UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sobre anéis Tor-compatíveis, módulos livres e produto fibra

Luan Benzi Medeiros

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Luan Benzi Medeiros

Sobre anéis Tor-compatíveis, módulos livres e produto fibra

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
Setembro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

B456s Benzi Medeiros, Luan
Sobre anéis Tor-compatíveis, módulos livres e produto fibra / Luan Benzi Medeiros; orientador Victor Hugo Jorge Pérez. -- São Carlos, 2023.
63 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Álgebra. 2. Álgebra Homológica. I. Jorge Pérez, Victor Hugo, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Luan Benzi Medeiros

On Tor-friendly rings, free modules and fiber product

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
September 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais Maria Aparecida Benzi Medeiros, José Antônio Zingareti de Medeiros e a minha irmã Kariny Benzi Medeiros, por sempre me apoiarem durante todo este trajeto. Os últimos anos não foram fáceis e sem vocês nada disso seria possível.

Agradeço também a minha princesinha Milly, pelo carinho companhia e por todos os momentos felizes juntos.

Agradeço aos meus amigos Rejiane Calixto, Amanda Monteiro, Allan Jukovski e Carlos Magno pelas horas de choradeira e reclamações ao longo de todos esses anos, saibam que vocês tornaram tudo isso tolerável.

Um agradecimento em especial para a Fernanda Andrade da Silva, que sempre me ajudou e apoiou desde a época sofrida do mestrado com infinitas provas. Saiba que sempre te admirei pela sua garra e determinação, servindo como inspiração para tentar suportar com a mesma força que você, mas falhei miseravelmente em todos os quesitos.

Agradeço ao meu orientador Professor Doutor Victor Hugo Jorge Pérez, que me aguentou durante todos esses anos e que sem ele não conseguiria realizar o trabalho. Sei que não sou fácil, tenho muitas dificuldades, mas você sempre teve paciência e me ensinou muito. Saiba que te admiro muito como pessoa, matemático e principalmente como um grande professor que você é. MUITO OBRIGADO!!!.

Agradeço ao Professor Doutor Daniel Levcovitz que foi meu orientador do mestrado no ICMC e que me aturou com muita paciência durante dois anos e me ensinou muito. Em particular, à Professora Doutora Maria Gorete Carreira de Andrade que foi minha tutora do PET-matemática do IBILCE e ao Professor Adalberto Spezamiglio coloborador do PET, pela oportunidade de ter sido petiano durante minha graduação, completando minha formação como matemático e principalmente como pessoa. Também agradeço ao Professor Doutor Antônio Aparecido de Andrade que foi meu orientador de iniciação científica e que foi o gatilho de tudo isso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Se Deus me desse uma chance naquele momento,
eu teria feito tudo igual.”
(Joel Miller)

RESUMO

MEDEIROS, B. L. **Sobre anéis** Tor**-compatíveis, módulos livres e produto fibra**. 2023. 64 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho, inicialmente estabelecemos propriedades estruturais do anel produto fibra $R \times_T S$, onde R, S e T são anéis locais noetherianos com o mesmo corpo residual. Mais especificamente, estudamos as propriedades estruturais do anel produto fibra por meio da multiplicidade de Hilbert-Samuel. Na segunda etapa da tese, estudamos o anulamento dos funtores Ext e Tor de R-módulos finitamente gerados, motivados pela conjectura de Aulander-Reiten, com o intuito de obter propriedades que nos permitam estabelecer condições necessárias para que dois módulos finitamente gerados tenham o dual livre ou dimensão projetiva finita.

Palavras-chave: Produto fibra, noetheriano, dual, módulo livre, dimensão projetiva.

ABSTRACT

MEDEIROS, B. L. **On** Tor**-friendly rings, free modules and fiber product**. 2023. 64 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work, we initially establish the structural properties of the fiber product ring $R \times_T S$, where R, S, and T are noetherian local rings with the same residual field. Specifically, we investigate the structural properties of the fiber product ring using the Hilbert-Samuel multiplicity. In the second stage of the thesis, we examine the vanishing of the functors Ext and Tor of finitely generated R-modules. This investigation is motivated by the Aulander-Reiten conjecture, with the aim of obtaining properties that allow us to establish necessary conditions for two finitely generated modules to have the free dual or finite projective dimension.

Keywords: Fiber product, noetherian, dual module, free module, projective dimension.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar as propriedades de alguns casos de produto fibra e anéis Tor-compatíveis. O produto fibra é uma classe de anel que consegue absorver muitas propriedades de suas componentes. Contudo, dificilmente é um anel regular. Com isso, conseguir propriedades possibilitaria desencadear extensões de diversos conceitos para uma classe de anéis mais ampla. No caso de Tor-compatíveis, obter propriedades do dual de um módulo finitamente gerado em função de anulamentos consecutivos de Ext. Esta classe de anéis vem sendo estudadas ao longos dos anos graças ao trabalho de (HUNEKE; WIEGAND, 1994). Em particular, o produto fibra sobre um corpo k, é um anel Tor-compatível (NASSEH; SATHER-WAGSTAFF, 2017, Teorema 2.7).

No Capítulo 2, fizemos uma breve revisão de álgebra comutativa e homológica que serviu como alicerce para a realização deste trabalho.

Durante o Capítulo 3, definimos o produto fibra de anéis locais, enunciando propriedades conhecidas, como por exemplo, dimensão de Krull, profundidade, dimensão de mergulho e a obtenção dos números de Betti de um módulo M finitamente gerado sobre o produto fibra.

No Capítulo 4, estabelecemos algumas conexões da multiplicidade de Hilbert-Samuel e multiplicidade minimal de suas componentes com a multiplicidade do produto fibra. A multiplicidade de Hilbert-Samuel de um anel local é um dos invariantes mais importantes. Para ilustrar isso, o Teorema de Nagata (NAGATA, 1962, Teorema 40.6) estabelece um critério brilhante para um anel local regular, impondo que sua multiplicidade seja $e(R) = 1$. A recíproca vale para anéis equidimensionais. Em 1967, sobre anéis de Cohen-Macaulay, Abhyankar (ABHYANKAR, 1967) demonstrou um limitante inferior para a multiplicidade de Hilbert-Samuel, a saber $e(R) \geq \operatorname{edim}(R) - \dim(R) + 1$. Perceba que juntamente com o Teorema de Nagata, um anel local regular satisfaz a igualdade. Com isso, houveram questionamentos de quais outros tipos de anéis temos a igualdade. Neste caso, dizemos que estes anéis possuem multiplicidade minimal.

Em (JOTHILINGAM; DURAIVEL, 2010, Teorema 1), o autor provou um critério sobre anéis locais regulares, para decidir quando o dual de um módulo finitamente gerado é livre. O critério consiste de anulamentos consecutivos do funtor $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = 0$. Para anéis Tor-compatíveis e módulos N Tor-*rígidos*, conseguimos adaptar este critério obtendo que M^* é livre ou $\mathrm{pd}_R(N) < \infty$. Como supomos N Tor-*rígido* qualquer, um questionamento natural é se existe uma classe de módulos Tor-*rígidos* em que pudessemos testar e estender este fato? Na Proposição 5.2.18, conseguimos responder essa pergunta para anéis R com $\mathrm{depth}(R) > 0$ e $N = R/\mathfrak{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal.

CAPÍTULO

2

ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA HOMOLÓGICA

Neste capítulo revisitaremos alguns conceitos importantes de álgebra comutativa e homológica, que podem ser encontrados com mais detalhes em (ATIYAH M.F.; MACDONALD, 1969; ROTMAN, 2009; BRUNZ W.; HERZOG, 1993).

Serão abordados conceitos como resoluções projetivas, injetivas e livres, funtores Ext e Tor, números de Betti, fórmula de Auslander-Buschsbaum e outros temas recorrentes. Se o leitor tem familiaridade com estes tópicos recomenda-se avançar para o Capítulo 3.

2.1 Módulos, Categorias e funtores

Neste trabalho, R sempre será um anel comutativo com unidade. Dizemos que M é um R-módulo se é um grupo abeliano e existe uma multiplicação por escalar $R \times M \to M$ onde, $(r,m) \in R \times M$ é associado a $rm \in M$, satisfazendo para todo $r, r' \in R$ e $m, m' \in M$,

- $r(m+m') = rm + rm'$;
- $(r+r')m = rm + r'm$;
- $(rr')m = rr'm$;
- $1m = m$.

Observação 2.1.1. Todo anel é um módulo sobre si mesmo.

Definição 2.1.2. Dizemos que uma anel R é **noetheriano** se todo ideal I é finitamente gerado, isto é, $I = (a_1, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in I$. Além disso, um R-módulo M é finitamente gerado se existe um conjunto finito de geradores, $\{m_1, \ldots, m_n\}$ tal que, todo elemento $m \in M$ é escrito como

$m = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i m_i$ com $\lambda_i \in R$ para $i = 1, \ldots, n$. Em particular, dizemos que $\{m_1, \ldots, m_n\}$ é um sistema minimal de geradores para M, se não está contido propriamente em outro conjunto de geradores de M. Se existe um conjunto de geradores $\{m_1, \ldots, m_n\}$ de M e linearmente independente sobre R, dizemos que o módulo é **livre finitamente gerado**.

Definição 2.1.3. Sejam M e M' dois R-módulos. Dizemos que uma aplicação $f : M \to M'$ é um R-**homomorfismo**, se para todo $m_1, m_2 \in m$ e $\lambda \in R$ temos $f(m_1 + \lambda m_2) = f(m_1) + \lambda f(m_2)$. Se o R-homomorfismo f é injetor e sobrejetor, dizemos que f é um **isomorfismo**.

Dado um anel R, se considerarmos todos os R-módulos e todos homomorfismos entre eles, formamos uma categoria que será denotada por $\mathrm{Mod}(R)$. De maneira geral uma categoria é definida por:

Definição 2.1.4. Uma **categoria** $\mathscr{C}$, consiste de uma classe de objetos $\mathrm{obj}(\mathscr{C})$, um conjunto de flechas $\mathrm{Hom}(A,B)$ para cada par (A,B) de objetos e uma composição para A, B e $C \in \mathscr{C}$

$$\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C)$$

em que associa cada par $(f,g) \in \mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C)$, a flecha $g \circ f$ de $\mathrm{Hom}(A,C)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Cada $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ tem um único domínio A e codomínio B;

(ii) Para cada objeto A, existe uma identidade $1_A \in \mathrm{Hom}(A,A)$ tal que $1_A \circ f = f = f \circ 1_B$ para todo $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$;

(iii) Composição é associativa: dados $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definição 2.1.5. Um funtor **aditivo e covariante da categoria dos R-módulos para a categoria dos S-módulos** é uma aplicação, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(-) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow \mathscr{F}(M) \xrightarrow{\mathscr{F}(f)} \mathscr{F}(N)$, que associa para cada R-módulo M e homomorfismo $f : M \to N$ ao S-módulo $\mathscr{F}(M)$ e o S-homomorfismo $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(N)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\mathscr{F}(id_M) = id_{\mathscr{F}(M)}$ para todo R-módulo M;

(ii) $\mathscr{F}(f \circ g) = \mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(g)$, com $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ e $g \in \mathrm{Hom}(N,T)$;

(iii) $\mathscr{F}(f+g)$=$\mathscr{F}(f)$+$\mathscr{F}(g)$, com $f, g \in \mathrm{Hom}(M,N)$.

Exemplo 2.1.6. Seja X um R-módulo fixo, então $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ é um funtor covariante da categoria de R-módulos, que associa cada R-módulo M ao R-módulo $\mathrm{Hom}_R(X,M)$ e em nível de flechas associa,

$$\mathrm{Hom}_R(X,-) : M \xrightarrow{f} N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(X,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X,N)$$

onde, $f^*(h) = f \circ h$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_R(X,M)$.

Exemplo 2.1.7. Seja X um R-módulo fixo; então o funtor produto tensorial $-\otimes_R X$ ou $X \otimes_R -$ é um funtor covariante, que associa cada R-módulo M ao R-módulo $X \otimes_R M$ e em nível de flechas associa,

$$X \otimes_R - : M \xrightarrow{f} N \rightsquigarrow M \otimes_R X \xrightarrow{f\otimes id} N \otimes_R X$$

onde $f \otimes id(a \otimes x) = f(a) \otimes x$ para um tensor elementar $a \otimes x \in M \otimes_R X$.

Observação 2.1.8. O leitor pode encontrar a definição de produto tensorial nas referências (ATIYAH M.F.; MACDONALD, 1969; ROTMAN, 2009, Página 24, Página 69) respectivamente.

Definição 2.1.9. Um **funtor aditivo e contravariante da categoria dos R-módulos para a categoria dos S-módulos** é uma aplicação, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(-) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow \mathscr{F}(M) \xrightarrow{\mathscr{F}(f)} \mathscr{F}(N)$, que associa para cada R-módulo M e homomorfismo $f : M \to N$ um S-módulo $\mathscr{F}(M)$ e um homomorfismo $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{F}(M)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\mathscr{F}(id_M) = id_{\mathscr{F}(M)}$ para todo R-módulo M;

(ii) $\mathscr{F}(f \circ g) = \mathscr{F}(g) \circ \mathscr{F}(f)$, com $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ e $g \in \mathrm{Hom}(N,T)$;

(iii) $\mathscr{F}(f+g)$=$\mathscr{F}(f)$+$\mathscr{F}(g)$, $f,g \in \mathrm{Hom}(M,N)$.

Exemplo 2.1.10. Seja X um R-módulo fixo; então $\mathrm{Hom}_R(-,X)$ é um funtor contravariante da categoria dos R-módulos que associa cada R-módulo M ao R-módulo $\mathrm{Hom}_R(M,X)$ e em nível de flechas associa,

$$\mathrm{Hom}_R(-,X) : M \xrightarrow{f} N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(X,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X,M)$$

onde $f^*(h) = h \circ f$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_R(X,N)$.

Definição 2.1.11. Uma sequência de R-módulos, $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N$, é dita **exata** se $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$. De maneira geral, considere $n \in \mathbb{Z}$. Uma sequência longa,

$$\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \to \cdots$$

é dita exata se $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \to \cdots$ é exata para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Além disso, uma sequência exata da forma

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N \to 0$$

é uma **sequência exata curta**. Neste caso, concluímos que f é injetora e g sobrejetora.

Definição 2.1.12. Seja $\mathfrak{F}$:Mod(R)$\to$ Mod(R') um funtor aditivo covariante.

(i) $\mathfrak{F}$ é um **funtor exato à esquerda** se $0 \to \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(T)$ é uma sequência exata de R'-módulos para toda sequência $0 \to M \to N \to T \to 0$ de R-módulos.

(ii) $\mathfrak{F}$ é um **funtor exato à direita** se $\mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(T) \to 0$ é uma sequência exata de R'-módulos para toda sequência $0 \to M \to N \to T \to 0$ exata de R-módulos.

(iii) $\mathfrak{F}$ é um **funtor exato** se é exato à esquerda e direita.

Definição 2.1.13. Seja $\mathfrak{F}$:Mod$(R) \to$ Mod(R') um funtor aditivo contravariante.

(i) $\mathfrak{F}$ é um **funtor exato à esquerda** se $0 \to \mathfrak{F}(T) \to \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(M)$ é uma sequência exata de R'-módulos para toda sequência exata $0 \to M \to N \to T \to 0$ de R-módulos.

(ii) $\mathfrak{F}$ é um **funtor exato à direita** se, $\mathfrak{F}(T) \to \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(M) \to 0$ é uma sequência exata de R'-módulos para toda sequência exata $0 \to M \to N \to T \to 0$ de R-módulos.

(iii) O **funtor é exato** se, é exato à direita e esquerda.

Teorema 2.1.14. (ROTMAN, 2009, Teorema 2.40, Teorema 2.63) Seja R um anel. O funtor $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ é um funtor exato a esquerda e o funtor $- \otimes_R -$ é exato a direita.

2.2 Homologia e Cohomologia

Definição 2.2.1. Seja R um anel. Uma sequência de R-módulos,

$$\mathbf{M}_\bullet = \cdots \to M_{n+1} \stackrel{\alpha_{n+1}}{\to} M_n \stackrel{\alpha_n}{\to} M_{n-1} \to \cdots$$

é chamado de **complexo** se $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\mathrm{im}(\alpha_{n+1}) \subset \ker(\alpha_n)$. Caso $\mathrm{im}(\alpha_{n+1}) = \ker(\alpha_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que o complexo é **exato**. Denotamos o complexo $\mathbf{M}_\bullet$ pelo par $(\mathbf{M}_\bullet, \alpha_\bullet)$.

Por outro lado, um **co-complexo** de R-módulos,

$$\mathbf{M}^\bullet = \cdots \to M_n \stackrel{\alpha^{n-1}}{\to} M_{m+1} \stackrel{\alpha^n}{\to} M_{n+2} \to \cdots$$

satisfaz $\alpha^n \circ \alpha^{n-1} = 0$. Ou seja, $\mathrm{im}(\alpha^{n-1}) \subset \ker(\alpha^n)$. Caso $\mathrm{im}(\alpha^{n-1}) \subset \ker(\alpha^n)$, dizemos que o co-complexo é exato. Denotamos o co-complexo $\mathbf{M}^\bullet$ pelo par $(\mathbf{M}^\bullet, \alpha^\bullet)$.

Definição 2.2.2. Se $\mathbf{M}_\bullet$ é um complexo, definimos o n**-ésimo módulo de homologia** por

$$\mathrm{H}_n(\mathbf{M}_\bullet) = \frac{\ker(\alpha_n)}{\mathrm{im}(\alpha_{n+1})}.$$

Se $\mathbf{M}^\bullet$ é um co-complexo, definimos o n**-ésimo módulo de cohomologia** por

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{M}^\bullet) = \frac{\ker(\alpha_n)}{\mathrm{im}(\alpha_{n-1})}.$$

Definição 2.2.3. Sejam $(\mathbf{M}_\bullet, \alpha_\bullet), (\mathbf{T}_\bullet, \beta_\bullet)$ dois complexos de R-módulos. Uma **aplicação de complexos**, $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \to \mathbf{M}_\bullet$, é uma família de homomorfismos $f_\bullet = \{f_n\}$ tal que, o seguinte diagrama é comutativo para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ T_n \arrow[r, "\beta_n"] & T_{n-1} \end{tikzcd}$$

isto é, $f_{n-1} \circ \alpha_n = \beta_n \circ f_n$. Definição análoga para co-complexo.

Definição 2.2.4. Uma sequência de complexos

$$0 \to \mathbf{M}'_\bullet \overset{f_\bullet}{\to} \mathbf{M}_\bullet \overset{g_\bullet}{\to} \mathbf{M}''_\bullet \to 0$$

é exata se, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos uma sequência exata curta $0 \to M'_n \overset{f_n}{\to} M_n \overset{g_n}{\to} M''_n \to 0$ de R-módulos.

Dada uma sequência exata de complexos ou co-complexos, sempre conseguimos obter uma sequência exata longa em homologias ou co-homologias:

Teorema 2.2.5. (ROTMAN, 2009, Teorema 6.10) Uma sequência exata de complexos,

$0 \to \mathbf{M}'_\bullet \overset{f_\bullet}{\to} \mathbf{M}_\bullet \overset{g_\bullet}{\to} \mathbf{M}''_\bullet \to 0$, induz uma sequência exata longa em homologias

$$\cdots \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathbf{M}''_\bullet) \to \mathrm{H}_n((\mathbf{M}'_\bullet)) \to \mathrm{H}_n(\mathbf{M}_\bullet) \to \mathrm{H}_n((\mathbf{M}''_\bullet)) \to \mathrm{H}_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \to \cdots$$

2.3 Módulos Projetivos

Definição 2.3.1. Um R-módulo M é **projetivo** se, para qualquer R-homomorfismo sobrejetor $p : A \to A'$ tal que, para qualquer homomorfismo $h : M \to A'$, existe um levantamento g para h, isto é, podemos definir um R-homomorfismo $g : P \to A$, tal que $p \circ g = h$. Em outras palavras, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, two heads, "p"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A seguir enunciaremos diversas caracterizações de módulos projetivos:

Proposição 2.3.2. (ROTMAN, 2009, Proposição 3.2) Um R-módulo M é projetivo se, e somente se, $\mathrm{Hom}(M, -)$ é um funtor exato.

Teorema 2.3.3. (ROTMAN, 2009, Teorema 3.5) Um R-módulo M é projetivo se, e somente se, é somando direto de um R-módulo livre.

Corolário 2.3.4. (ROTMAN, 2009, Corolário 3.6) Toda soma direta de módulos projetivos é projetivo.

Observação 2.3.5. Todo anel R é um R-módulo projetivo.

Proposição 2.3.6. Se M é um R-módulo livre, então é projetivo.

Demonstração. Temos $M \cong R^I$, onde I é um conjunto de índices. Então, pela observação anterior e Corolário 2.3.4, segue o resultado. □

Definição 2.3.7. Seja M um R-módulo. Uma **resolução projetiva** de M é um complexo exato

$$\cdots \to P_n \stackrel{\alpha_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} M \to 0$$

onde cada P_i é um R-módulo projetivo.

Observação 2.3.8. Todo R-módulo é imagem homomórfica de um R-módulo livre. Em particular, de um módulo projetivo. Isto quer dizer que, dado um R-módulo M qualquer, existe um módulo projetivo P_0 tal que $\alpha_0 : P_0 \to M$ é um homomorfismo sobrejetor.

Teorema 2.3.9. Todo R-módulo M possui resolução projetiva.

Demonstração. Pela observação anterior, temos $\alpha_0 : P_0 \to M$ sobrejetor. Agora, esta aplicação tem um núcleo, logo existe um módulo projetivo P_1 e um homomorfismo sobrejetor tal que, $p_0 : P_1 \to \ker(\alpha_0)$. Considerando a inclusão natural $i_0 : \ker(\alpha_0) \to P_0$, podemos compor $\alpha_1 = p_0 \circ i_0$, logo $\alpha_1 : P_1 \to P_0$. Fazendo isso para todos os núcleos de α_i, obtemos

$$\cdots \to P_n \stackrel{\alpha_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} M \to 0$$

onde cada P_i é projetivo, e por construção, o complexo é exato.

□

Definição 2.3.10. Considere a seguinte resolução projetiva de um R-módulo M

$$0 \to P_n \stackrel{\alpha_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \stackrel{\alpha_0}{\to} M \to 0.$$

Neste caso, dizemos que esta resolução projetiva tem comprimento n.

Definição 2.3.11. Seja M um R-módulo. Definimos a **dimensão projetiva** de M como sendo o número

$$\mathrm{pd}(M) = \inf\{n; \text{tal que } n \text{ é o comprimento de uma resolução projetiva de } M\}.$$

Definição 2.3.12. Sejam M um R-módulo e $\mathbf{P}_\bullet$ uma resolução projetiva de M dada por

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_n \stackrel{\partial_n}{\to} P_{n-1} \to P_1 \stackrel{\partial_1}{\to} P_0 \stackrel{\partial_0}{\to} M \to 0.$$

Definimos o n**-ésimo módulo de syzygy** como sendo $\ker(\partial_n) = \mathrm{im}(\partial_{n+1})$.

Observação 2.3.13. Um R-módulo M é projetivo se, e somente se, $\mathrm{pd}(M) = 0$.

Demonstração. Se $\mathrm{pd}(M) = 0$, temos $0 \to P_0 \to M \to 0$ logo, $M \cong P_0$, e assim M é projetivo. Por outro lado, se M é projetivo então $0 \to M \to M \to 0$ é uma resolução projetiva de M e assim $\mathrm{pd}(M) = 0$.

□

2.4 Módulos Injetivos

Definição 2.4.1. Dizemos que um R-módulo I é **injetivo** se, dado qualquer R-homomorfismo injetor, $i : I \to B$ tal que, para qualquer homomorfismo R-homomorfismo $f : I \to A$, existe $g : B \to A$ com $g \circ i = f$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} & & A \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Teorema 2.4.2. (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Teorema 3.1.8) Todo R-módulo M pode ser mergulhado em um R-módulo injetivo I.

Definição 2.4.3. Dizemos que o complexo abaixo,

$$0 \to M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1 \to \cdots, \tag{2.1}$$

é uma **resolução injetiva** se for um complexo exato e os R-módulos I_k são injetivos.

Na seção anterior vimos que todo módulo possui resolução projetiva. De maneira análoga, podemos construir uma resolução injetiva utilizando o Teorema 2.4.2. De fato, temos $M \overset{i_0}{\hookrightarrow} I_0$ onde, I_0 é injetivo. Agora considere o $\mathrm{coker}(M) = I_0/M$. Logo, existe um mergulho $f_1 : I_0/M \overset{f_1}{\hookrightarrow} I_1$. Considere $i_1 : I_0 \to I_1$, onde $i_1 = f_1 \circ \pi_1$ e $\pi_1 : I_0 \to I_0/M$. Fazendo isso sucessivamente, obtemos

$$0 \to M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1 \to \cdots \tag{2.2}$$

Definimos a **dimensão injetiva** de M como sendo o menor inteiro positivo n tal que existe uma resolução injetiva $\mathbf{I}_\bullet$ com $I_m = 0$ para $m > n$. Denotamos a dimensão injetiva por $\mathrm{id}(M)$.

2.5 Funtor Tor

Seja M um R-módulo e

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_n \stackrel{\alpha_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \stackrel{\alpha_1}{\to} P_0 \to M \to 0$$

uma resolução projetiva de M. Como o produto tensorial é exato a direita, temos que para qualquer R-módulo T

$$\mathbf{P}_\bullet \otimes_R T : \cdots \to P_n \otimes_R T \stackrel{\alpha_n \otimes id_T}{\to} P_{n-1} \otimes_R T \to \cdots \to P_1 \otimes_R T \stackrel{\alpha_1 \otimes_R id_T}{\to} P_0 \otimes_R T \to M \otimes_R T \to 0.$$

Denotamos a **homologia** $H_i(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R T) := \mathrm{Tor}_i^R(M,T)$ onde $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5.1. (ROTMAN, 2009, Teorema 6.27) Seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Então, existe uma sequência exata longa para qualquer R-módulo T dada por

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_2^R(L,T) \to \mathrm{Tor}_2^R(M,T) \to \mathrm{Tor}_2^R(N,T) \to \mathrm{Tor}_1^R(L,T) \to \mathrm{Tor}_1^R(M,T) \to \mathrm{Tor}_1^R(N,T) \to$$
$$\to L \otimes_R T \to M \otimes_R T \to N \otimes_R T \to 0.$$

2.6 Funtores Ext

Os funtores Ext, nada mais são que as cohomologias do funtor Hom. Seja M um R-módulo e considere a seguinte resolução projetiva,

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \to P_n \stackrel{\alpha_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \stackrel{\alpha_1}{\to} P_0 \to M \to 0.$$

Fixe um R-módulo T. Como $\mathrm{Hom}_R(-,T)$ é exato a esquerda, temos o co-complexo

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, M) : 0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0,T) \stackrel{\alpha_1^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_1,T) \to \cdots$$

Denotamos as **cohomologias** $H^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet,T)) := \mathrm{Ext}_R^i(M,T)$ para $i \in \mathbb{N}$.

A principal propriedade deste tópico é a sequência exata longa de Ext, induzida por uma sequência exata curta de R-módulos.

Teorema 2.6.1. (ROTMAN, 2009, Teorema 6.59) Seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Então, existe uma sequência exata longa para cada R-módulo T fixado,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,T) \to \mathrm{Hom}_R(M,T) \to \mathrm{Hom}_R(L,T) \to \mathrm{Ext}_R^1(N,T) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,T) \to \mathrm{Ext}_R^1(L,T) \to \cdots$$

Analogamente, para o funtor covariante $\mathrm{Ext}_R(T,-)$ temos

Teorema 2.6.2. (ROTMAN, 2009, Teorema 6.43) Seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Então, existe uma sequência exata longa para cada R-módulo T fixado,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(T,L) \to \mathrm{Hom}_R(T,M) \to \mathrm{Hom}_R(T,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(T,L) \to \mathrm{Ext}^1_R(T,M) \to \mathrm{Ext}^1_R(T,N) \to \cdots$$

Na seção anterior vimos algumas caracterizações para módulos projetivos, abaixo segue mais uma em função do funtor $\mathrm{Ext}(M,-)$.

Proposição 2.6.3. Seja M um R-módulo. São equivalentes:

(i) M é projetivo;

(ii) $\mathrm{Ext}^n_R(M,T) = 0$ para todo R-módulo T e $n > 0$;

(iii) $\mathrm{Ext}^1_R(M,T) = 0$ para todo R-módulo T.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$ (ii) Suponha M projetivo. Como $\mathrm{Hom}_R(-,T)$ é exato a esquerda, ver (ROTMAN, 2009, Teorema 6.61), página 372, segue o resultado.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Imediato.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Dada uma sequência exata curta de R-módulos $0 \to L \to N \to T \to 0$, obtemos uma sequência exata longa

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,L) \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,T) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,L) \to \cdots$$

Por hipótese, $\mathrm{Ext}^1_R(M,L) = 0$, o que torna $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ exato, portanto M é projetivo. $\square$

Lema 2.6.4. (ROTMAN, 2009, Corolários 6.23, 6.42)[Deslocamento da dimensão] Seja $0 \to T_n \to T_{n-1} \to \cdots \to T_0 \to M \to 0$ uma resolução projetiva de M. Então, para qualquer R-módulo N, $\mathrm{Tor}^R_i(L_n,N) \cong \mathrm{Tor}^R_{n+i+1}(M,N)$ e $\mathrm{Ext}^i_R(L_n,N) \cong \mathrm{Ext}^{n+i+1}_R(M,N)$ onde L_n é o n-ésimo módulo de syzygy de M.

Na seção anterior, definimos um invariante importante para módulos, que é a dimensão projetiva. Tal invariante pode ser majorado pelo anulamento dessas cohomologias.

Proposição 2.6.5. Seja M um R-módulo. São equivalentes:

(i) $\mathrm{pd}(M) \leq n$;

(ii) $\mathrm{Ext}^i_R(M,T) = 0$ para todo R-módulo T e $i > n$;

(iii) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,T) = 0$ para todo R-módulo T.

(iv) Se $K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ é exato, com P_i projetivo para $i = 0, \cdots, n-1$ então K_{n-1} é um módulo projetivo.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$ (ii) Se $\mathrm{pd}(M) \leq n$, então as cohomologias para $i > n$ são nulas, ou seja, $\mathrm{Ext}^i(M,T) = 0$ para todo $i > n$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Imediato.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Suponha $K_{n-1} \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, onde P_i é projetivo para $i = 1 \cdots, n-1$. Por hipótese, $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,T) = 0$. Contudo, pelo Lema 2.6.4, temos $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,T) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1},T) = 0$. Portanto, da Proposição 2.6.3 K_{n-1} é projetivo.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Imediato.

□

2.7 O caso local e os números de Betti

Nesta seção, R sempre será um anel noetheriano local, ou seja, R possui apenas um ideal maximal, que será denotado por $\mathfrak{m}$ e um corpo residual $R/\mathfrak{m} = k$. Em geral, denotamos isso pela tripla $(R, \mathfrak{m}, k)$. Vimos na Proposição 2.3.6 que módulos livres são projetivos. A recíproca vale se o anel é local e M é finitamente gerado. Antes disso, um dos resultados mais importantes para anéis locais.

Lema 2.7.1 (Lema de Nakayama)**.** (ROTMAN, 2009, Proposição 4.51) Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se I é um ideal não nulo de R e $IM = M$ então, $M = 0$.

Teorema 2.7.2. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que $\overline{M} = \dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$ é um k-espaço vetorial de dimensão n.

(i) Considere $\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}\}$ uma base de $\overline{M}$. Denote por u_i, uma imagem inversa em M dos $\overline{u_i}$. Então, $\{u_1 \ldots, u_n\}$ formam um conjunto minimal de geradores de M.

(ii) Reciprocamente, todo conjunto minimal de geradores de M é obtido dessa maneira e tem n elementos.

Demonstração. (i) Caso o conjunto de geradores de M $\{u_1 \ldots, u_n\}$ não seja minimal, sem perda de generalidade, suponha que $\{u_2, \ldots, u_n\}$ seja um conjunto de geradores de M. Dessa forma, $\{\overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n}\}$ seria um conjunto de geradores de $\overline{M}$, o que é uma contradição. Portanto, $\{u_1 \cdots, u_n\}$ é um conjunto minimal de geradores.

(ii) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto minimal de geradores de M, denote por $\overline{u_i}$ as classes de u_i em $\overline{M}$. Logo, $\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}\}$ gera $\overline{M}$ e é necessariamente linearmente independente pois caso contrário, podemos tomar $\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_t}\}$, com $t < n$, uma base para

$\overline{M}$. Pelo item (i), segue que $\{u_1 \ldots, u_t\}$ gera M, o que é uma contradição. Portanto, $\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}\}$ é uma base de $\overline{M}$.

□

Com o teorema acima, conseguimos definir um invariante importante para anéis locais, a dimensão de mergulho.

Definição 2.7.3. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local. Definimos a **dimensão de mergulho** de R como sendo a cardinalidade do conjunto minimal de geradores para $\mathfrak{m}$, que será denotada por $\mu(\mathfrak{m})$ ou $\operatorname{edim}(R)$. Do Teorema anterior, temos que $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k \left(\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}\right)$.

O próximo resultado, caracteriza que os módulos das resoluções projetivas sobre anéis locais são livres. Com isso, conseguiremos construir cada módulo projetivo $P_i \cong R^{b_i}$, onde b_i poderá ser tomado de maneira única, obtendo mais um invariante importante do módulo M chamado de ***i*-ésimo número de Betti** de M.

Teorema 2.7.4. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. São equivalentes:

(i) M é livre;

(ii) M é projetivo;

(iii) $\operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0$, para todo $i > 0$ e qualquer R-módulo N;

(iv) $\operatorname{Tor}_1^R(M, k) = 0$.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$ (ii)$\Rightarrow$ (iii)$\Rightarrow$ (iv) são imediatas. Para ver (iv)$\Rightarrow$ (i), considere F um módulo livre, e o homomorfismo $f : F \to M$ que mapeia a base de F em um conjunto minimal de geradores de M. Dessa forma, temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \to T \to F \to M \to 0$$

onde $T = \ker(f)$. Fazendo $- \otimes_R k$, temos que a sequência permanece exata, já que por hipótese, $\operatorname{Tor}_1^R(M, k) = 0$. Mas lembre que $k = R/\mathfrak{m}$. Logo, teremos uma sequência exata

$$0 \to \frac{T}{\mathfrak{m}T} \to \frac{F}{\mathfrak{m}F} \to \frac{M}{\mathfrak{m}M} \to 0.$$

Mas da forma que tomamos F, temos $\dfrac{F}{\mathfrak{m}F} \cong \dfrac{M}{\mathfrak{m}M}$ como k-espaços vetoriais, pois possuem a mesma dimensão; então $\dfrac{T}{\mathfrak{m}T} = 0$, e assim, do Lema de Nakayama 2.7.1, temos $T = 0$. Portanto, M é livre.

□

Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Vamos construir uma resolução livre minimal de M. Denote por $b_0 = \dim_k\left(\dfrac{M}{\mathfrak{m}M}\right)$. Logo, do Teorema 2.7.2 o módulo M é gerado por b_0 elementos. Considere $f_0 : F_0 \to M$ o homomorfismo que leva base de F_0 no conjunto minimal de geradores de M. Obtemos assim, uma sequência exata

$$F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

Agora, considere $K_0 = \ker(f_0)$; então pelo mesmo raciocínio existe um homomorfismo sobrejetor $g_1 : K_0 \to F_1$, onde $F_1 = R^{b_1}$. Então, fazendo $f_1 = i \circ g_1$, com $i_0 : K \to F_0$ a inclusão natural, obtemos

$$F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

Repetindo este processo, obtemos a seguinte resolução de módulos livres,

$$\mathbf{F}_\bullet : \cdots \to F_i \xrightarrow{f_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

Este complexo é exato por construção, e $F_i = R^{b_i}$, é um R-módulo livre para todo $i \geq 0$.

Definição 2.7.5. Sejam $(R,\mathfrak{m},k)$ noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Uma resolução do tipo

$$\mathbf{F}_\bullet : \cdots \to F_i \xrightarrow{f_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

é **livre minimal**, se $F_i = R^{b_i}$ e as aplicações $f \otimes_k id_k : F_i \otimes k \to F_{i-1} \otimes k$ são aplicações nulas.

Observação 2.7.6. Note que a resolução livre minimal sempre existe por conta da construção feita acima. Além disso, pelo Teorema 2.7.4 temos que, podemos calcular o $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$, tomando uma resolução livre e fazendo o produto tensorial por N. Em particular, podemos calcular $\operatorname{Tor}_i^R(M,k)$.

Proposição 2.7.7. (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Proposição 1.3.1) Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Considere a resolução livre de M,

$$\mathbf{F}_\bullet : \cdots \to F_i \xrightarrow{f_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0.$$

São equivalentes:

(i) $\mathbf{F}_\bullet$ é minimal;

(ii) $f_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$;

(iii) $\operatorname{rank}(F_i) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k)$ para todo $i \geq 0$;

(iv) $\operatorname{rank}(F_i) = \dim_k \operatorname{Ext}_R^i(M,k)$ para todo $i \geq 0$.

Perceba que pela proposição acima, os números $b_i = \operatorname{rank}(F_i) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^R(M,k) = \dim_k \operatorname{Ext}_R^i(M,k)$ são invariantes, pois dependem apenas do módulo M e do anel local R. Isso nos motiva a fazer a seguinte definição:

Definição 2.7.8. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel noetheriano local, M um módulo finitamente gerado com uma resolução livre minimal dada por

$$\mathbf{F}_\bullet : \cdots \to F_i \xrightarrow{f_i} F_{i-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

onde $F_i = R^{b_i}$. Chamamos o números b_i de ***i*-ésimo número de Betti**, que será denotado por $\beta_i(M)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso, definimos a série de Poincaré de M como sendo,

$$P_M^R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(M) t^i.$$

Exemplo 2.7.9. Seja $R = k[[x,y,z]]$ e $I = (x^2, xy, -y^4 + xz)$ um ideal de R. Fazendo uso de programa de computação Macaulay2, segue que a resolução livre minimal de I é

$$0 \to R \xrightarrow{\partial_2} R^3 \xrightarrow{\partial_1} R \xrightarrow{\partial_0} \frac{R}{I} \to 0 \tag{2.3}$$

onde ∂_0 é a projeção natural e $\partial_1 = \begin{pmatrix} x^2 & xy & -y^4 + xz \end{pmatrix}$, $\partial_2 = \begin{pmatrix} -y & z \\ x & -y^3 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Assim a série de Poincaré é o polinômio dado por $P_{R/I}^R(t) = 1 + 3t + t^2$.

2.8 Dimensão e profundidade

Nesta seção vamos definir dois invariantes importantes sobre anéis, que são a dimensão de Krull e a profundidade de um anel, denotadas por $\dim(R)$ e $\operatorname{depth}(R)$ respectivamente.

Definição 2.8.1. Uma **cadeia de ideais primos de** R com comprimento n é da forma

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n.$$

Dizemos que tal cadeia é **saturada**, se não existe um ideal primo Q entre $P_i \subsetneq Q \subsetneq P_{i+1}$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

A **altura de um ideal primo** P é o supremo dos comprimentos das cadeias saturadas que terminam em P, ou seja, $P_n = P$. Seja I um ideal de R; definimos a **altura de** I como sendo $\operatorname{ht}(I) := \inf\{\operatorname{ht}(P);\ I \subset P\}$.

A **dimensão de Krull** do anel R, é o supremo de todas as cadeias saturadas de ideais primos de R.

Observação 2.8.2. Algumas propriedades sobre altura e dimensão.

(i) Se P é um ideal primo, então $\dim\left(\frac{R}{P}\right)$ é o supremos dos comprimentos de cadeias saturadas,

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_s$$

tal que, $P \subset Q_i$ para todo $i = 1, \because, s$.

(ii) $\dim(R) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m});\ \mathfrak{m}$ é ideal maximal de $R\}$. Em particular se R é local, $\dim(R) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$.

(iii) Se I é um ideal de R, então $\dim\left(\frac{R}{I}\right) + \mathrm{ht}(I) \leq \dim(R)$.

Exemplo 2.8.3. Em um domínio de ideais principais R, temos $\dim(R) = 1$.

Exemplo 2.8.4. Um corpo k tem dimensão zero. Já o anel de polinômios sobre o corpo k, $k[x_1, \ldots, x_n]$, tem dimensão n.

Definição 2.8.5. Seja M um R-módulo e considere o submódulo $\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R; rm = 0,\ \forall m \in M\}$ de M. Definimos a **dimensão de** M por $\dim(M) := \dim\left(\frac{R}{\mathrm{Ann}(M)}\right)$.

Definição 2.8.6. Seja M um R-módulo. Dizemos que uma sequência $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n$ de elementos de R é $M-$**regular** se satisfaz:

(i) x_i não é divisor de zero sobre $\frac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})}$;

(ii) $\frac{M}{\underline{x}M} \neq 0$.

Caso a sequência satisfaça apenas o item (i), dizemos que é uma **sequência regular fraca**. Além disso, caso a sequência $\underline{x}$ não admita um elemento y tal que $\underline{x} = x_1, \ldots, x_n, y$ seja regular, dizemos que x é uma **sequência regular maximal**.

Em geral, trocar as posições dos elementos de uma sequência não mantém a regularidade. Como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo 2.8.7. Seja k um corpo e considere $R = k[x, y, z]$ o anel de polinômios nas variáveis x, y e z. Temos uma sequência x, $y(1-x)$ e $z(1-x)$, enquanto $y(1-x)$, $z(1-x)$ e x não é uma sequência regular, pois x é divisor de zero sobre $\frac{R}{(y(1-x), z(1-x))}$.

Contudo, se R for local, temos que qualquer troca de posições na sequência, à mantém regular.

Proposição 2.8.8. (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Proposição 1.1.6) Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma M-sequência regular, então qualquer permutação entre os x_i's é uma sequência M-regular.

Definição 2.8.9. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano local. Dizemos que um ideal I de R, é de **interseção completa** se é gerado por uma sequência regular.

Exemplo 2.8.10. Se $R = k[x_1, \ldots x_n]$ então o ideal maximal gerado pelas variáveis, $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ é uma interseção completa.

Teorema 2.8.11. (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Teorema 1.2.5) Seja R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $IM \neq M$. Então, todas as sequências regulares maximais em I tem o mesmo tamanho n, a saber $n = \min\{i \in \mathbb{N};\ \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}$.

Exemplo 2.8.12. Seja I um ideal de interseção completa minimamente gerado por n elementos; então sua resolução livre minimal é construída via o complexo de Koszul, (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, página 40). A saber

$$0 \to R^{\binom{n}{n}} \xrightarrow{\partial_n} R^{\binom{n}{n-1}} \to \cdots \to R^{\binom{n}{2}} \xrightarrow{\partial_2} R^{\binom{n}{1}} \xrightarrow{\partial_1} R^{\binom{n}{0}} \xrightarrow{\partial_0} \frac{R}{I} \to 0 \tag{2.4}$$

onde as aplicações ∂_i são matrizes com entradas no ideal I para $i = 0, \ldots, n$.

Definição 2.8.13. Seja R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que, $IM \neq M$. Definimos a **profundidade** de I, como sendo o tamanho das sequências regulares maximais de I e a denotamos por $\mathrm{grade}(I, M)$.

Definição 2.8.14. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Então, a profundidade de $\mathfrak{m}$ com respeito M é simplesmente a profundidade de M, denotado por $\mathrm{depth}(M)$. Caso $M = R$, denotamos por $\mathrm{depth}(R)$ a profundidade do anel R.

É bem conhecido que as sequências regulares se comportam "bem"em relação a dimensão e profundidade, isto é, se I é gerado minimamente por uma sequência regular de n elementos, então $\mathrm{depth}(R/I) = \mathrm{depth}(R) - n$ e $\dim(R/I) = \dim(R) - n$. Para mais detalhes, ver (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Capítulo 1).

A próxima proposição caracteriza a relação de grandeza entres a dimensão e a profundidade:

Proposição 2.8.15. (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Proposição 1.2.12) Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Então, $\mathrm{depth}(M) \leq \dim(M)$.

Em particular,

$$\mathrm{depth}(R) \leq \dim(R).$$

A imposição da igualdade nos fornece uma classe importante de anéis, definida abaixo.

Definição 2.8.16. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e M um módulo finitamente gerado. Dizemos que M é um módulo de **Cohen-Macaulay** se $M = 0$ ou $\mathrm{depth}(M) = \dim(M)$. O anel R é de **Cohen-Macaulay** se for, ele mesmo, um R-módulo de Cohen-Macaulay.

Abaixo segue outra classe importante de anéis, que está ligada com outro invariante cohomológico.

Definição 2.8.17. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel noetheriano local. Dizemos que R é um anel de **Gorenstein** se possui dimensão injetiva finita.

Observação 2.8.18. Se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel local de Gorenstein, então

$$\dim(R) \leq \operatorname{id}(R) = \operatorname{depth}(R),$$

ver (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Teorema 3.1.17). Neste caso, temos

$$\operatorname{depth}(R) \leq \dim(R) \leq \operatorname{depth}(R),$$

ou seja, $\operatorname{depth}(R) = \dim(R)$, assim todo anel local de Gorenstein é Cohen-Macaulay.

Observação 2.8.19. Em geral, se $(R,\mathfrak{m},k)$ é um anel noetheriano local, segue do Teorema de Krull que

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) \leq \mu(\mathfrak{m}) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}\right).$$

Dessa forma, sempre obtemos que $\dim(R) \leq \operatorname{edim}(R)$. Quando impomos a igualdade, temos mais uma classe importante de anéis.

Definição 2.8.20. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel noetheriano local. Se $\mu(M) = \dim_k\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}\right) = \operatorname{edim}(R) = \dim(R)$, dizemos que o anel R é **regular**.

Definição 2.8.21. Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel noetheriano local. Definimos a **codimensão** de R como $\operatorname{codim}(R) = \operatorname{edim}(R) - \dim(R)$.

De maneira geral, as relações entre essas classes de anéis são,

$$\text{Regular} \Rightarrow \text{Gorenstein} \Rightarrow \text{Cohen-Macaulay}.$$

Para mais detalhes, (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Proposição 3.1.20).

O depth é um invariante importante de anéis e módulos, pois está conectado com as cohomologias. Dessa forma, tem uma forte ligação com outro invariante que definimos acima, a dimensão projetiva. Finalmente enunciaremos o teorema que é um divisor de águas dentro da álgebra comutativa, que faz esta conexão.

Teorema 2.8.22 (Fórmula de Auslander-Buchsbaum)**.** (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Teorema 1.3.3) Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ noetheriano local e $M \neq 0$ um módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{pd}(M) < \infty$. Então,

$$\operatorname{pd}(M) + \operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(R). \tag{2.5}$$

CAPÍTULO

3

PRELIMINARES DO PRODUTO FIBRA

O objetivo deste capítulo é definir o produto fibra entre anéis locais e enunciar algumas de suas propriedades que serão utilizadas no próximo capítulo. Estabelecendo relações dos invariantes depth, dim, edim e números de Betti do produto fibra em função dos invariantes das suas componentes. Em alguns casos de produto fibra, também é conhecido a série de Poincaré, que será utilizada mais adiante no trabalho.

A partir deste capítulo todos os anéis serão noetherianos locais e os módulos serão finitamente gerados.

3.1 Produto Fibra de anéis locais

Definição 3.1.1. Sejam $(R,\mathfrak{m}_R,k)$, $(S,\mathfrak{m}_S,k)$ e $(T,\mathfrak{m}_T,k)$ anéis noetherianos locais tais que $\pi_R : R \to T$ e $\pi_S : S \to T$ são homomorfismos sobrejetores. Definimos o **produto fibra** como sendo

$$R \times_T S := \{(x,y) \in R \times S;\ \pi_R(x) = \pi_S(y)\}.$$

Ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{tikzcd} R \times_T S \arrow[r, "\varepsilon_R"] \arrow[d, "\varepsilon_S"'] & R \arrow[d, "\pi_R"] \\ S \arrow[r, "\pi_S"'] & T \end{tikzcd}$$

onde ε_R e ε_S são as projeções naturais sobre R e S respectivamente.

Observação 3.1.2. O produto fibra é um subanel do produto direto.

A construção de exemplos explicítos de um produto fibra é dado por:

Exemplo 3.1.3. Seja $(T, \mathfrak{q}, k)$ um anel local noetheriano. Considere,

$$R = \frac{T[x_1, \ldots, x_n]}{I},\ S = \frac{T[y_1, \ldots, y_m]}{J},$$

em que $I \subset (x_1, \ldots, x_n)$ e $J \subset (y_1, \ldots, y_m)$ são ideais de R e S respectivamente. Denote por

$$P = \frac{T[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]}{(I, J, (x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m))}.$$

Então, $P \cong R \times_T S$. De fato: Perceba que pela propriedade universal do Pullback qualquer $u \in P$ é escrito de forma única como $u = c + f(\overline{x}) + g(\overline{y})$, com $f(\overline{x}) \in (x_1, \ldots, x_n)$, $g(\overline{y}) \in (y_1, \ldots, y_m)$ e $c = f(0) = g(0)$. Basta definir o isomorfismo $\varphi : P \to R \times_T S$ por $\varphi(c + f(\overline{x}) + g(\overline{y})) = (c + f(\overline{x}), c + g(\overline{y}))$.

Com as notações estabelecidas acima, denote a inclusão natural $i : R \times_T S \to R \times S$ e as projeções $\varepsilon_R : R \times S \twoheadrightarrow R$ e $\varepsilon_S : R \times S \twoheadrightarrow S$. Então, todo módulo finitamente gerado sobre R ou S, é também o é sobre P. Isto segue do fato das restrições a P de ε_R e ε_S serem sobrejetoras. De fato: Suponha $y \in S$; então $\pi_S(y) \in T$ e como π_R é sobrejetor, existe $x \in R$ tal que $\pi_R(x) = \pi_S(y)$, logo $(x, y) \in P$. Portanto, podemos induzir uma estrutura de P-módulos.

Por facilidade de notação, considere $I = \ker(\pi_R)$ e $J = \ker(\pi_S)$. É fácil ver que as seguintes sequências exatas de P-módulos são exatas

$$0 \to I \oplus J \to R \oplus S \overset{\pi_R \oplus \pi_S}{\to} T \oplus T \to 0$$
$$0 \to R \times_T S \to R \oplus S \overset{\pi_R - \pi_S}{\to} T \to 0.$$

Lema 3.1.4. (ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012, Lema 1.2) O produto fibra P é um anel noetheriano local com ideal maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_R \times_{\mathfrak{m}_T} \mathfrak{m}_S$.

Demonstração. Os anéis R e S são quocientes de P, então são P-módulos noetherianos. Dessa forma, o P-módulo $R \oplus S$ é um P-módulo noetheriano, assim como seus submódulos. Para ver que é local, suponha $(r, s) \notin \mathfrak{m}_R \times_{\mathfrak{m}_T} \mathfrak{m}_S$. Logo, sem perda de generalidade, $r \notin \mathfrak{m}$. Dessa forma, r é um elemento invertível de R. Como π_S é sobrejetor existe $s' \in S$ tal que $\pi_S(s') = \pi_R(r^{-1})$. Então, $\pi_S(ss') = \pi_R(rr^{-1}) = 1$. Considere $x = ss'$, que é um elemento invertível de S. Contudo, $(r^{-1}, x^{-1}s') \in P$, pois $\pi_S(x^{-1}s') = \pi_S(x^{-1})\pi_S(s') = 1 \cdot \pi_R(r^{-1})$. Além disso, $(r^{-1}, x^{-1}s')(r, s) = (1, 1)$. Portanto, todo elemento que não está em $\mathfrak{m}_R \times_{\mathfrak{m}_T} \mathfrak{m}_S$ é invertível.

□

Observação 3.1.5. (SCHNIBBEN, 2018, Observação 2.2.2) Os núcleos das projeções são da forma $\ker(\varepsilon_R) = \{(0, s); s \in \ker(\pi_S)\}$ e $\ker(\varepsilon_S) = \{(r, 0); r \in \ker(\pi_R)\}$.

Demonstração. Se $(r, s) \in \{(r, 0); r \in \ker(\pi_R)\}$, então $(r, s) = (r, 0)$, com $\pi_R(r) = 0$ e assim, $(r, s) \in \ker(\varepsilon_S)$. Por outro lado, suponha que $(r, s) \in \ker(\varepsilon_S)$. Logo, $\varepsilon_S(r, s) = s = 0$. Dessa forma, temos que $(r,s) = (r,0)$. Como $(r,s) \in R \times_T S$, temos por definição $\pi_R(r) = 0$. Portanto, segue a afirmação. $\square$

Observação 3.1.6. (SCHNIBBEN, 2018, Observação 2.2.3) Os ideais $\ker(\varepsilon_R)$, $\ker(\varepsilon_S)$ de P satisfazem $\ker(\varepsilon_R)\ker(\varepsilon_S) = \ker(\varepsilon_R) \cap \ker(\varepsilon_S) = 0$.

Demonstração. Como $\ker(\varepsilon_R)\ker(\varepsilon_S) \subset \ker(\varepsilon_R) \cap \ker(\varepsilon_S)$, basta verificar que, $\ker(\varepsilon_R) \cap \ker(\varepsilon_S) = 0$. Seja $(r,s) \in \ker(\varepsilon_R) \cap \ker(\varepsilon_S)$; então $(r,s) \in \ker(\varepsilon_R)$. Pela Observação 3.1.5, segue que, $(r,s) = (r,0)$, com $r \in \ker(\pi_S)$. Analogamente, temos $(r,s) = (0,s)$, com $s \in \ker(\pi_R)$. Daí, $(r,s) = (0,s) = (r,0)$ e portanto, $(r,s) = (0,0)$. $\square$

Quanto aos invariantes mais importantes, segue por (ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012) as seguintes relações:

Lema 3.1.7. (ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012, Lema 1.5) Sobre o produto fibra $R \times_T S$ temos as seguintes igualdades e desigualdades:

(i) $\dim(R \times_T S) = \text{máx}\{\dim(R), \dim(S)\} \geq \text{mín}\{\dim(R), \dim(S)\} \geq \dim(T)$;

(ii) $\operatorname{edim}(R \times_T S) \geq \operatorname{edim}(R) + \operatorname{edim}(S) - \operatorname{edim}(T)$;

(iii) $\operatorname{depth}(R \times_T S) \geq \text{mín}\{\operatorname{depth}(R), \operatorname{depth}(S), \operatorname{depth}(T) + 1\}$.

(iv) $\operatorname{depth}(T) \geq \text{mín}\{\operatorname{depth}(R), \operatorname{depth}(S), \operatorname{depth}(R \times_T S) - 1\}$.

A seguir um critério que estabelece a condição do produto fibra $R \times_T S$ ser Cohen-Macaulay.

Proposição 3.1.8. (ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012, Proposição 1.7) Suponha que T é um anel de Cohen-Macaulay de dimensão d. Então $R \times_T S$ é um anel de Cohen-Macaulay de dimensão d se, e somente se, R e S são anéis de Cohen-Macaulay de dimensão d. Além disso, se $\ker(\pi_R)$ e $\ker(\pi_S)$ são não nulos, então $R \times_T S$ nunca é Gorenstein.

Em (ENDO; GOTO; ISOBE, 2021) os autores aperfeiçoaram o resultado acima.

Lema 3.1.9. (ENDO; GOTO; ISOBE, 2021, Lema 1.1) Sobre um produto fibra temos as seguintes afirmações:

(i) O produto fibra $P = R \times_T S$ é noetheriano se, e somente se, R e S são noetherianos.

(ii) $(P, \mathfrak{m})$ é local se, e e somente se, $(R, \mathfrak{m}_R)$ e $(S, \mathfrak{m}_S)$ são locais. Em particular, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_R \times \mathfrak{m}_S \cap P$

(iii) Se $(R, \mathfrak{m}_R)$ e $(S, \mathfrak{m}_S)$ são Cohen-Macaulay com $\dim(R) = \dim(S) = d > 0$ e $\operatorname{depth}(T) \geq d - 1$, então $(P, \mathfrak{m})$ é Cohen-Macaulay de $\dim(P) = d$.

Observação 3.1.10. Um produto fibra da forma $R \times_T T$, é chamado de **produto fibra trivial**.

Observação 3.1.11. (SCHNIBBEN, 2018, Observação 2.2.7) Se uma das projeções ε_R ou ε_S de um produto fibra é isomorfismo, então $R \times_T S$ é um produto fibra trivial.

Demonstração. Suponha que $\varepsilon_R : R \times_T S \to R$ é um isomorfismo. Logo, pela Observação 3.1.5 temos

$$(0,0) = \ker(\varepsilon_R) = \{(0,s);\ s \in \ker(\pi_S)\}.$$

Segue que $\ker(\pi_S) = (0)$. Com isso, temos $S \cong T$, já que π_S é sobrejetora. Portanto,

$$R \times_T S \cong R \times_T T.$$

□

3.2 O caso $T = k$

Nesta seção abordaremos resultados conhecidos sobre o produto fibra em que $T = k$ um corpo. Considere $(R, \mathfrak{m}_R, k)$ e $(S, \mathfrak{m}_S, k)$ dois anéis locais e $P = R \times_k S$ com ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Para esse caso, o ideal maximal de $R \times_k S$ é da forma $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S$. Com isso, temos os seguintes isomorfismos, $R \cong P/\mathfrak{m}_S$ e $S \cong P/\mathfrak{m}_R$, isto é, $\ker(\varepsilon_R) = \mathfrak{m}_S$ e $\ker(\varepsilon_S) = \mathfrak{m}_R$. Assim, como no Lema 3.1.7, temos as seguintes situações sobre a dimensão de Krull e a profundidade do produto fibra $R \times_k S$:

(i) $\dim(R \times_k S) = \text{máx}\{\dim(R), \dim(S)\}$;

(ii) $\text{depth}(R \times_k S) = \text{mín}\{\text{depth}(R), \text{depth}(S), 1\}$.

Para provar o item (i), basta verificar que os ideais primos de $R \times_k S$ são da forma $Q \times S$ e $R \times Q'$, onde Q é um ideal primo de R e Q' ideal primo de S. O item (ii) segue por (CHRISTENSEN; STRIULI; VELICHE, 2010, Observação 3.2).

Pelo item (ii) temos $\text{depth}(R \times_k S) = \text{mín}\{\text{depth}(R), \text{depth}(S), 1\}$. Assim, caso um $R \times_k S$-módulo M finitamente gerado tenha dimensão projetiva finita, segue da fórmula de Auslander-Buchsbaum (2.5), que $\text{pd}_{R \times_k S}(M) \leq 1$. Além disso, $R \times_k S$ dificilmente é regular. Então, é interessante obter algum critério, para que o módulo M tenha dimensão projetiva finita. Uma abordagem é o seguinte Teorema:

Teorema 3.2.1. (NASSEH; SATHER-WAGSTAFF, 2017, Teorema 2.12) Sejam M e N módulos finitamente gerados sobre $P = R \times_k S$. São equivalentes:

(i) $\text{Tor}_i^P(M, N) = 0$ para $i \gg 0$.

(ii) $\mathrm{Tor}_i^P(M,N) = 0$ para todo $i \geq 2$.

(iii) $\mathrm{Tor}_i^P(M,N) = \mathrm{Tor}_{i+1}^P(M,N) = 0$ para algum $i \geq 5$.

(iv) $\mathrm{pd}_P(M) < \infty$ ou $\mathrm{pd}_P(N) < \infty$.

(v) $\mathrm{pd}_P(M) \leq 1$ ou $\mathrm{pd}_P(N) \leq 1$.

Definição 3.2.2. Dizemos que um anel noetheriano local $(R,\mathfrak{m},k)$ é **decomponível** se o ideal maximal pode ser escrito da seguinte forma, $\mathfrak{m} = I \oplus J$ em que I e J são ideais não trviais de R e $I \cap J = (0)$.

A seguir uma caracterização útil de anéis decomponíveis.

Proposição 3.2.3. (OGOMA, 1984, Lema 3.1) Seja $(R,\mathfrak{m},k)$ um anel noetheriano local. Então R é decomponível se, e somente se, R é isomorfo a um produto fibra sobre k,

$$R \cong \frac{R}{I} \times_k \frac{R}{J}$$

em que, $\mathfrak{m} = I \oplus J$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese, $\mathfrak{m} = I \oplus J$, em que I e J são ideais de R não triviais. Defina o seguinte isomorfismo,

$$\varphi : R \to \frac{R}{I} \times_k \frac{R}{J},$$

em que cada $r \in R$ é associado a $(r+I, r+J)$. Perceba que $(r+I, s+J) \in R/I \times_k S/J$, já que as classes de $r+I$ e $r+J$ são as mesmas em $k = R/\mathfrak{m}$. Vamos provar que φ é bijetora.

Primeiramente, suponha que $\varphi(r) = (r+I, r+J) = (0,0)$, assim $r \in I \cap J = (0)$. Logo, φ é injetora. Finalmente, seja $(r+I, s+J) \in R/I \times_k S/J$. Por definição do produto fibra temos $r+\mathfrak{m} = s+\mathfrak{m}$, logo $r-s \in \mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{m} = I \oplus J$, existem $x_1 \in I$ e $x_2 \in J$ tais que $r-s = x_1+x_2$. Defina $r' = r - x_1 = s + x_2$. Dessa forma, $\varphi(r') = (r'+I, r'+J) = (r+I, s+J)$. Portanto, segue o isomorfismo.

($\Leftarrow$) É trivial. □

Exemplo 3.2.4. O anel local $\dfrac{k[[x_1,\ldots,x_n,y_1\ldots,y_m]]}{(x_iy_j)}$ é decomponível, pois

$$\frac{k[[x_1,\ldots,x_n,y_1\ldots,y_m]]}{(x_iy_j)} \cong k[[x_1,\ldots,x_n]] \times_k k[[y_1\ldots,y_m]].$$

Este isomorfismo segue da Proposição 3.2.3.

Uma pergunta natural é: se as componentes do produto fibra são Cohen-Macaulay, faz com que o produto fibra seja Cohen-Macaulay?

A próxima Proposição estabelece uma equivalência para que isso ocorra.

Proposição 3.2.5. (NASSEH; TAKAHASHI; VANDEBOGERT, 2017, Proposição 2.1) O produto fibra $R \times_k S$ é um anel local de Cohen-Macaulay se, e somente se, $\dim(R \times_k S) \leq 1$ com R e S anéis locais de Cohen-Macaulay.

Proposição 3.2.6. (NASSEH; TAKAHASHI; VANDEBOGERT, 2017, Proposição 2.6) Um produto fibra não trivial $P = R \times_k S$ não é regular.

Demonstração. Por contradição, suponha que P é um anel regular. Perceba que P não é corpo, pois $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$, os ideais maximais de R e S respectivamente, são não nulos. Como P é regular, pela Proposição 3.2.5, temos que P tem dimensão 1 já que também é um anel local de Cohen-Macaulay. Como P é regular, segue que $\mathrm{pd}(P/\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S) < \infty$. Pela fórmula de Auslander-Buchsbaum (2.5) temos que, $\mathrm{depth}\left(\frac{P}{\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S}\right) + \mathrm{pd}\left(\frac{P}{\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S}\right) = \mathrm{depth}(P) = 1$. Em particular, $\mathrm{pd}\left(\frac{P}{\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S}\right) \leq 1$. Assim, utilizando a sequência exata curta,

$$0 \to \mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S \to P \to \frac{P}{\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S} \to 0,$$

implica que $\mathrm{pd}(\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S) = 0$. Dessa forma, $\mathfrak{m}_R \oplus \mathfrak{m}_S$ é um P-módulo livre. No entanto, $\mathfrak{m}_R\mathfrak{m}_S = 0$ pela Observação 3.1.6, logo temos $\mathfrak{m}_S = 0$, o que é uma contradição. $\square$

3.3 Ideais de interseção completa fraca

Nesta seção apresentaremos uma classe de ideais, que se comportam "quase"como um ideal maximal, para o cálculo da série de Poincaré sobre um caso de produto fibra.

Definição 3.3.1. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel noetheriano local e I um ideal de R. Dizemos que o ideal I é um ideal de **interseção completa fraca** se $\mathrm{Tor}_i^R\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{I}\right)$ é um $\frac{R}{I}$-módulo livre para todo i.

Os ideais de interseção completa fraca são caracterizados como aqueles que as matrizes da sua resolução livre minimal estão no próprio ideal. Veja a seguir:

Lema 3.3.2. (RAHMATI; STRIULI; YANG, 2018, Lema 2.2) Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado e $\mathbf{F}_\bullet$ um resolução livre minimal de M. Para um ideal I de R, são equivalentes:

(i) As matrizes da resolução de I sobre R satisfaz $\partial_i(F_i) \subset IF_{i-1}$;

(ii) O módulo $\mathrm{Tor}_i^R(M, R/I)$ é um R/I-módulo livre para todo i.

Exemplo 3.3.3. (i) Ideais maximais são ideais de interseção completa fraca.

De fato: Como toda resolução minimal de $\mathfrak{m}$ possui matrizes com coeficientes em $\mathfrak{m}$, segue do Lema 3.3.2 a afirmação.

(ii) Se I é um ideal de interseção completa, então também é de interseção completa fraca.

De fato: Como I é interseção completa, I é resolvido pelo complexo Koszul e dessa forma os coeficientes das matrizes estão no próprio ideal I. Portanto, pelo Lema 3.3.2, I também é um ideal de interseção completa fraca. Recíprocamente, em (VASCONCELOS, 1967, Corolário 1), o autor provou que um ideal I é interseção completa se, e somente se, I/I^2 é livre e a dimensão projetiva de I é finita. Como $I/I^2 \cong \mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/I)$, segue que I é um ideal de interseção completa se, e somente se, I é um ideal de interseção completa fraca e a dimensão projetiva de I é finita.

3.4 Cálculo direto dos números de Betti

Em (DRESS; KRÄMER, 1975) os autores estudaram o comportamento da série de Poincaré de um módulo finitamente gerado sobre o produto fibra no caso em que $T = k$. Eles mostraram que, a série de Poincaré do módulo M, quando visto como $R \times_k S$-módulo, tem a seguinte relação,

$$P_M^{R\times_k S}(t) = \frac{P_M^R(t)P_k^S(t)}{P_k^R(t) + P_k^S(t) - P_k^R(t)P_k^S(t)}. \tag{3.1}$$

A fim de generalizar a fórmula (3.1), os autores (RAHMATI; STRIULI; YANG, 2018) obtiveram êxito em demonstrar que num produto fibra $R \times_T S$ do tipo $R \overset{\pi'_R}{\twoheadrightarrow} S \overset{\pi_S}{\twoheadrightarrow} T$, em que o núcleo $\ker(\pi_S)$ é um ideal de interseção completa fraca, têm-se

$$P_M^{R\times_T S}(t) = \frac{P_M^R(t)P_T^S(t)}{P_T^R(t) + P_T^S(t) - P_T^R(t)P_T^S(t)}. \tag{3.2}$$

Já em (FREITAS; JORGE-PÉREZ, 2023) os autores utilizaram o cenário destacado em 3.2, para calcular os números de Betti de um módulo qualquer sobre o produto fibra $R \times_T S$. Para isso, utilizaram a seguinte fórmula de divisão séries: Dadas séries em que os coeficientes estejam em um corpo k, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_n t^n = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_n t^n}$ e $b_0 \neq 0$, temos

$$c_i = \frac{1}{b_0^i i!}\begin{vmatrix} 0 & ib_1 & ib_2 & \dots & ib_i \\ 0 & (i-1)b_0 & (i-1)b_1 & \dots & (i-1)b_{i-1} \\ 0 & 0 & (i-2)b_0 & \dots & (i-2)b_{i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Lema 3.4.1. (FREITAS; JORGE-PÉREZ, 2023, Lema 3.2) Seja M um $R \times_T S$-módulo; então

$$\beta_n^{R\times_T S}(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}, \forall n \geq 0, \tag{3.4}$$

em que $a_i = \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(M)\beta_{i-j}^S(T)$,

$$B_i = \frac{1}{b_0^i i!}\begin{vmatrix} 0 & ib_1 & ib_2 & \dots & ib_i \\ 0 & (i-1)b_0 & (i-1)b_1 & \dots & (i-1)b_{i-1} \\ 0 & 0 & (i-2)b_0 & \dots & (i-2)b_{i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

e $b_i = \beta_i^R(T) + \beta_i^S(T) - \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(T)\beta_{i-j}^S(T)$ para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Pela fórmula 3.2,

$$P_M^{R\times_T S}(t) = \frac{P_M^R(t)P_T^S(t)}{P_T^R(t) + P_T^S(t) - P_T^R(t)P_T^S(t)}.$$

Por definição, segue que

$$P_M^{R\times_T S}(t) = \frac{\left(\sum_{i\geq 0} \beta_i^R(M)t^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} \beta_i^S(T)t^i\right)}{\sum_{i\geq 0} \beta_i^R(T)t^i + \sum_{i\geq 0} \beta_i^S(T)t^i - \left(\sum_{i\geq 0} \beta_i^R(T)t^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} \beta_i^S(T)t^i\right)}.$$

Podemos fazer os seguintes agrupamentos no numerador

$$\left(\sum_{i\geq 0} \beta_i^R(M)t^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} \beta_i^S(T)t^i\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i^R(M)\beta_{n-i}^S(T)\right)t^n.$$

Já para o denominador,

$$\sum_{i\geq 0}\left(\beta_i^R(T)t^i + \beta_i^S(T)t^i\right) - \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i^R(T)\beta_{n-i}^S(T)\right)t^n = \sum_{i\geq 0}\left(\beta_i^R(T) + \beta_i^S(T) - \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(T)\beta_{i-j}^S(T)\right)t^i.$$

Assim,

$$P_M^{R\times_T S}(t) = \frac{\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(M)\beta_{i-j}^S(T)\right)t^i}{\sum_{i\geq 0}\left(\beta_i^R(T) + \beta_i^S(T) - \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(T)\beta_{i-j}^S(T)\right)t^i}.$$

Primeiramente, vamos calcular a seguinte divisão de séries pela fórmula 3.4.1,

$$\frac{1}{\sum_{i\geq 0}\left(\beta_i^R(T) + \beta_i^S(T) - \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(T)\beta_{i-j}^S(T)\right)t^i} = \sum_{i\geq 0} B_i t^i.$$

A fim de simplificar a notação, considere $b_i := \beta_i^R(T) + \beta_i^S(T) - \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(T)\beta_{i-j}^S(T)$. Como $b_0 = 1$, temos $B_0 = 1$. Para $i \geq 1$, os coeficientes B_i são calculados pelo seguinte determinante,

$$B_i = \frac{1}{b_0^i i!} \begin{vmatrix} 0 & ib_1 & ib_2 & \dots & ib_i \\ 0 & (i-1)b_0 & (i-1)b_1 & \dots & (i-1)b_{i-1} \\ 0 & 0 & (i-2)b_0 & \dots & (i-2)b_{i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Seja $a_i := \sum_{j=0}^{i} \beta_j^R(M)\beta_{i-j}^S(T)$ obtemos que

$$P_M^{R\times_T S}(t) = \left(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} B_i t^i\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}\right) t^n.$$

Portanto,

$$\beta_n^{R\times_T S}(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}.$$

$\square$

Observação 3.4.2. Note que no resultado anterior, $B_i \geq 0$. De fato, como $b_i \leq 0$ para $i \geq 1$, a prova desta afirmação segue por indução sobre

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} |b_i| B_{n-i}.$$

Proposição 3.4.3. (FREITAS; JORGE-PÉREZ, 2023, Proposição 3.15) Sejam $R \times_T S$ e M um R-módulo. Então,

(i) $\beta_0^{R\times_T S}(M) = \beta_0^R(M)$.

(ii) $\beta_1^{R\times_T S}(M) = \beta_0^R(M)\beta_1^S(T) + \beta_1^R(M)$.

(iii) $\beta_2^{R\times_T S}(M) = \beta_0^R(M)\beta_1^R(T)\beta_1^S(T) + \beta_0^R(M)\beta_2^S(T) + \beta_1^R(M)\beta_1^S(T) + \beta_2^R(M)$.

(iv) $\beta_i^{R\times_T S}(M) \geq \beta_0^R(M)\beta_i^S(T) + \beta_i^R(M)$ para todo $i \geq 1$. Em particular, $\beta_i^{R\times_T S}(M) \geq \beta_i^R(M)$ para todo $i \geq 0$.

CAPÍTULO

4

ALGUNS RESULTADOS SOBRE O PRODUTO FIBRA

Neste capítulo, iremos desenvolver algumas propriedades estruturais do produto fibra entre anéis locais. O estudo dessa estrutura vem sendo investigado por alguns autores, tanto no contexto algébrico (ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012; RAHMATI; STRIULI; YANG, 2018; NASSEH; SATHER-WAGSTAFF, 2017) como no contexto geométrico (FREITAS; JORGE-PÉREZ; MIRANDA, 2021; SCHWEDE, 2005; FREITAS; JORGE-PÉREZ; MIRANDA, 2022). Mesmo assim, ainda existem muitas perguntas naturais a serem investigadas sobre este anel, por exemplo:

- Quando é Cohen-Macaulay ou Gorenstein?
- Quando é regular ou singular?
- Quando tem multiplicidade minimal?
- Em que casos a série de Poincaré de um módulo sobre o produto fibra é uma função racional?

Com o intuito de estudar sobre as perguntas acima, apresentaremos resultados obtidos para responder de maneira parcial em alguns casos de produto fibra.

4.1 Singularidades e multiplicidades do produto fibra

Nas próximas seções, considere $(R,\mathfrak{m},k)$, $(S,\mathfrak{n},k)$ e $(T,\mathfrak{q},k)$ anéis noetherianos locais e o produto fibra $R\times_T S$, onde existem os homomorfismos sobrejetores,

$$R \overset{\pi_R'}{\to} S \overset{\pi_S}{\to} T, \tag{4.1}$$

tal que, $\pi_R = \pi_S \circ \pi'_R$. Neste diagrama os núcleos serão denotados por $I = \ker(\pi_R)$ e $J = \ker(\pi_S)$. Com esta consideração, temos a seguinte propriedade elementar.

Lema 4.1.1. Seja $R \times_T S$ o produto de fibra de um diagrama da forma (4.1). Então, $R \times_T S \cong R \times_{R/I+J} R/I$.

Demonstração. Como π_R e π_S são sobrejetoras, segue que $S \cong R/I$ e $T = S/J$. Portanto,

$$R \times_T S \cong R \times_{R/I+J} R/I.$$

□

Como vimos na Seção 3.1, todo R-módulo finitamente gerado M, é finitamente gerado sobre o produto fibra $R \times_T S$. A seguinte proposição estabelece a recíproca para este caso.

Proposição 4.1.2. Seja $R \times_T S$ o produto de fibra de um diagrama da forma (4.1). Se M é um $R \times_T S$-módulo finitamente gerado, então M é um R-módulo finitamente gerado. Em particular, o produto fibra $R \times_T S$ é um R-módulo finitamente gerado.

Demonstração. Para ver que um $R \times_T S$-módulo é R-módulo , é suficiente provar que existe um homomorfismo de anéis, $R \to R \times_T S$. Considere a aplicação diagonal, $\varphi : R \to R \times_{\frac{R}{I+J}} R$, definida por $\varphi(r) = (r, r)$ e a projeção natural $\pi : R \times_{\frac{R}{I+J}} R \to R \times_{\frac{R}{I+J}} R/I$. Compondo os homomorfismos, obtemos $\pi \circ \varphi : R \to R \times_{\frac{R}{I+J}} R/I$. Portanto, como $R \times_{\frac{R}{I+J}} R/I \cong R \times_T S$ (pelo Lema 4.1.1), temos um homomorfismo entre os anéis $R \to R \times_T S$. Para ver que é finitamente gerado, considere a seguinte sequência de homomorfismos,

$$R \xrightarrow{\varphi} R \times_{R/I+J} R \xrightarrow{\pi} R \times_T S.$$

O R-módulo $R \times_{R/I+J} R$ é finitamente gerado, (ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012; D'ANNA, 2006, Página 5, Observação 1 (c)). Além disso, como π é sobrejetora, temos que $R \times_T S$ é um $R \times_{R/I+J} R$-módulo finitamente gerado. Logo, $R \times_T S$ é um R-módulo finitamente gerado. Portanto, segue o resultado. □

Proposição 4.1.3. Seja $R \times_T S$ o produto de fibra de um diagrama da forma (4.1), tal que $\dim(R \times_T S) = \dim(T)$. Se $\operatorname{codim}(R \times_T S) < \operatorname{codim}(T)$, então $R \times_T S$ ou T não é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Suponha que $R \times_T S$ e T sejam anéis de Cohen-Macaulay. Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{codim}(R \times_T S) &= \operatorname{edim}(R \times_T S) - \dim(R \times_T S) \\
&\geq \operatorname{edim}(R) + \operatorname{edim}(S) - \operatorname{edim}(T) - \dim(R), \quad \text{Lema 3.1.7} \\
&= \operatorname{codim}(R) + \operatorname{edim}(S) - \operatorname{edim}(T).
\end{aligned}$$

Como $R \times_T S$ é Cohen-Macaulay, segue que $\dim(R) = \dim(S) = \dim(T)$ (Proposição 3.1.8). Somando e subtraindo $\dim(R)$ na desigualdade acima, obtemos que $\operatorname{codim}(R \times_T S) \geq \operatorname{codim}(T)$, o que contradiz a hipótese.

$\square$

Corolário 4.1.4. Seja T um anel de Cohen-Macaulay de dimensão d. Se $R \times_T S$ não for uma hipersuperfície de dimensão d, então T é uma hipersuperficíe ou um anel regular.

Demonstração. Suponha que $R \times_T S$ é uma hipersuperfície; então $\operatorname{codim}(R \times_T S) = 1$. Dessa forma, $R \times_T S$ é um anel de Cohen-Macaulay e, assim, pela Proposição 4.1.3, vimos que $\operatorname{codim}(R \times_T S) \geq \operatorname{codim}(T)$. Portanto, $\operatorname{codim}(T) = 1$ ou $\operatorname{codim}(T) = 0$. $\square$

Multiplicidades e produto fibra: A seguir introduziremos o conceito de multiplicidade de Hilbert-Samuel, onde escrevemos alguns critérios para decidir se o produto fibra é regular ou não.

Definição 4.1.5. Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de dimensão d, $I \subset R$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário de R e M R-módulo finitamente gerado. Definimos a multiplicidade de Hilbert-Samuel de M em relação a I como sendo

$$e(I;M) = \lim_{n\to\infty} \frac{d! \cdot \ell(M/I^n M)}{n^d}.$$

Denotamos a multiplicidade do ideal I por $e(I)$. Em particular, a multiplicidade do ideal maximal $e(\mathfrak{m};R)$, será denotada por $e(R)$. A multiplicidade de Hilbert-Samuel sempre é um número inteiro não negativo.

Lembre que o comprimento do R-módulo $\ell(M/I^n M)$, para n suficientemente grande é um polinômio. Para mais detalhes ver (ATIYAH M.F.; MACDONALD, 1969, Corolário 11.2).

Muitas propriedades já são conhecidas a respeito da multiplicidade de Hilbert-Samuel. Por exemplo, se $I \subseteq J$ são ideais de R com o mesmo fecho integral, isto é, então $e(I) = e(J)$. A recíproca vale se R for um anel equidimensional (isto é, $\dim(R) = \dim(R/P)$ para todo primo minimal de R) ver (REES, 1961). A seguir, enunciamos um critério importante que relaciona anéis regulares e a multiplicidade do anel.

Teorema 4.1.6. (NAGATA, 1962, Teorema de Nagata 40.6) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local.

(i) Se R é regular, então $e(R) = 1$.

(ii) Recíprocamente, se R é formalmente equidimensional e $e(R) = 1$, então R é regular.

Observação 4.1.7. (FREITAS; JORGE-PÉREZ, 2023, Observação 5.4) Considere o produto fibra $R \times_T S$ de anéis noetherianos locais. Então,

$$e(R \times_T S) = \begin{cases} e(R) + e(S) - e(T) & \text{se} \quad \dim(R) = \dim(S) = \dim(T); \\ e(R) + e(S) & \text{se} \quad \dim(R) = \dim(S) > \dim(T); \\ e(R) & \text{se} \quad \dim(R) > \dim(S) > \dim(T). \end{cases}$$

Proposição 4.1.8. Seja $R \times_T S$ um anel local. Suponha que vale uma das condições abaixo:

(i) $\dim(R) = \dim(S) > \dim(T)$.

(ii) $\dim(R) = \dim(S) = \dim(T)$ e $e(R) + e(S) \neq e(T) + 1$.

(iii) $e(R) > 1$ e $\dim(R) > \dim(S) > \dim(T)$.

Então, $R \times_T S$ não é regular.

Demonstração. (i) Como $\dim(R) = \dim(S) > \dim(T)$, segue da Observação 4.1.7 que $e(R \times_T S) = e(R) + e(S)$. Então, $e(R \times_T S) \geq 2$. Logo, o resultado segue pelo Teorema 4.1.6 (i).

(ii) Como $\dim(R) = \dim(S) = \dim(T)$, pela Observação 4.1.7, temos $e(R \times_T S) = e(R) + e(S) - e(T)$. Agora por hipótese, $e(R \times_T S) \geq 2$. Novamente, como no item (i), o resultado segue pelo Teorema 4.1.6.

(iii) A prova deste último item segue similarmente usando-se a Observação 4.1.7 e o Teorema 4.1.6. □

Proposição 4.1.9. Seja $R \times_T S$ uniformemente equidimensional, onde as componentes têm a mesma dimensão. Então, $R \times_T S$ é regular, se e somente se, $e(R) + e(S) - e(T) = 1$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se $R \times_T S$ é regular, segue do Teorema de Nagata 4.1.6 (i), que $e(R \times_T S) = 1$. Logo, pela Observação 4.1.7 temos, $e(R) + e(S) - e(T) = 1$.

$(\Leftarrow)$ Basta usar o item (ii) do Teorema de Nagata 4.1.6. □

Seja R um anel local e I um ideal próprio de R. Definimos o conjunto

$$R \bowtie I := \{(r,s);\ r,s \in R, s - r \in I\}.$$

É fácil ver que este conjunto é um subanel do anel $R \times R$. Este subanel é chamado de **duplicação de R ao longo de I**. Para ver mais propriedades, (D'ANNA, 2006).

Proposição 4.1.10. Seja R um anel noetheriano local e I um ideal regular de R (i.e. I contém um elemento não divisor de zero de R). Então, $R \bowtie I$ não é regular.

Demonstração. Considere as projeções canônicas $\pi_R = \pi_S : R \to R/I$ sobre o ideal I. Então, existe um isomorfismo, $R \times_{R/I} R \cong R \bowtie I$. Assim, como $\dim(R) > \dim(R/I)$, temos $e(R \bowtie I) = 2e(R)$ (Observação 4.1.7). Portanto, como $e(R) > 1$ pelo Teorema 4.1.6 (i), temos $R \bowtie I$ não é regular. □

A seguir apresentaremos o conceito de multiplicidade minimal, que surge nos trabalhos algébricos e geométricos dados por Abhyankar (ABHYANKAR, 1967). Ele demonstra um limitante inferior para a multiplicidade de Hilbert-Samuel. Mais especificamente, se considerarmos um anel noetheriano local de Cohen-Macaulay R, então

$$e(R) \geq \operatorname{edim}(R) - \dim(R) + 1. \tag{4.2}$$

Esta desigualdade nos leva a seguinte definição. Um anel local Cohen-Macaulay R, tem *multiplicidade minimal* se,

$$e(R) = \operatorname{edim}(R) - \dim(R) + 1.$$

Por exemplo, pelo Teorema de Nagata 4.1.6, os anéis regulares tem multiplicidade minimal.

Anéis de Cohen-Macaulay com multiplicidade minimal foram estudados por alguns autores, por exemplo, (SALLY, 1977; ABHYANKAR, 1967). Além disso, também foram dados extensões desta definição para ideais $\mathfrak{m}$-primários (VALLA, 1979).

Proposição 4.1.11. Sejam $R \times_T S$ um anel Cohen-Macaulay de dimensão d satisfazendo o diagrama (4.1). Suponha que $\ker(\pi_S)$ seja um ideal de interseção completa fraca e R um anel que tem multiplicidade minimal.

(i) Se $\ker(\pi'_R)$ não é um ideal regular de R, então $R \times_T S$ tem multiplicidade minimal se, e somente se, $\beta_1^S(T) = e(S)$ ou $\beta_1^S(T) = e(S) - e(T)$.

(ii) Se $\ker(\pi'_R)$ e $\ker(\pi_S)$ são ideais regulares de R e S, então $R \times_T S$ não tem multiplicidade minimal.

Demonstração. $(i)(\Rightarrow)$ Suponha que $R \times_T S$ tenha multiplicidade minimal, então

$$\begin{aligned} e(R \times_T S) &= \operatorname{edim}(R \times_T S) - \dim(R \times_T S) + 1 \\ &= \beta_1^S(T) + \operatorname{edim}(R) - \dim(R) + 1, \quad \text{pela Proposição 3.4.3.} \\ &= \beta_1^S(T) + e(R). \end{aligned} \tag{4.3}$$

A última igualdade segue do fato que R tem multiplicidade minimal. Agora, como $\ker(\pi'_R)$ não é um ideal regular, temos $\dim(R) = \dim(S)$. Considere dois casos um $\dim(T) < d$ e outro $\dim(T) = d$. No primeiro caso, pela Observação 4.1.7, temos $e(R \times_T S) = e(R) + e(S)$. Agora, comparando com (4.3), segue que $\beta_1^S(T) = e(S)$. No segundo caso, novamente pela

Observação 4.1.7, temos $e(R \times_T S) = e(R) + e(S) - e(T)$. Logo, pela equação 4.3 obtemos $\beta_1^S(T) = e(S) - e(T)$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\dim(T) = d$. Segue da Observação 4.1.7 e da equação (4.3) que $\beta_1^S(T) = e(S) - e(T)$. O caso $\dim(T) < d$ é similar.

(ii) Por hipótese temos, $\dim(R) > \dim(S) > \dim(T)$. Então, pela Observação 4.1.7, temos $e(R \times_T S) = e(R)$. Comparando com (4.3), obtemos $\beta_1^S(T) = 0$. Isto implica que T é livre como S-módulo; neste caso $S \cong T$. O que é uma contradição, pois $S \neq T$.

$\square$

Proposição 4.1.12. Sejam R um anel de Cohen-Macaulay com multiplicidade minimal e I um ideal de interseção completa fraca que é um R-módulo de Cohen-Macaulay maximal. Então, $R \bowtie I$ tem multiplicidade minimal se, somente se, $\beta_1^R(R/I) = e(R)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Observe que se R é Cohen-Macaulay e I um R-módulo Cohen-Macaulay maximal, $R \bowtie I \cong R \times_{R/I} R$ será um anel de Cohen-Macaulay (D'ANNA, 2006; ANANTHNARAYAN; AVRAMOV; MOORE, 2012, Teorema 1.8). Suponha que $R \bowtie I$ tenha multiplicidade minimal; então

$$\begin{aligned} e(R \bowtie I) &= \operatorname{edim}(R \bowtie I) - \dim(R \bowtie I) + 1 \\ &= \operatorname{edim}(R \times_{R/I} R) - \dim(R \times_{R/I} R) + 1, \quad \text{como } R \bowtie I \cong R \times_{R/I} R, \\ &= \beta_1^R(R/I) + \operatorname{edim}(R) - \dim(R) + 1, \quad \text{pela Proposição 3.4.3}, \\ &= \beta_1^R(R/I) + e(R), \quad \text{por hipótese.} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Segue pela Observação 4.1.7 e $R \bowtie I \cong R \times_{R/I} R$ que $e(R \bowtie I) = 2e(R)$. Comparando com (4.4) temos, $\beta_1^R(R/I) = e(R)$.

($\Leftarrow$) A recíproca é trivial. $\square$

4.2 Racionalidade da série de Poincaré de um caso de produto fibra

Nesta seção introduziremos o conceito de álgebras comprimidas de Gorenstein, com o intuito de dar uma resposta parcial à seguinte pergunta:

Pergunta: Sejam R uma anel noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Em que tipos de anéis a série de Poincaré de M é uma função racional?

Daremos uma resposta a esta pergunta num caso bem especial. Para isto, primeiramente faremos algumas definições.

Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ noetheriano local e $\hat{R}$ o completamento de R em relação ao ideal maximal $\mathfrak{m}$. Uma representação minimal de Cohen para R é da forma $\hat{R} = Q/I$, onde Q é um anel local regular, com ideal maximal $\mathfrak{n}$ e I um ideal de Q tal que $I \subseteq \mathfrak{n}^2$. Sabemos que tal representação existe pelo Teorema de estrutura de Cohen (BRUNZ W.; HERZOG, 1993, Teorema A.20). Em particular, $\operatorname{edim}(Q) = e = \operatorname{edim}(R)$.

A **função de Hilbert** h_R é definida por

$$h_R(i) = \dim_k \left(\frac{\mathfrak{m}^i}{\mathfrak{m}^{i+1}} \right), \text{ para } i \geq 0.$$

Relembre que, para o anel local regular Q, sua função de Hilbert é dada por

$$h_Q(i) = \binom{e+i-1}{e-1} \text{ para } i \geq 0. \tag{4.5}$$

Além disso, por 4.5 temos que, $I^i \subset \mathfrak{m}^i$ se, e somente se, $\dim_k \left(\frac{\mathfrak{m}^{i-1}}{\mathfrak{m}^i} \right) = \binom{e+i-2}{e-1}$. Se R tem comprimento finito, obtemos a igualdade $\ell(R) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} h_R(i)$.

Definição 4.2.1. Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel artiniano local. O **grau do socle de** R é o menor inteiro positivo s tal que $\mathfrak{m}^s \neq 0$ e $\mathfrak{m}^{s+1} = 0$. Denotaremos esse invariante por $s_R = \deg(\operatorname{Soc}(R))$. Além disso, este grau pode ser detectado pela função de Hilbert como $s_R := \max\{i;\ h_R(i) \neq 0\}$.

Lema 4.2.2. Seja $(R, \mathfrak{m}, k) \to (S, \mathfrak{s}, k)$ homomorfismo sobrejetor entre anéis locais artinianos. Então, $\deg(\operatorname{Soc}(S)) \leq \deg(\operatorname{Soc}(R))$.

Demonstração. Note que $S \cong R/I$, e suponha que $\deg(\operatorname{Soc}(R)) = s$; então $\mathfrak{m}^{s+1} \subset I$. Pela minimalidade de $\deg(\operatorname{Soc}(S))$, segue que $\deg(\operatorname{Soc}(S)) \leq s = \deg(\operatorname{Soc}(R))$. □

Á seguir uma propriedade do Socle do produto fibra em função de suas componentes.

Proposição 4.2.3. Seja $P = R \times_T S$ produto fibra de anéis locais. Então,

$$\deg(\operatorname{Soc}(P)) = \text{máx}\{\deg(\operatorname{Soc}(R)), \deg(\operatorname{Soc}(S))\}.$$

Em particular, se P é o produto de fibra de um diagrama da forma (4.1), então $\deg(\operatorname{Soc}(P)) = \deg(\operatorname{Soc}(R))$.

Demonstração. Seja $\text{máx}\{\deg(\operatorname{Soc}(R)), \deg(\operatorname{Soc}(S))\} = s$ e $\deg(\operatorname{Soc}(P)) = r$, então $(\mathfrak{m} \times_{\mathfrak{t}} \mathfrak{n})^{s+1} = 0$, pois $(\mathfrak{m} \times_{\mathfrak{t}} \mathfrak{n})^{s+1} \subset (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n})^{s+1} = (0,0)$. Pela minimalidade do $\deg(\operatorname{Soc}(P))$, temos $r \leq s$. Por outro lado, se $(a,b) \in (\mathfrak{m} \times_{\mathfrak{t}} \mathfrak{n})^r$ e $(a',b') \in \mathfrak{m} \times_{\mathfrak{t}} \mathfrak{n}$, ambos elementos não nulos. Agora, $(a,b) \cdot (a',b') = (0,0)$; então $aa' = 0 = bb'$ e $aa' \in \mathfrak{m}^{r+1}$ e $bb' \in \mathfrak{n}^{r+1}$. Novamente pela minimalidade do deg, segue que $r+1 \geq s+1$ e $r \geq s$. □

Suponha R é um anel artiniano local e Gorenstein com representação minimal de Cohen $\hat{R} = Q/I$, onde Q é um anel local regular. Para todo $i \geq 0$, existe a desigualdade

$$h_R(i) \leq \min\{h_Q(i), h_Q(s_R - i)\} = \min \left\{ \binom{\operatorname{edim}(R) + i - 1}{\operatorname{edim}(R) - 1}, \binom{e + s_R - i - 1}{\operatorname{edim}(R) - 1} \right\} =: \varepsilon_i^R.$$

Se a igualdade vale para todo i, então R é chamado de **álgebra comprimida de Gorenstein**. Em outras palavras, R é uma álgebra comprimida de Gorenstein se, $\dim_k \left(\frac{\mathfrak{m}^i}{\mathfrak{m}^{i+1}}\right) = \min\left\{\binom{e+i-1}{e-1}, \binom{e+s-i-1}{e-1}\right\}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, s$. Para mais detalhes, (ROSSI; SEGA, 2014, Proposição 4.2).

Proposição 4.2.4. Seja $R \times_T S$ o produto fibra de um diagrama da forma (4.1) tal que $\ker(\pi_S)$ um ideal de interseção completa fraca. Se R e S são álgebras comprimidas de Gorenstein com, $\deg(\mathrm{Soc}(R)) \neq 3 \neq \deg(\mathrm{Soc}(S)) \geq 2$ e $\mathrm{edim}(S) > 1$, então $P_M^{R \times_T S}(t)$ é uma função racional, para todo R-módulo M finitamente gerado.

Demonstração. Pela hipótese e pelo Lema 4.2.2 temos que, $\deg(\mathrm{Soc}(R)) \geq 2$. Agora por (ROSSI; SEGA, 2014, Teorema 5.1), existem funções racionais

$$P_M^R(t) = \frac{p_M(t)}{d_R(t)}, \quad P_T^R(t) = \frac{p_T^*(t)}{d_R(t)}, \quad P_T^S(t) = \frac{\overline{p_T}(t)}{\overline{d_S}(t)}.$$

Agora pela fórmula (3.2) segue que a série de Poincaré $P_M^{R \times_T S}(t)$ é racional.

□

De maneira análoga, para $T = k$ um corpo, segue o resultado.

Proposição 4.2.5. Seja $P = R \times_k S$ o produto fibra sobre k e M um R-módulo finitamente gerado. Suponha que R e S são álgebra comprimida de Gorenstein tais que

(i) $\mathrm{edim}(R) > 1$ e $\mathrm{edim}(S) > 1$.

(ii) $\deg(\mathrm{Soc}(R)) \geq 2$ e $\deg(S) \geq 2$.

Então, $P_M^{R \times_k S}(t)$ é uma função racional.

CAPÍTULO

5

ANÉIS Tor-COMPATÍVEIS E ANULAMENTO DO Ext

Neste capítulo, iremos trabalhar sobre a classe de anéis Tor-compatíveis, isto é, se $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para quaisquer R-módulos finitamente gerados para algum $i > 0$, então M ou N tem dimensão projetiva finita. Tal definição foi inspirada pelo célebre Teorema (HUNEKE; WIEGAND, 1994, Teorema 1.9), que de maneira geral diz que, se $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = \operatorname{Tor}_{i+1}^R(M,N) = 0$ para algum $i > 0$, onde R é uma hipersuperfície, então M ou N tem dimensão projetiva finita. Naturalmente, houveram questionamentos sobre quais outros tipos de anéis o mesmo desfecho ocorre. Na primeira seção, faremos uma breve apresentação sobre tais anéis, com alguns tipos que satisfaz essa condição. Em particular, certos anéis de Cohen-Macaulay dependendo da codimensão e multiplicidade (LYLE; MONTAÑO, 2020), anéis de Golod (JORGENSEN, 1999), assim como o produto fibra entre anéis locais com $T = k$ um corpo (NASSEH; SATHER-WAGSTAFF, 2017).

5.1 Anéis Tor-compatíveis e a Conjectura de Auslander-Reiten

A definição formal dessa classe de anéis é a seguinte:

Definição 5.1.1. Um anel R é Tor**-compatível** se, para quaisquer dois R-módulos finitamente gerados M,N com $\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para algum $i \gg 0$, temos $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$ ou $\operatorname{pd}_R(N) < \infty$.

Para exemplificarmos com algumas classes de anéis que são Tor-compatíveis, primeiramente iremos definir alguns conceitos que são necessários.

Anéis de Golod: Suponha que $(Q,\mathfrak{m},k)$ e $(R,\mathfrak{n},k)$ são anéis locais com mesmo corpo residual k e $\varphi : Q \to R$ um homomorfismo local (isto é, $\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$). Serre demonstrou que para todo

R-módulo M, a série de Poincaré de M sobre R satisfaz a seguinte desigualdade para seus coeficientes,

$$P_M^R \preccurlyeq \frac{P_M^Q}{1+z-zP_R^Q}.$$

Para mais detalhes, ver (AVRAMOV, 1998, 3.3.2). Se a igualdade vale para $M = k$, então φ é chamada de homomorfismo de Golod. Um R-módulo M é chamado de **módulo de Golod** se a igualdade vale para $\hat{M}$ quando φ é uma representação minimal de Cohen do completamento $\hat{R}$. O anel R é chamado de **anel de Golod** se k é um R-módulo de Golod.

Reduções minimais: Sejam R um anel e $J \subset I$ ideais de R. Dizemos que J é uma **redução de** I se existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $JI^n = I^{n+1}$. O ideal J é chamado de redução minimal se, $J \subseteq I'$, para toda redução I' de I.

Comprimento mínimo: Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel artiniano local. Definimos o comprimento mínimo de R como $\ell\ell(R) = \text{mín}\{i \in \mathbb{N}; \mathfrak{m}^i = 0\}$. Se R é Cohen-Macaulay, sempre podemos reduzir ao caso artiniano (Observação 5.1.2) e calcular o comprimento mínimo da seguinte forma: o comprimento mínimo de R é o máximo dos comprimentos mínimos de todas a reduções minimais artinianas de R e será denotado por $\ell\ell(R) = \ell$.

Observação 5.1.2. Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local Cohen-Macaulay, sempre é possível reduzir R ao caso artiniano com mesma codimensão e multiplicidade. De fato: Primeiramente estendemos R para à álgebra plana $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$. Deste modo, podemos assumir que R tem corpo residual k infinito. Depois fazemos o quociente de R por uma redução minimal de $\mathfrak{m}$.

A seguir, enunciamos a lista de anéis que são Tor-compatíveis.

Teorema 5.1.3. (i) Se R é um anel local Golod (JORGENSEN, 1999, Teorema 3.1).

(ii) Se R decomponível (NASSEH; SATHER-WAGSTAFF, 2017, Teorema 2.12).

(iii) Seja R um anel local Cohen-Macaulay com, $c = \text{codim}(R)$, multiplicidade $e(R)$ e comprimento mínimo $\ell\ell(R) = \ell$. Então, os seguintes casos são anéis Tor-compatíveis:

(a) Se $c \leq 1$, (R é uma hipersuperfície ou um anel regular) (HUNEKE; WIEGAND, 1997, Teorema 1.9).

(b) Se $c = 3$ ou $c = 4$ e R é Gorenstein e o completamento $\hat{R}$ não possui mergulho de deformação (isto é, $\hat{R} \cong Q/(f)$, onde Q é um anel noetheriano local e f uma sequência regular) (SEGA, 2002, Proposição 4.10, 2.1).

(c) Se R é Gorenstein com $c \neq 1$ onde o completamento $\hat{R}$ não possui mergulho de deformação e $e(R) \leq 7$ ou $e(R) \leq 11$ (LYLE; MONTAÑO, 2020, Proposição 4.8).

(d) Se $e(R) < \frac{4c+2\ell-1-\sqrt{4c+4\ell-3}}{2}$ (LYLE; MONTAÑO, 2020, Teorema 4.2).

(e) Se não é uma interseção completa com $c = 2$ (SCHEJA, 1964; JORGENSEN; SEGA, 2003, Proposição 1.1).

Para mais propriedades sobre anéis Tor-compatíveis ver (AVRAMOV *et al.*, 2022).

A seguir apresentaremos alguns conceitos que utilizamos para responder de maneira parcial, a conjectura de Auslander-Reiten. Isto é,

Conjectura de Auslander-Reiten: Sejam R noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{Ext}_R^i(M, M \oplus R) = 0$, para todo $i > 0$, então M é livre.

Proposição 5.1.4. (AVRAMOV *et al.*, 2022) Sobre um anel local R são equivalentes:

(i) R é um anel Tor-compatível;

(ii) Se U e V são R-complexos tais que, $\mathrm{H}(U)$ e $\mathrm{H}(V)$ são finitamente gerados e $\operatorname{Ext}(U,V)$ é limitado, então U é perfeito ou V é quasi-isomorfo a um complexo limitados de R-módulos injetivos;

(iii) Se U e V são R-complexos tais que, $\mathrm{H}(U)$ e $\mathrm{H}(V)$ tem comprimento finito e $\operatorname{Ext}(U,V)$ é limitado, então U é perfeito ou V é quasi-isomorfo a um complexo limitados de R-módulos injetivos.

Definição 5.1.5. Dizemos que um anel local R satisfaz a **condição uniforme de Auslander** se existe um inteiro b tal que, quaisquer R-módulos M e N finitamente gerados, têm-se: $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$ para i suficientemente grande implica que $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$ para todo $i > b$. O número b é chamado **limitante uniforme de Auslander**.

Anéis que satisfazem a definição acima, implicam na Conjectura de Auslander-Reiten.

Teorema 5.1.6. (CHRISTENSEN; HOLM, 2010, Teorema A) Sejam R um anel noetheriano que satisfaz a condição uniforme de Auslander e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{Ext}_R^i(M,M) = 0$ e $\operatorname{Ext}_R^i(M,R) = 0$ para i suficientemente grande, então M é projetivo.

A seguir, uma prova diferente de que anéis Tor-compatíveis satisfaz a conjectura de Auslander-Reiten; observamos também que o Teorema 5.1.7 não é encontrado em nenhuma bibliografia. Vale ressaltar que para algumas classes particulares deste anel foram provadas que essa conjectura é verdadeira.

Teorema 5.1.7. Se R é um anel Tor-compatível, então a conjectura de Auslander-Reiten vale para R.

Demonstração. Mostremos que R satisfaz a condição uniforme de Auslander. De fato: Seja M um R-módulo finitamente gerado. Como R é Tor-compatível, segue pela Proposição 5.1.4 e como $\operatorname{Ext}_R^i(M, M \oplus R) = 0$, para todo $i \geq 1$, implica que, $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$ ou $\operatorname{id}_R(M \oplus R) < \infty$. Se $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$, segue da fórmula de Auslander-Buchsbaum que $\operatorname{pd}_R(M) \leq \operatorname{depth}(R)$. Caso $\operatorname{id}_R(M \oplus R) < \infty$ segue da Fórmula de Bass que $\operatorname{id}_R(M \oplus R) \leq \operatorname{depth}(R)$. Em ambos os casos o limitante uniforme de Auslander é $\operatorname{depth}(R)$. Portanto, pelo Teorema 5.1.6 segue o resultado. $\square$

Corolário 5.1.8. De maneira imediata, se R satisfaz alguma das condições do Teorema 5.1.3, então vale a conjectura de Auslander-Reiten.

5.2 Sobre o critério de liberdade de M^*

Nesta seção iremos a estudar o critério de liberdade do R-módulo $M^* := \mathrm{Hom}_R(M,R)$. Mas, primeiramente vamos definir a transposta de Auslander, que será fundamental para a demonstração de nossos resultados.

Transposta de Auslander-Bridger: Sejam R um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado e considere o começo de uma resolução livre minimal de M sobre R,

$$F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0. \tag{5.1}$$

Dualizando a resolução 5.1, ou seja, aplicando o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ obtemos,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,R) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathrm{Hom}_R(F_0,R) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}_R(F_1,R) \to \cdots$$

onde, $\partial_i^* : \mathrm{Hom}_R(F_i,R) \to \mathrm{Hom}_R(F_{i-1},R)$ é definida como, $\partial_i(f)^* = \partial_i \circ f$. Por facilidade, denote $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ e $\mathrm{Hom}_R(F_i,R)$ por M^* e F_i^* respectivamente, para $i = 0,1$. A *Transposta de Auslander* que vamos denotar por $\mathrm{D}_n M$ é definida como,

$$\mathrm{D}_n M = \mathrm{coker}(F_0^* \to F_1^*) = \frac{F_1^*}{\mathrm{im}(\partial_1^*)}.$$

Fácil ver que temos a seguinte sequência exata,

$$0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to \mathrm{D}M \to 0.$$

De maneira geral, a n-ésima transposta de Auslander denotada por $\mathrm{D}_n M$ é definida como sendo

$$\mathrm{D}_n M = \mathrm{coker}(F_n^* \to F_{n-1}^*) = \frac{F_{n-1}^*}{\mathrm{im}(F_n^*)},$$

onde,

$$F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

é uma resolução livre minimal de M sobre R.

Observação 5.2.1. Note que, para todo $0 \leq i \leq n$, $\mathrm{D}_n M = \mathrm{D}_{n-i}\Omega_R^i M$.

A partir desse momento trataremos sobre módulos Tor-*rígido*. Esta classe de módulos vem sendo estudada ao longo dos anos por alguns autores (AUSLANDER, 1960; HUNEKE; WIEGAND, 1994; HUNEKE; WIEGAND, 1997). Assim, damos as seguintes definições:

Diremos que um par (M,N) de R-módulos finitamente gerados é *rígido* se $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ então, $\mathrm{Tor}_{i+j}^R(M,N) = 0$ para todo $j \geq 0$. Em particular, M é Tor-*rígido* se, para todo R-módulo finitamente gerado N, o par (M,N) é rígido.

Além disso, se o par (M,N) é tal que $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para todo $i \geq 1$, dizemos que o par (M,N) são Tor-*independentes*.

Auslander estudou muitas propriedades sobre esses módulos (AUSLANDER, 1960). Por exemplo, se (M,N) são Tor-*independentes*, então toda sequência regular sobre M, é regular sobre R (AUSLANDER, 1960, Teorema 4.3). Observe que todo módulo finitamente gerado M sobre uma anel local regular R é Tor-*rígido*.

Dois módulos finitamente gerados M e N satisfazem a **fórmula do** depth se,

$$\mathrm{depth}_R(M) + \mathrm{depth}_R(N) = \mathrm{depth}_R(R) + \mathrm{depth}_R(M \otimes_R N). \tag{5.2}$$

No geral, essa fórmula é falsa. Como contra-exemplo, basta considerar módulos que tenham depth nulo, e o anel R com depth positivo. Então, muitas vezes se questionam quais pares de R-módulos satisfazem 5.2. Auslander provou o seguinte Teorema:

Teorema 5.2.2. (AUSLANDER, 1960) Sejam M e N dois módulos não nulos sobre um anel local R, tal que $\mathrm{pd}_R(M) < s < \infty$. Seja q o maior inteiro tal que $\mathrm{Tor}_q^R(M,N) \neq 0$. Se $\mathrm{depth}(\mathrm{Tor}_q^R(M,N)) \leq 1$ ou $q = 0$, então

$$\mathrm{depth}_R(N) = \mathrm{depth}_R(\mathrm{Tor}_q^R(M,N)) + \mathrm{pd}_R(M) - q. \tag{5.3}$$

Em (HUNEKE; WIEGAND, 1994, Proposição 2.5) foi provado que a fórmula do depth 5.2, é válida para R um anel de interseção completa sobre módulos Tor-*independentes*. Perceba que o fato dos módulos serem Tor-*independentes*, faz com que a condição $q = 0$ seja satisfeita no Teorema 5.2.2. Em particular, o mesmo vale se o anel R é regular. De maneira geral, para anéis Tor-compatíveis temos a seguinte observação.

Observação 5.2.3. Sejam R Tor-compatível, M e N dois módulos finitamente gerados tais que $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) = 0$ para todo $i \geq 1$ (Tor-*independentes*). Então,

$$\mathrm{depth}_R(M) + \mathrm{depth}_R(N) = \mathrm{depth}(R) + \mathrm{depth}_R(M \otimes_R N).$$

Para mostrar isto é sufiente usar o Teorema 5.2.2 e a fórmula de Auslander-Buchsbaum Teorema 2.5.

Antes de enunciar um dos resultados principais do trabalho, segue alguns fatos já conhecidos.

Lema 5.2.4. (JOTHILINGAM; DURAIVEL, 2010, Lema) Sejam R um anel local noetheriano, M e N dois R-módulos finitamente gerados, com $N \neq (0)$. Suponha que $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, \mathrm{máx}\{\mathrm{depth}_R(N) - 2, 1\}$. Então, $\mathrm{depth}_R(N) \leq \mathrm{depth}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N))$.

Teorema 5.2.5. (AUSLANDER, 1969, Teorema 2.8) Seja M um R-módulo finitamente gerado e $i \in \mathbb{Z}$ um inteiro não negativo. Então existe as seguintes sequências exatas dos funtores,

(i)
$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{D}\Omega^i M, -) \to \mathrm{Tor}^R_i(M, -) \to (\mathrm{Ext}^i_R(M,R), -) \to \mathrm{Ext}^2_R(\mathrm{D}\Omega^i M, -);$$

(ii) Temos a sequência de Auslander,
$$\mathrm{Tor}^R_2(\mathrm{D}\Omega^i_R M, N) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,R) \otimes_R N \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \to \mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{D}\Omega^i_R M, N) \to 0. \quad (5.4)$$

Com isso estamos aptos a enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, que caracteriza (de forma parcial) sobre quando o dual de um módulo finitamente gerado é livre.

Teorema 5.2.6. Sejam R um anel local Tor-compatível e M,N dois R-módulos finitamente gerados não nulos. Suponha que N é Tor-rígido e $\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = 0$ para $i = 1, \ldots, \text{máx}\{1, \mathrm{depth}_R(N) - 2\}$. Então, M^* é livre ou $\mathrm{pd}_R(N) < \infty$.

Demonstração. Para provar este Teorema seguiremos alguns passos:

(1) Verificar que, $\mathrm{Ext}^1_R(M,R) = 0$.

(2) Ver que,

   (a) $\mathrm{Tor}^R_j(\mathrm{D}M, N) = 0$, $\forall j \geq 1$.

   (b) $\mathrm{Tor}^R_j(M^*, N) = 0 \ \forall j \geq 1$.

(3) Concluindo que,

   (c) $M^* \otimes_R N \cong \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

   (d) $\mathrm{pd}_R(M^*) < \infty$ ou $\mathrm{pd}_R(N) < \infty$.

(4) Utilizando que $\mathrm{pd}_R(M^*) < \infty$, verificar que $\mathrm{pd}(M^*) = 0$.

Para ver (1) temos por hipótese, $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = 0$, logo a sequência de Auslander (5.4) nos fornece que,
$$\mathrm{Tor}^R_1(\mathrm{D}\Omega^1_R M, N) = 0.$$
Como N é Tor-*rígido*, temos
$$\mathrm{Tor}^R_i(\mathrm{D}\Omega^1_R M, N) = 0, \text{ para todo } i \geq 1. \quad (5.5)$$

Em particular, $\mathrm{Tor}^R_2(\mathrm{D}\Omega^1_R, N) = 0$ e assim novamente pela sequência de Auslander (5.4) implica que, $\mathrm{Ext}^1_R(M,R) \otimes_R N = 0$. Logo, $\mathrm{Ext}^1_R(M,R) = 0$, pois N é não nulo.

Para (2) considere a seguinte sequência o começo de uma resolução livre minimal de M,

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0.$$

Por definição, temos as seguintes sequências exatas envolvendo as syzygias,

$$0 \to \Omega_R^1 M \to F_0 \to M \to 0 \tag{5.6}$$

e

$$F_2 \to F_1 \to \Omega_R^1 M \to 0. \tag{5.7}$$

Utilizando a sequência exata (5.6), podemos construir uma sequências exata longa de $\mathrm{Ext}_R(-,R)$. Contudo, temos o anulamento $\mathrm{Ext}_R^1(M,R) = 0$, o que nos fornece a seguinte sequência exata,

$$0 \to M^* \to F_0^* \to (\Omega_R^1 M)^* \to 0. \tag{5.8}$$

Além disso, a sequência (5.7) implica que,

$$0 \to (\Omega_R^1 M)^* \to F_1^* \to F_2^* \to \mathrm{D}\Omega_R^1 M \to 0 \tag{5.9}$$

onde, podemos colocar o primeiro zero pois, o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ é exato à esquerda. Além disso, para o outro zero temos por definição,

$$\mathrm{D}\Omega_R^1 M = \frac{F_2^*}{\mathrm{im}(F_1^*)}.$$

Agora como consequência das sequências (5.8) e (5.9), segue que a seguinte sequência é exata,

$$0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to \mathrm{D}M \to 0\,. \tag{5.10}$$

Como $F_1^* \to F_2^* \to F_3^*$ é um complexo, $\mathrm{D}M$ é a imagem de $F_1^* \to F_2^*$ pois

$$\mathrm{D}M = \frac{F_1^*}{\mathrm{im}(F_0^*)} = \frac{F_1^*}{\ker(F_1^* \to F_2^*)} \cong \mathrm{im}(F_1^* \to F_2^*).$$

Logo, obtemos a seguinte sequência exata curta,

$$0 \to \mathrm{D}M \to F_2^* \to \mathrm{D}\Omega_R^1 M \to 0\,. \tag{5.11}$$

Como N é Tor-*rígido* e utilizando (5.5) com as sequências (5.10) e (5.11) obtemos que

(a) $\mathrm{Tor}_j^R(\mathrm{D}M, N) = 0$ para todo $j \geq 1$;

(b) $\mathrm{Tor}_j^R(M^*, N) = 0$ para todo $j \geq 1$;

Utilizando (a) e a sequência de Auslander (5.4) no caso $i = 0$, implica no isomorfismo

$$M^* \otimes_R N \cong \mathrm{Hom}_R(M,N). \tag{5.12}$$

Além disso, pelo item (b), como R é Tor-compatível e pela Observação 5.2.3, segue as seguintes afirmações:

(c) $\mathrm{pd}_R(M^*) < \infty$ ou $\mathrm{pd}_R(N) < \infty$;

(d) $\mathrm{depth}_R(M^*) + \mathrm{depth}_R(N) = \mathrm{depth}(R) + \mathrm{depth}_R(M^* \otimes_R N)$, Observação 5.2.3.

O que conclui o item (3).

Por (c), falta provar que M^* é livre, assumindo $\mathrm{pd}_R(M^*) < \infty$. De fato, pela fórmula de Auslander-Buchsbaum, temos $\mathrm{depth}(R) \geq \mathrm{depth}(M^*)$. Agora por (d), implica que

$$\mathrm{depth}_R(N) \geq \mathrm{depth}_R(M^* \otimes_R N) = \mathrm{depth}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N)),$$

onde a última igualdade segue de 5.12. Pelo Lema 5.2.4, temos

$$\mathrm{depth}_R(N) = \mathrm{depth}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N)),$$

logo, $\mathrm{depth}_R(M^*) = \mathrm{depth}(R)$ por (iv). Agora $\mathrm{pd}_R(M^*) = 0$, pela fórmula de Auslander-Buchsbaum 2.5. Portanto, M^* é livre. □

Observação 5.2.7. A demostração do Teorema 5.2.6 acima é uma adaptação de um resultado obtido em um manuscrito (ver (FREITAS *et al.*, 2023, Teorema 12)).

Lema 5.2.8. (DAO; EGHBALI; LYLE, 2021, Lema 3.3) Suponha que $\mathrm{Ext}_R^i(M,R) = 0$, para $1 \leq i \leq t$ onde $\mathrm{depth}(R) = t$. Então, M^* livre implica que M é livre.

Corolário 5.2.9. Sejam R um anel Tor-compatível e M, N dois R-módulos não nulos finitamente gerados. Suponha que $\dim(R) \leq 3$ e N um R-módulo Tor-*rígido*. Se $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) = 0$ e $\mathrm{pd}_R(N) = \infty$, então M^* é livre.

Corolário 5.2.10. Sejam R um anel Tor-compatível e M, N dois R-módulos não nulos finitamente gerados com $\mathrm{pd}_R(N) = \infty$. Suponha que

(i) N é Tor-*rígido*.

(ii) $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, \text{máx}\{1, \mathrm{depth}_R(N) - 2\}$.

(iii) $\mathrm{Ext}_R^j(M,R) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, \mathrm{depth}(R)$.

Então, M é livre.

Demonstração. Sabemos que M^* é livre pelo Teorema 5.2.6. Agora, por (iii) e Lema 5.2.8, implica que M é livre. □

Corolário 5.2.11. Sejam R um anel Tor-compatível e M, N dois R-módulos não nulos finitamente gerados com $\mathrm{depth}(R) \leq 1$ e $\mathrm{pd}_R(N) = \infty$. Se N é um R-módulo Tor-*rígido* e $\mathrm{Ext}_R^i(M,N) = 0$ para $i = 1, \ldots, \text{máx}\{1, \mathrm{depth}_R(N) - 2\}$ então, M é livre.

Demonstração. Como $\operatorname{Ext}^1_R(M,N)=0$ e N é Tor-*rígido*, pela sequência de Auslander 5.4, temos $\operatorname{Tor}_i^R(\mathrm{D}\Omega^1_R M,N)=0$, para todo $i\geq 1$. Novamente pela sequência de Auslander 5.4, deduzimos $\operatorname{Ext}^1_R(M,R)\otimes_R N=0$ e como N é não nulo, temos $\operatorname{Ext}^1_R(M,R)=0$, logo o resultado segue do Corolário 5.2.10. □

Corolário 5.2.12. Suponha que R satisfaz algumas das condições do Teorema 5.1.3. Se M e N são finitamente gerados, com N Tor-*rígido* e $\operatorname{Ext}^i_R(M,N)=0$ para $i=1,\ldots,\text{máx}\{1,\operatorname{depth}_R(N)-2\}$, então M^* é livre ou $\operatorname{pd}_R(N)<\infty$.

Corolário 5.2.13. Sejam $R\times_k S$ um produto fibra com $\operatorname{depth}(R)=0$ ou $\operatorname{depth}(S)=0$ e M, N dois $R\times_k S$-módulos finitamente gerados. Suponha que N é Tor-*rígido* e $\operatorname{Ext}^i_{R\times_k S}(M,N)=0$ para $i=1,\ldots,\text{máx}\{1,\operatorname{depth}_{R\times_k S}(N)-2\}$. Então, M^* ou N é livre.

Demonstração. Diretamente do Teorema 5.2.6, segue que M^* é livre ou $\operatorname{pd}_{R\times_k S}(N)<\infty$. Agora, por (NASSEH; SATHER-WAGSTAFF, 2017, Teorema 2.7 item (iv)), segue que N deve ser livre. Portanto, M^* ou N é livre. □

Corolário 5.2.14. (CELIKBAS; TAKAHASHI, 2020, Corolário 1.3) Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel local com $\operatorname{depth}(R)>0$ e M um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{Tor}_i^R(\mathfrak{m}^t,M)=0$ com $t>0$ para algum $i>0$, então $\operatorname{pd}_R(M)<\infty$ e $\operatorname{Tor}_i^R(\mathfrak{m}^t,M)=0$, para todo $i\geq\operatorname{pd}_R(M)$. Em particular, $\mathfrak{m}^t$ é Tor-*rígido*.

Teorema 5.2.15. (DAO.; KOBAYASHI.; TAKAHASHI, 2020, Teorema 1.1) Seja $(R,\mathfrak{m})$ um anel local e I um ideal de R tal que $\mathfrak{m}I\neq\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m})$.

(i) Seja M um R-módulo finitamente gerado. Se $\operatorname{Tor}_n^R(R/I,M)=\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/I,M)=0$, para algum inteiro positivo n então $\operatorname{pd}_R(M)\leq n$.

(ii) Se $\operatorname{pd}_R(R/I)<\infty$, então R é um anel regular.

Exemplo 5.2.16. (DAO.; KOBAYASHI.; TAKAHASHI, 2020, Exemplo 2.2(iii)) Se $\operatorname{depth}(R)>0$, então para $t>0$, temos $\mathfrak{m}^t\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^t:\mathfrak{m})$.

Observação 5.2.17. Perceba que o Corolário 5.2.14 com o Exemplo 5.2.16, para anéis R com $\operatorname{depth}(R)>0$, nos fornece uma família de módulos Tor-*rígidos* na forma de $R/\mathfrak{m}^n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Demonstração. Suponha que para algum $t\in\mathbb{N}$, temos $\operatorname{Tor}_i^R(\mathfrak{m}^t,M)=0$ para todo $i\geq\operatorname{pd}_R(M)=n$. Pela sequência exata

$$0\to\mathfrak{m}^t\to R\to R/\mathfrak{m}^t\to 0,$$

obtemos a sequência exata longa (Teorema 2.5.1)

$$\cdots\to\operatorname{Tor}_{n+1}^R(\mathfrak{m}^t,M)\to\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R,M)\to\operatorname{Tor}_{n+1}^R(R/\mathfrak{m}^t,M)\to\operatorname{Tor}_n^R(\mathfrak{m}^t,M)\to\cdots.$$

Contudo, $\operatorname{Tor}_{n+k}^{R}(\mathfrak{m}^t, M) = 0 = \operatorname{Tor}_{k}^{R}(R, M) = 0$ para todo $k \geq 1$. Portanto, $\operatorname{Tor}_{n+k}(R/\mathfrak{m}^t, M) = 0$ para todo $k \geq 1$. □

Em (JOTHILINGAM; DURAIVEL, 2010, Teorema 1), o autor provou que, dado qualquer módulo finitamente gerado N sobre um anel regular, então a partir de anulamentos consecutivos do funtor $\operatorname{Ext}_{R}^{i}(M,N)$, o dual de um módulo finitamete gerado M é livre. O intuito é estender este caso para anéis não regulares com $N = R/\mathfrak{m}^n$ Tor-*rígido*.

Proposição 5.2.18. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Tor-compatível com $\operatorname{depth}(R) > 0$. Se M é um R-módulo finitamente gerado tal que, $\operatorname{Ext}_{R}^{1}(M, R/\mathfrak{m}^n) = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$ então, M^* é livre. Em particular, se $\operatorname{depth}(R) = 1$ o R-módulo M é livre.

Demonstração. Temos dois casos a considerar: o anel R é regular ou não. Se R é regular o resultado segue imediatamente (JOTHILINGAM; DURAIVEL, 2010, Teorema 1). Agora, suponha que o anel R não seja regular. Como $\operatorname{depth}(R) > 0$, segue pelo Exemplo 5.2.16 que $\mathfrak{m}^t\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}(\mathfrak{m}^t : \mathfrak{m})$; logo pela Observação 5.2.17 segue que $R/\mathfrak{m}^n$ é um R-módulo Tor-*rígido*. Assim, do Teorema 5.2.6, segue que M^* é livre ou $\operatorname{pd}_R(R/\mathfrak{m}^n) < \infty$. Vamos provar que o caso $\operatorname{pd}_R(R/\mathfrak{m}^n) < \infty$ não ocorre. Suponha por absurdo que, $\operatorname{pd}_R(R/\mathfrak{m}^n) = \infty$. Pelo Teorema 5.2.15 (ii), R será um anel regular, o que contradiz nossa suposição. Portanto, M^* é um R-módulo livre. Agora se $\operatorname{depth}(R) = 1$ segue do Corolário 5.2.11, que M é livre. □

5.3 Conclusões

À seguir, concluímos com algumas perguntas pertinentes que surgiram através da realização deste trabalho. A exploração das respostas destas perguntas oferecem muitas linhas de pesquisa dentro da área.

(i) Quando um anel satisfaz acondição uniforme de Auslander? A resposta afirmativa desta pergunta responderia a conjectura de Auslander-Reiten Teorema 5.1.6.

(ii) Quando um anel é Tor-compatível? Em particular, quando o anel produto fibra é Tor-compatível? Existem alguns casos em que o produto fibra é um anel de Golod, e assim pelo Teorema 5.1.3 é um anel Tor-compatível.

(iii) Sobre que tipo de anel (ou quando) um módulo é Tor-*rígido*?

(iv) Na Proposição 5.2.18, os módulos Tor-*rígidos* $R/\mathfrak{m}^n$ possuem $\operatorname{depth}_R(R/\mathfrak{m}^n) = 0$. Será possível encontrar alguma família de módulos Tor-*rígidos* N com $\operatorname{depth}_R(N) > 0$, obtendo o mesmo desfecho?

REFERÊNCIAS

ABHYANKAR, S. S. Local rings of high embedding dimension. **American Journal of Mathematics**, v. 89, n. 4, p. 1073–1077, 1967. Citado nas páginas 15 e 47.

ANANTHNARAYAN, H.; AVRAMOV, L. L.; MOORE, W. F. Connected sums of gorenstein local rings. **J. Reine Angew. Math.**, v. 667, p. 149–176., 2012. Citado nas páginas 34, 35, 43, 44 e 48.

ATIYAH M.F.; MACDONALD, I. G. **Introduction to commutative algebra**. Massachusetts: Addison-Wesley Series, 1969. Citado nas páginas 17, 19 e 45.

AUSLANDER, M. Modules over unramified regular local rings. **Mathematical Sciences Faculty Publications**, v. 5, n. 2, p. 1–6, 1960. Citado nas páginas 54 e 55.

AUSLANDER, M. B. M. **Stable module theory**. Providence: Mem. Amer. Math. Soc, 1969. Citado na página 56.

AVRAMOV, L. L. Infinite free resolutions, six lectures on commutative algebra. **Progr. Math.**, v. 166, p. 1–118., 1998. Citado na página 52.

AVRAMOV, L. L.; IYENGAR, S. B.; NASSEH, S.; SATHER-WAGSTAFF, S. Persistence of homology over commutative noetherian rings. **J. Algebra**, n. 610, p. 463–490, 2022. Citado na página 53.

BRUNZ W.; HERZOG, J. **Cohen-Macaulay rings**. Cambridge: Cambridge University press, 1993. Citado nas páginas 17, 23, 28, 30, 31, 32 e 49.

CELIKBAS, O.; TAKAHASHI, R. Powers of the maximal ideal and vanishing of (co)homology. **Glasgow Mathematical Journal**, v. 63, n. 1, p. 1–5, 2020. Citado na página 59.

CHRISTENSEN, L.; HOLM, H. Algebras that satisfy auslander's condition on the vanishing of cohomology. **Math. Z.**, v. 265, n. 2, p. 21–40, 2010. Citado na página 53.

CHRISTENSEN, L. W.; STRIULI, J.; VELICHE, O. Growth in the minimal injective resolution of a local ring. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 81, n. 1, p. 24–44, 2010. Citado na página 36.

DAO, H.; EGHBALI, M.; LYLE, J. Hom and ext, revisited. **J. Algebra**, n. 571, p. 75–93, 2021. Citado na página 58.

DAO., H.; KOBAYASHI., T.; TAKAHASHI, R. Burch ideals and burch rings. **Algebra Number Theory**, v. 14, n. 8, p. 2121–2150, 2020. Citado na página 59.

DRESS, A.; KRÄMER, H. Bettireihen von faserprodukten lokaler ringe. **Math. Ann.**, v. 215, n. 2, p. 79–82, 1975. Citado na página 39.

D'ANNA, M. A construction of gorenstein rings. **Journal of Algebra**, v. 306, n. 1, p. 507–519, 2006. Citado nas páginas 44, 46 e 48.

ENDO, N.; GOTO, S.; ISOBE, R. Almost gorenstein rings arising from fiber products. **Canadian Mathematical Bulletin**, v. 64, n. 2, p. 383–400, 2021. Citado na página 35.

FREITAS, T. H.; JORGE-PÉREZ, V. H. Lower bounds for betti numbers over fiber product rings. **Communications in Algebra**, 2023. Citado nas páginas 39, 41 e 46.

FREITAS, T. H.; JORGE-PÉREZ, V. H.; MIRANDA, A. J. Gluing of analytic space germs, invariants and watanabe's conjecture. **Israel J. Math.**, v. 246, p. 211–237, 2021. Citado na página 43.

____. Betti number of gluing of formal complex spaces. **Mathmatische Nachrichten**, v. 296, p. 267–285, 2022. Citado na página 43.

FREITAS, T. H.; JORGE-PÉREZ, V. H.; WIEGAND, R.; WIEGAND, S. Alander-reiten and huneke-wiegand conjectures over quasi-fiber product rings. 2023. Citado na página 58.

HUNEKE, C.; WIEGAND, R. Tensor products of modules, rigidity and local cohomology. **MATHEMATICA SCANDINAVICA**, v. 81, n. 2, p. 161–183, 1997. Citado nas páginas 52 e 54.

HUNEKE, C. L.; WIEGAND, R. Tensor products of modules and the rigidity of tor. **Math. Ann.**, v. 299, n. 2, p. 449–476, 1994. Citado nas páginas 15, 51, 54 e 55.

JORGENSEN, D. A. A generalization of the auslander–buchsbaum formula. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 144, n. 145-155, 1999. Citado nas páginas 51 e 52.

JORGENSEN, D. A.; SEGA, L. Nonvanishing cohomology and classes of gorenstein rings. **Advances in Mathematics**, v. 188, n. 8, p. 470–490, 2003. Citado na página 52.

JOTHILINGAM, P.; DURAIVEL, T. Test modules for projectivity of duals. **Comm. Algebra**, v. 38, n. 8, p. 2762–2767, 2010. Citado nas páginas 16, 55 e 60.

LYLE, J.; MONTAÑO, J. Extremal growth of betti numbers and trivial vanishing of (co)homology. **American Mathematical Society**, v. 373, n. 4, p. 7937–7950, 2020. Citado nas páginas 51 e 52.

NAGATA, M. Local rings. **Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics**, v. 13, n. 2, p. 631–647, 1962. Citado nas páginas 15 e 45.

NASSEH, S.; SATHER-WAGSTAFF, S. Vanishing of ext and tor over fiber products. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 145, n. 11, p. 4661–4674, 2017. Citado nas páginas 15, 36, 43, 51, 52 e 59.

NASSEH, S.; TAKAHASHI, R.; VANDEBOGERT, R. K. On gorenstein fiber products and applications. **Illinois J. Math.**, v. 5, n. 2, p. 631–647, 2017. Citado na página 38.

OGOMA, T. Existence of dualizing complexes. **J. Math. Kyoto Univ**, v. 24, n. 1, p. 27–48, 1984. Citado na página 37.

RAHMATI, H.; STRIULI, J.; YANG, Z. Poincaré series of fiber products and weak complete intersection ideals. **Journal of Algebra**, v. 498, n. 11, p. 129–152, 2018. Citado nas páginas 38, 39 e 43.

REES, D. a-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 57, n. 1, p. 8–17, 1961. Citado na página 45.

ROSSI, M.; SEGA, L. The poincaré series of modules over compressed gorenstein local rings. **Adv. Math.**, v. 259, p. 421–447, 2014. Citado na página 50.

ROTMAN, J. **Introduction to homological algebra**. New York: Springer, 2009. Citado nas páginas 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25 e 26.

SALLY, J. On the associated graded ring of a local cohen-macaulay ring. **J. Math. Kyoto Univ.**, v. 17, n. 1, p. 19–21, 1977. Citado na página 47.

SCHEJA, G. Uber die bettizahlen lokaler ringe. **Mathematische Annalen**, v. 155, n. 8, p. 155–172, 1964. Citado na página 52.

SCHNIBBEN, T. **Local Rings and Golod Homomorphisms**. Dissertação (Mestrado) — University of South Carolina, 2018. Citado nas páginas 34, 35 e 36.

SCHWEDE, K. Gluing schemes and a scheme without closed points. **In: Recent Progress Arithmetic and Algebraic Geometry. Contemp. Math., Am. Math. Soc., Providence (2005)**, v. 386, n. 2, p. 57–172, 2005. Citado na página 43.

SEGA, L. Vanishing of cohomology over gorenstein rings of small codimension. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 131, n. 2, p. 2313–2323, 2002. Citado na página 52.

VALLA, G. On form rings wich are cohen-macaulay. **Journal of Algebra**, v. 58, n. 2, p. 247–250, 1979. Citado na página 47.

VASCONCELOS, W. V. Ideals generated by r-sequences. **Journal of Algebra**, n. 6, p. 309–316, 1967. Citado na página 39.

ICMC USP
SÃO CARLOS