INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE
SÃO CARLOS, USP

TRABALHO DE MESTRADO

VIZINHANÇAS REGULARES E NÓS PEQUENOS EM $S^1 \times D^2$

ALDO VENTURA

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, para obtenção do título de Mestre em Matemática

SÃO CARLOS

1972

À Ivete

e

aos meus pais

Regular Neighbourhoods and Small Knots in $S^1 \times D^2$

SUMMARY

Aldo Ventura Adviser: Gilberto F. Loibel

The aim of this paper is to give conditions to reduces knot problems in $S^1 \times D^2$ to knot problems in R^3.

For this we give the notions of small knot and trivial knot in a three manifold M.

We say that K is a small knot in M if there exists a 3-ball in the interior of M, submanifold of M containing K.

Let K be a knot in $S^1 \times D^2$ and $\alpha \in \pi(S^1 \times D^2 - T(K)) = \pi(K)$ the homotopy class, whose representative loop is the piecewise linear homeomorphism $\varphi : \Delta^2 \to u_0 \times C$, where C is the boundary of the disc D^2, $u_0 \in S^1$ and T(K) is an open tubular neighbourhood of K.

Then we have

Main Theorem: $\alpha = 0$ in $\pi(K)$ iff K is a small knot

To prove this theorem we use Dehn's lemma and the notion of polyhedral regular neighbourhood.

In chapter I we develop the theory of colapses and the theory of regular neighbourhoods from the polyhedral view point and we believe that we gave an original form of presentation of Polyhedral Manifolds Theory.

ÍNDICE

Pg

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO 0 - Poliedros euclidianos 1
Poliedros euclidianos 11
Triangulação 12
Aplicação linear por partes 13
Variedade linear por partes 18
Colapsos euclidianos 20
Vizinhança derivada 25
Vizinhança regular (euclidiana) 25

CAPÍTULO I - Variedades Poliédricas 27
Triangulação. Triangulações compatíveis 28
Classe maximal 32
Poliedro 32
Aplicação linear por partes entre poliedros 35
Subpoliedro 37
Bola poliédrica 39
Variedade Poliédrica 39
Colapso entre poliedros 45
Vizinhança regular 45

CAPÍTULO II - Nós pequenos em $S^1 \times D^2$ 47
Nó poliédrico 47
Nós equivalentes 47
Nó pequeno 48
Nó trivial 53
Número de entrelaçamento 54
Enunciado do lema de Dehn 61

INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi dividido em três capítulos, a saber:

a) o capítulo zero é o dos pré-requisitos e contém as noções e teoremas, nos quais se fundamentam os capítulos seguintes, tais como complexo simplicial, subdivisões, aplicações lineares por partes, variedades lineares por partes, poliedros euclidianos, colapsos e vizinhanças regulares (euclidianas). Todo ele é construído seguindo-se bem de perto os livros de Leslie C. Glaser e J.F.P. Hudson, que na bibliografia aparecem como [G] e [H].

b) o capítulo I contém as noções de triangulação de um espaço topológico, poliedro não euclidiano, cuja estrutura é dada por uma classe bem determinada de triangulações, variedade poliédrica, colapsos e vizinhança regular de um poliedro não euclidiano.

No parágrafo referente ao estabelecimento do conceito de poliedro, demonstramos o lema (1.6) que caracteriza a noção de classe maximal de triangulações, lema este que será de fundamental importância na prova do teorema (1.8) que estabelece a univocidade de uma classe τ de triangulações de modo que o par (X,τ)

seja um poliedro.

Destacamos, também, a importância do teorema (1.22) que estabelece uma relação entre as estruturas poliédrica e combinatória de uma variedade poliédrica.

Um assunto ligeiramente parecido com este capítulo encontra-se em [Z_1, pag.57]. Cremos, entretanto, que demos uma forma original de apresentação desta teoria.

c) o capítulo II é a parte principal do trabalho, onde estabelecemos a noção de nó em uma variedade poliédrica de modo análogo como é feito em [F]. Definimos o que seja um nó pequeno e particularizamos o nosso estudo para o caso da variedade poliédrica $S^1 \times D^2$. Construímos alguns invariantes de tipo de nó a partir do número de entrelaçamento dos levantamentos de um nó homotópico a zero e, pelo teorema (2.11) verificamos a insuficiência de tais invariantes para uma classificação completa dos nós em $S^1 \times D^2$. Em trabalhos futuros pretendemos encontrar invariantes que reduzam, ao menos, o problema dos nós em $S^1 \times D^2$ a problemas do R^3.

O teorema principal é o (2.12) que dá uma caracterização para os nós pequenos. Para demonstrá-lo utilizamos o lema de Dehn, do qual damos apenas o enunciado.

Desejo expressar, nesta oportunidade, minha gratidão ao

Professor Gilberto F. Loibel pelo incentivo e orientação segura que me dispensou durante a elaboração desta Tese.

Meus agradecimentos ao Professor Mario R. Saab pelo tempo dispendido em assistir várias exposições sobre o assunto aqui apresentado e durante as quais sugeriu exemplos elucidativos.

Sou grato também à Dona Hilda Bruno, Secretária do Departamento de Matemática, pelo excelente trabalho de datilografia desta tese, bem como a todos que direta ou indiretamente possibilitaram a realização de tal trabalho e, em particular, à CAPES e ao CNPq pelo auxílio concedido para a aquisição de bibliografia e à CAPES pelo auxílio concedido para a publicação deste trabalho.

CAPÍTULO 0

POLIEDROS EUCLIDIANOS

Denotaremos a reta real por R e o n-espaço euclidiano será denotado por $R^n = R^{n-1} \times R = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in R\}$.

Usaremos para o R^n a métrica dada por:

$$d(p,q) = \left\{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2\right\}^{1/2}$$

onde $p = (x_1,\ldots,x_n)$, $q = (y_1,\ldots,y_n)$ são pontos do R^n.

(0.1) <u>Definição</u>: Um subconjunto P do R^n tem seus pontos em <u>posição geral</u> se k+2 pontos arbitrários de P não estão em um mesmo k-plano, com $k = 0,1,2,\ldots, n-1$

(0.2) <u>Proposição</u>: Os r pontos $p_1,p_2,\ldots,p_r$ do R^n estão em posição geral quando e apenas quando os vetores $v_i = p_1 - p_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots, r-1$ são linearmente independentes, com $r = 2,3,\ldots, n+1$.

(0.3) <u>Exemplos</u>: 1) Na reta real dois pontos quaisquer estão em posição geral;

2) No plano, os pontos de uma circunferência estão em posição geral;

3) Os pontos sobre a curva $y = x^3$ não estão em posição geral, pois sempre é possível determi-

nar-se sobre a curva três pontos alinhados.

4) O conjunto $C = \{(t, t^2, \ldots, t^n) \in R^n \mid t \in R\}$ no R^n tem seus pontos em posição geral.

De fato, basta considerarmos o determinante de Vandermond

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$$

uma vez que os $n+1$ valores distintos $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$, atribuídos ao parâmetro t, determinam $n+1$ pontos distintos de C que não estão em um mesmo hiperplano, pois multiplicando-se a 1ª linha de Δ por (-1) e somando-a às demais, obtemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & & t_1^n \\ 0 & t_2 & -t_1 \cdots & t_2^n - t_1^n \\ 0 & t_3 & -t_1 \cdots & t_3^n - t_1^n \\ \vdots & & & \\ 0 & t_{n+1} & -t_1 \cdots & t_{n+1}^n - t_1^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & -t_1 \cdots & t_2^n & -t_1^n \\ t_3 & -t_1 \cdots & t_3^n & -t_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ t_{n+1} & -t_1 \cdots & t_{n+1}^n & -t_1^n \end{vmatrix} \neq 0$$

O que nos garante que os n vetores linhas do determinante Δ são linearmente independentes. Portanto, pela proposição (0.2) os $(n+1)$ pontos dados estão em po

sição geral.

Seja $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ um conjunto com k+1 elementos e seja $A^k = \{\alpha : V \to [0,1] / \sum_{v_i \in V} \alpha(v_i) = 1 \text{ e } \alpha(v_i) \geq 0\}$

(0.4) <u>Definição</u>: O conjunto A^k é denominado <u>k-simplexo abstrato</u> de dimensão k. Uma aplicação α é chamada um <u>ponto</u> de A^k. Os elementos de V denominam-se <u>vértices</u> do simplexo A^k e os valores de α sobre os vértices de A^k são as <u>coordenadas baricêntricas</u> do ponto α.

(0.5) <u>Definição</u>: A distância $d(\alpha, \beta)$ de dois pontos α, β de A^k é dada por

$$d(\alpha, \beta) = \left\{ \sum_{v_i \in V} [\alpha(v_i) - \beta(v_i)]^2 \right\}^{1/2}$$

e o espaço topológico, cuja topologia é a induzida pela métrica d, é denotado por $|A^k|$ e é chamado o <u>espaço</u> de A^k

Consideremos, agora, k+1 pontos do $R^n (n \geq k)$ $p_0, p_1, \ldots, p_k$, em posição geral, e definamos o subconjunto do R^n

$$C^k = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i \,\middle|\, \sum_i \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 0,\ldots,k \right\}$$

É imediato que se

$k = 0$, $\quad C^o = p_o$;

$k = 1$, $\quad C^1$ é o segmento de reta que une p_o a p_1;

$k = 2$, $\quad C^2$ é o triângulo de vértices p_o, p_1, p_2;

$k = 3$, $\quad C^3$ é o tetraedro de vértices p_o, p_1, p_2, p_3; etc

(0.6) <u>Proposição</u>: O espaço C^k com a topologia induzida do R^n $n \geq k$ é homeomorfo ao espaço $|A^k|$ de um k-simplexo abstrato.

<u>Prova</u>: Consideremos, no R^{k+1}, k+1 pontos $\bar{p}_o$, $\bar{p}_1, \ldots,$ $\bar{p}_k$ tais que os $\bar{p}_i$ tem a (i+1)-ésima coordenada igual a 1 e as demais todas nulas.

Seja $\quad \Delta^k = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \bar{p}_i \,/\, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \right\}$

Não é difícil ver que os espaços C^k e Δ^k, com as respectivas topologias induzidas, são homeomorfos.

Definamos, agora, uma aplicação $h: |A^k| \to \Delta^k$ por

$$h(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \bar{p}_i \quad , \quad \forall \alpha \in |A^k|$$

A aplicação h, assim definida, é sobre, pois dado um ponto qualquer $\bar{p} \in \Delta^k$, $\bar{p} = \sum_i \alpha_i \bar{p}_i$. Então, definindo $\alpha : V \to [0,1]$ por $\alpha(v_i) = \alpha_i$, temos que $\alpha \in |A^k|$, e, portanto, $h(\alpha) = \bar{p}$.

Além disso, h é uma isometria. Com efeito, se $\bar{p}, \bar{q} \in \Delta^k$, então,

$$d(\bar{p},\bar{q}) = \left[\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - \beta_i)^2\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=0}^{k} (\alpha(v_i) - \beta(v_i))^2\right]^{1/2} = d(\alpha,\beta)$$

Portanto, h é um homeomorfismo de $|A^k|$ sobre Δ^k.

Sendo Δ^k homeomorfo a C^k segue que $|A^k|$ é homeomorfo a C^k.

Observemos, ainda, que se o ponto $\alpha \in |A^k|$ é tal que $\alpha(v_i) = 1$ e $\alpha(v_j) = 0$ para todo $j \neq 1$, então α pode ser identificado com o vértice $v_i \in V$ e a imagem de v_i pelo homeomorfismo h é o ponto $\bar{p}_i \in \Delta^k$. Pelo homeomorfismo composto o vértice v_i pode ser levado sobre o ponto $p_i \in C^k$.

(0.7) <u>Definição</u>: O espaço topológico C^k é chamado <u>uma realização geométrica</u> do k-simplexo A^k

no R^n, $n \geq k$, e o espaço Δ^k é a <u>realização canônica</u> de $\mathbf{A}^k$ R^{k+1}.

Em vista de (0.6) sempre que considerarmos um k--simplexo daremos ou admitiremos uma realização geométrica no R^n, $n \geq k$, e, por comodidade usaremos a notação $\mathbf{A}^k$ para a realização geométrica e a denominaremos de k-simplexo (geométrico), isto é, $A^k = |v_o\ v_1 \ldots v_k| =$

$$= \left\{ (\alpha_o v_o + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) \in R^n \ / \ \sum_i \alpha_i = 1, \quad \alpha_1 \geq 0, \ \forall i \right\}$$

Se $a = \alpha_o v_o + \ldots + \alpha_k v_k \in A^k$, os números reais α_i são as coordenadas baricêntricas de a. Em particular, o ponto denotado por $\mathbf{A}^k$ com cada $\alpha_i = \frac{1}{k+1}$ é chamado o <u>baricentro</u> do simplexo $\mathbf{A}^k$.

(0.8) <u>Definição</u>: A realização canônica Δ^k, no R^{k+1}, de um k-simplexo é denominada <u>k-simplexo fundamental ou padrão</u>.

(0.9) <u>Definição</u>: Seja $W = \left\{ v_{i_o}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p} \right\} \subset V$. Um p-simplexo B^p é uma <u>face</u> do k-simplexo $A^k (k \geq p)$ se $B^p = \left\{ \alpha \in A^k / \alpha (v_i) = 0 \quad \forall v_i \in V-W \right\}$

<u>Notação</u>: $B^p < A^k$

Incluiremos $\phi < A^k$ e $A^k < A^k$.

As faces de dimensão $p < k$ são chamadas <u>faces próprias</u> de A^k. Cada face de dimensão k-1 de um k--simplexo é determinada por um vértice e é dita <u>face oposta</u> ao vértice em questão. Neste caso é comum denotar-se a face de um k-simplexo oposta ao vértice v_i por $< v_0\ v_1 \ldots \hat{v}_i \ldots v_{k-1} >$.

(0.10) <u>Definição</u>: O <u>bordo</u> de $|A^k|$, denotado por $\partial|A^k|$ ou $\dot{A}^k$, é constituído de todos os pontos $\alpha \in |A^k|$ tais que $\alpha(v_i) = 0$ para algum $v_i \in V$.

O <u>interior</u> de $|A^k|$, denotado por $\mathrm{int}|A^k|$ ou $\overset{o}{A}{}^k$, constitui-se dos pontos $\alpha \in |A^k|$ tais que $\alpha(v_i) > 0 \quad (\forall v_i \in V)$.

Se $\alpha \in \overset{o}{A}{}^k$, então, α é um <u>ponto interno</u> a A^k.

(0.11) <u>Observação</u>: O conjunto dos pontos internos (do ponto de vista afim) de um dado simplexo não coincide, necessariamente, com os pontos interiores (do ponto de vista topológico) do mesmo simplexo.

(0.12) <u>Proposição</u>: O k-simplexo A^k determina seus vértices.

<u>Prova</u>: Todo ponto de A^k, exceto os vértices, é o ponto médio de um segmento inteiramente contido em A^k; isto caracteriza perfeitamente os vértices de A^k.

Decorre imediatamente desta proposição que a dimensão de um simplexo é uma propriedade do próprio simplexo.

(0.13) <u>Definição</u>: Um <u>complexo simplicial</u> K é um conjunto de simplexo tal que

1) se $A \in K$ e $B < A$ então $B \in K$
2) se $A, B \in K$ então $A \cap B$ é uma face comum de A e de B.
3) K é finito.

Os 0-simplexos de K são denominados <u>vértices</u> de K. O <u>espaço subjacente</u> $|K|$ de um complexo K é:

(0.14) $$|K| = \bigcup_{A \in K} |A|$$

Logo, $|K|$ é um espaço métrico (e, portanto, de Hausdorff) compacto. A <u>dimensão</u> de K é a máxima dimensão de um simplexo de K. Um complexo K tal que dim K=n é um <u>n-complexo</u>.

(0.15) <u>Definição</u>: L é um <u>subcomplexo</u> de K se L é um complexo e $L \subset K$.

(0.16) <u>Proposição</u>: Se $p \in |K|$, então, p é interno a um e somente um simplexo de K.

<u>Prova</u>: Seja $B = \bigcap_{p \in A} A$ a intersecção dos simplexos A de K aos quais p pertence. Pela 2ª condição da definição de complexo simplicial temos que B é um simplexo de K. É imediato que p é ponto interno de B, pois se p pertencesse a uma face própria de B, a intersecção acima não seria igual a B.

A unicidade decorre imediatamente considerando-se a intersecção acima.

Consideremos, agora, $p \in |K|$ e seja A o único simplexo tal que $p \in \mathring{A}$. Então, p pode ser representado univocamente em termos das coordenadas baricêntricas dos vértices de A.

Em particular podemos escrever

$$p = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s$$

onde $\alpha_i = 0$ se v_i não fôr um vértice de A e α_i é a coordenada baricêntrica relativamente a A se $v_i \in A$.

(0.17) <u>Teorema</u>: Se $\dim |K| = n$, então, $|K|$ pode ser mergu-

lhado no R^{2n+1}

<u>Prova</u>: Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ os vértices de K e consideremos no R^{2n+1} os pontos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tais que os p_i tenham coordenadas $(i, i^2, \ldots, i^{2n+1})$ com $i = 1, 2, \ldots, k$; tais pontos sstão em posição geral, conforme o exemplo (0.3.4).

Definamos $f(v_i) = p_i$ $i = 1, 2, \ldots, k$ e para cada simplexo A de K, $A = (v_{i_0}, \ldots, v_{i_s})$ estendamos f a $|A|$ por

$$f\left(\sum_{j=0}^{s} \alpha_{ij} v_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_{ij} f(v_{ij})$$

Seja P o conjunto dos simplexos geométricos C do R^{2n+1} imagens pela f dos simplexos A de K, isto é, $P = f(|K|)$.

Mostremos que P satisfaz as condições da definição (0.13) de complexo simplicial.

De fato, se $C_1 \in P$ e $C_2 < C_1$, então, $C_2 \in P$, pois, C_2 sendo face de C_1, os seus vértices constituem um subconjunto de um conjunto de pontos em posição geral, logo C_2 tem seus vértices em posição geral.

Suponhamos, agora, que $C_1 = \left\{p_{i_0}, \ldots, p_{i_r}\right\}$ e $C_2 = \left\{p_{j_0}, \ldots, p_{j_s}\right\}$ sejam simplexos da coleção P imagem pela f de algum simplexo A_1 e A_2 de K, respectivamente.

Como $(r+1)+(s+1) \leq 2n+2$ pois $r \leq n$ e $s \leq n$ desde que dim $K=n$, o conjunto de pontos $\{p_{i_0},\ldots,p_{i_r},p_{j_0},\ldots,p_{j_s}\}$ determina um simplexo no R^{2n+1}, do qual C_1 e C_2 são faces e, a condição 2, fica satisfeita.

Sendo K finito, P é finito.

Além disso, $f:|K| \to P$ é um homeomorfismo. De fato, sendo linear f é contínua. A biunivocidade decorre da representação única dos pontos de $P \subset R^{2n+1}$, em termos de coordenadas baricêntricas. Que f é sobre, decorre da própria definição da f. Por outro lado, sendo $|A|$ um espaço de Hausdorff e a imagem de A pela f um espaço compacto, segue que f é um homeomorfismo de $|K|$ sobre P.

(0.18) <u>Definição</u>: O complexo geométrico (retilíneo) P denomina-se <u>realização geométrica</u> do complexo simplicial K.

De agora em diante trabalharemos apenas com os complexos geométricos e denotaremos por K, salvo menção em contrário.

(0.19) <u>Definição</u>: Um poliedro euclidiano, em algum R^n, é uma reunião finita arbitrária de simplexos (geométricos).

(0.20) <u>Proposição</u>: A reunião, a intersecção, o produto cartesiano e a imagem linear de poliedros euclidianos são poliedros euclidianos.

(0.21) <u>Proposição</u>: Todo poliedro euclidiano é o espaço subjacente de algum complexo geométrico.

Para a prova ver Corolário 1.7, pg. 14 [H].

(0.22) <u>Definição</u>: O complexo geométrico K denomina-se <u>triangulação</u> do poliedro euclidiano $|K|$.

(0.23) <u>Definição</u>: Uma <u>aplicação simplicial</u> de um complexo geométrico K_1 em um complexo geométrico K_2 é uma aplicação $f: |K_1| \to |K_2|$ entre os poliedros euclidianos $|K_1|$ e $|K_2|$ tal que:

1) f é contínua;

2) f aplica vértices de K_1 em vértices de K_2 e se $A \in K_1$ tem vértices $v_0, \ldots, v_n$, então, $f(A) \in K_2$ e tem vértices $f(v_0), \ldots, f(v_n)$;

3) f é baricêntrica, isto é, se $p = \alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_n v_n$, então, $f(p) = \alpha_0 f(v_0) + \ldots + \alpha_n f(v_n)$.

(0.24) <u>Definição</u>: Um <u>isomorfismo</u> é um homeomorfismo simplicial e denota-se por $\cong$.

(0.25) <u>Proposição</u>: Se uma aplicação simplicial $f:|K_1| \to |K_2|$ é um homeomorfismo, então, f^{-1} é simplicial.

<u>Prova</u>: Se f é um homeomorfismo simplicial, então, os complexos geométricos k_1 e K_2 são de mesma dimensão e possuem o mesmo número de simplexos. Além disso, sendo f biunívoca e sobre, f aplica vértices distintos de K_1 sobre vértices distintos de K_2 e as imagens de simplexos de K_1, pela f, esgotam os simplexos de K_2. Posto isto, a verificação das condições 1), 2) e 3) de (0.23) para f^{-1} é imediata.

(0.26) <u>Definição</u>: Se K_1 e K_2 são complexos geométricos, diz-se que K_2 é uma <u>subdivisão</u> (simplicial) de K_1 se:

1) $|K_1| = |K_2|$

2) Cada simplexo de K_2 está em algum simplexo de K_1.

(0.27) <u>Definição</u>: Uma aplicação contínua $f:|K_1| \to |K_2|$ é

<u>linear por partes</u> se existem subdivisões L_1 e L_2 dos complexos K_1 e K_2, respectivamente, tais que $f:|L_1| \to |L_2|$ é simplicial.

(0.28) <u>Definição</u>: Um complexo geométrico K_1 é <u>combinatoriamente equivalente</u> a um complexo geométrico K_2, $K_1 \approx K_2$, se existe um homeomorfismo linear por partes f levando K_1 sobre K_2.

(0.29) <u>Exemplo</u>: Se K_1 é uma subdivisão de um complexo K, então, as aplicações $|K| \to |K_1|$ e $|K_1| \to |K|$ induzidas pela identidade são homeomorfismos lineares por partes, isto é, $K \approx K_1$.

De fato, considerando-se K_1 como subdivisão de K_1 mesmo e de K, então, $1_{|K_1|} : |K_1| \to |K_1|$ é uma aplicação simplicial.

(0.30) <u>Proposição</u>: Se um homeomorfismo $f:|K_1| \to |K_2|$ entre poliedros euclidianos é linear por partes, então, o homeomorfismo $f^{-1}:|K_2| \to |K_1|$ é linear por partes.

<u>Prova</u>: Seja $f:|K_1| \to |K_2|$ um homeomorfismo, entre poliedros euclidianos, linear por partes, então, pela defini—

ção (0.27) existem subdivisões L_1 e L_2 de K_1 e K_2, respectivamente, segundo as quais f é simplicial. Tendo em vista o exemplo (0.29) podemos considerar o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} |K_1| \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\approx"'] & |K_2| \arrow[d, "\approx"] \\ |L_1| \arrow[r, "f"'] & |L_2| \end{tikzcd}$$

Portanto, sendo f um homeomorfismo simplicial pela proposição (0.25), $f^{-1}: |L_2| \to |L_1|$ é um homeomorfismo simplicial e, então, $f^{-1}: |K_2| \to |K_1|$ é um homeomorfismo linear por partes.

(0.31) <u>Proposição</u>: A composição de duas aplicações lineares por partes, entre poliedros euclidianos, é uma aplicação linear por partes.

Para a demonstração ver Teorema I.6 pg. 15 [G].

(0.32) <u>Lema</u>: Se $f: |L_1| \to |L_2|$ é um homeomorfismo linear por partes, então, existe um complexo L_1' que é uma subdivisão de L_1 e de L_2, que torna co-

mutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd} |L_1| \arrow[r, "f"] & |L_2| \\ |L_1'| \arrow[u, "s_1"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

e onde s_1 e f' aplicam simplexos de L_1' em simplexos de L_2.

<u>Prova</u>: Sendo f um homeomorfismo linear por partes, existem complexos L_1' e L_2' tais que $\sigma: |L_1'| \to |L_2'|$ é um homeomorfismo simplicial. Então, é comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd} |L_1| \arrow[r, "f"] & |L_2| \\ |L_1'| \arrow[u, "s_1"] \arrow[r, "\sigma"'] & |L_2'| \arrow[u, "s_2"'] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, $f' = s_2\,\sigma$ aplica simplexos de L_1' em simplexos de L_2' e a prova é completa.

(0.33) <u>Definição</u>: Sejam $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ e $B = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$ simplexos geométri

cos de alguns R^n, com $r+s \leq n+1$ e a totalidade dos vértices de A e B em posição geral. Então, $\{p_1,\ldots, p_r, q_1,\ldots,q_s\}$ gera um simplexo AB denominado a <u>junção</u> de A com B.

(0.34) <u>Observações</u>: 1) A junção de um p-simplexo com um q-simplexo é um (p+q+1)-simplexo;

2) Por convenção a junção $A\phi = \phi A = A$.

(0.35) <u>Definição</u>: Se K_1 e K_2 são complexos geométricos, então a <u>junção</u> de K_1 com K_2 é o complexo $K_1 K_2 = \{AB/A \in K_1, B \in K_2\} \cup K_1 \cup K_2$ tal que se $A_1, A_2 \in K_1$, $B_1, B_2 \in K_2$, então

$$A_1 B_1 \cap A_2 B_2 = (A_1 \cap A_2)(B_1 \cap B_2).$$

A restrição imposta aos simplexos da junção de K_1 com K_2 tem o seguinte significado:

$A_1B_1 \cap A_2B_2$ é face comum de A_1B_1 e de A_2B_2.

(0.36) <u>Definição</u>: O <u>complementar</u> ("link") de um simplexo A em um complexo geométrico K é o complexo geométrico $lk(A,K) = \{B \in K/AB \in K, \quad A \cap B = \phi\}$

(0.37) <u>Proposição</u>: Se $f: |K| \to |L|$ é um homeomorfismo li-

near por partes, K e L complexos simpliciais, então, $lk(a,K) \cong lk(f(a),L)$ desde que $f(a)$ seja um vértice de L.

Para a prova ver corolário 1.15, pg.23 [H].

(0.38) <u>Definição</u>: Um poliedro euclidiano $|K|$ é uma <u>n-bola combinatória</u> [n-esfera combinatória] se $|K|$ é homeomorfo linearmente por partes ao poliedro euclidiano $|\Delta^n|$ $\left[\,|\partial\Delta^{n+1}|\,\right]$.

(0.39) <u>Definição</u>: Uma <u>n-variedade linear por partes</u> M^n é um poliedro euclidiano, no qual todo ponto tem uma vizinhança fechada que é uma n-bola combinatória.

(0.40) <u>Observação</u>: A definição dada acima é equivalente à definição de variedade combinatória em termos do complementar de um vértice. Tal equivalência é mostrada na demonstração do teorema (1.22) desta tese.

(0.41) <u>Definição</u>: Um ponto x é <u>interno</u> a uma n-variedade M se para qualquer triangulação K de M, tendo x como vértice, $lk(x,K)$ é uma esfera. Diz-se

que $x \in \dot{M}$ (ou $x \in \partial M$) se para uma triangulação K de M, tendo x como vértice, lk(x,K) é uma bola. O conjunto dos pontos internos de uma variedade denomina-se o <u>interior</u> da variedade e denota-se por $\overset{\circ}{M}$ e $\dot{M} = \partial M$ é chamado o <u>bordo</u> de M. Se $\dot{M}=\phi$, diz-se que M é uma <u>variedade sem bordo</u>.

(0.42) <u>Proposição</u>: Se $|K| = M$ é uma triangulação da n-variedade M, então,

$\dot{K} = \{A \in K \mid lk(A,K) \text{ é uma bola}\}$ é um subcomplexo de K e $|\dot{K}| = \dot{M}$ é uma (n-1)-variedade sem bordo.

Ver a prova em [H] pg. 27, lema 1.18.

(0.43) <u>Definição</u>: Se K é um complexo geométrico, então $A \in K$ é um <u>simplexo principal</u> de K se A não está sobre o bordo de nenhum outro simplexo de K.

Uma <u>face livre</u> de um complexo K é um simplexo $A \in K$ tal que:

a) $\dim A \leq \dim K-1$,

b) A não é face comum a dois simplexos de K. (ver exemplo (0.46) abaixo).

Consideremos, agora, um complexo geométrico L, subcomplexo de um complexo geométrico K, tal que

$$K = L + aA + A$$

onde o símbolo + significa reunião, aA é um simplexo prin

cipal de K tal que $a\dot{A}$ é um subcomplexo de L e A uma face livre de K, $A \notin L$, $a \in K$.

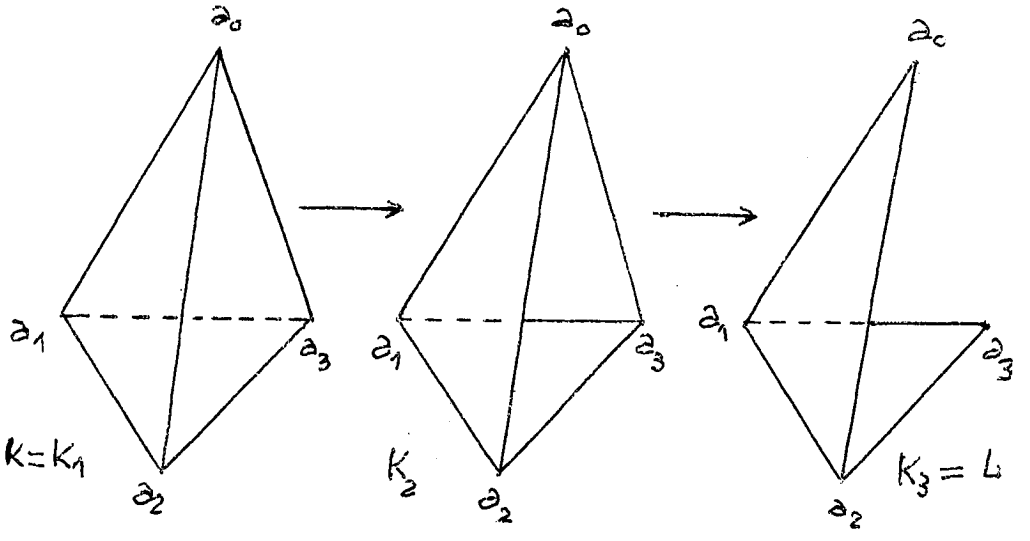
(0.44) <u>Definição</u>: Nas condições acima, diz-se que K colapsa por um <u>colapso simplicial elementar</u> a L e denota-se por $K \downarrow^{es} L$.

(0.45) <u>Definição</u>: Um complexo geométrico K <u>colapsa simplicialmente</u> a L, e denota-se por $K \downarrow^{s} L$, se existe uma sequência finita.

$$K = K_r \downarrow^{es} K_{r-1} \downarrow^{es} \dots \downarrow^{es} L$$

de colapsos simpliciais elementares.

(0.46) <u>Exemplo</u>: Seja K o tetraedro de vértices $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ e $L \subset K$. constituído de dois 2-simplexos de vértices $\{a_0, a_1, a_2\}$ e $\{a_1, a_2, a_3\}$



onde $K_2 = |a_0\, a_1\, a_2| + |a_0\, a_1\, a_3| + |a_1\, a_2\, a_3|$ e $K - K_2 = \overset{\circ}{\widehat{aA}} + \overset{\circ}{A}$, com $A = |a_0\, a_2\, a_3|$ e $a = a_1$.

É fácil ver que aA é um simplexo principal de K e A é uma face livre de K.

$$K_2 - L = \overset{\circ}{\widehat{aA}} + \overset{\circ}{A}, \text{ com } A = |a_0\, a_3| \text{ e } a = a_1.$$

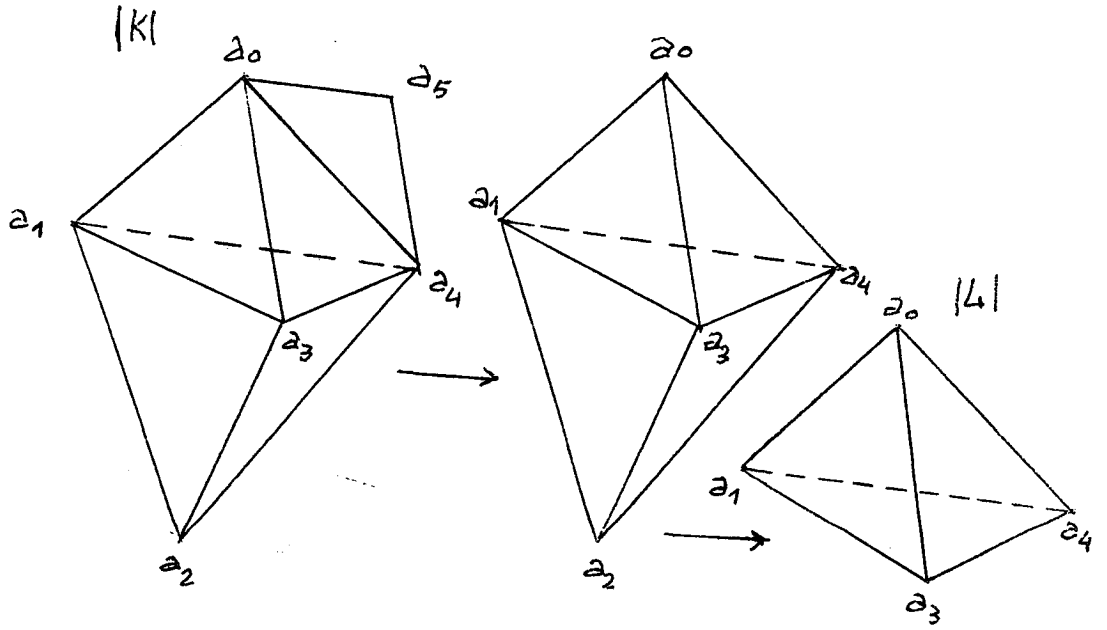
O simplexo $aA = |a_0\, a_1\, a_3|$ é principal em K_2 e A é uma face livre de K_2.

(0.47) <u>Definição</u>: Um complexo geométrico K <u>colapsa</u> a um subcomplexo L, $K \downarrow L$, se existem subdivisões K_1, L_1 de K e L respectivamente, tais que $K_1 \downarrow^s L_1$. Um complexo K é <u>colapsível</u> se K colapsa a um ponto.

(0.48) <u>Definição</u>: Um poliedro euclidiano $|K|$ colapsa a um subpoliedro euclidiano $|L|$ por um <u>colapso elementar</u> (geométrico) se $|K| = |L| + B^n$, onde B^n é uma bola combinatória tal que $B^n \cap |L| = B^{n-1} \subset \dot{B}^n$ e denota-se por $|K| \downarrow^e |L|$.

(0.49) <u>Definição</u>: Um poliedro euclidiano $|K|$ <u>colapsa</u> ao subpoliedro euclidiano $|L|$, $|K| \downarrow |L|$, se existe uma sequência finita $|K| = |K_r| \downarrow^e |K_{r-1}| \downarrow^e \ldots \downarrow^e |L|$. Um poliedro euclidiano $|K|$ é <u>colapsível</u> se $|K|$ colapsa a um ponto.

(0.50) Exemplo:



Pelo exemplo acima, podemos observar que não se exige que a dimensão das bolas combinatórias, que são retiradas, permaneçam fixas.

(0.51) Proposição: Todo colapso simplicial elementar $K = L + aA + A \downarrow L$ é um colapso geométrico elementar.

Prova: De fato, $|aA|$ é uma n-bola combinatória e $|aA| \cap |L| = |a\dot{A}|$ é uma (n-1)-bola combinatória em $|\widehat{\partial \dot{A}}|$

(0.52) Proposição: Se $|K| \downarrow |L|$ então existem subdivisões K_1, L_1 de K e L, respectivamente, com $L_1 \subset K_1$, tal que $K_1 \downarrow^s L_1$.

Para a prova ver Teorema 2.4 pg. 48 [H] .

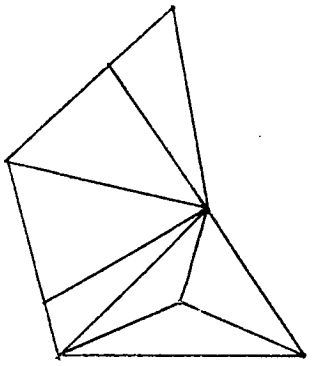
Pela proposição anterior podemos concluir que se $|K| \downarrow |L|$, então, $K \downarrow L$. Entretanto, se $|K| \downarrow |L|$ é falso que $K \downarrow^{s} L$. R.H. Bing deu um contra-exemplo de tal fato (ver Anne Scott - Infinite Regular Neighbourhoods - Journ. Lond. Math. Soc. (1967), 245-253).

Todo complexo geométrico K pode ser escrito sob a forma $K = A\,lk(A,K) + Q$ onde A é um simplexo de K e Q é um subcomplexo de K tal que $A \notin Q$, $Q \cap A\,lk(A,K \subseteq \dot{A}\,lk(A,K)$.

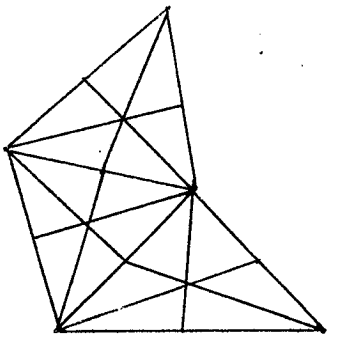
(0.53) <u>Definição</u>: Diz-se que o complexo geométrico L foi obtido do complexo geométrico $K = A\,lk(A,K) + Q$ por uma <u>subdivisão estrelar elementar</u> se $L = a\dot{A}\,lk(A,K) + Q$ onde $a \in \overset{o}{A}$

(0.54) <u>Definição</u>: Uma <u>subdivisão estrelar</u> σ é a resultante de uma sequência finita de subdivisões estrelar elementar.

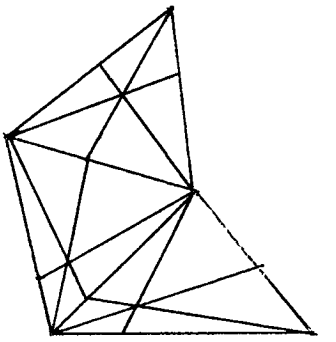
(0.55) <u>Exemplo</u>: As n-ésimas subdivisões baricêntrica e derivada de um complexo geométrico K, são subdivisões estrelares.



Subdivisão estrelar



1ª subdivisão baricêntrica



1ª subdivisão derivada

(0.56) <u>Definição</u>: Um subcomplexo L de um complexo K é <u>completo</u> se para todo simplexo $A \in K$ tal que $\dot{A} \in L$, vale $A \in L$.

(0.57) <u>Lema:</u> 1) Se L é um subcomplexo de K e $L' \subseteq K'$ são primeiros derivados, então L' é um subcomplexo completo de K;

2) Se L é um subcomplexo completo de K, e $L' \subseteq K'$ é qualquer subdivisão, então L' é completo em K'.

Para a prova vide lema 2.5 pg.49 [H]

(0.58) <u>Definição</u>: Uma <u>vizinhança simplicial</u> (fechada) de um subcomplexo L em um complexo K é

$$N(L,K) = \bigcup_{v \in L} \overline{st}(v,K) \quad \text{onde} \quad \overline{st}(v,K) = v\ lk(v,K).$$

(0.59) <u>Definição</u>: Seja $X \subset M$ um subpoliedro euclidiano de uma m-variedade. Sejam $L \subset K$ uma triangulação de $X \subset M$ ($|L| = X$, $|K| = M$) com L completo em K.

Uma <u>vizinhança derivada de X em M</u> é $N = |N(L', K')|$ onde $L' \subset K'$ é a 1ª subdivisão derivada de $L \subset K$.

(0.60) <u>Definição</u>: Se $L \subset K$ é uma triangulação de $X \subset M$ e se $L^{(r)} \subset K^{(r)}$ é a r-ésima subdivisão derivada, então $|N(L^{(r)}, K^{(r)})|$ é a <u>r-ésima vizinhança derivada de X em M</u>. Para $r \geq 2$ uma r-ésima vizinhança derivada é uma vizinhança derivada.

(0.61) <u>Proposição</u>: Se X é um poliedro euclidiano contido no poliedro euclidiano M e se N é uma vizinhança derivada de X em M, então, $N \downarrow X$.

Para a prova ver Lema 2.10 pg.55 [H].

(0.62) <u>Definição</u>: Se X é um poliedro euclidiano em uma n-variedade euclidiana M, então, uma <u>vizinhança regular</u> $N \subset M$ de X em M é tal que

1) N é uma vizinhança topológica fechada de X em M;
2) N é uma n-variedade euclidiana;
3) $N \downarrow X$.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS - S. Carlos - BIBLIOTECA

(0.63) <u>Teorema</u>: Seja $X \subset M$, M uma n-variedade, X um poliedro euclidiano. Então,

1) Qualquer vizinhança derivada de X é uma vizinhança regular;

2) Se N_1 e N_2 são vizinhanças regulares de X em M, então, existe um homeomorfismo linear por partes $h: N_1 \to N_2$ tal que $h(x) = x$ se $x \in X$;

3) Se X é colapsível, então, qualquer vizinhança regular de X é uma n-bola combinatória.

Para a prova ver Teorema 2.11, pg.57 [H].

(0.64) <u>Definição</u>: Uma vizinhança regular N de um poliedro X em uma n-variedade euclidiana M <u>encontra o bordo regularmente</u> se ou $N \cap \partial M$ é uma vizinhança regular de $X \cap \partial M$ em ∂M ou estas intersecções são vazias.

(0.65) <u>Observação</u>: Uma vizinhança derivada de X em M encontra o bordo regularmente. [H.,pg.65].

(0.66) <u>Lema</u>: Se N é uma vizinhança regular de X em M e se N encontra o bordo regularmente, então $N \downarrow X \cup (N \cap \partial M) \downarrow X$.

Para a prova ver Lema 2.20, pg.71 [H].

CAPÍTULO I

VARIEDADES POLIÉDRICAS

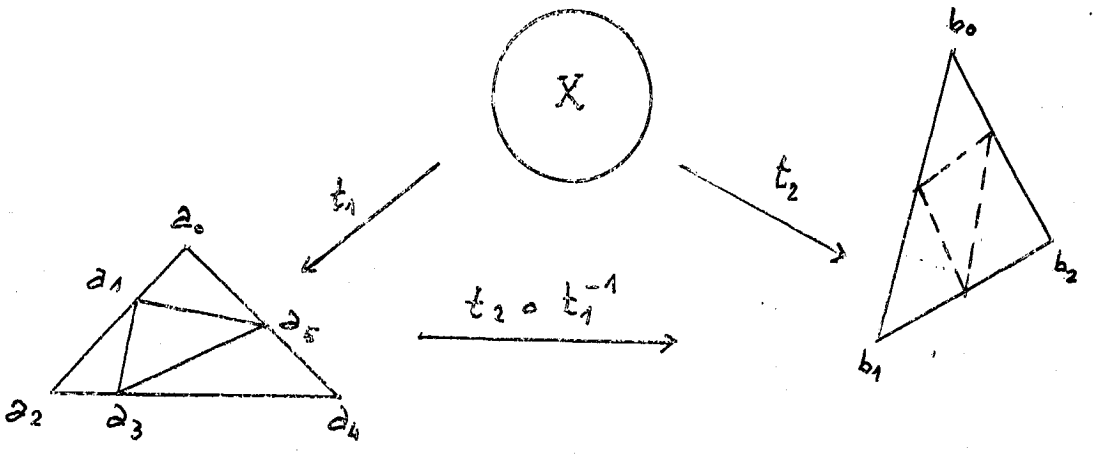
(1.1) Definição: Uma triangulação (K,t) de um espaço topológico X consiste de um complexo geométrico K e de um homeomorfismo $t: X \to |K|$.

(1.2) Definição: A triangulação (K_1,t_1) de um espaço topológico X é uma subdivisão da triangulação (K_2,t_2) do mesmo espaço X, se o homeomorfismo $t_2 \circ t_1^{-1}: |K_1| \to |K_2|$ aplica linearmente cada simplexo de K_1 em algum simplexo de K_2.

(1.3) Exemplo: Seja X um disco fechado do plano e sejam K_1 e K_2 complexos tais que

$|K_1| = |a_0\, a_1\, a_5| + |a_1\, a_2\, a_3| + |a_3\, a_4\, a_5| + |a_1\, a_3\, a_5|$ e

$|K_2| = |b_0\, b_1\, b_2|$



(1.4) <u>Definição</u>: Duas triangulações (K_1,t_1), (K_2,t_2) são <u>compatíveis</u> se existir uma triangulação (K_3,t_3), do mesmo espaço topológico, que é uma subdivisão comum de ambas.

Em outras palavras, as triangulações (K_1,t_1), (K_2,t_2) são compatíveis se o diagrama abaixo fôr comutativo e se os homeomorfismos $t_1 \circ t_3^{-1}$ e $t_2 \circ t_3^{-1}$ aplicam linearmente cada simplexo de K_3 em algum simplexo de K_1 e de K_2, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
|K_1| & & |K_2| \\
& X \arrow[ul, "t_1"'] \arrow[ur, "t_2"] \arrow[dd, "t_3"] & \\
& & \\
& |K_3| \arrow[uul, "t_1 \circ t_3^{-1}"] \arrow[uur, "t_2 \circ t_3^{-1}"'] \arrow[uu, bend left] \arrow[uu, bend right] &
\end{tikzcd}$$

(1.5) <u>Lema</u>: Duas triangulações quaisquer (K_1,t_1), (K_2,t_2) de um mesmo espaço X, compatíveis, são tais que o homeomorfismo $t_2 \circ t_1^{-1}: |K_1| \to |K_2|$ é linear por partes.

<u>Prova</u>: Basta considerarmos o diagrama abaixo, uma vez que a aplicação identidade $1_{|K_3|}$ é simplicial

$$\begin{tikzcd}
|K_1| \arrow[rr, "t_2 \circ t_1^{-1}"] & & |K_2| \\
& X \arrow[ul, "t_1"] \arrow[ur, "t_2"'] \arrow[dl, "t_3"] \arrow[dr, "t_3"'] & \\
|K_3| \arrow[uu] \arrow[rr, "1|k_3|"] & & |K_3| \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

(1.6) <u>Lema</u>: Seja X um espaço topológico e τ uma classe de triangulações de X duas a duas compatíveis. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1) se $(K,t) \in \tau$, então, dado um homeomorfismo linear por partes $f:|K| \to |K_o|$ tem-se que $(K_o, f \circ t)$ é uma triangulação de X pertencente à τ.

2) se $g:X \to |K_o|$ é um homeomorfismo tal que (K_o,g) é uma triangulação de X, compatível com todas as triangulações de τ, então $(K_o,g) \in \tau$.

<u>Prova</u>: 1) $\Rightarrow$ 2). De fato, se $g:X \to |K_o|$ é um homeomorfismo arbitrário tal que (K_o,g) é uma triangulação de X, compatível com todas as triangulações de τ, mostremos que, para algum $(K,t) \in \tau$, existe um homeomorfismo linear por partes $f:|K| \to |K_o|$ tal que $g = f \circ t$ e, por

tanto, pela condição 1) $(K_o, g) \in \tau$.

Basta tomarmos $f = g \circ t^{-1}$ para termos

$g = g \circ (t^{-1} \circ t) = (g \circ t^{-1}) \circ t = f \circ t$

Resta mostrar que f é linear por partes. Como g é compatível com t existe o diagrama

$$\begin{tikzcd}
|K| \arrow[rr, "g \circ t^{-1}"] & & |K_o| \\
& X \arrow[ul, "t"'] \arrow[ur, "g"] \arrow[d, "t_1"] & \\
& |K_1| \arrow[uul] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

do qual decorre a afirmação sobre f, uma vez que (K_1, t_1) é uma subdivisão comum de (K,t) e de (K_o, g) e $1_{|K_1|}$ é simplicial.

2) $\Rightarrow$ 1) Temos por hipóteses que

a) τ é uma classe de triangulações duas a duas compatíveis; b) $(K,t) \in \tau$, c) $f: |K| \to |K_o|$ é linear por partes e d) a classe τ satisfaz a condição 2). A nossa tese é provar que $(K_o, f \circ t) \in \tau$.

Para isso basta mostrarmos que $(K_o, f \circ t)$ é compatível com toda triangulação $(K_1, t_1) \in \tau$.

De fato, (K,t) e (K_1, t_1) são compatíveis, isto é, existe uma triangulação $(K_2, t_2) \in \tau$ que é uma subdivi-

são comum de ambas. Então, vale o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
|K_o| & |K| \arrow[l, "f"'] & X \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"] & |K_1| \\
 & & |K_2| \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "h_1"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $h = t \circ t_2^{-1}$, $h_1 = t_1 \circ t_2^{-1}$ aplicam simplexos em simplexos. Pelo lema (1.5) temos que h é um homeomorfismo linear por partes e, portanto, pela proposição (0.31) $f \circ h$ é linear por partes.

Logo, pelo lema (0.32), existe uma subdivisão K_2' comum aos complexos K_2 e K_o em que as aplicações s_2 e s levam simplexos em simplexos, tornando comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & |K_2| \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[dr, "f \circ h"] & \\
|K_1| & & |K_o| \\
 & |K_2'| \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[uu, "s_2"] & \\
 & X \arrow[u, "s_2^{-1} \circ t_2"'] &
\end{tikzcd}$$

e onde $s_1 = h_1 \circ s_2$ leva simplexos em simplexos, isto é, K_2' é, ainda, uma subdivisão de K_1.

Posto isto, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
|K_1| & & |K_o| \\
& |K_2'| \arrow[ul, "h_1 \circ s_2"'] \arrow[ur, "s"] & \\
& X \arrow[u, "s_2^{-1} \circ t_2"] \arrow[uul, "t_1"] \arrow[uur, "f \circ t"'] &
\end{tikzcd}$$

sendo que $h_1 \circ s_2$ e s aplicam simplexos de K_2' em simplexos de K_1 e de K_o, respectivamente, tornando o diagrama comutativo, pois

$$h_1 \circ s_2 \circ s_2^{-1} \circ t_2 = h_1 \circ t_2 = t_1$$

e

$$s \circ s_2^{-1} \circ t_2 = f \circ h \circ s_2 \circ s_2^{-1} \circ t_2 = f \circ h \circ t_2 = f \circ t.$$

Mostramos, assim, que (K_1, t_1) e $(K_o, f \circ t)$ possuem uma subdivisão comum $(K_2', s_2^{-1} \circ t_2)$, ou seja, (K_1, t_1) e $(K_o, f \circ t)$ são compatíveis.

(1.7) <u>Definição</u>: A classe τ acima considerada denomina-se <u>classe maximal</u> de triangulações e o espaço X munido dessa classe τ é chamado <u>poliedro</u> e é denotado por (X, τ).

(1.8) <u>Teorema</u>: Um homeomorfismo $t: X \to |K|$ determina univocamente uma classe τ de triangulações de modo que (X, τ) seja um poliedro.

<u>Prova</u>: Seja τ o conjunto de todos os pares $(K_o, f \circ t)$ onde $f: |K| \to |K_o|$ é um homeomorfismo linear por partes arbitrário. Então, $(K_o, f \circ t)$ é uma triangulação do espaço X.

Mostremos, pois, que duas triangulações quaisquer pertencentes a τ são compatíveis no sentido da definição (1.4) e que τ é maximal segundo a condição 1) do lema (1.6).

De fato, o diagrama abaixo mostra que duas triangulações arbitrárias pertencentes a τ são compatíveis, aplicando-se o mesmo raciocínio da parte 2) $\Rightarrow$ 1) do lema (1.6).

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1 \circ t"'] \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "f_o \circ t"] & \\
|K_1| & |K| \arrow[l, "f_1"] \arrow[r, "f_o"'] \arrow[d, "s"] & |K_o| \\
 & |K'| \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_o"'] \arrow[d, "r"] & \\
 & |K''| \arrow[uul, "r_1"] \arrow[uur, "r_o"'] &
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, se $(K_o, f \circ t) \in \tau$, então, para todo homeomorfismo linear por partes $h: |K_o| \to |K_1|$ tem-se que $(K_1, h \circ (f \circ t) \in \tau$, uma vez que $h \circ (f \circ t) = (h \circ f) \circ t$ e, pela proposição (0.31), $h \circ f$ é linear por partes. É imediato, também, que $(K,t) \in \tau$, pois, $t = 1_{|K|} \circ t$ e $1_{|K|}$ é homeomorfismo linear por partes.

Resta mostrarmos que τ é única.

De fato, seja τ' uma outra classe maximal de triangulações compatíveis, contendo (K,t).

Mostremos que $\tau \subset \tau'$.

De fato, $(K,t) \in \tau'$ e pela condição 1) se $f: |K| \to |K_o|$ é um homeomorfismo linear por partes, então $(K_o, f \circ t) \in \tau'$. Mas, $(K_o, f \circ t)$ é um elemento representativo de τ, logo, $\tau \subset \tau'$. Como τ é maximal, τ satisfaz a condição 2), logo $\tau = \tau'$.

(1.9) <u>Observação</u>: Dados os poliedros (X_1, τ) e (X_2, Σ) e dada uma aplicação contínua $f: X_1 \to X_2$, consideremos a aplicação $\alpha: |K_1| \to |K_2|$ definida por $\alpha = s \circ f \circ t^{-1}$ onde $(K_1, t) \in \tau$ e $(K_2, s) \in \Sigma$.

Nas condições da observação acima, temos:

(1.10) <u>Lema</u>: Se α é uma aplicação linear por partes no sentido da definição (0.27), então, dados

$(\bar{K}_1,\bar{t}) \in \tau$ e $(\bar{K}_2,\bar{s}) \in \Sigma$, a aplicação

$$\bar{\alpha} = \bar{s} \circ f \circ \bar{t}^{-1} : |\bar{K}_1| \to |\bar{K}_2|$$

é linear por partes.

<u>Prova</u>: A demonstração baseia-se no diagrama

$$\begin{tikzcd}
|K_1| \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "\bar{t} \circ t^{-1}"'] & & |K_2| \arrow[dd, "\bar{s} \circ s^{-1}"] \\
& X_1 \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "\bar{t}"] \arrow[r, "f"] & X_2 \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "\bar{s}"'] \\
|\bar{K}_1| \arrow[rr, "\bar{\alpha}"'] & & |\bar{K}_2|
\end{tikzcd}$$

Como $(\bar{t} \circ t^{-1})^{-1}$ e $\bar{s} \circ s^{-1}$ são homeomorfismos lineares por partes e α é linear por partes, então, a composta

$$\bar{\alpha} = (\bar{s} \circ s^{-1}) \circ \alpha \circ (\bar{t} \circ t^{-1})^{-1} = \bar{s} \circ f \circ \bar{t}^{-1}$$

também é linear por partes.

(1.11) <u>Definição</u>: A aplicação contínua f, dada acima, é denominada aplicação <u>linear por partes entre os poliedros</u> (X_1,τ) e (X_2, Σ). Em particular se f é um homeomorfismo teremos um homeomorfismo linear por partes.

(1.12) <u>Lema</u>: Dados os poliedros (X_1,τ) e (X_2,Σ) e dado um homeomorfismo linear por partes f entre eles, tem-se que f^{-1} também é um homeomorfismo li

near por partes entre os poliedros (X_2, Σ) e (X_1, τ).

<u>Prova</u>: É imediato, da definição (1.11) que f é linear por partes, quando e apenas quando, $\alpha = s \circ f \circ t$ é linear por partes.

Pela proposição (0.30), temos que

$$\alpha^{-1} = (s \circ f \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ f^{-1} \circ s^{-1}$$

é linear por partes. Então, f^{-1} é linear por partes.

(1.13) <u>Definição</u>: Os poliedros (X_1, τ) e (X_2, Σ) são <u>homeomorfos linearmente por partes</u> se existe um homeomorfismo $f: X_1 \to X_2$ tal que f e f^{-1} sejam homeomorfismos lineares por partes entre os dados poliedros.

(1.14) <u>Lema</u>: Os poliedros (X, τ) e $(|K|, \tau_{|K|})$ onde $(K,t) \in \tau$ e $\tau_{|K|}$ é a classe de triangulações, univocamente determinada pela identidade $1_{|K|}$ de K são homeomorfos linearmente por partes.

<u>Prova</u>: Basta observar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
|K| \arrow[rr, "\alpha = 1_{|K|}"] & & |K| \\
X \arrow[u, "t"] \arrow[rr, "t"] & & |K| \arrow[u, "1_{|K|}"']
\end{tikzcd}$$

Vemos também:

(1.15) <u>Corolário</u>: $(K_1, s \circ t) \in \tau \Longleftrightarrow (K_1, s) \in \tau_{|K|}$

(1.16) <u>Definição</u>: O poliedro (Y, Σ) é um <u>subpoliedro</u> do poliedro (X, τ) se:

1) Y é um sub-espaço topológico de X

2) Σ é uma classe de triangulações (L,s) tal que $(\exists\, (L,s) \in \Sigma)$ e $\exists\, (K,t) \in \tau$, $s: Y \to |L|$, $t: X \to |K|$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] & |K| \\ Y \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "s"] & |L| \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo e L é um subcomplexo de K, onde ι e i são inclusões.

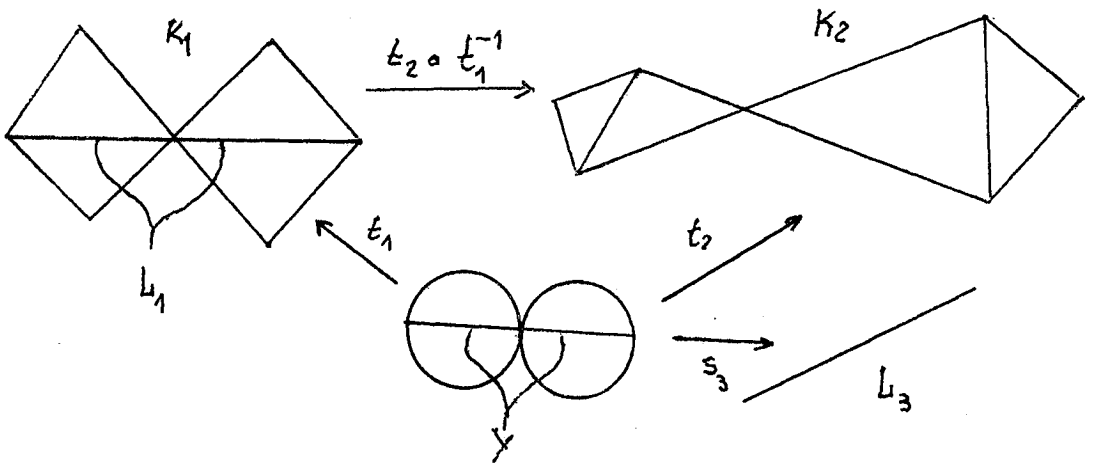
(1.17) <u>Lema</u>: Se (Y, Σ) é um subpoliedro do poliedro (X, τ) e $(K_1, t_1) \in \tau$ é tal que $t_1(Y) = |L_1|$, onde L_1 é um subcomplexo do complexo K_1, então, $(L_1, s_1) \in \Sigma$ com $s_1 = t_1|Y$.

<u>Prova</u>: Sendo t_1 um homeomorfismo linear por partes segue que $s_1 = t_1|Y$ é ainda um homeomorfismo linear por par

tes. Então a triangulação (L_1,s_1) é compatível com qualquer triangulação $(L,s) \in \Sigma$ e, portanto, $(L_1,s_1) \in \Sigma$.

(1.18) <u>Observação</u>: O exemplo abaixo justifica a condição 2) da definição (1.16) de subpoliedro.

De fato, seja X o espaço topológico constituído de dois discos unidos em um ponto e Y o sub-espaço de X constituído de dois diâmetros passando pela intersecção dos discos.



Seja (X,τ) o poliedro cuja classe τ é determinada pela triangulação (K_1,t_1). É imediato que a triangulação $(K_2,t_2) \in \tau$. Entretanto, $t_2(Y)$ não é o espaço subjacente de nenhum subcomplexo de K_2, considerando-se o espaço Y munido da classe Σ de triangulações determinada pela triangulação $(L_1,t_1|Y)$.

(1.19) <u>Proposição</u>: A reunião, a intersecção e o produto

cartesiano de dois subpoliedros de dois poliedros é subpoliedro do produto cartesiano dos poliedros.

Prova: A prova decorre, imediatamente do fato de que uma proposição análoga é válida para poliedros euclidianos e da aplicação do lema (1.14).

(1.20) Definição: Um poliedro (X,τ) é uma n-bola poliédrica [n-esfera poliédrica] se existe uma triangulação $(K,t) \in \tau$, onde K é o complexo simples associado ao n-simplexo padrão Δ^n [é o bordo do (n+1) - simplexo padrão Δ^{n+1}].

(1.21) Definição: Um poliedro (X,τ) é uma n-variedade poliédrica se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança fechada que é uma n-bola poliédrica, subpoliedro de (X, τ).

(1.22) Teorema: Um poliedro (X,τ) é uma n-variedade poliédrica, quando e apenas quando, para toda triangulação $(K,t) \in \tau$ e para todo k-simplexo A de K, $k \geq 0$, então $|\ell k(A,K)|$ é uma (n-k-1)-bola combinatória se A pertence ao bordo de K ou é uma (n-k-1)-esfera combinatória se A pertencer ao interior de K.

Prova:

$\Longrightarrow$) Se (X,τ) é uma n-variedade poliédrica, então, todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança fechada que é, como subpoliedro de (X,τ), uma n-bola poliédrica. Então, para toda triangulação $(K,t) \in \tau$ e $(\forall x \in X)$, $t(x) \in |K|$ possui uma vizinhança fechada que é uma n-bola linear por partes e que não necessita ser um subcomplexo e, portanto, o poliedro euclidiano $|K|$ é uma n-variedade linear por partes conforme (0.39). Então, pelo corolário 1.16 pg. 24, de [H]: "Se $|K|$ é uma n-variedade linear por partes, K, um complexo simplicial, então, se $A \in K$, $lk(A,K)$ é uma (n-r-1)-esfera ou bola, onde $r = \dim A$", temos que para todo k-simplexo A de K, $k \geq 0$, $|link\ (A,K)|$ é uma (n-k-1)-bola combinatória ou é uma (n-k-1)-esfera combinatória.

Por outro lado, escrevamos o complexo K sob a forma

$$K = A K_A + Q, \qquad A \notin Q,$$

onde, para simplicidade de notação estamos escrevendo $K_A = lk(A,K)$.

Então, $$\dot{K} = A\dot{K}_A + \dot{A}K_A + \dot{Q}$$

e, portanto,

$$A \notin \dot{K} \Longleftrightarrow \dot{K}_A = \phi \Longrightarrow |K_A| \text{ é uma esfera combinatória.}$$

$\Longleftarrow$) Suponhamos, agora, que para todo 0-simplexo $v \in K$, $|lk(v,K)|$ é uma (n-1): bola combinatória se $v \in \dot{K}$ ou é

uma (n-1)-esfera combinatória se $v \notin \dot{K}$. Em outras palavras, suponhamos que K seja uma n-variedade combinatória. Então, pelo teorema II.2 pg.19 [G] "em uma n-variedade combinatória K, todos os k-simplexos A de K, $k \geq 0$, são tais que $|lk(A,K)|$ é uma (n-k-1)-esfera combinatória se $A \notin \dot{K}$ ou é uma (n-k-1)-bola combinatória se $A \in \dot{K}$", temos que o poliedro euclidiano $|K|$ é uma n-variedade combinatória conforme a definição da pg.26 [H]: "o complexo K é uma n-variedade combinatória se $(\forall A \in K)$, $lk(A,K)$ é uma esfera ou bola de dimensão n-dim A-1".

Então, se $y \in |K|$, digamos $y \in \mathring{A}$, $A \in K$, seja K' obtido de K estrelando A em y, isto é:

$$K = A\, lk(A,K) + Q \rightarrow K' = y\, \dot{A}\, lk(A,K) + Q$$

Então, $|y\, \dot{A}\, lk(A,K)|$ é uma n-bola combinatória contendo y no seu interior. Logo, $|K|$ é uma n-variedade linear por partes.

Portanto, para toda triangulação $(K,t) \in \tau$, $|K|$ n-variedade linear por partes, acarreta que $x = t^{-1}(y) \in X$ possui uma vizinhança fechada que é uma n-bola poliédrica. Isto é, (X,τ) é uma n-variedade poliédrica.

(1.23) <u>Teorema</u>: Se (X,τ) é uma n-variedade poliédrica, então todo poliedro homeomorfo linearmente

por partes a (X,τ) é, também, uma n-variedade poliédrica.

<u>Prova</u>: Usando o teorema (1.22) e o teorema II.3, pg. 19, [G]: "se K é homeomorfo linearmente por partes a L e L uma n-variedade combinatória, então, K é uma n-variedade combinatória", temos a prova.

(1.24) <u>Definição</u>: Dada uma n-variedade poliédrica (X,τ), o conjunto

$\mathrm{int}(X,\tau) = \{x \in X / \forall\ (K,t) \in \tau / t(x)$ é vértice de K vale $|\mathrm{lk}(t(x),K)|$ é uma n-esfera combinatória$\}$

é denominado <u>interior</u> da variedade (X,τ) e o conjunto

$\partial(X,\tau) = \{x \in X / \forall (K,t) \in \tau / t(x)$ é vértice de K e $|\mathrm{lk}(t(x),K)|$ é uma n-bola combinatória$\}$

denomina-se <u>bordo</u> da variedade (X,τ).

(1.25) <u>Observação</u>: Para se determinar se $x \in \mathrm{int}(X,\tau)$ ou se $x \in \partial(X,\tau)$ basta considerarmos apenas uma triangulação $(K,t) \in \tau$, tendo $t(x)$ como vértice de K, pois se (K_1,t_1) é uma outra triangulação pertencente a τ, tendo $t_1(x)$ como vértice de K_1, temos que $|\mathrm{lk}(t_1(x),K)|$ é homeomorfo linearmente por partes a $|\mathrm{lk}(t(x),K)|$, conforme a proposição (0.37). Devido à

condição de maximalidade de τ, para todo $x \in X$ existe (K,t) tal que $t(x)$ é vértice de K.

(1.26) <u>Proposição</u>: Se (X_1,τ) e (X_2,Σ) são n-variedades poliédricas e $f:(X_1,\tau) \to (X_2,\Sigma)$ é um homeomorfismo linear por partes, então

$$f(\partial(X_1,\tau)) = \partial(X_2,\Sigma).$$

<u>Prova</u>: Sendo f um homeomorfismo linear por partes, então, pela definição (1.11) e pelo lema (1.10) o homeomorfismo $\alpha:|K_1| \to |K_2|$, $\alpha = s \circ f \circ t^{-1}$ $\forall (K_1,t) \in \tau, \forall (K_2,s) \in \Sigma$ é linear por partes.

Logo, $\forall x \in (X_1,\tau)$ podemos determinar uma triangulação $(K_1,t) \in \tau$ tal que $t(x)$ é vértice de K_1 e uma triangulação (K_2,s) de (X_2,Σ) tal que $(s \circ f)(x)$ é vértice de K_2. Como

$$\alpha(t(x)) = (s \circ f \circ t^{-1})(t(x)) = (s \circ f)(x)$$

temos, pela proposição (0.37)

$$lk(t(x), X_1) \cong lk(\alpha(t(x)), K_2) = lk(s(f(x)), K_2)$$

Logo, $\forall x \in \partial(X_1,\tau)$ temos que $f(x) \in \partial(X_2,\Sigma)$, isto é,

$$f(\partial(X_1,\tau)) \subset \partial(X_2,\Sigma) \qquad (1)$$

Reciprocamente, como o inverso de um homeomorfismo linear por partes é também linear por partes (ver 1.12)),

temos

$$f^{-1}(\partial(X_2, \Sigma)) \subset \partial(X_1, \tau) \qquad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem, finalmente

$$f(\partial(X_1, \tau)) = \partial(X_2, \Sigma)$$

A igualdade acima nos diz que um homeomorfismo linear por partes, entre variedades poliédricas, preserva seus bordos.

(1.27) <u>Proposição</u>: Uma n-bola poliédrica e uma n-esfera poliédrica são n-variedades poliédricas.

(1.28) <u>Proposição</u>: O bordo de uma (n+1)-bola poliédrica é uma n-esfera poliédrica, cujo bordo é vazio.

(1.29) <u>Proposição</u>: Se (X,τ) é uma n-variedade poliédrica, então, $\partial(X,\tau)$ é uma (n-1)-variedade poliédrica, subpoliedro de (X,τ) sem bordo.

<u>Prova</u>: Sendo (X,τ) uma n-variedade poliédrica, (X,τ) é homeomorfo linearmente por partes a n-variedade euclidiana $(|K|, \tau_{|K|})$ onde $(K,t) \in \tau$, conforme o lema (1.14).

Por outro lado, pela proposição (0.42), temos que $(|\dot{K}|, \tau_{|\dot{K}|})$ é uma (n-1)-variedade euclidiana, sem bordo, sub-variedade de $(|K|, \tau_{|K|})$.

Decorre, imediatamente, da definição (1.24) e da definição de $|\dot{K}|$ contida na proposição (0.42) que

$$f^{-1}(|\dot{K}|, \tau_{|\dot{K}|}) = \partial(X,\tau)$$

sendo $f:(X,\tau) \to (|K|, \tau_{|K|})$ o homeomorfismo linear por partes.

Portanto, $\partial(X,\tau)$ é uma (n-1)-variedade poliédrica sem bordo, subvariedade de (X,τ).

(1.30) <u>Definição</u>: Um poliedro (X,τ) <u>colapsa</u> a um subpoliedro (Y,Σ) se o poliedro euclidiano $(|K|, \tau_{|K|})$, onde $(K,t) \in \tau$, <u>colapsa</u> ao subpoliedro euclidiano $(|L|, \Sigma_{|L|})$ onde $(L,s) \in \Sigma$.

O poliedro (X,τ) é <u>colapsível</u> se (X,τ) colapsa a um ponto.

(1.31) <u>Definição</u>: Se (X,τ) e (N, Σ) são poliedros contidos em uma n-variedade poliédrica (M,Ω), então diz-se que (N,Σ) é uma <u>vizinhança regular</u> de (X,τ) em (M,Ω) se:

1) (N, Σ) é uma n-variedade poliédrica;

2) N é uma vizinhança topológica de X em M;

3) (N, Σ) colapsa a (X, τ).

(1.32) <u>Definição</u>: Diz-se que (N, Σ) <u>encontra o bordo regularmente</u> se além das condições 1), 2) e 3) acima valer também a condição

4) $(N, \Sigma) \cap \partial(M, \Omega)$ é uma vizinhança regular de $(X, \tau) \cap \partial(M, \Omega)$ em $\partial(M, \Omega)$.

(1.33) <u>Observações</u>: 1) Se (M, Ω) é uma variedade compacta com bordo e $X \subseteq \overset{o}{M}$, então, a condição 4) é equivalente a $N \subseteq \overset{o}{M}$;

2) A definição (1.31) é equivalente à seguinte definição:

"(N, Σ) é uma vizinhança regular de (X, τ) em (M, Ω) se o poliedro euclidiano $|N|$ é uma vizinhança regular de $|X|$ em $|M|$ (a notação é óbvia)".

3) Em vista de 2) podemos estabelecer definições e proposições análogas às dadas em (0.57), (0.58), (0.59), (0.61), (0.63) e (0.64).

CAPÍTULO II

NÓS PEQUENOS EM $S^1 \times D^2$

Seja (M, Ω) uma variedade poliédrica, com bordo ou não, e seja (K, Σ) um poliedro em (M, Ω)

(2.1) Definição: O poliedro (K, Σ) é um nó poliédrico em (M, Ω) se existe um homeomorfismo linear por partes de uma 1-esfera poliédrica em (M, Ω), cuja imagem é (K, Σ).

Por comodidade, denotaremos os poliedros apenas pelo primeiro elemento do par que o define.

(2.2) Observação: Um nó K em uma variedade euclidiana M é o espaço subjacente a um subcomplexo unidimensional, de uma dada triangulação admissível de M, no qual cada vértice incide justamente com duas arestas.

(2.3) Definição: Dois nós K_1 e K_2 em M são equivalentes se existe um homeomorfismo linear por partes de M sobre M que leva K_1 sobre K_2.

(2.4) Proposição: A relação equivalência de nós é uma

relação de equivalência.

(2.5) <u>Definição</u>: Dizemos que nós equivalentes são do <u>mesmo tipo</u> e cada classe de equivalência de nós constitui um <u>tipo de nó</u>.

(2.6) <u>Definição</u>: Um nó K é um <u>nó pequeno</u> em M se K está inteiramente contido em uma 3-bola poliédrica $\subset \mathring{M}$ e subvariedade de M.

Como dois nós quaisquer em M são sempre homeomorfos linearmente por partes, eles diferem no modo pelo qual estão imersos em M. Isto nos leva, pois, ao estudo do complementar de um nó.

(2.7) <u>Definição</u>: Se K é um nó em M, o grupo $\pi(M-K,*)$ é denominado <u>grupo fundamental</u> de K e é denotado por $\pi(K)$.

Consideremos, agora, o espaço $S^1 \times D^2$, produto cartesiano de uma 1-esfera poliédrica S^1 por uma 2-bola poliédrica D^2, que, pela proposição (1.19), é uma 3-variedade poliédrica.

Mostra-se que o revestimento universal de $S^1 \times D^2$

é $R \times D^2$, sendo R a reta real.

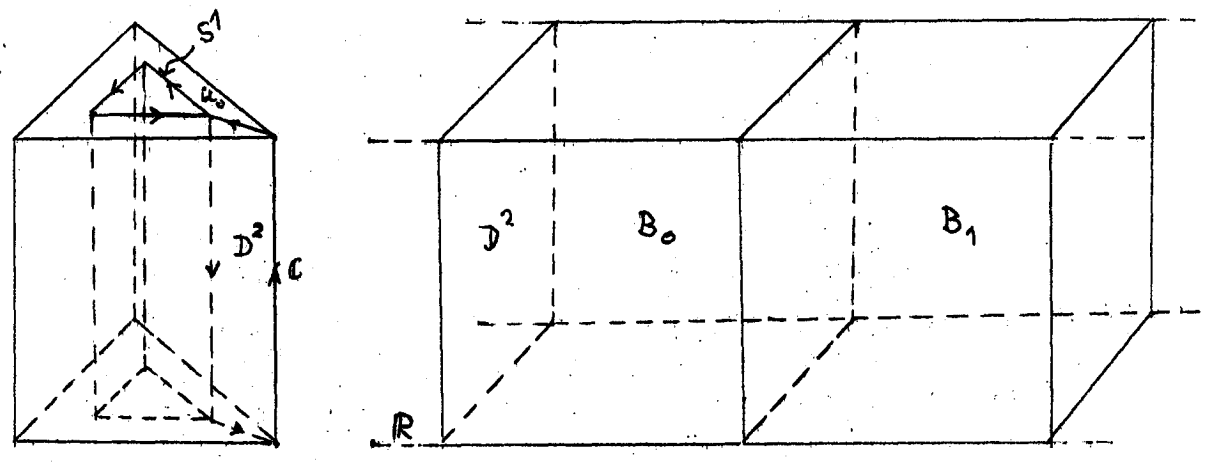


Fig.1

Verifica-se, sem dificuldade, que apesar de $R \times D^2$ ser um espaço não compacto, $R \times D^2$ é localmente uma variedade poliédrica.

De fato, fazendo-se um corte ao longo de $u_0 \times D^2$ obtém-se um bloco triangulado homeomorfo (topologicamente) a $I \times D^2$, $I = [0,1]$. Em seguida, emendam-se blocos igualmente triangulados, um após o outro, de modo a completar-se o espaço $R \times D^2$, que deste modo passa a ter, localmente, uma estrutura de variedade poliédrica.

Fixemos como zero-ésimo bloco B_0 a um bloco bem determinado de $R \times D^2$. O i-ésimo bloco B_i será o bloco deslocado de i unidades à direita do zero-ésimo bloco.

O estudo que faremos a seguir terá por base os espaços $S^1 \times D^2$ e $R \times D^2$. Em $R \times D^2$, repetimos, consideraremos sempre triangulações "periódicas" recobrindo triangulações de $S^1 \times D^2$. Fixemos um ponto x_o no interior de $S^1 \times D^2$ e tal que $x_o \notin u_o \times D^2$. Pomos $\tilde{x}_i = p^{-1}(x_o) \cap B_i$.

Para maior facilidade, desenharemos o espaço $S^1 \times D^2$ e os nós, considerados em $S^1 \times D^2$, curvilineamente.

Denotaremos por p a aplicação revestimento, que possui a seguinte propriedade:

"a aplicação $p: \tilde{X}, \tilde{x}_o \to X, x_o$, onde $\tilde{X}$ é um espaço revestimento de X e $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x_o)$, induz um monomorfismo $p : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_o) \to \pi(X, x_o)$" (Ver P.J. Hilton: Homology Theory 6.5.10, pg.251). Em palavras, qualquer laço com ponto base x_o em X, levanta-se univocamente em um caminho de $\tilde{X}$ com ponto inicial $\tilde{x}_o$; os laços com ponto base x_o, pertencentes a elementos de $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_o))$ levantam-se em laços com ponto base $\tilde{x}_o$.

No nosso caso, $\tilde{X} = R \times D^2$ é um espaço simplesmente conexo e, então, todo laço que se levanta em curvas fechadas em $R \times D^2$, é homotópico a zero em $S^1 \times D^2$.

No que segue vamos sempre supor que os nós estão contidos no interior de $S^1 \times D^2$ e que passam pelo ponto x_o.

As figuras abaixo ilustram exemplos de nós em $S^1 \times D^2$ bem como seus respectivos levantamentos no espaço revestimento universal $R^1 \times D^2$.

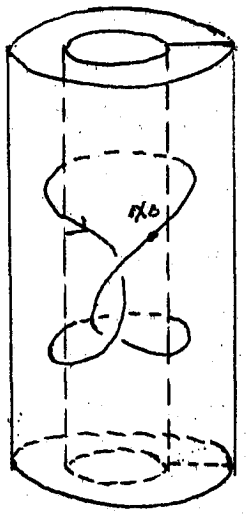


Fig.2

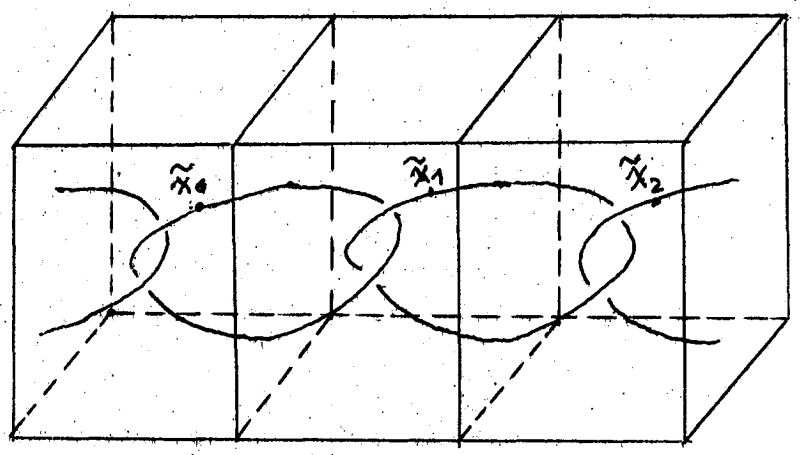


Fig.3

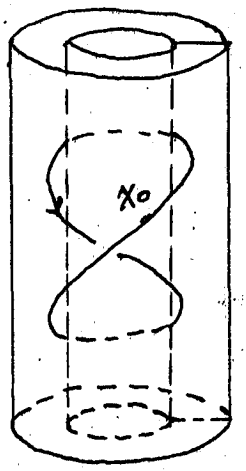


Fig.4

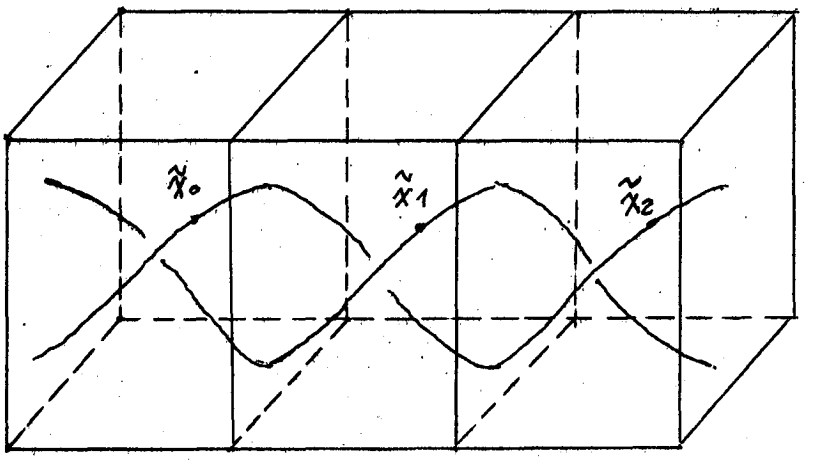


Fig.5

Fixado um ponto $x_0 \in K_1$ através de cada ponto de $p^{-1}(x_0)$ passa uma curva que recobre o nó K_1, sendo que uma é obtida da outra por translações paralelas a R.

Os levantamentos do nó K_1 da figura 2, são curvas fechadas, portanto K_1 é homotópico a zero em $S^1 \times D^2$, conforme a propriedade da aplicação de revestimento citada na página 50.

Entretanto, os levantamentos do nó K_2, figura 5, são curvas abertas. Intuitivamente, podemos observar que o nó K_2 não é homotópico a zero.

Logo, os nós K_1 e K_2 não podem ser equivalentes.

Mais geralmente, se K e K' representam elementos distintos de $\pi(S^1 \times D^2, *)$, então, não serão equivalentes.

Temos, portanto, um primeiro invariante para classificar os nós em $S^1 \times D^2$. É óbvio, porém, que dois nós

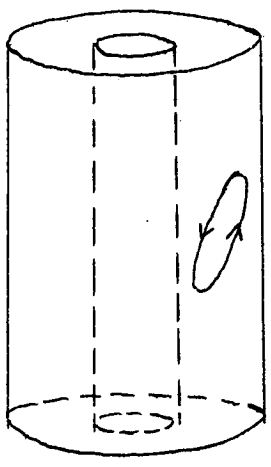


Fig.6

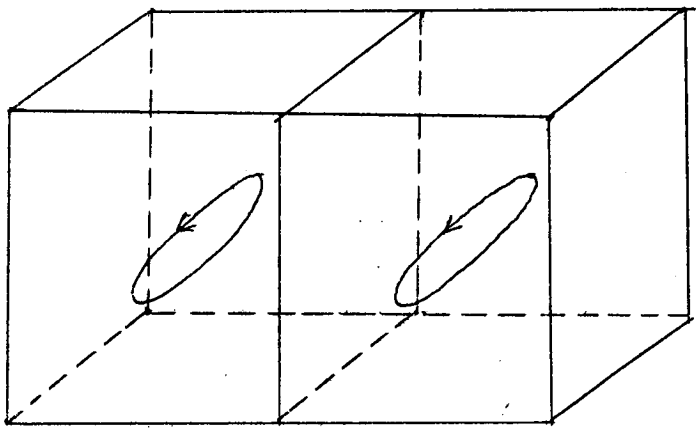


Fig.7

correspondentes a um mesmo elemento de $\pi(S^1 \times D^2, *)$ não serão necessariamente equivalentes entre si. De fato,

basta considerarmos os nós K_1 da figura 2 e K_3 da figura 6, ambos homotópicos a zero.

Basta observar que K_1 não é um nó pequeno, mas K_3 é.

(2.8) <u>Definição</u>: Um nó K em $R \times D^2$ é <u>trivial</u> se K é equivalente ao bordo de um triângulo da triangulação dada.

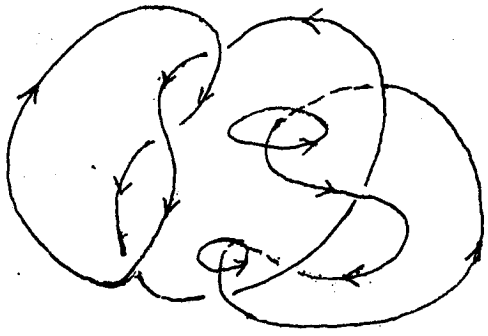
Baseados na definição (2.8) pode-se verificar que um levantamento isolado de K_1 ou de K_3 é um nó trivial em $R \times D^2$.

(2.9) <u>Definição</u>: Um nó K em $S^1 \times D^2$ é <u>trivial</u> se K fôr um nó pequeno cujo levantamento isolado é trivial em $R \times D^2$.

No artigo "A quick trip through knot theory" Topology of 3-manifolds and related topics, pg.140, R.M.Fox mostra que todo nó é bordo de uma superfície orientável.

Este fato nos permite fazer algumas considerações sobre o <u>número de entrelaçamento</u> de dois nós em $R \times D^2$. Para isto, consideremos dois nós orientados K_1 e K_2 sendo K_1 bordo de uma superfície orientada S, cuja orienta-

ção é coerente com a orientação de K_1.



Nos pontos em que K_2 atravessa a superfície S consideramos uma hélice dextrogira determinada pela orientação da superfície e da normal a S no ponto citado. Se a orientação de K_2 concordar com a orientação da normal atribuiremos o valor +1, caso contrário, -1. O número de entrelaçamentos do nó K_1 com o nó K_2 será a soma algébrica dos valores atribuídos. No caso da figura acima o número de entrelaçamentos é +2.

Uma definição precisa e sem necessidade da consideração da superfície orientável S pode ser encontrada em: [S, pg. 366].

Dado um nó K em $S^1 \times D^2$, denotaremos por K^1 o levantamento isolado de K em $R \times D^2$ que passa por $\tilde{x}_1$ e o denominaremos de i-ésimo levantamento do nó K.

No que segue consideraremos somente nós homotópicos a zero.

Posto isto, consideremos o seguinte nó K em $S^1 \times D^2$, cujo levantamento em $R \times D^2$ aparece na figura 8.

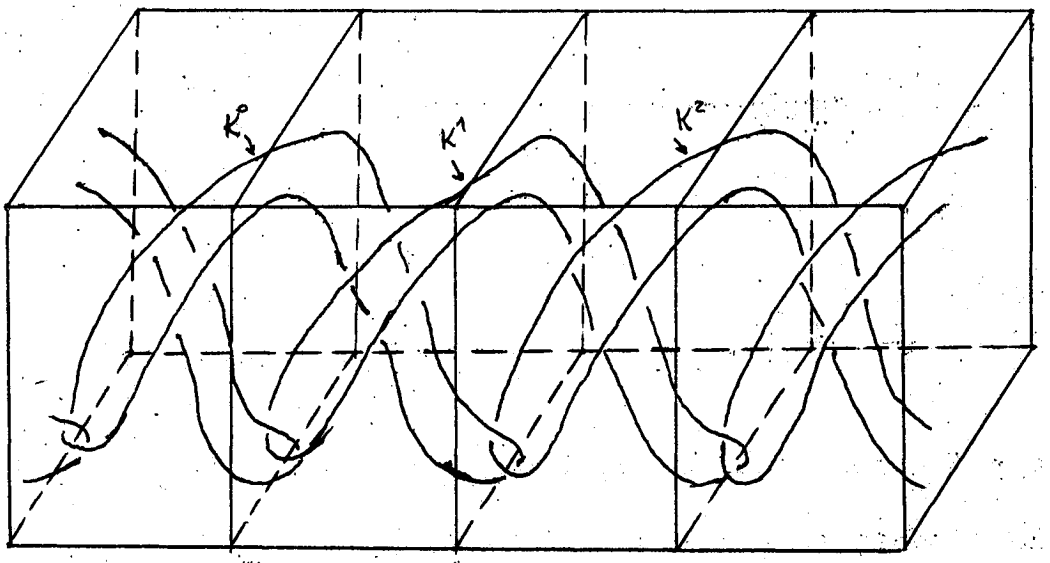


Fig.8

É fácil ver que o número de entrelaçamento de K^0 com K^i é zero de $i \neq 2$ e é $+1$ se $i = 2$. Já para o nó da figura 3, temos que o número de entrelaçamento de K_1^0 com K_1^1 é $+1$ e de K_1^0, com K_1^i é zero, para todo $i \neq 1$.

O fato acima nos sugere a construção de alguns invariantes de tipo de nó a partir dos entrelaçamentos dos levantamentos de um nó.

Antes, porém, consideremos o seguinte

(2.10) <u>Lema</u>: Se dois nós são equivalentes em $S^1 \times D^2$, segundo um homeomorfismo linear por partes h, então, existe um homeomorfismo linear por partes $\tilde{f}: R \times D^2, \tilde{x}_0 \to R \times D^2, \tilde{y}_0$, que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \times D^2, \tilde{x}_o \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & R \times D^2, \tilde{y}_o \arrow[d, "p"] \\
S^1 \times D^2, x_o \arrow[r, "h"'] & S^1 \times D^2, h(x_o)
\end{tikzcd}$$

onde p é a aplicação revestimento, e $\tilde{y}_o \in p^{-1}(h(x_o))$, levando o ponto base $\tilde{x}_o$ no ponto base $\tilde{y}_o$.

<u>Prova</u>: Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
R \times D^2, \tilde{x}_o \arrow[r, shift left, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & R \times D^2, \tilde{y}_o \arrow[l, shift left, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\
S^1 \times D^2, x_o \arrow[r, "h"'] & S^1 \times D^2, h(x_o)
\end{tikzcd}$$

onde, por construção $f = h \circ p$, $f(\tilde{x}_o) = h(p(\tilde{x}_o))$ e pelo teorema 16.3 [Hu, Homotopy Theory, pg. 90] temos que $\tilde{f}$ é o levantamento único de f tal que $p \circ \tilde{f} = f$, $\tilde{f}(\tilde{x}_o) = \tilde{y}_o$ uma vez que $f_*(\pi(R \times D^2, \tilde{x}_o)) \subset p_*(\pi(R \times D^2, \tilde{y}_o))$.

Ainda, pelo mesmo teorema 16.3, existe uma única aplicação $\tilde{g}: R \times D^2, \tilde{y}_o \to R \times D^2, \tilde{x}_o$ tal que $\tilde{g}(\tilde{y}_o) = \tilde{x}_o$, $p \circ \tilde{g} = g$ que levanta $g = h^{-1} \circ p$.

Mostremos, então, que

$\tilde{g} \circ \tilde{f} = 1_{R \times D^2, \tilde{x}_o}$ e $\tilde{f} \circ \tilde{g} = 1_{R \times D^2, \tilde{y}_o}$

De fato, basta aplicarmos, ainda, uma vez, o teorema 16.3 para

$$\begin{tikzcd} & R \times D^2, \tilde{x}_o \arrow[d, "p"] \\ R \times D^2, \tilde{x}_o \arrow[ur, "\tilde{g} \circ \tilde{f}"] \arrow[r, "p"'] & S^1 \times D^2, x_o \end{tikzcd}$$

pois, $(\tilde{g} \circ \tilde{f})(\tilde{x}_o) = \tilde{x}_o$ e $(p \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}))(\tilde{x}_o) = (p \circ \tilde{g})\tilde{f}(\tilde{x}_o) = g(\tilde{y}_o) = x_o$.

e $(p \circ (\tilde{g} \circ \tilde{f}))(\tilde{x}_o) = (p \circ \tilde{g})\tilde{f}(\tilde{x}_o) = g(\tilde{y}_o) = (h^{-1} \circ p)(\tilde{y}_o) = x_o$.

Isto nos mostra que $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ é um levantamento único de p. Como $I_{R \times D^2}$ também é um levantamento de p, concluimos que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = I_{R \times D^2}$

Analogamente, mostra-se que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = I_{R \times D^2}$

Portanto, $\tilde{f}$ é homeomorfismo linear por partes de $R \times D^2$ sobre $R \times D^2$ que levanta o homeomorfismo linear por partes $h: S^1 \times D^2 \to S^1 \times D^2$ e que torna equivalentes os nós de $R \times D^2$ que são levantamentos de nós equivalentes em $S^1 \times D^2$.

Consideremos as seguintes definições:

Um <u>entrelaçamento</u> L de multiplicidade μ é a união de μ 1-esferas poliédricas L_i orientadas, duas a duas disjuntas e imersas linearmente por partes em uma 3-variedade M^3.

Dois entrelaçamentos L e L' são <u>equivalentes</u> se e apenas se $\mu = \mu'$ e se existe um homeomorfismo linear por partes f de M^3 sobre M^3 que preserva a orientação tal que $fL_i = L'_i$ e $f|L_i$ também preserva a orientação, $i = 1,\ldots,\mu$.

Uma classe de equivalência de entrelaçamentos é um <u>tipo de entrelaçamento</u>.

Um nó é um entrelaçamento de multiplicidade $\mu = 1$.

Podemos, agora, construir alguns invariantes de tipo de nó, a partir do número de entrelaçamentos dos levantamentos de um nó K homotópico a zero.

Com efeito, sejam K um nó em $S^1 \times D^2$ e K^i o i-ésimo levantamento de K em $R \times D^2$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$

Denotemos por Λ_0 o tipo do nó K^0, por Λ_i, o tipo do entrelaçamento dos nós K^0 e K^i e por $\lambda_i = (K^0, K^i)$, o número de entrelaçamento entre K^0 e K^i, $i = 1,2,\ldots$; sem perda de generalidade, podemos considerar $\lambda_i \geq 0$.

Nos exemplos das figuras 3 e 8 temos, respectivamente,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = 0.$$

(2.11) <u>Teorema</u>: Se K é um nó em $S^1 \times D^2$, então,

a) existe um natural n_o tal que

$\forall r \in N,\ r > n_o,\ \lambda_r = 0$

b) o número $\lambda_i = (K^o, K^i)$ é um invariante de tipo de nó $(\forall i \in N)$ e $\lambda_i = (K^{o+s}, K^{i+s})(\forall s \in Z)$

c) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ não é um sistema completo de invariantes de tipo de nó.

<u>Prova</u>: a) segue imediatamente do fato que cada levantamento isolado do nó K é um conjunto compacto e cada bloco B^i é também compacto. Portanto, $\exists\ n_o \in N$ tal que $\forall r \in N, r > n_o$, existem duas bolas abertas em $R \times D^2$, uma contendo K^o e outra contendo K^r, disjuntas, o que acarreta que $\lambda_r = 0$.

b) Basta aplicarmos o lema (2.10) considerando-se o homeomorfismo linear por partes $\tilde{f}: R \times D^2, \tilde{x}_o \to R \times D^2, \tilde{y}_o$ para obtermos:

$\lambda_i = (K^o, K^i) = (\tilde{f}K^o, \tilde{f}K^i) = (K^{o+s}, K^{i+s})\ \forall i \in N, \forall s \in Z.$

c) Consideremos os nós cujos levantamentos são os das figuras 7 e 9.

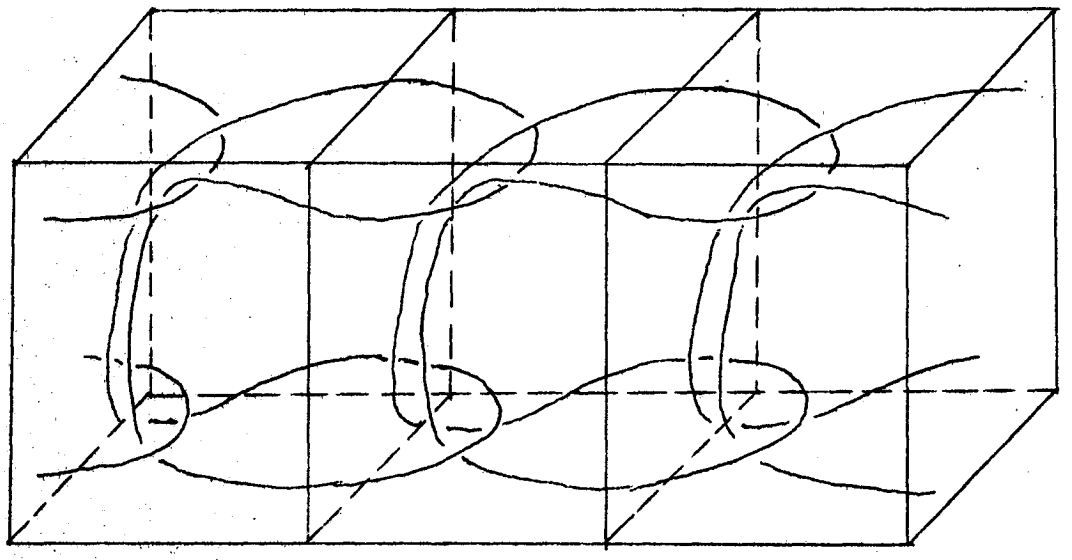


Fig. 9

É fácil ver que ambos os nós são homotópicos a zero em $S^1 \times D^2$, os entrelaçamentos são equivalentes e $\lambda_i = \lambda'_i = 0$, $i = 1,2,\ldots$ Entretanto, as partes do levantamento do nó da figura 6, são todas separáveis, ao passo que as partes do levantamento da figura 9, apesar de cada dois exemplares não serem entrelaçados, não se separam, o que mostra que os nós dados não são equivalentes em $S^1 \times D^2$. Portanto, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ não constitui um sistema completo de invariantes.

A parte c) do teorema anterior nos mostra um fenômeno típico do espaço $S^1 \times D^2$. Vê-se, então, que os invariantes λ_i são insuficientes. Além disso, um teorema análogo às partes a) e b) do teorema (2.11) subsiste pa

ra os Λ_i e, ainda, os exemplos das figuras 6 e 9 mostram que os Λ_i, apesar de muito mais fortes do que os λ_i, não constituem um sistema completo de invariantes.

Em trabalhos futuros pretendemos encontrar invariantes que reduzam, por completo, o problema dos nós no espaço $S^1 \times D^2$ a problemas do R^3.

Aplicação do Lema de Dehn

Sabemos que se K é um nó pequeno em $S^1 \times D^2$, então, K é homotópico a zero em $S^1 \times D^2$. A recíproca nem sempre é verdadeira, isto é, podemos ter nós homotópicos a zero em $S^1 \times D^2$, sem que sejam pequenos. O nó da figura 2 satisfaz esta condição.

O teorema (2.12) tem por objetivo dar uma condição que caracteriza os nós pequenos. Na demonstração de tal teorema usaremos o Lema de Dehn, cuja demonstração pode ser encontrada em Bull. Am. Mat. Soc. - A proof and extension of Dehn's lemma - por Arnold Shapiro e J.H.C. Whitehead - Vol. 64, nº 4, 1958, pg. 174.

Lema de Dehn: Se M é uma 3-variedade e $\psi : \Delta^2 \to M$ é uma aplicação linear por partes tal que $\psi(\dot{\Delta}^2)$ não possui auto-intersecções, então, existe $\bar{\psi} : \Delta^2 \to M$ linear por partes tal que $\bar{\psi}|\dot{\Delta}^2 = \psi$ e $\bar{\psi}(\Delta^2)$ é um disco que não

possui auto-intersecções.

Seja K um nó em $S^1 \times D^2$, T(K) uma vizinhança tubular aberta de K. Designemos por $\alpha \in \pi((S^1 \times D^2)-T(K),*) = \pi(K)$ a classe de homotopia, cujo laço representativo é o homeomorfismo linear por partes $\varphi : \dot{\Delta}^2 \to u_o \times C$, onde $C = \dot{D}^2$.

Então, temos o seguinte

(2.12) <u>Teorema</u>: $\alpha = 0$ em $\pi(K)$, se e somente se K é um nó pequeno.

<u>Prova</u>: Se $\alpha = [\varphi] = 0$, então φ é homotópica a uma aplicação constante e, então, pela proposição 1.2(2)pg.136 Topology - James Dugundji, φ tem uma "extensão" contínua $\phi: \Delta^2, \dot{\Delta}^2 \to S^1 \times D^2 - k, u_o \times C$ tal que $\phi | \dot{\Delta}^2 : \dot{\Delta}^2 \to u_o \times C$, $\phi | \dot{\Delta}^2 = \varphi$ e $\phi(\Delta^2)$ é um disco com eventuais auto-intersecções no seu interior (ver figura 10-b).

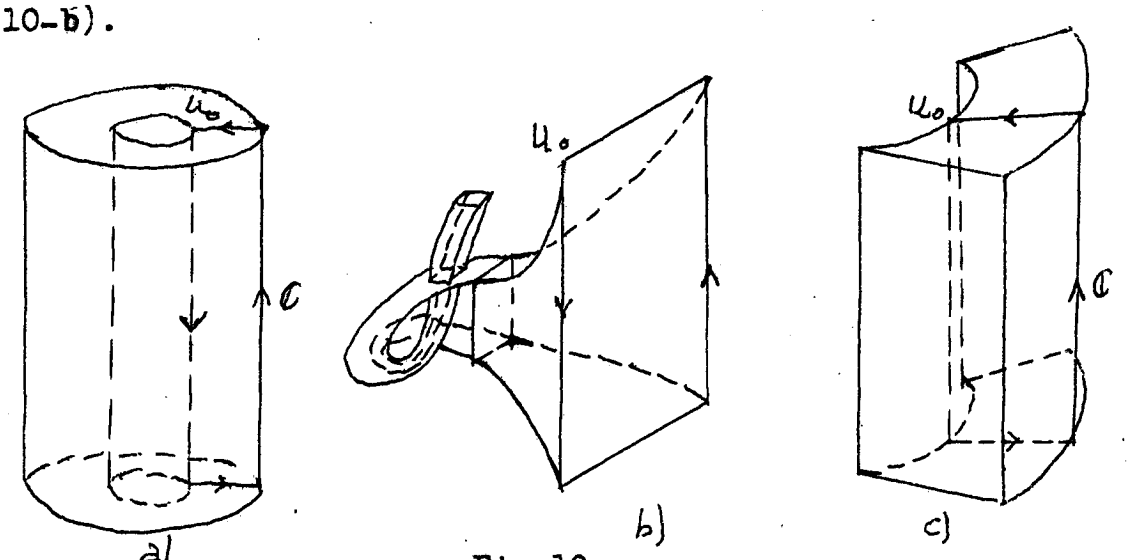


Fig.10

Pelo lema de Dehn, existe uma aplicação linear por partes $\psi : \Delta^2, \dot{\Delta}^2 \to S^1 \times D^2 - T(K), u_o \times C$, tal que $\psi | \dot{\Delta}^2 : \dot{\Delta}^2 \to u_o \times C$ é um homeomorfismo linear por partes e $\psi(\Delta^2)$ é um disco sem auto-intersecções, cujo bordo é $u_o \times C$.

Consideremos, agora, a n-subdivisão derivada de $S^1 \times D^2$, para n suficientemente grande, de modo que $\psi(\Delta^2)$ possua uma vizinhança derivada N que não intercepte o nó K. Então, por (0.63) N é uma vizinhança regular de $X = \psi(\Delta^2)$.

É fácil ver também que $N \cap \partial M$ é uma vizinhança regular de $X \cap \partial M$ em ∂M, isto é, N encontra o bordo regularmente e, então, pela proposição (0.66) $N \downarrow X \cup (N \cap \partial M) \downarrow X$.

Por outro lado, $\psi(\Delta^2)$ é um disco, portanto, colapsível e, então por (0.63) parte 3), N é uma 3-bola poliédrica.

Portanto, $S^1 \times D^2 - \mathring{N}$ é uma 3-bola poliédrica contendo K no seu interior. Logo, K é um nó pequeno.

Reciprocamente, se K é um nó pequeno em $S^1 \times D^2$, então, existe uma 3-bola poliédrica B, contida no interior de $S^1 \times D^2$, contendo K. É imediato que $\alpha \in \pi(S^1 \times D^2 - \mathring{B})$ é a classe nula. Então, $\alpha \in \pi(S^1 \times D^2 - T(K))$ é, ainda, a classe nula.

BIBLIOGRAFIA

[A] Alexander, J.W. - The combinatorial theory of complexes. Ann. Math. 30(1930), 292-320

[F] Fox, R.H. - Introduction to Knot Theory

[G] Leslie C. Glaser - Geometrical Combinatorial Topology. Vol. I. Van Nostrand R. Company.

[H] Hudson, J.F.P. - Piecewise Linear Topology W.A. Benjamin, Inc.

[P] Penrose, R., Whitehead, J.H.C. e Zeeman,E.C. Imbedding of manifolds in euclidean space. Ann. Math. 73 (1961, 613-623

[S] Seifert, H. e W. Threlfall - Lecciones de Topologia

[W] Whitehead, J.H.C. - A proof and extension of Dehn's lemma.
Bull. Am. Math. Soc. 64 (1958), 174-178.

_____ , Simplicial spaces, nuclei and m-groups.
Proc. London Math. Soc. 45 (1939), 243-327.

[Z] Zeeman, E.C. e Hudson, J.F.P. - On regular neighbourhoods.
Proc. Lond. Math. Soc. 3,43 (1964), 719-745

[Z_1] Zeenan, E.C. - Topology of 3-manifolds (Ed., M.K. Fort) Prentice Hall (1962)