

---

Invariantes de germes de aplicações de  $\mathbb{C}^{n+m}$   
em  $\mathbb{C}^m$  e ideais de Fitting

*Aldicio José Miranda*

---

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

# Invariantes de germes de aplicações de $\mathbb{C}^{n+m}$ em $\mathbb{C}^m$ e ideais de Fitting

*Aldicio José Miranda*

**Orientador:** *Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez*  
**Co-Orientador:** *Prof. Dr. Marcelo José Saia*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Área: Matemática.

**USP – São Carlos**  
**Fevereiro de 2008**

Aos meus pais

Jovelina e

Geraldo (*in memoriam*)

# *Agradecimentos*

---

À Deus, por mais uma conquista e mais um sonho realizado.

À minha família, pela sólida formação, apoio, orações e pela presença em minha vida. À vocês, meus eternos agradecimentos.

Aos Professores Victor Hugo e Marcelo Saia, por terem acreditado em mim. Muito obrigado pela extrema dedicação, ensinamentos, paciência e companheirismo.

Ao Prof. Marcelo Escudeiro, obrigado pela colaboração com o algoritmo.

À Prof. Cidinha, que sempre consegue um tempinho para nos atender.

À todos os professores do ICMC que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Aos funcionários do ICMC, muito obrigado.

À vocês, Everaldo, Nivaldo, Daniela, Grazielle, Marcela, Miriam, Benito, Tatiana, Kleiber, Andrea, Marcos, Mário, João Carlos, José Paulo, Michelle, Urso, Ronaldinho, Lizandro, Thiago, Judith, obrigado pela amizade e convivência. Que tempinho bom!

Dedico este espaço à todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho.

À Taciana, uma pessoa muito especial em minha vida. Obrigado pelo carinho, amor e ter paciência em ficar me ouvindo falar de singularidades.

Ao CNPq e a Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

---

O primeiro objetivo deste trabalho é um estudo dos invariantes necessários para determinar condições de Whitney equisingularidade ou trivialidade topológica para germes de aplicações  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . São obtidas relações entre os invariantes sem considerar a hipótese de que o germe tenha co-posto 1 e o desdobramento ser excelente, generalizando os resultados obtidos por Jorge Pérez para germes  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  de co-posto 1.

Outro problema interessante em teoria de singularidades é encontrar fórmulas para calcular invariantes 0-estáveis que podem surgir no discriminante de uma deformação estável de um germe finitamente determinado. Neste contexto são desenvolvidos métodos de contagem dos invariantes 0-estáveis a partir dos ideais de Fitting associados ao conjunto discriminante de  $f$ . Por último, implementamos um algoritmo no software Maple, para determinar a matriz de uma apresentação do  $\mathcal{O}_m$ -módulo finitamente gerado  $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ . Desta matriz, podemos obter os ideais de definição de todos os conjuntos de pontos múltiplos de  $f$ . Além disto apresentamos uma aplicação deste algoritmo no cálculo do número de pontos múltiplos em germes finitamente determinados de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ .

# *Abstract*

---

In the first of this work we study the necessary invariants to give conditions for the Whitney equisingularity or the topological triviality in families of map germs  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . We obtain relations between these invariants without the hypothesis of the germ to be of co-rank 1 and the unfolding to be excellent. We generalize the results given by Jorge Perez in the case co-rank one map germs  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ .

Other interesting problem in Singularity Theory is to find formulae which allow us to count the 0-stable singularities which appear in the discriminant of a stable deformation of a finitely determined germ. In this context are developed methods of calculation of invariant 0-stable from the ideals of fitting associated with the discriminant set of  $f$ .

Last, but not least we implement an algorithm using Maple to obtain the representation matrix of the finitely generated  $\mathcal{O}_m$ -module  $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ . From this matrix we obtain all Fitting ideals related with the multiple points. Moreover we show how to apply this algorithm to obtain the multiple points of finitely determined map germs  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Estabilidade e determinação finita . . . . .	5
1.2 Pontos múltiplos e singularidades estáveis . . . . .	7
1.3 Deformações de curvas complexas singulares . . . . .	10
1.4 Anéis e germes de espaços analíticos Cohen-Macaulay . . . . .	11
1.5 Multiplicidades polares . . . . .	13
<b>2 Invariantes 1-estáveis em germes de <math>(\mathbb{C}^{n+3}, 0)</math> em <math>(\mathbb{C}^3, 0)</math> e trivialidade topológica</b>	<b>17</b>
2.1 Estrutura das curvas de pontos múltiplos . . . . .	17
2.2 Números de Milnor dos tipos 1-estáveis . . . . .	20
2.2.1 O caso quase-homogêneo . . . . .	28
2.3 Desdobramentos excelentes e $\mu$ -constantes . . . . .	29
2.4 Multiplicidades polares e tipos estáveis . . . . .	31
2.5 Desdobramentos topologicamente triviais . . . . .	33
<b>3 Contando singularidades via ideais de Fitting</b>	<b>38</b>
3.1 Ideais de Fitting . . . . .	39
3.1.1 Algoritmo para construir uma sequência exata . . . . .	40
3.2 Número de singularidades para $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . . . . .	41
3.3 Exemplos . . . . .	47
3.4 Caso $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ , com $m > 3$ . . . . .	56

<b>4</b>	<b>Implementação para uma apresentação e aplicações</b>	<b>62</b>
4.1	Código fonte . . . . .	62
4.2	Invariantes topológicos para germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$ . . . . .	68



# Introdução

---

O estudo das singularidades estáveis tem se mostrado de muita importância na determinação de condições de trivialidade em famílias de germes de aplicações e existem vários invariantes associados a estas singularidades.

Um dos pioneiros e clássicos resultados de Teissier [45] e de Briançon e Speder [5] estabeleceu que a sequência  $\mu^*$  é constante na família de hipersuperfícies com singularidade isolada se, e somente se, a família é Whitney equisingular. Se  $n \neq 3$ , Lê e Ramanujan [27], em um célebre resultado sobre a geometria de hipersuperfícies com singularidades isoladas, mostraram que a constância de um único invariante numérico, chamado número de Milnor, implica que a família é localmente topologicamente trivial. Extensões desses resultados para curvas espaciais foram obtidas por Buchweitz e Greuel. Em [6], eles provaram que uma família de curvas reduzidas é Whitney equisingular se, e somente se, o número de Milnor e a multiplicidade são constantes na família. Estes resultados clássicos conduziram a novos invariantes numéricos, que generalizam o número de Milnor para singularidades mais gerais, e para conjuntos singulares de aplicações holomorfas [11].

Considerando uma família de aplicações analíticas complexas finitamente  $\mathcal{A}$ -determinadas  $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ , Gaffney em [11] provou que a constância das multiplicidades polares das singularidades estáveis em uma família é equivalente à Whitney equisingularidade. Entretanto, estes invariantes são difíceis de trabalhar e o número de invariantes é muito grande quando  $n$  e  $p$  são grandes. Então é natural perguntar:

“ Fixando o par  $(n, p)$ , qual é o número mínimo de invariantes definidos por Gaffney que são necessários para garantir a Whitney equisingularidade ou trivialidade topológica da família.”

Para minimizar o número de invariantes a estratégia é obter relações entre eles.

Para famílias de germes finitamente determinados  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , Gaffney em [11] mostrou que a constância do número cúspides e do número de pontos duplos transversais é suficiente para

garantir a trivialidade topológica.

No caso de germes de famílias de co-posto 1 de  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , Gaffney mostrou em [11] que a constância de um único invariante, implica na equisingularidade da família. Neste mesmo caso, Ruas mostrou em [43] que em alguns casos particulares, o número de pontos triplos, o número de guarda-chuva de Whitney e o número de Milnor da curva de pontos duplos são suficientes para garantir a Whitney equisingularidade da família. Em um recente trabalho, Callejas-Bedregal, Houston e Ruas mostram que o número de Milnor da curva de pontos duplos implica a trivialidade topológica da família, [8].

Para famílias de aplicações de co-posto 1 de  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , Jorge Pérez em [20] reduziu o número de invariantes de 24 para 7.

Nos seguintes casos, também é minimizado o número de invariantes:

O caso  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^2$  com  $n > 2$ , Gaffney e Vohra em [47] mostram a Whitney equisingularidade usando números de Lê, associados a uma hipersuperfície em  $\mathbb{C}^n$ .

O caso  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  em [23], por Levcovitz, Jorge Pérez e Saia.

O caso  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^3$  com  $n > 3$  em [24], por Jorge Pérez, Rizziolli e Saia.

O caso  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$  com  $n < p$ , também é estudado por Jorge Pérez e Saia, [22].

No caso  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , Houston em [18], mostra a Whitney equisingularidade da família das imagens de  $f$  em termos dos números de Milnor da imagem de  $f$ .

Os resultados obtidos nos casos acima usam a condição do germe de aplicação  $f$  ser de co-posto 1. Neste caso os tipos estáveis são ICIS (interseções completas com singularidades isoladas), e sob esta condição podem-se usar as fórmulas de Lê-Greuel [26] para obter diversas relações entre os invariantes numéricos.

Neste trabalho primeiro estudamos germes de aplicações de  $(\mathbb{C}^{n+3}, 0)$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ ,  $n \geq 0$ . Obtemos uma caracterização de determinação finita e estabilidade em termos da finitude dos invariantes 0-estáveis e da estrutura dos tipos estáveis 1-dimensionais na fonte. Apresentamos uma outra demonstração das fórmulas dadas por Houston, [18] e [19], ver Teorema 2.11, que relaciona os número de Milnor das curvas singulares e os invariantes 0-estáveis. Provamos também que a constância do número de Milnor do fecho dos tipos estáveis 1-dimensionais implica que o desdobramento a 1-parâmetro do germe de aplicação  $f$  é excelente e usamos novas técnicas para obter todas as fórmulas obtidas por Jorge Pérez em [20] sem a hipótese de

co-posto 1. Aplicamos estas fórmulas para obter resultados sobre a Whitney equisingularidade de família a 1-parâmetro de germes de aplicações  $\mathcal{A}$ -finitamente determinados sem considerar a hipótese de que o germe tem co-posto 1.

Na Proposição 2.13 é dada uma outra demonstração para a Proposição 4.3 *ii*), que relaciona o número de Milnor da curva singular, a curva discriminante e os invariantes 0-estáveis de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ , [14].

Outro problema interessante em teoria de singularidades é encontrar fórmulas explícitas para contagem dos invariantes 0-estáveis que podem surgir no discriminante de uma deformação estável de um germe finitamente determinado.

O caso  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  foi estudado por Rieger [42], para germes de co-posto 1 e Fukuda e Ishikawa, [10], Gaffney e Mond [14] para germes de qualquer co-posto. Nestes trabalhos são obtidas fórmulas para o cálculo do número de cúspides e de pontos duplos transversais.

No caso  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , Mond apresenta fórmulas para o número de cross-caps (guarda-chuva de Whitney) e pontos triplos ordinários para o caso quase-homogêneo em termos do peso e grau de  $f$ , [32].

No caso  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  para germes de co-posto 1, Marar, Montaldi e Ruas mostram fórmula para o número de singularidades isoladas, [30].

Com algumas condições, Fukui, Nuño-Ballesteros e Saia calculam o número de monogermes dos tipos estáveis 0-dimensionais em deformações genéricas para o caso  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ , [9].

Neste trabalho também propomos um estudo sobre os ideais de Fitting associados ao conjunto discriminante de germes finitamente determinados de aplicações  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ ,  $n, m \geq 0$ . Com isto, desenvolvemos métodos de contagem de singularidades 0-estáveis que aparecem no discriminante de uma deformação estável de  $f$ .

A contagem destas singularidades via ideais de Fitting associados ao conjunto discriminante é baseada no trabalho de 1989 de Mond e Pellikaan [33]. Neste artigo Mond e Pellikaan estudam o comportamento dos conjuntos de pontos múltiplos na meta de aplicações analíticas finitas entre variedades analíticas  $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ , isto é, eles procuram por uma boa escolha de estrutura analítica para os conjuntos  $M_k(f)$  que são os pontos em  $Y$  cuja pré-imagem consiste de  $k$  ou mais pontos, contando multiplicidade. A estrutura analítica sobre  $M_k(f)$  é definida por meio dos ideais de Fitting do  $\mathcal{O}_Y$ -módulo coerente  $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ .

---

Em trabalho conjunto com Pellikaan, Mond obtém uma fórmula para o número de pontos triplos ordinários em termos dos ideais de Fitting associado ao discriminante, [33]. Na segunda parte do trabalho é feito um estudo para relacionar as singularidades 0-estáveis em germes finitamente determinados  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ , a partir da dimensão de álgebras associadas a ideais de Fitting.

Quando  $m = 3$ , obtemos fórmulas para contagem dos invariantes 0-estáveis.

Quando  $m > 3$  e  $f$  é de co-posto 1, obtemos uma fórmula que relaciona os invariantes 0-estáveis com a dimensão de uma álgebra associada aos ideais de Fitting.

Por último, no capítulo 4, implementamos um algoritmo no software Maple, para determinar a matriz de uma apresentação do  $\mathcal{O}_m$ -módulo finitamente gerado  $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ . Desta matriz, podemos obter os ideais de definição de todos os conjuntos de pontos múltiplos de  $f$  na meta. Ainda neste mesmo capítulo apresentamos aplicações deste algoritmo para germes de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ .

O trabalho está organizado como segue: Capítulo 1 contém definições básicas e resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho. No Capítulo 2 são estudados germes de  $\mathbb{C}^{n+3}$  em  $\mathbb{C}^3$ . No capítulo 3 são apresentadas fórmulas para invariantes 0-estáveis e também são mostrados vários exemplos onde utilizamos estas fórmulas para contar as singularidades isoladas.

E por último, no capítulo 4, apresentamos a implementação do algoritmo para a obtenção da matriz de uma apresentação e além disso são mostrados exemplos e aplicações.

# Preliminares

Neste capítulo introduziremos definições básicas da teoria de singularidades de aplicações.

## 1.1 Estabilidade e determinação finita

Denotamos por  $\mathcal{A}$  o grupo  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^p, 0)$ ; este age sobre  $\mathcal{O}(n, p)$  o espaço dos germes  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ , por composição à direita e à esquerda. No caso  $p = 1$ ,  $\mathcal{O}(n, p)$  é denotado por  $\mathcal{O}_n$ .

Dizemos que dois elementos  $f$  e  $g$  de  $\mathcal{O}(n, p)$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes se  $f = l \circ g \circ r^{-1}$  onde  $(l, r) \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^p, 0)$ .

Nosso interesse aqui está em germes de aplicações  $f: (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$   $\mathcal{A}$ -finitamente determinados.

**Definição 1.1.** *Um germe de aplicação  $f \in \mathcal{O}(n, p)$  é  $k$ - $\mathcal{G}$ -determinado ( $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$  ou  $\mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{G}$  um dos grupos de Mather) se para todo  $g \in \mathcal{O}(n, p)$  tal que  $j^k g(0) = j^k f(0)$  tem-se que  $g$  é  $\mathcal{G}$ -equivalente a  $f$ .*

Dizemos que um germe é finitamente determinado se ele é  $k$ - $\mathcal{A}$ -determinado para algum  $k < \infty$ .

Mather e Gaffney deram uma caracterização de germes de aplicações finitamente determinados em termos de germes estáveis, veja [48].

Uma deformação a  $s$ -parâmetros de um germe de aplicação  $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  é um germe de aplicação  $\tilde{f}$  em  $\mathcal{O}(s+n, p)$  tal que

$$\tilde{f}: (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

$$(u, x) \mapsto \bar{f}(u, x)$$

onde,  $\bar{f}(0, x) = f(x)$

Um desdobramento a  $s$ -parâmetros de  $f$  é um germe de aplicação em  $\mathcal{O}(s+n, s+p)$ ,

$$F : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$$

$$(u, x) \mapsto F(u, x) = (u, \bar{f}(u, x))$$

onde  $\bar{f}$  é uma deformação do germe  $f$ .

$F$  é um desdobramento trivial de  $f$  se existem desdobramentos a  $s$ -parâmetros,  $R$  da identidade em  $\mathbb{C}^n$  e  $L$ , da identidade em  $\mathbb{C}^p$  tais que  $L \circ F \circ R^{-1} = (id, f)$ . Se  $R$  e  $L$  são homeomorfismos ao invés de difeomorfismos diz-se que  $F$  é topologicamente trivial.

Diz-se que dois desdobramentos  $F_1$  e  $F_2$  de  $f$  são isomorfos se  $F_2 = L \circ F_1 \circ R^{-1}$  onde  $L$  e  $R$  são desdobramentos da identidade. Um desdobramento  $F_2$  à  $s$ -parâmetros é induzido de um desdobramento  $F_1 = (id, \bar{f})$  à  $t$ -parâmetros se existe uma aplicação  $h : \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^t, 0$  tal que  $F_2$  é igual a  $h^*F_1 = (id, \bar{f}(h(s), x))$ .

$F$  é um desdobramento versal de  $f$  se todo desdobramento de  $f$  é isomorfo a um desdobramento induzido de  $F$ . Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado. Um desdobramento a 1-parâmetro de  $f$  é um germe de aplicação  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, 0)$  da forma  $F(t, x) = (t, f_t(x))$  tal que  $f_0 = f$ .

Dizemos que  $f$  é um germe estável se todo desdobramento de  $f$  é trivial.

**Definição 1.2.** Dizemos que um desdobramento  $F$  é uma estabilização de  $f$  se existe um representante  $F : D \times U \rightarrow D \times \mathbb{C}^p$ , onde  $D, U$  são vizinhanças abertas de 0 em  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$  respectivamente tais que  $f_t : U \rightarrow \mathbb{C}^p$  é estável para qualquer  $t \in D \setminus \{0\}$ .

Na faixa das boas dimensões no sentido de Mather, é bem conhecido que uma estabilização de um germe finitamente determinado sempre existe.

O próximo teorema relaciona determinação finita com estabilidade.

**Teorema 1.3.** [35] Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  um germe de aplicação  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado. Então este germe é  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, para cada representante de  $f$ , existem uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{C}^n$  e  $V$  de 0 em  $\mathbb{C}^p$ ,  $f(U) \subset V$ , tais que

se  $y \in V - \{0\}$ ,  $f^{-1}(y) \cap \Sigma(f) \cap U = \{x_1, \dots, x_r\}$ , então o multi-germe de  $f$  em  $\{x_1, \dots, x_r\}$  é  $\mathcal{A}$ -estável.

Um *tipo estável* é uma classe de  $\mathcal{A}$ -equivalência entre germes estáveis. Um germe finitamente determinado  $f$  tem *tipo estável discreto* se existe um desdobramento versal de  $f$  no qual ocorre um número finito de tipos estáveis. Se o par  $(n, p)$  está nas boas dimensões de Mather ou em sua fronteira, então todo germe finitamente determinado  $f \in \mathcal{O}(n, p)$  tem tipo estável discreto, [11].

O conjunto dos pontos críticos  $\Sigma(f)$  de  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  é o conjunto definido em  $\mathbb{C}^n$  obtido como os pontos que se anulam nos geradores do ideal jacobiano  $J(f)$  de  $f$ , onde os geradores de  $J(f)$  são dados pelos determinantes dos menores maximais de ordem  $p$  da matriz da derivada de  $f$ . Se  $n < p$ , então  $\Sigma(f) = \mathbb{C}^n$ . Denotamos por  $\Delta(f)$  o conjunto discriminante de  $f$  como sendo a imagem de  $\Sigma(f)$  pela  $f$ , ou seja,  $\Delta(f) = f(\Sigma(f))$ .

## 1.2 Pontos múltiplos e singularidades estáveis

**Definição 1.4.** Dado  $k \geq 1$ , definimos o conjunto dos  $k$ -pontos múltiplos,  $D^k(f)$ , como sendo o fecho em  $\Sigma(f)^k := \Sigma(f) \times \dots \times \Sigma(f)$  do conjunto

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \Sigma(f)^k : f(x_i) = f(x_j), x_i \neq x_j, \text{ para qualquer } i \neq j\}.$$

Definimos  $D(f) = p_1(D^2(f))$ , onde  $p_1$  é a projeção sobre o primeiro fator

$$p_1 : \Sigma(f) \times \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^n.$$

O conjunto  $D(f) \subset \mathbb{C}^n$  é chamado de conjunto de pontos duplos na **fonte** e  $f(D(f)) \subset \mathbb{C}^p$  é o conjunto de pontos duplos na **meta**.

Para um germe de aplicação finitamente determinado  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , a restrição da projeção  $p_1$  a  $D^2(f)$  é finita, na verdade é 1-1, e assim  $D(f)$  é o germe de um conjunto analítico 1-dimensional. Analogamente, o germe  $f$  é também finito quando restrito a  $D(f)$  (embora, neste caso a aplicação seja 2 – 1 exceto em 0), e assim  $f(D(f))$  também é o germe de um conjunto analítico 1-dimensional.

No exemplo abaixo, são descritos os conjuntos  $D^2(f)$  e  $D(f)$ , considerando o caso em que  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é de co-posto 1. Sob estas hipóteses a estrutura dos conjuntos dos pontos duplos  $D^2(f)$  e  $D(f)$  está bem definida. Para obter o ideal que define a curva  $D^2(f)$ , veja [23].

**Exemplo 1.5.** Seja  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , dado por  $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + xz + yz^2)$ , então o ideal que define a curva  $D^2(f)$  em  $\mathcal{O}_4$ , é dado pelo ideal:

$$I(D^2(f)) = \langle 2zw^2 + 2wz^2 + x, -4zw - w^2 - z^2 + y, 2z + 2w \rangle \subset \mathcal{O}_4$$

Para projetarmos no primeiro fator, devemos eliminar a variável  $w$ , como  $w = -z$ , resulta pela equação acima que  $x = 0$  e  $y = -2z^2$ , ou seja, a curva de pontos duplos  $D(f)$  na fonte é parametrizada por:

$$t \mapsto (0, -2t^2, -t)$$

Sabemos que:  $f(0, y, z) = f(0, y, -z) = (0, y, z^4 + yz^2)$ , logo,

$$D^2(f) = \overline{\{(x_1, x_2) \in \Sigma(f) \times \Sigma(f) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \text{ tal que } f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2\}}$$

$$D^2(f) = \overline{\{(0, -2z^2, -z), (0, -2z^2, z), z \neq 0\}} \subset \mathbb{C}^6$$

observemos que  $x_1 = (0, -2z^2, -z)$  e  $x_2 = (0, -2z^2, z)$  pertencem a  $\Sigma(f) = V(4z^3 + x + 2yz)$ , e que as duas primeiras coordenadas de  $x_1$  e  $x_2$  são iguais. Logo, podemos considerar

$$D^2(f) = \overline{\{(0, -2z^2, -z, z), z \neq 0\}} \subset \mathbb{C}^4$$

e assim,  $D(f) := p_1(D^2(f)) = (0, -2z^2, -z)$ , onde  $p_1 : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$  é a projeção  $p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$  e o ideal que define a curva  $D(f)$  é:  $I(D(f)) = \langle x, y + 2z^2 \rangle$ .

Como os principais resultados deste trabalho são para germes em  $\mathcal{O}_{(n+3,3)}$ , descrevemos abaixo todos os germes e multigerms estáveis nestas dimensões, veja [24]. Observamos que para encontrar os monogermes estáveis, basta usar o software *Transversal*, cujo método para obter os germes estáveis é a aplicação do Lema de Mather. Uma vez encontrados os monogermes estáveis, os multigerms estáveis são obtidos a partir de cruzamentos normais entre monogermes estáveis.



Tabela 1.1: Monogermes estáveis

Nome	$\Sigma^{(i)}$	$A_k$	Forma Normal
Submersão	$\Sigma^{(0)}$	$A_0$	$(x_1, x_2, x_{n+3})$
Dobra	$\Sigma^{(n+1)}$	$A_1$	$(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2)$
Eixo Cuspidal	$\Sigma^{(n+1,1)}$	$A_2$	$(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^3 + x_1 x_{n+3})$
Rabo de Andorinha	$\Sigma^{(n+1,1,1)}$	$A_3$	$(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^4 \pm x_1 x_{n+3} \pm x_2 x_{n+3}^2)$

Tabela 1.2: Multigerms estáveis

Nome	$A_k$	Forma Normal
Pontos Duplos	$A_{(1,1)}$	$\{(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2);$ $(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2, x_3)\}$
Cruzamento Normal de um Plano com o Eixo Cuspidal	$A_{(2,1)}$	$\{(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2, x_3);$ $(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^3 + x_1 x_{n+3})\}$
Pontos Triplos	$A_{(1,1,1)}$	$\{(x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2);$ $(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2, x_3);$ $(\pm x_1^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^2, x_2, x_3)\}$

A notação para as singularidades  $A_k$  foi introduzida por Arnol'd em [1]. O símbolo  $\Sigma^i$  é a notação de Thom-Boardman, para as singularidades do tipo  $\Sigma^i$ , veja [3].

**Observação 1.6.** Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado. Então, de acordo com as Tabelas 1.1 e 1.2 acima, os únicos germes de singularidades estáveis aparecendo no discriminante de uma estabilização de  $f$  são:

- (i) cruzamento normal de dois planos, que corresponde à curva 1-dimensional de pontos duplos na meta;
- (ii) cruzamento normal de três planos, que corresponde aos pontos triplos ordinários, que são singularidades 0-dimensionais, e denotamos esta singularidade por  $A_{(1,1,1)}$ ;
- (iii) o eixo cuspidal 1-dimensional, que são singularidades do tipo  $A_2$ ;
- (iv) os pontos do tipo  $A_3$ , chamados também de rabo de andorinha, que são singularidades 0-dimensionais;

(v) a interseção transversal do eixo cuspidal com a dobra (plano ordinário), que são pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  e é uma singularidade 0-dimensional.

No discriminante de uma estabilização de  $f$ , só temos 3 tipos de pontos com multiplicidade igual a 3, a saber os pontos do tipo,  $A_{(2,1)}$ ,  $A_{(1,1,1)}$  e  $A_3$ . Os pontos do tipo  $A_{(1,1,1)}$  são pontos triplos ordinário, ou seja possuem 3 pré-imagens distintas.

Vamos usar a notação  $f(D(f))$  para curvas de pontos duplos ordinários na meta e em vez de  $A_2$  vamos denotar a curva cuspidal na meta por  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ .

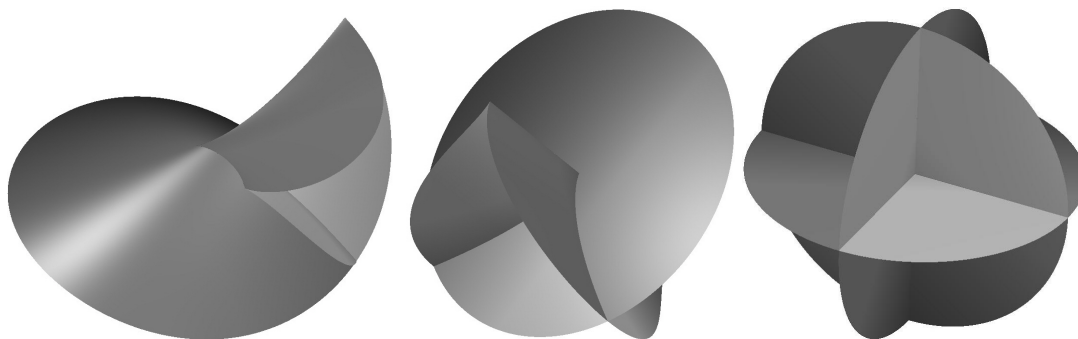


Figura 1.1: Modelos geométricos 0-estáveis:  $A_3$ ,  $A_{(2,1)}$  e  $A_{(1,1,1)}$  respectivamente.

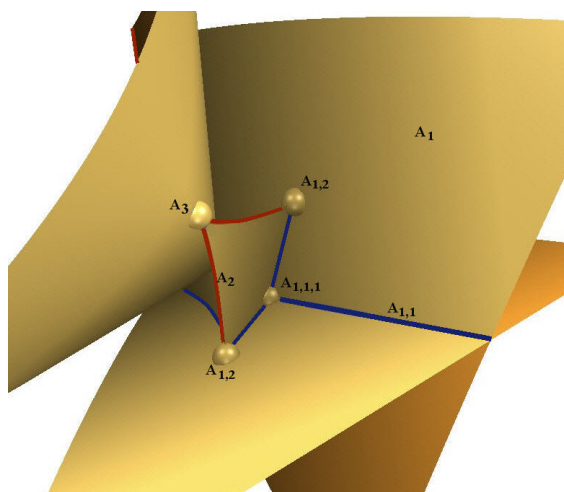


Figura 1.2: Discriminante de:  $f_t(x, y, z) = (x, y, z^6 + xz + yz^2 + tz^4)$ .

A Figura 1.1 mostra os modelos geométricos das singularidades 0-estáveis  $A_3$ ,  $A_{(2,1)}$  e  $A_{(1,1,1)}$ .

A Figura 1.2 é a parte real do discriminante de uma deformação a 1-parâmetro do germe  $f(x, y, z) = (x, y, z^6 + xz + yz^2)$ , onde para determinados valores reais  $t$  é possível visualizar os

tipos estáveis, conforme descrito na observação 1.6. Este germe possui 1 ponto do tipo  $A_{(1,1,1)}$ , 6 do tipo  $A_{(2,1)}$  e 3 pontos  $A_3$ . Este exemplo, de [30] também é discutido no capítulo 3. Veja capítulo 4 para informações de como a figura foi obtida.

### 1.3 Deformações de curvas complexas singulares

Os conceitos necessários para esta seção foram descritos inicialmente por Greuel e Buchweitz em [6] para o caso geral de curvas complexas singulares, que descrevemos a seguir.

Seja  $(X_0, x_0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  uma curva arbitrária complexa reduzida com singularidade isolada, definida pelo ideal  $I_0 = (f_1, \dots, f_k) \subset \mathcal{O}_n$  e seja  $X$  um germe de superfície em  $\mathbb{C}^{n+1}$  definida pelo ideal  $I = (F_1, \dots, F_k) \subset \mathcal{O}_{n+1}$ , onde  $F_i(0, x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Seja  $B_0 \subset \mathbb{C}^n$  uma bola suficientemente pequena com centro em  $x_0$  e  $X_0 \subset B_0$  um representante de  $(X_0, x_0)$ . Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um disco suficientemente pequeno com centro em 0 e  $\pi : (X, x_0) \rightarrow (D, 0)$  uma deformação plana de  $(X_0, x_0)$ , (isto é,  $\pi$  é plana se  $\frac{\mathbb{C}\{t, x_1, \dots, x_n\}}{I}$  é um  $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo plano, [39]). Escolhemos um bom representante para  $\pi$ , tal que  $X_0$  esteja mergulhada em uma pequena bola aberta  $B_0 \subset \mathbb{C}^n$ , com centro em  $x_0$ . Podemos assumir que  $X$  é um subconjunto analítico fechado de  $B = D \times B_0$  e  $\pi : X \rightarrow D$  é a restrição da projeção sobre  $D$ . Se  $B_0$  é suficientemente pequeno e  $D$  é suficientemente pequeno com respeito a  $B_0$ , podemos assumir que vale o seguinte:

- (i)  $X$  e  $X_0$  são contractíveis e  $X_0 - \{x_0\}$  é não singular;
- (ii)  $\pi : X \rightarrow D$  é deformação plana e  $\pi|_{C(\pi)} : C(\pi) \rightarrow D$  é finita. (onde  $C(\pi)$  é o conjunto dos pontos críticos de  $\pi$ );
- (iii)  $\partial\{t\} \times B_0$  intersecta  $X_t = \pi^{-1}(t)$  transversalmente em pontos regulares de  $X_t$ , para todo  $t \in D$ .

Denotamos por  $\mu(X_t)$  a soma dos números de Milnor sobre todos os pontos de  $X_t = \pi^{-1}(t)$ . Ou seja,  $\mu(X_t) = \sum_{x \in X_t} \mu(X_t, x)$ , onde esta soma é somente sobre um número finito de pontos singulares sobre a curva  $X_t$ . Note que  $\mu(X_t) = 0$  se e somente se  $X_t$  é suave.

### 1.4 Anéis e germes de espaços analíticos Cohen-Macaulay

Vamos definir agora anéis e germes de espaços analíticos Cohen-Macaulay, [39].

Seja  $M$  um  $R$ -módulo e  $I$  um ideal em  $R$ , onde  $(R, \mathfrak{m})$  é um anel local. Considere uma sequência de elementos  $x_1, \dots, x_n$  contida no ideal  $I$ . Dizemos que esta sequência é  $M$ -regular se  $x_1$  não é divisor de zero no módulo  $M$  e  $x_i$  não é divisor de zero em

$$M/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle M, \forall i = 2, \dots, n.$$

Se  $I = \mathfrak{m}$  e  $R = M$ , dizemos simplesmente que  $x_1, \dots, x_n$  é uma sequência regular.

Uma sequência  $M$ -regular  $x_1, \dots, x_n$  em  $I$  é maximal quando  $x_1, \dots, x_n, x$  não é uma sequência  $M$ -regular, para todo  $x \in I$ .

Toda sequência  $M$ -regular maximal contida em  $I$  tem o mesmo número de elementos. Este número denotado por  $\text{depth}(I, M)$  é chamado profundidade de  $I$  em  $M$ . Se  $I$  é o ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $R$ , denotamos  $\text{depth}(\mathfrak{m}, M) = \text{depth}(M)$ , que é chamado de profundidade de  $M$ . Ainda, se  $M = R$ , escreve-se apenas  $\text{depth}(I)$ .

Se  $d = \dim M$  e  $x_1, \dots, x_d$  é uma família de elementos de  $R$  que gera um ideal  $I$  tal que  $\dim \frac{M}{IM} = 0$ , então  $x_1, \dots, x_d$  é chamado um sistema de parâmetros de  $M$ . Se  $I$  é gerado por um sistema de parâmetros de  $M$  diz-se que  $I$  é um ideal de parâmetros de  $M$ . Toda sequência  $M$ -regular é parte de um sistema de parâmetros e portanto  $\text{depth} M \leq \dim M$ .

Dizemos que o módulo  $M$  é Cohen-Macaulay quando  $\text{depth} M = \dim M$ . E um anel  $R$  é Cohen-Macaulay se  $R$  é um módulo Cohen-Macaulay sobre si mesmo.

Um anel local  $R$  é um anel regular se o ideal maximal de  $R$  é gerado por um sistema de parâmetros. Todo anel regular é Cohen-Macaulay. Neste caso as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $R$  é Cohen-Macaulay;
- (ii)  $e(I) = l(R/I)$ , para qualquer ideal de parâmetros  $I$  de  $R$ ;
- (iii)  $e(I) = l(R/I)$ , para algum ideal de parâmetros  $I$  de  $R$ .

E se  $(R, \mathfrak{m})$  for um anel Noetheriano local,  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$  e  $M' = \frac{M}{\langle x_1, \dots, x_n \rangle M}$  então também são válidas:

- (i) Se  $x_1, \dots, x_n$  é uma sequência  $M$ -regular, então  $M'$  é Cohen-Macaulay;

(ii) Se  $R$  é Cohen-Macaulay, então  $x_1, \dots, x_n$  é uma sequência regular se e somente se,

$$\text{ht}(x_1, \dots, x_n) = n.$$

Seja  $(X, 0)$  um germe de espaço analítico em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  definido pelo ideal  $I$  em  $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ . O germe  $(X, 0)$  é chamado uma *interseção completa* se  $I$  é gerado por  $k$  elementos, onde  $k$  é a codimensão de  $(X, 0)$  em  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , ou de forma equivalente: o ideal  $I$  é gerado por uma  $\mathcal{O}_n$ -sequência  $g_1, \dots, g_k$  com  $g_i \in \mathfrak{m}$  ( $\mathfrak{m}$  ideal maximal em  $\mathcal{O}_n$ ).

O germe  $(X, 0)$  é chamado germe de espaço analítico Cohen-Macaulay ou simplesmente Cohen-Macaulay se  $\mathcal{O}_X$  é um anel local Cohen-Macaulay, ( $\text{depth } \mathcal{O}_{X,0} = \dim(X, 0)$ ), isto é, existe uma  $\mathcal{O}_{X,0}$ -sequência regular  $x_1, \dots, x_n$  em  $\mathfrak{m}_{X,0}$ , onde a dimensão de  $(X, 0)$  é igual a  $n$ .

O Lema 1.7 é devido a Eagon, [17] e o usamos para mostrar que o conjunto  $\Sigma(f)$  é Cohen-Macaulay.

**Lema 1.7.** [17] *Seja  $R$  um anel Cohen-Macaulay de dimensão  $n$ . Seja  $M = (C_{i,j})$  uma matriz  $p \times q$  com entradas em  $R$  e  $I_r$  um ideal gerado pelos  $r$ -menores de  $M$ . Então:*

$$(i) \dim\left(\frac{R}{I_r}\right) \geq n - (p - r + 1)(q - r + 1)$$

(ii) *Se  $\dim\left(\frac{R}{I_r}\right) = n - (p - r + 1)(q - r + 1)$ , então  $\frac{R}{I_r}$  é Cohen-Macaulay. ( $I_r$ ) é chamado ideal determinantal). Além disso,  $\frac{R}{I_r}$  é Gorenstein se, e somente se  $p = q$  ou  $r = 1$ .*

Um ideal  $I \subset A$ ,  $A$  um anel Noetheriano, é equidimensional ou de dimensão pura se todos os primos associados de  $I$  têm a mesma dimensão de Krull.

**Lema 1.8.** [4, Lema 1.1] *Seja  $X$  uma deformação de uma curva reduzida espacial  $X_0$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i)  $X$  é uma deformação plana de  $X_0$ ;

ii)  $X$  é Cohen-Macaulay;

iii)  $X$  é de dimensão pura 2.

**Lema 1.9.** [4, Lema 1.2] *Sejam  $X$  uma deformação plana de uma curva reduzida espacial  $X_0$  e  $X^1, \dots, X^r$  as componentes irredutíveis de  $X$ . A restrição de  $p$  a qualquer união  $X^1 \cup \dots \cup X^i$ , ( $1 \leq i \leq r$ ) de componentes irredutíveis é plana, onde  $p$  é a restrição em  $X$  da projeção canônica de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  no primeiro fator  $(\mathbb{C}, 0)$ .*

## 1.5 Multiplicidades polares

As multiplicidades polares dos tipos estáveis são os principais invariantes necessários para mostrar a Whitney equisingularidade do desdobramento de um germe finitamente determinado. Estes invariantes são as multiplicidades das variedades polares, noção desenvolvida como um meio de estudar as singularidades de um germe analítico  $(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, x)$  de dimensão pura igual a  $d$ . As variedades polares foram definidas por Lê e Teissier em [46].

**Definição 1.10.** *A  $k$ -ésima variedade polar de  $X$ , com  $0 \leq k \leq d - 1$  é obtida ao considerarmos o fecho do conjunto crítico da restrição de uma projeção genérica  $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$  para a parte regular de  $X$ .*

Denotamos a  $k$ -ésima variedade polar de  $X$  por  $P_k(X, x, p)$ . O invariante chave de  $P_k(X, x, p)$ , para  $k = 0, \dots, d - 1$  é sua multiplicidade em 0, chamado  **$k$ -multiplicidade polar**, que denotamos por  $m_k(X, p)$ . Como ele é constante para um conjunto aberto de projeções, denotamos-o por  $m_0(P_k(X))$  ou  $m_k(X)$ .

Gaffney em [11, pag. 195], também define a  $d$ -multiplicidade polar associada à  $X$ , que deveria ser dada pela variedade polar de mais alta codimensão. Mas como esta variedade é zero-dimensional, ela não está bem definida, então Gaffney define a  $d$ -multiplicidade polar (de codimensão  $d$ ) em cada estrato como segue:

Considere um desdobramento versal  $G : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$  de  $f$ . Especifique um estrato  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(G)$  na meta (ou  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\Sigma(G)$  ou  $\mathcal{Q}_S(G)$  na fonte), tal que  $\dim \overline{\mathcal{Q}(f)} \geq 1$ . Selecione  $D$  um subespaço linear de  $(\mathbb{C}^p, 0)$  (ou de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ) de dimensão 1 e forme a variedade polar relativa sobre  $\mathcal{Q}$ , denotada  $P_d(\overline{\mathcal{Q}}, \pi_s)$ , onde  $\pi_s$  é a projeção para  $\mathbb{C}^s$  e  $d = \dim(\overline{\mathcal{Q}}) - s$ . A  $d$ -ésima multiplicidade estável de  $f$  do tipo  $\mathcal{Q}(f)$ , denotada  $\mathfrak{m}_d(f, \mathcal{Q})$ , é a multiplicidade de  $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{P_d(\overline{\mathcal{Q}(G)}, \pi_s), (0, 0)}$  em  $\mathcal{O}_{P_d(\overline{\mathcal{Q}(G)}, \pi_s), (0, 0)}$ .

# Invariantes 1-estáveis em germes de $(\mathbb{C}^{n+3}, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ e trivialidade topológica

Neste capítulo obtemos uma caracterização de determinação finita e estabilidade em termos da finitude dos invariantes 0-estáveis e da estrutura dos tipos estáveis 1-dimensionais na fonte. Apresentamos uma outra demonstração das fórmulas dadas por Houston, [18] e [19], ver Teorema 2.11, que relacionam o número de Milnor das curvas singulares e os invariantes 0-estáveis. Provamos que a constância do número de Milnor do fecho dos tipos estáveis 1-dimensionais implica que o desdobramento a 1-parâmetro do germe de aplicação  $f$  é excelente. Obtemos resultados sobre a Whitney equisingularidade de família a 1-parâmetro de germes de aplicações  $\mathcal{A}$ -finitamente determinados sem considerar a hipótese do germe ter co-posto 1.

Na Proposição 2.13 é dada uma outra demonstração para a Proposição 4.3 *ii*), que relaciona o número de Milnor da curva singular, a curva discriminante e os invariantes 0-estáveis de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ .

Os resultados deste capítulo foram publicados em [21].

## 2.1 Estrutura das curvas de pontos múltiplos

Nesta seção são obtidos resultados que descrevem a estrutura das curvas de pontos múltiplos em germes  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  e condições sobre estas curvas para a determinação finita e estabilidade de tais germes.

**Lema 2.1.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado. Então,  $\Sigma(f)$  é um germe de espaço analítico Cohen-Macaulay  $(m - 1)$ -dimensional.*

*Demonstração.* Por [28, Proposição 4.2] e [28, Teorema 2.8],  $(\Sigma(f), 0)$  é um germe de espaço analítico Cohen-Macaulay  $(m - 1)$ -dimensional.  $\square$

O lema anterior também será usado no próximo capítulo no estudo dos ideais de Fitting.

**Lema 2.2.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado. Então,  $M_2(f) = f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f))$  é uma curva espacial complexa Cohen-Macaulay.*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.1,  $\Sigma(f)$  é Cohen Macaulay 2-dimensional.  $f|_{\Sigma(f)} : \Sigma(f) \rightarrow \mathbb{C}^3$  é uma aplicação finita, genericamente 1 – 1 sobre sua imagem, então por [33, Teorema 3.4],  $M_2(f) = f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f))$  é uma variedade determinantal. Em particular  $M_2(f)$  é Cohen Macaulay.  $\square$

**Observação 2.3.** Similarmente ao Lema 2.1 e ao Lema 2.2 temos que  $F(\Sigma^{n+1,1}(F)) \cup F(D(F))$  é Cohen Macaulay, onde  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, (0,0))$  é um desdobramento a 1-parâmetro de  $f$ .

**Proposição 2.4.** *Seja  $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação holomorfa, onde  $U \subset \mathbb{C}^{n+3}$  é um conjunto aberto. Se  $f$  é estável, então  $\Sigma^{n+1,1}(f) \cup D(f) - \{0\}$  e  $f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f)) - \{0\}$  são curvas suaves. Em particular  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  e  $D^2(f)$  são curvas suaves.*

*Demonstração.* Se  $f$  é estável, então obviamente  $D^2(f)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  são suaves. Dado um ponto  $(x_0, x'_0) \in D^2(f)$  ou ele é um ponto singular do tipo  $A_3, A_{(2,1)}, A_{(1,1,1)}$  se  $x_0 = x'_0$  ou um ponto duplo transversal de  $f$  se  $x_0 \neq x'_0$ . Em ambos os casos podemos tomar formas normais para o correspondente germe ou bi-germe e verificar que  $D^2(f)$  é suave em  $(x_0, x'_0)$ . Para mostrar que  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  é suave consideramos as formas normais para o correspondente germe.  $\square$

**Proposição 2.5.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado. Então,  $f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f))$  é uma curva reduzida.*

*Demonstração.* Pelo Lema 2.2,  $M_2 = f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f))$  é uma curva Cohen-Macaulay, portanto é de dimensão 1 pura e satisfaz a condição  $(S_1)$  de Serre, isto é, todos primos associados de  $\mathcal{O}_{M_2}$  são minimais. (veja por exemplo ([39, pág. 183])). Por outro lado, pelo critério de Mather-Gaffney para determinação finita, existe um representante  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^3$  de  $f$  definido sobre uma vizinhança aberta  $U$  de 0 em  $\mathbb{C}^{n+3}$  tal que  $f|_{U-\{0\}}$  é estável e  $f^{-1}(0) \cap \Sigma(f) =$



$\{0\}$ . Assim, pela proposição 2.4,  $f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f)) - \{0\}$  é uma curva suave em  $\mathbb{C}^3$  e portanto  $\mathcal{O}_{M_2}$  satisfaz a condição  $(R_0)$  de Serre (veja por exemplo ([39, pág. 183]), que diz que a localização de  $\mathcal{O}_{M_2}$  em todo primo minimal é regular. Portanto, como  $\mathcal{O}_{M_2}$  satisfaz as condições de Serre  $(R_0)$  e  $(S_1)$ , obtemos que,  $f(\Sigma^{n+1,1}(f)) \cup f(D(f))$  é uma curva reduzida.  $\square$

**Observação 2.6.** Note que na proposição acima temos que,  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$  e  $f(D(f))$  são curvas reduzidas.

O teorema abaixo nos dá uma caracterização para estabilidade e finitude de um germe de aplicação.

**Definição 2.7.** Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação holomorfa, denotamos por

i)  $A_{(1,1,1)}(f) = \{x \in \mathbb{C}^{n+3} \text{ tal que } f \text{ tem uma singularidade do tipo } A_{(1,1,1)} \text{ em } x \}$ .

ii)  $A_{(2,1)}(f) = \{x \in \mathbb{C}^{n+3} \text{ tal que } f \text{ tem uma singularidade do tipo } A_{(2,1)} \text{ em } x \}$ .

iii)  $A_3(f) = \{x \in \mathbb{C}^{n+3} \text{ tal que } f \text{ tem uma singularidade do tipo } A_3 \text{ em } x \}$ .

**Teorema 2.8.** Seja  $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação holomorfa de co-posto 1, onde  $U \subset \mathbb{C}^{n+3}$  é um subconjunto aberto.

1. Então  $f$  é estável se, e somente se,  $D^2(f)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  são curvas suaves e  $A_{(1,1,1)}(f)$  e  $A_3(f)$  e  $A_{(2,1)}(f)$  são a origem ou conjuntos vazios.
2. Se  $D^2(f)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  são curvas reduzidas e  $A_{(1,1,1)}(f)$  e  $A_3(f)$  e  $A_{(2,1)}(f)$  são a origem ou conjuntos vazios então  $f$  é finitamente determinado.

*Demonstração.* (1) Por [36, Teorema 2.12]. (2) Suponha que existe um representante  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^3$  definido sobre alguma vizinhança  $U \subset \mathbb{C}^{n+3}$  de  $0 \in \mathbb{C}^{n+3}$  tal que  $D^2(f)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  são curvas reduzidas e  $A_{(1,1,1)}(f)$  e  $A_3(f)$  e  $A_{(2,1)}(f)$  são a origem ou conjuntos vazios. Diminuindo a vizinhança  $U$  se necessário, podemos assumir que  $D^2(f) - \{0\}$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f) - \{0\}$  são curvas suaves e assim, pelo item (1)  $f : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^3$  é estável. Além disso,  $f^{-1}(0) \cap \Sigma(f) = \{0\}$ . Logo por Mather-Gaffney [48],  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é finitamente determinado.  $\square$

**Corolário 2.9.** Seja  $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  uma aplicação holomorfa de co-posto 1, onde  $U \subset \mathbb{C}^{n+3}$  é um subconjunto aberto. Se  $f$  é finitamente determinado, então  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  é uma ICIS e  $A_{(1,1,1)}(f)$  e  $A_3(f)$  e  $A_{(2,1)}(f)$  são a origem ou conjuntos vazios.

## 2.2 Números de Milnor dos tipos 1-estáveis

A seguir mostramos as principais relações entre os números de Milnor dos tipos 1-estáveis na fonte e na meta.

Dado um desdobramento a 1-parâmetro  $F$  de  $f$ , consideraremos o locus de pontos duplos  $D^2(F)$  em  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0)$  e os outros germes de conjuntos  $\Sigma^{n+1,1}(F)$  em  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0)$ ,  $D(F)$  em  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0)$ ,  $F(\Sigma^{n+1,1}(F))$  em  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  e  $F(D(F))$  em  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$ .

**Proposição 2.10.** *Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . Seja  $X$  um dos germes  $F(D(F))$ ,  $F(\Sigma^{n+1,1}(F))$  e  $X_0$  um dos correspondentes germes,  $f(D(f))$  e  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ . Então,  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma deformação plana de  $X_0$ .*

*Demonstração.* Note que por [33, Teorema 3.4],  $M_2(F) = F(\Sigma^{n+1,1}(F)) \cup F(D(F))$  é uma variedade Cohen Macaulay. Pela proposição 2.5,  $M_2(f)$  é uma curva reduzida. Então pelo Lema 1.8, temos que  $M_2(F)$  é uma deformação plana. Finalmente, a planitude para  $F(D(F))$  e  $F(\Sigma^{n+1,1}(F))$  segue do Lema 1.9 e pela observação 2.6.  $\square$

A estrutura dos conjuntos  $D^2(f)$ ,  $D(f)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  não é conhecida em geral. Na sequência assumiremos a estrutura reduzida em cada um desses conjuntos. Também assumiremos que os conjuntos  $D(F)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(F)$  são deformações planas de  $D(f)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  respectivamente.

Se  $F$  é uma estabilização, então para  $X = D^2(F)$  ou  $X = \Sigma^{n+1,1}(F)$ ,  $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma suavização, ou seja, para cada  $t \neq 0$ , em todos os casos  $X_t = \pi^{-1}(t)$  é suave se  $f_t$  é estável. Em geral se  $F$  é uma estabilização,  $D(f_t)$ ,  $f_t(D(f_t))$  e  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  não são suaves mesmo ainda sendo  $f_t$  estável.

Dado um germe de curva com singularidade isolada  $X_0 \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ , podemos considerar o número de Milnor  $\mu(X_0)$  no sentido de [6] para curvas reduzidas ou [7] para curvas com pontos mergulhados, que generalizam o número de Milnor de uma curva plana.

Mais geralmente, seja  $\pi : X \rightarrow D$  um bom representante de  $X_0$ . Então, para  $t \in D \setminus \{0\}$ ,

$$\mu(X_0) - \mu(X_t) = 1 - \chi(X_t) \quad (2.1)$$

onde  $X_t = \pi^{-1}(t)$  e  $\chi(X_t)$  é a característica de Euler de  $X_t$  e  $\mu(X_t) = \sum_{x \in X_t} \mu(X_t, x)$ .

Se  $X_0$  é reduzida, segue de [6] Teorema 4.4.2, que  $X_t$  é conexa e  $\mu(X_0) - \mu(X_t) \geq 0$ , para qualquer  $t \neq 0$ .

No caso em que  $X_0$  é suavizável o número de Milnor pode ser visto como o número que mede a *cohomologia do anulamento* (vanishing cohomology) de  $X_0$  e  $\mu(X_0) = 1 - \chi(X_t)$ .

Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado. Então as curvas  $D^2(f)$ ,  $D(f)$ ,  $f(D(f))$ ,  $\Sigma^{n+1,1}(f)$  e  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$  têm singularidades isoladas e podemos considerar o número de Milnor delas,  $\mu(D^2(f))$ ,  $\mu(D(f))$ ,  $\mu(f(D(f)))$ ,  $\mu(\Sigma^{n+1,1}(f))$ ,  $\mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$ .

A fórmula *ii*) do teorema abaixo relaciona o número de Milnor das curvas de pontos duplos de  $f$  na meta e na fonte juntamente com as contribuições dos tipos 0-estáveis.

As fórmulas do Teorema 2.11 abaixo, foram primeiro obtidas por Houston, onde o item *ii*) é feito para o caso de multigerms. Veja [18] e [19]. Aqui fizemos para o caso de monogermes com outra demonstração, usando técnicas de triangulação, sugeridas por Nuño-Ballesteros e também usando o resultado A.1 do apêndice A em [25].

**Notação:** Dado  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado, as singularidades isoladas estáveis ou singularidades 0-estáveis que podem aparecer no discriminante de  $f$  são os pontos do tipo  $A_{(2,1)}$ ,  $A_{(1,1,1)}$  e  $A_3$ . As curvas  $D(f_t) \subset \Sigma(f_t)$  na fonte e  $f_t(D(f_t)) \subset \Delta(f_t)$  na meta são em geral curvas com singularidades isoladas.

Sejam  $f_D : D(f_t) \rightarrow f_t(D(f_t))$  e  $f_C : \Sigma^{n+1,1}(f_t) \rightarrow f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  respectivamente as aplicações restritas às curvas  $D(f_t)$  e  $\Sigma^{n+1,1}(f_t)$  de  $f_t$ .

E seja  $\pi : D^2(f_t) \rightarrow D(f_t)$  a projeção no primeiro fator de  $D^2(f_t) \subset \Sigma(f_t) \times \Sigma(f_t)$  sobre  $D(f_t) \subset \Sigma(f_t)$ .

Denotamos por  $S_{f_D} = A_{(2,1)} \cup A_{(1,1,1)} \cup A_3$  como a união de pontos 0-estáveis que podem pertencer a curva  $f_t(D(f_t))$ , mas somente os pontos  $A_{(2,1)}$  e  $A_{(1,1,1)}$  podem ser singularidades enquanto que os pontos do tipo  $A_3$  podem pertencer a curva  $f_t(D(f_t))$  mas estes não são singularidades dessa curva.

Um ponto triplo  $A_{(1,1,1)}$  na imagem  $f_t(D(f_t))$  produz três nós sobre  $D(f_t)$  na fonte e cada ponto do tipo  $A_{(2,1)}$  na imagem  $f_t(D(f_t))$  produz uma cúspide e um ponto suave sobre  $D(f_t)$  na fonte (onde esse ponto suave também pertence à curva cuspidal na fonte). Para cada ponto do tipo  $A_3$  no fecho de  $f_t(D(f_t))$  só existe uma pré-imagem em  $D(f_t)$ , que também é suave neste

ponto.

$S_{f_D}$  são pontos na meta de  $f$ , então tomando a imagem inversa de  $S_{f_D}$  por  $f_D$ , teremos um conjunto de pontos na fonte (os pontos do tipo  $A_3$  pertencem ao fecho da curva de pontos duplos, mas não são pontos duplos). Usaremos respectivamente a mesma nomenclatura para as pré-imagens destes pontos. Com isso, denotamos por  $S_D = f_D^{-1}(S_{f_D})$  a pré-imagem de  $S_{f_D}$  por  $f_D$ . Por exemplo, se  $\#S_{f_D} = \#A_{(2,1)} + \#A_{(1,1,1)} + \#A_3$  então,  $\#S_D = 2\#A_{(2,1)} + 3\#A_{(1,1,1)} + \#A_3$ , onde  $\#A_{(2,1)}$  denota a cardinalidade do conjunto de pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  na meta.

Denotamos por  $S_{D^2}$  a imagem inversa por  $\rho = f_D \circ \pi$  do conjunto  $S_{f_D}$ , ou seja,  $S_{D^2} = (\rho)^{-1}(S_{f_D})$ . Cada ponto do tipo  $A_{(1,1,1)}$  em  $f_t(D(f_t))$ , produz  $3! = 6$  pré-imagens em  $D^2(f_t)$  pela  $\rho$ . Assim, sendo  $\#S_{f_D} = \#A_{(2,1)} + \#A_{(1,1,1)} + \#A_3$  então,  $\#S_{D^2} = 2\#A_{(2,1)} + 6\#A_{(1,1,1)} + \#A_3$ .

Também denotamos por  $S_{f_C} = A_{(2,1)} \cup A_3$  como a união de pontos 0-estáveis que podem pertencer a curva  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ , mas somente os pontos do tipo  $A_3$  podem ser singularidades de  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  enquanto que os pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  podem pertencer a curva  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  mas estes não são singularidades desta curva. Como  $f_C : \Sigma^{n+1,1}(f_t) \rightarrow f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  é uma aplicação 1 – 1, temos que,  $S_C = f_C^{-1}(S_{f_C}) = A_{(2,1)} \cup A_3$ , onde usamos a mesma nomenclatura para as pré-imagens dos pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  e  $A_3$ .

**Teorema 2.11.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado. Então,*

$$(i) \quad \mu(D(f)) = \mu(D^2(f)) + 2\#A_{(2,1)} + 6\#A_{(1,1,1)}$$

$$(ii) \quad 2\mu(f(D(f))) = \mu(D(f)) + 2\#A_{(2,1)} + 2\#A_{(1,1,1)} - \#A_3 + 1$$

$$(iii) \quad \mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) = \mu(\Sigma^{n+1,1}(f)) + 2\#A_3.$$

*Demonstração.* Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  uma estabilização de  $f$  e considere um representante suficientemente pequeno. Dado  $t \in D \setminus \{0\}$ , temos que,  $f_D : (D(f_t) - S_D) \rightarrow (f_t(D(f_t)) - S_{f_D})$  é um recobrimento por 2 ramos.

Seja  $(V, L, F)$  uma triangulação de  $f_t(D(f_t))$ , sendo  $V, L, F$  o conjunto de vértices, lados e faces respectivamente. Podemos supor que o conjunto de vértices  $V$  seja igual a  $S_{f_D}$ . Por [25, Apêndice C], existe uma triangulação  $(V', L', F')$  de  $D(f_t)$  tal que,  $\#F' = 2\#F$ ,  $\#L' = 2\#L$  e  $V' = f_D^{-1}(V)$ , isto é,  $V' = S_D$ .

Assim, sendo  $V = S_{f_D} = A_{(2,1)} \cup A_{(1,1,1)} \cup A_3$ , denotamos por  $\#V = \#A_{(2,1)} + \#A_{(1,1,1)} + \#A_3$  a cardinalidade dos pontos em  $V$ , analogamente, a cardinalidade de pontos em  $V'$  é denotada por:  $\#V' = 2\#A_{(2,1)} + 3\#A_{(1,1,1)} + \#A_3$ . Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\chi(D(f_t)) &= \#V' - \#L' + \#F' = (2\#A_{(2,1)} + 3\#A_{(1,1,1)} + \#A_3) - 2\#L + 2\#F \\ \chi(D(f_t)) &= 2(\#A_{(2,1)} + \#A_{(1,1,1)} + \#A_3) - 2\#L + 2\#F - \#A_3 + \#A_{(1,1,1)} \\ \chi(D(f_t)) &= 2(\#V - \#L + \#F) - \#A_3 + \#A_{(1,1,1)} \\ \chi(D(f_t)) &= 2\chi(f_t(D(f_t))) - \#A_3 + \#A_{(1,1,1)}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Como  $\mu(X_t) = \sum_{x \in X_t} \mu(X_t, x)$ , com  $x$  ponto singular de  $X_t$ , então,  $\mu(D(f_t)) = 2\#A_{(2,1)} + 3\#A_{(1,1,1)}$ , veja [19], e  $\mu(f_t(D(f_t)))$  também é uma soma dos números de Milnor sobre os pontos singulares de  $f_t(D(f_t))$ , que tem singularidade somente nos pontos do tipo  $A_{(1,1,1)}$  e  $A_{(2,1)}$ .

Localmente, o número de Milnor de um ponto triplo ordinário em  $\mathbb{C}^3$  é 2. No ponto  $A_{(2,1)}$ , a curva  $f_t(D(f_t))$  localmente é uma cúspide logo, tem número de Milnor 2, assim,  $\mu(f_t(D(f_t))) = 2\#A_{(2,1)} + 2\#A_{(1,1,1)}$ . Portanto, pelas equações 2.1 e 2.2 temos que,

$$1 - \mu(D(f)) + \mu(D(f_t)) = 2(1 - \mu(f(D(f))) + \mu(f_t(D(f_t)))) + \#A_{(1,1,1)} - \#A_3$$

$$2\mu(f(D(f))) = \mu(D(f)) + 2\mu(f_t(D(f_t))) - \mu(D(f_t)) + \#A_{(1,1,1)} - \#A_3 + 1$$

$$2\mu(f(D(f))) = \mu(D(f)) + 2\#A_{(2,1)} + 2\#A_{(1,1,1)} - \#A_3 + 1$$

e a segunda fórmula está provada.

Para a primeira fórmula temos que,  $\pi : D^2(f_t) - S_{D^2} \rightarrow D(f_t) - S_D$  é uma projeção 1 - 1. Pelo mesmo argumento anterior tem-se que,

$$\chi(D^2(f_t)) = \#V' - \#L' + \#F' = 2\#A_{(2,1)} + 6\#A_{(1,1,1)} + \#A_3 - \#L + \#F$$

$$\chi(D^2(f_t)) = (2\#A_{(2,1)} + 3\#A_{(1,1,1)} + \#A_3 - \#L + \#F) + 3\#A_{(1,1,1)}$$

$$\chi(D^2(f_t)) = (\#V - \#L + \#F) + 3\#A_{(1,1,1)}$$

$$\chi(D^2(f_t)) = \chi(D(f_t)) + 3\sharp A_{(1,1,1)}, \quad (2.3)$$

onde agora, os vértices de  $V'$  são os pontos do conjunto  $S_{D^2}$  e os vértices de  $V$  são os pontos do conjunto  $S_D$ .

Pelas equações 2.1 e 2.3, temos

$$1 - \mu(D^2(f)) + \mu(D^2(f_t)) = 1 - \mu(D(f)) + \mu(D(f_t)) + 3\sharp A_{(1,1,1)},$$

Como  $D^2(f_t)$  é suave para  $t \neq 0$ , então  $\mu(D^2(f_t)) = 0$ . Portanto,

$$\mu(D(f)) = \mu(D^2(f)) + 2\sharp A_{(2,1)} + 6\sharp A_{(1,1,1)}.$$

A terceira fórmula também segue por argumentos similares.

Como a curva  $\Sigma^{n+1,1}(f_t)$  é suave para  $t \neq 0$ , segue que,  $\mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t)) = 0$ .

$$f_t : \Sigma^{n+1,1}(f_t) - S_C \rightarrow f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)) - S_{f_C}$$

é uma aplicação 1 – 1, onde  $\sharp S_C = \sharp S_{f_C} = \sharp A_3 + \sharp A_{(2,1)}$ .

As interseções transversais do plano ordinário com o eixo cuspidal (*pontos* –  $A_{(2,1)}$ ) pertencem à curva  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  mas não são singularidades desta curva, logo o número de Milnor nestes pontos é zero. Somente os pontos do tipo  $A_3$  são singularidades da curva  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ .

Olhamos agora para a forma normal da singularidade  $A_3$ , denotada por

$$N_3 : (x_1, x_2, \dots, x_{n+3}) \mapsto (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^4 \pm x_1 x_{n+3} \pm x_2 x_{n+3}^2)$$

e é um germe estável.

Calculando o ideal que define  $N_3(\Sigma^{n+1,1}(N_3))$ , resulta que

$$\mu(N_3(\Sigma^{n+1,1}(N_3))) = 2 = 2.1 = 2\sharp A_3$$

pois na forma normal tem-se apenas 1 ponto do tipo  $A_3$ .  $N_3$  é um representante estável logo temos que  $\mu(N_{3_t}(\Sigma^{n+1,1}(N_{3_t}))) = \mu(N_3(\Sigma^{n+1,1}(N_3)))$ , onde  $N_{3_t}$  é uma deformação de  $N_3$  para  $t$  pequeno. Portanto, como localmente nos pontos do tipo  $A_3$ ,  $f$  tem a forma ou é equivalente a

$N_3$ , segue que,

$$\mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))) = \sum_{A_3 \in f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))} \mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)), A_3) = \sharp A_3 \cdot \mu(N_3(\Sigma^{n+1,1}(N_3))) = 2\sharp A_3.$$

Aqui os vértices de  $V' = V$  são os pontos do conjunto  $S_C = S_{f_C}$ . Logo,

$$\chi(\Sigma^{n+1,1}(f_t)) = \chi(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)))$$

E pela equação 2.1, resulta que:

$$\begin{aligned} 1 - \mu(\Sigma^{n+1,1}(f)) + \mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t)) &= 1 - \mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) + \mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))) \\ \mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) &= \mu(\Sigma^{n+1,1}(f)) + \mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))) \\ \mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) &= \mu(\Sigma^{n+1,1}(f)) + 2\sharp A_3 \end{aligned}$$

□

No exemplo abaixo, para a obtenção dos ideais  $I(D^2(f))$  e  $I(\Sigma^{1,1}(f))$  veja, [23].  $I(\Sigma^{1,1}(f))$  é o ideal que define a curva cuspidal de  $f$  na fonte. Os ideais  $I(f(D(f)))$  e  $I(f(\Sigma^{1,1}(f)))$  foram obtidos a partir dos ideais  $I(D(f))$  e  $I(\Sigma^{1,1}(f))$  e usando o comando *eliminate* do software Singular.

**Exemplo 2.12.** Sejam  $I(D^2(f))$ ,  $I(D(f))$ ,  $I(f(D(f)))$ ,  $I(\Sigma^{1,1}(f))$ ,  $I(f(\Sigma^{1,1}(f)))$  os ideais que definem os estratos 1-dimensionais na fonte e na meta.

Considere o germe de co-posto 1 de  $\mathbb{C}^3$  em  $\mathbb{C}^3$ , dado por  $f(x, y, z) = (x, y, z^4 + xz + y^k z^2)$ ,  $k > 0$  é um inteiro positivo.

Temos que:

$$\begin{aligned} I(D^2(f)) &= \langle 2wz^2 + 2zw^2 + x, -4zw - w^2 - z^2 + y^k, 2w + 2z \rangle \\ I(D(f)) &= \langle x, y^k + 2z^2 \rangle \\ I(f(D(f))) &= \langle x, y^{2k} + 4z \rangle \\ I(\Sigma^{1,1}(f)) &= \langle x - 8z^3, 6z^2 + y^k \rangle \\ I(f(\Sigma^{1,1}(f))) &= \langle 12z - y^{2k}, 9x^2 + 32y^k z \rangle \end{aligned}$$

Calculando o número de Milnor dessas curvas, temos:

$$\begin{aligned}\mu(D^2(f)) &= k - 1; & \mu(f(D(f))) &= 0; \\ \mu(D(f)) &= k - 1; & \mu(f(\Sigma^{1,1}(f))) &= 3k - 1; \\ \mu(\Sigma^{1,1}(f)) &= k - 1; \\ \sharp A_{(2,1)} &= 0; \quad \sharp A_3 = k; \quad \sharp A_{(1,1,1)} = 0\end{aligned}$$

Observe que as três fórmulas do Teorema 2.11 são satisfeitas.

Observamos que com a mesma técnica utilizada no Teorema 2.11, é possível mostrar que

$$\mu(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 2\sharp A_{(1,1)} + 2\sharp A_2$$

para germes de aplicações  $f : (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  independente do co-posto, onde  $\sharp A_{(1,1)}$  e  $\sharp A_2$  denotam respectivamente o número de pontos duplos de dobras e de pontos de cúspides aparecendo no discriminante de uma estabilização de  $f$ . Esta fórmula foi obtida por Gaffney e Mond em [14] para o caso  $n = 0$ .

**Proposição 2.13.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+2}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  germe de aplicação  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado, então,*

$$\mu(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 2\sharp A_{(1,1)} + 2\sharp A_2$$

*Demonstração.* De fato, seja  $\{f_t, t \in \mathbb{C}\}$  o germe de uma família analítica de germes de aplicações com  $f_0 = f$  e  $f_t$  estável para  $t \neq 0$ . Assim,  $\Sigma(f_t)$  é suave para  $t \neq 0$ , então escrevendo  $F(x, t) = (f_t(x), t)$ , obtemos  $\Sigma(F)$  com singularidade isolada em  $(0, 0)$ . Seja  $\Delta(f_t) = f_t(\Sigma(f_t))$ . Como  $f$  é  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado então  $\Sigma(f)$  é reduzido e  $f : \Sigma(f) \rightarrow \Delta(f)$  é 1-1 e assim  $\Delta(f)$  também é uma curva reduzida [14, Teorema 1.1].

Seja  $(V, L, F)$  uma triangulação para a curva  $\Delta(f_t)$  tal que o conjunto de vértices  $V$  contém as singularidades isoladas do tipo  $A_{(1,1)}$  e  $A_2$  que podem pertencer à curva  $\Delta(f_t)$ . Podemos supor que  $V = A_{(1,1)} \cup A_2$ . Denotamos por  $\sharp L$  e  $\sharp F$  como sendo respectivamente o número de lados e de faces da triangulação para  $\Delta(f_t)$ .

Seja agora  $(V', L', F')$  a respectiva triangulação para a curva  $\Sigma(f_t)$ , onde,  $V' = f^{-1}(V)$ ,  $\sharp L'$  o número de lados e  $\sharp F'$  o número de faces da triangulação para  $\Sigma(f_t)$ .



Denotamos por  $\#V = \#A_2 + \#A_{(1,1)}$  a quantidade de pontos do tipo  $A_2$  e  $A_{(1,1)}$  em  $V$ . Como cada ponto do tipo  $A_{(1,1)}$  em  $\Delta(f_t)$  tem duas pré-imagens em  $\Sigma(f_t)$  e cada ponto do tipo  $A_2$  tem apenas uma pré-imagem, temos que a quantidade de pontos em  $V'$  é dada por  $\#V' = \#A_2 + 2\#A_{(1,1)}$ .

Assim, temos que  $f_t : \Sigma(f_t) - V' \rightarrow \Delta(f_t) - V$  é um recobrimento por curvas complexas reduzidas. Logo,

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma(f_t)) &= \#V' + \#F' - \#L' = (\#A_2 + 2\#A_{(1,1)}) + \#F' - \#L' \\ \chi(\Sigma(f_t)) &= (\#A_2 + \#A_{(1,1)}) + \#F - \#L + \#A_{(1,1)} \\ \chi(\Sigma(f_t)) &= (\#V + \#F - \#L) + \#A_{(1,1)} \\ \chi(\Sigma(f_t)) &= \chi(\Delta(f_t)) + \#A_{(1,1)}\end{aligned}\tag{2.4}$$

( $\#F' = \#F$ ,  $\#L' = \#L$  pois  $f_t : \Sigma(f_t) \rightarrow \Delta(f_t)$  é 1 - 1).

Pelas equações 2.1 e 2.4 temos que:

$$\begin{aligned}1 - \mu(\Sigma(f)) + \mu(\Sigma(f_t)) &= 1 - \mu(\Delta(f)) + \mu(\Delta(f_t)) + \#A_{(1,1)} \\ \mu(\Delta(f)) &= \mu(\Sigma(f)) + \mu(\Delta(f_t)) + \#A_{(1,1)}\end{aligned}\tag{2.5}$$

( $\mu(\Sigma(f_t)) = 0$ ,  $t \neq 0$ ). Mas,

$\mu(\Delta(f_t)) = \sum_{x \in \Delta(f_t)} \mu(\Delta(f_t), x) = 2\#A_2 + \#A_{(1,1)}$  ( $x$  é ponto singular de  $\Delta(f_t)$ ) pois, localmente o número de Milnor de uma curva plana em um ponto duplo ordinário é 1 e em uma cúspide é 2. Portanto,

$$\mu(\Delta(f)) = \mu(\Sigma(f)) + 2\#A_2 + 2\#A_{(1,1)}\tag{2.6}$$

□

Observamos que a demonstração para o caso de germes de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  feita por Gaffney e Mond em [14] é diferente desta e esta demonstração foi apresentada recentemente ao Prof. Gaffney em um seminário, durante sua visita a São Carlos e segundo ele é interessante e original.

### 2.2.1 O caso quase-homogêneo

Nesta subseção são mostradas fórmulas para o cálculo do número de Milnor das curvas  $D^2(f)$ ,  $D(f)$ ,  $f(D(f))$ ,  $\Sigma^{1,1}(f)$  e  $f(\Sigma^{1,1}(f))$  em termos dos pesos e graus de  $f$  para o caso de germes de aplicações quase-homogêneos em  $\mathcal{O}(3,3)$  de co-posto 1.

**Definição 2.14.** *Um germe de aplicação analítica  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_p)$  é quase-homogêneo se existem inteiros positivos  $w_1, \dots, w_n$  os pesos e inteiros positivos  $d_1, \dots, d_p$  os graus, tais que  $f_i(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^{d_i}f_i, \forall x \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, p$ .*

O teorema abaixo devido à Marar, Montaldi e Ruas [30] nos fornece em termos dos pesos e grau de  $f$  a quantidade de cada singularidade isolada do tipo  $A_{\mathcal{P}}$  que podem aparecer no discriminante de um germe finitamente determinado de co-posto 1 quase-homogêneo  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ . Aqui  $\mathcal{P} = (r_1, \dots, r_\ell)$  é uma partição de  $n$ , com  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_\ell$ , onde  $\ell$  é o comprimento de  $\mathcal{P}$ .  $N(\mathcal{P})$  é a ordem do subgrupo de  $S_\ell$  que fixa  $\mathcal{P}$ .  $S_\ell$  age sobre  $\mathbb{C}^\ell$  por permutação em suas coordenadas. Por exemplo: Se  $\mathcal{P} = (4, 4, 4, 3, 3, 1, 1) \Rightarrow N(\mathcal{P}) = 3!2!2! = 24$ . Se  $\mathcal{P} = (r_1, \dots, r_\ell)$  então denotamos  $A_{\mathcal{P}} = A_{(r_1, \dots, r_\ell)}$ . Se  $n = 3$  e  $\mathcal{P} = (3)$  então  $A_{\mathcal{P}} = A_3$ , se  $\mathcal{P} = (1, 2)$  então  $A_{\mathcal{P}} = A_{(2,1)}$  e se  $\mathcal{P} = (1, 1, 1)$  então  $A_{\mathcal{P}} = A_{(1,1,1)}$ .

**Teorema 2.15.** [30] *Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $f(x, z) = (x, g(x, z))$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , germe de aplicação  $\mathcal{A}$ -finito, com  $g$  quase-homogêneo de tipo  $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_0; d)$ . Para qualquer estabilização de  $f$  e qualquer partição  $\mathcal{P}$  de  $n$ ,*

$$\#A_{\mathcal{P}} = \frac{\omega_0^{n-1}}{N(\mathcal{P})\omega} \prod_{j=1}^{n+\ell-1} \left( \frac{d}{\omega_0} - j \right)$$

com  $\omega = \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i$ .

**Teorema 2.16.** *Suponha  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  germe de aplicação  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado da forma  $f(x, y, z) = (x, y, g(x, y, z))$  e  $g$  quase-homogêneo de grau  $d$  e pesos  $w_1, w_2, w_3$ . Então,*

$$i) \mu(D(f)) = \frac{d_1 d_2 d_3 [d^2 - w_3(4d + w_2 + w_1 - 4w_3)]}{w_1 w_2 w_3^3} + 1$$

$$ii) \mu(f(D(f))) = \frac{d_1 d_2 d_3 [4d^2 - w_3(15d + 3w_2 + 3w_1 - 5w_3)]}{6w_1 w_2 w_3^3} + 1$$

$$iii) \mu(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \frac{d_1 d_2 (4d - 10w_3 - w_1 - w_2)}{w_1 w_2 w_3} + 1$$

onde,  $d_i = d - iw_3$ .

*Demonstração.* Segue diretamente dos Teoremas 2.11 e 2.15. As curvas  $D^2(f)$  e  $\Sigma^{1,1}(f)$  são ICIS. O número de Milnor de  $D^2(f)$  em termos de pesos e graus é apresentado em [19]. O ideal que define a curva  $\Sigma^{1,1}(f)$  tem dois geradores, com graus  $d - w_3$  e  $d - 2w_3$  e assim podemos usar o Corolário 3.10 de Greuel e Hamm em [16] pág. 77 para calcular o número de Milnor de  $\Sigma^{1,1}(f)$  em termos de pesos e graus de  $f$ .  $\square$

Exceto para  $\mu(f(\Sigma^{1,1}(f)))$  e  $\mu(f(D(f)))$  os números de Milnor da tabela 2.1 são calculados em [31] pág. 470 e em [19] pág. 172. Na tabela 2.1  $C := \Sigma^{1,1}(f)$ ,  $D := D(f)$  e  $D^2 := D^2(f)$ .

nome	forma normal	$\mu(D^2)$	$\mu(D)$	$\mu(f(D))$	$\mu(C)$	$\mu(f(C))$
$A_1$	$(x, y, z^2)$	–	–	–	–	–
*	$(x, y, z^3 + P(x, y)z)$	–	–	–	$\mu(P)$	$\mu(P)$
$4_1^k, k > 0$	$(x, y, z^4 + xz + y^k z^2)$	$k - 1$	$k - 1$	0	$k - 1$	$3k - 1$
$4_2^k, k > 1$	$(x, y, z^4 + y^2 z + x^k z + xz^2)$	$2k - 1$	$2k - 1$	$k - 1$	2	6
$5_1$	$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	1	5	4	0	4
$5_2$	$(x, y, z^5 + xz + y^2 z^2 + yz^3)$	4	10	7	1	7
$5_3$	$(x, y, z^5 + xz + yz^3)$	4	10	7	1	7

Tabela 2.1: Número de Milnor

## 2.3 Desdobramentos excelentes e $\mu$ -constantes

Gaffney em [11] estuda a Whitney equisingularidade em desdobramentos de germes de aplicações finitamente determinados. Seus principais resultados [pág. 207-208] mostram que a Whitney equisingularidade de um desdobramento é obtida em termos da invariância das multiplicidades polares dos tipos estáveis e também de uma condição de excelência no desdobramento.

Nesta seção iremos descrever condições para a excelência do desdobramento em termos da invariância dos números de Milnor das curvas estáveis do germe na fonte.

Assumiremos que todos os desdobramentos  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  preservam a origem,  $f_t(0) = 0$  para qualquer  $t$  e assim, temos uma família de germes de aplicações a 1-parâmetro  $f_t : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ .

**Definição 2.17.** [11] Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, (0, 0))$ ,  $F = (u, \bar{f}(u, x))$ , um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado  $f$ , tal que  $\bar{f}(u, -)$

preserva a origem para todo  $u$ . Seja  $T := \mathbb{C} \times \{0\}$ . Dizemos que  $F$  é um bom desdobramento de  $f$  se existem vizinhanças  $U, W$  da origem em  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}$  e  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$  respectivamente tais que  $F^{-1}(W) = U$ ,  $F$  aplica  $U \cap \Sigma(F) - T$  em  $W - T$  e se  $(t_0, y_0) \in W - T$ , então o germe  $f_{t_0} : (\mathbb{C}^{n+3}, S) \rightarrow (\mathbb{C}^3, y_0)$  é estável, onde  $S = F^{-1}(t_0, y_0) \cap \Sigma(F)$ .

**Definição 2.18.** [11] Dizemos que o desdobramento  $F$  é excelente se  $F$  é bom e  $\sharp A_3, \sharp A_{(2,1)}$  e  $\sharp A_{(1,1,1)}$  são constantes em  $f_t$ .

**Definição 2.19.** Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  um desdobramento de um germe finitamente determinado  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . Dizemos que  $F$  é  $\mu$ -constante se  $\mu(D(f_t))$  e  $\mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  são constantes.

**Teorema 2.20.** Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  um desdobramento de um germe de aplicação de co-posto 1 finitamente determinado  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . Se  $F$  é  $\mu$ -constante, então  $F$  é excelente.

*Demonstração.* Escolhemos um representante suficientemente pequeno  $F : D \times U \rightarrow D \times \mathbb{C}^3$ , onde  $D, U$  são vizinhanças abertas de 0 em  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^{n+3}$  respectivamente tal que  $\pi : D^2(F) \rightarrow D$  e  $\pi : \Sigma^{n+1,1}(F) \rightarrow D$  são bons representantes. Denotamos

$$\mu_t = \sum_{(x,x') \in D^2(f_t)} \mu(D^2(f_t), (x, x')), \quad \tilde{\mu}_t = \sum_{x \in \Sigma^{n+1,1}(f_t)} \mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t), x),$$

e

$$\chi_t = \chi(D^2(f_t)), \quad \tilde{\chi}_t = \chi(\Sigma^{n+1,1}(f_t)).$$

Então segue (veja [16], [6]) que

$$\mu_0 - \mu_t = 1 - \chi_t, \quad \tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_t = 1 - \tilde{\chi}_t.$$

Como  $D^2(f)$  é reduzida,  $D^2(f_t)$  é conexo e assim

$$\mu_0 - \mu_t = 1 - \chi_t \geq 0.$$

Portanto,

$$\mu(D^2(f), (0,0)) = \mu_0 \geq \mu_t = \sum_{(x,x') \in D^2(f_t)} \mu(D^2(f_t), (x,x')) \geq \mu(D^2(f_t), (0,0)),$$

a constância de  $\mu(D(f_t))$  implica que  $\mu(D^2(f_t))$  é constante pelo Teorema 2.11, então isto implica que  $D^2(f_t) \setminus \{(0,0)\}$  é suave, desde que qualquer outro ponto singular deveria ter número de Milnor  $\geq 1$ .

Usando o mesmo argumento como antes, provamos que  $\Sigma^{n+1,1}(f_t) - \{0\}$  é suave também. Como  $\mu(D(f_t))$  é constante, pelo Teorema 2.11 obtemos  $A_{(1,1,1)}(f_t) = \{0\}$  ou  $A_{(1,1,1)}(f_t) = \emptyset$ . Portanto pelo Teorema 2.8 item (1), temos  $f_t : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^3$  é estável.

Note também que  $f_t^{-1}(0) \cap \Sigma(f_t) = \{0\}$  em  $U \cap \Sigma(f_t)$ , para qualquer  $t \in D$ . Na verdade, seja  $x \in U \cap \Sigma(f_t)$  tal que  $f_t(x) = 0$ . Então  $(x,0)$  é um ponto singular de  $D^2(f_t)$ , e portanto,  $x = 0$ .

Para terminar a demonstração, usamos o Teorema 2.11 e obtemos que os invariantes 0-estáveis são constantes em  $t$ , portanto  $F$  é excelente.  $\square$

Entendemos por uma deformação topologicamente trivial de uma curva espacial complexa  $C : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  uma família  $C_t : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , se existem homeomorfismos  $\phi_t : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  e  $\psi_t : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  tal que  $C = \psi_t^{-1} \circ C_t \circ \phi_t$ .

Observamos como consequência das fórmulas 2.11 e da propriedade da semi-continuidade superior dos números de Milnor e também dos números de singularidades 0-estáveis que, se  $F$  é  $\mu$ -constante, as deformações das curvas  $D^2(f_t)$ ,  $D(f_t)$ ,  $f_t(D(f_t))$ ,  $\Sigma^{n+1,1}(f_t)$  e  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  são topologicamente triviais [4].

Existe uma forte relação entre deformações topologicamente triviais de aplicações analíticas e desdobramentos topologicamente triviais e isto sugere a seguinte:

**Conjectura 2.21.** *Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . Se  $F$  é  $\mu$ -constante, então é topologicamente trivial.*

## 2.4 Multiplicidades polares e tipos estáveis

Descrevemos a seguir relações entre as multiplicidades polares, os números de Milnor dos tipos estáveis e as singularidades 0-estáveis com o objetivo de minimizar o número de invariantes

necessários para se garantir a Whitney equisingularidade de desdobramentos de germes finitamente determinados.

Ressaltamos que neste caso, o resultado abaixo, devido a Nuño-Ballesteros e Tomazella, se constitui na ferramenta principal para atingir nossos objetivos e, diferentemente dos resultados já descritos em artigos sobre este tema, aqui não é necessária a condição de que o germe seja de co-posto 1.

O Corolário 3.2 em [41], pag. 7, diz que se  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  é o germe de uma curva espacial reduzida, então

$$m_1(X, 0) = \mu(X, 0) + m_0(X, 0) - 1 \quad (2.7)$$

onde  $m_1(X, 0) = \mu(p|_{X,0})$  é a primeira multiplicidade polar da curva reduzida  $(X, 0)$  e  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é uma projeção linear genérica,  $m_0(X, 0)$  é o grau da projeção  $p$  restrito a  $(X, 0)$ .

Para mais detalhes veja [41].

**Corolário 2.22.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  um germe de aplicação finitamente determinado.*

*Então,*

$$(i) \quad m_1(D(f)) = \mu(D(f)) + m_0(D(f)) - 1$$

$$(ii) \quad m_1(\Sigma^{n+1,1}(f)) = \mu(\Sigma^{n+1,1}(f)) + m_0(\Sigma^{n+1,1}(f)) - 1$$

$$(iii) \quad 2m_1(f(D(f))) = \mu(D(f)) + 2m_0(f(D(f))) + 2\sharp A_{(2,1)} + 2\sharp A_{(1,1,1)} - \sharp A_3 - 1.$$

$$(iv) \quad m_1(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) = m_0(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) + \mu(\Sigma^{1,1}(f)) + 2\sharp A_3 - 1.$$

*Demonstração.* *i) e ii)* é apenas a equação 2.7 com  $X = D(f)$  e  $X = \Sigma^{n+1,1}(f)$  e  $p : \mathbb{C}^{n+3} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma projeção linear genérica.

*iii) e iv)* segue da equação 2.7 e Teorema 2.11, com  $X = f(D(f))$  e  $X = f(\Sigma^{n+1,1}(f))$  e  $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  uma projeção linear genérica.  $\square$

Na tabela 2.2 estão calculados as multiplicidades  $m_0$  e  $m_1$  dos extratos 1-dimensionais da meta de  $f$  de germes simples de  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ .

nome	forma normal	$m_0(f(D))$	$m_1(f(D))$	$m_0(f(C))$	$m_1(f(C))$
$A_1$	$(x, y, z^2)$	–	–	–	–
*	$(x, y, z^3 + P(x, y)z)$	–	–	$m_0(P)$	$\diamond$
$4_1^k, k > 0$	$(x, y, z^4 + xz + y^k z^2)$	1	0	2	$3k$
$4_2^k, k > 1$	$(x, y, z^4 + y^2 z + x^k z + xz^2)$	2	$2k$	2	7
$5_1$	$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	3	12	3	6
$5_2$	$(x, y, z^5 + xz + y^2 z^2 + yz^3)$	3	18	3	9
$5_3$	$(x, y, z^5 + xz + yz^3)$	3	18	3	9

Tabela 2.2: Multiplicidades ( $\diamond := m_0(P) + \mu(P) - 1$ )

## 2.5 Desdobramentos topologicamente triviais

Gaffney em [11] mostrou que a constância das multiplicidades polares em cada tipo estável garante a trivialidade topológica em desdobramentos excelentes de germes finitamente determinados, que descrevemos a seguir.

**Teorema 2.23.** ([11, Teorema 7.1.]) *Consideremos  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$  um desdobramento excelente de um germe finitamente determinado  $f \in \mathcal{O}(n, p)$ . Suponha que as multiplicidades polares dos tipos estáveis em  $\Delta(f_0)$ ,  $\Sigma(f_0)$  e  $\overline{f^{-1}(\Delta(f_0)) - \Sigma(f_0)}$  na origem são constantes para todo  $f$ , com  $t$  pequeno. Então o desdobramento é topologicamente trivial.*

Inicialmente é definida a noção de Whitney equisingularidade para conjuntos analíticos.

**Definição 2.24.** *Uma estratificação de um conjunto analítico complexo  $X$  é uma estratificação de Whitney se para qualquer par de estratos  $S, S'$  com  $S' \subseteq \bar{S}$ , o estrato  $\bar{S}$  é Whitney regular ao longo de  $S'$ . Ou seja, o par  $S, S'$  satisfaz as condições (A) e (B) de Whitney, a saber,*

(A) *Para qualquer sequência de pontos  $y_i \in S$  convergindo para um ponto  $y \in S'$  com a propriedade de que as direções dos espaços tangentes  $T_{S, y_i}$  convergem para um hiperplano  $H$ , tem-se:  $T_{S', y} \subset H$ ;*

(B) *Dadas sequências de pontos  $y_i \in S$  e  $z_i \in S'$  com  $y_i \rightarrow y$  e  $z_i \rightarrow y$  e tais que  $T_{S, y_i}$  converge para um plano  $H$  e a direção da secante  $\overline{z_i y_i} \in \mathbb{K}^{n+1}$  converge para  $l$ , tem-se  $l \subset H$ .*

Observamos que uma estratificação de Whitney sempre existe no caso analítico complexo local (veja seção 01 de [15]).

**Definição 2.25.** *Seja  $X$  um conjunto analítico complexo e  $Y$  um subconjunto de  $X$ . Dizemos que*

$X$  é Whitney equisingular ao longo de  $Y$  se  $Y$  é um estrato de alguma estratificação de Whitney de  $X$ .

**Observação 2.26.** Na demonstração deste resultado Gaffney inicialmente mostra que todos os tipos estáveis satisfazem as condições **(A)** e **(B)** de Whitney com relação aos respectivos espaços de parâmetros na fonte e na meta, ou seja os espaços de parâmetros fazem parte de uma estratificação de Whitney de cada tipo estável. Depois ele aplica uma versão apropriada do segundo Lema de isotopia de Thom para obter a trivialidade topológica do desdobramento.

O próximo teorema mostra condições suficientes para a Whitney equisingularidade das famílias de curvas  $\Sigma^{n+1,1}(f_t)$ ,  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $D(f_t)$ , e  $f_t(D(f_t))$  ao longo dos respectivos espaços de parâmetros  $T = \mathbb{C} \times \{0\}$  em  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  e  $T = \mathbb{C} \times \{0\}$  em  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ .

**Proposição 2.27.** *Suponha que  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um germe finitamente determinado e  $F = (t, f_t)$  um desdobramento a 1-parâmetro de  $f$ . Então as famílias de curvas  $\Sigma^{n+1,1}(f_t)$ ,  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $D(f_t)$ , e  $f_t(D(f_t))$  são Whitney equisingulares ao longo de  $T$  se, e somente se, a aplicação*

$$t \mapsto \left( m_0(\Sigma^{n+1,1}(f_t)), m_0(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))), \mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))), \right. \\ \left. m_0(D(f_t)), m_0(f_t(D(f_t))), \mu(f_t(D(f_t))) \right)$$

é constante ao longo de  $T$ .

*Demonstração.* Por [4, Teorema III.3], temos que as multiplicidades e os números de Milnor das curvas  $\Sigma^{n+1,1}(f_t)$ ,  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $D(f_t)$ ,  $f_t(D(f_t))$  são constantes ao longo de  $T$ .

Reciprocamente, como as multiplicidades e os números de Milnor das famílias de curvas  $f_t(D(f_t))$  e  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  são constantes, então por [4, Teorema III.3], temos que estas duas famílias de curvas  $f_t(D(f_t))$  e  $f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  são Whitney equisingulares ao longo de  $T$ . Como  $\mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)))$  é constante, pelo Teorema 2.11, item *iii*) temos que  $\mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$  e  $\sharp A_3$  são constantes ao longo de  $T$ , e sendo  $\mu(f_t(D(f_t)))$  também constante, segue que  $\mu(D(f_t))$  é constante pelo Teorema 2.11. Assim por [4, Teorema III.3], tem-se que as famílias de curvas  $(D(f_t), \Sigma^{n+1,1}(f_t))$  são Whitney equisingulares ao longo de  $T$ .  $\square$

**Observação 2.28.** O corolário 3.5 de [41] diz que uma família de curvas espaciais  $(X_t, 0)$  é Whitney Equisingular se, e somente se,  $m_1(X_t, 0)$  é constante. Com isto no Teorema anterior



são necessários apenas 4 invariantes para a Whitney equisingularidade da família

$$(\Sigma^{n+1,1}(f_t), f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)), D(f_t), f_t(D(f_t))),$$

porém em geral, o invariante  $m_1$  parece ser mais difícil de calcular, do que  $m_0$  e do que o número de Milnor.

Mostramos a seguir que os números de Lê do conjunto  $\Delta(f)$ , que é uma superfície em  $\mathbb{C}^3$  cujo “locus singular” é 1-dimensional, controlam a Whitney equisingularidade da família de hipersuperfícies  $\Delta(f_t) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$  ao longo do espaço dos parâmetros  $T = \mathbb{C} \times 0$ .

Seja  $g : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  a equação de definição de  $\Delta(f)$ , isto é,  $g^{-1}(0) = \Delta(f)$ . Como esta superfície tem conjunto singular de dimensão 1, temos associados a esta dois números de Lê na origem, que iremos denotar por  $\lambda^0(g)$  e  $\lambda^1(g)$ . Observamos que estamos seguindo a notação de Massey, [37] ou [38], para estes números.

Analogamente, para cada  $f_t$  denotamos por  $g_t$  a equação de definição da superfície  $\Delta(f_t)$  em  $\mathbb{C}^3$ , e assim podemos atribuir seus números de Lê na origem, denotados por  $\lambda^0(g_t)$  e  $\lambda^1(g_t)$ .

Para um subespaço genérico linear  $k$ -dimensional  $H_k \subseteq (\mathbb{C}^3, 0)$  com  $k = 1$  ou  $2$ , denotamos a característica de Euler reduzida da fibra de Milnor de  $g_t|_{H_k}$  em  $0$  por  $\tilde{\chi}^{(k)}(g_t)$ . Então a fórmula da Proposição 1.21 e o Teorema 3.3 de [37] mostram que:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(3)}(g_t) &= \lambda^0(g_t) - \lambda^1(g_t) \\ \tilde{\chi}^{(2)}(g_t) &= \mu(g_t \cap H_2) = m_2(g_t) + \lambda^1(g_t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Gaffney e Gassler mostram em [13, Corolario 6.6] que a família  $g_t$  é equisingular se, e somente se, a correspondência  $t \rightarrow (m_0(g_t), m_1(g_t), \lambda^0(g_t), \lambda^1(g_t))$  é constante ao longo do eixo de parâmetros.

**Observação 2.29.** (i) Por Massey [37, pág. 20] temos

$$\lambda^1(g_t) = 2m_0(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) + m_0(f(D(f))),$$

onde  $g_t$  define o discriminante  $\Delta(f_t)$  de  $f_t$ .

- (ii) Se  $H_2$  é um hiperplano genérico que passa pela origem em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , o conjunto  $g_t \cap H_2$  é uma família de curvas planas e então  $\mu(g_t \cap H_2)$  constante implica que a família  $g_t \cap H_2$  é Whitney Equisingular. Isto implica que a multiplicidade  $m_0(g_t \cap H_2)$  é constante, mas como  $m_0(g_t \cap H_2) = m_1(g_t) + 1$ , temos que as multiplicidades polares  $m_1(g_t)$  também permanecem constantes.

**Proposição 2.30.** *Suponha que  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um germe finitamente determinado e  $F = (t, f_t)$  é um desdobramento a 1-parâmetro de  $f$ .*

- (i) *A aplicação  $t \mapsto (m_0(f_t(D(f_t))), m_0(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t))), \mu(g_t \cap H_2), \lambda^0(g_t))$  é constante ao longo de  $T$  se, e somente se, a família de hipersuperfícies  $\Delta(f_t)$  é Whitney equisingular ao longo de  $T$ .*

- (ii) *Se  $f$  for de co-posto 1 então,  $\mu^*(\Sigma(f_t))$  é constante se, e somente se,  $\Sigma(f_t)$  é Whitney equisingular ao longo de  $T$ .*

*Demonstração.* i) Como  $m_0(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)))$  e  $m_0(f_t(D(f_t)))$  são constantes, pela observação 2.29 temos que  $\lambda^1(g_t)$  é constante. Por hipótese  $\mu(g_t \cap H_2)$  é constante, e como  $\mu(g_t \cap H_2) = m_2(g_t) + \lambda^1(g_t)$  então  $m_2(g_t)$  é constante. Isto implica que  $g_t \cap H_2$  é uma curva plana Whitney equisingular. Assim,  $m_0(g_t \cap H_2)$  é constante, e pela observação 2.29 item 2. temos que  $m_1(g_t)$  é constante. Então por [13, corolário 6.6] obtemos o resultado.

- ii) A Whitney equisingularidade de  $\Sigma(f_t)$  segue da fórmula

$$m_k(X) = \mu^{k+1}(X) + \mu^k(X), \quad 0 \leq k \leq d,$$

e Gaffney [11, corolário 5.11, pg. 204]. O caso  $n = 0$ , segue de Teissier-Briançon [45].  $\square$

**Observação 2.31.** No caso de germes de aplicações de  $\mathbb{C}^3$  em  $\mathbb{C}^3$  e co-posto 1, o item i) também é mostrado por Houston, [18].

Observamos que os conjuntos  $X(f_t) = \overline{f_t^{-1}(\Delta(f_t))} - \Sigma(f_t)$  também são hipersuperfícies com conjunto singular possivelmente  $(n+1)$ -dimensional em  $\mathbb{C}^{n+3}$ , veja exemplos em [23] para  $n = 0$  e em [24] para  $n = 1$ . Seja  $h_t$  a equação de definição de  $X(f_t)$ , ou seja  $h_t^{-1}(0) = X(f_t)$ .

Dizemos que o desdobramento  $F$  é Whitney equisingular ao longo de  $T$  se todos os estratos definidos pelos tipos estáveis das famílias  $f_t$  são Whitney equisingulares ao longo dos

respectivos espaços de parâmetros  $T$  e além disso,  $F$  aplica submersivamente estrato em estrato. Assim temos os seguintes:

**Teorema 2.32.** *Suponha que  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um germe finitamente determinado, e  $F = (t, f_t)$  um desdobramento excelente a 1-parâmetro de  $f$ . Então,  $F$  é Whitney equisingular ao longo de  $T$  se, e somente se,  $\mu(f_t(D(f_t)))$ ,  $\mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)))$ ,  $m_0(D(f_t))$ ,  $m_0(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $\mu(g_t \cap H_2)$ ,  $\lambda^0(g_t)$ ,  $m_i(\Sigma(f_t))$ ,  $i = 0, 1, 2$  e  $m_i(h_t)$ ,  $i = 0, \dots, n+2$  são constantes ao longo de  $T$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Óbvio.

( $\Leftarrow$ ) Esta direção segue das Proposições 2.27 e 2.30, Corolário 2.22 e Teorema 2.23.  $\square$

**Teorema 2.33.** *Suponha que  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um germe de aplicação finitamente determinado de co-posto 1, e  $F = (t, f_t)$  um desdobramento a 1-parâmetro de  $f$ . Então  $F$  é Whitney equisingular ao longo de  $T$  se, e somente se,  $\mu(f_t(D(f_t)))$ ,  $\mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)))$ ,  $m_0(D(f_t))$ ,  $m_0(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $\mu(g_t \cap H_2)$ ,  $\lambda^0(g_t)$ ,  $\mu^*(\Sigma(f_t))$ , e  $m_i(h_t)$ ,  $i = 0, \dots, n+2$  são constantes ao longo de  $T$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Óbvio.

( $\Leftarrow$ ) Esta direção segue das Proposições 2.27 e 2.30, Teoremas 2.20 e 2.23 e Corolário 2.22.  $\square$

Note que todos invariantes nos Teoremas 2.32 e 2.33 são números de Milnor e multiplicidades. Também se  $f$  é um germe de aplicação de co-posto 1, então podemos remover a hipótese de  $F$  ser excelente.

**Conjectura 2.34.** *Suponha que  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um germe de aplicação finitamente determinado de co-posto 1, e  $F = (t, f_t)$  um desdobramento a 1-parâmetro de  $f$ . Então  $F$  é Whitney equisingular ao longo de  $T$  se, e somente se,  $\mu(D(f_t))$ ,  $\mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $\mu^*(\Sigma(f_t))$ ,  $m_0(D(f_t))$  e  $m_0(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ , são constantes.*

## Contando singularidades via ideais de Fitting

As singularidades estáveis de aplicações diferenciáveis constituem na principal fonte de estudo do comportamento geométrico e topológico destas aplicações, e neste sentido o desenvolvimento de métodos de contagem destas singularidades se mostra de grande importância.

A contagem destas singularidades via ideais de Fitting associados ao conjunto discriminante, ou seja a imagem do conjunto singular de  $f$ , é consequência do trabalho desenvolvido por Mond e Pellikaan [33] em 1989. Neste artigo Mond e Pellikaan estudam o comportamento dos conjuntos de pontos múltiplos na meta de aplicações analíticas finitas entre variedades analíticas  $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ , ou seja eles buscam uma boa estrutura analítica para o conjunto de pontos em  $Y$  cuja pré-imagem consiste de  $k$  ou mais pontos, contando multiplicidade, denotado por  $M_k(f)$ . Quando  $\tilde{X}$  é uma variedade analítica Cohen-Macaulay e  $Y$  é suave com  $\dim Y = \dim \tilde{X} + 1$ , eles mostraram que a estrutura analítica apropriada neste caso é definida por meio de ideais de Fitting do  $\mathcal{O}_Y$ -módulo coerente  $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ .

Neste capítulo estamos considerando germes de aplicações finitamente determinados  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  e com especial interesse no germe da restrição de  $f$  ao conjunto singular  $(\Sigma(f), 0)$ , ou seja, em  $f|_{\Sigma(f)} : (\Sigma(f), 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ . Para poder aplicar os resultados de Mond e Pellikaan ao estudo deste germe, vamos supor que  $f$  tem co-posto 1, quando  $m > 3$ . Assim, nestas condições temos pelo Lema 2.1 que  $\Sigma(f)$  é uma variedade Cohen-Macaulay  $(m - 1)$ -dimensional e como  $\mathbb{C}^m$  é suave  $m$ -dimensional, podemos considerar  $Y = \mathbb{C}^m$  e  $\tilde{X} = \Sigma(f)$ .

Na seção seguinte definiremos ideais de Fitting de um módulo  $M$  e também apresentaremos um algoritmo devido a Mond e R. Pellikaan [33] para calcular tais ideais. Ideais de Fitting nos permitem calcular os ideais de definição dos conjuntos de pontos múltiplos (contando multipli-

cidade) de  $f$  na meta.

Neste contexto para germes de  $(\mathbb{C}^{n+3}, 0)$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , conseguimos obter resultados que determinam o número de singularidades 0-dimensionais através da dimensão de algumas álgebras associadas aos ideais de Fitting, conforme Proposições 3.2 e 3.5, Corolários 3.6 e 3.7. Resultado análogo à Proposição 3.2 para  $m > 3$  também foi obtido, porém com hipóteses mais restritas. Além disso, foram calculados vários exemplos utilizando esses resultados.

### 3.1 Ideais de Fitting

**Definição 3.1.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado ( $R$  um anel comutativo com unidade) e seja*

$$R^p \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

*uma apresentação do módulo  $M$  sobre  $R$  (ou seja uma sequência exata de  $R$ -módulos.)*

*O  $k$ -ésimo ideal de Fitting de  $M$ ,  $\mathcal{F}_k(M)$ , é definido como sendo o ideal em  $R$  gerado por todos os menores  $(q-k) \times (q-k)$  da matriz  $\lambda$ , para  $q > k \geq q-p$ .  $\mathcal{F}_k(M) = R$  se  $k \geq q$  e  $\mathcal{F}_k(M) = 0$  se  $k < q-p$ .*

Vemos em [28] pág. 59 que os ideais de Fitting são bem definidos, isto é, não dependem da escolha de uma apresentação. O conceito de ideais de Fitting também faz sentido se são dados um espaço analítico  $(X, \mathcal{O}_X)$  e um  $M$   $\mathcal{O}_X$ -módulo coerente, ver [28] pág. 63. Se  $f: \tilde{X} \rightarrow Y$  é um morfismo finito de espaços analíticos, então  $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$  é um feixe coerente de  $\mathcal{O}_Y$ -módulo, [33].

Como  $f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$  é um feixe coerente de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}$ -módulo, onde  $f|_{\Sigma(f)}: \Sigma(f) \rightarrow \mathbb{C}^m$  é um morfismo finito de espaços analíticos, então podemos associar o feixe ideais de Fitting de  $\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)})$  e [33, Proposição 1.5] diz que:

$$V(\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)})) = \left\{ y \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Sigma(f)} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\Sigma(f),x}}{f^*m_y} > k \right\} \quad (3.1)$$

$V(\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)}))$  é o conjunto de pontos onde  $f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$  necessita de ao menos  $k+1$  geradores sobre  $\mathcal{O}_m$  ou seja  $V(\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)}))$  é o conjunto de pontos em  $\mathbb{C}^m$  cuja pré-imagem consiste de  $(k+1)$  ou mais pontos em  $\Sigma(f)$ , contando multiplicidade, [33, Proposição 1.3]. Observe aqui que se  $k \geq m$ , então  $\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)})$  é igual ao anel  $\mathcal{O}_m$ .

Por simplicidade denotamos  $\mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_{\Sigma(f)})$  por  $\mathcal{F}_k(f)$  e a variedade de zeros de  $\mathcal{F}_k(f)$  por:

$$M_{k+1}(f) := V(\mathcal{F}_k(f)).$$

### 3.1.1 Algoritmo para construir uma sequência exata

Nesta seção descrevemos o algoritmo devido a Mond e Pellikaan [33] para a obtenção dos ideais de Fitting.

Seja  $(X, x)$  um multi-germe de uma variedade Cohen-Macaulay  $(m-1)$ -dimensional, e seja  $f : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  um germe de aplicação analítica finita. Pelo Teorema de preparação de Weierstrass,  $\mathcal{O}_{X,x}$  é um  $\mathcal{O}_m$ -módulo finito (onde  $\mathcal{O}_m = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0}$ ), e se  $g_1, g_2, \dots, g_h$  geram  $\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{f^*m_0}$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ , então  $g_1, g_2, \dots, g_h$  geram  $\mathcal{O}_{X,x}$  como  $\mathcal{O}_m$ -módulo. Evidentemente podemos tomar  $g_1 = 1$ .

Uma apresentação de  $\mathcal{O}_{X,x}$  sobre  $\mathcal{O}_m$  é uma sequência exata

$$\mathcal{O}_m^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_m^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0 \quad (3.2)$$

de  $\mathcal{O}_m$ -módulos. Se  $g_1, g_2, \dots, g_h$  geram  $\mathcal{O}_{X,x}$  então, podemos tomar  $q = p = h$ ,  $\alpha(e_i) = g_i$  (onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo membro da base usual). Veja [33].

#### Procedimento para encontrar a matriz $\lambda$ da sequência 3.2 acima:

Escolha uma projeção  $\pi : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{m-1}, 0)$  tal que  $\tilde{f} = \pi \circ f$  seja ainda finita (isto é normalização de Noether que pode sempre ser feita). Depois de mudança de coordenadas, podemos supor que  $f(x) = (\tilde{f}(x), f_m(x))$ . Como  $\mathcal{O}_{X,x}$  é Cohen-Macaulay então  $\mathcal{O}_{X,x}$  é um  $\mathcal{O}_{m-1}$ -módulo livre via  $\tilde{f}^*$ . Sejam  $g_1, g_2, \dots, g_h$  os geradores.

Então, existem únicos  $\alpha_j^i \in \mathcal{O}_{m-1}$ ,  $1 \leq i, j \leq h$ , tais que

$$g_j f_m = \sum (\alpha_j^i \circ \tilde{f}) g_i. \quad (3.3)$$

Observamos que os  $g_i$  também geram  $\mathcal{O}_{X,x}$  sobre  $\mathcal{O}_m$  via  $f^*$ , então,

$$\lambda_j^i = \alpha_j^i \circ \pi, \quad i \neq j$$

$$\lambda_i^i = \alpha_i^i \circ \pi - X_m.$$

Observe que  $f_m = X_m \circ f$ , e  $(X_1, \dots, X_m)$  denotam as coordenadas de  $\mathbb{C}^m$  (meta).

Portanto, temos a matriz  $\lambda = \lambda_{(i,j)}$  para a sequência exata 3.2 acima. Cálculo onde obtivemos uma matriz  $\lambda$  como acima são dados nos Exemplos 3.8 e 3.11 abaixo.

### 3.2 Número de singularidades para $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$

Nesta seção queremos calcular o número de singularidades isoladas que podem surgir no discriminante de uma perturbação estável do germe  $f$ . Como visto na observação 1.6, estas podem ser do tipo  $A_{(1,1,1)}$ ,  $A_{(2,1)}$  ou  $A_3$ .

Vamos trabalhar com as variedades  $M_2(f)$  e  $M_3(f)$  para poder contar esses pontos. Como os ideais de Fitting não distinguem pontos  $k$ -múltiplos ordinários dos demais pontos cuja multiplicidade é  $k$ , o ideal  $\mathcal{F}_1(f)$  define a união da curva de pontos duplos ordinários com a curva cuspidal de  $f$  na meta. Logo por 3.1 temos que:

$$M_2(f) = V(\mathcal{F}_1(f)) = f(D(f)) \cup f(\Sigma^{n+1,1}(f)).$$

Por isso, o ideal de Fitting não é uma boa determinação para pontos múltiplos ordinários no discriminante de  $f$ . Mas a vantagem deste método é que o mesmo pode ser utilizado para germes de co-posto maior do que 1. Se  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  for de co-posto 1 com  $n \leq p$ , Marar e Mond em [29] definem a estrutura dos conjuntos de pontos múltiplos ordinários na fonte.

Analogamente de acordo com a equação 3.1 acima,

$$M_3(f) = V(\mathcal{F}_2(f)) = A_{(2,1)} \cup A_{(1,1,1)} \cup A_3.$$

e por último o discriminante de  $f$  é:

$$M_1(f) = V(\mathcal{F}_0(f)) = \Delta(f) = f(\Sigma(f)).$$

Observe que  $M_3(f) \subset M_2(f) \subset M_1(f) \subset \mathbb{C}^3$ .

Quando  $(\Sigma(f), 0)$  for Gorenstein e codimensão de  $V(\mathcal{F}_2) = 3$ , o ideal  $\mathcal{F}_2$  é determinantal simétrico, em particular Cohen-Macaulay, seção 2 de [33].

Para contar todos os pontos do tipo  $A_{(2,1)}$ ,  $A_{(1,1,1)}$  e  $A_3$  a partir de seu ideal de definição  $\mathcal{F}_2(f)$ , é preciso que este ideal seja Cohen-Macaulay.

O Teorema 4.3 de [33] diz que se  $f : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  é uma aplicação finita onde  $(X, x)$  é um espaço Gorenstein  $(m - 1)$ -dimensional,  $f$  de grau 1 sobre sua imagem e a codimensão de  $\mathcal{F}_2(f) \geq 3$  implica que  $\mathcal{F}_2(f)$  é um ideal determinantal simétrico. Em particular,  $\mathcal{F}_2(f)$  é Cohen-Macaulay. Neste resultado, se  $m = 3$  e  $f$  tem apenas pontos triplos ordinários (*pontos* –  $A_{(1,1,1)}$ ) em uma perturbação estável, então o número desses pontos ( $\sharp A_{(1,1,1)}$ ) é dado pela dimensão complexa  $\frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f)}$ . Ou seja,

$$\sharp A_{(1,1,1)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)}}{\mathcal{F}_2(f)}.$$

Entretanto, se  $f$  também tem pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  e/ou  $A_3$  essa dimensão nos fornece a soma total de todos esses pontos cuja multiplicidade de cada um é 3, que são os tipos estáveis 0-dimensionais. Na proposição seguinte, mostramos como calcular a soma destes pontos.

Seja  $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3, 0)$  com  $F(t, x) = (t, f_t(x))$  um desdobramento estável a 1-parâmetro de  $f$ ,  $f_t$  é uma deformação de  $f$ .

**Proposição 3.2.** *Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  germe de aplicação finitamente determinado com  $(\Sigma(f), 0)$  Gorenstein e codimensão de  $V(\mathcal{F}_2(f))$  igual a 3, então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)}}{\mathcal{F}_2(f)} = \sharp A_{(2,1)} + \sharp A_{(1,1,1)} + \sharp A_3.$$

*Demonstração.* Como  $\Sigma(f)$  é Gorenstein, pelo Teorema 4.1 ou 4.3 de [33],  $\mathcal{F}_2$  é ideal determinantal simétrico logo é Cohen-Macaulay e  $M_3(F) \rightarrow \mathbb{C}$  é uma deformação plana (flat) sobre a base  $\mathbb{C}$ , então temos o diagrama comutativo abaixo: ( $(\Sigma(f) \times \mathbb{C}, 0)$  também é Cohen-Macaulay).

$$\begin{array}{ccc} V(\mathcal{F}_2(f_* \mathcal{O}_{\Sigma(f)})) & \longrightarrow & V(\mathcal{F}_2(F_* \mathcal{O}_{(\Sigma(f) \times \mathbb{C})})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$



e pela conservação da multiplicidade temos que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)}}{\mathcal{F}_2(f_* \mathcal{O}_{\Sigma(f)})} = \sum_{z \in \mathbb{C}^3} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, z)}}{\mathcal{F}_2(f_{t*} \mathcal{O}_{\Sigma(f_t)})}.$$

Se a contribuição local em cada ponto  $z$  em  $V(\mathcal{F}_2(f_{t*} \mathcal{O}_{\Sigma(f_t)}))$  for 1, como  $\mathcal{F}_2(f_{t*} \mathcal{O}_{\Sigma(f_t)})$  é Cohen-Macaulay, então obtemos a igualdade

$$\sum_{z \in \mathbb{C}^3} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, z)}}{\mathcal{F}_2(f_{t*} \mathcal{O}_{\Sigma(f_t)})} = \sharp A_{(2,1)} + \sharp A_{(1,1,1)} + \sharp A_3.$$

Então precisamos mostrar que a contribuição local em cada ponto  $z$  é 1.

Como dito por Mond e Pellikaan a contribuição local nos pontos  $z$  do tipo  $A_{(1,1,1)}$  é 1. Para calcular a contribuição local com  $z$  sendo pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  ou  $A_3$  devemos tomar as formas normais locais em cada um destes pontos. A descrição das formas normais locais destas singularidades podem ser vistas nas Tabelas 1.1 e 1.2.

Para o cálculo da contribuição local nos pontos do tipo  $A_3$ , denotamos por  $N_3$  a forma normal local para esta singularidade.

$$N_3 : (x_1, x_2, \dots, x_{n+3}) \longmapsto (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_{n+2}^2 \pm x_{n+3}^4 \pm x_1 x_{n+3} \pm x_2 x_{n+3}^2).$$

Temos que

$$J(N_3) = \langle x_3, \dots, x_{n+2}, 4x_{n+3}^3 + 2x_2 x_{n+3} + x_1 \rangle.$$

Assim, restringindo ao conjunto singular  $(\Sigma(N_3), 0) = V(J(N_3))$  de  $N_3$ , temos a aplicação  $\tilde{N}_3 = N_3|_{(\Sigma(N_3), 0)} : (\Sigma(N_3), 0) \cong (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , por:

$$\tilde{N}_3(x_2, x_{n+3}) = (-4x_{n+3}^3 - 2x_2 x_{n+3}, x_2, -3x_{n+3}^4 - x_2 x_{n+3}^2).$$

Assim, (veja seção 3.1.1) obtemos a matrix  $\lambda$  de apresentação para  $\mathcal{O}_{(\Sigma(N_3), 0)}$ , onde,

$$\lambda = \begin{bmatrix} -Z & \frac{3}{4}X & \frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{8}XY & -Z - \frac{1}{4}Y^2 & \frac{3}{4}X \\ -\frac{3}{16}X^2 & -\frac{1}{2}XY & -Z - \frac{1}{4}X^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Aqui  $X, Y$  e  $Z$  são variáveis em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  meta. Calculando o segundo ideal de Fitting desta matriz, obtemos:

$$\mathcal{F}_2(N_3) = \langle X, Y, Z \rangle$$

logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)}}{\mathcal{F}_2(N_3)} = 1.$$

Portanto, a contribuição nos pontos  $z$  do tipo  $A_3$  é 1.

Analogamente, calculemos a contribuição local quando  $z$  é um ponto do tipo  $A_{(2,1)}$ . Denotamos por  $N_{1,2}$  a forma normal local para a singularidade  $A_{(2,1)}$ , que é um bigerme.  $N_{1,2}$  é dado por:

$$N_{1,2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n+3}) \mapsto \left\{ \begin{aligned} &(x_1, \pm x_2^2 \pm x_4^2 \pm \dots \pm x_{n+3}^2, x_3); \\ &(x_1, x_2, \pm x_3^3 \pm x_1 x_3 \pm x_4^2 \dots \pm x_{n+3}^2) \end{aligned} \right\}$$

logo,

$$J(N_{1,2}) = J_1 \cdot J_2$$

onde,

$$J_1 = \langle x_2, x_4, \dots, x_{n+3} \rangle \text{ e } J_2 = \langle 3x_3^2 + x_1, x_4, \dots, x_{n+3} \rangle.$$

$$V(J_1) = \{(x_1, 0, x_3, 0, \dots, 0)\} \subset (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \text{ e } V(J_2) = \{(-3x_3^2, x_2, x_3, 0, \dots, 0)\} \subset (\mathbb{C}^{n+3}, 0)$$

$$N_{1,2}(V(J(N_{1,2}))) = N_{1,2}(V(J_1)) \cup N_{1,2}(V(J_2))$$

onde,

$$N_{1,2}(V(J_1)) = \{(x_1, 0, x_3)\} \subset (\mathbb{C}^3, 0) \text{ e } N_{1,2}(V(J_2)) = \{(-3x_3^2, x_2, -2x_3^3)\} \subset (\mathbb{C}^3, 0).$$

Assim, podemos identificar  $V(J_1)$  com  $N_{1,2}(V(J_1))$  e ambas com  $(\mathbb{C}^2, 0)$  ou seja, restringindo ao conjunto singular de  $N_{1,2}$ , basta calcular a contribuição para

$$\tilde{N}_{1,2} : V(3x_3^2 + x_1) \mapsto (x_1, x_3^3 + x_1 x_3)$$

e a matrix  $\lambda$  de uma apresentação para  $\mathcal{O}_{(V(3x_3^2+x_1), 0)}$ , é dada por,

$$\lambda = \begin{bmatrix} -Y & \frac{2}{3}X \\ -\frac{2}{9}X^2 & -Y \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3, 0)}}{\mathcal{F}_2(N_{1,2})} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2, 0)}}{\mathcal{F}_1(\tilde{N}_{1,2})} = 1$$

pois,  $\mathcal{F}_1(\tilde{N}_{1,2}) = \langle X, Y \rangle$  é um ideal maximal em  $\mathcal{O}_2$ .

Portanto, a contribuição local nos pontos  $z$  do tipo  $A_{(2,1)}$  também é 1 e temos o desejado.  $\square$

**Observação 3.3.** Se  $f$  tem somente pontos triplos ordinários em uma perturbação estável, então a proposição acima é a afirmação do Teorema 4.3 de [33]. Em uma conversa com Mond durante sua visita à São Carlos, ele disse que a soma das singularidades isoladas como dimensão complexa  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f)}$  é verdade a menos de contribuições locais, bastando então apenas calcular as contribuições locais nos pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  e  $A_3$  para se ter o teorema acima.

**Observação 3.4.** Sem a hipótese que a variedade  $\Sigma(f)$  é Gorenstein, existem exemplos em que o locus dos pontos triplos de uma deformação de  $f$  não é uma família plana (flat) sobre  $\mathbb{C}^3$ . Veja exemplo 7.5 em [33]. Porém, Se  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é finitamente determinado de co-posto 1, então  $\Sigma(f)$  é uma interseção completa com singularidade isolada, portanto  $\Sigma(f)$  é Gorenstein. Se  $n = 0$  e  $f$  é de qualquer co-posto,  $\Sigma(f)$  é sempre Gorenstein, veja Lema 1.7.

A desvantagem da Proposição 3.2 acima é que ela nos fornece apenas a soma das singularidades isoladas aparecendo no discriminante de uma perturbação estável do germe  $f$ , e não a quantidade de cada uma delas.

A proposição seguinte nos permite uma maneira de obtermos apenas a quantidade de pontos triplos ordinários (*pontos* –  $A_{(1,1,1)}$ ) surgindo em uma perturbação estável de  $f$ , desde que conheçamos o ideal de definição da curva cuspidal de  $f$  na meta.

O ideal quociente de  $I$  por  $J$  em um anel  $A$  é definido como sendo o ideal em  $A$  por:

$$(I : J) := \{a \in A ; aJ \subset I\}.$$

Sejam  $I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$  e  $I(f(D(f)))$  respectivamente o ideal que define a curva cuspidal e a curva de pontos duplos de  $f$  na meta.

**Proposição 3.5.** *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.2 temos,*

$$\sharp A_{(1,1,1)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{n+1,1}(f))))}.$$

*Demonstração.* Se  $f$  possui pontos triplos ordinários em uma deformação, então como estes não pertencem a curva  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ , segue que  $M_3(f) = V(\mathcal{F}_2)$  não está contido na curva  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ , logo o ideal  $I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$  não está contido em  $\mathcal{F}_2$ . O quociente de  $\mathcal{F}_2$  por  $I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$  é exatamente o ideal que define o conjunto dos pontos triplos ordinários. Ou seja, temos que,

$$(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))) = \{a \in \mathcal{O}_3 ; a.I(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) \subset \mathcal{F}_2\} = T,$$

onde  $T$  é o ideal que define o conjunto dos pontos triplos ordinários  $(A_{(1,1,1)})$ . O ideal  $a = I(f(D(f)))$  também satisfaz  $V(\mathcal{F}_2) \subset V(a) \cup f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ , mas como  $I(f(D(f))) \subset T$ , temos o desejado.  $\square$

Observe que se  $f$  não tem pontos  $-A_{(1,1,1)}$  então,  $M_3(f)$  está contido no fecho da curva  $f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ , logo temos que  $I(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) \subset \mathcal{F}_2$ , assim  $(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))) = \mathcal{O}_3$  e a dimensão na Proposição 3.5 será zero como havíamos de esperar.

Se considerarmos germes  $f : (\mathbb{C}^{n+3}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  de co-posto 1, podemos encontrar o número de pontos do tipo  $A_3$  via ideais jacobianos iterados na fonte, ou seja,

$$\sharp A_3 := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+3}}{I(A_3)} \quad (3.4)$$

onde  $I(A_3)$  é o ideal que define os pontos do tipo  $A_3$  na fonte de  $f$ , veja [40].

Como consequência de 3.4 e das Proposições 3.2 e 3.5 temos também o número de pontos do tipo  $A_{(2,1)}$ , dado por uma soma de dimensões, isto é:

**Corolário 3.6.** *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.2 e além disso  $f$  sendo de co-posto 1 temos,*

$$\sharp A_{(2,1)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{n+1,1}(f))))} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+3}}{I(A_3)}.$$

**Corolário 3.7.** *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.2 temos,*

$$2\mu(f(D(f))) = \mu(D(f)) + 2 \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2} - 3\sharp A_3 + 1.$$

*Demonstração.* Segue do Teorema 2.11 e Proposição 3.2. □

A fórmula do Corolário 3.7 é análoga ao item *ii*) do Teorema 2.11. O ganho computacional deste corolário é que não precisamos nem encontrar o ideal  $I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$ , nem fazer o quociente deste com o ideal  $\mathcal{F}_2$  e nem calcular a dimensão na Proposição 3.5 que nos dá a quantidade de *pontos*  $-A_{(1,1,1)}$  e também não precisamos encontrar  $\sharp A_{(2,1)}$  separadamente.

### 3.3 Exemplos

Vamos computar agora as dimensões dos resultados anteriores em exemplos e além disso encontrar o número de Milnor da curva de pontos duplos na fonte, ou seja,  $\mu(D(f))$ . Vamos usar ideais de Fitting e o Teorema 2.11 para encontrar tal número. O primeiro exemplo abaixo é para um germe de aplicação finitamente determinado de  $\mathbb{C}^4$  em  $\mathbb{C}^3$  de co-posto 1. O segundo exemplo é para um germe de  $\mathbb{C}^3$  em  $\mathbb{C}^3$  de co-posto 1 e quase-homogêneo, onde já sabemos a quantidade de cada tipo de singularidade isolada que aparece em uma estabilização deste germe, via fórmula do Teorema 2.15. Por último é computado um exemplo de co-posto 2.

**Exemplo 3.8.** Seja  $f : (\mathbb{C}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , definido por:

$$f(x, y, z, w) = (x, y, w^4 + z^2w + yz + xw)$$

Primeiro precisamos encontrar a matriz de uma apresentação para o  $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ -módulo. Temos que o ideal jacobiano de  $f$  é dado por:

$$J(f) = \langle y + 2zw, 4w^3 + z^2 + x \rangle,$$

este ideal define uma variedade suave e 2-dimensional, então  $V(J(f)) = \Sigma(f)$  é isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ .  $(\Sigma(f), 0)$  é um germe de uma variedade Cohen Macaulay 2-dimensional e também é Gorenstein pois é uma interseção completa.  $F = f|_{\Sigma(f) \cong \mathbb{C}^2} : (\Sigma(f), 0) \cong (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , é uma aplicação analítica finita. Pelo Teorema de preparação de Weierstrass,  $\mathcal{O}_{\Sigma(f), 0}$  é um  $\mathcal{O}_3$ -módulo finito

(onde  $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}$ ), e se  $g_1, \dots, g_h$  geram  $\frac{\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}}{F^*m_0}$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C} = \mathcal{O}_3/m_0$ , então  $g_1, \dots, g_h$  geram  $\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}$  como  $\mathcal{O}_3$ -módulo. Evidentemente podemos tomar  $g_1 = 1$ .

Uma apresentação de  $\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}$  sobre  $\mathcal{O}_3$  é uma sequência exata

$$\mathcal{O}_3 \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_3 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\Sigma(f),0} \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{O}_3$ -módulos.

Assim, temos  $F = f|_{\Sigma(f) \cong \mathbb{C}^2} : (\Sigma(f), 0) \cong (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , um germe de aplicação analítica finita, definida por:

$$F(z, w) = (-4w^3 - z^2, -2zw, -3w^4 - 2z^2w).$$

Observe que  $\Delta(f) = \Delta(F)$ , porém  $f$  é um germe finitamente determinado e  $F$  não é finitamente determinado, pois  $F$  tem infinitos cross caps (guarda-chuva de Whitney).

Temos que  $F(x) = (\tilde{F}(x), F_3(x))$ , onde  $\tilde{F} = (-4w^3 - z^2, -2zw)$  e  $F_3 = -3w^4 - 2z^2w$ .

$\tilde{F}$  é a projeção da primeira e segunda coordenada de  $F = (F_1, F_2, F_3)$ .

Agora  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}}{F^*m_0} = 5$  e uma base para o quociente  $\frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^2,0)}}{F^*m_0}$  é:  $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ , onde,

$$g_1 = 1, \quad g_2 = z, \quad g_3 = z^2, \quad g_4 = w, \quad g_5 = w^2.$$

Resolvendo a igualdade,

$$g_j F_3 = \sum (\alpha_j^i \circ \tilde{F}) g_i$$

obtemos as relações,

$$\begin{aligned} 1.F_3 &= 0.1 + \frac{5}{8}X_2.z + 0.z^2 + \frac{3}{4}X_1.w + 0.w^2 \\ z.F_3 &= -\frac{3}{8}X_1X_2.1 + 0.z + \frac{5}{8}X_2.z^2 + 0.w + 0.w^2 \\ z^2.F_3 &= 0.1 + -X_1X_2.z + 0.z^2 + 0.w + \frac{5}{4}X_2^2.w^2 \\ w.F_3 &= -\frac{15}{16}X_2^2.1 + 0.z + 0.z^2 + 0.w + \frac{3}{4}X_1.w^2 \\ w^2.F_3 &= -\frac{3}{16}X_1^2.1 + 0.z + -\frac{3}{16}X_1.z^2 + -\frac{5}{16}X_1^2.w + 0.w^2 \end{aligned}$$

onde,  $F_1 = X_1 := -4w^3 - z^2$ ,  $F_2 = X_2 := -2zw$ ,  $X_3 = F_3 := -3w^4 - 2z^2w$ .

Agora pela relação:  $\lambda_j^i = \alpha_j^i \circ \pi$ ,  $i \neq j$ ,  $\lambda_i^i = \alpha_i^i \circ \pi - X_3$ , tem-se que a matriz  $\lambda = a_{i,j}$  para a

sequência exata é dada por:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -X_3 & \frac{5}{8}X_2 & 0 & \frac{3}{4}X_1 & 0 \\ -\frac{3}{8}X_1X_2 & -X_3 & \frac{5}{8}X_2 & 0 & 0 \\ 0 & -X_1X_2 & -X_3 & 0 & \frac{5}{4}X_2^2 \\ -\frac{5}{16}X_2^2 & 0 & 0 & -X_3 & \frac{3}{4}X_1 \\ -\frac{3}{16}X_1^2 & 0 & -\frac{3}{16}X_1 & -\frac{5}{16}X_2^2 & -X_3 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

Calculamos agora o  $k$ -ésimo ideal de Fitting da matriz  $\lambda$ , para  $3 > k \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_k = I_k(\mathcal{O}_{\Sigma(f),0})$  que é definido como o ideal em  $\mathcal{O}_3$  gerado pelos  $(3-k) \times (3-k)$  menores de  $\lambda$ .

Sejam  $X_1 := X$ ,  $X_2 := Y$  e  $X_3 := Z$ , as variáveis na meta. Portanto, temos os seguintes ideais dos menores da matriz  $\lambda$ :

$$\mathcal{F}_0 = \langle 3125Y^8 - 6912X^5Y^2 - 36000X^2Y^4Z - 6912X^4Z^2 - 102400XY^2Z^3 - 65536Z^5 \rangle$$

$$\mathcal{F}_1 = \langle 27X^4Z + 75XY^2Z^2 + 160Z^4, 375XY^4 - 432X^3Z + 1600Y^2Z^2, 90X^3Y^2 + 125Y^4Z + 144X^2Z^2, 27X^4Y + 75XY^3Z + 160YZ^3, 625Y^6 - 2640X^2Y^2Z - 3072XZ^3 \rangle$$

$$\mathcal{F}_2 = \langle Z^3, YZ^2, XZ^2, Y^2Z, XYZ, X^2Z, XY^2, X^2Y, X^3, Y^4 \rangle$$

Esses ideais definem os seguintes conjuntos no discriminante  $\Delta(f) = f(\Sigma(f)) \subset \mathbb{C}^3$ :

1.  $V(\mathcal{F}_0) = \Delta(f)$  é uma variedade 2-dimensional. O ideal  $\mathcal{F}_0$  também pode ser obtido primeiro calculando o ideal que define o conjunto singular  $\Sigma(f)$  do germe  $f$  e assim o discriminante  $\Delta(f)$  de  $f$  são os pontos  $(X, Y, Z)$  em  $\mathbb{C}^3$  tais que  $f(x, y, z, w) = (X, Y, Z)$  e  $(x, y, z, w)$  pertencem ao conjunto singular  $\Sigma(f)$  em  $\mathbb{C}^4$ . Pode-se encontrar esses ideais utilizando o comando “eliminate” do software singular, porém como veremos a seguir o custo computacional deste comando é alto.
2.  $V(\mathcal{F}_1) = f(D(f)) \cup f(\Sigma^{2,1}(f))$ , união das curvas de pontos duplos e curva cuspidal de  $f$  na meta.  $V(\mathcal{F}_1)$  é uma variedade 1-dimensional. Ideais de Fitting não distinguem a curva de pontos duplos da curva cuspidal. A pré-imagem de um ponto que pertence a curva de pontos duplos ordinários consiste de dois pontos distintos, mas a curva cuspidal aparece

porque são pontos de multiplicidade igual a 2.

3.  $V(\mathcal{F}_2) = A_{(2,1)} \cup A_{(1,1,1)} \cup A_3$ , união das singularidades isoladas (0-estáveis) na meta. O ideal  $\mathcal{F}_2$  também não distingue as singularidades  $A_3$ ,  $A_{(2,1)}$  e  $A_{(1,1,1)}$ .

Uma vez obtidos os ideais  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  calculemos então:  $\#A_3$ ,  $\#A_{(2,1)}$  e  $\#A_{(1,1,1)}$ .

Fazendo decomposição primária do ideal  $\mathcal{F}_1$ , obtemos:

$$\mathcal{F}_1 = I(f(D(f))) \cap I(f(\Sigma^{2,1}(f))), \text{ onde,}$$

$$I(f(\Sigma^{2,1}(f))) = \langle 15XY^2 + 16Z^2, 9X^3 - 25Y^2Z, 125Y^4 + 48X^2Z \rangle$$

$$I(f(D(f))) = \langle 5XY^2 + 32Z^2, 125Y^4 - 432X^2Z, 27X^3Z + 50Y^2Z^2, 27X^3Y + 50Y^3Z \rangle.$$

**Observação 3.9.** Para uma simples conferência, calcula-se primeiro o ideal  $I(\Sigma^{2,1}(f))$  (fonte) via jacobiano iterado, depois obtém-se  $I(f(\Sigma^{2,1}(f)))$  usando o comando *eliminate* do software Singular. Uma vez obtido este ideal fazemos o quociente do ideal  $\mathcal{F}_1$  pelo ideal  $I(f(\Sigma^{2,1}(f)))$  resultando no ideal  $I(f(D(f)))$  da curva de pontos duplos na meta.

Pela Proposição 3.2,

$$11 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3,0)}}{\mathcal{F}_2} = \#A_{(2,1)} + \#A_{(1,1,1)} + \#A_3.$$

Como o quociente  $(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))) = \langle X, Y, Z \rangle$  é o ideal maximal em  $\mathcal{O}_3$ , segue da Proposição 3.5 que,

$$\#A_{(1,1,1)} = 1$$

Pela equação 3.4 e Corolário 3.6, temos respectivamente que,

$$\#A_3 = 5 \text{ e } \#A_{(2,1)} = 5.$$

Usando o software Singular, obtemos que  $\mu(f(D(f))) = 17$  e  $\mu(f(\Sigma^{2,1}(f))) = 12$ . Pelo Corolário 3.7,

$$\begin{aligned} 2\mu(f(D(f))) &= \mu(D(f)) + 2\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2} - 3\#A_3 + 1 \\ 2 \cdot 17 &= \mu(D(f)) + 2 \cdot 11 - 3 \cdot 5 + 1 \end{aligned}$$

ou seja,  $\mu(D(f)) = 26$ .



Observe que a fórmula *iii*) do Teorema 2.11 é satisfeita, isto é:

$$\begin{aligned}\mu(f(\Sigma^{2,1}(f))) &= \mu(\Sigma^{2,1}(f)) + 2\sharp A_3 \\ 12 &= 2 + 2.5\end{aligned}$$

onde,

$$I(\Sigma^{2,1}(f)) = \langle x + z^2 + 4w^3, y + 2zw, z^2 - 6w^3 \rangle \subset \mathcal{O}_4$$

é o ideal de uma interseção completa com singularidade isolada que define a curva cuspidal na fonte de  $f$ , cujo número de Milnor é 2.

Este exemplo mostra a dificuldade de calcular os números de Milnor e também a quantidade de singularidades isoladas que podem surgir no discriminante de uma perturbação estável do germe  $f$ .

Com o ideal de definição do discriminante de  $f$  que é uma superfície em  $\mathbb{C}^3$  e os ideais que definem as curvas  $f(D(f))$  e  $f(\Sigma^{2,1}(f))$  podemos ver o gráfico da parte real destes conjuntos. A Figura 3.1 é o discriminante de  $f$ , onde as curvas em cores vermelha e azul são respectivamente as curvas  $f(D(f))$  e  $f(\Sigma^{2,1}(f))$ .

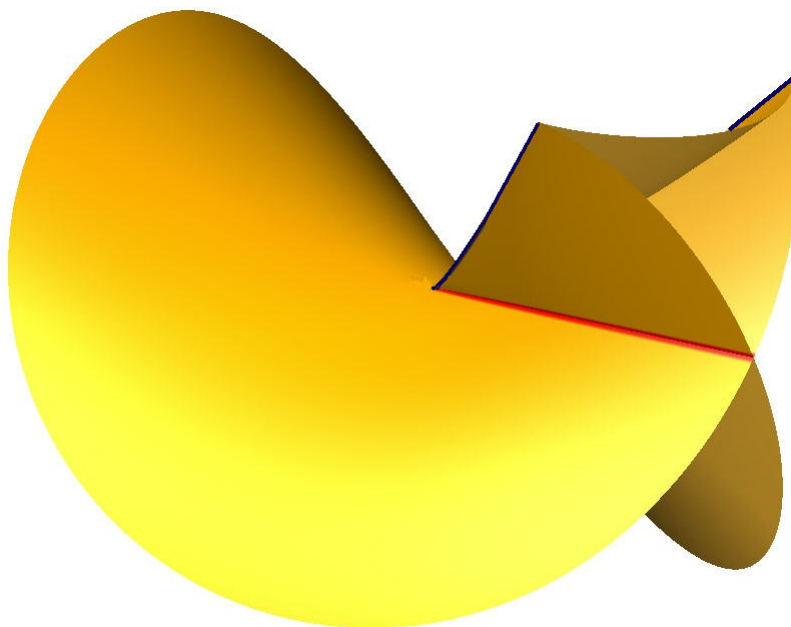


Figura 3.1: Discriminante de  $(x, y, z, w) \xrightarrow{f} (x, y, w^4 + z^2w + yz + xw)$

**Exemplo 3.10.** Seja  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ , definida por:

$$f(x, y, z) = (x, y, z^6 + xz + yz^2).$$

Calculando uma apresentação para o  $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ -módulo resulta que a matrix  $\lambda$  dessa apresentação é dada por:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -Z & \frac{5}{6}Y & \frac{2}{3}X & 0 & 0 \\ 0 & -Z & \frac{5}{6}Y & \frac{2}{3}X & 0 \\ 0 & 0 & -Z & \frac{5}{6}Y & \frac{2}{3}X \\ -\frac{1}{9}XY & -\frac{2}{9}X^2 & 0 & -Z & \frac{5}{6}Y \\ -\frac{5}{36}Y^2 & -\frac{7}{18}XY & -\frac{2}{9}X^2 & 0 & -Z \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

Calculando o  $k$ -ésimo ideal de Fitting da matriz  $\lambda$ ,  $3 > k \geq 0$ , obtemos:

$$\mathcal{F}_0 = \langle 46656Z^5 + 3125Y^6 + 22500XY^4Z + 43200X^2Y^2Z^2 + 13824X^3Z^3 + 256X^5Y^2 + 1024X^6Z \rangle$$

$$\mathcal{F}_1 = \langle 1875Y^4 + 5400XY^2Z + 1728X^2Z^2 + 256X^5, 1125Y^3Z + 2160XYZ^2 - 64X^4Y, 675Y^2Z^2 + 648XZ^3 + 40X^3Y^2 + 96X^4Z, 405YZ^3 - 25X^2Y^3 - 84X^3YZ, 1944Z^4 + 125XY^4 + 540X^2Y^2Z + 288X^3Z^2 \rangle$$

$$\mathcal{F}_2 = \langle X^3, X^2Y, XY^2, 25Y^3, X^2Z, XYZ, Y^2Z, XZ^2, YZ^2, Z^3 \rangle.$$

Fazendo a decomposição primária do ideal  $\mathcal{F}_1$ , obtemos o ideal que define cada uma das curvas, a saber:

$$I(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \langle 25Y^2 + 96XZ, 4X^3 + 135Z^2 \rangle$$

$$I(f(D(f))) = \langle -16X^3Y + 135YZ^2, 64X^4 + 675Y^2Z + 432XZ^2, 25Y^3 + 36XYZ,$$

$$5X^2Y^2 + 4X^3Z + 27Z^3, 16X^3Y - 135YZ^2 \rangle,$$

$I(f(D(f)))$  ainda é dado pela interseção de dois ideais, isto é,

$$I(f(D(f))) = \langle 25Y^2 + 36XZ, 16X^3 - 135Z^2 \rangle \cap \langle Y, 4X^3 + 27Z^2 \rangle.$$

Por 3.2, 3.5, 3.4 e 3.6 temos respectivamente que,

$$\begin{aligned} \sharp A_{(2,1)} + \sharp A_{(1,1,1)} + \sharp A_3 &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^3,0)}}{\mathcal{F}_2} = 10 \\ \sharp A_{(1,1,1)} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{n+1,1}(f))))} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle X, Y, Z \rangle} = 1 \\ \sharp A_3 &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+3}}{I(A_3)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle x + 36z^5, y - 45z^4, 20z^3 \rangle} = 3 \\ \sharp A_{(2,1)} &= 10 - 1 - 3 = 6. \end{aligned}$$

(No cálculo de  $A_3$  as variáveis  $(x, y, z)$  estão em  $\mathbb{C}^3$  fonte).

Como esse germe é quase-homogêneo com pesos  $\omega_1 = 5$ ,  $\omega_2 = 4$ ,  $\omega_0 = 1$  e grau  $d = 6$ , pelo Teorema 2.15, também temos que:

$$\begin{aligned} \sharp A_{(2,1)} &= \frac{1}{20}(6-1)(6-2)(6-3)(6-4) = 6 \\ \sharp A_{(1,1,1)} &= \frac{1}{3!20}(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5) = 1 \\ \sharp A_3 &= \frac{1}{20}(6-1)(6-2)(6-3) = 3. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.11.** Vamos computar agora a quantidade de singularidades isoladas e o número de Milnor da curva de pontos duplos e da curva cuspidal na meta de  $f$ , isto é,  $\mu(f(D(f)))$  e  $\mu(f(\Sigma^{1,1}(f)))$ , onde  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é um germe de co-posto 2 definido por  $f(x, y, z) = (x, yz, z^2 + y^2 + xz)$ .

Saia e Nuño-Ballesteros em [40] mostraram que este germe possui 2 pontos do tipo  $A_3$  em uma deformação genérica de  $f$ , porém neste exemplo temos que  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{J_{1,1,1}} = 4$ , ou seja, não é possível calcular estes pontos via ideais jacobianos iterados, [40]. Usando ideais de Fitting mostramos como calcular todos os invariantes 0-estáveis deste exemplo, mesmo sendo de co-posto 2.

Vamos calcular uma apresentação para o  $\mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ -módulo. Temos que o ideal jacobiano de  $f$  é gerado por  $J = 2z^2 - 2y^2 + xz$ .

$\Sigma(f) = V(J)$  é uma superfície com singularidade isolada, e não como nos exemplos acima onde  $\Sigma(f)$  era regular.  $(\Sigma(f), 0)$  é um germe de uma variedade Cohen-Macaulay 2-dimensional

e também é Gorenstein pois é uma interseção completa.

$f = f|_{\Sigma(f)} : (\Sigma(f), 0) \rightarrow (x, yz, z^2 + y^2 + xz)$  é uma aplicação analítica finita e  $\mathcal{O}_{\Sigma(f), 0}$  é um  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ -módulo finito via  $f^*$ . Aqui encontramos  $\{1, y, z\}$  como os geradores de  $\mathcal{O}_{\Sigma(f), 0}$  sobre  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$  (meta) via  $f^*$ . Vamos agora escrever as relações para obter a matrix  $\lambda$  da apresentação para  $\mathcal{O}_{\Sigma(f), 0}$ .

Sejam,  $X := x$ ,  $Y := yz$ ,  $Z := z^2 + y^2 + xz$  e considere os geradores  $\{1, y, z\}$ . Logo as 3 relações procuradas são:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}XY.1 + \frac{1}{2}Z.y - Y.z &= 0 \\ \frac{1}{8}XZ.1 + Y.y + (-\frac{1}{2}Z - \frac{3}{16}X^2).z &= 0 \\ (-Y^2 + \frac{1}{4}Z^2).1 - \frac{3}{4}XY.y - \frac{1}{8}XZ.z &= 0 \end{aligned}$$

Portanto a matrix  $\lambda$  das relações é dada por:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}XY & \frac{1}{2}Z & -Y \\ \frac{1}{8}XZ & Y & -\frac{1}{2}Z - \frac{3}{16}X^2 \\ -Y^2 + \frac{1}{4}Z^2 & -\frac{3}{4}XY & -\frac{1}{8}XZ \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Assim, temos os seguintes ideais de Fitting da matrix  $\lambda$ :

$$\mathcal{F}_0 = \langle 256Y^4 - 128Y^2Z^2 + 16Z^4 - 144X^2Y^2Z + 4X^2Z^3 - 27X^4Y^2 \rangle$$

$$\mathcal{F}_1 = \langle 32Y^2 - 8Z^2 - 3X^2Z, 32XYZ + 9X^3Y, 32XZ^2 + 9X^3Z \rangle$$

$$\mathcal{F}_2 = \langle X^2, Y, Z \rangle.$$

Fazendo decomposição primária obtemos:  $\mathcal{F}_1 = I(f(D(f))) \cap I(f(\Sigma^{1,1}(f)))$  onde,

$$I(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \langle 128Y^2 - 3X^2Z, 32YZ + 9X^2Y, 32Z^2 + 9X^2Z \rangle$$

$$I(f(D(f))) = \langle X, 4Y^2 - Z^2 \rangle.$$

$I(f(D(f)))$  é ideal de uma ICIS, e  $\mu(f(D(f))) = 1$ .  $f(\Sigma^{1,1}(f))$  não é uma ICIS, mas

$$I(f(\Sigma^{1,1}(f))) = \langle 12Y^2 + Z^2, 9X^2 + 32Z \rangle \cap \langle Z, Y \rangle$$

onde cada ideal na interseção é uma ICIS, logo por [6, Corolário 1.2.3]

$$\mu(f(\Sigma^{1,1}(f))) = 6.$$

O número de pontos em  $V(\mathcal{F}_2)$  é:

$$2 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}(\mathbb{C}^3, 0)}{\mathcal{F}_2} = \#A_{(2,1)} + \#A_{(1,1,1)} + \#A_3$$

como este germe tem 2 pontos do tipo  $A_3$ , veja [40] Exemplo 4.5, e a soma total dos pontos de multiplicidade 3 é igual a 2, segue que este germe não tem pontos do tipo  $A_{(2,1)}$  e nem pontos do tipo  $A_{(1,1,1)}$ .

Observe também que por outro lado o quociente  $(\mathcal{F}_2 : I(f(\Sigma^{1,1}(f)))) = \mathcal{O}_3$ , logo pela Proposição 3.5,  $\#A_{(1,1,1)} = 0$ . Como havíamos de esperar.

Usando ideal jacobiano iterado, tem-se que o ideal que define a curva cuspidal de  $f$  na fonte é dada por:

$$I(\Sigma^{1,1}(f)) = \langle xy + 4y^2 + 4z^2, y^2 + 3z^2, 3xz + 8yz \rangle = \langle z, y \rangle \cap \langle 3x + 8y, y^2 + 3z^2 \rangle$$

logo por [6, Corolário 1.2.3],

$$\mu(\Sigma^{1,1}(f)) = 2.$$

Observe que a fórmula *iii*) do Teorema 2.11 é satisfeita, isto é:

$$\begin{aligned} \mu(f(\Sigma^{1,1}(f))) &= \mu(\Sigma^{1,1}(f)) + 2\#A_3 \\ 6 &= 2 + 2 \cdot 2. \end{aligned}$$

Em conclusão até o momento temos estudado as singularidades para germes de aplicações de  $(\mathbb{C}^{n+3}, 0)$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  onde:

1. Se  $f$  é de co-posto 1, é possível contar, cada uma das singularidades isoladas.
2. Se  $f$  é de co-posto 2, sabemos calcular a soma das três singularidades e também o número de pontos tripos ordinários e consequentemente a soma  $\#A_{(2,1)} + \#A_3$ .

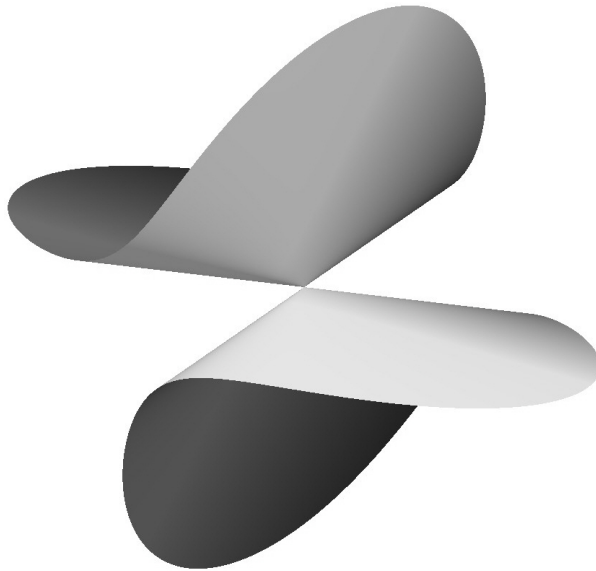


Figura 3.2: Conjunto singular de  $(x, y, z) \xrightarrow{f} (x, yz, z^2 + y^2 + xz)$

A Figura 3.2 é o conjunto singular  $f$ , que é uma superfície com singularidade isolada, cujo número de Milnor é 1.

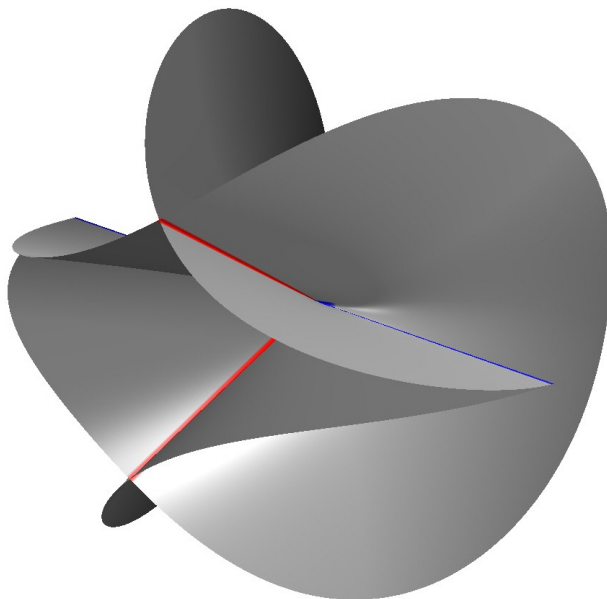


Figura 3.3: Discriminante de  $(x, y, z) \xrightarrow{f} (x, yz, z^2 + y^2 + xz)$

A Figura 3.3 é o discriminante  $f$ , onde as curvas em cores vermelha e azul são respectivamente a curva de pontos duplos  $f(D(f))$  e a curva cuspidal  $f(\Sigma^{1,1}(f))$ .

### 3.4 Caso $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ , com $m > 3$

Nesta seção, onde é considerado  $m > 3$  vamos calcular a soma total das singularidades isoladas de germes de aplicações finitamente determinados  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  em termos de uma dimensão complexa.

Só que nestas dimensões vamos precisar de hipóteses extras, a primeira delas é considerar  $f$  germe de aplicação finitamente determinado de co-posto 1, pois daí as singularidades isoladas que podem aparecer no discriminante de  $f$  são singularidades do tipo  $A_{\mathcal{P}}$ , onde  $|\mathcal{P}| = m$ .

Um germe de aplicação estável  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  tem uma  $A_k$  singularidade se  $f$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe

$$(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{n+m}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m^{k+1} + x_1 x_m^{k-1} + \dots + x_{k-1} x_m \pm x_{m+1}^2 \dots \pm x_{n+m}^2)$$

que é a suspensão da singularidade estável  $A_k$  de  $(\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  ( $k \leq m$ ). E além disso qualquer germe de aplicação estável de co-posto 1 é uma  $A_k$  singularidade para algum número natural  $k$ , [30].

Como aqui estamos contando singularidades isoladas na meta, os  $A_{\mathcal{P},s}$  aqui são denotados germes (multigerms) de singularidades isoladas na meta e  $|\mathcal{P}| = m$ . Por exemplo se  $\mathcal{P} = (m)$  temos uma singularidade 0-dimensional do tipo  $A_m$ , se  $\mathcal{P} = (1, \dots, 1)$  (1 contado  $m$ -vezes) então  $A_{\mathcal{P}}$  é um ponto  $m$ -múltiplo ordinário na meta.

Como já dito antes (também veja [33]), o primeiro e o segundo ideal de Fitting ( $\mathcal{F}_1(f)$  e  $\mathcal{F}_2(f)$ ) são Cohen-Macaulay, onde para o caso  $\mathcal{F}_2(f)$  devemos considerar que  $(\Sigma(f), 0)$  seja Gorenstein e codimensão de  $V(\mathcal{F}_2(f))$  ser maior ou igual a 3.

Então para contar singularidades isoladas usando ideais de Fitting para germes de  $(\mathbb{C}^{n+m}, 0)$  em  $(\mathbb{C}^m, 0)$  é necessário que o ideal  $\mathcal{F}_{m-1}(f)$  seja Cohen-Macaulay.

De acordo com seção 5. de [33] os ideais  $\mathcal{F}_k(f)$  para  $1 \leq k \leq (m-1)$  são ideais determinantis desde que  $\mathcal{O}_{(\Sigma(f), 0)}$  seja cíclico sobre  $\mathcal{O}_m$ ,  $\text{codim} M_{k+1}(f) = k+1$  e  $\text{codim} M_{k+2}(f) = k+2$ , conforme [33, Teorema 5.2]. E além disso para que  $\mathcal{F}_{m-1}(f)$  seja ideal determinantal precisamos supor que existe uma deformação  $F : (\Sigma(f), 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{m+1}, 0)$  tal que valem estas hipóteses de codimensão para  $\mathcal{F}_{m-1}(F)$  e  $\mathcal{F}_m(F)$ .

Por [33, Proposição 1.5],  $M_m(f) := V(\mathcal{F}_{m-1}(f)) = \cup_{|\mathcal{P}|=m} A_{\mathcal{P}}$ . Assim,  $\text{codim} M_m(f) = m$ .

**Definição 3.12.** Dizemos que  $\mathcal{O}_{(\Sigma(f),0)}$  é cíclico sobre  $\mathcal{O}_m$  se  $\frac{\mathcal{O}_{(\Sigma(f),0)}}{f^* \mathfrak{m}_m} \cong \frac{\mathbb{C}[t]}{t^h}$  para algum número natural  $h$ .

**Proposição 3.13.** Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  germe de aplicação finitamente determinado de co-posto 1 e seja  $\mathcal{O}_{(\Sigma(f),0)}$  cíclico sobre  $\mathcal{O}_m$ , então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^m,0)}}{\mathcal{F}_{m-1}(f)} = \sum_{|\mathcal{P}|=m} C_{\mathcal{P}} A_{\mathcal{P}},$$

onde  $C_{\mathcal{P}}$  é a contribuição local da singularidade  $A_{\mathcal{P}}$  no ideal  $\mathcal{F}_{m-1}(f)$ .

*Demonstração.* Por [33, Teorema 5.2], temos que  $\mathcal{F}_{m-1}(f)$  é um ideal determinantal, logo Cohen-Macaulay e assim temos uma deformação plana sobre a base do desdobramento e como na Proposição 3.2 temos que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^m,0)}}{\mathcal{F}_{m-1}(f)} = \sum_{|\mathcal{P}|=m} C_{\mathcal{P}} A_{\mathcal{P}}.$$

□

Observe que nesta proposição não calculamos as contribuições locais das singularidades do tipo  $A_{\mathcal{P}}$  como na Proposição 3.2, onde em cada ponto a contribuição local calculada teve valor igual a 1.

Calculamos alguns exemplos e constatamos que as constantes  $C_{\mathcal{P}}$  são todas iguais à 1, como por exemplo a proposição abaixo. Assim, acreditamos que cada constante  $C_{\mathcal{P}}$  seja igual a 1 na Proposição 3.13.

Na Proposição 3.13 acima, vamos tomar  $m = 4$ ,  $n = 0$  e mostrar que cada  $C_{\mathcal{P}} = 1$ , onde  $|\mathcal{P}| = 4$ .

**Proposição 3.14.** Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.13, se  $m = 4$  e  $n = 0$  então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^4,0)}}{\mathcal{F}_3(f)} = \sharp A_{(1,1,1,1)} + \sharp A_{(1,1,2)} + \sharp A_{(1,3)} + \sharp A_{(2,2)} + \sharp A_4$$

*Demonstração.* Pela Proposição 3.13 precisamos mostrar que cada  $C_{\mathcal{P}} = 1$ , onde  $|\mathcal{P}| = 4$ . Seguindo o procedimento para o cálculo da contribuição no ponto  $A_{(2,1)}$  (Proposição 3.2) e do



fato que no ponto  $A_3$ , como na Proposição 3.2 a contribuição é 1, segue que  $C_{\mathcal{P}} = 1$  onde  $\mathcal{P} = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathcal{P} = (1, 1, 2)$  e  $\mathcal{P} = (1, 3)$ . Para  $\mathcal{P} = (4)$  vamos tomar a forma normal da singularidade  $A_4$  em  $\mathcal{O}(4, 4)$ . Denotamos por  $N_4$  a forma normal desta singularidade, isto é,

$$N_4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4^5 + x_4^3 x_1 + x_4^2 x_2 + x_4 x_3).$$

Da mesma forma como Proposição 3.2 no cálculo da contribuição local nos pontos  $z$  do tipo  $A_3$ , agora para pontos  $z$  do tipo  $A_4$ , obtemos a matriz  $\lambda$  de uma apresentação para  $\mathcal{O}_{(\Sigma(N_4), 0)}$ , onde

$$\lambda = \begin{bmatrix} -W & \frac{4}{5}Z & \frac{3}{5}Y & \frac{2}{5}X \\ -\frac{2}{25}XZ & -W - \frac{4}{25}XY & \frac{4}{5}Z - \frac{6}{25}X^2 & \frac{3}{5}Y \\ -\frac{3}{25}YZ & -\frac{6}{25}Y^2 - \frac{2}{25}XZ & -W - \frac{13}{25}XY & \frac{4}{5}Z - \frac{6}{25}X^2 \\ -\frac{4}{25}Z^2 + \frac{6}{125}X^2Z & -\frac{11}{25}YZ + \frac{12}{125}X^2Y & -\frac{6}{25}Y^2 - \frac{14}{25}XZ + \frac{18}{125}X^3 & -W - \frac{13}{25}XY \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

As variáveis  $X, Y, Z$  e  $W$  estão em  $(\mathbb{C}^4, 0)$  (meta). E o terceiro ideal de Fitting desta matriz é:

$$\mathcal{F}_3(N_4) = \langle X, Y, Z, W \rangle$$

logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^4, 0)}}{\mathcal{F}_3(N_4)} = 1.$$

Portanto, a contribuição local nos pontos  $y$  do tipo  $A_4$  é igual a 1, isto é,  $C_{\mathcal{P}} = 1$  para  $\mathcal{P} = (4)$ .

Agora para calcular  $C_{\mathcal{P}}$ , onde  $\mathcal{P} = (2, 2)$ , vamos utilizar um exemplo que satisfaça as hipóteses do Teorema e além disso apareça pelo menos uma singularidade do tipo  $A_{(2,2)}$ . Esta técnica pode ser usada pois as contribuições são constantes e independem do germe tomado.

De fato, seja,  $G : (\mathbb{C}^4, 0) \mapsto (\mathbb{C}^4, 0)$  dado por:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4^8 + x_4^3 x_1 + x_4^2 x_2 + x_4 x_3).$$

$G$  é de co-posto 1 e  $\frac{\mathcal{O}_{(\Sigma(G), 0)}}{G^* m_4} \cong \frac{\mathbb{C}[x_4]}{\langle x_4^7 \rangle}$ , ou seja,  $\mathcal{O}_{(\Sigma(G), 0)}$  é cíclico sobre  $\mathcal{O}_4$ .

Calculando uma apresentação para  $\mathcal{O}_{(\Sigma(G), 0)}$ , obtemos a seguinte matriz  $\lambda$  de tamanho  $7 \times 7$ :

$$\lambda = \begin{bmatrix} -W & \frac{7}{8}Z & \frac{3}{4}Y & \frac{5}{8}X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & \frac{7}{8}Z & \frac{3}{4}Y & \frac{5}{8}X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W & \frac{7}{8}Z & \frac{3}{4}Y & \frac{5}{8}X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W & \frac{7}{8}Z & \frac{3}{4}Y & \frac{5}{8}X \\ -\frac{5}{64}XZ & -\frac{5}{32}XY & -\frac{15}{64}X^2 & 0 & -W & \frac{7}{8}Z & \frac{3}{4}Y \\ -\frac{3}{32}YZ & -\frac{3}{16}Y^2 - \frac{5}{64}XZ & -\frac{7}{16}XY & -\frac{15}{64}X^2 & 0 & -W & \frac{7}{8}Z \\ -\frac{7}{64}Z^3 & -\frac{5}{16}YZ & -\frac{3}{16}Y^2 - \frac{13}{32}XZ & -\frac{7}{16}XY & -\frac{15}{64}X^2 & 0 & -W \end{bmatrix}_{7 \times 7}$$

e o terceiro ideal de Fitting desta matriz  $\lambda$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(G) = & \langle X^4, X^3Y, X^2Y^2, 36XY^3, 54Y^4, X^3Z, 21X^2YZ, 252XY^2Z, 252Y^3Z, 49X^2Z^2, \\ & 147XYZ^2, 1764Y^2Z^2, 49XZ^3, 1029YZ^3, 2401Z^4, X^3W, X^2YW, 36XY^2W, \\ & 18Y^3W, X^2ZW, XYZW, 36Y^2ZW, 49XZ^2W, 21YZ^2W, 49Z^3W, X^2W^2, \\ & XYW^2, 36Y^2W^2, XZW^2, 21YZW^2, Z^2W^2, XW^3, YW^3, ZW^3, W^4 \rangle \end{aligned}$$

e

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^4, 0)}}{\mathcal{F}_3(G)} = 35.$$

Por outro lado, temos que  $G$  é um germe quase-homogêneo, logo podemos usar o Teorema 2.15 para contar cada uma das singularidades isoladas deste germe. Assim, de acordo com o Teorema 2.15, temos que:

$$\sharp A_4 = 4, \quad \sharp A_{(1,3)} = 12, \quad \sharp A_{(2,2)} = 6, \quad \sharp A_{(1,1,2)} = 12, \quad \sharp A_{(1,1,1,1)} = 1.$$

Note que a soma destas singularidades é exatamente 35, ou seja,

$$\sharp A_{(1,1,1,1)} + \sharp A_{(1,1,2)} + \sharp A_{(1,3)} + \sharp A_{(2,2)} + \sharp A_4 = 35 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^4, 0)}}{\mathcal{F}_3(G)},$$

isto implica que  $C_{\mathcal{P}}$  deve ser igual a 1 para  $\mathcal{P} = (2, 2)$ .

Portanto, temos o desejado.  $\square$

Pode-se tentar mostrar que  $C_{\mathcal{P}} = 1$  para  $\mathcal{P} = (2, 2)$ , usando a forma normal para o ponto

$A_{(2,2)}$ .

Com esta mesma idéia usada na Proposição 3.14, podemos continuar para  $m > 4$  e tentar mostrar que  $C_{\mathcal{P}} = 1$  com  $|\mathcal{P}| = m$ .

**Observação 3.15.** De  $\mathcal{F}_1 = I(f(D(f))) \cap I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$ , então  $V(\mathcal{F}_1) = f(D(f)) \cup f(\Sigma^{n+1,1}(f))$ . Por [6, Corolário 1.2.3], temos que:

$$\mu(V(\mathcal{F}_1)) - 1 = (\mu(f(D(f))) - 1) + (\mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) - 1) + 2I(f(D(f))).I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$$

$$\mu(V(\mathcal{F}_1)) = \mu(f(D(f))) + \mu(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) + 2I(f(D(f))).I(f(\Sigma^{n+1,1}(f))) - 1$$

onde,  $I(f(D(f))).I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))$  é o índice entre as curvas de pontos duplos e a curva cuspidal na meta. Este índice é dado pela dimensão complexa:  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}}{I(f(D(f))) + I(f(\Sigma^{n+1,1}(f)))}$ .

Observamos que a constância destes números é importante na determinação de condições de trivialidade, tais como Whitney equisingularidade e trivialidade topológica em famílias destes germes.

Assim, se  $\mu(V(\mathcal{F}_{1_t}))$  é constante em uma deformação do germe, isto implica que,  $\mu(f_t(D(f_t)))$  e  $\mu(f_t(\Sigma^{n+1,1}(f_t)))$  também são constantes na deformação. E pelo Teorema 2.11 resulta que,  $\mu(D(f_t))$ ,  $\mu(\Sigma^{n+1,1}(f_t))$ ,  $\mu(D^2(f_t))$ ,  $\sharp A_{(1,1,1)}$ ,  $\sharp A_{(2,1)}$  e  $\sharp A_3$  são constantes no desdobramento.

## *Implementação para uma apresentação e aplicações*

Como mencionado na seção 3.1.1, Mond e Pellikaan descrevem um processo algorítmico para se obter a matriz de uma apresentação. Porém, em geral, o cálculo da matriz  $\lambda$  do módulo de relações entre os geradores sobre  $\mathcal{O}_m$  é extremamente trabalhoso.

Assim, a implementação de um algoritmo se mostra muito interessante para a continuidade da pesquisa nessa linha. A implementação que vamos apresentar neste trabalho é para germes de aplicações finitamente determinados  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ , onde é considerado  $(X, x) := (\Sigma(f), 0)$ .

Com esta implementação conseguimos obter interessantes aplicações, por exemplo completar alguns campos da tabela apresentados nos capítulos 3. e 4. da tese de doutorado de Soares.

### 4.1 Código fonte

Vamos agora apresentar o código fonte do algoritmo **FITT**, implementado no software MAPLE que permite obter a matriz  $\lambda$  de uma apresentação como abaixo.

$$\mathcal{O}_m^q \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_m^q \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Vamos descrever o funcionamento do algoritmo cujo código se encontra no final da seção e que é dividido em 3 partes.

Algoritmo **FITT**:

- Dados de entrada:**
1.  $Ger = \{g_1, g_2, \dots, g_h\}$  (geradores de  $\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}$  como  $\mathcal{O}_m$ -módulo);
  2.  $J$  ideal jacobiano que define o conjunto  $\Sigma(f)$ ;
  3.  $f_1, \dots, f_m$  (entradas do germe  $f$ );
  4.  $C$ ;

**Dados de saída :** matriz  $\lambda$  da apresentação  $\mathcal{O}_m^q \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_m^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\Sigma(f),0} \longrightarrow 0$ .

1.  $Ger = \{g_1, g_2, \dots, g_h\}$  são os geradores de  $\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}$  como  $\mathcal{O}_m$ -módulo, nem sempre é fácil ser calculado, mas podemos usar o software Singular para obtê-los. (Abaixo vamos explicar como usar os comandos do Singular para obter estes geradores);
2.  $J$  é o ideal jacobiano, que define o conjunto singular  $\Sigma(f)$ . Observamos que quando  $n = -1$ , ou seja, se quisermos calcular a matriz  $\lambda$  para  $f : (\mathbb{C}^{m-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ , então o discriminante de  $f$  é a imagem de  $f$ , neste caso devemos entrar com  $J = 0$  no algoritmo;
3.  $f_1, \dots, f_m$ , são as entradas do germe  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ;
4.  $C$  é uma variável inteira que determina o grau dos polinômios (de várias variáveis) usados pelo algoritmo, ou seja,  $C$  é um valor de truncamento e quanto mais alto for este valor mais tempo o algoritmo leva para ser finalizado. Ainda não temos uma estimativa para este valor. Nos exemplos aqui calculados, os valores utilizados para  $C$  foram,  $2 \leq C \leq 4$ .

Para compreender um pouco melhor como funciona o algoritmo, vamos considerar  $f : (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$  dada por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{C}^{n+m}$ .

Na parte 1. são definidas variáveis locais para armazenagem de dados e cálculos realizados no procedimento.

Sejam,  $X_i := f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  as variáveis em  $\mathbb{C}^m$ . Sejam  $J$  o ideal jacobiano de  $f$  e  $Ger = \{g_1, \dots, g_r\}$ . Como a base  $Ger$  tem  $r$  geradores, precisamos encontrar  $r$  relações (módulo ideal  $J$ ) entre os elementos da base  $Ger$  e as variáveis  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , isto é, encontrar  $\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_m$ ,

tal que

$$\lambda_{1,1} \cdot g_1 + \lambda_{1,2} \cdot g_2 + \cdots + \lambda_{1,r} \cdot g_r = 0 \quad (rel.1)$$

$$\lambda_{2,1} \cdot g_1 + \lambda_{2,2} \cdot g_2 + \cdots + \lambda_{2,r} \cdot g_r = 0 \quad (rel.2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\lambda_{r,1} \cdot g_1 + \lambda_{r,2} \cdot g_2 + \cdots + \lambda_{r,r} \cdot g_r = 0 \quad (rel.r)$$

(4.2)

$\lambda_{i,j}$  são polinômios nas variáveis  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  (que por sua vez dependem de  $x = (x_1, \dots, x_{n+m})$ ).

Somando as  $r$  relações acima, obtemos

$$(\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} + \dots + \lambda_{r,1}) \cdot g_1 + \dots + (\lambda_{1,r} + \lambda_{2,r} + \dots + \lambda_{r,r}) \cdot g_r = 0. \quad (4.3)$$

com base nesta igualdade seja,

$$Q_1 \cdot g_1 + \dots + Q_r \cdot g_r = 0 \quad (4.4)$$

uma combinação genérica, onde os  $Q_j$  são polinômios nas variáveis  $X_i$  e grau de  $Q_j$  fixado.

Os polinômios  $Q_j$  são da forma  $Q_j(X_1, \dots, X_m) = \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^C a_{j,j_1, \dots, j_m} X_1^{j_1} X_2^{j_2} \dots X_m^{j_m}$ , onde  $a_{j,j_1, \dots, j_m}$  são os coeficientes de  $Q_j$ . Introduzimos  $P_j := Q_j$ . Nos polinômios  $P_j$  substituiremos  $X_i$  por  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, r$ , tornando assim polinômios nas variáveis  $x_1, \dots, x_{n+m}$ . Em seguida, reduzimos  $P_j$  módulo ideal jacobiano  $J$ . Verificamos então as constantes  $a_{j,j_1, \dots, j_m}$  que foram eliminadas no processo de redução tais constantes são substituídas por 0 em  $Q_j$ . Logo com esta substituição a equação 4.4 se torna uma nova equação  $E_q = 0$ . Observamos que na equação 4.4 os  $g_j$  são variáveis simbólicas enquanto que na equação 4.3 os  $g_j$  são os efetivos geradores antes encontrados. O mesmo ocorre com as variáveis  $X_i$ , ou seja, nos polinômios  $P_j$ ,  $X_i$  é substituído por  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ , enquanto que nos polinômios  $Q_j$ ,  $X_i$  não é substituído por  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Estes procedimentos são realizados na Parte 2. do algoritmo.

Na Parte 3. inicialmente colocamos em evidência cada  $g_j$  da equação  $E_q = 0$ , obtendo assim,  $r$  polinômios extraídos de  $E_q$  que são denotados por  $G_j$ . A partir dos  $G_j$  encontramos o syzygies de relações, isto é, extraímos dos  $G_j$  subpolinômios de menor grau possível tais que sejam satisfeitas as relações em 4.2. Esses subpolinômios extraídos são os  $\lambda_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ , listados em 4.2, ou seja, temos uma matriz  $\lambda$  que satisfazem as relações requeridas.

O algoritmo implementado nos retorna explicitamente apenas a matriz  $\lambda$  de uma apresentação. Para calcular os ideais de Fitting da matriz, utilizamos o software Singular. Os softwares

Maple e Singular podem se comunicar entre si, pode-se usar essa comunicação para obtermos os ideias de Fitting  $\mathcal{F}_k$  todos no ambiente Maple. Outra possibilidade é reescrever este código direto no ambiente do Singular.

**Algoritmo: FITT:**

```

FITT:=proc (Ger, J, f, C)
- - - - - Parte 1:
local GJ, nGer, aa, F, t1, LQ, LP, TQ, TP, a, irr, w1, var, vec, i, Q, P, j,
    eq, Eq, coefi, v, s, k, o, pl, Coeff_G, q, d, LL, SS, r, vv, vu, zz, C_G, w;
global lambda;
var:=indets(f)[];#retorna as variaveis dada na entrada f.
GJ:=gbasis(J, tdeg(var));
nGer:=nops(Ger);
irr:=irreduc(J[1]);#false ou true se J é irredutivel ou nao.
w1:=false;
- - - - - Parte 2:
LQ:= [seq(X[i]^n[i], i=1..nops(f))];
LP:= [seq(f[i]^n[i], i=1..nops(f))];
TQ:=mul(k, k=LQ);
TP:=mul(k, k=LP);
vec:=seq(X[i], i=1..nops(f));
F:=seq(f[i], i=1..nops(f));
for j from 1 to nGer do
    aa[j]:=a[j, seq(n[i], i=1..nops(f))];
    Q[j]:=sum(aa[j]*TQ, n[1]=0..C);
    P[j]:=sum(aa[j]*TP, n[1]=0..C);
    for i from 2 to nops(f) do
        Q[j]:=sum(Q[j], n[i]=0..C);
        P[j]:=sum(P[j], n[i]=0..C);
    od;
od;

```

```

eq:=reduce(sum(Ger[m]*P[m],m=1..nGer),GJ,tdeg(var));
Eq:=sum(g[m]*Q[m],m=1..nGer);
  while eq<>0 do
    coefi:=tcoeff(eq,[var]);
    v:=convert(indets(coefi),list)[1];
    s:=solve(coefi=0,v);
    eq:=simplify(subs(v=s,eq));
    Eq:=simplify(subs(v=s,Eq));
  od:
if Eq=0 then
  ERROR("C"=C,"não suficiente! tente","C">=C+1,"
        ou verifique dados de entrada.");
fi;
- - - - - Parte 3:
for k from 1 to 200 do
  unassign('vv');
  unassign('vu');
  for i from 1 to nGer do
    Coeff_G[i]:=coeff(Eq,g[i]):
  od:
lambda:=Matrix(1..nGer,1..nGer):
  for o from 1 to nGer do
    for i from 1 to nGer do
      Coeff_G[i]:=simplify(subs(vv=vu,Coeff_G[i])):
    od:
p1:=0:
q:=0:
C_G:=expand(Coeff_G[o]);
d:=ldegree(C_G,{vec}):
  for i from 1 to nops(C_G) do

```



```

    if degree(op(i,C_G),[vec])=d then
        q:=op(i,C_G)+p1:
        p1:=q:
    fi:
od:
if q=0 then
    ERROR("C"=C,"não suficiente! tente","C">=C+1,"
        ou verifique dados de entrada.");
fi;
LL:=coeffs(q,[vec]):
SS:=[LL];
if ArrayNumElems(Array([LL])) = 1 then
    LL:=array([LL,0]):
fi:
r:=rand(1..nops(SS)):
zz:=r();
vv:=indets(LL[zz])[1]:
vu:=solve(LL[zz]=0,vv):
for j from 1 to nGer do
    lambda[o,j]:=coeff(Coeff_G[j],vv):
od:
od:
if irr = true or J=[0] then
    if irreduc(det(lambda) ) = true then
        w1:=true;
        print('lambda'=lambda);
        break
    fi;
fi;
if irr = false and J <> [0] then

```

```

if det(lambda) <> 0 then
  w1:=true;
  print('lambda'=lambda);
  a:=convert(factor(det(lambda)),list);
  j:=1;
  if a[1]=-1 then j:=2;fi;
  for i from j to nops(a) do
    if not irreduc(a[i]) then
WARNING("Resultado pode nao ser preciso! (Discriminante não reduzido).
  Verifique dados de entrada.");
    break
  fi;
  od;
  break
fi;
od;
if w1 = false then print("Nenhum resultado! execute novamente
ou verifique dados de entrada.");
fi;
end:

```

## 4.2 Invariantes topológicos para germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$

Nesta seção consideramos germes de aplicações finitamente determinados  $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Ao tomarmos uma perturbação estável de  $f$ , podem surgir singularidades 0-estáveis na curva discriminante desta perturbação, que poderão ser cúspides, denotadas por pontos do tipo  $A_2$ , e ou pontos duplos de dobras, denotados por pontos do tipo  $A_{(1,1)}$ . Cúspides e pontos duplos de dobras são invariantes analíticos. Gaffney e Mond em [14] também provaram que estes são invariantes topológicos, exibindo relações entre eles e invariantes topológicos conhecidos, ou seja, os números de Milnor do discriminante e do conjunto singular e o grau de  $f$ .

Denotamos por  $\sharp A_2(f)$  o número de cúspides e por  $\sharp A_{(1,1)}(f)$  o número de pontos duplos de dobras de  $f$ . As curvas  $\Sigma(f)$  e  $\Delta(f) = f(\Sigma(f))$  são respectivamente o conjunto singular e o discriminante de  $f$ .

Definimos o grau  $m(f)$  de  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , por  $m(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{(p, q)}$ , onde  $p$  e  $q$  são as funções coordenadas de  $f$ .

Ainda em [14], Gaffney e Mond obtém uma condição necessária e suficiente de determinação finita para um germe de aplicação  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  em termos de  $\sharp A_2(f)$  e de  $\sharp A_{(1,1)}(f)$ .

**Proposição 4.1** ([14]). *Um germe de aplicação  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  é  $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se,  $\sharp A_2(f) < +\infty$  e  $\sharp A_{(1,1)}(f) < +\infty$ .*

Como consequência dos resultados descritos em [33], Gaffney e Mond concluem que

$$\sharp A_2(f) + \sharp A_{(1,1)}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\mathcal{F}_1}. \quad (4.5)$$

Lembramos que  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(f_* \mathcal{O}_{\Sigma(f)})$  é o primeiro ideal de Fitting do  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ -módulo  $f_* \mathcal{O}_{\Sigma(f)}$ .

A fórmula algébrica abaixo determina o número de cúspides.

**Proposição 4.2** (Gaffney e Mond, [14]). *Suponha que  $\Sigma_f^{1,1} = \{0\}$  (por exemplo se  $f$  é finitamente determinado). Então*

$$\sharp A_2(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{(J, p_x J_y - p_y J_x, q_x J_y - q_y J_x)},$$

onde  $p$  e  $q$  são as funções coordenadas de  $f$ ,  $J$  é o jacobiano de  $f$  e os índices denotam as derivadas parciais.

A proposição abaixo nos permite calcular  $\sharp A_2(f)$  e  $\sharp A_{(1,1)}(f)$  em termos dos números de Milnor do conjunto singular e do discriminante e do grau de  $f$ .

**Proposição 4.3** (Gaffney e Mond, [14]). (i)  $\sharp A_2(f) = \mu(\Sigma(f)) + m(f) - 2$ .

(ii)  $\sharp A_{(1,1)}(f) = \frac{1}{2} \{ \mu(\Delta(f)) - \mu(\Sigma(f)) \} - \sharp A_2(f)$ .

Soares em sua tese de doutorado [44] estuda estes invariantes com o objetivo de determinar as órbitas topológicas em uma família de germes que estejam em uma mesma  $\mathcal{K}$ -órbita.

O principal resultado usado por Soares para o cálculo destes invariantes é a Proposição 4.3 e o maior problema para a obtenção do número de pontos do tipo  $A_{(1,1)}(f)$  é a determinação da equação de definição do discriminante, pois esta determinação tem um custo computacional muito alto, pois usa a construção das bases de Groebner para tal.

Assim, para alguns dos germes estudados por Soares não foi possível obter este número pois, mesmo com o computador central do ICMC-USP não foi possível obter os ideais de definição do discriminante destes germes.

Aplicamos o algoritmo descrito acima para obter a matriz  $\lambda$  de uma apresentação para um determinado germe. Obtida esta matriz, calculamos seu primeiro ideal de Fitting, isto é, o ideal  $\mathcal{F}_1$  e conseqüentemente pela equação 4.5 temos a soma  $\sharp A_2 + \sharp A_{(1,1)}$ . E assim, usando a Proposição 4.2, temos o número de pontos do tipo  $A_2$  e portanto também temos o número de pontos do tipo  $A_{(1,1)}$ . Com isto foi possível completar todas as tabelas do capítulo 4 de [44], com o cálculo destes invariantes.

A seguir colocamos todas as tabelas (agora totalmente preenchidas) primeiramente apresentadas na Tese de Soares.

Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 abaixo os campos com o símbolo '\*' antes não calculados, foram agora todos computados muito rapidamente usando a técnica anteriormente descrita.

germe $f$	$\mu(\Sigma(f))$	$\mu(\Delta(f))$	$\sharp A_2$	$\sharp A_{(1,1)}$
$(xy, x^4 + y^7)$	18	270	27	99
$(xy, x^4 + y^7 + xy^2)$	5	127	14	47
$(xy, x^4 + y^7 + xy^3)$	9	171	18	63
$(xy, x^4 + y^7 + xy^4)$	13	205	22	74
$(xy, x^4 + y^7 + xy^5)$	17	259*	26	95*
$(xy, x^4 + y^7 + x^2y)$	8	160	17	59
$(xy, x^4 + y^7 + x^3y)$	15	237	24	87
$(xy, x^4 + y^7 + x^2y^3)$	16	248	25	91
$(xy, x^4 + y^7 + xy^2 + x^2y)$	4	122*	13	46*
$(xy, x^4 + y^7 + xy^3 + x^2y)$	6	142*	15	53*
$(xy, x^4 + y^7 + xy^4 + x^3y)$	12	198*	21	72*

Tabela 4.1: família  $(xy, x^4 + y^7)$

germe $f$	$\mu(\Sigma(f))$	$\mu(\Delta(f))$	$\sharp A_2$	$\sharp A_{(1,1)}$
$(xy, x^4 + y^9)$	24	420	35	163
$(xy, x^4 + y^9 + xy^2)$	5	173	16	68
$(xy, x^4 + y^9 + xy^3)$	9	225	20	88
$(xy, x^4 + y^9 + xy^4)$	13	277*	24	108*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^5)$	17	329*	28	128*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^6)$	21	369*	32	142*
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y)$	10	238	21	93
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y^3)$	18	342	29	133
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y^4)$	22	394*	33	153*
$(xy, x^4 + y^9 + x^3y)$	19	355*	30	138*
$(xy, x^4 + y^9 + x^3y^2)$	23	407*	34	158*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^4 + x^3y)$	12	262*	23	102*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^4 + x^2y)$	8	218*	19	86*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^3 + x^2y)$	6	192*	17	76*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^2 + x^2y)$	4	168*	15	67*
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y^3 + x^3y)$	17	329*	28	128*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^6 + x^3y)$	18	338*	29	131*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^5 + x^3y)$	15	299*	26	116*
$(xy, x^4 + y^9 + x(x - y^2)^3)$	22	384*	33	148*

Tabela 4.2: família  $(xy, x^4 + y^9)$ 

germe $f$	$\mu(\Sigma(f))$	$\mu(\Delta(f))$	$\sharp A_2$	$\sharp A_{(1,1)}$
$(xy, x^5 + y^6)$	20	290	29	106
$(xy, x^5 + y^6 + xy^2)$	6	136	15	50
$(xy, x^5 + y^6 + xy^3)$	11	191	20	70
$(xy, x^5 + y^6 + xy^4)$	16	246*	25	90*
$(xy, x^5 + y^6 + x^2y^3)$	17	257*	26	94*
$(xy, x^5 + y^6 + x^3y^2)$	18	268*	27	98*
$(xy, x^5 + y^6 + x^2y)$	7	147	16	54
$(xy, x^5 + y^6 + x^3y)$	13	213*	22	78*
$(xy, x^5 + y^6 + x^4y)$	19	279*	28	102*
$(xy, x^5 + y^6 + xy^3 + x^3y)$	9	177*	18	66*
$(xy, x^5 + y^6 + xy^3 + x^2y)$	6	140*	15	52*
$(xy, x^5 + y^6 + xy^2 + x^2y)$	4	124*	13	47*

Tabela 4.3: família  $(xy, x^5 + y^6)$ 

Vejamos agora, passo a passo, através de um exemplo, como foram obtidos estes invariantes.

**Exemplo 4.4.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  dada por:  $f(x, y) = (xy, x^4 + y^9 + xy^3 + x^2y)$ .

Inicialmente vamos encontrar os dados de entrada para utilizar o algoritmo FITT.

1.  $J$  é o ideal jacobiano de  $f$  que define o conjunto singular  $\Sigma(f)$  dado pelo determinante da matriz jacobiana  $J[f]$  de  $f$  onde,

$$J[f] = \begin{bmatrix} y & x \\ 4x^3 + y^3 + 2xy & 9y^8 + 3xy^2 + x^2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$J = 9y^9 + 2xy^3 - x^2y - 4x^4.$$

2. Entradas do germe  $f$ :  $f_1 := xy$ ;  $f_2 := x^4 + y^9 + xy^3 + x^2y$ ;
3.  $Ger = \{g_1, g_2, \dots, g_h\}$  que são os geradores de  $\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}$  como  $\mathcal{O}_2$ -módulo.

Usamos o software Singular para encontrar estes geradores. No ambiente do Singular executamos os seguintes comandos:

```
> ring r=0, (x,y), ds; //define anel nas variáveis x,y.
> ideal f=xy,x4+y9+xy3+x2y; //define ideal f (entradas de f)
> ideal J=det(jacob(f)); //retorna ideal jacobino J de f
> qring q=std(J); //q = anel quociente do ideal J
> ideal f=imap(r,f); //redefine o ideal f no anel q
> list Ger=kbase(std(f)); //retorna lista de geradores
```

Neste exemplo, os geradores de  $\mathcal{O}_{\Sigma(f),0}$  como  $\mathcal{O}_2$ -módulo via  $f^*$  são:

$$Ger = \{1, x, x^2, x^3, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, y^7, y^8\}.$$

4. Usamos o valor inteiro igual a 4 para a variável  $C$ .

No ambiente Maple executamos os comandos:

```
> with(linalg):with(Groebner): (É necessário carregar esses pacotes para executar o algoritmo);
```

```
> executamos o algoritmo e o comando:
```

```
> FITT([1,x,x^2,x^3,y,y^2,y^3,y^4,y^5,y^6,y^7,y^8],[9y^9+2xy^3-x^2y-4x^4],[xy,x^4+y^9+xy^3+x^2y],4);
```

Para este germe e dados de entrada, a seguinte matriz  $\lambda_{12 \times 12}$  foi retornada:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{-36}{169}Y^2 & \frac{328}{351}X^2Y + \frac{27}{169}YX & 0 & 0 & \frac{-164}{117}X^4 + \frac{631}{1521}X^3 & 0 & 0 & \frac{196}{1521}X^2 & X^4 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \frac{-4}{3}Y & X & 0 & 2X^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{3}X \\ \frac{-3}{2}X^3 & 0 & Y & \frac{-3}{4}X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-13}{4}X^2 & 0 \\ \frac{27}{169}YX & \frac{6}{13}X^3 - \frac{30}{169}X^2 & 0 & \frac{-4}{13}Y & 0 & \frac{-21}{169}X^2 & 0 & 0 & 0 & X^3 & 0 & 0 \\ \frac{10}{7}X^2 & 0 & 0 & \frac{13}{7}X & \frac{-9}{7}Y & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-52}{27}YX & 0 & 0 & \frac{26}{9}X^3 - \frac{10}{9}X^2 & Y & 0 & \frac{-7}{9}X & 0 & 0 & 0 & \frac{169}{27}X^2 \\ 0 & \frac{-13}{9}X^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{-10}{9}X^2 & Y & 0 & \frac{-7}{9}X & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-100}{49}X^3 & \frac{104}{63}Y^2 & 0 & \frac{-351}{98}X^2 & \frac{-52}{21}X^2Y + \frac{90}{49}YX & 0 & 0 & \frac{-9}{7}Y & 0 & X & \frac{-169}{42}X^3 & \frac{-338}{63}YX \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-13}{9}X^4 & 0 & 0 & \frac{-10}{9}X^2 & Y & 0 & \frac{-7}{9}X & 0 \\ \frac{200}{49}X^2Y & \frac{390}{49}X^4 - \frac{1000}{441}X^3 & 0 & \frac{-1690}{1323}YX & \frac{-90}{49}Y^2 & \frac{-13}{9}X^4 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \frac{-7}{9}X \\ \frac{14}{65}YX & \frac{-21}{130}X^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{-21}{65}X^2 & \frac{13}{10}X^4 & 0 & 0 & X^2 & \frac{-9}{10}Y & 0 \\ \frac{3}{13}X^3 & 0 & 0 & \frac{6}{13}X^2 & \frac{-2}{13}YX & 0 & 0 & X^4 & 0 & 0 & \frac{10}{13}X^2 & \frac{-9}{13}Y \end{bmatrix}$$

onde,  $\alpha = \frac{16900}{1323}X^4 + Y$  e  $\beta = -\frac{82}{27}X^3 + \frac{10}{13}X^2$ . As variáveis  $X$  e  $Y$  estão em  $\mathbb{C}^2$  (meta).

Com um computador equipado com processador Intel Core 2 duo 2.6 GHz, 2 Gb de Ram e Maple 9 o tempo em segundos de execução para obter a matriz acima foi aproximadamente 186,4seg.

Novamente voltamos ao ambiente Singular para computar os ideais de Fitting desta matriz.

```
> ring R=0, (X,Y), ds; //define anel nas variáveis X, Y
> LIB "homolog.lib"; //biblioteca necessária para calcular
//ideais de Fitting de uma matriz
> matrix M[12][12]=entradas da matriz acima; //definir matriz
> ideal F0=fitting(M,0); //retorna o 0-ésimo ideal de Fitting
> ideal F1=fitting(M,1); //retorna o primeiro ideal de Fitting
> vdim(std(F1)); //computa a dimensão do espaço vetorial
```

Observamos que a matriz  $M$  definida no ambiente Singular é a matriz  $\lambda$  acima e os ideais  $F_0$ ,  $F_1$  são respectivamente os ideais  $\mathcal{F}_0(f)$  e  $\mathcal{F}_1(f)$ .

Executando estes comandos no Singular para esta matriz, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 = & 99179645184Y^{13} + 10460353203X^4Y^{10} - 843308032X^9Y^6 + 56458612224X^7Y^8 - \\
& -1391805715248X^5Y^{10} - 88942644X^{13}Y^3 + 5954619258X^{11}Y^5 - 129140163000X^9Y^7 - \\
& -1758908151936X^6Y^{10} + 7115411520X^{14}Y^3 - 476053300128X^{12}Y^5 + \\
& 5854577195610X^{10}Y^7 + 600362847X^{18} - 40160326500X^{16}Y^2 + 11384658432X^{15}Y^3 + \\
& 434010150000X^{14}Y^4 - 754601492736X^{13}Y^5 + 6287607880164X^{11}Y^7 - 7204354164X^{19} + \\
& 482590987830X^{17}Y^2 - 7842361800000X^{15}Y^4 + 10329788830608X^{12}Y^7 - \\
& -8742808166976X^{10}Y^9 + 28817416656X^{20} - 2778300000000X^{19}Y - \\
& -1937835133416X^{18}Y^2 + 17845303878675X^{16}Y^4 - 17506430896500X^{14}Y^6 - \\
& -38423222208X^{21} + 3936851100000X^{20}Y + 2657780457696X^{19}Y^2 - \\
& -4331470000000X^{18}Y^3 - 6607911662352X^{17}Y^4 - 55622594054430X^{15}Y^6 - \\
& -270000000000X^{22} - 20687610762000X^{21}Y + 21861028800000X^{19}Y^3 - \\
& -21225635414256X^{18}Y^4 - 34416562053744X^{16}Y^6 + 4563000000000X^{23} + \\
& 48136163731110X^{22}Y - 29261172915000X^{20}Y^3 - 30549285000000X^{24} - \\
& 44369919865908X^{23}Y - 127708399414050X^{21}Y^3 + 101868518700000X^{25} + \\
& 8087456600496X^{24}Y + 320127835475448X^{22}Y^3 + 178674770696058X^{20}Y^5 - \\
& -173155275247500X^{26} - 129599821650000X^{24}Y^2 - 85632148167696X^{21}Y^5 + \\
& 134371440915894X^{27} + 661871357316000X^{25}Y^2 - 32542384892472X^{28} - \\
& -841014294697395X^{26}Y^2 - 268124162146932X^{27}Y^2 - 413575475547000X^{30}Y + \\
& 1129061048243310X^{31}Y - 302875106592253X^{36}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 = & < 5969145312Y^{11} + 1937102445X^4Y^8 - 105413504X^9Y^4 + 6883071552X^7Y^6 - \\
& -15135498729X^5Y^8 - 22235661X^{13}Y + 1470276360X^{11}Y^3 - 11160261000X^9Y^5 - \\
& -50694747480X^6Y^8 - 88942644X^{14}Y, 448084224X^4Y^8 + 7406161776X^2Y^{10} + \\
& 47258883X^8Y^5 + 1434890700X^6Y^7 - 158120256X^{11}Y^3 + 6963399408X^9Y^5 - \\
& -32669853606X^7Y^7 - 22235661X^{15} + 1186334100X^{13}Y^2, 1728324864X^3Y^9 + \\
& 182284263X^7Y^6 - 210827008X^{10}Y^4 + 639675792X^8Y^6 + 39928126797X^6Y^8 - \\
& -22235661X^{14}Y, 774840978X^2Y^{10} + 4532128848X^3Y^{10} - 6588344X^{11}Y^3 + \\
& 441082908X^9Y^5 - 7126623810X^7Y^7, 210827008X^8Y^5 - 11202105600X^6Y^7 - \\
& -47103741594X^4Y^9 + 22235661X^{12}Y^2 - 1181472075X^{10}Y^4 - 7174453500X^8Y^6 - \\
& -79035905520X^5Y^9 - 533655864X^{13}Y^2, 30118144X^7Y^6 - 1280240640X^5Y^8 + \\
& 3176523X^{11}Y^3 - 135025380X^9Y^5 - 2874032928X^4Y^{10}, 116169984X^6Y^7 - \\
& -3703553280X^4Y^9 + 12252303X^{10}Y^4 - 390609135X^8Y^6, \\
& 25398872744132608X^{12}Y^2 - 33227552537453169X^{11}Y^3 - \\
& -985168958326898688X^{10}Y^4 + 1412413166169292140X^9Y^5 - \\
& 39003299921023635456X^8Y^6 - 281679334118195150592X^6Y^8 + \\
& 30063399543932268384X^4Y^{10} + 189305529181929216X^{14}Y + \\
& 812763927812243456X^{13}Y^2, 215886856192X^{11}Y^3 - 282429536481X^{10}Y^4 - \\
& -15256371658752X^9Y^5 + 121022567534592X^7Y^7 + 868644053581824X^4Y^{10}, \\
& 1475789056X^{10}Y^4 - 90031737600X^8Y^6 - 32593335579X^6Y^8 + 155649627X^{14}Y, \\
& 137688450853234269597583265513865216X^{14}Y - \\
& -694779745185727831280839772606496768X^{13}Y^2, \\
& 76835073020778052230794232987648X^{16} > .
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_0(f)$  é o ideal que define a curva discriminante de  $f$  e  $\mathcal{F}_1$  é o ideal 0-dimensional que define os pontos do tipo  $A_2$  e  $A_{(1,1)}$ .

O comando  $\text{vdim}(\text{std}(F_1))$  retorna a dimensão do espaço vetorial  $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}{\mathcal{F}_1}$  sobre  $\mathbb{C}$ . Ou seja,

$$\text{vdim}(\text{std}(F_1)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}{\mathcal{F}_1} = 93.$$

Logo, pela equação 4.5, temos que  $\sharp A_2 + \sharp A_{(1,1)} = 93$ .

Pela Proposição 4.2 ou Proposição 4.3 i) temos que  $\sharp A_2 = 17$  e portanto,

$$\sharp A_{(1,1)} = 76.$$

Como  $\mu(\Sigma(f)) = 6$ , pela Proposição 4.3 ii), resulta que,

$$\mu(\Delta(f)) = 192.$$

Observamos que o tempo (neste exemplo) para calcular  $\mu(\Sigma(f))$ ,  $\sharp A_2$  e executar os comandos acima no Singular foi insignificante.

Desta maneira conseguimos calcular todos os invariantes das tabelas apresentadas por Soares em sua Tese de doutorado no capítulo 4.

**Observação 4.5.** Todas as matrizes de apresentações dos exemplos deste trabalho, foram primeiramente calculadas sem ajuda computacional, e posteriormente encontramos o mesmo resultado através deste algoritmo. Ressaltamos também que, como no exemplo 3.8, não é necessário isolar  $x$  e  $y$ , ou seja, para encontrar a matriz de apresentação do exemplo 3.8 através do algoritmo, basta utilizar o seguinte comando:

$$> \text{FITT}([1, z, z^2, w, w^2], [y + 2zw, x + z^2 + 4w^3], [x, y, w^4 + z^2w + yz + xw], 2);$$

isso é muito importante, pois nem sempre é possível isolar variáveis do ideal jacobiano. No exemplo 3.8 foi possível isolar  $x$  e  $y$ , e assim reduzimos a análise a uma aplicação de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^3$  e o mesmo resultado é obtido se usarmos o seguinte comando:

$$> \text{FITT}([1, z, z^2, w, w^2], [0], [-4w^3 - z^2, -z^2, -3w^4 - 2z^2w], 2);$$

Porém, se possível recomendamos usar a segunda opção, pois o tempo para obter o resultado (obter a matriz) é muito mais rápido, devido o segundo parâmetro ser  $J = 0$ . Em um computador com descrição já feita acima, o tempo para se obter a matriz do exemplo 3.8 foi de aproximadamente 1.3seg. com a primeira opção e de aproximadamente 0.5seg. com a segunda opção.

A Figura 1.2 apresentada no início, foi obtida da seguinte maneira: do germe  $f(x, y, z) = (x, y, z^6 + xz + yz^2)$ , consideramos o desdobramento a 1-parâmetro  $F$  de  $f$ , dado por  $F(t, x, y, z) = (t, x, y, z^6 + xz + yz^2 + tz^4)$ ,  $\text{Ger}(F) = \text{Ger}(f) = \{1, z, z^2, z^3, z^4\}$  e  $J = 6z^5 + x + 2yz + 4tz^3$ . Com esses dados, usamos o algoritmo para obter a matriz  $\lambda$  para  $F$ . Como esta matriz possui 4

variáveis, uma das variáveis representa o parâmetro  $t$ . Assim, usando o Singular obtém-se os ideais que definem os conjuntos  $\Delta(f_t)$ ,  $f_t(\Sigma^{1,1}(f_t))$ ,  $f_t(D(f_t))$ ,  $A_3(f_t)$ ,  $A_{(2,1)}(f_t)$  e  $A_{(1,1,1)}(f_t)$ . De posse desses ideais usamos o Surfex para a visualização destes conjuntos.

**Observação 4.6.** Ressaltamos que apesar do tempo computacional das rotinas aqui descritas ser pequeno, não tivemos como objetivo principal a otimização de tal implementação e sim obter uma rotina que, em tempo reduzido, nos fornecesse os dados procurados.

As figuras mostradas neste trabalho foram obtidas usando o programa Surfex, [51]. Surfex é uma ferramenta de visualização de superfícies algébricas reais.

## Referências Bibliográficas

---

- [1] Arnol'd, V. I., *Singularities of Smooth Mapping*, Russian Math. Surveys (1968) 1–43. Translate from Uspehi Math. Nauk 23 (1968).
- [2] Bivià-Ausina, C., Fukui, T. e Saia, M. J., *Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerate ideals*, Math Proc. Camb. Phil. Soc. 133 (2002), 55–75.
- [3] Boardman, J., *Singularities of differentiable maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publi. Math. 33 (1967), 21–57.
- [4] Briançon, J., Galligo, A. e Granger, M., *Deformations equisingulières des germes de courbes gauches reduites. (French) [Equisingular deformations of the germs of reduced space curves]* Mém. Soc. Math. France (N.S.) 1980/81, no. 1, pp. 69.
- [5] Briançon, J. e Speder, J.-P., *Les conditions de Whitney impliquent "  $\mu^{(*)}$  constant."* (French) Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26 (1976), no. 2, xi, 153–163.
- [6] Buchweitz, R. O. e Greuel, G.-M., *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*. Invent. Math. 58 (1980), no. 3, 241–281.
- [7] Brücker, C. e Greuel, G.-M., *Deformationen isolierter Kurvensingularitäten mit eingebetteten Komponenten*. Manuscripta Math. 70 (1990), no. 1, 93–114.
- [8] Callejas-Bedregal, R., Houston, K., Ruas, M. A. S., *Topological triviality of families of singular surfaces*. Preprint (2006).
- [9] Fukui, T., Nuño-Ballesteros, J. J. e Saia, M. J., *On the number of singularities in generic deformations of map germs*. J. London Math. Soc. (2) 58 (1998), no. 1, 141–152.

- [10] Fukuda, T., Ishikawa, G., *On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity*, Tokyo J. Math. 10 (1987), no. 2, 375–384.
- [11] Gaffney, T., *Polar multiplicities and equisingularity of map germs*, Topology 32, 1993, 1, 185–223.
- [12] Gaffney, T., *Multiplicities and equisingularity of ICIS germs*, Invent. Math. 123, No.2, (1996), 209-220.
- [13] Gaffney, T. e Gassler, R., *Segre Numbers and Hypersurfaces Singularities*, Algebraic Geometry 08, (1999), 695–736.
- [14] Gaffney, T. e Mond, D., *Cusps and double folds of germs of analytic maps  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$* . J. London Math. Soc., 43, (1991), 185–192.
- [15] Gaffney, T. e Massey, D. B., *Trends in Equisingularity Theory in Singularity Theory*, edited by Bruce, J.W. and Mond. D., Cambridge University Press, (1999).
- [16] Greuel, G.-M. e Hamm, H. A., *Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte*, Invent. Math. 49, 67–86, (1978).
- [17] Hochster, M. e Eagon, J. A., *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. Math. 93, (1971), 1020–1058.
- [18] Houston, K., *Disentanglements and Whitney Equisingularity*, Houston J. Math. 33 (2007), no. 3, 663–681.
- [19] Houston, K., *Calculating generalised image and discriminant Milnor numbers in low dimensions*, Glasg. Math. J. 43 (2001), no. 2, 165–175.
- [20] Jorge Pérez, V. H., *Polar multiplicities and equisingularity of map germs from  $\mathbb{C}^3$  to  $\mathbb{C}^3$* . Houston J. Math. 29 (2003), no. 4, 901–924.
- [21] Jorge Pérez, V. H., Miranda, A. J., *Milnor numbers and equisingularity of map germs from  $\mathbb{C}^{n+3}$  to  $\mathbb{C}^3$* , Real and complex singularities, 87–102, Contemp. Math., 459, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

- [22] Jorge Pérez, V. H., Saia, M. J., *Euler obstruction, polar multiplicities and equisingularity of map germs in  $O(n, p), n < p$* , Internat. J. Math. 17 (2006), no. 8, 887–903.
- [23] Jorge Pérez, V. H., Levcovitz, D. e Saia, M. J., *Invariants, equisingularity and Euler obstruction of map germs from  $\mathbb{C}^n$  to  $\mathbb{C}^n$* , Jour. Reine Angew. Math., (2005), no. 587, 145–167.
- [24] Jorge Pérez, V. H., Rizziolli, E. C., Saia, M. J., *Whitney equisingularity, Euler obstruction and invariants of map germs from  $\mathbb{C}^n$  to  $\mathbb{C}^3, n > 3$* , Real and complex singularities, 263–287, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2007.
- [25] Kirwan, F., Complex Algebraic Curves, Cambridge University Press, 1992.
- [26] Lê, D. T., *Computation of the Milnor number of an isolated singularity of a complete intersection*. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 8 (1974), no. 2, 45–49.
- [27] Lê, D. T., e Ramanujam, C. P., *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*. Amer. J. Math. 98 (1976), no. 1, 67–78.
- [28] Looijenga, E. J. N., *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Soc., Lecture Note series, 77, (1984).
- [29] Marar, W. L. e Mond, D., *Multiple point schemes for corank 1 maps*, J. London Math. Soc. 39, 1989, 553–567.
- [30] Marar, W. L., Montaldi, J. A. e Ruas, M. A. S., *Multiplicities of zero-schemes in quasihomogeneous corank-1 singularities*, Singularity Theory (Liverpool, 1996), 353–367, London Math. Soc. Lecture Note ser., 263, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [31] Marar, W. L. e Tari, F., *On the geometry of simple germs of corank 1 maps from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$* . Proc. Camb. Phil. Soc. 119, 1996, 469–481.
- [32] Mond, D., *The number of vanishing cycles for a quasihomogeneous mapping from  $C^2$  to  $C^3$* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 42 (1991), no. 167, 335–345.

- [33] Mond, D. e Pellikaan, R., *Fitting ideals and multiple points of analytic mappings*. Algebraic geometry and complex analysis (Pátzcuaro, 1987), 107–161, Lecture Notes in Math., 1414, Springer, Berlin, 1989.
- [34] Mond, D. e van Straten, D., *Milnor number equals Tjurina number for functions on space curves*. J. London Math. Soc. (2) 63 (2001), no. 1, 177–187.
- [35] Mather, J.N., *Stability of  $C^\infty$  Mappings, IV: Classification of Stable Germs by  $R$ -Algebras*, Publ. Math. I.H.E.S., 37 (1969), 223-248.
- [36] Mather, J. N., *Stratifications and mappings*. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), 195–232, Academic Press, New York, 1973.
- [37] Massey, D. B., *Lê cycles and hypersurface singularities*, Springer Lecture Notes of Mathematics, 1615, 1995.
- [38] Massey, D. B. e Siersma, D., *Deformation of polar methods*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42 (1992), no. 4, 737–778.
- [39] Matsumura, H., *Commutative ring theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, (1986).
- [40] Nuño-Ballesteros, J. J. e Saia, M. J., *Multiplicity of Boardman strata and deformations of map germs*. Glasgow Math. J. 40 (1998), no. 1, 21–32.
- [41] Nuño-Ballesteros, J. J., Tomazella, J. N., *The Milnor number of a function on a space curve germ*,. Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 1, 129–138.
- [42] Rieger, J. H., *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. (2) 36 (1987), no. 2, 351–369.
- [43] Ruas, M. A. S., *On the equisingularity of families of corank 1 generic germs*, Contemporary Mathematics, vol. 161 , p.113-121, (1994).
- [44] Soares, L. M. F., *Trivialidade topológica de germes pré quase-homogêneos*, ICMC-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Tese (Doutorado), São Carlos, 2003.

- [45] Teissier, B., *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney* Singularités à Cargèse 1972. Asterisque, 7 et 8, 285–362, 1973.
- [46] Teissier, B., *Variétés Polaires 2: Multiplicités Polaires, Sections Planes, et Conditions de Whitney*, Actes de la conference de géometrie algébrique ála Rábida, Springer Lecture Notes, 961 (1981), 314–491.
- [47] Vohra, R., *Equisingularity of Maps Germs from  $n$ -Space, ( $n \geq 3$ ), to the Plane*, Ph.D Thesis, Northeastern University, (2000).
- [48] Wall, C. T. C., *Finite determinacy of smooth map-germs*. Bull. London Math. Soc. 13 (1981), no. 6, 481–539.
- [49] Greuel, G.-M., Pfister, G. e Schönemann, H., SINGULAR: A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, free software under the GNU General Public Licence (1990–2007), <http://www.singular.uni-kl.de>
- [50] Waterloo Maple Inc., MAPLE, <http://www.maplesoft.com>
- [51] S. Holzer e O. Labs., SURFEX 0.90, University of Mainz and University of Saarbrücken (2008), [www.surfex.AlgebraicSurface.net](http://www.surfex.AlgebraicSurface.net)