UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Open Coloring Axiom e aplicações de colorações

Thales Sarinho Galvão Santos de Souza

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Thales Sarinho Galvão Santos de Souza

Open Coloring Axiom e aplicações de colorações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Maio de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S243o Sarinho Galvão Santos de Souza, Thales
Open Coloring Axiom e aplicações de colorações / Thales Sarinho Galvão Santos de Souza; orientador Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2023.
81 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Open Coloring Axiom. 2. Teoria dos Conjuntos. 3. Topologia. 4. Grafos. 5. Jogos Topológicos. I. Fiorini Aurichi, Leandro, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Thales Sarinho Galvão Santos de Souza

Open Coloring Axiom and coloring applications

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
May 2023

Este trabalho é dedicado aos meus pais
por sempre me incentivarem no caminho que escolhi e,
ao meu eterno parceiro, Loki.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são dedicados à minha família, meu orientador, amigos e professores que participaram de alguma forma na minha formação e na produção dessa dissertação.

Devo direcionar uma dose de gratidão especial para minha mãe, Luciana, meu pai, Davi, e minha querida segunda mãe, Ninha, por sempre me apoiarem ao longo de toda a minha trajetória acadêmica e, acima de tudo, por me amarem da forma que eu sou. Agradeço ao meu querido sobrinho Kauê, que apesar da pouca idade me proporcionou o refresco da sua companhia e brincadeiras que eu nem sabia precisar, especialmente nos momentos de dificuldade e dúvida. A minha psicóloga, Camila, que esteve comigo ao longo de cada problema e dificuldade que passei nos últimos anos. Agradeço também a minha professora, Maria do Carmo Carbinatto, pelo papel incrível que ela teve durante minha graduação e por todas as conversas, disponibilidade, compreensão e carinho com o qual me tratou. Ao meu orientador, Leandro Aurichi, dedico esse espaço para agradecer todo o suporte que ele me deu tanto ao longo da minha graduação quanto no meu mestrado, por pegar um aluno do segundo ano e transformar em alguém capaz de finalizar um trabalho de mestrado. Em especial, devo agradecer ao meu amigo, Ivan, que apesar da distância nunca deixou de me trazer histórias ótimas, pedidos inusitados e uma compreensão e empatia que ele mesmo não acredita ter. Finalmente, deixo os meus agradecimentos ao meu gato, Loki, cuja curta vida me proporcionou uma alegria imensa e uma força que eu não pensava ter quando me mudei para São Carlos para cursar matemática, o impacto da sua presença na minha vida e o amor que eu tive por ele ficarão comigo até o final da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), no processo de nº 2021/02478-1.

"Foi o melhor dos tempos, foi o pior dos tempos.
Foi a idade da sabedoria, foi a idade da tolice.
Foi a época da fé, foi a época da incredulidade.
Foi a estação da luz, foi a estação das trevas.
Foi a primavera da esperança, foi o inverno do desespero."
(Charles Dickens)

RESUMO

SOUZA, T. S. G. S. **Open Coloring Axiom e aplicações de colorações**. 2023. 81 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Esta dissertação explora o Open Coloring Axiom (OCA) e suas aplicações. Esse axioma foi introduzido por Todorčevíc e pode ser visto como uma propriedade parecida com o Teorema de Ramsey, mas para a topologia dos reais. O OCA afirma que para qualquer coloração aberta para $[S]^2$ com duas cores, existe um subconjunto S não enumerável dos reais tal que todos os seus pares tem cor 0, ou o S pode ser coberto por enumeráveis conjuntos cujos pares tem cor 1. Ao longo da dissertação, apresentamos aplicações para o OCA, as relações do OCA com outros axiomas e estudo de algumas possíveis formas de o generalizar. Também foi estudado técnicas de forcing com o intuito de provar que OCA é consistente com ZFC. Por fim, deixamos dois anexos que reúnem o estudo de grafos e o Teorema de Kuratowski, além da relação entre o CH e o Axioma de Luzin.

Palavras-chave: Modelo, Monografia de qualificação, Dissertação, Tese, Latex.

ABSTRACT

SOUZA, T. S. G. S. **Open Coloring Axiom and coloring applications**. 2023. 81 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

This dissertation explores the Open Coloring Axiom (OCA) and its applications. This axiom was introduced by Todorčevíc and it can be viewed as a two dimensional property of perfect sets. The OCA states that for every open coloring of $[S]^2$ with two colors, there exists an uncountable subset of S that all of its pairs have color 0, or else S can be covered by countably many sets that all of its pais have color 1. Throughout this dissertation, we present applications to the OCA, OCA's relationship with other axioms and we studied ways to generalize its statement. We also studied forcing techniques aiming to prove that OCA is consistent with ZFC. Finally, we present two attachments that gather results involving graphs and the Kuratowski Theorem, and the relationship between CH and Luzin's axiom.

Keywords: Template, Qualification monograph, Dissertation, Thesis, Latex.

LISTA DE SÍMBOLOS

ω — Conjunto dos números naturais

F_σ — Conjunto dos elementos que são união enumerável de conjuntos fechados

ω_1 — Ordinal que representa o primeiro conjunto não enumerável

$\mathfrak{c}$ — Cardinal que representa o continuum

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é estudar o Open Coloring Axiom (OCA), proposto por Todorčević em (TODORCEVIC, 1989). O OCA é uma afirmação que se assemelha a uma generalização do Teorema de Ramsey mas para a topologia dos reais. Durante a dissertação iremos explicar o axioma em detalhe, demonstrar vários resultados que o envolvem, apresentar algumas relações interessantes do OCA com outros axiomas, além de usar tais relações para provar a independência do OCA em ZFC, iremos apresentar algumas possibilidades de generalizações e mostrar por que elas não funcionam. Outros tópicos foram estudados como pré requisitos para desenvolver certas ferramentas de Teoria dos Conjuntos para que pudéssemos nos aprofundar em diversos contextos que envolvem colorações, como o desenvolvimento do Forcing Próprio atráves de um jogo. A dissertação é dividida em 5 capítulos e dois apêndices, são eles:

- O primeiro capítulo trata-se dessa introdução;
- O segundo capítulo introduz o axioma e algumas notações e conceitos, assim como usa um pouco de topologia nos reais para apresentar resultados envolvendo o OCA;
- O terceiro capítulo foi dedicado ao estudo de técnicas de forcing, sobretudo a relação do forcing próprio usando jogos com o OCA;
- O quarto capítulo exploramos as várias relações do OCA com alguns outros axiomas de ZFC;
- O quinto capítulo mostramos algumas tentativas de generalizar o OCA para 3 dimensões e explicitamos a razão delas não funcionarem;
- O primeiro apêndice trata de grafos planares e sua relação com o Kuratowski.
- O segundo apêndice trata de explicitar a relação entre CH e uma versão do Axioma de Luzin.

CAPÍTULO

2

INTRODUÇÃO AO OCA

O objetivo deste capítulo inicial é introduzir o OCA e todas as definições necessárias para compreender o enunciado do axioma. Este capítulo foi fortemente baseado em (CAROTENUTO, 2013), o OCA pode ser visto como uma espécie de propriedade de conjunto perfeito para duas dimensões, isto é, dada uma coloração podemos garantir que existe um conjunto perfeito do mesmo tamanho do conjunto original cujos elementos tem a cor da coloração dada ou existe um conjunto do mesmo tamanho do conjunto original com a cor complementar. Um resultado básico de Teoria dos Conjuntos é que todo conjunto analítico é enumerável ou contém um subconjunto perfeito. Iremos demonstrar esse fato e mostrar que uma versão análoga pode ser feita para duas dimensões.

2.1 Preliminares

Antes de chegarmos nos resultados mais importantes, daremos algumas definições necessárias para o estudo do OCA. Usaremos vários resultados e notações clássicas de topologia e teoria dos conjuntos ao longo da dissertação, que podem ser encontrados em (AURICHI, 2021) e (KUNEN, 1980).

Definição 2.1.1. Seja X um espaço métrico separável e denote $[X]^2$ pela família de todos os pares não ordenados de X, isto é, $[X]^2 = \{\{x,y\} : x,y \in X \text{ e } x \neq y\}$.

O conjunto $[X]^2$ pode ser visto como a junção dos pares simétricos de X^2 retirando a diagonal, isto é, $[X]^2$ pode ser visto como os pares ordenados presentes em X^2 ao retirar a diagonal e todos os pares acima dela.

Definição 2.1.2. Dizemos que $K \subset [X]^2$ é aberto se para todo $\{x,y\} \in K$, existem vizinhanças U e V tais que $x \in U, y \in V$ e $\{\{x',y'\} : x' \in U, y' \in V\} \subset K$. Chamamos de coloração aberta de X qualquer subconjunto aberto de $[X]^2$.

Notação 2.1.3. Sejam $U,V \subset X$. Defina $U \otimes V = \{\{x,y\} : x \in U, y \in V\}$

Definição 2.1.4. Sejam X espaço métrico separável, $K \subset [X]^2$ e $Y \subset X$. Dizemos que Y é K-homogêneo se $[Y]^2 \subset K$, ou seja, qualquer par de elementos de $[Y]^2$ tem a cor de K. Também dizemos que Y é K-enumerável se $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \omega\}$, onde cada Y_n é $([X]^2 \setminus K)$-homogêneo.

Notação 2.1.5. Quando Y é $([X]^2 \setminus K)$-homogêneo, diremos apenas que Y é $X \setminus K$-homogêneo.

Exemplo 2.1.6. Vamos ilustrar com dois exemplos as colorações abertas de $\mathbb{R}$:

- Seja $n \in \omega$ e $n \neq 0$, defina $K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x - \frac{1}{n}\}$. O conjunto K_n é uma coloração aberta para $\mathbb{R}$ e é fácil ver que $\mathbb{R}$ é K_n-enumerável. De fato, sejam $n \in \omega$ e $x \in \mathbb{R}$, é claro que existe algum $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geq x - \frac{1}{n}$. Então, $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus K_n$, basta definir $Y_m \doteq \{(x,y) : y \geq x - \frac{1}{n}$, onde $|x - \frac{1}{n}| \geq m\}$ e temos $\mathbb{R} = \bigcup\{Y_m : m \in \omega\}$, onde cada Y_m é $\mathbb{R} \setminus K_n$-homogêneo.
- Defina $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x$ e para todo $n(y \neq x - \frac{1}{n})\}$. K é uma coloração aberta para $\mathbb{R}$, mas $\mathbb{R}$ não é K-enumerável. Na verdade, nesse caso os conjuntos $\mathbb{R} \setminus K$-homogêneo são sempre enumeráveis.

Vamos apresentar alguns resultados básicos que independem do OCA, no entanto, quando usados no contexto do OCA, tornam-se essenciais para demonstração dos resultados mais importantes. A próxima proposição se encarrega de nos mostrar algumas propriedades básicas sobre como subconjuntos de conjuntos K-enumeráveis e K-homogêneos se comportam:

Proposição 2.1.7. Sejam X espaço métrico separável e K uma coloração aberta para X. Os seguintes itens são válidos:

1. Seja $Y \subset X$. Se X é K-enumerável, então Y também é K-enumerável. (Alternativamente, se Y não é K-enumerável, então X também não é K-enumerável)
2. Se $\{X_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos K-enumeráveis de X, então $\bigcup_{n\in\omega} X_n$ é K-enumerável.

Demonstração. 1. Suponha que X é K-enumerável, ou seja, $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ tais que X_n são $X \setminus K$-homogêneos. Defina $Y_n \doteq X_n \cap Y$. Como $\bigcup_{n\in\omega} X_n = X$, temos $\bigcup_{n\in\omega} X_n \cap Y = X \cap Y$ e, consequentemente $\bigcup_{n\in\omega} Y_n = Y$. Como $X_n \cap Y \subset X_n$, podemos afirmar que $[Y_n]^2 \subset [X_n]^2 \subset X \setminus K$. Logo, Y é K-enumerável.

2. Sabemos que, para cada $n \in \omega$, $X_n = \bigcup_{m\in\omega} X_{n,m}$, onde $X_{n,m}$ é $X \setminus K$-homogêneo. Note que $\bigcup_{n\in\omega} X_n = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} X_{n,m}$ e $[\bigcup_{m\in\omega} X_{n,m}]^2 \subset X \setminus K$, isso mostra que $\bigcup_{m\in\omega} X_{n,m}$ é $X \setminus K$-homogêneo e, portanto, $\bigcup_{n\in\omega} X_n$ é K-enumerável. $\square$

Para finalizar essa seção, vamos introduzir formalmente o OCA. Para esse capítulo, caso não seja especificado, vamos considerar X espaço métrico separável e consideraremos conjunto perfeito um subconjunto de X não vazio, compacto e sem pontos isolados.

Axioma 2.1.1 (OCA$_P(X)$)**.** Para qualquer coloração aberta K de X, pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- X é K-enumerável
- Existe um subconjunto perfeito de $P \subset X$ que é K-homogêneo

Na próxima seção, conseguiremos mostrar em ZFC que a conclusão do axioma acima é válido para todo X conjunto analítico de um espaço separável e completamente metrizável.

Axioma 2.1.2 (OCA$_P$)**.** OCA$_P(X)$ vale para todo X espaço métrico separável.

Mais a frente, conseguiremos mostrar que a validade de uma versão do OCA é uma consequência do Axioma da Determinância (AD) e do Proper Forcing Axiom (PFA). Na verdade, o axioma vale para conjuntos onde AD e PFA falham, basta que enfraqueçamos um pouco as afirmações presente em OCA$_P(X)$. A seguinte versão será mais usada em contextos mais gerais:

Axioma 2.1.3 (OCA(X))**.** Para qualquer K coloração aberta de X, pelo menos uma das duas afirmações é verdadeira:

- X é K-enumerável;
- Existe um subconjunto $Z \subset X$ não enumerável e K-homogêneo.

Axioma 2.1.4 (OCA)**.** $OCA(X)$ vale para todo X espaço métrico separável.

2.2 Princípio da Coloração Aberta para conjuntos analíticos

Um dos motivos de considerarmos o OCA como um axioma natural para Teoria dos Conjuntos é a validade do seguinte *Princípio da Coloração Aberta* para conjuntos analíticos (consideraremos conjuntos analíticos como qualquer conjunto que é imagem contínua de ω^ω). Ao longo dessa seção, provaremos algumas propriedades importantes e o Teorema 2.2.6 resolverá a parte mais difícil do princípio, sua demonstração pode ser encontrada no final da seção.

Teorema 2.2.1 (Princípio da Coloração Aberta)**.** Seja X um conjunto analítico e K uma coloração aberta para X. Então umas das duas afirmações é verdadeira:

- X é K-enumerável;

- X contém um subconjunto perfeito K-homogêneo.

Antes de provarmos o teorema, precisaremos mostrar que as propriedades do OCA podem ser transportadas de um conjunto analítico para outro e, em seguida, mostraremos que vale o OCA_P para ω^ω.

O seguinte lema segue do fato de termos assumido que conjuntos perfeitos são compactos.

Lema 2.2.2. Sejam X e Y espaços topológicos. Se $P \subset X$ é subconjunto perfeito e $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua injetora em P, então $f[P]$ é perfeito em Y.

Demonstração. Como P é compacto, temos $f[P]$ compacto também. Suponha, por absurdo, que $f[P]$ tem ponto isolado $y \in f[P]$, onde $y = f(x)$. Então existe U aberto de Y tal que $U \cap f[P] = \{y\}$. Pela continuidade de f, temos $f^{-1}[U]$ aberto em X e, pela injetividade de f, temos $f^{-1}[U] \cap P = \{x\}$[1]. Dessa forma, P possui ponto isolado x, o que é absurdo.

Logo, $f[P]$ é subconjunto perfeito de Y. $\square$

Para mostrarmos que vale o OCA para imagens contínuas do ω^ω, é necessário que as propriedades do OCA sejam preservadas por funções contínuas, a próxima proposição trata justamente desse problema:

Proposição 2.2.3. Sejam X e Y espaços métricos. Se $\text{OCA}_P(X)$ vale e Y é imagem contínua de X, então $\text{OCA}_P(Y)$ vale.

Demonstração. Seja K uma coloração aberta para Y. Note que o conjunto

$$H = \{\{x,y\} : f(x) \neq f(y) \text{ e } \{f(x), f(y)\} \in K\}$$

é uma coloração aberta para X.

De fato, seja $\{x,y\} \in H$. Defina $U \doteq \{u \in X : f(u) = f(x)\}$ e $V \doteq \{v \in Y : f(v) = f(y)\}$. Claramente, $x \in U$ e $y \in V$. Note que $U \cap V = \emptyset$, caso contrário, existe $z \in U \cap V$ tal que $f(x) = f(z) = f(y)$ e já sabemos que o par $\{f(x), f(y)\} \notin K$, por definição, o que é absurdo, pois $\{x,y\} \in H$.

Como $\{f(x), f(y)\} \in K$, podemos garantir que se $u \in U$ e $v \in V$, temos $\{f(u), f(v)\} \in K$. Assim, temos $U \otimes V \subset H$. Portanto, H é aberto.

Agora, note que a imagem de um subconjunto H-homogêneo de X por f é subconjunto K-homogêneo de Y. De fato, se $A \subset X$ é H-homogêneo, pela definição de H, se $\{a,b\} \in H$, então $\{f(a), f(b)\} \in K$. Assim, $[f[A]]^2 \subset K$. O mesmo vale para subconjuntos $X \setminus H$-homogêneos.

Por hipótese, temos

[1] Se existisse outro $z \in f^{-1}[U] \cap P$, então $f(z) = y$ e, pela injetividade de f, teríamos $z = x$

- $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, onde cada X_n é $X \setminus H$-homogêneo;
- existe $P \subset X$ perfeito H-homogêneo.

Para o primeiro caso, note que $Y = f[X] = f[\bigcup_{n\in\omega} X_n] = \bigcup_{n\in\omega} f[X_n]$, e já sabemos que cada $f[X_n]$ é $Y \setminus K$-homogêneo.

Para o segundo caso, veja que se $a,b \in P$ são tais que $a \neq b$, como P é H-homogêneo, temos $\{a,b\} \in [P]^2 \subset H$ e, por definição, $f(a) \neq f(b)$. Logo, f é injetora em P. Dessa forma, pelo Lema 2.2.2, temos $f[P]$ perfeito em Y. $\square$

A proposição acima tem um papel muito importante para o estudo do OCA. Já sabemos que qualquer espaço topológico T_2 com bases enumeráveis (e, portanto, todo espaço métrico separável) possui uma bijeção com um subconjunto da reta real (mais especificamente, subconjunto de 2^ω). Portanto, ao mostrarmos que OCA para os reais é consistente com ZFC, cuja demonstração será vista no capítulo 4, usando a proposição anterior podemos mostrar que OCA para qualquer espaço métrico separável também é consistente com ZFC.

Agora, podemos restringir a demonstração do Teorema 2.2.1 ao conjunto ω^ω. Antes, vamos fixar a notação que utilizaremos daqui em diante:

Notação 2.2.4. Sejam $s,t \in \omega^n$, para algum $n \in \omega$. Defina

- $|t| = n$
- $[s] = \{f \in \omega^\omega : f|_n = s\}$
- $[s] \otimes [t] = \{(f,g) \in \omega^\omega \times \omega^\omega : (f \in [s] \text{ e } g \in [t]) \text{ ou } (f \in [t] \text{ e } g \in [t])\}$

Durante a demonstração, iremos usar a seguinte noção de árvore perfeita:

Definição 2.2.5. Uma árvore $T \subset \omega^{<\omega}$ é perfeita se para todo $t \in T$ existem $s_1 \supset t$ e $s_2 \supset t$, $s_1, s_2 \in T$ incomparáveis, i.e., $s_1 \not\supset s_2$ e $s_2 \not\supset s_1$.

Teorema 2.2.6 (ZFC)**.** $\mathrm{OCA}_P(\omega^\omega)$

Demonstração.

Seja K uma coloração aberta para ω^ω tal que ω^ω não é K-enumerável. Nosso objetivo é construir um subconjunto perfeito $P \subset \omega^\omega$ que seja K-homogêneo. Vamos construir uma árvore perfeita dentro de ω^ω utilizando algumas afirmações.

Afirmação 2.2.1. Se $s \in \omega^{<\omega}$ é tal que $[s]$ não é K-enumerável, então existe t extensão de s tal que $[t]$ não é K-enumerável.

Demonstração. Suponha que exista $s \in \omega^{<\omega}$ tal que a afirmação não vale, ou seja, para todo t extensão de s temos $[t]$ K-enumerável. Note que isso implica que $[s^\frown n]$ é K-enumerável, para todo $n \in \omega$, mas note que podemos escrever $[s] = \bigcup_{n\in\omega}[s^\frown n]$ e, portanto, pela Proposição 2.1.7 $[s]$ é K-enumerável, contradição. $\square$

Afirmação 2.2.2. Se $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $[s]$ não é K-enumerável, então existem t,u extensões incompatíveis de s tais que $[t],[u]$ não são K-enumeráveis

Demonstração. Já sabemos pela Afirmação 2.2.1 que existe pelo menos uma extensão t tal que $[t]$ não é K-enumerável. Vamos definir uma sequência de extensões de forma que $t_0 = s$ e t_n é extensão própria de t_{n-1}. Essa sequência é tal que cada $[t_n]$ não é K-enumerável, para todo $n \in \omega$.

Seja $f \in \omega^\omega$ o limite da sequência $(t_n)_n$. Suponha que para todo t,u extensões incompatíveis de s temos $[t]$ ou $[u]$ K-enumerável. Note que, pela Afirmação 2.2.1, existe algum t extensão de s tal que $[t]$ não é K-enumerável. Então, se u é uma extensão de s incompatível com t, por hipótese temos $[u]$ K-enumerável. Isso mostra que apenas as extensões que são compatíveis com t não são K-enumeráveis. Note que se $g \in [s]\setminus\{f\}$, então g é incompatível com todo elemento de $[t]$, caso contrário, g seria uma extensão de s compatível com algum elemento de $[t]$, ou seja, g seria limite da sequência e, portanto, $g = f$.

Dessa forma, sabemos que qualquer elemento de $[s]\setminus\{f\}$ é K-enumerável. Veja que a quantidade de elementos de $[s]\setminus\{f\}$ é igual a $|\omega^{<\omega}|$ e, portanto, é enumerável. Logo, $[s]\setminus\{f\}$ é união enumerável de conjuntos K-enumeráveis. Pela Proposição 2.1.7, temos $[s]\setminus\{f\}$ K-enumerável.

Em particular, mostramos que $[[s]\setminus\{f\}]^2 \subset \omega^\omega \setminus K$, como $\omega^\omega\setminus K$ é fechado e f é limite de sequência que pertence a $[s]\setminus\{f\}$, f pertence a $\omega^\omega\setminus K$. Assim, $[s] = [s]\setminus\{f\}\cup\{f\}$ é K-enumerável, o que é uma contradição. $\square$

A Afirmação 2.2.2 nos mostra que

$$T_K = \{s \in \omega^{<\omega} : [s] \text{ não é } K\text{-enumerável}\}$$

é uma subárvore perfeita para $\omega^{<\omega}$.

Com a definição dada, fica fácil de ver que a árvore T_K é perfeita. De fato, considere $s \in T_K$, então pela Afirmação 2.2.2, existem t,u extensões incompatíveis de s, onde $[t],[u]$ são não K-enumeráveis e, portanto, qualquer U aberto básico em torno de s contém, pelo menos, t e u. Logo, T_K não tem pontos isolados e é perfeita.

Finalmente, vamos mostrar a terceira e última afirmação necessária para demonstrar o teorema:

Afirmação 2.2.3. Para todo $s \in T_K$ existem $t,u \in T_K$ extensões incompatíveis de s tais que $[t]\otimes[u] \subset K$.

Demonstração. Como K é coloração aberta de ω^ω e $[T_K] \subset \omega^\omega$, K também é coloração aberta de $[T_K]$. Note que $[s] \cap (\omega^\omega \setminus [T_K])$ é K-enumerável. Por definição, $\omega^\omega \setminus [T_K] = \{t \in \omega^\omega : \exists x \in \omega^{<\omega} \setminus T_K$ tal que $s \in [x]$ e $[x]$ é K-enumerável$\}$, então para todo $u \in \omega^\omega \setminus [T_K]$ temos $[u]$ K-enumerável e, para cada $s \in T_K$, existe extensão t de s em $\omega^{<\omega} \setminus T_K$ tal que $[t]$ é K-enumerável pela própria definição do conjunto $[s] \cap (\omega^\omega \setminus T_K)$.[2]

Note que $[s] = [s] \cap (\omega^\omega \setminus [T_K]) \cup [s] \cap [T_K]$, e isso implica que se $[s] \cap [T_K]$ é K-enumerável, então $[s]$ seria união de dois conjuntos K-enumeráveis, ou seja, $[s]$ seria K-enumerável, contradição. Dessa forma, concluímos que $[s] \cap [T_K]$ não é K-enumerável em $[T_K]$.

Agora, suponha que existe $s \in T_K$ tal que se $t, u \in T_K$ são extensões incompatíveis de s, temos $[t] \otimes [u] \not\subset K$. Já sabemos que $[s] \cap [T_K]$ não é K-enumerável. Veja que

$$([t] \cap [T_K]) \otimes ([u] \cap [T_K]) = ([t] \otimes [u]) \cap ([T_K] \otimes [T_K])$$

Portanto, como $[T_K]$ é K-enumerável, então $[t] \cap [T_K], [u] \cap [T_K] \subset [T_K] \subset X \setminus K$. Logo, $([t] \otimes [u]) \cap ([T_K] \otimes [T_K]) \subset X \setminus K$. Note que isso é uma contradição, pois K é coloração aberta para $[T_K]$, então para todo U aberto de $[T_K]$ tal que $s \in U$, existem $t, u \in U$ extensões incompatíveis de s, com $t, u \in U$, tais que $[t] \cap [T_K], [u] \cap [T_K] \subset X \setminus K$, então $U \not\subset K$. Logo, $U \subset X \setminus K$ e isso implica que $[s] \cap [T_K] \subset X \setminus K$.

Agora, podemos construir uma árvore $T_P \subset T_K$ por indução. Considere $s_\emptyset = \emptyset \in T_P$, se $s_\delta \in T_P$ podemos usar a Afirmação 2.2.3 para escolher $p_0, p_1 \in T_K$ extensões incompatíveis de s_δ tais que $[p_0] \otimes [p_1] \in K$. Defina $s_{\delta^\frown i} \doteq p_i$ como elemento de T_P. Pela forma que construímos T_P, temos $P = [T_P]$ subconjunto perfeito de ω^ω e K-homogêneo. Dessa forma, concluímos a demonstração. $\square$

Juntando o último teorema com a Proposição 2.1.7 também provamos o Teorema 2.2.1. Além disso, o princípio nos dá um corolário interessante ao tomarmos uma coloração aberta esperta.

Corolário 2.2.7. Para todo conjunto analítico X, X é enumerável ou existe $P \subset X$ subconjunto perfeito não-enumerável.

Demonstração.

Seja $K = [X]^2$, claramente K é coloração aberta para X. Pelo Teorema 2.2.1, temos

- X é K-enumerável ou
- existe $P \subset X$ conjunto perfeito não enumerável e K-homogêneo.

[2] A intersecção garante que existe a extensão K-enumerável.

Note que X é K-enumerável se, e somente se, $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ tais que $[Y_n]^2 \subset X \setminus K$. No entanto, veja que $X \setminus K = \emptyset$, então para cada $n \in \omega$ temos $Y_n = \emptyset$ ou $Y_n = \{y_n\}$[3], para algum $y_n \in X$. Dessa forma, X é K-enumerável se, e somente se, $X = \emptyset$ ou $X = \bigcup_{n\in\omega}\{y_n\}$, ou seja, X é enumerável. □

2.3 Propriedades Básicas de colorações abertas de um conjunto métrico separável

Nosso objetivo agora é mostrar critérios para garantir que um conjunto X é K-enumerável, vamos fazer isso através do conceito de K-densidade que será apresentado ao longo dessa seção.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e K uma coloração aberta para $\mathbb{R}$. Note que se X é $(\mathbb{R}\setminus K)\cap X$-homogêneo, então $\overline{[X]^2} = [\overline{X}]^2$ é $\mathbb{R}\setminus K$-homogêneo[4], em outras palavras, se X tem a cor contrária a K, então o fecho dos pares não ordenados de X também tem essa cor. Usaremos esse argumento para mostrar a seguinte proposição:

Proposição 2.3.1. *X é K-enumerável se, e somente se, existe $Z \in F_\sigma(\mathbb{R})$ contendo X e K-enumerável.*

Demonstração.

Se X é K-enumerável, então $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ onde cada Y_n é $X\setminus K$-homogêneo. Como X é homogêneo para $(\mathbb{R}\setminus K)\cap X$, temos $[\overline{X}]^2 \subset \mathbb{R}\setminus K$, pelo argumento anterior. Então, como $\overline{X} = \bigcup_{n\in\omega}\overline{Y_n}$, onde cada $\overline{Y_n}$ é $\mathbb{R}\setminus K$-homogêneo, basta definir $Z \doteq \bigcup_{n\in\omega}\overline{Y_n}$, que é F_σ contendo X e $\mathbb{R}\setminus K$-homogêneo.

Reciprocamente, assuma que existe $Z \in F_\sigma(\mathbb{R})$ contendo X e K-enumerável. Pela Proposição 2.1.7, como $X \subset Z$, temos X K-enumerável. □

A proposição anterior fala da existência do Z na topologia usual dos reais, mas podemos refinar a topologia em $\mathbb{R}$ para uma nova topologia τ, onde $\mathbb{R}$ continua sendo um espaço métrico separável e Z é fechado. Utilizando τ, o fecho topológico de X dentro de Z pertence a $F_\sigma(\mathbb{R})$. Então, podemos reescrever a proposição anterior como:

Proposição 2.3.2. *X é K-enumerável se, e somente se, o fecho topológico de X com respeito a τ é K-enumerável.*

No geral, podemos generalizar a Proposição 2.3.2 para qualquer espaço métrico separável X com topologia (usual) τ, dada coloração aberta K existe, possivelmente, uma topologia $\overline{\tau}$ que

[3] Veja que se $Y_n = \{y_{n_1}, y_{n_2}\}$, então $[Y_n]^2 = \{y_{n_1}, y_{n_2}\} \neq \emptyset$ e essa afirmação vale sempre que Y_n tem mais do que 2 elementos.

[4] Como K é aberto, veja que X ser $(\mathbb{R}\setminus K)\cap X$-homogêneo implica que $[X]^2 \subset \mathbb{R}\setminus K$ e, por sua vez, implica em $\overline{[X]^2} \subset \overline{\mathbb{R}\setminus K} = \mathbb{R}\setminus K$, ou seja, X é $\mathbb{R}\setminus K$-homogêneo

contém τ compatível com a métrica de X. Normalmente, conseguimos achar a topologia $\overline{\tau}$ tal que X continua K-enumerável com respeito a τ se, e somente, se o completamento de X com respeito a $\overline{\tau}$ for K-enumerável. Em resumo, desde que tenhamos duas topologias relacionadas através de algumas condições, podemos avaliar se X é K-enumerável em uma topologia ao avaliar se o fecho topológico de X é K-enumerável na outra topologia.

As relações mencionadas acima nos levam a procurar novas topologias para o espaço métrico separável X que nos auxiliem a mostrar se X é K-enumerável, para uma dada coloração aberta K.

Proposição 2.3.3. Seja $S \subset 2^{\omega}$ e $K \subset [S]^2$. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:

1. Existe uma topologia que dá origem a uma métrica separável em S tal que K é aberto em $[S]^2$

2. Existem duas famílias de conjuntos Borel em 2^{ω} $\{A_n : n \in \omega\}$ e $\{B_n : n \in \omega\}$ tais que $K = \bigcup\{(A_n \cap S) \otimes (B_n \cap S) : n \in \omega\}$.

Demonstração.

Suponha que vale 1. Por definição de coloração aberta, para cada par $\{u, v\} \in K$, existem U, V abertos de S tais que $\{u, v\} \in U \otimes V \subset K$. Basta considerarmos os conjuntos de Borel $\{A_n : n \in \omega\}$ e $\{B_n : n \in \omega\}$ gerados, respectivamente, por $\mathscr{U} \doteq \{U \subset S : u \in U \text{ e } \{u, x\} \in K\}$ e $\mathscr{V} \doteq \{V \subset S : v \in V \text{ e } \{x, v\} \in K\}$. Dessa forma, podemos escrever $K = \bigcup\{U \otimes V : U \in \mathscr{U}$ e $V \in \mathscr{V}\} = \bigcup_{n \in \omega}\{(A_n \cap U) \otimes (B_n \otimes V) : U \in \mathscr{U} \text{ e } V \in \mathscr{V}\}$.

Reciprocamente, suponha que $S \subset 4^{\omega}$, vamos definir uma base para uma topologia τ, de forma que τ dá origem a uma métrica separável em S. Considere a seguinte base $\{N_{\sigma} : \sigma \in 4^{<\omega}\}$, dada por:

- $N_{\emptyset} = S$

- Se σ tem tamanho par $2n$, para algum n:

$$N_{\sigma^\frown 0} = N_{\sigma} \cap A_n;$$

$$N_{\sigma^\frown 1} = N_{\sigma} \cap (S \setminus A_n);$$

$$N_{\sigma^\frown 2} = N_{\sigma} \cap B_n;$$

$$N_{\sigma^\frown 3} = N_{\sigma} \cap (S \setminus B_n).$$

- Se σ tem tamanho ímpar $2n+1$, para algum n:

$$N_{\sigma^\frown i} = N_{\sigma} \cap [< \sigma(2j) : j \leq \frac{n}{2} >^\frown i]$$

Pela forma que τ foi construída, a topologia dá origem a uma métrica separável em S. Além disso, A_n e B_n são abertos e fechados. De fato, para cada ponto $x \in A_n$, existe $\sigma \in 4^{<\omega}$ tal que $x \in N_\sigma \subset A_n$, da mesma forma que vale essa afirmação para $B_n, S \setminus A_n$ e $S \setminus B_n$, logo, cada um desses conjuntos é aberto em τ. Isso implica que K é coloração aberta de S, já que $K = \bigcup\{(A_n \cap S) \otimes (B_n \cap S) : n \in \omega\}$. □

Agora, vamos estudar uma generalização de ponto de acumulação para colorações abertas e uma propriedade para avaliar se um conjunto é K-enumerável.

Definição 2.3.4. Seja K coloração aberta de um espaço métrico separável X. Dizemos que $x \in X$ é ponto de K-acumulação se para qualquer vizinhança aberta U de x, $\{y \in X : \{x,y\} \in K\} \cap U$ não é K-enumerável.[5]

Notação 2.3.5. Denotamos por $K(x) \doteq \{y \in X : \{x,y\} \in K\}$, onde $x \in X$.

Proposição 2.3.6 (Propriedade de K-densidade)**.** Sejam K coloração aberta de $\mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é K-enumerável;

2. $A_X = \{y \in X : y$ é ponto de K-acumulação para $X\}$ é K-enumerável.

Demonstração.

Suponha que X é K-enumerável. Como $A_X \subset X$ e X é K-enumerável, pela Proposição 2.1.7, A_X é K-enumerável.

Reciprocamente, suponha que X não é K-enumerável e A_X é K-enumerável. Como $X = (X \setminus A_X) \cup A_X$, é necessário que $B_X \doteq (X \setminus A_X)$ não seja K-enumerável, caso contrário, X seria união de dois conjuntos K-enumeráveis, e por sua vez implicaria que o próprio X seria K-enumerável. Claramente, temos $B_X = \{y \in X : y$ não é ponto de K-acumulação para $X\}$.

Como $x \in B_X$ não é ponto de K-acumulação, então existe $U \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $K(x) \cap U \cap X$ é K-enumerável. Assim, existe $n_x \in \omega$ tal que $[x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}] \cap K(x) \cap X$ é K-enumerável. Assim, para cada $x \in B_X$, existe n_x inteiro que satisfaz $[x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}] \cap K(x) \cap X$, dessa forma, defina $A_n \doteq \{x \in B_X : n_x = n\}$, para todo $n \in \omega$.

Afirmação 2.3.1. Para todo $n \in \omega$ e todo (a,b) intervalo aberto tal que $|b-a| < \frac{1}{2n}$, o conjunto $(a,b) \cap A_n$ é K-enumerável.

Demonstração.

[5] A definição quer dizer que um ponto x é de K-acumulação se qualquer vizinhança de x quando interceptada pelo conjunto de todos os possíveis pares de x em K, não é K-enumerável.

Note que se para algum $n \in \omega$, temos $A_n = \emptyset$, afirmação é verdadeira já que $(a,b) \cap A_n = \emptyset$ é K-enumerável.

Veja também que:

1. O conjunto $(a,b) \cap K(x) \cap X$ é K-enumerável para todo $x \in A_n \cap (a,b)$, pois $(a,b) \cap K(x) \cap X \subset [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap K(x) \cap X$ que é K-enumerável e, novamente pela Proposição 2.1.7, o conjunto inicial é K-enumerável.

2. Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ denso[6] em $(a,b) \cap A_n$. Se $y \in K(x)$, para algum $x \in A_n \cap (a,b)$. Como K é aberto, existem U, V abertos tais que $x \in U, y \in V$ e $U \otimes V \subset K$, também podemos assumir que $U \subset (a,b)$. Claramente, $\{y\} \subset V$ e, portanto, $\{y\} \otimes U \subset K$. Como $\{x_n : n \in \omega\}$ é denso, existe $n_0 \in \omega$ tal que x_{n_0}, então $\{y, x_{n_0}\} \in K$, logo, $y \in K(x_{n_0})$. Portanto, para todo $x \in A_n \cap (a,b)$, temos
$$K(x) \subset \bigcup_{n \in \omega} K(x_n).$$

3. Para todo $n \in \omega$ o conjunto $Z_n = ((a,b) \cap A_n) \setminus \bigcup \{K(y) : y \in (a,b) \cap A_n\}$ é homogêneo para $X \setminus K$, por definição. De fato, basta notar que Z_n é o conjunto $(a,b) \setminus A_n$ retirando desse conjunto os pontos que formam pares não ordenados de K.

Por 3, para mostrar a afirmação, basta mostrar que o conjunto

$$A = \bigcup \{K(y) : y \in (a,b) \cap A_n\} \cap (a,b) \cap A_n$$

é K-enumerável.

Se $y \in (a,b) \cap A_n$, então por 2, $K(y) \subset \bigcup_{n \in \omega} K(x_n)$, então

$$\bigcup_{y \in (a,b) \cap A_n} K(y) \cap A_n \cap (a,b) \subset \bigcup_{n \in \omega} K(x_n) \cap A_n \cap (a,b)$$

Por 1, sabemos que para todo $n \in \omega$, $K(x_n) \cap A_n \cap (a,b)$. Logo, $\bigcup_{n \in \omega} K(x_n) \cap A_n \cap (a,b)$ é união enumerável de conjuntos K-enumerável.

Finalmente,

$$(a,b) \cap A_n = (a,b) \cap A_n \setminus \bigcup \{K(y) : y \in (a,b) \cap A_n\} \cup \{K(y) : y \in (a,b) \cap A_n\} \cap A_n \cap (a,b)$$

é K-enumerável, pois cada parcela também é. □

Pela afirmação, cada A_n é K-enumerável, pois o conjunto pode ser expressado como união enumerável de conjuntos K-enumeráveis da forma $I \cap A_n$, onde I é um intervalo racional de diâmetro menor do que $\frac{1}{2n}$.

[6] Por exemplo $\mathbb{Q} \cap (a,b) \cap A_n$.

Veja que $B_X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ e, portanto, é união enumerável de conjuntos K-enumeráveis. Logo, B_X é K-enumerável, o que implica que $X = A_X \cup B_X$ também é, o que é uma contradição. □

2.4 Alguns resultados envolvendo o OCA

Nesta seção vamos apresentar algumas aplicações simples para o OCA, mas com consequências bem interessantes para os reais. Essas aplicações exemplificam o poder que o OCA tem ao olharmos para que relações formam uma coloração aberta para o nosso conjunto.

O conjunto $\mathscr{P}(\omega)$ é não enumerável (de tamanho $\mathfrak{c}$) e pode ser visto como o conjunto das funções $f : \omega \longrightarrow \{0,1\}$. A inclusão é uma relação bastante comum de considerarmos e o OCA pode nos dar resultados sobre ela. Por exemplo, podemos mostrar que existe uma cadeia não enumerável dentro de $\mathscr{P}(\omega)$. Basta ver que é suficiente mostrar que existe uma cadeia dentro dos subconjuntos de racionais ($\mathscr{P}(\mathbb{Q})$). Defina, para cada $r \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_x = \{p \in \mathbb{Q} : p < x\}$. Usando a ordem herdada de $\mathbb{R}$, o conjunto $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} A_x$ é uma cadeia não enumerável dentro de $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Podemos generalizar esse resultado ao usarmos o OCA, como mostraremos a seguir:

Proposição 2.4.1. Se vale OCA, então:

a Todo subconjunto não enumerável de $\mathscr{P}(\omega)$ contém uma cadeia não enumerável ou uma anticadeia não enumerável;

b Toda função que mapeia um conjunto não enumerável dos reais nos reais é monótona em algum conjunto não enumerável;

c Se X e Y são dois conjuntos não enumeráveis dos reais, então existe um mapa estritamente crescente de um conjunto não enumerável de X em Y.

Demonstração. Para demonstrar o item a, consideraremos os elementos de $\mathscr{P}(\omega)$ como funções de ω para $\{0,1\}$, onde $f \not\subset g$ implica que existe $n \in \omega$ tal que $f(n) = 1$ e $g(n) = 0$, para $f, g \in \mathscr{P}(\omega)$[7]. Agora, considere $K_0 = \{\{f,g\} \in \mathscr{P}(\omega) : f \not\subset g \text{ ou } g \not\subset f\}$. Vamos mostrar que K_0 é coloração aberta. De fato, seja $\{f,g\} \in K_0$. Sem perda de generalidade, suponha que $f \not\subset g$. Então, existe $n \in \omega$ tal que $f(n) = 1$ e $g(n) = 0$, defina os abertos $U = \pi_n^{-1}[1]$ e $V = \pi_n^{-1}[0]$. Claramente, $f \in U$, $g \in V$ e qualquer $\{a,b\} \in U \otimes V$ é tal que $a \not\subset b$ ou $b \not\subset a$. Portanto, $U \otimes V \subset K_0$ e concluímos que K_0 é coloração aberta.

Defina $K_1 = \mathscr{P}(\omega) \setminus K_0$, temos a partição $[\mathscr{P}(\omega)]^2 = K_0 \cup K_1$. Suponha que vale o OCA. Separemos em casos:

[7] Isso significa que se $g \not\subset f$, então existe $m \in \omega$ tal que $g(m) = 1$ e $f(m) = 0$, o que significa que m e n são necessariamente diferentes.

Caso 1. Se existe $X \subset \mathscr{P}(\omega)$ não enumerável e K_0-homogêneo, então para quaisquer dois elementos $f, g \in X$, como $\{f, g\} \in [X]^2 \subset K_0$, concluímos que $f \not\subset g$ ou $g \not\subset f$. Logo, X é uma cadeia não enumerável para $\mathscr{P}(\omega)$.

Caso 2. Suponha que $\mathscr{P}(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ tal que todo X_n é K_1-homogêneo. Pelo princípio da casa dos pombos, existe $n \in \omega$ tal que X_n é não enumerável. Note que quaisquer dois elementos $f, g \in X_n$ são tais que $f \subset g$. Portanto, X_n é uma cadeia não enumerável para $\mathscr{P}(\omega)$.

Para demonstrar b, considere $A \subset \mathbb{R}$ subconjunto não enumerável dos reais e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é constante é algum subconjunto não enumerável de A, acabamos. Então, suponha que f não é constante em nenhum subconjunto não enumerável de A.

Sem perda de generalidade, assuma que f é bijetora. Iremos particionar o conjunto dos racionais em dois subconjuntos disjuntos Q_1 e Q_2, onde cada um é denso em $\mathbb{Q}$. Agora, defina para cada $r \in A$, o conjunto

$$x_r = \{q \in Q_1 : r \leq q\} \cup \{q \in Q_2 : f(r) \leq q\}$$

Suponha que $r, s \in A$ e $r < s$. Se x_r e x_s são comparáveis, então $x_r \subset x_s$ e, consequentemente, $f(r) \leq f(s)$. Se x_r e x_s são incomparáveis, temos $f(s) < f(r)$. Suponha que vale a, temos dois casos

Caso 1. Suponha que exista uma anticadeia não enumerável A' em $\{x_r : r \in A\} \subset \mathscr{P}(\omega)$. Então, para todo $x_r, x_s \in A'$ tais que $r < s$, temos $f(r) > f(s)$. Logo, f é decrescente.

Caso 2. Suponha que exista uma cadeia não enumerável A' em $\{x_r : r \in A\} \subset \mathscr{P}(\omega)$. Então, para todo $x_r, x_s \in A'$ tais que $r < s$, temos $f(r) \leq f(s)$. Logo, f é crescente.

Para demonstrar c, iremos demonstrar uma afirmação mais fraca e depois usar b para mostrar o que precisamos.

Afirmação 2.4.1. Se X é um conjunto não enumerável dos reais, então existe um mapa estritamente crescente de um conjunto não enumerável de X em $\mathbb{R}$.

Demonstração.

Considere $S = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in [X \times \mathbb{R}]^2 \subset [\mathbb{R}]^2\}$. Veja que o conjunto $K_0 = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in [X \times \mathbb{R}]^2 : (x_1 < x_2 \text{ e } y_1 < y_2) \text{ ou } x_2 < x_1 \text{ e } y_2 < y_1)\}$ é uma coloração aberta para $[X \times \mathbb{R}]^2$. Definindo o conjunto $K_1 = (X \times \mathbb{R}) \setminus K_0 = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in [X \times \mathbb{R}]^2 : (x_1 \geq x_2 \text{ e } y_2 \geq y_1) \text{ ou } (x_2 < x_1 \text{ e } y_1 \geq y_2)\}$, temos $S = K_0 \cup K_1$. Suponha que vale OCA, temos dois casos:

Caso 1. Suponha que exista $A \subset X \times \mathbb{R}$ não enumerável e K_0-homogêneo. Note que a projeção de A na primeira coordenada, é um subconjunto não enumerável de X, denotaremos tal conjunto por $\pi_1(A)$. Agora, defina a função $f : \pi_1(A) \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = y$ e $(x, y) \in A$.

A função f está bem definida. De fato, para cada $x \in \pi_1(A)$ existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \in A$. Se existisse $z \in \mathbb{R}$ tal que $(x,z) \in A$, então o par $\{(x,y),(x,z)\} \in [A]^2 \subset K_0$ teria que ser satisfazer $x < x$, contradição.

Claramente, f é estritamente crescente. Basta ver que se $x_1 < x_2$, então $\{(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))\} \in [A]^2$ e esse par satisfaz $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$.

Caso 2. Suponha que $S = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ tal que todo A_n é K_1-homogêneo. Para esse caso, vamos supor que estamos considerando, sem perda de generalidade, os reais positivos diferentes de 0 como contradomínio. Novamente, é necessário existir $n \in \omega$ tal que A_n é não enumerável. Considere $\pi_1(A_n)$ definida de forma análoga ao Caso 1. Defina a função $g : \pi_1(A_n) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, com $g(x) = \dfrac{1}{y}$.

Note que podemos retirar de A_n todos os pares (x_2,y_2), onde $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\} \in [A_n]^2$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $y_2 = y_1$ ou $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Após retirar esses elementos, A_n ainda é não enumerável. Podemos repetir o mesmo argumento usado no Caso 1, para garantir que g está bem definida.

Também garantimos que g é estritamente crescente. Veja que se $x_1 < x_2$, então $y_2 < y_1$ o que significa que $\dfrac{1}{y_1} < \dfrac{1}{y_2}$ e, portanto, $f(x_1) < f(x_2)$. □

Agora, como o Y é não enumerável, existe uma bijeção g entre Y e os $\mathbb{R}$ e, pelo item b, sabemos que g é monótona. Se g é crescente, então a função $g \circ f : X \longrightarrow Y$, onde f é definida como no segundo caso da afirmação, a composição das duas funções é estritamente crescente. Se g é decrescente, podemos definir a função $h : X \longrightarrow Y$ tal que $h(x) = g(\dfrac{1}{f(x)})$ que é estritamente crescente. □

Agora, vamos apresentar uma aplicação do OCA no estudo de espaços topológicos enumeravelmente compactos[8].

Definição 2.4.2. Dizemos que um espaço topológico X é completamente normal se, para quaisquer subconjuntos $A, B \subset X$ separados[9] existem conjuntos abertos disjuntos que contém A e B, respectivamente.

Um espaço topológico completamente normal é chamado T_5 quando é Hausdorff. Algumas propriedades interessantes de espaços T_5 quando assumimos PFA, podemos mostrar que todo espaço T_5 é sequencialmente compacto, na verdade, todo subconjunto enumerável de um

[8] Dizemos que um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se para qualquer cobertura enumerável de X existe subcobertura finita de X.

[9] Dizemos que dois conjuntos são separados se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$. (o fecho de A não encosta em B e o fecho de B não encosta em A.

espaço T_5 possui fecho compacto e Fréchet-Urysohn[10]. Em particular, decorre desse último fato que um subespaço separável tem cardinalidade, no máximo, 2^ω. Uma outra consequência é uma versão do Teorema de Tychonoff para espaços enumeravelmente compactos, o teorema a seguir não é demonstrado aqui mas pode ser encontrado na referência (NYKOS, 1992).

Teorema 2.4.3. Suponha que vale PFA, então o produto qualquer de espaços enumeravelmente compactos T_5 é enumeravelmente compacto (não conseguimos garantir, necessariamente, que esse produto será T_5).

A maior aplicação do OCA nesse cenário é mostrar que os espaços $\gamma\omega$ não podem ser completamente normais. Usaremos a seguinte definição $\gamma\omega$:

Definição 2.4.4. Denotaremos por $\gamma\omega$ espaços localmente compactos e Hausdorff com subconjunto denso e enumerável de pontos isolados. Identificaremos tal conjunto por ω de forma que $X \setminus \omega$ seja homeomorfo a ω_1. Também identificaremos $X \setminus \omega$ por uma versão de ω_1 disjunta de ω.

Agora, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.5. Se vale OCA, nenhuma versão de $\gamma\omega$ pode ser completamente normal.

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que $\gamma\omega$ é completamente normal. Dividiremos a demonstração numa série de afirmações:

Afirmação 2.4.2. Para cada $\alpha < \omega_1$, existe $a_\alpha \subset \omega$ tal que $a_\alpha \cup [0,\alpha]$ é vizinhança compacta de $[0,\alpha]$.

Demonstração. Como $\gamma\omega$ é localmente compacto, para cada ponto $x \in \gamma\omega$, existe V_x aberto de $\gamma\omega$ tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x}$ e $\overline{V_x}$ é compacto. Como o espaço é completamente normal e $[\alpha+1,\omega_1)$ é fechado, podemos tomar $\overline{V_x} \cap (\alpha+1,\omega_1) = \emptyset$ e isso implica que para todo $A \subset \gamma\omega$, temos $\bigcup_{x\in A} \overline{V_x} \cap (\alpha+1,\omega_1) = \emptyset$. Agora, note que $\{V_x : x \in [0,\alpha]\}$ é cobertura de abertos para $[0,\alpha]$ (que é compacto), logo existe uma subcorbertura finita de abertos dada por $\{V_{x_i} : i \in \{1,...,n\}\}$, para algum $n \in \omega$.

Claramente, $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_{x_i}}$ é compacto, pois é união finita de compactos. Além disso, $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_{x_i}} \cap (\alpha+1,\omega) = \emptyset$, já que estamos considerando $\omega \cap \omega_1 = \emptyset$. Então defina $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_{x_i}} \cap \omega \doteq a_\alpha$ e note que a_α é fechado dentro de compacto e, portanto, é compacto. Logo, $a_\alpha \cup [0,a_\alpha]$ é vizinhança compacta de $[0,\alpha]$. $\square$

Afirmação 2.4.3. $a_\alpha \subset_*$[11] a_β e $a_\beta \setminus a_\alpha \subset_* U$, para todo U vizinhança de $[\alpha,\beta)$.

[10] Dizemos que um espaço X é Fréchet-Urysohn se para qualquer ponto x pertencente ao fecho de um subconjunto A, existe uma sequência de A convergindo para x.

[11] Consideramos $\subset_*$ como a relação de inclusão com exceção de finitos pontos.

Demonstração. Suponha que $a_\alpha \setminus a_\beta$ é infinito. Então existe $x \in a_\alpha$ ponto de acumulação. Note que $a_\alpha \setminus a_\beta \subset a_\alpha \cup [0,\alpha]$ e isso implica que $a_\alpha \cup [0,\alpha]$ é vizinhança para x. Mais ainda, como $a_\beta \cup [0,\beta]$ é vizinhança que contém a_β, temos $x \in a_\beta \cup [0,\beta]$ e já que a_α e a_β são conjuntos de pontos isolados, temos $x \in [0,\beta]$. Dessa forma, $x \in a_\alpha \setminus a_\beta \cap (a_\beta \cup [0,\beta]) = \emptyset$, o que é uma contradição. Logo, $a_\alpha \setminus a_\beta$ é finito.

Seja U vizinhança de $[\alpha,\beta)$ e suponha que $(a_\beta \setminus a_\alpha) \setminus U$ é infinito. Dessa forma, existe $x \in (a_\beta \setminus a_\alpha) \setminus U$ ponto de acumulação. Note que $a_\alpha \cup [0,\alpha]$ é vizinhança de x e $(a_\beta \setminus a_\alpha) \setminus U \cap (a_\alpha \cup [0,\alpha]) = \emptyset$ mas x é elemento dessa intersecção, contradição. □

Agora, considere S o conjunto de todas as triplas (a_ξ, a_η, a_μ), onde $\xi < \eta < \mu$, e defina a seguinte partição:

$$[S]^2 = K_0 \cup K_1$$

onde $\{(a,b,c),(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\} \in K_0$, se

$$a \neq \overline{a} \text{ e } (b \setminus a) \cap (\overline{c} \setminus \overline{b}) \neq \emptyset \text{ ou } (\overline{b} \setminus \overline{a}) \cap (c \setminus b) \neq \emptyset$$

Com essa definição, K_0 é coloração aberta de S.

Assuma que vale OCA para S e a coloração K_0. Então temos duas possibilidades:

- existe $X \subset S$ não enumerável e K_0-homogêneo;
- $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, onde S_n é K_1-homogêneo.

Assuma que vale a segunda afirmação. Defina T_n como o conjunto dos ξ's tais que não existem não enumeráveis η's tais que $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in S_n$, para algum μ. Como existem não enumeráveis ξ's, podemos garantir que existe $n \in \omega$ tal que T_n é não enumerável.

Fixe $n \in \omega$ dessa forma e seja $\xi \in T_n$ arbitrário. Seja $(a_{\overline{\xi}}, a_{\overline{\eta}}, a_{\overline{\mu}}) \in S_n$ tal que $\xi < \overline{\xi}$ e $\overline{\mu} < \eta < \mu$[12], de forma que $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in S_n$. Note que escolhemos os ordinais de forma que $\xi < \overline{\eta} < \overline{\mu} < \eta$, então $a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\eta}} \subset_* a_\eta \setminus a_\xi$[13] e, portanto, $\{(a_\xi, a_\eta, a_\mu),(a_{\overline{\xi}}, a_{\overline{\eta}}, a_{\overline{\mu}})\} \in K_0$, contradizendo o fato que S_n é K_1-homogêneo.

Agora, vamos usar o OCA para construir um conjunto não enumerável $H \subset S$ homogêneo para K_0. Vamos mostrar, por indução transfinita, que existe o conjunto $H \subset S$ com a seguinte propriedade: $\mu < \overline{\xi}$ quando $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \neq (a_{\overline{\xi}}, a_{\overline{\eta}}, a_{\overline{\mu}})$, assumindo $\xi < \overline{\xi}$.

[12] Veja que só podem existir enumeráveis η tais que $\eta < \mu < \overline{\mu}$ ou $\eta < \overline{\mu} < \mu$, pois abaixo de $\overline{\mu} < \mu$ ou $\mu < \overline{\mu}$ só existem enumeráveis ordinais (sejam eles quem for), como existem pelo menos não enumeráveis η's, claramente precisa existir η tal que $\eta < \overline{\mu} < \mu$.

[13] Veja que, como S_n é K_1-homogêneo vale que $a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\eta}} \cap a_\eta \setminus a_\xi \neq \emptyset$ e $a_\xi \neq a_{\overline{\xi}}$, isso implica que $(a_\eta \setminus a_\xi) \setminus a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\xi}}$ é finito, pois $a_\eta \setminus a_\xi = (a_\eta \setminus a_{\overline{\mu}}) \cup (a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\eta}}) \cup (a_{\overline{\eta}} \setminus a_\xi)$, e é claro que cada parcela é finita pela relação de quase-contido.

Assuma que a construção está feita até $\gamma < \omega_1$, vamos mostrar que podemos escolher a_γ, com $\gamma < \xi < \eta < \mu$, respeitando a propriedade desejada. Note que existe uma quantidade não enumerável de $(a_{\xi'}, a_{\eta'}, a_{\mu'})$, quando $\xi^{'} > \gamma$, caso contrário, $S \setminus H$ teria apenas uma quantidade enumerável de elementos. Como $\overline{\mu} < \gamma$, para todo $(a_{\overline{\xi}}, a_{\overline{\eta}}, a_{\overline{\mu}}) \in H$, basta escolher $\gamma < \xi < \eta < \mu$ de forma que $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in S \setminus H$. Portanto, a construção é possível.

Assim, os conjuntos

$$A \doteq \{(\xi, \eta] : (a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in H\}$$

e

$$B \doteq \{(\eta, \mu] : (a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in H\}$$

são separados em $\gamma\omega$. De fato, suponha que A e B não sejam separados, então se U é vizinhança de A e V é vizinhança de B, temos $U \cap V \neq \emptyset$, ou seja, existe x ponto de acumulação de A e B. Assim, existem ξ, η tais que $x \in (\xi, \eta]$ e existem $\mu^{'}, \eta^{'}$ tais que $x \in (\eta^{'}, \mu^{'}]$. Claramente, $(\xi, \eta] \cap (\eta^{'}, \mu^{'}] \neq \emptyset$ e, portanto, $\xi < \eta^{'} < \eta$ contrariando a construção de H.

Finalmente, assumimos que $\gamma\omega$ é completamente normal, então existe U aberto em $\gamma\omega$ que é vizinhança de A tal que $\overline{U} \cap B = \emptyset$, já que A e B são separados. Defina $c \doteq U \cap \omega$, então para toda tripla $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in H$, temos $a_\eta \setminus a_\xi \subset_* U$ e $a_\mu \setminus a_\eta$ quase disjunto de c, pois $(\eta, \mu] \subset B$ e $\overline{U} \cap B \neq \emptyset$.

Pela forma como a coloração é feita, para cada ξ existem, no máximo, um η e um μ tais que $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in H$, caso contrário, se existem $\eta^{'}, \mu^{'}$ tais que $(a_\xi, a_{\eta'}, a_{\mu'}) \in H$, então o par $\{(a_\xi, a_\eta, a_\mu), (a_\xi, a_{\eta'}, a_{\mu'})\} \notin K_0$, pois a primeira coordenada de cada elemento é igual, o que nos leva a uma contradição já que o H é K_0-homogêneo.

Para cada ξ que satisfaz a condição acima, escolha $n(\xi)$ tal que

$$[(a_\eta \setminus a_\xi) \setminus c] \cup [(a_\mu \setminus a_\eta) \cap c] \subset [0, n(\xi)] \tag{2.1}$$

Note que $(a_\eta \setminus a_\xi) \setminus c$ é finito pois $a_\eta \setminus a_\xi \subset_* c$ e $(a_\mu \setminus a_\eta) \cap c$ é quase disjunto de c, assim, existe tal $n(\xi)$ que satisfaz (2.1).

Seja $I \subset H$ o conjunto dos elementos $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in H$ tais que vale (2.1). Note que existem $n \in \omega$ e $a \in [o, n]$ tais que, sempre que $(a_\xi, a_\eta, a_\mu) \in I$, temos $n(\xi) = n$ e $a_\eta \cap [0, n] = a$. Veja que para qualquer par $\{(a_\xi, a_\eta, a_\mu), (a_{\overline{\xi}}, a_{\overline{\eta}}, a_{\overline{\mu}})\} \in I$, temos

$$(a_\eta \setminus a_\xi) \cap (a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\eta}}) = \emptyset \text{ e } (a_\mu \setminus a_\eta) \cap (a_{\overline{\eta}} \setminus a_{\overline{\xi}}) = \emptyset$$

já que $a_\eta \setminus a_\xi \subset_* c$ e $c \cap (a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\eta}}) = \emptyset$ e isso implica que $(a_\eta \setminus a_\xi)$ e $(a_{\overline{\mu}} \setminus a_{\overline{\eta}})$ são quase disjuntos. Podemos usar o mesmo argumento para mostrar que $(a_{\overline{\eta}} \setminus a_{\overline{xi}})$ e $(a_\mu \setminus a_\eta)$ são quase disjuntos.

Portanto, $\{(a_\xi, a_\eta, a_\mu), (a_{\overline{\xi}}, a_{\overline{\eta}}, a_{\overline{\mu}})\} \in K_1$, contrariando a existência de U e, consequentemente, o fato de que $\gamma\omega$ é completamente normal. $\square$

CAPÍTULO

3

FORCING PRÓPRIO

O forcing é uma técnica poderosa de Teoria dos Conjuntos que nos permite mostrar resultados de consistência. A ideia geral é começarmos com um modelo para ZFC e acrescentar um conjunto novo, gerando um novo modelo. A validade ou não de propriedades do novo modelo depende do forcing adotado. A utilidade dessa técnica é que muitas vezes provar afirmações para o novo modelo nos permite usar mais ferramentas, tornando as demonstrações mais fáceis. Para garantirmos que estamos obtendo informações interessantes para os problemas no modelo original é preciso que afirmações verdadeiras no modelo original também sejam verdadeiras no modelo novo, essa é uma das propriedades que desejamos preservar.

Neste capítulo apresentamos a classe do forcing próprio atráves do Proper Game. Iremos introduzir e provar vários resultados usando tal conceito. Forcing próprio preserva várias propriedades do modelo original. Por exemplo, na segunda seção desse capítulo mostramos que o forcing próprio é suficientemente "bem comportado", no nosso caso, precisamos que ele não altere qual é o primeiro ordinal não enumerável. Entraremos nos detalhes dessa afirmação mais tarde. Também será necessário explicitar a relação entre forcings *ccc*, enumeravelmente fechados e próprios, com o intuito de facilitar a identificação de forcings próprios interessantes para usarmos o PFA. Vários dos resultados apresentados aqui são auxiliares para que demonstremos as propriedades mais úteis dessa classe de forcings.

O PFA fala que se um forcing próprio tem uma coleção de densos, podemos garantir a existência de um filtro que intercepta todos os densos. O axioma traz muitos resultados sobre propriedades combinatórias de conjunto. Isso será explicitado a medida que formos chegando no nosso objetivo de conseguirmos aplicar o PFA num forcing próprio específico, que nos ajudará a mostrar que é consistente a validade do OCA ao supormos que vale PFA. Este capítulo foi baseado no que é feito em (JECH, 1987).

3.1 O Forcing Próprio e o Proper Game

Em seções futuras, será necessário o uso do forcing próprio e sua interação com o OCA, optamos por definir o forcing próprio através de um jogo. Vamos apresentar duas versões do Proper Game, em alguns casos é mais fácil lidar com a versão enumerável do jogo e, em outras, a versão finita. Explicitaremos qual versão estamos utilizando em cada proposição. Para garantirmos a consistência da nossa definição, vamos começar mostrando que as versões são equivalentes.

Definição 3.1.1 (Proper Game (Versão enumerável))**.** Sejam $\mathbb{P}$ um forcing e $p \in \mathbb{P}$. O *Proper Game* é um jogo definido da seguinte forma:

Para a n-ésima jogada

- O Jogador I joga um nome $\dot{\alpha}_n$ para um ordinal (abaixo de p, i.e., $p \Vdash \dot{\alpha}_n \in Ord$);
- O Jogador II joga um conjunto enumerável de ordinais $B_n \subset Ord$.

Depois de ω movimentos, o Jogador II ganha o jogo se existe uma condição mais forte $q \leq p$ tal que

$$q \Vdash \forall n \in \omega, \exists k \in \omega : \dot{\alpha}_n \in B_k$$

Definição 3.1.2 (Proper Game (Versão Finita))**.** Sejam $\mathbb{P}$ um forcing e $p \in \mathbb{P}$. O *Proper Game* é um jogo definido da seguinte forma:

Para a n-ésima jogada

- O Jogador I joga um nome $\dot{\alpha}_n$ para um ordinal (abaixo de p, i.e., $p \Vdash \dot{\alpha}_n \in Ord$);
- O Jogador II joga um ordinal $\beta_n \in Ord$.

Depois de ω movimentos, o Jogador II ganha o jogo se existe uma condição mais forte $q \leq p$ tal que

$$q \Vdash \forall n \in \omega, \exists m \in \omega : \dot{\alpha}_n = \beta_m$$

Antes de definirmos o forcing próprio, mostraremos que os dois jogos definidos acima são equivalentes.

Proposição 3.1.3. As versões enumerável e finita do *Proper Game* são equivalentes para o Jogador II.

Demonstração. Para os fins dessa demonstração, chamaremos de P_f o Proper Game que o Jogador II escolhe apenas um nome para ordinal e P_e o Proper Game que o Jogador II escolhe um conjunto enumerável de nomes de ordinais.

($\Longrightarrow$) Vamos mostrar que se II tem uma estratégia vencedora em P_f, então II tem estratégia vencedora para P_e.

Sejam σ uma estratégia vencedora para II em P_f e $p \in \mathbb{P}$. Vamos construir a estratégia de II em P_e. Na primeira rodada, I joga $\dot{\alpha}_0$, note que isso também é uma jogada válida para I em P_f, então usamos a estratégia vencedora σ para devolver um ordinal β_0. Claramente, podemos definir uma jogada válida para II em P_e a partir disso, basta definirmos $B_0 = \{\beta_0\}$ como sendo a jogada de II em P_e.

Agora, suponha que a estratégia de II está definida até a rodada $n \in \omega$, suponha que I joga $\dot{\alpha}_n$, como essa também é uma jogada válida para I em P_f, podemos usar σ para devolver um ordinal β_n e, de volta em P_e, podemos definir a resposta de II como sendo $B_n \doteq \{\beta_n\}$.

Note que, ao final do jogo, como σ é estratégia vencedora em P_f, existe uma condição $p^{'} \leq p$ tal que

$$p^{'} \Vdash \forall n \in \omega, \exists m \in \omega, \dot{\alpha}_n = \dot{\beta}_m$$

Mas isso também implica que

$$p^{'} \Vdash \forall n \in \omega, \exists m \in \omega, \dot{\alpha}_n \in \dot{B}_m$$

já que $B_m = \{\beta_m\}$.

Logo, a estratégia definida para II em P_e é vencedora.

($\Longleftarrow$) Sejam σ uma estratégia vencedora para II em P_e e $p \in \mathbb{P}$. Vamos construir a estratégia de II em P_f.

Suponha que as jogadas de I, para a rodada $n \in \omega$, são $\dot{\alpha}_n$ e que as respostas de σ para $\dot{\alpha}_n$ é B_n em P_e. Na rodada 0, I joga $\dot{\alpha}_0$, já sabemos pela estratégia σ que II responde com B_0 em P_e, defina a jogada de II como $\beta_0 \in B_0$.

Defina a resposta de II à jogada $\dot{\alpha}_n$ de I em P_f da seguinte forma:

- Se $n = q^k$, onde q é o i-ésimo primo[1] e $k \in \omega$, II joga $\beta_{i_k} \in B_i$;
- Caso contrário, II joga $\gamma \in B_0$ que ainda não foi jogado por II.

Como cada um dos conjuntos B_n são enumeráveis e existem enumeráveis potências de primos, existem enumeráveis elementos que pertencem aos conjuntos B_n. Para não corrermos o risco de todos os elementos dentro de algum B_n não serem jogados, fixamos a enumeração dos

[1] Considerando uma lista de primos positivos enumerados em ordem crescente.

elementos dos B_n de forma que, o Jogador II sempre joga um elemento seguindo tal enumeração. Assim, garantimos que, ao final da partida, todos os elementos de B_n são jogados, para todo $n \in \omega$. Como σ é estratégia vencedora, existe $p^{'} \leq p$ tal que

$$p^{'} \Vdash \forall n \in \omega, \exists m \in \omega, \dot{\alpha}_n \in \dot{B_m}$$

mas dessa forma, como todos os elementos de B_m foram jogados por II em P_f, temos

$$p^{'} \Vdash \forall m \in \omega, \exists k \in \omega, \dot{\beta_{m_k}} = \dot{\alpha}_n$$

e podemos simplificar para

$$p^{'} \Vdash \forall n \in \omega, \exists j \in \omega, \dot{\alpha}_n = \dot{\beta}_j$$

Portanto, II possui estratégia vencedora em P_e. $\square$

Definiremos a noção de forcing próprio usando a estratégia vencedora do *Proper Game*.

Definição 3.1.4 (Forcing Próprio)**.** Um forcing $\mathbb{P}$ é chamado de próprio se, para todo $p \in \mathbb{P}$, o Jogador II possui uma estratégia vencedora para o *Proper Game*.

Agora, podemos mostrar que forcing próprio é apenas uma generalização de forcings *ccc* e enumeravelmente fechados. Basicamente, com nossa definição, basta mostrarmos que se $\mathbb{P}$ é *ccc* ou enumeravelmente fechado, então II tem uma estratégia vencedora no *Proper Game*.

Também precisaremos da definição de denso abaixo de um certo $p \in \mathbb{P}$:

Definição 3.1.5. Dizemos que um conjunto D é denso abaixo de $p \in \mathbb{P}$, se para todo $q \leq p$, existe $r \leq q$ tal que $r \in D$.

Proposição 3.1.6. Seja $\mathbb{P}$ um forcing enumeravelmente fechado. Então $\mathbb{P}$ é próprio.

Demonstração. Já sabemos que para todo $p^{'} \leq p$ e para todo $\dot{\alpha}$ nome para ordinal tal que $p \Vdash \dot{\alpha} \in Ord$, existem $q \leq p^{'}$ e $\beta \in Ord$ tais que $q \Vdash \dot{\alpha} = \check{\beta}$.

Vamos definir a estratégia de II da seguinte forma: Na rodada 0, o I joga $\dot{\alpha}_0$ e já sabemos que existem $p_0 \leq p$ e $\beta_0 \in Ord$ tais que $p_0 \Vdash \dot{\alpha}_0 = \check{\beta}_0$. Definimos a jogada de II tomando $B_0 = \{\beta_0\}$. Na rodada 1, I joga $\dot{\alpha}_1$ e sabemos que existe $p_1 \leq p_0$ e $\beta_1 \in Ord$ tais que $p \Vdash \dot{\alpha}_1 = \check{\beta}_1$ e, similarmente, definimos a jogada de II por $B_1 = \{\beta_1\}$. Prosseguindo indutivamente, na rodada n, o Jogador I joga $\dot{\alpha}_0$ e II joga $B_n = \{\beta_0\}$, de forma que $p_n \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_n$ e $p_n \leq p_{n-1} \leq ... \leq p_0$.

Agora, como $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado, ao final da partida, existe $q \leq p_n$, para todo $n \in \omega$ tal que $q \Vdash \forall n, \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_n (\dot{\alpha}_n \in B_n)$ e, claramente, isso implica que II ganha o jogo. $\square$

Proposição 3.1.7. Seja $\mathbb{P}$ um forcing *ccc*. Então $\mathbb{P}$ é próprio.

Demonstração. Assim como antes, para dado $p \in \mathbb{P}$ sabemos que para todo $p^{'} \leq p$ e para todo $\dot{\alpha}$ nome para ordinal tal que $p \Vdash \dot{\alpha} \in Ord$, existem $q \leq p^{'}$ e $\beta \in Ord$ tais que $q \Vdash \dot{\alpha} = \check{\beta}$. Podemos definir o seguinte conjunto, para cada $n \in \omega$:

$$D_n \doteq \{q \leq p : \exists \beta_q \in Ord, q \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_q\}$$

É fácil mostrar que D_n é denso abaixo de p, para cada $n \in$. De fato, seja $p^{'} \leq p$, então como existe $q \leq p^{'}$ e $\beta_q \in Ord$ tais que $q \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_q$, temos $q \in D_n$.

Note que se, para cada $n \in \omega$, $q, q^{'} \in D_n$ são tais que $q \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_q$, $q^{'} \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_{q^{'}}$ e $\beta_q \neq \beta_{q^{'}}$, então não pode existir $r \leq q, q^{'}$[2], caso contrário teríamos $r \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_q$ e $\dot{\alpha}_n = \check{\beta}_{q^{'}}$, ou seja, $\beta_q = \beta_{q^{'}}$, o que é absurdo. Assim, para cada $n \in \omega$, os elementos de D_n que atestam quem é $\dot{\alpha}_n$ são incompatíveis.

Considere $A_n \subset D_n$ anticadeia maximal, então podemos definir o seguinte conjunto $B_n \doteq \{\beta_q : q \in A_n\}$. Sabemos que existe, para cada $n \in \omega$, $q \leq p$ tal que $q \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_q$, onde $q \in D_n$. Vamos mostrar que esse fato implica que $p \Vdash \dot{\alpha}_n \in \check{B}_n$, para algum $n \in \omega$. De fato, suponha que $p \Vdash \dot{\alpha}_n \notin \check{B}_n$, então existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \dot{\alpha}_n \notin \check{B}_n$. Tome $r \leq q$ tal que $r \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_r$, a princípio não é necessário que $r \in A_n$, mas sabemos que existe algum $q_m \in A_n$ tal que $q_m \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_{q_m}$. Note que existe $s \leq r, s \in A_n$ e $m \in \omega$ tal que $s \leq q_m$, ou seja, $s \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\beta}_r = \check{\beta}_{q_m}$ isso implica que $\beta_r = \beta_{q_m}$ e como $\beta_{q_m} \in B_n$, temos $s \Vdash \dot{\alpha}_n \in \check{B}_n$. Claramente, chegamos num absurdo, pois como $s \leq q$, deveríamos ter $s \Vdash \dot{\alpha}_n \notin \check{B}_n$.

Logo, $p \Vdash \dot{\alpha}_n \in \check{B}_n$. Como $\mathbb{P}$ é *ccc*, temos A_n enumerável, como B_n está indexado em A_n, B_n é enumerável. Agora, vamos jogar o *Proper Game*, onde a estratégia de II será definida da seguinte forma: Quando I jogar $\dot{\alpha}_n$, II jogará B_n, como sabemos que o próprio p força $\dot{\alpha}_n \in \check{B}_n$, ao final do jogo, II ganhará já que o próprio p força que para todo $n \in \omega$, $\dot{\alpha}_n \in \check{B}_n$. □

É bastante conhecido que nenhum forcing enumeravelmente fechado ou *ccc* colapsa ω_1, vamos mostrar uma série de resultados que não só contribuem para chegarmos nessa conclusão como falam do comportamento de conjuntos de ordinais no espaço dos nomes. A seguir usaremos V para representar um modelo padrão em ZFC e $V[G]$ para a classe dos nomes de V.

Proposição 3.1.8. Seja $\mathbb{P}$ um forcing enumeravelmente fechado e G um filtro sobre V. Então vale que se $\dot{f} \in V[G]$ é uma função de ω para V, então $\dot{f} \in V$.

Em particular, não existem novos conjuntos enumeráveis de ordinais em $V[G]$.

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \dot{f}$ é função. Como $\dot{f}$ é função de ω para V, para cada $n \in \omega$, existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \dot{f}(n) = \check{y}_n$, para algum $y_n \in V$. Agora, basta construirmos uma função em V igual a $\dot{f}$ em todo ponto. Escolha $p_0 \leq p$ tal que exista $y_0 \in V$ de forma que

[2] Caso isso aconteça, dizemos que q e $q^{'}$ são incompatíveis e a notação é $q \perp q^{'}$

$p_0 \Vdash \dot{f}(0) = \check{y_0}$. Indutivamente, para todo $n \in \omega$, existe $p_n \leq p_{n-1} \leq ... \leq p_0$ tal que existe $y_n \in V$ e $p_n \Vdash \dot{f}(n) = \check{y_n}$. Defina $g(n) = y_n$ e, como $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado, existe $q \leq p_n$ tal que $q \Vdash \dot{f}(n) = \check{g}(n)$. Claramente, $g \in V$ e consequentemente, $q \Vdash \dot{f} \in V$. $\square$

Proposição 3.1.9. Sejam $\mathbb{P}$ forcing *ccc* e G um filtro sobre V. Se $\dot{f} \in V[G]$ é uma função de ω para V, então existe uma função $F \in V$ tal que para cada $n \in \omega$, $\dot{f}(n) \in \check{F}(n)$, e todo $F(n)$ é enumerável.

Em particular, todo conjunto enumerável de ordinais em $V[G]$ é coberto por um conjunto enumerável de V.

Demonstração. A demonstração segue a mesma ideia da Proposição 3.1.7. Considere o conjunto denso abaixo de p, para cada $n \in \omega$, dado por:

$$D_n \doteq \{q \leq p : \exists y_q \in V, q \Vdash \dot{f}(n) = \check{y_q}\}$$

Já sabemos que qualquer $r \leq p$ que decide $\dot{f}(n)$ precisa ser compatível com algum $q \in A$.

Considere $A_n \subset D_n$ anticadeia maximal, então podemos definir o seguinte conjunto $F(n) \doteq \{y_q : q \in A_n\}$. Agora, já sabemos que o próprio p força que $\dot{f}(n) = \check{y_q}$ e, portanto, p também força que $\dot{f}(n) \in \check{F}(n)$. $\square$

3.2 Proper Forcing preserva ω_1

Esta seção se encarrega de mostrar que o forcing próprio preserva ω_1. Normalmente, forcings genéricos não preservam ω_1. Mesmo quando preservam essa propriedade, ela pode ser perdida ao usarmos a iteração de forcings. Felizmente, o forcing próprio é uma exceção, além de preservar ω_1, ainda é possível mostrar que iteração de forcings próprios continua sendo própria, ou seja, a iteração de forcings próprios também preserva ω_1. Esse último resultado deixamos para ser demonstrado na seção que fala sobre a relação do PFA com OCA. Começaremos com uma proposição sobre cobertura de conjuntos enumeráveis de ordinais.

Proposição 3.2.1. Sejam $\mathbb{P}$ um forcing próprio e G um filtro sobre V. Se $\dot{f} \in V[G]$ é uma função de ω para *Ord*, então existe um conjunto enumerável $B \in V$ tal que $\{\dot{f}(n) : n \in \omega\} \subset \check{B}$.

Em outras palavras, todo conjunto enumerável de ordinais em $V[G]$ é coberto por algum conjunto enumerável de V.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $p \in \mathbb{P}$ que força o seguinte: $\{\dot{f}(n) : n \in \omega\} \not\subset \check{B}$, para todo $B \subset V$ enumerável.

Sabemos que $p \Vdash \dot{f} : \omega \longrightarrow Ord$ é função, ou seja, para cada $n \in \omega$, existe $\alpha_n \in Ord$ tal que $p \Vdash \dot{f}(n) = \check{\alpha_n}$. Agora, jogaremos o *Proper Game* e suponha que o Jogador I joga, para cada

$n \in \omega$, $\dot{f}(n) = \dot{\alpha}_n$. Como $\mathbb{P}$ é forcing próprio, o Jogador II tem estratégia vencedora e, portanto, II joga conjuntos enumeráveis $B_n \subset V$ de acordo com a estratégia vencedora. Ao final do jogo, como II ganha usando a estratégia, sabemos que existe uma condição mais forte $q \leq p$ tal que

$$q \Vdash \forall n \in \omega, \exists k \in \omega : \dot{\alpha}_n \in \check{B}_k$$

Agora, basta definir o conjunto enumerável $B \doteq \bigcup_{n\in\omega} B_n$ e, consequentemente podemos escrever

$$q \Vdash \forall n \in \omega, \dot{\alpha}_n \in \check{B}$$

Logo, chegamos na contradição desejada. □

Corolário 3.2.2. Seja $\mathbb{P}$ um forcing próprio. Então ω_1 é preservado. (Mais geralmente, a propriedade $cf(\alpha) > \omega$ é preservada)

Demonstração. Suponha que ω_1 colapsa, i.e., existe p que força $\dot{f} : \omega \longrightarrow \check{\omega}_1$ ser uma função cofinal em $\check{\omega}_1$. Pela Proposição 3.2.1, existe um conjunto $\check{B} \in V$ de ordinais, enumerável em V e tal que $\dot{f}(n) : n \in \omega\} \subset B$. Como $\dot{f}$ é cofinal, podemos garantir que p força a existência de $\check{B}$ não limitada em $\check{\omega}_1$ e isso entra em contradição com o fato de todos os conjuntos enumeráveis em ω_1 serem limitados. □

Vamos finalizar a seção com um resultado que generaliza a Proposição 3.2.1.

Teorema 3.2.3. Sejam $\mathbb{P}$ um forcing próprio e G um filtro para V. Seja $\dot{A} \in V[G]$ tal que $V[G] \Vdash |\dot{A}| = \aleph_0$ e $\dot{A} \subset V$(i.e., um conjunto enumerável contendo apenas elementos de V). Então, existe um conjunto $\check{B} \in V$ tal que $\dot{A} \subset B$.

Demonstração. Suponha que exista $p \in \mathbb{P}$ que force "Não existe conjunto enumerável em V cobrindo $\dot{A}$".

Como $|\dot{A}| = \aleph_0$, existe $\dot{f}$ tal que $p \Vdash \dot{f} : \omega \longrightarrow \dot{A}$ é bijetora. Como assumimos que $\dot{A} \subset V$, i.e., para cada $n \in \omega$, existe $q \leq p$ e $\check{\beta}_q \in V$ tais que $q \Vdash \dot{f}(n) = \check{\beta}_q$.

Considerando $D_n \doteq \{q \leq p : \exists \beta_q \in V, q \Vdash \dot{f}(n) = \check{\beta}_q\}$, já sabemos que D_n é denso abaixo de p. Seja $K_n \subset D_n$ anticadeia maximal, então $\dot{f}(n)$ é decidida pelos elementos de K_n. Como $|\dot{A}| = \aleph_0$, essa anticadeia é enumerável. Agora, veja que podemos considerar uma bijeção entre $K_n^{'} \doteq \{\check{\beta}_q : n \in \omega\}$ e um conjunto de ordinais, ou seja, existe $q \leq p$ que força $\dot{f}(n) = \check{\alpha}_n$, para algum ordinal nesse conjunto.

Considere o *Proper Game*, onde o Jogador I joga, para cada $n \in \omega$, $\check{\alpha}_n$, $\check{\alpha}_n$. Como $\mathbb{P}$ é próprio, o Jogador II tem estratégia vencedora, então ao final do jogo existe $q \leq p$ tal que

$$q \Vdash \forall n \in \omega, \exists k \in \omega : \check{\alpha}_n \in \check{B}_k$$

Basta considerar $\check{B'} \doteq \bigcup_{n\in\omega}\check{B}_n$, temos $q \Vdash \forall n \in \omega, \check{\alpha}_n \in \check{B'}$. Ao usar novamente a bijeção, como $\check{B'}$, podemos afirmar que $q \Vdash \{\dot{f}(n) : n \in \omega\} = \dot{A} \subset \check{B}$, onde $\check{B}$ é a imagem inversa de $\check{B'}$ pela bijeção mencionada. $\square$

CAPÍTULO

4

A RELAÇÃO DE OCA COM OUTROS AXIOMAS

Ao longo dos estudos sobre o OCA, vários autores checaram a relação dele com outros axiomas, alguns com o objetivo de identificar a consistência que o OCA teria quando assumida a validade dele e outro axioma, como OCA + PFA. É claro que ao estudar essas interações entre os axiomas, não podíamos deixar de analisar a relação entre OCA e CH. Outro objetivo comum é a possibilidade de demonstrar a consistência do OCA usando a consistência já demonstrada de outros axiomas, nesse capítulo, estudamos justamente esse objetivo e provamos que a relação do OCA com o AD e o PFA são suficientes para mostrar tal consistência.

4.1 OCA e CH

A Hipótese do Continuum (CH) é um dos axiomas mais famosos de Teoria dos Conjuntos, fora da lista padrão ZFC. Uma forma de enunciá-lo é dizendo que CH é a afirmação $\omega_1 = \mathfrak{c}$. A princípio não haveria razão para dizer que os dois axiomas se contrariam, mas nessa seção vamos mostrar que CH garante que $\mathfrak{b} = \aleph_1$ e, consequentemente, implica na existência de uma família de funções que nos auxiliará a provar que a validade de OCA implica que $\mathfrak{b} > \aleph_1$. Vamos apresentar a demonstração dos dois fatos e usar a junção deles para mostrar a incompatibilidade entre a validade de OCA e CH.

Para essa seção, ao invés de usarmos o conceito de K-homogêneo, para uma coloração K, falaremos apenas que um conjunto de pares ordenados está contido em K, como exemplificado pela versão do OCA apresentada abaixo:

Definição 4.1.1 (Open Coloring Axiom)**.** Se X é espaço métrico separável e $[X]^2 = K_0 \cup K_1$, com K_0 aberto em $[X]^2$, então pelo menos um dos itens é verdadeiro:

- Existe um subconjunto não enumerável $Y \subset X$ tal que $[Y]^2 \subset K_0$.

- Existe uma partição $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ tal que $[Y_n]^2 \subset K_1$, para todo $n \in \omega$.

O $\mathfrak{b}$ é definido como o menor cardinal de uma família de funções de ω para ω ilimitada em ω^ω com relação a $\leq^*$. Apresentaremos cada um dos conceitos que aparecem na definição do $\mathfrak{b}$ antes de demonstrar o teorema principal dessa seção.

Definição 4.1.2. Sejam $f, g \in \omega^\omega$. Dizemos que $f \leq^* g$ se $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ é finito.

Definição 4.1.3. Dizemos que uma família $\mathscr{A} \subset \omega^\omega$ é uma família ilimitada se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que, para todo $f \in \mathscr{A}, f \leq^* g$. Dizemos que $\mathscr{A}$ é família dominante se para todo $g \in \omega^\omega$, existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $g \leq^* f$.

Dessa definição, fica fácil ver que se uma família é dominante, então ela é ilimitada, a próxima proposição trata justamente disso:

Proposição 4.1.4. Toda família dominante é ilimitada.

Demonstração. Seja $\mathscr{A}$ uma família dominante. Suponha que $\mathscr{A}$ não é ilimitada. Então, existe $g \in \omega^\omega$ tal que para todo $f \in \mathscr{A}, f \leq^* g$.

Considere $g' \in \omega^\omega$, dada por $g'(n) = g(n) + 1$. Note que $g \leq^* g'$ e $g \neq g'$. Como $\mathscr{A}$ é dominante existe $f \in \mathscr{A}$ tal que $g' \leq^* f$, ou seja, $g \leq^* f$ e $g \neq f$. Logo, $f \nleq^* g$, o que é absurdo. $\square$

Observação 4.1.5. Note que existe uma família dominante (e portanto ilimitada), basta considerar $\mathscr{A} = \omega^\omega$.

A proposição anterior parece não ter outras implicações, mas se definirmos $\mathfrak{d}$ como o menor cardinal de uma família dominante de ω^ω, isso nos permite ver que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Proposição 4.1.6. Não existe família ilimitada enumerável.

Demonstração. Seja $\mathscr{A} = \{f_n : n \in \omega\} \subset \omega^\omega$. Vamos construir $g \in \omega^\omega$ tal que $f_n \leq^* g$ para todo $n \in \omega$.

Considere $g \in \omega^\omega$ definida como:

$$\begin{cases} g(0) = f_0(0) + 1; \\ g(1) = \max\{f_0(1), f_1(1)\} + 1; \\ g(2) = \max\{f_0(2), f_1(2), f_2(2)\} + 1; \\ \vdots \\ g(n) = \max\{f_0(n), f_1(n), ..., f_n(n)\} + 1; \\ \vdots \end{cases}$$

Note que, se $n \in \omega$, então para todo $m \le n$ temos $f_n(m) \le g(m)$, pois $g(m) = \max\{f_0(m), f_1(m), \ldots, f_m$
1. Dessa forma, $f_n \le^* g$. Logo, $\mathscr{A}$ não é ilimitada. $\square$

Com esse argumento de diagonalização, mostramos que $\mathfrak{b} > \aleph_0$ e, consequentemente, $\mathfrak{d} > \aleph_0$. Basicamente, não pode existir nenhuma família dominante enumerável. Agora, dos resultados anteriores sabemos que a menor família ilimitada que existe em ω^ω tem tamanho $\mathfrak{c}$ sob a validade de CH. Vamos mostrar que podemos refinar mais ainda uma família ilimitada para ter propriedades que serão úteis mais na frente.

Lema 4.1.7. Suponha que vale $\mathfrak{b} = \aleph_1$. Então, existe uma família $\mathscr{B} = \{f_\alpha : \alpha \in \omega\}$ tal que

- $f_\alpha \in \mathscr{B}$ é crescente, para todo $\alpha < \omega_1$;
- Se $\alpha < \beta < \omega_1$, então $f_\alpha \le^* f_\beta$;
- Para todo $g \in \omega^\omega$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\{n \in \omega : g(n) < f_\beta(n)\}$ é infinito, sempre que $\alpha < \beta < \omega_1$.

Demonstração. Antes de provarmos, note que o último item é satisfeito por qualquer família ilimitada de tamanho $\aleph_1$ (e também por qualquer família dominante de tamanho $\aleph_1$). Vamos provar que existe uma família $\mathscr{F}$ que satisfaz os dois últimos itens e depois mostrar que existe uma família $\mathscr{B}$ que satisfaz os três itens.

Afirmação 4.1.1. Existe uma família ilimitada tal que $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \ge f_\beta(n)\}$ é finito, sempre que $\alpha < \beta < \omega_1$, isto é, $f_\alpha \le^* f_\beta$.

Vamos mostrar por indução transfinita. Considere $\mathscr{A} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma família dominante, nosso objetivo é provar que podemos reordenar os termos dessa família de forma que ela vai satisfazer as propriedades da afirmação.

Suponha para $\xi < \omega_1$ a família $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha < \xi\}$ está definida e satisfaz a propriedade acima.

Note que $|\mathscr{F}| \le \aleph_0$, então $\mathscr{F}$ não pode ser ilimitada e, portanto, existe $g \in \omega^\omega$ tal que para todo $\alpha < \xi$, temos $f_\alpha \le^* g$. Como $\mathscr{A}$ é dominante, temos $\mathscr{A} \setminus \mathscr{F}$ dominante, ou seja, existe $\beta > \xi$ tal que $g \le^* f_\beta$, ou seja, $f_\alpha \le^* f_\beta$, para todo $\alpha < \xi$. Defina $f_\xi \doteq f_\beta$ e as propriedades são preservadas. $\square$

Agora, resta mostrar que existe uma família que satisfaz os três itens. Seja $\mathscr{F}$ família como na afirmação anterior. Novamente, vamos construir uma família $\mathscr{B}$ a partir de $\mathscr{F}$ que satisfaz os três itens.

Suponha que para $\xi < \omega_1$ a família $\mathscr{B} = \{f_\alpha : \alpha < \xi\}$ satisfaz as propriedades do lema. Note que $|\mathscr{B}| \leq \aleph_0$, então podemos definir $g \in \omega^\omega$ tal que, para $\alpha < \xi \leq \omega$, temos:

$$\begin{cases} g(0) = f_0(0) + 1; \\ g(1) = \max\{f_0(1), f_1(1)\} + 1; \\ g(2) = \max\{f_0(2), f_1(2), f_2(2)\} + 1; \\ \vdots \\ g(n) = \max\{f_0(n), f_1(n), ..., f_n(n)\} + 1; \\ \vdots \\ g(\alpha) = \max\{f_0(\alpha), f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), ..., f_\alpha(\alpha)\} + 1 \\ \vdots \end{cases}$$

Dessa forma, podemos definir $f_\xi \doteq g$ e, assim, a família $\mathscr{B} \cup \{f_\xi\}$ satisfaz as propriedades do lema. □

O próximo teorema se encarrega de mostrar a última peça que precisamos para demonstrar o resultado mais importante dessa seção. Vamos usar o OCA para mostrar que existe um conjunto que contraria propriedades ligadas à uma coloração K quando supomos que $\mathfrak{b} = \aleph_1$.

Teorema 4.1.8. Suponha que OCA é válido. Então $\mathfrak{b} > \aleph_1$

Demonstração. Suponha que vale OCA e que $\mathfrak{b} = \aleph_1$, ou seja, existe $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisfazendo o Lema 4.1.7. Considere $X \doteq \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como um subespaço do espaço métrico separável ω^ω.

Seja $K_0 \doteq \{\{f,g\} : \exists i, j \in \omega\ f(i) < g(i) \text{ e } g(j) < f(j)\}$ e considere $K_1 = X \setminus K_0$. É claro que K_0 é aberto, de fato, seja $\{f,g\} \in K_0$ e considere $U \doteq \{x \in \omega^\omega : x(i) = f(i) \text{ e } x(j) = f(j)\}$ e $V \doteq \{y \in \omega^\omega : y(i) = g(i) \text{ e } y(j) = g(j)\}$. É claro que $f \in U$ e $g \in V$, mais ainda, se $x \in U$ e $y \in V$, temos

$$x(i) = f(i) < g(i) = y(i) \text{ e } y(j) = g(j) < f(j) = x(j) \implies x(i) < y(i) \text{ e } y(j) < x(j)$$

Logo, $\{\{x,y\} : x \in U \text{ e } y \in V\} \subset K_0$ e, portanto, K_0 é aberto.

Agora, pelo OCA, temos dois casos:

Caso 1. Suponha que exista uma partição $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ tal que $[Y_n]^2 \subset K_1$, para todo $n \in \omega$. Como $|X| = \aleph_1$, podemos fixar, para algum $n_0 \in \omega$, $Y = Y_{n_0}$ de tamanho não-enumerável.

Note que $K_1 = \{\{f,g\} : f(i) < g(i) \text{ ou } g(j) < f(j), \text{ para todos } i, j \in \omega\}$, isso implica que $\{n \in \omega : f_\alpha(n) > f_\beta(n)\} = \emptyset$. De fato, se $\alpha < \beta$ tais que $f_\alpha, f_\beta \in Y$, pelo Lema 4.1.7, temos $\{n \in \omega : f_\alpha(n) > f_\beta(n)\}$ finito. Como $\{f_\alpha, f_\beta\} \in K_1$, o par $\{f_\alpha, f_\beta\}$ não pode satisfazer $f_\alpha(n) > f_\beta(n), \forall n \in \omega$. Logo, $f_\alpha(n) < f_\beta(n)$, para todo $n \in \omega$ e, portanto, $\{n \in \omega : f_\alpha(n) > f_\beta(n)\} = \emptyset$.

Defina $B \doteq \{\beta < \omega_1 : f_\beta \in Y\}$ e note que $\sup_{\beta\in B} f_\beta(n)$ é infinito, para algum $m \in \omega$. De fato, se $\sup_{\beta\in B} f_\beta(n)$ é finito, para todo $n \in \omega$, então $\sup_{\beta\in B} f_\beta \in \omega^\omega$. Veja que, pelo Lema 4.1.7, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f_\gamma \not\leq^* \sup_{\beta\in B} f_\beta$, para todo $\alpha < \gamma < \omega_1$. Como Y é não-enumerável, existe $\beta \in B$ tal que $\alpha < \beta$, então $f_\beta \not\leq^* \sup_{\beta\in B} f_\beta$, o que é um absurdo. □

Portanto, fixe $m \in \omega$ tal que $\sup_{\beta\in B} f_\beta(m) = \omega$. Seja $\delta \in B$ grande o suficiente tal que $\sup_{\beta\in B\cap\delta} f_\beta = \omega$. Note que $f_\delta(m) = \omega$, ou seja, $f_\delta \notin \omega^\omega$, e chegamos numa contradição.

Caso 2. Suponha que exista um conjunto não-enumerável $Y \subset X$ tal que $[Y]^2 \subset K_0$. Note que, para $\alpha < \beta$ tal que $f_\alpha, f_\beta \in Y$, o conjunto $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geq f_\beta(n)\}$ é não vazio. De fato, como $\{f_\alpha, f_\beta\} \in K_0$, existe $j \in \omega$ tal que $f_\alpha(j) \geq f_\beta(j)$.

Defina os conjuntos $B \doteq \{\beta < \omega_1 : f_\beta \in Y\}$ e, para $\alpha < \beta$,

$$\Delta(\alpha,\beta) \doteq \min\{m \in \omega : m \leq n < \omega \implies (f_\alpha(n) \leq f_\beta(n))\}$$

Note que $\Delta(\alpha,\beta) > 0$, pois se $\Delta(\alpha,\beta) = 0$, então a afirmação vale para todo $n \geq 0$ e, dessa forma, $\{n \in \omega : f_\alpha(n) \geq f_\beta(n)\} = \emptyset$, o que é absurdo.

Assim, para mostrar uma contradição, basta demonstrarmos a seguinte afirmação:

Afirmação 4.1.2. Existem $\alpha < \beta$ em B tais que $\Delta(\alpha,\beta) = 0$.

Defina $B_n \doteq \{\beta \in B \setminus (\delta+1) : \Delta(\delta,\beta) = n\}$, ou seja, se $\beta \in B_n$, para todo $m \geq n$ temos $f_\beta(m) \geq f_\delta(m)$. Note que $B \setminus (\delta+1) = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, já que $\Delta(\alpha,\beta) \in \omega, \forall \alpha < \beta < \omega_1$.

Agora, como Y é não enumerável, temos B não enumerável (assim como $B \setminus (\delta+1)$) e consequentemente podemos fixar $n \in \omega$ tal que B_n é não enumerável. Note que o conjunto dado por

$$M \doteq \{m \in \omega : \sup\{f_\beta(m) : \beta \in B_n\} = \omega\}$$

é não vazio, como provado no caso 1.

Seja $m \doteq \min(M)$. Para $t \in \omega^m$, defina $B_n^t \doteq \{\beta \in B_n : t \subseteq f_\beta\}$. É claro que o conjunto $\{t \in \omega^m : B_n^t \neq \emptyset\}$ é finito, caso contrário, existe $i < m \in \omega$ tal que $\sup\{f_\beta(i) : \beta \in B_n\} = \omega$, o que é absurdo já que $i \in M$.

Note que, como $\{t \in \omega^m : B_n^t \neq \emptyset\}$ é finito, podemos fixar $t \in \omega^m$ tal que $\sup\{f_\beta(m) : \beta \in B_n^t\} = \omega$.

Já sabemos que $\omega^{<\omega}$ é enumerável, então podemos fixar certo $\delta \in B$ (pois B é não-enumerável) tal que para todo $t \in \omega^{<\omega}$, existe $\alpha \in B$ tal que $t \subseteq f_\alpha$.

Como $\{\beta \in B : t \subseteq f_\beta\}$ é não vazio, podemos fixar $\alpha \in B$ tal que $t \subseteq f_\alpha$ e $\alpha < \delta$. Defina $k \doteq \Delta(\alpha,\delta)$ e escolha $\beta \in B_n^t$ tal que $f_\beta(m) > f_\alpha(k+n)$ (tal β existe pois $\sup\{f_\beta(m) : \beta \in B_n\} = \omega$). Note que $\beta \in B_n^t$, temos $\beta \in B_n$ e, consequentemente, $\beta \in B \setminus (\delta+1)$, assim, $\alpha < \delta < \beta$.

Resta mostrar que $\Delta(\alpha,\beta) = 0$, vamos separar em casos:

- Se $i < m$, então $f_\alpha(i) = t(i) = f_\beta(i)$;
- Se $m \leq i \leq k+n$, como f_α e f_β são crescentes pelo Lema 4.1.7, então $f_\alpha(i) \leq f_\alpha(k+n) \leq f_\beta(m) \leq f_\beta(k+n)$
- Se $k+n < i \in \omega$, então $\Delta(\alpha,\delta) = k < i$ e $\Delta(\alpha,\delta) = n < i$, temos $f_\alpha(i) \leq f_\delta(i)$ e $f_\delta(i) \leq f_\beta(i)$. Logo, $f_\alpha(i) \leq f_\beta(i)$.

Portanto, podemos concluir que para todo $i \geq 0, f_\alpha(i) \leq f_\beta(i)$, ou seja, $\Delta(\alpha,\beta) = 0$, nos dando a contradição desejada. □

Teorema 4.1.9. Se o OCA é válido, então vale $\neg$ CH.

Demonstração. Se vale CH, então $\mathfrak{b} = \aleph_1$. Como a validade de OCA implica que $\mathfrak{b} > \aleph_1$, obtemos uma contradição. □

Com esse resultado, somado ao fato do CH ser consistente com ZFC, obtemos a consistência da negação do OCA com ZFC.

4.2 OCA e AD

Nessa seção mostraremos que OCA é uma consequência direta do Axioma da Determinação(AD) através de um refinamento do jogo do conjunto perfeito. Tradicionalmente, a consistência de OCA com ZFC é feita usando a consistência de PFA com ZFC e mostrando que OCA é uma consequência de PFA. Vale a pena mencionar que é necessário usar cardinais grandes para mostrar a consistência de PFA com ZFC. No entanto, podemos demonstrar que a validade do AD implica a validade do OCA e podemos usar isso, somado ao fato do AD ser consistente com ZF (nesse caso, não vale o axioma da escolha), para garantir que OCA é consistente com ZF. Demonstraremos que OCA é consequência de AD definindo um jogo conveniente para aplicar o AD.

Axioma 4.2.1 (AD)**.** Para todo jogo, um dos jogadores possui estratégia vencedora.

Teorema 4.2.1 (ZF)**.** Assuma AD. Então OCA é válido para todo $X \subset 2^\omega$.

Demonstração.

Seja $X \subset 2^\omega$ e K uma coloração aberta para 2^ω. Vamos definir o jogo $G(K,X)$ da seguinte forma:

- O Jogador I joga, para cada $n \in \omega$, um par de pontos $s_0^n, s_1^n \in 2^{<\omega}$ tais que $[s_0^n] \otimes [s_1^n] \subset K$.
- O Jogador II joga, para cada $n \in \omega$, um número $i_n \in \{0,1\}$.

- Para todo $n \in \omega$, os pontos s_0^{n+1}, s_1^{n+1} são extensões incompatíveis de s_0^n e s_1^n
- O Jogador I ganha se, e somente se, $x = \bigcup_{n\in\omega} s_{i_n}^n$ pertence a X.

Para usar $G(K,X)$, precisamos entender o que acontece quando cada jogador possui estratégia vencedora no jogo. A próxima afirmação cuida exatamente desses cenários.

Afirmação 4.2.1. Em $G(K,X)$, valem as seguintes afirmações:

1. I tem uma estratégia vencedora se, e somente, se X contém um subconjunto perfeito homogêneo para K[1].
2. Se II tem uma estratégia vencedora, então X é K-enumerável.

Demonstração.

(1) Note que uma estratégia vencedora para I é a árvore perfeita T_P e, pelas regras do jogo, é necessário que $[T_P]$ seja homogêneo para K. De fato, se I possui estratégia vencedora, então existe uma árvore $T_{P'}$ em $2^{<\omega}$ tal que se $s_{i_n}^n$ e s_0^{n+1}, s_1^{n+1} são relacionados, então s_0^{n+1}, s_1^{n+1} são extensões incompatíveis de $s_{i_n}^n$, para $i_n \in \{0,1\}$. Claramente, $[T_{P'}] \subset K$ pela forma que I pode jogar. Ainda, note que $T_{P'}$ é subárvore perfeita de T_P.

(2) Seja σ_{II} uma estratégia vencedora para II. Dado $x \in X$, vamos dizer que uma posição $P = \langle (s_0^0, s_1^0), i_0, \ldots, (s_0^n, s_1^n), i_n \rangle \in \sigma_{\text{II}}$ é boa para x se $x \in [s_{i_n}^n]$, para $i_n \in \{0,1\}$ e algum $n \in \omega$. Como σ_{II} é estratégia vencedora para II, podemos dizer que para todo $x \in X$, a árvore T_x formada por posições boas para x não tem ramo infinito[2]. De fato, suponha que T_x possui ramo infinito para algum $x \in X$, note que se I joga pelo ramo infinito de T_x, temos $\bigcup_{n\in\omega} s_{i_n}^n \in X$ pela definição da árvore, dessa forma, o Jogador I ganha o jogo, contradição.

Agora, para uma posição P boa para x, defina:

$A_P \doteq \{y \in [s_{i_n}^n]$: Para todo (s_0^{n+1}, s_1^{n+1}) possíveis jogadas de I após i_n, se i[3] for a próxima jogada de II de acordo com σ_{II}, então $y \notin [s_i^{n+1}]\}$[4]

Veja que se P for uma folha[5] de T_x, então $x \in A_P$. De fato, pela definição de posição boa, como P é folha de T_x e as jogadas $(s_0^{n+1}, s_1^{n+1}), i_{n+1}$ são tais que $x \notin [s_0^{n+1}]$ e $x \notin [s_1^{n+1}]$, dessa forma $x \notin [s_i^{n+1}]$, onde i é a próxima jogada de σ_{II}.

Ainda podemos dizer que $[A_P]^2 \cap K = \emptyset$. Caso contrário, se existissem $y, z \in A_P$ tais que $\{y,z\} \in K$, como $[y|n]$ e $[z|n]$, para algum n, são abertos de 2^ω que contêm, respectivamente, y e

1. Aqui basta a implicação para demonstrar o teorema, mas nesse caso a equivalência vale.
2. Árvore bem fundada.
3. $\sigma_{\text{II}}((s_0^0, s_1^0), i_0, \ldots, (s_0^n, s_1^n), i_n) = i$.
4. Basicamente, o conjunto A_P é o conjunto dos y que são extensões de $s_{i_n}^n$ mas não são extensões de s_i^{n+1}.
5. Depois de P não existem mais posições boas para x.

z, pelo fato de K ser coloração aberta, teríamos $[y|n] \otimes [z|n] \subset K$. Dessa forma, $(y|n, z|n)$ seria uma jogada válida para I, mas qualquer resposta de σ_{II} será tal que ou $y \in s_i^{n+1}$ ou $z \in s_i^{n+1}$, em todo caso obtemos uma contradição com a definição de A_P. Dessa forma, $[A_P]^2 \subset X \setminus K$.

Finalmente, note que $X \subset \bigcup_{P \in G(K,X)} A_P$, mas isso implica que X é uma união enumerável de conjuntos homogêneos para $X \setminus K$. $\square$

No geral, as duas afirmações presentes em OCA que valem para colorações abertas de $\mathbb{R}$, não valem para colorações fechadas e podemos usar AD para demonstrar que:

Proposição 4.2.2. Assumindo *AD*, existe uma coloração fechada K de $\mathbb{R}$ tal que nem $\mathbb{R}$ é K-enumerável nem admite um subconjunto perfeito homogêneo para K

Demonstração.

Considere em $[\mathbb{R}]^2 = \{(x,y) : x > y\}$, as linhas $l_n = \{(x,y) : y = x - \dfrac{1}{n}\}$ e seja $K = \bigcup_{n \in \omega} l_n$. Claramente, K é coloração fechada em $[\mathbb{R}]^2$. Note que $K(x)$ é o conjunto $\{x - \dfrac{1}{n} : n \in \omega\}$ e, portanto, é enumerável. Se $Y \subset \mathbb{R}$ é homogêneo para K e $x \in Y$, então $[Y]^2 \subset K$. Logo, se $x \in Y$, então os pares da forma $\{\{x,y\} : y \in Y\} \subset [Y]^2$, ou seja, todos os elementos de Y pertencem a $K(x)$, como $x \in Y$, temos $Y \subset K(x)$. Dessa forma, Y pode ser, no máximo, enumerável. Como os conjuntos perfeitos de $\mathbb{R}$ precisam ser de, no mínimo, tamanho enumerável, não pode existir subconjunto perfeito K-homogêneo para $\mathbb{R}$. $\square$

Aqui já temos o primeiro resultado envolvendo possíveis generalizações do OCA, apenas trocar coloração aberta por fechada no enunciado não funciona. No capítulo seguinte, vamos mostrar que mudar quem é K_0-homogêneo no enunciado não é possível, também apresentaremos algumas perguntas em aberto.

4.3 OCA e PFA

Nesta seção vamos mostrar que o PFA implica OCA. Para mostrar que PFA é consistente com ZFC é necessário usar cardinais grandes, não nos encarregamos de demonstrar isso nessa dissertação. Ou seja, ao mostrar que PFA implica OCA, estaremos mostrando que OCA é consistente com ZFC desde que usemos cardinais grandes. Iremos usar várias definições e resultados do capítulo anterior aqui. Devido à natureza da definição que demos sobre o forcing próprio, utilizaremos um jogo conveniente e definiremos um forcing para criarmos um ambiente adequado para trabalhar com o PFA e o OCA.

Axioma 4.3.1 (Proper Forcing Axiom (PFA))**.** Se $\mathbb{P}$ é forcing próprio e $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega\}$ é uma coleção de densos em $\mathbb{P}$, então existe um filtro $\mathscr{G} \subset \mathbb{P}$ tal que $D_\alpha \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in \omega$.

Vamos definir um forcing adequado para demonstrar o teorema.

Definição 4.3.1. Seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as funções p tais que

- $\operatorname{dom}(p) \subset \omega_1$; $|\operatorname{dom}(p)| < \omega_1$;
- $\operatorname{ran}(p) \subset \{0,1\}$.

Dizemos que uma condição p é mais forte do que q se $p \supset q$.

Se V é um modelo e G é um filtro $\mathscr{D}$-genérico sobre V, temos $f = \bigcup G$ uma função de ω_1 em $\{0,1\}$, ainda, $X = \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = 1\}$ é subconjunto de ω_1 e $X \notin V$.

Proposição 4.3.2. Seja $\mathbb{P}$ enumeravelmente fechado. Seja A conjunto e seja $\dot{f}$ nome tal que $p \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \longrightarrow \check{A}$, para algum $p \in \mathbb{P}$. Então existem $f : \omega \longrightarrow A$ e $q \leq p$ tais que $q \Vdash \check{f} = \dot{f}$.

O próximo lema é bastante técnico e não será provado aqui, mas sua demonstração pode ser vista em (TODORCEVIC, 1989).

Lema 4.3.3 (Todorčević)**.** Assuma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $[X]^2 = K_0 \cup K_1$, onde K_0 é coloração aberta, e assuma que X não é união enumerável de conjuntos K_1-homogêneos. Então, existe um conjunto não enumerável $Y \subset X$ tal que para qualquer conjunto não enumerável $W \subset \{p \in [Y]^{<\omega} : p \text{ é } K_0\text{-homogêneo}\}$ existem $p, q \in W$ distintos tais que $p \cup q$ é K_0-homogêneo.

De posse desse lema podemos mostrar que iteração de forcing próprio é próprio:

Proposição 4.3.4. Se $\mathbb{P}$ é forcing próprio e $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{Q}$ é próprio, então $P * \dot{Q}$ é próprio.

Demonstração. Vamos mostrar que II tem estratégia vencedora na versão finita do *Proper Game*, quando consideramos $\mathbb{P} * \dot{Q}$.

Seja $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q}$ e considere o *Proper Game* jogado em $\mathbb{P} * \dot{Q}$ com a condição inicial $(p, \dot{q})$. Também considere o *Proper Game* jogado em $\mathbb{P}$ com a condição p e o jogado em $\dot{Q}$ com a condição $\dot{q}$. Sejam σ estratégia vencedora para II em $\mathbb{P}$ e $\dot{\tau} \in V^{\mathbb{P}}$, de forma que $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\tau}$ "é estratégia vencedora para II em $\dot{Q}$".

Vamos descrever a estratégia de II em $\mathbb{P} * \dot{Q}$. O Jogador I inicia escolhendo um nome para ordinal $\dot{\alpha}_0 \in V^{\mathbb{P}*\dot{Q}}$. Para escolher a resposta de II, que será dada por algum nome de ordinal $\dot{\gamma}_0$, vamos usar $\dot{\tau}$ e aplicá-la em $V^{\mathbb{P}}$. Qualquer $\mathbb{P} * \dot{Q}$-nome[6] de ordinal $\dot{\alpha}$ pode ser pensado como um $\mathbb{P}$-nome de um $\dot{Q}$-nome para ordinal, ou seja, estamos considerando que o elemento $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}*\dot{Q}}$ vem do elemento $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}}$, que por sua vez vem do elemento $\alpha \in V$.[7]

[6] Um elemento de $V^{\mathbb{P}*\dot{Q}}$.

[7] Nessa demonstração identificaremos de acordo com o contexto $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}*\dot{Q}}$ ou $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}}$ e $\alpha \in V$.

Agora, trabalhando no *Proper Game* em $\dot{Q}$ (dentro de $V^{\mathbb{P}}$), podemos aplicar $\dot{\tau}$, onde o Jogador I iniciou a primeira rodada com $\dot{\alpha}_0$ ($\dot{q} \Vdash \dot{\alpha}_0 \in \mathrm{Ord}$). Considere $\dot{\beta}_0$ a jogada de II seguindo $\dot{\tau}$. Dessa vez, olhando o *Proper Game* em $\mathbb{P}$, onde o Jogador I inicia jogando o elemento $\dot{\beta}_0$, então podemos definir a resposta de II de acordo com a estratégia σ, dessa forma definimos $\gamma_0 \doteq \sigma(p, \beta_0)$.

Note que $\dot{\gamma}_0$ pode ser considerado um $\mathbb{P} * \dot{Q}$-nome de ordinal e, portanto, é uma jogada válida para II.

Na rodada n, I joga um $\mathbb{P} * \dot{Q}$-nome para ordinal. Em $\dot{Q}$, $\dot{\alpha}_n$ é $\dot{Q}$-nome para ordinal, então aplicamos $\dot{\tau}$ e recebemos o ordinal $\dot{\beta}_n$. Em $\mathbb{P}$, consideramos $\dot{\beta}_n$ como a n-ésima jogada de I, a estratégia vencedora σ nos devolve γ_n e, definimos a jogada de II como sendo o $\mathbb{P} * \dot{Q}$-nome para ordinal γ_n.

Como $p \Vdash$ "$\dot{\tau}$ é estratégia vencedora", temos

$$p \Vdash (\exists \dot{q}' \leq \dot{q}; \dot{q}' \Vdash \forall n \in \omega, \exists m \in \omega, \dot{\alpha}_n = \dot{\beta}_m)$$

É claro que $p \Vdash \dot{q}' \leq \dot{q}$, então

$$(p, \dot{q}') \Vdash \forall n \in \omega, \exists m \in \omega, \dot{\alpha}_n = \dot{\beta}_m$$

Como II segue a estratégia vencedora σ, existe um $p' \leq p$ tal que

$$p' \Vdash \forall m \in \omega, \exists k \in \omega; \dot{\beta}_m = \dot{\gamma}_k$$

Juntando tudo, temos $(p', \dot{q}') \leq (p, \dot{q})$ e

$$(p', \dot{q}') \Vdash \forall n \in \omega, \exists k \in \omega, \dot{\alpha}_n = \dot{\gamma}_k$$

Portanto, a estratégia definida em $\mathbb{P} * \dot{Q}$ é vencedora. $\square$

Essa proposição talvez dê uma pista do que precisaremos fazer para mostrar o próximo teorema, basicamente, iremos usar o forcing apresentado nessa seção para conseguir um universo em que vale o OCA usando o PFA e a iteração de forcing próprios para garantir a existência de um subconjunto não enumerável e K_0-homogêneo num conjunto arbitrário X.

Teorema 4.3.5. PFA $\implies$ OCA.

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e considere uma partição $[X]^2 = K_0 \cup K_1$, onde K_0 é coloração aberta. Suponha que X não é união de enumeráveis conjuntos K_1-homogêneos. Vamos mostrar que existe um subconjunto não enumerável de X que é K_0-homogêneo.

Considere o forcing $\mathbb{P}$ como na Definição 4.3.1. Vamos mostrar algumas características que $\mathbb{P}$ possui.

Afirmação 4.3.1. $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado.

Demonstração. De fato, seja $(p_n)_n$ sequência em $\mathbb{P}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$, para todo $n \in \omega$. Defina $p \doteq \bigcup_{n\in\omega} p_n$, note que $p \in \mathbb{P}$ pois cada p_n tem domínio enumerável e, portanto, como p é união enumerável de elementos, temos $\mathrm{dom}(p) \subset \omega_1$. Além disso, como $p \supset p_n$, temos $p \leq p_n$, para todo $n \in \omega$, como queríamos. □

Afirmação 4.3.2. $V^{\mathbb{P}}$ satisfaz $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Demonstração. Para demonstrar essa afirmação, vamos usar sem nos preocupar com os detalhes a bijeção entre $\omega_1 \times \omega$ e ω_1.

Seja G um filtro sobre V e veja que os elementos $p^{'} \in G$ são da forma $p^{'} : K \subset \omega_1 \times \omega \longrightarrow \{0,1\}$, $|K| < \omega_1$. Considere $p = \bigcup_{p^{'}\in G} p^{'}$, já sabemos que p é uma função de ω_1 para $\{0,1\}$.

Nosso objetivo é mostrar que a função $f : \omega_1 \longrightarrow 2^{\omega}$, dada por $\alpha \longrightarrow g = p(\alpha,\cdot)$, é sobrejetora. Considere o conjunto denso em $\mathbb{P}$, para cada $g \in 2^{\omega}$, dado por

$$D_g \doteq \{q \in \mathbb{P} : \exists \alpha, g = q(\alpha,\cdot)\}$$

vamos mostrar que D_g é denso em $\mathbb{P}$.

De fato, seja $q \in D_g \setminus \mathbb{P}$, como $|\mathrm{dom}(q)| < \omega_1 \cong \omega_1 \times \omega$, então existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $(\alpha,n) \notin \mathrm{dom}(q)$, para todo $n \in \omega$. Considere $q^{'}$ a extensão de q tal que, para cada $n \in \omega$,

$$q^{'}(\xi,n) = \begin{cases} q(\xi,n), & \text{se } \xi \neq \alpha \\ g(n), & \text{se } \xi = \alpha \end{cases} \tag{4.1}$$

i.e, $q^{'} = q \cup \{((\alpha,n),g(n)) : n \in \omega\}$.

Claramente, $q^{'} \leq q$ e $q^{'} \in D_g$ já que $q^{'}(\alpha,n) = g(n)$, para todo $n \in \omega$. Dessa forma, D_g é denso.

Como G é filtro $\mathscr{D}$-genérico, G intercepta D_g, para todo $g \in 2^{\omega}$. Dessa forma, podemos garantir que a função $f : \omega_1 \longrightarrow 2^{\omega}$ é sobrejetora.

De fato, se $g \in 2^{\omega}$, como G intercepta D_g, existem $q \in D_g$ e $\alpha \in \omega_1$ tais que $g = q(\alpha,\cdot)$ e $p \supset q$, logo, como $f_{|\mathrm{dom(q)}}(\alpha) = q(\alpha,\cdot) = p_{|\mathrm{dom(q)}}(\alpha,\cdot)$, temos $g = p(\alpha,\cdot)$. Portanto, f é sobrejetora e concluímos que $\omega_1 \geq 2^{\omega}$[8] □

Já sabemos que $\mathbb{P}$ não adiciona nenhum número real novo, tendo em vista a Proposição 4.3.2. Agora, vamos mostrar que $\mathbb{P}$ não adiciona nenhum conjunto fechado novo de reais.

Suponha que exista $p \in \mathbb{P}$ tal que para todo $q \in \mathbb{P}$, $q \leq p$ não existe W aberto tal que $q \Vdash \dot{A} = \check{W}$. Como A é aberto e $\mathbb{R}$ possui base enumerável, fixe $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ base enumerável de abertos em $\mathbb{R}$ e $q \Vdash \dot{A} = \bigcup_{k\in\omega} \check{B_{n_k}}$, para algum $q \leq p$.

[8] Como sempre vale $\omega_1 \leq 2^{\omega}$, temos $V^{\mathbb{P}}$ satisfazendo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Note que $q \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \longrightarrow \{0,1\}\check{}$

$$\dot{f}(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = n_k \text{ é função} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.2}$$

dessa forma, $q \Vdash \dot{f}$ é número real e já sabemos que existe $g \in \mathbb{R}$ tal que $q \Vdash \dot{f} = \check{g}$. Note que definindo o aberto $W \subset \mathbb{R}$, dado por $W \doteq \bigcup_{n \in g^{-1}\{1\}} B_n$, temos $q \Vdash \dot{A} = \check{W}$ e, como $q \leq p$, $p \Vdash \dot{A} = \check{W}$ contrariando nossa hipótese.

Logo, $\mathbb{P}$ não adiciona nenhum aberto novo e, consequentemente, não adiciona nenhum fechado novo. Dessa forma, podemos concluir que, em $V^{\mathbb{P}}$, X também não é união enumerável de conjuntos K_1-homogêneo.

Pelo lema 4.3.3, sabemos que existe $\dot{Y} \in V^{\mathbb{P}}$ não enumerável, de forma que ao definir o conjunto $\dot{Q} \doteq \{\dot{p} \in [\dot{Y}]^{<\omega} : \dot{p}$ é K_0-homogêneo$\}$ (p é uma condição mais forte do que q quando $p \supset q$), temos $\dot{Q}$ um forcing *ccc*.

Vamos mostrar que $\dot{Q}$ é de fato *ccc*. Seja $\{p_\xi : \xi < \omega_1\}$ uma anticadeia não enumerável, pelo lema 4.3.3, existem $p_\xi \neq p_\gamma$ tais que $p_\xi \cup p_\gamma$ é K_0-homogêneo e, portanto, p_ξ, p_γ são compatíveis já que $p_\xi \cup p_\gamma \leq p_\xi, p_\gamma$, contrariando o fato de $\{p_\xi : \xi < \omega_1\}$ ser anticadeia.

Como $\dot{Q}$ é *ccc*, pela proposição 3.1.7, $\dot{Q}$ é próprio. Pela proposição 3.1.6, o forcing $\mathbb{P}$ é próprio e, finalmente, pela proposição 4.3.4, $P * \dot{Q}$ é próprio.

Considere $\{\dot{y_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ uma enumeração de $\dot{Y}$ em $V^{\mathbb{P}}$. Podemos definir, para cada $\alpha < \omega_1$, o conjunto $D_\alpha \doteq \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q} : p \Vdash \dot{y_\alpha} \in \dot{q}\}$ e é fácil ver que D_α é denso em $\mathbb{P} * \dot{Q}$.

Defina a família de densos $\mathscr{D} \doteq \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, então PFA garante que existe filtro $\mathscr{D}$-genérico G em $P * \dot{Q}$, como $\dot{Q}$ só possui elementos K_0-homogêneos, o conjunto dado por $\dot{Z} = \bigcup\{\dot{q} : (p, \dot{q}) \in G\}$ é não enumerável e K_0-homogêneo em X. Portanto, vale OCA em $V^{\mathbb{P}}$.

Finalmente, note que qualquer nome em $V^{\mathbb{P}}$ é algum elemento em V, dessa forma, vale OCA em V. $\square$

CAPÍTULO

5

GENERALIZAÇÕES DO OCA

Teoria dos Conjuntos compõe a base para a matemática moderna. Várias técnicas foram desenvolvidas para tratar de problemas encontrados em Teoria dos Conjuntos, como o Forcing. Muitos dos seus princípios e axiomas foram estudados extensamente ao longo das décadas e um dos tópicos mais interessantes que adicionam à teoria básica de conjuntos é a relação entre axiomas.

Neste capítulo discutimos algumas possibilidades de generalizações do OCA e mostraremos que, nos casos que consideramos, não é possível generalizar o OCA. No entanto, alguns problemas em aberto continuam e como suas formulações parecem abstrair ligeiramente o enunciado original do OCA, ainda não temos uma resposta para a validade ou não delas. O próximo exemplo mostra que não podemos substituir abertos por fechados.

Teorema 5.0.1. Existe uma coloração

$$[\omega^\omega]^2 = K_0 \cup K_1 \tag{5.1}$$

com K_0 coloração aberta tal que não existem conjuntos não enumeráveis K_1-homogêneos e ω^ω não é a união de enumeráveis conjuntos K_0-homogêneos.

Demonstração.

Vamos assumir que a seguinte versão de OCA é verdadeira:

Seja S um conjunto e

$$[S]^2 = K_0 \cup K_1$$

é uma partição com K_0 uma coloração aberta, então uma das seguintes alternativas é verdadeira:

- $\exists$ um subconjunto de S que é K_1-homogêneo não enumerável;
- S pode ser coberto por enumeráveis conjuntos K_0-homogêneos.[1]

[1] Aqui só trocamos quem seria homogêneo para K_0 ou K_1 na definição original.

Vamos mostrar que tal generalização não pode ser verdadeira para ω^ω

Seja $f \in \omega^\omega$, vamos associar uma sequência $\{f_i : i \in \omega\}$ convergindo para f da seguinte forma:

Sejam $n_0 < n_1 < \ldots$ tais que $f(2n_i + 1) \neq 0$, para todo $i \in \omega$. Para dado $j \in \omega$, denotamos a função f_j de forma que:

- $f_{j|n_k} = f_{|n_k}$
- $f_j(n_k + l) = f(2^{j+1}(2n_k + 2l + 1))$, onde $k = k(j)$ é o menor número tal que $f(2n_0 + 1) + \ldots + f(2n_k + 1) > j$, para caso exista tal $k \in \omega$

Caso contrário, defina

- $f_j = f$

Considere a seguinte partição para $[\omega^\omega]^2 = K_0 \cup K_1$, dado por

$$\{f, g\} \in K_0 \iff f \neq g_i \text{ e } g \neq f_i, \text{ para todo } i \in \omega$$

e $K_1 \doteq \omega^\omega \setminus K_0$[2]. Claramente, K_0 é coloração aberta.

Afirmação 5.0.1. Não existem conjuntos não enumeráveis K_1-homogêneos.

Demonstração.

Suponha que exista $Y \subset \omega^\omega$ não enumerável e K_1-homogêneo. Seja D um denso enumerável contido em Y e defina o conjunto:

$$D' \doteq \{f_i : f \in D \text{ e } i \in \omega\}$$

Escolha $g \in Y \setminus D'$ e $h \in Y$ tais que $h \neq g_i$, para todo $i \in \omega$. Note que g, h podem ser escolhidos dessa forma pois $\{f, g\} \in K_1$, já que Y é K_1-homogêneo. Em particular, $g = h_i$ ou $h = g_i$, para algum $i \in \omega$. Veja que essa condição é satisfeita trivialmente para $h \in D$, já que $h_i \in D'$ e $g \in Y \setminus D'$.

Agora, perceba que existe A aberto tal que $h \in A$ mas $g_i \notin A$, para todo $i \in \omega$. Para enxergar essa propriedade, basta considerar $\omega^\omega \subset \mathbb{R}$. Veja que como $h \neq g_i$, para todo $i \in \omega$, em particular, $g \not\to h$, ou seja, existe $A \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $h \in A$ mas $g_i \notin A$, para todo $i \in \omega$.

Como D é denso, escolha $f \in A \cap D$ e note que $\{f, g\} \in K_0$, pois $f \neq g_i$ pela propriedade de A e $g \neq f_i$ pois $f \in D$ e $g \in Y \setminus D'$. $\square$

Afirmação 5.0.2. ω^ω não é união de enumeráveis conjuntos K_0-homogêneos.

[2] $\{f, g\} \in K_1 \iff f = g_i \text{ ou } g = f_i, \text{ para algum } i \in \omega$

Demonstração.

Suponha que $\omega^\omega = \bigcup_{n\in\omega} H_n$, com H_n K_0-homogêneo. Vamos construir uma função $f \in \omega^\omega$ que escapa de todos os H_n.

Primeiro, defina $f(2i+1) = 1$, para todo $i \in \omega$. Vamos definir indutivamente $f(2i)$ e as f_i associadas a f, para todo $i \in \omega$.

Suponha que $f_{|2_l}$ está definida, assim como cada f_i, para algum $l \in \omega$ e para todo $i < l$. Se $2l = 2^{i+1}(2i+2j+1)$, para algum $i < l$ e $j \in \omega$, então defina $f(2l) = f_i(i+j)$. Caso contrário, escolha $f(2l)$ como qualquer número diferente de $f_i(2l)$, para todo $i < l$.

Resta definir f_l, se existe $g \in H_l$ tal que $g_{|l} = f_{|l}$, então defina $f_l = g$. Caso contrário, defina f_l como sendo qualquer função tal que $f_{|l} \subset f_l$.

Agora, falta garantir que $f \notin H_n$, para todo $n \in \omega$. Note que $f \neq f_n$, para todo $n \in \omega$, por construção[3]. Fixe $n \in \omega$ e suponha que $f \in H_n$, note que para $g = f$, temos $f_{|n} = g_{|n}$ e, pela construção da sequência $(f_i)_i$, temos $f_n = f$, contradição. $\square$

Juntando as duas afirmações, garantimos que a generalização de OCA não vale para ω^ω. $\square$

Uma pergunta natural é se conseguimos generalizar o OCA para dimensões maiores que 2 e com mais cores. É consistente que para toda coloração aberta de triplas num subconjunto de reais S em finitas cores, existe um subconjunto não enumerável de S que atinge no máximo 2 cores? O próximo exemplo mostra que isso não é possível, na verdade, conseguimos responder uma pergunta mais geral: é consistente que para toda coloração aberta de triplas num subconjunto de S em enumeráveis cores, existe um subconjunto não enumerável de S que atinge n cores, para algum $n \in \omega$? Mostraremos adiante que a resposta para essa pergunta também é negativa.

Teorema 5.0.2. Existe um subconjunto X de ω^ω e uma função $f : [X]^3 \longrightarrow \omega$ tal que se Y é subconjunto não enumerável de X, então $f''[X]^3 = \omega$.

Demonstração.

Considere uma coloração $k : \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ tal que, dados $m > 0, s \in \omega^\omega, D \subset \omega^{<\omega}$ finito e uma função $\sigma : D \longrightarrow \omega$, existe $n \in \omega$ tal que para todo $t \in D$, vale que:

$$k(t, s^\frown n) = \sigma(t)$$

Primeiro, vamos mostrar que existe uma coloração com a propriedade acima. Como o conjunto de todas as funções finitas que mapeam $\omega^{<\omega}$ em ω tem tamanho enumerável, considere

[3] Mais especificamente, por construção para dado $l \in \omega$, temos para todo $i < l$ o valor $f(2l)$ diferente de $f_i(2l)$, ou seja, se $f = f_n$ para algum $n \in \omega$, temos $f(2i) = f_n(2i)$, para todo $i \in \omega$, uma contradição.

uma enumeração $\{\sigma_i : i \in \omega\}$ desse conjunto. Para definir uma coloração apropriada, sejam $s,t \in \omega^{<\omega}$ de forma que $s \in \omega^m$ e defina $n \doteq s(m-1)$. Agora, podemos definir

$$k(t,s) = \begin{cases} \sigma_n(t), & \text{se } t \in \mathrm{dom}(\sigma_n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{5.2}$$

Veja que, com essa definição, para dados $m \in \omega, s \in \omega^m, D \subset \omega^{<\omega}$ finito e $\sigma : D \longrightarrow \omega$, pela enumeração $s(m-1) = n \in \omega$ é tal que $\sigma = \sigma_n$ e

$$\sigma(t) = \sigma_n(t) = k(t,s)$$

por construção. Note que a última coordenada de s vale n, então a propriedade que queríamos para k está preservada.

Antes de partirmos para o final da demonstração, vamos enunciar e demonstrar um lema para obter a propriedade que precisamos para colorações de triplas a partir de colorações de pares.

Lema 5.0.3. Seja $c : [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega$ uma coloração. Então, existe uma sequência de funções $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tais que para todos $\alpha < \beta < \omega_1$ existe $n \in \omega$ tal que $k(r_{\alpha_{|m}}, r_{\beta_{|m}}) = c(\alpha,\beta)$, para todo $m \geq n$.

Demonstração.

Vamos usar indução transfinita para mostrar que existe tal sequência com a propriedade desejada.

Suponha que a construção esteja feita para r_ξ, para todo $\xi < \alpha$. Precisamos definir r_α, para isso considere uma função bijetora $e_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega$ e considere o conjunto

$$F_n(\alpha) \doteq \{\xi < \alpha : e_\alpha(\xi) < n\}$$

Defina $r_\alpha(m)$ recursivamente da seguinte forma: para dado $r_{\alpha_{|m}}$, seja $l \leq m$ o maior número tal que se $\xi, \eta \in F_l(\alpha)$ e $\xi \neq \eta$, então $r_{\xi_{|m+1}} \neq r_{\eta_{|m+1}}$[4].

Aplicando a propriedade de k e a hipótese de indução a $r_{\alpha_{|m}}$ e $r_{\xi_{|m+1}}$, para todo $\xi \in F_l(\alpha)$, sabemos que existe $n \in \omega$ tal que para todo $\xi \in F_l(\alpha)$ temos

$$k(r_{\xi_{|m+1}}, r_{\alpha_{|m}}{}^\frown n) = c(\xi,\alpha)$$

Dessa forma, basta definir $r_\alpha(m) \doteq n$ e conseguimos a sequência desejada □

De posse desse lema, podemos retornar a demonstração do teorema. Agora, precisamos definir uma f e um X convenientes que ao tomarmos um $Y \subset X$ não enumerável, tenhamos

[4] Observe que sempre existe tal l, já que para $F_1(\alpha)$ a propriedade exigida vale por vacuidade.

$f''[Y]^3 = \omega$. Sabemos que existe[5] $c : [\omega_1]^2 \longrightarrow \omega$ uma coloração tal que para todo $U \subset \omega_1$ não enumerável, temos $c''[U]^2 = \omega$. Considere $X \doteq \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ a sequência do lema anterior, considere a ordem lexicográfica em X e defina $f : [X]^3 \longrightarrow \omega$, para $x, y, z \in X$ tais que $x < y < z$, da seguinte forma

$$f(\{x,y,z\}) = k(x_{|\Delta(y,z)}, y_{|\Delta(y,z)})$$

Como k é coloração, segue que f é contínua. Para finalizar basta mostrarmos que se $Y \subset X$ é não enumerável, então para todo $i \in \omega$ existem $x, y, z \in Y$ tais que $f(\{x,y,z\}) = i$. Sejam $Y \subset X$ não enumerável e $i \in \omega$, note que podemos enxergar Y como subconjunto de ω_1(basta tomar uma bijeção entre X e ω_1), podemos assumir que $c''[Y]^2 = \omega$, ou seja, existem $r_\alpha, r_\beta \in Y$ tais que $c(\alpha, \beta) = i$. Pelo lema anterior, existe $n \in \omega$ tal que $k(r_{\alpha_{|m}}, r_{\beta_{|m}}) = i$, para todo $m \geq n$. Podemos assumir que Y é denso em si mesmo e, portanto, tem que existir[6] um $r_\gamma \in Y$ tal que $\Delta(r_\beta, r_\gamma) \geq n$ e, pela definição de f, temos $f(\{r_\alpha, r_\beta, r_\gamma\}) = k(r_{\alpha_{|\Delta(r_\beta, r_\gamma)}}, r_{\beta_{|\Delta(r_\beta, r_\gamma)}}) = i$, como queríamos. $\square$

Agora, vamos deixar alguns problemas em aberto que encontramos ao longo dos nossos estudos.

Questão 5.0.4. A seguinte versão do OCA é consistente?

Se S é um conjunto topológico regular sem subconjuntos não enumeráveis discretos e

$$[S]^2 = K_0 \cup K_1$$

é uma partição com K_0 coloração aberta, então:

- Existe um subconjunto não enumerável K_0-homogêneo em S;
- S pode ser coberto por enumeráveis conjuntos K_1-homogêneos.

Essa versão enfraquece ao máximo as exigências topológicas para S. Essa pergunta aparece no artigo (TODORCEVIC, 1989) como uma conjectura e é apresentada novamente no artigo (VELICKOVIC, 1992), mostrando a dificuldade de encontrar uma resposta para essa pergunta.

Ao longo desse texto, não trabalhamos com cardinais maiores do que $\aleph_1$, mas a próxima versão do OCA fala sobre o que pode acontecer quando tentamos extrapolar o enunciado de OCA para conjuntos de cardinalidade maior que $\aleph_1$ e levantamos a questão sobre a consistência dessa versão com o CH.

[5] A existência da coloração está provada em (TODORCEVIC, 1987).

[6] Aqui estamos aplicando a propriedade de densidade para o conjunto $Y \setminus \{x : \Delta(x,y) \leq n$, para todo $y \in Y\}$.

Questão 5.0.5. A seguinte versão de OCA é consistente com a negação de CH?

Se S é um subconjunto dos reais de tamanho maior que $> \aleph_1$ e

$$[S]^2 = K_0 \cup K_1$$

é uma partição com K_0 e K_1 colorações abertas, então existe um subconjunto de S de tamanho $> \aleph_1$ e homogêneo para K_0 ou para K_1.

Pela forma como a versão é enunciada, não faria sentido considerarmos a possibilidade dela ser consistente com CH, pois um conjunto com cardinalidade maior que $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ não existiria como subconjunto dos reais.

Certamente, novas técnicas são necessárias para que possamos responder essa pergunta, ao longo do estudo realizado não encontramos nenhuma técnica satisfatória para resolver essa questão.

REFERÊNCIAS

AURICHI, L. F. Notas de aula: Aplicações de teoria dos conjuntos. In: . [S.l.: s.n.], 2020. Nenhuma citação no texto.

____. Notas de aula: Topologia. In: . [S.l.: s.n.], 2021. Citado na página 21.

CAROTENUTO, G. An introduction to oca. In: . [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 21.

DIESTEL, R. **Graph Theory**. New York: Springer, 2000. Citado na página 70.

JECH, T. **Multiple Forcing**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1987. 136 p. Citado na página 39.

____. **Set Theory: The Third Millennium Edition**. [S.l.]: Springer, 2003. Nenhuma citação no texto.

KUNEN, K. **Set theory: an introduction to independence proofs**. [S.l.]: Elsevier North-Holland, 1980. Citado na página 21.

MONTENEGRO, C. H. Partition properties of the reals. **Set Theory: Techniques and Applications**, Springer Science + Business Media Dordrecht, p. 199–206, 1998. Nenhuma citação no texto.

NYKOS, P. e. a. Complete normality and countable compactness. **Topology Proceedings**, v. 17, p. 395–403, 1992. Citado na página 35.

TODORCEVIC, S. Remarks on cellularity in products. **Compositio Mathematica**, v. 57, p. 357–372, 1986. Citado na página 78.

____. Partition pairs of countable ordinals. **Acta Mathematica**, v. 159, p. 261–294, 1987. Citado na página 63.

____. Partition problems in topology. **Contemporary Mathematics**, v. 84, p. 1–113, 1989. Citado nas páginas 19, 55 e 63.

____. Remarks on martin's axiom and the continuum hypothesis. **Canadian Mathematical Society**, v. 43, p. 832–851, 1991. Citado na página 77.

VELICKOVIC, B. Applications of the open coloring axiom. **Set Theory of the Continuum**, p. 137–154, 1992. Citado na página 63.

APÊNDICE

A

GRAFOS E O TEOREMA DE KURATWOSKI

Nesta parte buscamos responder a pergunta: que grafos são planares? Um resultado bem conhecido é que nenhum grafo planar contém um K^5 ou $K_{3,3}$ como minor topológico, mas em 1930 Kuratowski provou que a recíproca também é verdadeira, ou seja, qualquer grafo que contenha um K^5 ou $K_{3,3}$ como minor topológico não pode ser planar. Para demonstrar esse fato, vamos quebrar a prova em vários pedaços usando vários lemas e proposições e ao final seremos capazes de mostrar o teorema de Kuratowski como um corolário.

Antes de começarmos as demonstrações, vamos apresentar algumas definições para melhor compreensão.

A.1 Definições

Definição A.1.1. Um **grafo** é um par $G = (V,E)$ de conjuntos satisfazendo $E \subset [V]^2$, portanto, os elementos de E são subconjuntos de 2 elementos de V. Sempre assumiremos que $V \cap E = \emptyset$. Os elementos de V são os **vértices** do grafo G. Os elementos de E são as **arestas**.

Tipicamente, podemos enxergar facilmente um grafo desenhando um ponto para cada vértice e juntando dois pontos por uma linha se os vértices correspondentes formam uma aresta.

Definição A.1.2. O conjunto de vértices de um grafo G é denotado por $V(G)$.

Nem sempre seremos estritos quando para diferenciar entre um grafo G e seu conjunto de vértice $V(G)$. Por exemplo, às vezes falaremos de um vértice $v \in G$ (ao invés de $v \in V(G)$).

Definição A.1.3. O número de vértices de um grafo G é sua **ordem**, denotado por $|G|$.

Definição A.1.4. Uma aresta $\{x,y\}$ é denotada por xy (ou yx). Dois vértices são **adjacentes**, ou **vizinhos**, se xy é uma aresta de G. Duas arestas são **adjacentes** se eles tem um vértice em comum. Se todos os vértices de G são conectados dois a dois, então G é **completo**. Um **grafo completo de** n **vértices** é denotado por K^5.

Definição A.1.5. Definimos uniões e interseções de grafos da seguinte forma: $G \cup G^{'} \doteq (V \cup V^{'}, E \cup E^{'}$ e $G \cap G^{'} \doteq (V \cap V^{'}, E \cap E^{'}$. Se $G \cap G^{'} = \emptyset$, dizemos que os grafos são disjuntos. Se $V^{'} \subset V$ e $E^{'} \subset E$, então $G^{'}$ é um **subgrafo** de G, escrito como $G^{'} \subset G$. Também falamos informalmente que G contém o $G^{'}$.

Definição A.1.6. Se $G^{'} \subset G$ e $G^{'}$ contém todas as arestas $xy \in E$, com $x, y \in V^{'}$, então $G^{'}$ é um **grafo induzido** de G. Dizemos que $V^{'}$ **induz** $G^{'}$ em G, e escrevemos $G^{'} \doteq G[V^{'}]$.

Com essa definição, se $U \subset V$ é qualquer conjunto de vértices, então $G[U]$ denota o grafo em U cujas arestas são exatamente as arestas de G com os dois vértices em U.

Também precisaremos do conceito de grafos bipartidos para conseguirmos definir um grafo $K_{3,3}$, mencionado na introdução do capítulo.

Definição A.1.7. Seja $r \geq 2$ um inteiro. Um grafo $G = (V, E)$ é dito r**-partido** se V admite uma partição em r classes tais que toda aresta tem seus vértices em classes diferentes[1]. Se um grafo é 2-partido, dizemos apenas que o grafo é bipartido. Um grafo r-partido que quaisquer dois vértices de classes diferentes são adjacentes é chamado de **completo**. Chamamos de K_s^r o grafo r-partido completo tal que qualquer classe da partição contém exatamente s vértices.

Usaremos a palavra **branch** para denotar as classes de um grafo r-partido.

A.2 Teorema de Kuratowski

De posse dessas definições podemos seguir com a demonstração do Teorema de Kuratowski. A próxima proposição não será provada mas é necessária para demonstrar o próximo lema.

Proposição A.2.1.

- Todo minor topológico de um grafo é também um minor desse grafo.
- Todo minor com grau máximo 3 de um grafo é também um minor topológico desse grafo.

Lema A.2.2. Um grafo contém K^5 ou $K_{3,3}$ como minor se, e somente se, também contém K^5 ou $K_{3,3}$ como minor topológico.

Demonstração.

Pela primeira parte da proposição A.2.1, sabemos que todo minor topológico é um minor. Note ainda que como $K_{3,3}$ tem grau máximo 3, podemos aplicar a segunda parte da proposição

[1] Vértices na mesma partição não podem ser adjacentes.

A.2.1 e garantir que se $K_{3,3}$ é minor de algum grafo, $K_{3,3}$ também é um minor topológico desse grafo.

Assim, basta mostrarmos que se um grafo contém K^5 como minor, então tal grafo contém um K^5 como minor topológico ou um $K_{3,3}$ como minor[2].

Seja $K^5 \preceq G$ e seja K um exemplar minimal de K^5 em G. Veja que qualquer conjunto branch de K induz uma árvore, caso contrário, algum branch de K contém um ciclo, ou seja, podemos retirar uma aresta desse branch e continuar com um modelo para K^5, logo, K não seria minimal, contradição. Pela mesma razão, só podemos ter uma única aresta entre dois branchs.

Seja $\{V_{x_i} : 1 \leq i \leq 5\}$ os branchs de K. Se tomarmos as árvores induzidas por V_{x_i} e adicionar os 4 vértices que se conectam aos outros branchs, temos uma nova árvore que chamaremos de T_{x_i}. Novamente, por K ser minimal, a árvore T_{x_i} tem exatamente 4 folhas[3] que são os 4 vizinhos de V_{x_i} nos outros branchs de K (Figura 1).

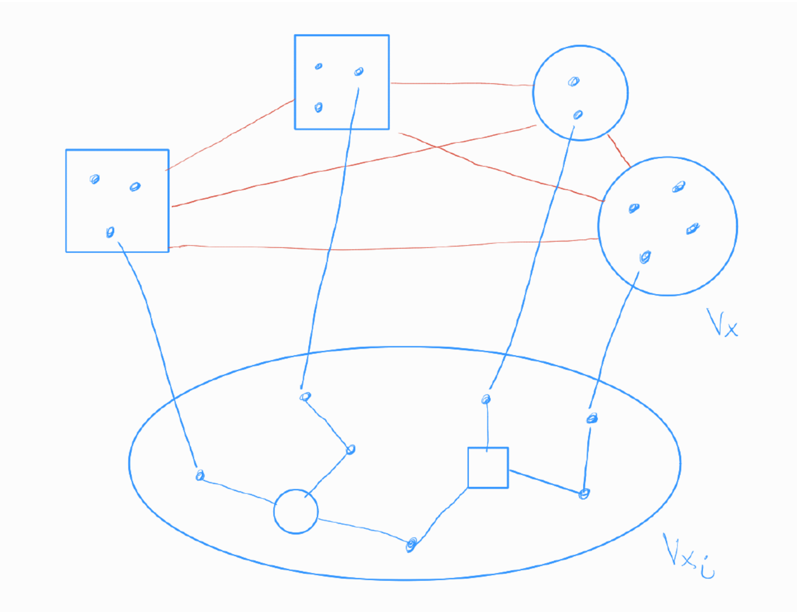

Figura 1 – Ilustração de um IK^5.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se cada uma das cinco árvores T_{x_i} for um $TK_{1,4}$, então K é um TK^5. Para T_{x_i} ser $TK_{1,4}$ é necessário que T_{x_i} tenha um vértice de grau 4 e exista um caminho desse vértice para as 4 folhas de T_{x_i}. Claramente, se esse é o caso K seria um TK^5 e terminamos. Se alguma T_{x_i} não for $TK_{1,4}$ os vértices de T_{x_i} não podem ter grau maior que 4 pois K é minimal e não pode ser igual a 4 pois estamos assumindo que T_{x_i} não é $TK_{1,4}$. Mas isso implica que T_{x_i} tem dois vértices de grau 3, pois T_{x_i} tem 2 vértices com 2 arestas conectando a outros branchs de K e, como T_{x_i} é árvore,

2 Já mostramos a equivalência do lema para o caso do $K_{3,3}$, normalmente é mais fácil de mostrar a existência de um minor.

3 Se existissem mais folhas, elas seriam conexões redundantes de K que poderiam ser retiradas e ainda teríamos um modelo para K^5, contrariando a minimalidade de K.

existe um caminho entre esses dois vértices, ou seja, T_{x_i} tem dois vértices de grau 3. Ao contrair V_{x_i} nesses dois vértices de grau 3 e cada branch em um vértice, obtemos um grafo de 6 vértices que contém $K_{3,3}$. Assim, $K_{3,3}$ é minor de K, como queríamos.

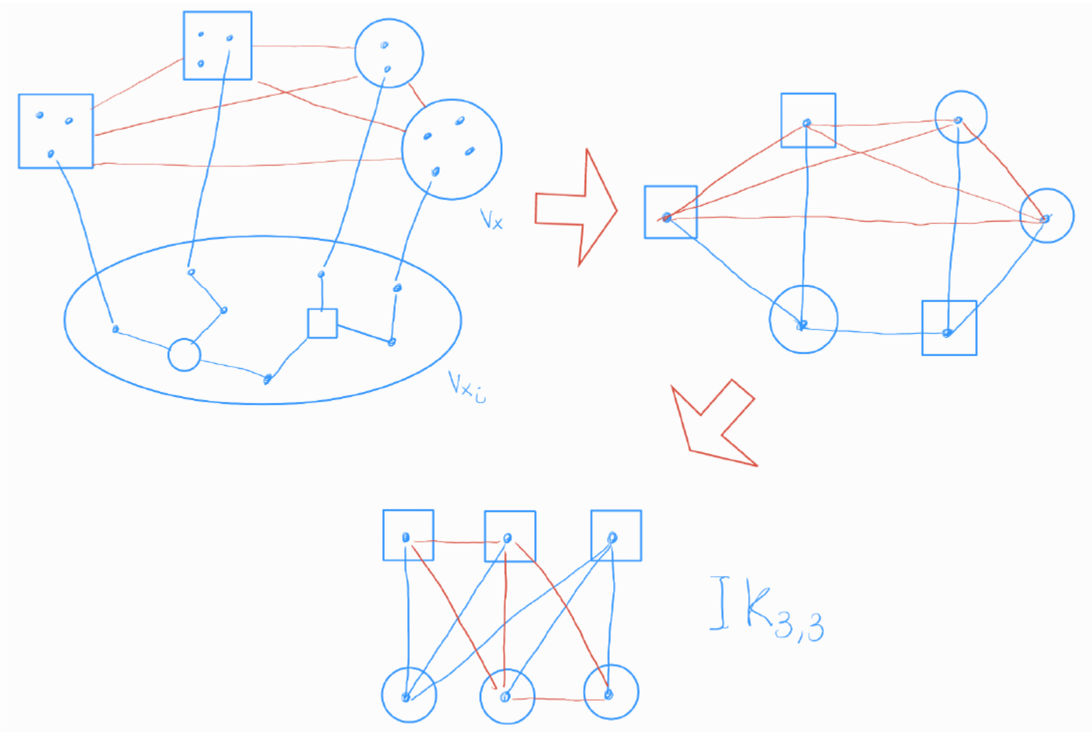

Figura 2 – Todo grafo IK^5 com dois vértices de grau 3, contém um grafo $IK_{3,3}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

□

Vamos mostrar o Teorema de Kuratowski para o caso particular de grafos 3-conexos, o caso geral segue desse caso somado a outras proposições que demonstraremos mais a frente. Precisamos de duas proposições cujas demonstrações não serão apresentadas aqui mas podem ser encontradas em (DIESTEL, 2000).

Lema A.2.3. Todo grafo 3-conexo $G \neq K^4$ possui uma aresta e tal que G/e é também 3-conexo.

Proposição A.2.4. Num grafo 2-conexo planar, toda face é limitada por um ciclo (toda fronteira de uma face forma um ciclo no grafo)

Lema A.2.5. Todo grafo 3-conexo G que não possui K^5 ou $K_{3,3}$ como minor é planar.

Demonstração.

Vamos demonstrar esse fato por indução no tamanho de G. O caso inicial que faz sentido é quando $|G| = 4$, como G é 3-conexo, só é possível que $G = K^4$ e, claramente, o resultado segue.

Suponha que $|G| > 4$ e que a afirmação é válida para qualquer grafo 3-conexo menor que $|G|$. Pelo lema A.2.3, sabemos que existe uma aresta xy tal que a contração de G nessa aresta é 3-conexo. A relação de minor é uma pré-ordem e, portanto, é transitiva e isso implica que G/xy não tem K^5 ou $K_{3,3}$ como minors.

Por hipótese de indução, G/xy tem um desenho $\tilde{G}$ no plano. Seja f a face de $\tilde{G} - v_{xy}$ que contém o ponto v_{xy}, denote C como a fronteira de f e $X \doteq N_G(x) \setminus \{y\}, Y \doteq N_G(y) \setminus \{x\}$[4]. Como v_{xy} pertence a f, é claro que X e Y estão contidos nos vértices de C. Agora, considere o conjunto

$$\tilde{G}' \doteq \tilde{G} - \{v_{xy}v : v \in X \setminus Y\}$$

pela forma como é definido, $\tilde{G}'$ é um desenho no plano para $G \setminus Y$ ao considerarmos o ponto v_{xy} como x. Resta mostrar que podemos adicionar y e suas arestas a $\tilde{G}'$ afim de obter um desenho para G no plano.

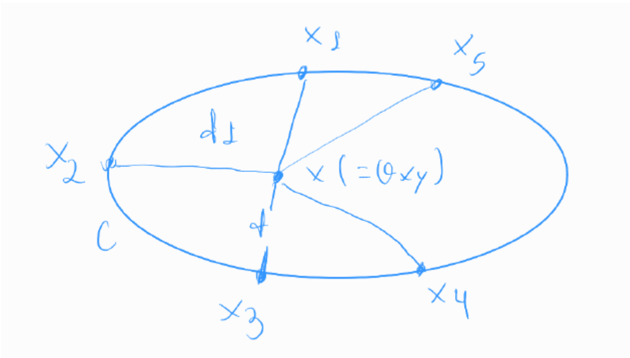

Figura 3 – Ilustração simplificada da face que contém v_{xy} (que é representado por x) e seus vizinhos no desenho $\tilde{G}'$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos garantir que $\tilde{G} - v_{xy}$ é 2-conexo, já que $\tilde{G}$ é 3-conexo e, pela proposição A.2.4, como f é limitada por C, sabemos que C é um ciclo. Sejam $x_1, ..., x_k$ os vértices de G que pertencem a C e denote por $P_i = x_i ... x_{i+1}$ os caminhos dentro de X de tais vértices, com $i = 1, ..., k$ e $x_{k+1} \doteq x_1$.

Vamos mostrar que $Y \subset V(P_i)$ para algum $i = 1, ..., k$. Suponha que não, se $y' \in P_i$ para algum i, e é vizinho de y, então y tem outro vizinho $y'' \in C - P_i$ por hipótese de indução. Note que y' e y'' são separados em C pelos vértices $x' \doteq x_i$ e $x'' \doteq x_{i+1}$. Se $Y \subset X$ e $|Y \cap X| \leq 2$, y tem y' e y'' como vizinhos que não pertencem ao mesmo P_i e, claramente, são separados em C pelos vértices x' e x''. Em ambos os casos, os vértices x, y', y'' e x', x'', y compõem um modelo para $TK_{3,3}$ em G, resultando numa contradição.

Resta apenas o caso em que x e y tem 3 vizinhos em comum, mas é fácil ver que x, y e esses três vértices formam um TK^5 e, novamente, chegamos numa contradição.

[4] X representa os vizinhos de x em G tirando o y, a definição é análoga para Y.

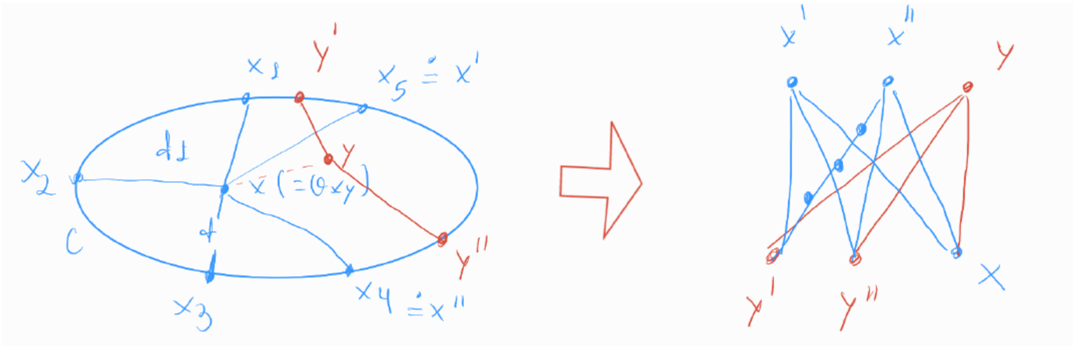

Figura 4 – Adicionar y e seus vizinhos implica na existência de um $TK_{3,3}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos mostrar que é possível acrescentar y e suas arestas numa face f_i de $\tilde{G}'$. Considere i de forma que $Y \subset P_i$, se também definirmos o ciclo $C_i \doteq xx_iP_ix_{i+1}x = xP_ix$ o conjunto $C \setminus P_i$ está contido em uma das faces de C_i. Definimos f_i como a face de C_i que não contém $C \setminus P_i$, pela definição das faces, como f_i contém pontos do plano próximos a x mas nenhum ponto de C, temos $f_i \subset f$. Note que as arestas xx_j com $j \neq x_i, x_{i+1}$, tem um ponto dentro de f_i e outro em $C \setminus P_i$ e, portanto, fora de f_i, dessa forma f_i não intercepta nenhuma aresta desse tipo. Logo, $f_i \subset \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{G}'$. Finalmente, basta colocar y e suas arestas dentro de f_i para obtermos o desenho no plano de G. $\square$

Lema A.2.6. Seja $\mathscr{X} \doteq \{K^5, K_{3,3}\}$ um conjunto de grafos 3-conexos. Seja G um grafo com uma separação $\{V_1, V_2\}$ própria de ordem $k(G) \leq 2$. Se G é maximal com respeito a arestas sem um minor topológico dentro de $\mathscr{X}$. Então $G_1 \doteq G[V_1]$ e $G_2 \doteq G[V_2]$ herdam essa propriedade, além disso, $G_1 \cap G_2 = K^2$.

Demonstração. Primeiro, veja que se existe algum vértice $v \in S \doteq V_1 \cap V_2$ que não tem ao menos um vizinho em cada componente de $G_i - S, i = 1, 2$, então $S \setminus \{v\}$ seria uma nova separação de G com menos elementos na intersecção, contrariando $|S| = k(G)$.

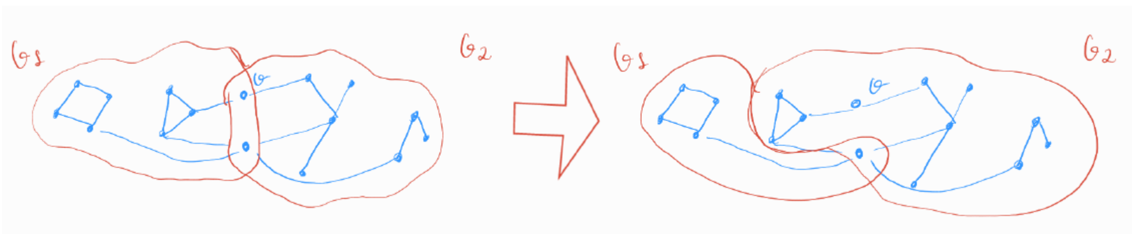

Figura 5 – Se v não se conecta a cada componente conexa de G_1 e G_2, obtemos uma nova separação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela maximalidade de G, se adicionarmos alguma aresta e, temos $TX \subset G + e$, para algum $X \in \mathscr{X}$. Vamos mostrar que o tamanho de S só pode ser 2 e que os vértices de S são conectados.

Suponha que $S = \emptyset$, escolha $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, agora adicionamos a aresta v_1v_2 a G. Note que o TX que passa a existir em G por conta de v_1v_2 só pode estar inteiramente contido em V_1 ou V_2, caso contrário, seria necessário que existissem mais do que 1 aresta entre V_1 e V_2 que é contradição com o fato de $\{V_1, V_2\}$ ser uma separação de G. Sem perda de generalidade, assuma que $TX \subset V_1$, mas como a aresta v_1v_2 não faz parte de TX (senão $TX \not\subset V_1$), TX já existia dentro de G_1 antes de adicionarmos e, portanto, TX já existia dentro de G e, consequentemente, temos uma contradição com o fato de G não admitir minor topológico dentro de $\mathscr{X}$.

Suponha que $S = \{v\}$ e adicione uma aresta e que conecta um vizinho $v_1 \in V_1 \setminus S$ a $v_2 \in V_2 \setminus S$ de v. Novamente, suponha que TX está inteiramente contido em V_1, caso contrário, existiriam pelo menos 2 caminhos entre V_1 e V_2 que também precisariam atestar a 3-conexidade dos grafos em $\mathscr{X}$ mas é fácil ver que ao retirar a aresta e atesta que TX não é 3-conexo. Isso implica que TX só intercepta V_2, no máximo, em uma aresta X, simbolizada por um caminho P. Veja que P passa, necessariamente, por v e por e, mas note que o seguimento vPv_1v_2 pode ser substituído por vv_1, isso implica que $TX \subset G_1$, contradição.

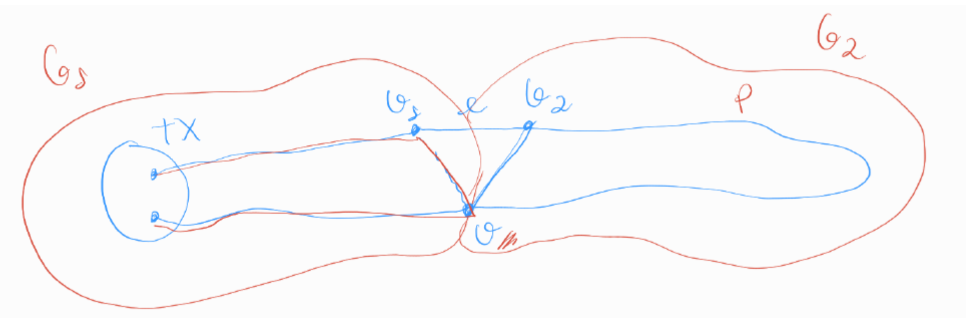

Figura 6 – Aresta do TX, simbolizada pelo caminho P.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos concluir que $|S| = 2$, resta mostrar que os vértices de S são conectados. Seja $S = \{x, y\}$, se xy não for uma aresta de G, sabemos que $G + xy$ dá origem a um TX contido em V_1 com apenas um caminho P passando por G_2 através de xy, podemos substituir a aresta xy por um caminho que passa por x e y em G_2, já que x e y são conectados a todas as componentes de $G_i - S, i = 1, 2$. Novamente, isso nos diz que $TX \subset G_1 \subset G$, contradição. Logo, $xy \in G$ e $S = K_2$.

Finalmente, vamos mostrar que G_1 e G_2 são maximais com respeito a arestas sem um minor topológico em $\mathscr{X}$. Sem perda de generalidade, suponha que e' é uma aresta a mais em G_1, então existe um TX, então existe um $TX \subset G + e'$ pela maximalidade de G, se P é um caminho de TX e aplicando a mesma ideia apresentada anteriormente, substituindo xPy por xy se necessário, mostramos que ou $TX \subset G_1 + e'$, mostrando que G_1 é maximal com respeito a arestas ou $TX \subset G_2$, contrariando o fato que $G_2 \subset G$. Portanto, G_1 e G_2 são maximais com respeito a arestas. □

Corolário A.2.7. Um grafo planar não contém nem um K^5 nem $K_{3,3}$ como um minor topológico.

Lema A.2.8. Se $|G| \geq 4$ e G é maximal com respeito a arestas tal que $TK^5, TK_{3,3} \not\subset G$, então G é 3-conexo.

Demonstração.

Vamos mostrar o lema por indução. Suponha que a afirmação vale para um grafo G tal que $|G| = 4$, claramente, $G = K^4$ e a afirmação é verdadeira.

Agora, suponha que $|G| > 4$ e que G seja maximal com relação a arestas sem conter TK^5 ou $TK_{3,3}$. Seja $\mathscr{X} = \{K^5, K_{3,3}\}$ e escolha G_1 e G_2 como no lema anterior, ou seja, $G_1 \cap G_2 = K^2 = \{x, y\}$ e G_1, G_2 são maximais com relação a aresta e sem TK^5 ou $TK_{3,3}$. Como G_1 e G_2 tem tamanho menor que G, vale a hipótese de indução e, portanto, G_1 e G_2 são 3-conexos. Pelo lema A.2.2, eles não podem conter K^5 nem $K_{3,3}$ como minors, podemos afirmar, pelo lema A.2.5, que eles são planares.

Escolha um desenho de G_i no plano, uma face f_i com a aresta xy na sua fronteira e um vértice $z_i \neq x, y$ na fronteira de f_i, para $i = 1, 2$.

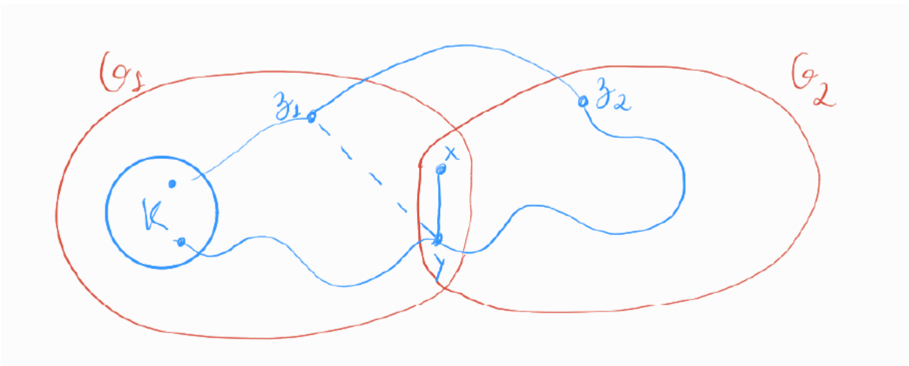

Figura 7 – Um TK^5 ou $TK_{3,3}$ em $G + z_1 z_2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que ao acrescentar a aresta $z_1 z_2$ ao grafo G, pela maximalidade de G, passa a existir um TK^5 ou um $TK_{3,3}$, chame tal grafo de K. Se todos os branchs de K estão contidos no mesmo G_i, então um TK^5 ou $TK_{3,3}$ estão contidos em $G_i + xz_i$ ou $G_i + yz_i$ ou no próprio G_i caso z_i já foram adjacentes a x ou y, respectivamente. De qualquer forma, os 3 casos contrariam a proposição A.2.7, já que esses grafos eram todos planares pela escolha de z_i.

Como o grafo $G + z_1 z_2$ não contém 4 caminhos independentes entre $G_1 - G_2$ e $G_2 - G_1$, cada um dos subgrafos não pode conter 2 branchs de um $TK_{3,3}$, simultaneamente. Portanto, sem perda de generalidade podemos assumir que K é um $TK_{3,3}$ com um branch v em $G_2 - G_1$. Note que o grafo $G_1 + v + \{v_x, v_y, v_{z_1}\}$ é planar pela escolha de z_1, mas contém um $TK_{3,3}$, contrariando o corolário A.2.7. $\square$

Agora, o Teorema de Kuratowski sai como um corolário de tudo que fizemos até aqui.

Teorema A.2.9 (Kuratowski 1930; Wagner 1937)**.**

- G é planar;
- G não contém K^5 nem $K_{3,3}$ como minor planar;
- G não contém K^5 nem $K_{3,3}$ como minor topológico.

Demonstração.

Basta combinar o Corolário A.2.7 com os Lemas A.2.2, A.2.5 e A.2.8 para obter a demonstração do Teorema. □

APÊNDICE

B

CH E O AXIOMA DE LUZIN

Este capítulo não envolve o OCA diretamente mas foi uma relação interessante sobre dois axiomas que fazem afirmações razoavelmente diferentes, e foi encontrada numa referência do mesmo autor que popularizou a definição do OCA, Stevo Todorčevíc.

Nesta parte nos preocuparemos apenas com a relação entre CH e o Axioma de Luzin que será introduzido adiante. Vamos introduzir o conceito que permeia o artigo (TODORCEVIC, 1991).

Definição B.0.1. Dizemos que uma partição é ccc se:

$$[X]^2 = K_0 \cup K_1,$$

onde K_0 tem as seguintes propriedades:

- K_0 contém subconjuntos de todos os seus elementos, assim como todos os conjunto unitários de X;
- Toda família não enumerável de conjuntos finitos de K_0 contém dois elementos cuja união pertence a K_0.

Iremos enunciar uma versão alterada do Axioma de Luzin e mostraremos que essa versão é equivalente a CH.

Axioma B.0.1 (Axioma de Luzin)**.** Todo poset ccc $\mathscr{P}$ com tamanho até $\mathfrak{c}$ tem uma família Luzin de filtros, i.e., uma família não enumerável de filtros tal que todo conjunto denso aberto de $\mathscr{P}$ intercepta todos menos enumeráveis desses filtros.

Proposição B.0.2. O Axioma de Luzin e CH são equivalentes.

Demonstração. Inicialmente, assuma que vale CH. Seja $\mathscr{P}$ poset *ccc* tal que $|\mathscr{P}| \leq \mathfrak{c}$. Nosso objetivo é construir uma família de filtros que possui a propriedade do Axioma de Luzin quando consideramos $\mathscr{P}$.

Seja $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ família de densos abertos de $\mathscr{P}$. Defina a família de filtros $\mathscr{F} = \{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tais que

$$F_0 \cap D_0 \neq \emptyset$$

$$F_1 \cap (D_0 \cap D_1) \neq \emptyset$$

$$F_2 \cap (D_0 \cap D_1 \cap D_2) \neq \emptyset$$

$$\dots$$

$$F_n \cap (\bigcap_{n\in\omega} D_n) \neq \emptyset$$

$$\dots$$

$$F_\omega \cap (\bigcup_\omega D_\omega) \neq \emptyset$$

A interseção é não vazia por conta da validade de CH. Para terminar de construir a família de filtros, note que se $\alpha < \omega_1$, podemos repetir o processo acima para os densos da forma $\{D_{\beta_m} : \beta_m < \alpha$ e $m \in \omega\}$. Novamente, pela validade de CH, $\alpha < \omega_1$ é enumerável, isso garante que $F_\alpha \cap (\bigcup_{\beta_m<\alpha} D_{\beta_m}) \neq \emptyset$.

Portanto, conseguimos construir uma família $\mathscr{F}$ de filtros não enumerável (pois temos ω_1 elementos) tal que todo conjunto denso aberto de $\mathscr{P}$ intercepta todos os filtros de $\mathscr{F}$ com exceção de enumeráveis.

Reciprocamente, assuma que vale o Axioma de Luzin, nosso objetivo é mostrar que $\mathfrak{c} = \omega_1$, para isso, mostraremos que $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} = \omega_1$.

Vamos precisar de uma família de funções com duas propriedades que não serão demonstradas aqui mas podem ser encontradas na referência (TODORCEVIC, 1986). Considere a seguinte família $A = \{f_\xi : \xi < \mathfrak{b}\}$ de funções $\leq^*$-crescentes e $\leq^*$-ilimitada em ω^ω. Assuma que toda função f_ξ é crescente. Para f e g em A, diremos que $f \leq g$ se $f(i) \leq g(i)$, para todo $i \in \omega$. As duas propriedades mencionadas anteriormente são:

1. O poset de todos os subconjuntos finitos de pares não ordenados e $\leq$-incomparáveis de A é ccc;

2. Não existe subconjunto de tamanho $\mathfrak{b}$ de pares não ordenados e $\leq$-incomparáveis em A.

A partição $[A]^2 = K_0 \cup K_1$ é definida deixando $\{f, g\} \in K_0$ se são $\leq$-incomparáveis e considerando K_1 como complemento de K_0.

Além de 1 e 2, mostraremos que vale a seguinte propriedade:

3. Para todo subconjunto $B \subset A$ finito K_0-homogêneo, existe um $\xi < \mathfrak{b}$ grande o suficiente tal que $B \cup \{f_\xi\}$ ainda é K_0-homogêneo.

Assuma que não existem funções quase iguais em A, i.e., não existem $f,g \in A$ tais que o conjunto $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\}$ é infinito. Vamos mostrar que existe $f \in A$ tal que para todo $\alpha < \mathfrak{b}$, existe $\beta > \alpha$ tal que f_β é $\leq$-incomparável com f.

Assuma, por absurdo, que para toda f, existe $\alpha_f < \beta$ tal que para todo $\beta > \alpha_f$, f_β é $\leq$-comparável com f[1].

Comece construindo uma família da seguinte forma:

Seja $f_0 \in A$, defina $g_0 = f_0$. Pela nossa hipótese, existe $\alpha_{g_0} < \mathfrak{b}$ tal que para todo $\beta > \alpha_{g_0}$, f_β é $\leq$-comparável com g_0. Defina $g_1 = f_{\alpha_{g_0}}$, da mesma forma, existe α_{g_1} tal que para todo $\beta > \alpha_{g_1}$, f_β é $\leq$-comparável com g_1.

Seguindo dessa forma por $\alpha < \mathfrak{b}$ vezes, a família $\mathscr{F} = \{g_\alpha \in A : g_\alpha$ é $\leq$-comparável com g_β, para todo $\beta < \alpha\}$ criada é uma cadeia crescente e ilimitada de tamanho não enumerável.

Agora, mostraremos que tal cadeia crescente não pode existir indutivamente. É fácil ver, pela forma que construímos a família $\mathscr{F}$ que $g_0 \leq g_1 \leq ... \leq g_\alpha \leq ...$

Nosso intuito é mostrar que existe $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que g_α é limitante superior para $\mathscr{F}$, gerando a contradição. Suponha que, na coordenada 0, para todo $\xi < \mathfrak{b}$, existe $\eta > \xi$ tal que $g_\xi(0) < g_\eta(0)$[2].

Podemos construir uma sequência $(g_{\xi_n})_n$ tal que $g_{\xi_n} = m$, para algum $m > n$. Cada ξ_n é algum índice $\xi < \mathfrak{b}$ atestando que $g_\xi(0)$ é maior ou igual a $g_\gamma(0)$, para todo $\gamma < \xi$, além disso, m é definido como o primeiro valor tal que $m = g_\xi(0) > g_\gamma(0)$. No entanto, a sequência $(g_{\xi_n})_n$ também é não enumerável pois acompanha a quantidade de elementos na família $\mathscr{F}$. Como só existem enumeráveis valores na coordenada 0, chegamos num absurdo. Logo, existe $\xi < \mathfrak{b}$ tal que para todo $\eta > \xi$ temos $g_\xi(0) = g_\eta(0)$.

Note que esse argumento pode ser replicado para cada coordenada de ω e, dessa forma, podemos garantir que existe $\xi < \mathfrak{b}$ tal que $g_\xi \geq g_\alpha$, para todo $\alpha \geq \xi$, que nos dá uma contradição com o fato da família $\mathscr{F}$ ser ilimitada.

Dessa forma, provamos que existe $f \in A$ tal que $\mathscr{G} = \{f_\alpha < A : f_\alpha$ é $\leq$-incompatível com $f\}$ é ilimitada. Claramente, $\mathscr{G}$ tem não enumeráveis elementos já que é família ilimitada. Por ser subconjunto de A, as propriedades 1 e 2 também valem para $\mathscr{G}$ e, finalmente, vamos mostrar que vale 3 para $\mathscr{G}$ por indução no tamanho do subconjunto finito.

Seja $f_\alpha \in \mathscr{G}$, vamos mostrar que existe $\xi < \mathfrak{b}$ grande o suficiente tal que $\{f_\alpha, f_\xi\} \in K_0$. Note que f_α é $\leq$-incomparável com f e suponha que existe $\xi < \mathfrak{b}$ tal que $\{f_\alpha, f_\eta\} \notin K_0$, para todo $\eta > \xi$, ou seja, f_α é $\leq$-comparável com f_η, para todo $\eta > \xi$. Como existem não enumeráveis funções com índice maior que ξ e todas $\leq$-comparáveis com f_α, podemos criar uma sequência

[1] A partir de um certo índice, todas as funções são $\leq$-comparáveis com f

[2] Estamos supondo que não vale a afirmação: $\exists \xi$, para todo $\eta > \xi g_\xi(0) = g_\eta(0)$, como $\eta > \xi$ e $g_\xi \leq g_\eta$, ao negar a afirmação temos $g_\xi < g_\eta$

crescente e ilimitada, usando o mesmo argumento apresentado anteriormente podemos achar um limitante superior para essa sequência ilimitada, e chegamos numa contradição. Logo, existe $\xi < \mathfrak{b}$ grande o suficiente tal que $\{f_\alpha, f_\xi\} \in K_0$.

Suponha que a afirmação é válida para $n \in \omega$ e seja $B = \{f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_{n+1}}\} \subset \mathscr{G}$ subconjunto finito, basta considerarmos um novo conjunto $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \setminus \{f \in \mathscr{G} : f$ é $\leq$-comparável com $f_{\alpha_{n+1}}\}$. Note que o tamanho de $\mathscr{G}'$ continua sendo $\mathfrak{b}$, mas em $\mathscr{G}'$ existem apenas as funções que são $\leq$-incomparáveis com $f_{\alpha_{n+1}}$. Aplicando a hipótese de indução para $\{f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_n}\}$, existe $\xi < \mathfrak{b}$ grande o suficiente tal que $\{f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_n}\} \cup \{f_\xi\}$ é K_0-homogêneo, mas note que $\{f_\xi, f_{\alpha_{n+1}}\} \in K_0$, pelo argumento anterior e, portanto, $B \cup \{f_\xi\}$ é K_0-homogêneo.

Agora, fixe uma função $e : [\mathfrak{b}^+]^2 \longrightarrow \mathfrak{b}$ tal que $e(\cdot, \alpha) : \alpha \longrightarrow \mathfrak{b}$ é bijetora para todo α. Seja $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os pares $p = (B_p, F_p)$, onde B_p é um subconjunto finito K_0-homogêneo de $\mathscr{G}'$ e F_p é subconjunto finito de $\mathfrak{b}^+$ tal que para todo $\alpha < \beta$ em F_p, existe f_ξ em B_p tal que $\xi \geq e(\alpha, \beta)$. Definiremos $p \leq q$ se, e somente se, $B_p \supset B_q$ e $F_p \supset F_q$. Vamos mostrar que $\mathscr{P}$ é poset ccc. Seja $\{p_\alpha \in \mathscr{P} : \alpha < \omega_1\}$ uma anticadeia de tamanho ω_1. Note que existe uma subanticadeia que forma um Δ-sistema com raíz p. Agora, vamos separar em casos:

Suponha, inicialmente, que existem não enumeráveis elementos B_p e apenas um F_p. Pela propriedade 2, sabemos que K_0 é ccc. Como os elementos B_{p_α} que fazem parte dos pares da anticadeia são subconjuntos de K_0, qualquer cadeia de elementos da forma (B_{p_α}, F_p) é enumerável já que os elementos B_{p_α} podem ser vistos como uma anticadeia em K_0.

Agora, suponha que existem não enumeráveis elementos F_p e apenas um B_p. Veja que é possível enxergar a anticadeia $\{p_\alpha \in \mathscr{P} : \alpha < \omega_1\}$ como uma anticadeia apenas dos elementos F_{p_α} em $\mathfrak{b}^+$. Claramente, a subanticadeia de raíz p pode ser vista como uma subanticadeia formado pelos elementos F_{p_α} com raíz F_p tal que $F_{p_\alpha} = F_p \cup X_\alpha$, onde X_α é definido como $F_{p_\alpha} \setminus F_p$. Também podemos assumir que nossa subanticadeia é tal que se $\xi < \eta$, então qualquer elemento de F_{p_α} é menor que qualquer elemento de F_{p_η}. Vamos mostrar que F_{p_ξ}, F_{p_η} são compatíveis para $\xi < \eta$. Seja $\alpha < \beta \in F_p \cup X_\xi \cup X_\eta$, considere $M \doteq \max\{e(\alpha, \beta) : \alpha \in X_\xi$ e $\beta \in X_\eta\}$ tal máximo existe pois F_{p_ξ} e F_{p_η} possuem finitos elementos e portanto, finitas combinações para $e(\alpha, \beta)$. Como B_p é conjunto finito, podemos aplicar a propriedade 3 e achar $\gamma > M$ tal que $B_p \cup \{f_\gamma\}$ é K_0-homogêneo. Note que $B_p \cup \{f_\gamma\}$ atesta que o par $(B_p \cup \{f_\gamma\}, F_p \cup X_\xi \cup X_\eta)$ pertence a $\mathscr{P}$, pois para todo $\alpha < \beta \in F_p \cup X_\xi \cup X_\eta$, temos $\gamma > e(\alpha, \beta)$. Assim, $(B_p, F_{p_\xi}), (B_p, F_{p_\eta}) \subset (B_p \cup \{f_\gamma\}, F_p \cup X_\xi \cup X_\eta)$ e, portanto, F_{p_ξ} e F_{p_η} são compatíveis.

O último caso é onde existem não enumeráveis elementos B_p e não enumeráveis elementos F_p. Usando a construção da anticadeia com Δ-sistema dos casos anteriores, considere p_ξ e p_η tais que B_ξ e B_η são compatíveis e seja B tal que $B_\xi, B_\eta \subset B$. Usando o segundo caso, sabemos que o par $(B_{\{}f_\gamma\}, F_p \cup X_\xi, X_\eta)$, para γ grande o suficiente, pertence a $\mathscr{P}$ e é tal que P_ξ e p_η pertencem a esse mesmo par. Dessa forma, p_ξ e p_η são compatíveis. Portanto, $\mathscr{P}$ é poset ccc.

Munidos de todas essas propriedades, podemos finalmente mostrar que $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Suponha que B.0.1 vale para $\mathscr{P}$, ou seja, assuma que $\mathscr{P}$ tem $\mathfrak{c}$ elementos. Seja $\alpha < \mathfrak{b}^+$, defina $D_\alpha = \{(B_p, F_p) \in \mathscr{P} : \max F_p \geq \alpha\}$[3] iremos mostrar que D_α é denso em $\mathscr{P}$. De fato, seja $p = (B_p, F_p) \in \mathscr{P}$, se $\alpha \leq \max F_p$, então $(B_p, F_p) \in D_\alpha$, caso contrário, o par $(B_p, F_p \cup \{\alpha\})$ pertence a D_α e é tal que $(B_p, F_p \cup \{\alpha\}) \leq (B_p, F_p)$. Logo, D_α é denso para todo $\alpha < \mathfrak{b}^+$.

Por B.0.1, sabemos que existe uma família de filtros não enumerável $\mathscr{F} = \{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ tal que para todo $\alpha < \mathfrak{b}^+$ existe $\gamma(\alpha)$ tal que para todo $\xi > \gamma$, $D_\alpha \cap F_\xi \neq \emptyset$. Note que $\gamma : \mathfrak{b}^+ \longrightarrow \omega_1$, como $\mathfrak{b}^+$ e ω_1 são cardinais regulares, somado ao fato de que $\mathfrak{b}^+ > \omega_1$, é necessário que a pré-imagem de ω_1 por γ tem tamanho $\mathfrak{b}^+$, ou seja, existe filtro F de tamanho $\mathfrak{b}^+$ em $\mathscr{F}$. Note que, pela forma como construímos $\mathscr{P}$, o conjunto $\bigcup_{p \in F} B_p$ é K_0-homogêneo pois é união de conjuntos K_0-homogêneos e tem tamanho $\mathfrak{b}$, isso nos dá uma contradição com a propriedade 2. Logo, a cardinalidade de $\mathscr{P}$ é maior que $\mathfrak{c}$, ou seja, $\mathfrak{b}^+ > \mathfrak{c}$ e, portanto, $\mathfrak{b} \geq \mathfrak{c}$, como $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ garantimos que $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Para finalizar, suponha que $\mathfrak{b} > \omega_1$, por B.0.1 sabemos que existe um filtro de tamanho $\mathfrak{b}$ e, novamente, $\bigcup_{B \in F} B$ é 0-homogêneo de tamanho $\mathfrak{b}$ contrariando 2, isso implica que $\mathfrak{b} \leq \omega_1$, como $\mathfrak{b} \geq \omega_1$, temos $\omega_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. □

[3] Claramente, D_α é aberto, pois se $p \in D_\alpha$ qualquer $q \leq p$ também pertence a D_α.

ICMC USP
SÃO CARLOS