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - a(D)$ é injetor e $\overline{R(\lambda - a(D))} = H^s_{loc}(I)$, ou seja, $\lambda \notin \sigma_p(a(D)) \cup \sigma_r(a(D))$ e assim, do Passo III, segue que $\lambda \notin \sigma_p(a(D))*$, isto é, $\lambda - a(D)*$ é injetor. Mostremos que se

$$(\lambda - a(D))^{-1} : R(\lambda - a(D)) \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow H^s_{loc}(I)$$

é contínua, então que $R(\lambda - a(D)*) = H^{-s}_c(I)$, i.e., se $\lambda \in \rho(a(D))$ então $\lambda \notin \sigma_r(a(D)*)$ ou, equivalentemente, $\sigma_r(a(D)*) \subset \sigma(a(D))$.

Para tanto, primeiramente, devemos provar as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * \circ (\lambda - a(D)*)\, g\, |_{R(\lambda - a(D))} &= g\, |_{R(\lambda - a(D))},\ g \in D(a(D)*). && (5.2.3) \\ (\lambda - a(D)*) \circ \left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * g &= g,\ g \in D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] *. && (5.2.4) \end{aligned}$$

De fato, se $g \in D(a(D)*)$ temos que

$$\left\langle (\lambda - a(D)*)\, g, (\lambda - a(D))^{-1} f \right\rangle = \langle g, f \rangle,\ f \in R(\lambda - a(D))$$

e assim $\left[(\lambda - a(D)*) g\right] \circ (\lambda - a(D))^{-1}$ é contínua, provando que

$$R(\lambda - a(D)*) \subset D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] *$$

e (5.2.3) é válida.

Tomando agora $g \in D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] *$ tem-se que

$$\begin{aligned} \left\langle \left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * g, (\lambda - a(D))\, u \right\rangle &= \left\langle g, (\lambda - a(D))^{-1} (\lambda - a(D))\, u \right\rangle = \\ &= \langle g, u \rangle,\ u \in H^{s+m}_0(I), \end{aligned}$$

donde

$$\left\{ \left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * g \right\} \circ (\lambda - a(D)) : H^{s+m}_0(I) \longrightarrow \mathbb{C}$$

é contínua com relação a topologia induzida de $H^s_{loc}(I)$, dessa forma $\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * g \in D(a(D)*)$ valendo (5.2.4), ou seja,

$$g = (\lambda - a(D)*) \left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * g,\ g \in D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] *$$

e assim $D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * \subset R(\lambda - a(D)*)$, que era a inclusão que faltava para constatar a igualdade

$$D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right] * = R(\lambda - a(D)*).$$

Retornando ao que queríamos provar, da continuidade de $(\lambda - a(D))^{-1}$, temos que

$$R(\lambda - a(D)^*) = D\left[(\lambda - a(D))^{-1}\right]^* = H_c^{-s}(I).$$

Dessa maneira, obtemos que se $\lambda \in \rho(a(D))$, então $\lambda \notin \sigma_r(a(D)^*)$, ou seja, $\sigma_r(a(D)^*) \subset \sigma(a(D))$.

Unindo este fato com o Passo I, segue que $\sigma_r(a(D)^*) \subset \sigma_p(a(D)) \cup \sigma_c(a(D))$, pois do Passo I concluímos que $\sigma_r(a(D)) \subset \sigma_p(a(D)^*)$ e $\sigma_r(a(D)^*) \cap \sigma_p(a(D)^*) = \emptyset$, o que prova (iii) e o teorema está provado.

□

Teorema 5.2.4. Nas condições do teorema acima, com $a(D)'$ elítico, temos que $a(D)$ e seu adjunto $a(D)^*$ ambos têm conjunto resolvente vazio e, independentemente de $s \in \mathbb{R}$, seus diversos tipos de espectro ficam classificados como:

$$\begin{aligned} \sigma_p(a(D)) &= \sigma_p(a(D)^*) = \emptyset, \\ \sigma_r(a(D)) &= \sigma_c(a(D)^*) = \emptyset, \\ \sigma_c(a(D)) &= \sigma_r(a(D)^*) = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $\sigma_p(a(D)^*) = \emptyset$.

De fato, se $(\lambda - a(D)^*)g = 0$ para alguma $g \in D(a(D)^*)$ segue que $g(x) = \sum_{j=1}^m C_j e^{\beta_j x}$ para $C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{C}$ e $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ raízes do polinômio [1]

$$\lambda - a^*(\xi) = \lambda - \sum_{k=1}^m (-2\pi i)^k a_k \xi^k.$$

Como $D(a(D)^*) = H_c^{-s+m}(I)$, g possui suporte compacto o que implica em $g \equiv 0$, portanto $\sigma_p(a(D)^*) = \emptyset$.

Agora, afirmamos que existe $u \in H^s_{loc}(I)$, não nula, tal que

$$\langle u, (\lambda - a(D)^*)g\rangle = 0, \; \forall\, g \in D(a(D)^*), \tag{5.2.5}$$

o que nos dará $\overline{R(\lambda - a(D)^*)} \neq H_c^{-s}(I)$.

Com efeito, observemos que se $u \in C^\infty(I) \subset H^s_{loc}(I)$ então

$$\langle u, (\lambda - a(D)^*)g\rangle = \langle(\lambda - a(D))u, g\rangle, \; g \in D(a(D)^*).$$

[1] Se $m = 2$ e $\lambda - a^*(\xi) = 0$ possuí uma única raiz β_0, como sabemos das EDO's, a solução é dada por $g(x) = C_1 e^{\beta_0 x} + C_2 x e^{\beta_0 x}$. No caso geral, procedemos de forma análoga para cada raiz repetida.

Desta forma, basta escolhermos $u(x) = e^{\xi_0 x}$, em que $\xi_0 \in \mathbb{C}$ é qualquer raiz do polinômio

$$(\lambda - a(\xi)) = \lambda - \sum_{k=1}^{m} (2\pi i)^k a_k \xi^k$$

e teremos que $u \in C^\infty(I)$, não nula e satisfaz $(\lambda - a(D))u = 0$. Por isso

$$\langle u, (\lambda - a(D)^*)g\rangle = \langle(\lambda - a(D))u, g\rangle = 0, \; \forall\, g \in D(a(D)^*),$$

de onde concluímos que $\sigma_r(a(D)^*) = \mathbb{C}$.

Mostremos agora que $\sigma_p(a(D)) = \emptyset$. Para tanto, notemos que $(\lambda - a(D))u = 0$ implica em $u(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\beta_j x}$, para $A_j \in \mathbb{C}$ e $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ as raízes de (5.2.5) [2]. Entretanto, para que seja $u \in H_0^{s+m}(I)$, devemos ter $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$ nulas na fronteira de I. Como, para cada $l \in \mathbb{N}$, tem-se

$$u^{(l)}(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j \beta_j^l e^{\beta_j x},$$

escrevendo $I = (b, c)$, obtemos os seguintes sistemas de equações

$$\begin{aligned}
u(b) &= \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\beta_j b} = 0\\
u'(b) &= \sum_{j=1}^{m} A_j \beta_j e^{\beta_j b} = 0\\
&\vdots\\
u^{m-1}(b) &= \sum_{j=1}^{m} A_j \beta_j^{m-1} e^{\beta_j b} = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u(c) &= \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\beta_j c} = 0\\
u'(c) &= \sum_{j=1}^{m} A_j \beta_j e^{\beta_j c} = 0\\
&\vdots\\
u^{m-1}(c) &= \sum_{j=1}^{m} A_j \beta_j^{m-1} e^{\beta_j c} = 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo-os, nas variáveis A_j's, concluímos que $u \equiv 0$ e, então, $\sigma_p(a(D)) = \emptyset$.

Finalmente, do que provamos aqui em conjunto com as inclusões dadas no teorema anterior, resulta que $\mathbb{C} = \sigma_r(a(D)^*) \subset \sigma_p(a(D)) \cup \sigma_c(a(D)) = \sigma_c(a(D))$, donde $\sigma_c(a(D)) = \mathbb{C}$, completando a demonstração. $\square$

[2] Aqui vale comentário análogo ao realizado acima na prova de que $\sigma_p(a(D)^*) = \varnothing$.

Enfatizamos que, na prova do teorema acima, foi a estrutura algébrica do domínio $H_0^{s+m}(I)$ de $a(D)$ a responsável pelo aniquilamento do espectro pontual $\sigma_p(a(D))$.

Notemos também que não foi necessário calcular o espectro residual $\sigma_r(a(D))$, pois demonstramos que $\sigma_c(a(D)) = \mathbb{C}$, não sobrando espaço para $\sigma_r(a(D))$. Entretanto, podemos concluir diretamente que $\sigma_r(a(D)) = \emptyset$, por meio de um argumento bastante simples, e interessante, que a seguir explicamos:

Fixado $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se que $\lambda \notin \sigma_p(a(D)) = \emptyset$, portanto $\lambda - a(D)$ é injetor. Agora, consideremos $f \in H_c^{-s}(I)$ satisfazendo

$$\langle f, \lambda\phi - a(D)\phi \rangle = 0, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(I).$$

Com isso,

$$\langle f, a(D)\phi \rangle = \langle f, \lambda\phi \rangle, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(I),$$

o que nos dá que $f \in D(a(D)^*) = H_c^{-s+m}(I)$ e, além disso,

$$\langle \lambda f, \phi \rangle = \int_I (\lambda f) \cdot \phi = \int_I f \cdot a(D)(\phi) = \langle a(D)^* f, \phi \rangle, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(I),$$

o que quer dizer que $a(D)^* f = \lambda f$ e, então, do que foi feito no estudo do espectro pontual de $a(D)^*$, resulta que $f = 0$, demonstrando que $\overline{R(\lambda - a(D))} = H_{loc}^s(I)$, segundo o Teorema 2.1.7, portanto $\sigma_r(a(D)) = \emptyset$.

5.2.1 Fecho de um OD com dual elítico

Determinemos agora o fecho de um operador diferencial linear com coeficientes constantes $a(D)$ de ordem $m \geq 1$, em $H_{loc}^s(I)$, o que nos permitirá obter uma análise mais refinada do seu espectro, no sentido de podermos mapear o deslocamento dos valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ a medida que fechamos os operadores.

Primeiramente, construiremos uma sequência conveniente de funções que será a principal ferramenta para o cálculo do operador fecho (confira (BREZIS, 2011) para sua inspiração).

Seja $I = (a, b)$ um intervalo. Dada uma função $f \in L_{loc}^p(I)$, $1 \leq p < \infty$, consideremos sua extensão nula

$$f_e(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in I \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus I, \end{cases}$$

a qual está em $L_{loc}^p(\mathbb{R} \setminus \partial I)$.

Agora, tomemos uma sequência de intervalos abertos limitados $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $I_j = (a_j, b_j)$, com $I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, $\overline{I_j} \subset I_{j+1}$ e $d(I_j, \mathbb{R} \setminus I) \geq 2/j$.

Nessas condições, ponhamos $g_j := \chi_{I_j} \cdot f_e$ [3] e $f_j := \phi_j \star g_j$, em que χ_{I_j} é a função característica de I_j e $\phi_j \in C_c^\infty(-1/j, 1/j)$ com $\phi_j \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} \phi_j = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Notemos que, em particular, $f_j \in C_c^\infty(I)$.

Dada uma $u \in H_{loc}^{s+m}(I)$, com $m \geq 1, s \geq 0$, consideremos $u = f$ na construção acima e, então, $u_j \doteq \phi_j \star g_j$, sendo $g_j \doteq \chi_{I_j} u_e$.

Sabemos que, para todo $1 \leq k \leq m$, $u_j^{(k)} = \phi_j \star g_j^{(k)}$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e, por isso, dada a ordem m de a, precisamos encontrar as derivadas $g_j', g_j'', \ldots, g_j^{(m)}$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Observação 4. Aqui utilizamos a notação $g^{(k)}$ para $k-$ésima derivada ao invés de $\frac{d^k g}{dx^k}$ para não sobrecarregar a notação.

Para isso, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e calculemos

$$\begin{aligned}\langle g_j', \psi\rangle = -\langle g_j, \psi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} g_j(x)\psi'(x)dx = -\int_{I_j} u_e(x)\psi'(x)dx = \\ = -\int_{I_j} u(x)\psi'(x)dx.\end{aligned}$$

Como $u\,|_{I_j} \in H^{s+m}(I_j) \subset H^m(I_j) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I_j})$, segue que

$$(\psi u)' = \psi' u + \psi u' \text{ em } C(I_j) \Longleftrightarrow \psi' u = (\psi u)' - \psi u' \text{ em } C(I_j), \tag{5.2.6}$$

e com isso

$$\begin{aligned}\langle g_j', \psi\rangle &= -\int_{I_j} [(u(x)\psi(x))' - u'(x)\psi(x)]dx \\ &= \int_{I_j} [u'(x)\psi(x) - (u(x)\psi(x))']dx = \\ &= \int_{I_j} u'(x)\psi(x)dx - [\psi(x)u(x)]|_{\partial I_j} \\ &= \langle \chi_{I_j} \cdot u', \psi\rangle - [\psi(x)u(x)]\,|_{\partial I_j} \\ &= \langle \chi_{I_j} \cdot u', \psi\rangle - u(b_j)\langle \delta_{b_j}, \psi\rangle + u(a_j)\langle \delta_{a_j}, \psi\rangle,\end{aligned}$$

donde $g_j' = \chi_{I_j} \cdot u' - u(b_j)\delta_{b_j} + u(a_j)\delta_{a_j}$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Repetindo o argumento acima para $\chi_{I_j} \cdot u'$ podemos concluir que

$$g_j'' = \chi_{I_j} \cdot u'' + u'(a_j)\delta_{a_j} - u'(b_j)\delta_{b_j} + u(a_j)\delta_{a_j}' - u(b_j)\delta_{b_j}'.$$

Lembrando agora as notações de translação $(\tau_h \psi)(x) = \psi(x-h)$ e reflexão $(r\psi)(x) = \psi(-x)$, podemos escrever

$$(\delta_p \star \psi)(x) = \langle \delta_p, \tau_x(r\psi)\rangle = [\tau_x(r\psi)](p) = (r\psi)(p-x) = \psi(x-p) = (\tau_p \psi)(x),$$

[3] Note que, aqui, teremos $g_j \in L^p(\mathbb{R})$, qualquer que seja o natural j.

ou seja, para quaisquer $x,p\in\mathbb{R}$ tem-se

$$(\delta_p\star\psi)(x)=\psi(x-p).$$

Juntando tudo segue que

$$\begin{aligned}u_j''=\phi_j\star g_j''=\phi_j\star[u''\mid_{I_j}+u'(a_j)\delta_{a_j}-u'(b_j)\delta_{b_j}+u(a_j)\delta_{a_j}-u(b_j)\delta_{b_j}]=\\=\phi_j\star[\chi_{I_j}u'']+u'(a_j)[\phi_j\star\delta_{a_j}]-u'(b_j)[\phi_j\star\delta_{b_j}]+u(a_j)[\phi_j\star\delta_{a_j}']-u(b_j)[\phi_j\star\delta_{b_j}']=\\=\phi_j\star[\chi_{I_j}u'']+u'(a_j)\phi_j(\cdot-a_j)-u'(b_j)\phi_j(\cdot-b_j)+u(a_j)\phi_j'(\cdot-a_j)-u(b_j)\phi_j'(\cdot-b_j).\end{aligned}$$

Para o caso geral, usamos a indução finita. Supondo que

$$g_j^{(k)}=\chi_{I_j}\cdot u^{(k)}+\sum_{l=0}^{k-1}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(k-1-l)}-u^{(l)}(b_j),\delta_{b_j}^{(k-1-l)}\right)$$

com $k\leq m-1$, temos

$$g_j^{(k+1)}=[\chi_{I_j}\cdot u^{(k)}]'+\sum_{l=0}^{k-1}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(k-l)}-u^{(l)}(b_j)\delta_{b_j}^{(k-l)}\right).$$

Denotando $h_j\doteq\chi_{I_j}\cdot u^{(k)}\in H^{s+m-k}(I_j)$, a sentença (5.2.6) é válida em $C^{m-k-1}(I_j)$ e podemos proceder como na primeira derivada de g_j, assim

$$h_j'=\chi_{I_j}\cdot u^{(k+1)}+u^{(k)}(a_j)\delta_{a_j}-u^{(k)}(b_j)\delta_{b_j}.$$

Unindo as igualdades obtemos

$$g_j^{(k+1)}=\chi_{I_j}\cdot u^{(k+1)}+\sum_{l=0}^{k}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(k-l)}-u^{(l)}(b_j)\delta_{b_j}^{(k-l)}\right)$$

Assim

$$\begin{aligned}u_j^{(k)}=\phi_j\star g_j^{(k)}=\phi_j\star\left[\chi_{I_j}\cdot u^{(k)}+\sum_{l=0}^{k-1}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(k-1-l)}-u^{(l)}(b_j)\delta_{b_j}^{(k-1-l)}\right)\right]=\\=\phi_j\star[\chi_{I_j}u^{(k)}]+\sum_{l=0}^{k-1}\left\{u^{(l)}(a_j)[\phi_j\star\delta_{a_j}^{(k-1-l)}]-u^{(l)}(b_j)[\phi_j\star\delta_{b_j}^{(k-1-l)}]\right\}=\\=\phi_j\star[\chi_{I_j}u^{(k)}]+\sum_{l=0}^{k-1}\left\{u^{(l)}(a_j)\phi_j^{(k-1-l)}(\cdot-a_j)-u^{(l)}(b_j)\phi_j^{(k-1-l)}(\cdot-b_j)\right\}.\end{aligned}$$

Neste ponto, é fundamental que demonstremos o seguinte

Lema 4. Dada $u\in H_{loc}^{s+m}(I)$ com $m\geq 1$ e $s\in\mathbb{N}$, para cada $0\leq k\leq m$, as sequências de funções

$$\left(u^{(l)}(a_j)\phi_j^{(k-l)}(\cdot-a_j)\right)_{j\in\mathbb{N}}\text{ e }\left(u^{(l)}(b_j)\phi_j^{(k-l)}(\cdot-b_j)\right)_{j\in\mathbb{N}},$$

em que $0\leq l\leq k-1$, convergem para zero em $H_{loc}^{s}(I)$ quando $j to\infty$.

Demonstração. Apresentemos a prova para o caso $m=2$, para os outros casos a prova é análoga.

Dada $\phi \in C_c^\infty(I)$, como $\phi(\cdot)u'(a_j)\phi_j(\cdot - a_j) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, provaremos que $\phi(\cdot)u'(a_j)\phi_j(\cdot - a_j)$ converge para 0 na topologia de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, pois sabendo que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R})$, seguirá daí que a sequência converge para 0 em $H^s(\mathbb{R})$ e, consequentemente, $u'(a_j)\phi_j(\cdot - a_j)$ converge para 0 em $H^s_{loc}(\mathbb{R})$.

Observemos que

$$\frac{d^k}{dx^k}[\phi(x)u'(a_j)\phi_j(x-a_j)] = u'(a_j)\sum_{l=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array}\right)\frac{d^{k-l}\phi}{dx^{k-l}}(x)\frac{d^l\phi_j}{dx^l}(x-a_j)$$

para $k \in \mathbb{N}$, dessa forma basta provar que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^N|\phi^{(k-l)}(x)\phi_j^{(l)}(x-a_j)| \to 0, \text{ quando } j \to \infty,$$

para $N \in \mathbb{N}$, daí seguirá que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^N\left|\frac{d^k}{dx^k}[\phi(x)u'(a_j)\phi_j(x-a_j)]\right| \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Para tanto, observemos que supp $\phi \subset I$ é compacto e então $d(\text{supp } \phi, a) > 0$. Por outro lado, supp $\phi_j(\cdot - a_j) \subset B_{1/j}(a_j)$ então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{1/j}(a_j) \cap \text{supp } \phi = \emptyset$.

Logo,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^N\left|\phi^{(k-l)}(x)\phi_j^{(l)}(x-a_j)\right| = 0, \text{ para } j \geq j_0$$

e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^N\left|\frac{d^k}{dx^k}[\phi(x)u'(a_j)\phi_j(x-a_j)]\right| \leq \left|u'(a_j)\right|\sum_{l=0}^{k}\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^N\left|\phi^{(k-l)}(x)\phi_j^{(l)}(x-a_j)\right| = 0$$

para $j \geq j_0$ e a convergência segue.

A prova para as outras sequências é feita de forma análoga. □

Lema 5. Se $h \in H^s_{loc}(I)$, com $s \in \mathbb{Z}_+$, então $h_j \doteq \phi_j \star (\chi_{I_j}h_e) \in C_c^\infty(I), j \in \mathbb{N}$, converge para h em $H^s_{loc}(I)$.

Demonstração. Primeiramente provemos que este lema é válido para $s=0$, ou seja, que se $h \in L^2_{loc}(I)$, então $h_j = \phi_j \star (\chi_{I_j}h_e)$ converge para h em $L^2_{loc}(I)$.

De fato, para $h \in L^2_{loc}(I)$ e φ_l função teste proveniente de uma seminorma de $L^2_{loc}(I)$ tem-se

$$\|\varphi_l h - \varphi_l h_j\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi_l h_e - \varphi_l h_j\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|h_e - h_j\|_{L^2(I_{l+1})},$$

em que $C > 0$ é uma constante que depende da função teste φ_l.

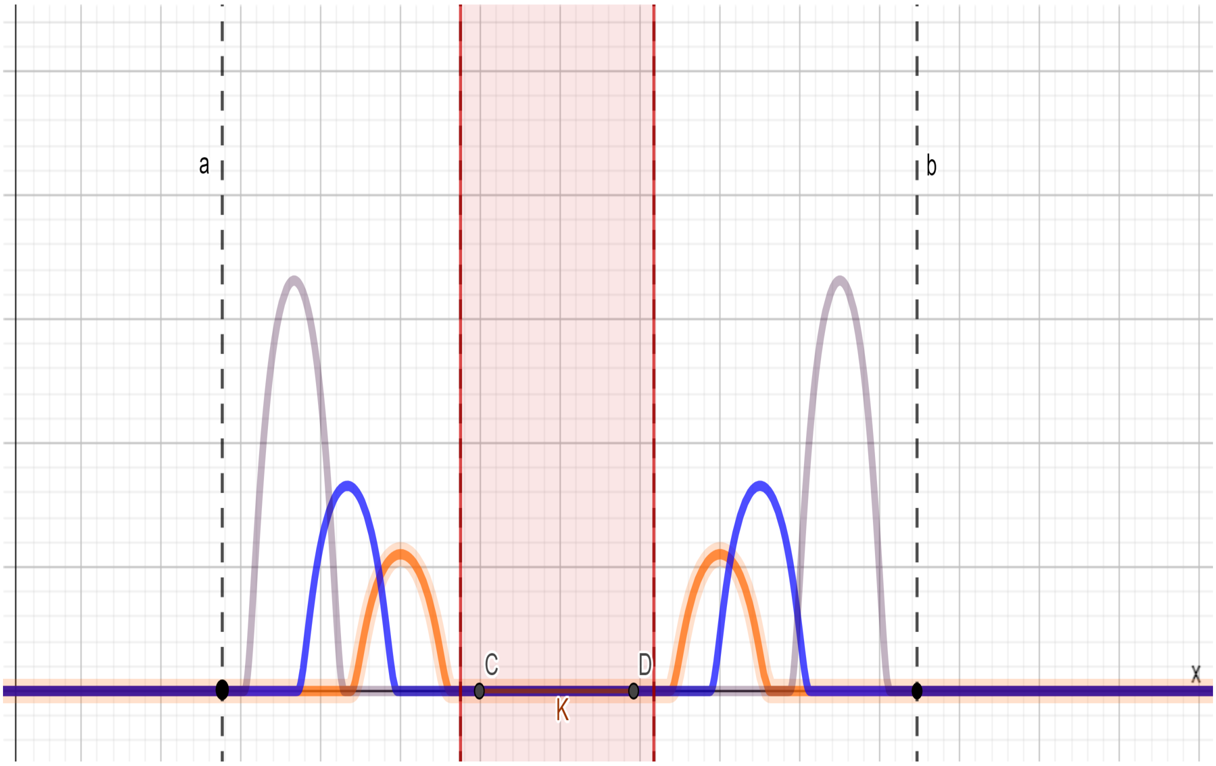

Figura 1 – Sequência de Funções do Lema 4

Além disso, para j suficientemente grande de forma que $I_{l+1}+B_{1/j}\subset I_{l+2}$ e $I_{l+2}\subset I_j$ vale

$$h_e(x)-h_j(x)=\int_{B_{1/j}}\phi_j(y)dyh_e(x)-\int_{B_{1/j}}\phi_j(y)\chi_{I_j}(x-y)h_e(x-y)dy$$
$$=\int_{B_{1/j}}\phi_j(y)(h_e(x)-h_e(x-y))dy.$$

Por um lado, notemos que $\phi_j(y)(h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y))\in L^2(I_{l+1})$ para todo $y\in B_{1/j}$ e $\phi_j(\cdot)\big(h_e(x)-h_e(x-\cdot)\big)\in L^2(I_{1/j})$ para todo $x\in I_{l+1}$, daí pela Desigualdade de Minkowski para Integrais segue que

$$\|h_e-h_j\|_{L^2(I_{l+1})}\leq\int_{B_{1/j}}|\phi_j(y)|\|h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}dy=$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\phi_j(y)\chi_{B_{1/j}}(y)\|h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}dy.$$

Além do mais, vale que

$$\|h_e(\cdot)\|_{L^2(I_{l+1})}=\|h\|_{L^2(I_{l+1})}\leq\|h\|_{L^2(I_{l+2})}$$

e

$$\|h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}=\left(\int_{I_{l+1}+B_{1/j}}|h_e(z)|^2dz\right)^{1/2}\leq\left(\int_{I_{l+2}}|h_e(z)|^2dz\right)^{1/2},$$

ou seja, $\|h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}\leq 2\|h\|_{L^2(I_{l+2})}$, com $\phi_j(y)\chi_{B_{1/j}}(y)\|h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}$ convergindo para zero quando $j\to\infty$ q.t.p. $y\in\mathbb{R}$.

Vale também que

$$\phi_j(y)\chi_{B_{1/j}}(y)\|h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}\leq \chi_{(-1,1)}(y)2\|h_e\|_{L^2(I_{l+2})}\in L^1(\mathbb{R}),$$

para todo $y\in\mathbb{R}$.

Logo, do Teorema da Convergência Dominada, resulta que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\phi_j(y)\chi_{B_{1/j}}(y)\|h_e(\cdot)-h_e(\cdot-y)\|_{L^2(I_{l+1})}dy=0.$$

Unindo os fatos, dado $\varepsilon>0$, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_l h-\varphi h_j\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq C\|h_e-h_j\|_{L^2(I_{l+1})}\leq C\varepsilon,$$

para $j\geq j_0$ e a convergência em $L^2_{loc}(I)$ esta provada.

Agora para $h\in H^k_{loc}(I)$ com $k\in\mathbb{N}$ segue que $\frac{d^rh}{dx^r}\in L^2_{loc}(I)$ para $0\leq r\leq k$ e, da primeira parte da prova, que $\phi_j\star\left[\chi_{I_j}\left(\frac{d^rh}{dx^r}\right)_e\right]$ converge para $\frac{d^rh}{dx^r}$ na topologia de $L^2_{loc}(I)$.

Observemos que

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[\phi_j\star(\chi_{I_j}h_e)\right]=\phi_j\star\left[\frac{d^r}{dx^r}(\chi_{I_j}h_e)\right]$$

e

$$\frac{d^r}{dx^r}(\chi_{I_j}h_e)=\chi_{I_j}\left(\frac{d^rh}{dx^r}\right)_e+\sum_{l=0}^{r-1}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(r-1-l)}-u^{(l)}(b_j)\delta_{b_j}^{(r-1-l)}\right).$$

Do lema anterior, a soma $\sum_{l=0}^{r-1}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(r-1-l)}-u^{(l)}(b_j)\delta_{b_j}^{(r-1-l)}\right)$ converge para 0 em $L^2_{loc}(I)$, portanto $\frac{d^r}{dx^r}\left[\phi_j\star(\chi_{I_j}h_e)\right]=$

$$=\phi_j\star\left[\frac{d^r}{dx^r}(\chi_{I_j}h_e)\right]=\phi_j\star\left[\chi_{I_j}\left(\frac{d^rh}{dx^r}\right)_e+\sum_{l=0}^{r-1}\left(u^{(l)}(a_j)\delta_{a_j}^{(r-1-l)}-u^{(l)}(b_j)\delta_{b_j}^{(r-1-l)}\right)\right]$$

e assim para cada $1\leq r\leq k$ vale

$$L^2_{loc}(I)-\lim_{j\to\infty}\frac{d^r}{dx^r}\left[\phi_j\star(\chi_{I_j}h_e)\right]=\frac{d^rh}{dx^r},$$

ou seja, $h_j=\phi_j\star(\chi_{I_j}h_e)$ converge para h em $H^k_{loc}(I)$.

□

Teorema 5.2.5. Se $a(D):H_0^{s+m}(I)\subset H^s_{loc}(I)\to H^s_{loc}(I)$ é um operador diferencial elítico com coeficientes constantes definido por $\sum_{j=1}^m(-2\pi i)^ka_ku^{(k)}$, com $s\in\mathbb{Z}_+$, então seu fecho é dado por

$$\begin{array}{rcl}\overline{a(D)}:H^{s+m}_{loc}(I)\subset H^s_{loc}(I) & \longrightarrow & H^s_{loc}(I)\\ u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^m(-2\pi i)^ka_ku^{(k)}.\end{array}$$

Demonstração. Com efeito, seja $\overline{a(D)} : D\left[\overline{a(D)}\right] \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow H^s_{loc}(I)$ o fecho do operador $a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H^s_{loc}(I) \longrightarrow H^s_{loc}(I)$, em que

$$D\left[\overline{a(D)}\right] = \left\{u \in H^s_{loc}(I);\ \exists\, (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H_0^{s+m}(I) \text{ e } f \in H^s_{loc}(I) \text{ t.q. } u_n \xrightarrow{H^s_{loc}} u \text{ e } a(D)u_j \xrightarrow{H^s_{loc}} f\right\}.$$

Da definição de $D\left[\overline{a(D)}\right]$, segue imediatamente que $D\left[\overline{a(D)}\right] \subset H^{s+m}_{loc}(I)$, pois toda $u \in D\left[\overline{a(D)}\right]$ é limite H^s_{loc} de uma sequência de funções H_0^{s+m} e, além disso, $u_n \xrightarrow{H^s_{loc}} u$ e $a(D)u_n \xrightarrow{H^s_{loc}} f$ implicam que $a(D)u = f$ em $\mathscr{D}'(I)$ e, sendo $a(D)$ elítico, $u \in H^{s+m}_{loc}(I)$.

Por outro lado, para toda $u \in H^{s+m}_{loc}(I)$, tem-se que $f \doteq a(D)u \in H^s_{loc}(I)$. Daí, se tomarmos $u_n = \varphi_n \star (\chi_{I_n} u_e)$, $n \in \mathbb{N}$, do que demonstramos anteriormente, o teorema segue. $\square$

Ressaltamos que, para os propósitos deste trabalho, não foi possível aplicar as sequências utilizadas em (BREZIS, 2011) para provar a densidade nos espaços de Sobolev. No caso das sequências construídas para os espaços de Sobolev, para $u \in H^m(I)$ se $I = (a,b)$ estende-se da seguinte forma

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} \tilde{u}(x) = u(x), \text{ para } x \in I, \\ \tilde{u}(x) = 0, \text{ para } x > b, \end{cases}$$

ou seja, $\tilde{u} \in H^m(a,+\infty)$ e então

$$u^\#(x) := \begin{cases} u^\#(x) = \tilde{u}(x), \text{ se } x > a, \\ u^\#(x) = \tilde{u}(2a - x), \text{ se } x < a, \end{cases}$$

daí $u^\# \in H^m(\mathbb{R})$. Posteriormente, usa-se a extensão $u^\# \in H^m(\mathbb{R})$ fazendo a convolução com a sequência regularizante ρ_n[4] e corta-se com funções teste $\zeta_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\zeta_n = 1$ em $B_n(0)$ e supp $\zeta_n \subset B_{n+1}(0)$, daí prova-se que $u_n \doteq [\zeta_n(\rho_n \star u^\#)]\,|_I$ converge para u em $H^m(I)$.

No caso dos espaços $H^m(I)$ temos que $H^m_0(I) = \overline{C_c^\infty(I)}$, que, em geral, é um subespaço próprio de $H^m(I)$, no entanto foi preciso provar a convergência das sequências nos espaços $H^m_{loc}(I)$ e, como podemos ver no Lema 5, a topologia destes espaços é decisiva para nossa prova. Logo, foi possível adaptar as sequências utilizadas para provar a densidade das funções teste nos espaços $L^p(I)$, que facilitam o trabalho quando lidamos com derivadas de ordem mais alta em comparação com as sequências utilizadas para os espaços de Sobolev em (BREZIS, 2011) sendo que estas sequências podem alterar o suporte pela reflexão realizada na extensão $u^\#$ e a topologia de $H^m_{loc}(I)$ trabalha com funções teste com suporte em I.

Na verdade, as sequências construídas aqui foram inspiradas pelas que são apresentadas em (BREZIS, 2011) na prova da densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

4 A sequência em questão tem as seguintes propriedades $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$ e supp $\rho_n \subset B_{1/n}(0)$.

5.2.2 Espectro do Laplaciano na Topologia de L^2_{loc}

Nesta seção, aplicamos os resultados obtidos na anterior para o laplaciano. A característica principal que permite essas aplicações é o fato de que, para o laplaciano, tem-se que tanto ele quanto seu operador dual são operadores elíticos [5].

Primeiramente, sendo $\Delta u = u''$, do que vimos acima, resulta que $\Delta^* g = g'' = \Delta g$. Além disso, sendo $D(\Delta) = H_0^2(I)$, tem-se que $D(\Delta^*) = H_c^2(I)$ (aqui usamos $s = 0$).

Por outro lado, sendo o símbolo de Δ, também o de Δ^*, que é a função $a(\xi) = -4\pi^2\xi^2$, tomando $C = 4\pi^2$ temos que

$$|a(\xi)| = 4\pi^2\xi^2 \geq C|\xi|^2$$

e, da Definição 2.7.15, segue que Δ e Δ^* são elíticos.

As conclusões desta seção ficam então resumidas no seguinte corolário.

Corolário 2. O operador de Laplace, visto como operador pseudodiferencial

$$\Delta : H_0^2(0,\pi) \subset L^2_{loc}(0,\pi) \longrightarrow L^2_{loc}(0,\pi)$$

e seu adjunto

$$\Delta^* : H_c^2(0,\pi) \subset L_c^2(0,\pi) \longrightarrow L_c^2(0,\pi),$$

ambos têm conjunto resolvente vazio e seus tipos de espectros ficam classificados como:

$$\begin{aligned}
\sigma_p(\Delta) &= \sigma_p(\Delta^*) = \emptyset \\
\sigma_r(\Delta) &= \sigma_c(\Delta^*) = \emptyset, \\
\sigma_c(\Delta) &= \sigma_r(\Delta^*) = \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Este corolário segue imediatamente da eliticidade de Δ e de Δ^* em conjunto com o Teorema 5.2.4.

□

Finalmente, podemos lançar mão dos resultados obtidos para o operador Δ juntamente com o Teorema 5.2.5 para fazermos uma análise mais refinada do seu espectro.

Do Teorema 5.2.5, com $s = 0$, sendo Δ elítico com adjunto Δ^* também elítico, segue que $D\left[\overline{\Delta}\right] = H^2_{loc}(I)$ e

$$\overline{\Delta} : H^2_{loc}(I) \subset L^2_{loc}(I) \longrightarrow L^2_{loc}(I)$$

[5] Ele possui um caráter "auto-adjunto" também neste contexto dos operadores pseudo-diferenciais.

é dado por $\overline{\Delta}u = u''$, para $u \in H^2_{loc}(I)$.

Denotemos por Δ_{L^2} o Laplaciano definido no seguinte domínio

$$\Delta_{L^2} : H^1_0(I) \cap H^2(I) \subset L^2_{loc}(I) \longrightarrow L^2_{loc}(I).$$

Notemos que, sendo $H^2_0(I) \subset H^1_0(I) \cap H^2(I)$, resulta que $\overline{\Delta} = \overline{\Delta_{L^2}}$. Além do mais, seu espectro pontual, $\sigma_p(\Delta_{L^2})$, é o mesmo calculado quando o consideramos com a topologia de $L^2(I)$, ou seja, $\sigma_p(\Delta_{L^2}) = \left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l(I)^2}; n \in \mathbb{N}\right\}$, em que $l(I)$ indica o comprimento de I, como demonstrado no capítulo introdutório no caso $I = (0, \pi)$.

Calculemos agora $\sigma_p(\overline{\Delta})$. Temos que $\lambda \in \sigma_p(\overline{\Delta})$ quando $u'' = \lambda u$, para alguma $u \in H^2_{loc}(I)$ não nula. Como feito anteriormente, se este é o caso, $u(x) = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_2 x}$, em que $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ são constantes e β_1 e β_2 são as raízes de $p(\xi) = \lambda - \xi^2$, $\xi \in \mathbb{R}$. Daí, segue que qualquer complexo λ é autovalor de $\overline{\Delta}$.

Do Teorema 2.2.5 temos que $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_{L^2}) = \sigma(\overline{\Delta}) = \mathbb{C}$, portanto

$$\sigma_p(\Delta) = \emptyset, \;\; \sigma_r(\Delta) = \emptyset, \;\; \sigma_c(\Delta) = \mathbb{C},$$

$$\sigma_p(\Delta_{L^2}) = \left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l(I)^2}; n \in \mathbb{N}\right\}, \;\; \sigma_r(\Delta_{L^2}) = \emptyset, \;\; \sigma_c(\Delta_{L^2}) = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l(I)^2}; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\sigma_p(\overline{\Delta}) = \mathbb{C}, \;\; \sigma_r(\overline{\Delta}) = \emptyset, \;\; \sigma_c(\overline{\Delta}) = \emptyset.$$

A tabela abaixo resume, de um modo bem didático, os resultados obtidos para o operador de Laplace.

Tabela 1 – Evolução do Espectro do Laplaciano

	Δ	Δ_{L^2}	$\overline{\Delta}$
Pontual	$\emptyset$	$\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l(I)^2}; n \in \mathbb{N}\right\}$	$\mathbb{C}$
Residual	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Contínuo	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l(I)^2}; n \in \mathbb{N}\right\}$	$\emptyset$

A partir de tudo o que foi feito aqui, concluímos que a topologia adotada, influenciou diretamente na extinção dos resolventes de Laplaciano em todos os níveis considerados, pois, como podemos ver, em todos os casos o espectro contínuo absorve quaisquer dos escalares não contemplados pelo espectro pontual. Notemos ainda que, também em todos os casos, o espectro residual não se mostra um obstáculo.

O método utilizado para o cálculo do espectro demonstra que o espectro residual do operador dual está absorvendo todos os escalares, pois os espaços $H^s_{loc}(I)$ permitem soluções exponenciais $u(x) = e^{\xi_0 x}$. Observemos também que o fator decisivo no cálculo do espectro pontual é meramente a natureza algébrica do operador e do seu domínio.

Sendo assim, neste estudo descobrimos, ao mesmo tempo, duas coisas:

(1) Que a formulação mais natural de espectro para operadores diferenciais não é eficiente quando queremos utilizar esta análise para geração de semigrupos, já que não há conjunto resolvente, sugerindo que as ideias usuais não podem ser adaptadas.

(2) As maiores dificuldades que não permitiram que esta noção de espectro fosse coerente com nossos objetivos, que era o de, a princípio, demonstrar a não conexidade do espectro de Δ na escala $H^s_{loc}(I)$.

Dito isso, surgem duas possibilidades para tentar contornar estes obstáculos em estudos futuros, a saber:

(1) Formular uma nova definição de resolvente de maneira que a aplicação

$$\rho(a(D)) \ni \lambda \mapsto (\lambda - a(D))^{-1}u \in X$$

seja contínua e possamos integrá-la ao longo de caminhos suaves;

(2) Comprovar que a separação do espectro não tem ligação alguma com a dicotomia exponencial para operadores lineares em espaços de Fréchet, demonstrando que algum tipo de dicotomia (ou algum decaimento exponencial) ocorra para Δ em $L^2_{loc}(I)$, nos termos sugeridos por (COSTA, 2019).

CAPÍTULO

6

ESTUDOS FUTUROS E DIFICULDADES ENCONTRADAS

6.1 Fecho de Um OD em todas as escalas de espaços de Sobolev

Pretendemos desenvolver mais ferramentas para tentar estender o Lema 5 e, então, podermos calcular o fecho de um ODCC para todas as escalas de espaço de Sobolev $H^s_{loc}(I)$, com $s \in \mathbb{R}$ qualquer. O objetivo, com isso, seria demonstrar um teorema como o seguinte:

Teorema 6.1.1. Se $a(D) : H_0^{s+m}(I) \subset H^s_{loc}(I) \to H^s_{loc}(I)$ é um operador diferencial elítico com coeficientes constantes, definido por $\sum_{j=1}^{m}(2\pi i)^k a_k u^{(k)}$, e $s \in \mathbb{R}$ é qualquer, então seu fecho é dado por

$$\begin{aligned} \overline{a(D)} : H^{s+m}_{loc}(I) \subset H^s_{loc}(I) &\longrightarrow H^s_{loc}(I) \\ u &\longmapsto \sum_{j=1}^{m}(2\pi i)^k a_k u^{(k)}. \end{aligned}$$

6.2 Espectro de ODs que Comutam com translações e rotações

Além do teorema da seção anterior, esperamos também ser capazes de estender nossos resultados para operadores que possuem comportamento similar ao Laplaciano, o que encontra lugar no seguinte teorema de (FOLLAND, 1999, pg. 274).

Teorema 6.2.1. Um operador diferencial linear $a(D)$ satisfaz $a(D)(f \circ T) = [a(D)(f)] \circ T$, para T qualquer translação ou rotação T, se, e somente se, existe um polinômio (com coeficientes constantes) em uma variável $p(\cdot)$ tal que $a(D) = p(\Delta)$ em que Δ é o operador Laplaciano.

Por rotação estamos nos referindo a uma aplicação linear $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $TT^* = Id$, em que T^* é aplicação linear transposta de T e Id é a identidade. Daí, se possível for, obteremos o seguinte resultado.

Teorema 6.2.2. Seja $a(D): H_0^{2m+s}(I) \subset H_{loc}^s(I) \longrightarrow H_{loc}^s(I)$ um operador diferencial linear que satisfaz $a(D)(f\circ T) = a(D)(f)\circ T$ em que T é uma translação ou rotação. Então $\sigma(a(D)) = \mathbb{C}$ e, mais precisamente, classificamos seu espectro da seguinte forma

Tabela 2 – Espectro de Operadores do Tipo Laplaciano

	$a(D)$	$a(D)_{L^2}$	$\overline{a(D)}$
Pontual	$\emptyset$	$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\mathbb{C}$
Residual	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Contínuo	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\setminus(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\emptyset$

.

Sendo que $\overline{a(D)}$ é o fecho de $a(D)$ e $a(D)_{L^2}$ é dado por

$$a(D)_{L^2}: H_0^{2m-1}(I)\cap H^{2m}(I) \subset L_{loc}^2(I) \longrightarrow L_{loc}^2(I)$$

$a(D)_{L^2}u = a(D)u, u \in H_0^{2m-1}(I)\cap H^{2m}(I)$.

Em que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência a ser calculada a partir do operador $a(D)$ em questão, supostamente seu espectro pontual.

6.3 Considerações Finais Sobre os Resultados Obtidos

Nesta última seção fazemos alguns comentários sobre os resultados obtidos para $\sigma_p(\Delta)$, $\sigma_r(\Delta)$ e $\sigma_c(\Delta)$ e exibimos algumas de nossas tentativas a fim de obtê-los.

Observemos que não é possível proceder como no Exemplo 2.6.3, porque não temos a compacidade do operador

$$\Delta^{-1}: R(\Delta) \subset L_{loc}^2(0,\pi) \longrightarrow L_{loc}^2(0,\pi), \tag{6.3.1}$$

em que $R(\Delta) = \Delta\left(H_0^2(0,\pi)\right) = \left\{u'',\ u \in H_0^2(0,\pi)\right\}$.

Com efeito, caso este operador fosse compacto, sendo $\overline{R(\Delta)} = L_{loc}^2(0,\pi)$, pois $\sigma_r(\Delta) = \emptyset$, a suposta compacidade de Δ^{-1}, nos daria também sua continuidade. Resumindo, obteríamos que Δ é injetor com $\overline{R(\Delta)} = L_{loc}^2(0,\pi)$ e

$$\Delta^{-1}: R(\Delta) \subset L_{loc}^2(0,\pi) \longrightarrow L_{loc}^2(0,\pi)$$

contínua, ou seja, $0 \in \rho(\Delta)$, contradizendo o fato de que $\sigma(\Delta) = \mathbb{C}$ e assim Δ^{-1} definido em (6.3.1) não pode ser compacto.

Este fato, muito possivelmente, resulta das novas vizinhanças da origem que precisamos considerar quando trocamos a topologia de L^2 pela L^2_{loc} para realizar nosso estudo (surgem muito mais abertos).

Comentamos agora algumas tentativas frustradas para obter $\sigma_c(\Delta)$ que ilustram as dificuldades encontradas e comprovam a complexidade dos nossos problemas.

Sabemos que $L^2_{loc}(0,\pi) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} L^2(a_j,b_j)$, (limite projetivo) em que $[a_j,b_j] \subset (a_{j+1},b_{j+1})$ e $(0,\pi) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_j,b_j)$, portanto é natural procurar estudar as restrições $\Delta_j \doteq \Delta\mid_{(a_j,b_j)}$ e tentar utilizar os resultados conhecidos para $\sigma(\Delta_j)$ nas condições usuais:

$$\Delta_j : H^1_0(a_j,b_j) \cap H^2(a_j,b_j) \subset L^2(a_j,b_j) \longrightarrow L^2(a_j,b_j),\ j \in \mathbb{N}.$$

Nelas, para cada $j \in \mathbb{N}$, vale

$$\left\| (\lambda - \Delta_j)\, u \right\|_{L^2(a_j,b_j)} \geq |\Im\lambda|\, \|u\|_{L^2(a_j,b_j)},\ u \in H^1_0(a_j,b_j) \cap H^2(a_j,b_j), |\Im(\lambda)| > 0.$$

Dito isso, nossa expectativa era poder usar as estimativas acima e, de algum modo, demonstrar que

$$\|(\lambda - \Delta)\, u\|_{L^2(0,\pi)} \geq C \sum_{k=1}^{l} p_k(u),\ u \in H^2_0(0,\pi) \tag{6.3.2}$$

para alguma constante $C > 0$ e $p_1,\ldots,p_l$ seminormas de $L^2_{loc}(0,\pi)$. Sendo $L^2(0,\pi) \hookrightarrow L^2_{loc}(0,\pi)$ concluiríamos que

$$\|f\|_{L^2(0,\pi)} \geq C \sum_{k=1}^{l} p_k\left((\lambda - \Delta)^{-1} f\right),\ f \in R(\Delta),$$

sempre que $|\Im\lambda| > 0$. Procurávamos essas supostas desigualdades para poder concluir a existência de alguns $\lambda \in \mathbb{C}$, com $|\Im\lambda| > 0$, no resolvente de Δ, o que nunca ocorria, como demonstramos no capítulo anterior.

Observemos agora que, para $\phi_j \in C^\infty_c(a_{j+1},b_{j+1})$, com $\phi_j|_{(a_j,b_j)} \equiv 1$, dada $u \in H^2_0(0,\pi)$, segue que $\phi_j u \in H^1_0(a_{j+1},b_{j+1}) \cap H^2(a_{j+1},b_{j+1})$, $\|\phi_j u\|_{L^2(a_{j+1},b_{j+1})} \to \|u\|_{L^2(a_{j+1},b_{j+1})}$ e

$$(\lambda - \Delta)(\phi_j u) = \phi_j[(\lambda - \Delta)u] - (\phi_j' + \phi_j'')u.$$

A grande dificuldade em considerar os cortes acima, consiste em controlar o crescimento das funções ϕ_j' e ϕ_j'' no conjunto $(a_{j+1},a_j) \cup (b_j,b_{j+1})$ (que é a diferença entre os domínios I_{j+1} e I_j), porque à medida que tentamos controlar o crescimento das funções perdemos o controle na medida do domínio em questão.

Uma outra alternativa cogitada para resolvermos o problema foi tentar provar que $H^1_0(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \subset D(\overline{\Delta})$, em que $D(\overline{\Delta}) =$

$$= \left\{ u \in L^2_{loc}(0,\pi);\ \exists\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^2_0(0,\pi),\ u = L^2_{loc} - \lim_{n\to\infty} v_n \text{ e } L^2_{loc} - \lim_{n,m\to\infty}(v_n'' - v_m'') = 0 \right\}$$

e assim poderíamos utilizar o fato de que $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_{L^2}) = \sigma(\overline{\Delta})$.

Com este intuito, dada $u \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ tomamos $v \in C^1[0,\pi]$ com $v = u$ em quase todo ponto e $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0,\pi)$ tal que $\psi_j \to v$, em que a convergência acontece na topologia de $C^1(0,\pi)$.

No entanto, para concluirmos que $(\psi_j'')_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy na topologia de $L^2_{loc}(0,\pi)$ encontramos as mesmas dificuldades apontadas no caso anterior, devido ao fato de a sequência $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ser construída de forma semelhante à da sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ do caso acima.

Destacamos que o cálculo do fecho $\overline{a(D)}$ de um operador $a(D)$, neste texto, só foi possível depois de muita pesquisa e esforço, até encontrarmos a construção de uma sequência conveniente que possibilitasse as conclusões da parte final do capítulo anterior. Vários testes foram realizados até combinarmos a sequência correta com o argumento correto.

REFERÊNCIAS

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. [S.l.: s.n.], 2011. Citado nas páginas 41, 46, 47, 58, 99 e 105.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. **Applied Mathematical Sciences**, p. 182, 2013. Citado nas páginas 67 e 86.

CHAU, T. C.; WONG, M. W.; PI, L. Spectra of pseudo-differential operators on the schwartz space. v. 23, 1993. Citado nas páginas 21, 22, 71, 77 e 86.

COSTA, E. R. A. An extension of the concept of exponential dichotomy in fréchet spaces which is stable under perturbation. **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 18, p. 845–868, 2019. Citado nas páginas 11, 65, 68, 69, 70 e 108.

FOLLAND, G. B. **Introduction to Partial Differential Equations**. [S.l.: s.n.], 1995. Citado nas páginas 58, 62 e 63.

____. **Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications**. [S.l.: s.n.], 1999. Citado nas páginas 26, 27, 29, 30, 31, 32, 52, 53, 60 e 109.

HENRY, D. *Dan Henry's Manuscripts. Universidade de São Paulo, São Paulo*. 2006. Citado nas páginas 21, 60, 67, 70 e 86.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators (4 vols.)**. Berlin: Springer-Verlag, 1963. Citado na página 63.

____. **Linear Partial Differential Operators**. Berlin: Springer-Verlag, 1963. Citado na página 63.

KATO, T. **Perturbation theory for linear operators**. Berlin: Springer-Verlag, 1995. Citado na página 65.

OSBORNE, M. S. **Locally Convex Spaces**. [S.l.: s.n.], 2014. Citado nas páginas 27 e 29.

RUDIN, W. **Functional Analysis**. [S.l.: s.n.], 1921. Citado na página 27.

RUZHANSKY, M.; TURUNEN, V. **Pseudo-Differential Operators and Symmetries**. [S.l.: s.n.], 2000. Citado nas páginas 21 e 55.

TAYLOR, A. E. **Introduction to Functional Analysis**. [S.l.: s.n.], 1958. Citado nas páginas 21, 35, 39, 40, 45 e 48.

TREVES, F. Concatenations of second-order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, p. 201–250, 1973. Citado na página 30.

GLOSSÁRIO

OD: denota o termo Operador Diferencial.

OP: denota o termo Operador Pseudodiferencial.

OPCC: denota o termo Operador Pseudodiferencial com Coeficientes Constantes.

OPs: denota o termo Operadores Pseudodiferenciais.

TVS: denota o termo *Topological Vector Space* que é o termo em inglês para Espaço Vetorial Topológico.

ICMC USP
SÃO CARLOS