



I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

PROPRIEDADES GENÉRICAS DE SUPERFÍCIES
DO \mathbb{R}^4 DOTADO DE FORMA BILINEAR

Rosa Maria dos Santos Barreiro

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

PROPRIEDADES GENÉRICAS DE SUPERFÍCIES
DO R^4 DOTADO DE FORMA BILINEAR

Rosa Maria dos Santos Barreiro

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

Dissertação apresentada no Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de "Mestre em Matemática".

SÃO CARLOS - S.P.

1981

Aos meus pais, irmãos
e ao José Roberto

GENERIC PROPERTIES OF SURFACES IN R^4 WITH A BILINEAR FORM

Rosa Maria dos Santos Barreiro

Adviser: Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

ABSTRACT

This study is about immersions of surfaces in a four dimensional space with a non degenerated bilinear form.

In the cases studied, this form induces in the normal and tangent planes, forms of type $(+,+)$ or $(+,-)$. Three situations: Y_1 , Y_2 and Y_3 are studied and they are based on two papers: one of John A. Little [4] and the other of P. F. J. Dhooghe [3].

In chapter one we see the requirements we need to fix the notations and study the theory involving the second fundamental form, too.

In chapter two we speak about the cross fields and the notion of singular point of a cross field.

We consider topics in geometrical transversality like models singularities and generic immersions.

In chapter three, we consider some cross fields that give informations about the singularities and study the case Y_3 separately because there aren't cross fields there. At the end, we come to global theorems.

Our main purpose was a comparative study that allowed us to elaborate some theorems e to prove others inexistentes in the basic papers. We elucidated some ambiguous topics in [3]

and because the situation there wasn't so usual, we had to be careful and decided to give the proofs of many results considering the cases Y_2 and Y_3 .

A result to be pointed out is that when we consider the bilinear form Y_2 in E^4 , the corollary 1.22, given in [4], becomes true, in spite of it isn't correct when we consider the bilinear form Y_1 in E^4 (see example given by Asperti in [1]).

AGRADECIMENTOS

Somos sinceramente gratos:

Ao Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel pela orientação segura, compreensão e confiança em nós depositada, além do incentivo constante à pesquisa e da preocupação que tem para com seus orientandos.

À Prof.^a Izette Alves Coelho Loibel, pelo apoio e sua orientação quando éramos bolsistas de "Iniciação Científica".

A todos os professores do ICMSC-USP pelo estímulo e valiosos ensinamentos durante os anos de graduação e pós-graduação, em particular, ao Prof. Hermano de Souza Ribeiro, pela sua agradável disponibilidade, atenção e oportunas sugestões.

A todos os amigos deste Departamento, pela presença significativa que têm em nossas vidas.

Aos Membros da Banca por interessantes sugestões, inclusive sobre desenvolvimentos futuros.

À Lene, pelo excelente trabalho de datilografia e pelo carinho com que sempre nos acolhe.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	I
CAPÍTULO I	
§ 1. Notação	1
§ 2. Equações de Estrutura	7
§ 3. Forma Quadrática e Ações de Grupos	11
§ 4. Os Invariantes K , N , \vec{H} e a Elipse de Curvatura	14
§ 5. A Expressão $ \vec{H} - K = \vec{A} + \vec{B} $	19
§ 6. As Hipérbolas de Curvatura	24
§ 7. O Quarto Invariante Δ	28
CAPÍTULO II	
§ 1. Campos de Cruzes	39
§ 2. Transversalidade Geométrica	41
CAPÍTULO III	
§ 1. Campos de Cruzes e Singularidades nos Casos Y_1 e Y_2 .	49
§ 2. As Singularidades Genéricas	53
§ 3. Estudo dos Índices Genéricos	64
§ 4. Alguns Resultados Importantes Relativamente a Y_1 e Y_2 ...	71
§ 5. Considerações Referentes a Y_3	77
BIBLIOGRAFIA	85

INTRODUÇÃO

O presente trabalho, que se subdivide em três capítulos, estuda imersões de superfícies no espaço de dimensão 4 dotado de forma bilinear não degenerada. Nos casos abordados esta forma induz nos planos tangente e normal formas do tipo $(+,+)$ ou $(+,-)$. Três situações: Y_1 , Y_2 e Y_3 são estudadas, tendo por base os artigos de John A. Little [4] e P. F. J. Dhooghe [3].

No Capítulo I, além de apresentarmos os pré-requisitos necessários ao trabalho com o objetivo de fixar as notações, estudamos a teoria que envolve a segunda forma fundamental. Neste sentido, vemos a relação entre os invariantes de segunda ordem da imersão e a configuração no espaço normal consistindo de uma cônica.

No Capítulo II, introduzimos os campos de cruces com a respectiva noção de ponto singular. Tratamos ainda de tópicos relacionados com a transversalidade geométrica tais como singularidades modelo e imersões genéricas, necessários ao capítulo posterior.

No Capítulo III, apresentamos alguns campos de cruces que fornecem informações sobre as singularidades em termos dos invariantes de segunda ordem. Tratamos do caso Y_3 separadamente por não termos aí os campos de cruces. Chegamos aos teoremas globais sobre a existência de singularidades que foram objetivos principais dos textos base.

A nossa proposta foi de apresentar, num único trabalho, um estudo comparativo que permitiu a elaboração de alguns teoremas e as demonstrações de outros, inexistentes nos textos base.

Surgiram em [3] alguns pontos obscuros e equívocos que esclarecemos e apresentamos de forma mais acessível. Os resultados referentes a este artigo exigiram sempre maiores cuidados por se tratar de uma situação menos usual. Por este motivo, os cálculos e demonstrações são apresentados na maioria das vezes para os casos Y_2 e Y_3 .

Um resultado a ser destacado do estudo comparativo é o seguinte: O Corolário III, 4.5.A, que se refere a Y_1 , contradiz o resultado obtido em [4] no Corolário 1.22 e que não está correto conforme o contra-exemplo dado por Asperti em [1]. No entanto, considerando-se em E^4 o produto Y_2 , o corolário dado em [4] fica válido, bastando observar o Corolário III, 4.5.B.

CAPÍTULO I

§ 1. Notação

1.1. Seja E^4 um espaço vetorial real de dimensão 4 dotado de uma forma bilinear simétrica não degenerada $Y(v,w)$ e de índice 0 (espaço euclidiano) ou 1 (espaço de Minkowski).

Chamaremos de "norma" de um vetor v ao valor $||v|| = \sqrt{Y(v,v)}$.

No primeiro caso $||v|| \geq 0$ pois Y é definida positiva e no segundo caso podemos ter $||v|| < 0$.

Uma base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E^4 será dita ortonormal se $Y(f_i, f_j) = \pm \delta_{ij}$.

No estudo que faremos surgirão de modo natural bases ortonormais da seguinte forma:

(a) Se o espaço for euclidiano $Y(f_i, f_i) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$ e neste caso temos $Y = Y_1$

(b) Se o espaço for de Minkowski, teremos:

(i) $Y(f_4, f_4) = -1$, $Y(f_i, f_i) = 1$ ($i = 1, 2, 3$) e neste caso temos $Y = Y_2$

(ii) $Y(f_1, f_1) = -1$, $Y(f_i, f_i) = 1$ ($i = 2, 3, 4$) e neste caso temos $Y = Y_3$.

Y será chamado de produto interno ou métrica de E^4 .

1.2. Teremos que Y induz em cada subespaço de E^4 uma forma bilinear que no caso euclidiano é obviamente definida positiva, mas no caso do espaço de Minkowski pode ser de diversos tipos.

Para os subespaços de dimensão 2, ocorrem os seguintes casos:

$(+,+)$, $(+,-)$ e $(0,+)$.

1.3. Mostremos que efetivamente não surgem métricas induzidas dos tipos:

(i) $(0,-)$, (ii) $(0,0)$ e (iii) $(-,-)$

nos subespaços de dimensão 2.

Faremos os cálculos para Y_2 , sendo que para Y_3 o procedimento é análogo:

(i) Para se obter um vetor v de norma nula em E^4 , uma de suas parcelas deverá obrigatoriamente ser f_4 , ou seja, $v = a_4 f_4 + \psi$ onde $\psi = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$.

No subespaço gerado por f_1, f_2, f_3 podemos considerar transformações ortogonais e então tomar $\psi = f_1$, $a_4 = 1$, para obter $v = f_4 + f_1$.

Suponhamos, agora, que seja possível obter $w = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4$ tal que

$$Y_2(v, w) = 0$$

$$Y_2(w, w) < 0$$

$$\text{Como } Y_2(v, w) = 0, \quad Y_2(f_4 + f_1, b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4) = 0$$

ou seja $-b_4 + b_1 = 0$ e portanto $b_1 = b_4$

$$Y_2(w, w) < 0 \implies b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 < 0 \implies b_2 + b_3 < 0 \text{ (absurdo)}$$

Logo não é possível obter métrica induzida do tipo $(0,-)$.

(ii) Mostremos agora que não é possível obter $S = [v, w]$ tal que:

$$Y_2(v, v) = 0$$

$$Y_2(w, w) = 0$$

$$Y_2(v, w) = 0$$

De fato: Para que ocorram as duas primeiras condições v e w devem ter f_4 como componente ou seja

$$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4$$

$$w = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4$$

Como no caso anterior, por transformações ortogonais, podemos tomar $v = f_1 + f_4$ e $w = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4$.

De $Y_2(v, w) = 0$, obtemos $\beta_1 - \beta_4 = 0$ ou seja $\beta_1 = \beta_4$.

De $Y_2(w, w) = 0$, obtemos $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - \beta_4^2 = 0$ ou seja $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

Portanto $v = f_1 + f_4$ e $w = \beta_1(f_1 + f_4)$ são vetores linearmente dependentes o que é um absurdo.

(iii) Vejamos se é possível obter $S = [v, w]$ tal que:

$$Y_2(v, v) < 0$$

$$Y_2(w, w) < 0$$

$$Y_2(v, w) = 0$$

Como nos casos anteriores, a menos de transformações ortogonais podemos tomar $v = f_4$ e $w = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4$.

De $Y_2(v, w) = 0$, obtemos $\beta_4 = 0$.

De $Y_2(w, w) < 0$, obtemos $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 < 0$ (absurdo).

1.4. OBSERVAÇÃO: Neste trabalho serão abordados apenas os casos de subespaços cuja métrica induzida seja do tipo $(+,+)$ e $(+,-)$ ou $(-,+)$.

Subespaços com estas características recebem a denominação de subespaços *spacelike* (tipo espaço ou tipo s) subespaços *timelike* (tipo tempo ou tipo t), respectivamente. Tais denominações são sugeridas pela *Física*.

1.5. AFIRMAÇÃO: Relativamente a Y_2 e Y_3 .

Se um subespaço bi-dimensional S contido em E^4 for tipo s , seu ortogonal S^\perp será tipo t e vice-versa.

Faremos os cálculos para Y_2 , pois para Y_3 é análogo.

De fato: Seja $S = [v_1, v_2]$, v_1, v_2 vetores linearmente independentes em E^4 tais que

$$Y_2(v_1, v_1) = 1$$

$$Y_2(v_2, v_2) = 1$$

$$Y_2(v_1, v_2) = Y_2(v_2, v_1) = 0$$

Sabemos que $S^\perp = \{u \in E^4 / Y(u, v) = 0, \forall v \in S\}$.

Verifiquemos:

(i) $\forall w \in E^4$, $w = v + u$ com $v \in S$, $u \in S^\perp$.

Se isto valer, teremos

$$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + u$$

$$\text{logo } \alpha = Y_2(w, v_1)$$

$$\beta = Y_2(w, v_2)$$

$$e \quad u = w - \alpha v_1 - \beta v_2.$$

Mostremos que $u \in S^\perp$

$$Y_2(u, v_1) = Y_2(w - \alpha v_1 - \beta v_2, v_1) = Y_2(w, v_1) - \alpha = 0$$

$$Y_2(u, v_2) = Y_2(w - \alpha v_1 - \beta v_2, v_2) = Y_2(w, v_2) - \beta = 0$$

Assim é possível escrevermos $w = v + u$ onde $u = w - \alpha v_1 - \beta v_2$.

$$(ii) \quad S \cap S^\perp = \{0\}.$$

Seja $u \in S \cap S^\perp$.

$$\text{De } u \in S \implies u = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

$$\text{De } u \in S^\perp \implies Y_2(u, u) = 0 \implies \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \text{ou seja } \alpha = \beta = 0.$$

Logo $u = 0$.

Por (i) e (ii) temos que $E^4 = S \oplus S^\perp$.

Como $\dim S = 2$, obtemos $\dim S^\perp = 2$.

Pelo que vimos anteriormente S^\perp não é do tipo $(0,0)$.

Assim sendo, S^\perp admite base u_1, u_2 com $Y_2(u_1, u_1) \neq 0$, que pode ser substituída por outra u'_1, u'_2 satisfazendo:

$$Y_2(u'_1, u'_2) = Y_2(u'_2, u'_1) = 0.$$

Na base (v_1, v_2, u'_1, u'_2) a matriz do produto interno fi-

ca:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_2(u'_1, u'_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_2(u'_2, u'_2) \end{bmatrix}$$

sendo o segundo bloco, não nulo, a matriz do produto interno induzido em S^\perp .

Pela lei da inércia deveremos ter $Y_2(u_1', u_1') < 0$ e $Y_2(u_2', u_2') > 0$ ou $Y_2(u_1', u_1') > 0$ e $Y_2(u_2', u_2') < 0$.

Conclusão: S^4 é tipo t.

Observação: Com os mesmos argumentos provamos que se S for tipo t então S^4 será tipo s. (ver 1.4).

1.6. Seja M uma variedade orientada C^∞ de dimensão 2 e $X : M \rightarrow E^4$ uma imersão de M em E^4 .

Neste trabalho somente consideraremos imersões para as quais os espaços tangentes em todos os pontos são todos "tipo s" ou todos "tipo t". Conseqüentemente os espaços normais serão também todos de um mesmo tipo.

Uma base ortonormal $(e_1(p), e_2(p), e_3(p), e_4(p))$ num ponto p de M, será dita *base adaptada* se $e_1(p), e_2(p)$ são vetores tangentes a M com $(e_1(p), e_2(p))$ concordando com a orientação de M e $e_3(p), e_4(p)$ são escolhidos normais à superfície de forma que $(e_1(p), e_2(p), e_3(p), e_4(p))$ concorde com a orientação fixada em E^4 .

Podemos agora considerar os fibrados:

- TM - fibrado tangente de M
- NM - fibrado normal de M em E^4
- FTM - fibrado das bases tangentes a M, ortonormais e orientadas
- FNM - fibrado das bases normais a M, ortonormais e orientadas
- F - fibrado das bases adaptadas a M.

Todos estes fibrados possuem uma estrutura diferencial natural.

O índice p indicará a fibra no ponto $p \in M$ de cada um destes fibrados.

1.7. OBSERVAÇÃO: Relativamente a Y_1 , os grupos de estrutura que agem em FTM , FNM e F são $SO(2)$, $SO(2)$ e $G_1 = SO(2) \times SO(2)$, relativamente a Y_2 são $SO(2)$, $SO(1,1)$ e $G_2 = SO(2) \times SO(1,1)$ e relativamente a Y_3 são $SO(1,1)$, $SO(2)$ e $G_3 = SO(1,1) \times SO(2)$, respectivamente. Estes resultados provêm do fato que as métricas induzidas em TM_p e NM_p são, na ordem acima, de tipos $(+,+)$ e $(+,+)$, $(+,+)$ e $(+,-)$ e finalmente $(-,+)$ e $(+,+)$. (Ver [7])

§ 2. Equações de Estrutura

2.1. Para cada ponto p de M , definimos o produto interno em TM_p por:

$$\text{se } v_1, v_2 \in TM_p, \quad \langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dX_p(v_1), dX_p(v_2) \rangle.$$

Obtemos assim a métrica induzida em M pela imersão X .

Seja $U \subset M$ uma vizinhança de p em M tal que $X|_U$ seja injetora e V uma vizinhança de $X(p)$ em E^4 tal que $V \supset X(U)$.

Tomando-se V e U suficientemente pequenos podemos escolher em V um referencial ortonormal móvel (e_1, e_2, e_3, e_4) adaptado a X , isto é restrito a U , (e_1, e_2, e_3, e_4) é base adaptada.

Em cada $p \in U$ consideremos o espaço dual $(E_p)^*$ de E_p (tangente a E^4 em p) e sejam $(\phi_1)(p), (\phi_2)(p), (\phi_3)(p), (\phi_4)(p)$, os elementos da base dual, isto é:

$$(\phi_i)_p(e_j(p)) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

2.2. Seguindo o que normalmente se faz no método do referencial móvel, definiremos as formas ϕ_{ij} e analisaremos a sua relação com ϕ_{ji} , relativamente a cada produto interno separadamente.

Cada campo e_i pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $e_i : V \rightarrow E^4$. A diferencial $(de_i)_p : TV_p \rightarrow E^4$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Podemos então escrever para todo $v \in TV_p$ que $(de_i)_p(v) = \sum_j (\phi_{ij})_p(v)e_j$ e conseqüentemente $de_i = \sum \phi_{ij}e_j$.

(i) *Relativamente a Y_1*

Como $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $\phi_{ij} = de_i \cdot e_j$ e diferenciando-se teremos $de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0$, ou seja $\phi_{ij} + \phi_{ji} = 0 \implies \phi_{ij} = -\phi_{ji}$.

(ii) *Relativamente a Y_2*

Como $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$

$$de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0 \implies \phi_{ij} = -\phi_{ji}.$$

$$De \quad e_4 \cdot e_4 = -1 \implies \phi_{44} = 0$$

$$De \quad e_i \cdot e_4 = 0 \quad i = 1, 2, 3 \implies de_i \cdot e_4 + e_i \cdot de_4 = 0$$

logo

$$(\sum \phi_{ij}e_j) \cdot e_4 + e_i \cdot (\sum \phi_{4j}e_j) = 0$$

$$-\phi_{i4} + \phi_{4i} = 0 \implies \phi_{i4} = \phi_{4i}.$$

(iii) Relativamente a Y_3

$$\text{Como } e_1 \cdot e_1 = -1 \implies \phi_{11} = 0$$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad i, j = 2, 3, 4 \implies$$

$$\implies de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0 \implies \phi_{ij} = -\phi_{ji} \quad i, j = 2, 3, 4$$

$$e_i \cdot e_1 = 0 \quad i = 2, 3, 4 \implies \phi_{i1} = \phi_{1i}.$$

2.3. Utilizando-se a fórmula de Poincaré $dd = 0$, obtemos as equações de estrutura

$$d\phi_i = \sum_k \phi_k \wedge \phi_{ki}$$

$$d\phi_{ij} = \sum_k \phi_{ik} \wedge \phi_{kj} \quad (\text{ver [6] ou [5]})$$

que são válidas nos três casos.

A aplicação $X : U \subset M \rightarrow V \subset E^4$ induz formas diferenciais $\omega_i = X^*(\phi_i)$ e $\omega_{ij} = X^*(\phi_{ij})$. Observemos que $\omega_3 = X^*(\phi_3) = 0$, $\omega_4 = X^*(\phi_4) = 0$ pois para todo $q \in U$ e todo $v \in TM_q$, teremos $dX(v) = a_1 e_1 + a_2 e_2$ e $X^*(\phi_3)(v) = \phi_3(dx(v)) = 0$, $X^*(\phi_4)(v) = \phi_4(dx(v)) = 0$.

Como X^* comuta com a derivação exterior e com o produto exterior, temos que todos os resultados obtidos para as formas ϕ_i , ϕ_{ij} são válidos para as formas ω_i , ω_{ij} .

Logo:

$$(1) \quad d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \quad (2) \quad d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

$$(3) \quad dX = \sum_i \omega_i e_i \quad (4) \quad de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$$

Como $\omega_3 = \omega_4 = 0$, teremos de (1):

$$0 = d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} \quad (5)$$

$$0 = d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_{14} + \omega_2 \wedge \omega_{24}$$

onde ω_1, ω_2 são formas independentes.

As expressões (5) estão nas condições do "Lema de Cartan" (ver [6]), o que nos fornece:

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= A_{31}^1 \omega_1 + A_{31}^2 \omega_2 \\ \omega_{23} &= A_{32}^1 \omega_1 + A_{32}^2 \omega_2 \\ \omega_{14} &= A_{41}^1 \omega_1 + A_{41}^2 \omega_2 \\ \omega_{24} &= A_{42}^1 \omega_1 + A_{42}^2 \omega_2 \end{aligned} \quad (6)$$

onde $A_{31}^2 = A_{32}^1, A_{41}^2 = A_{42}^1$.

Teremos ainda de 2.2, (i), (ii) e (iii), as fórmulas (7), (8) e (9) relativamente a Y_1, Y_2 e Y_3 , nesta ordem:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \\ \omega_{44} &= 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \omega_{i4} &= \omega_{4i} \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \\ \omega_{11} &= 0 \quad i, j = 2, 3, 4 \\ \omega_{i1} &= \omega_{1i} \end{aligned} \quad (9)$$

§ 3. Forma Quadrática e Ações de Grupos

3.1. A forma quadrática $(d^2x \cdot e_3)e_3 + (d^2x \cdot e_4)e_4$ é a segunda forma fundamental da superfície. Dependendo do produto interno, ela assumirá determinada expressão

(i) *Relativamente a Y_1*

Temos

$$\omega_3 = 0 \implies dx \cdot e_3 = 0 \implies d^2x \cdot e_3 = -dx \cdot de_3 =$$

$$= -(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \cdot de_3 = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} =$$

$$= A_{31}^1 \omega_1^2 + A_{31}^2 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^1 \omega_2 \omega_1 + A_{32}^2 \omega_2^2 =$$

$$= A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{32}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2$$

$$\omega_4 = 0 \implies d^2x \cdot e_4 = -dx \cdot de_4 =$$

$$= A_{41}^1 \omega_1^2 + 2A_{42}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{42}^2 \omega_2^2$$

logo

$$\alpha = [A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{32}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2] e_3 +$$

$$+ [A_{41}^1 \omega_1^2 + 2A_{42}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{42}^2 \omega_2^2] e_4$$

Aqui utilizamos (3), (4), (6) e (7).

(ii) *Relativamente a Y_2*

$$\omega_3 = 0 \implies d^2x \cdot e_3 = -dx \cdot de_3 = -(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \cdot de_3 =$$

$$= \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{32}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2$$

$$\begin{aligned}
\omega_4 = 0 &\implies d^2x \cdot e_4 = -dx \cdot de_4 = -(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \cdot de_4 = \\
&= -\omega_1 \omega_{41} - \omega_2 \omega_{42} = -\omega_1 \omega_{14} - \omega_2 \omega_{24} = \\
&= -\omega_1 (A_{41}^1 \omega_1 + A_{41}^2 \omega_2) - \omega_2 (A_{42}^1 \omega_1 + A_{42}^2 \omega_2) = \\
&= -A_{41}^1 \omega_1^2 - 2A_{42}^1 \omega_1 \omega_2 - A_{42}^2 \omega_2^2
\end{aligned}$$

logo α pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
\alpha &= [A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{32}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2] e_3 \\
&\quad - [A_{41}^1 \omega_1^2 + 2A_{42}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{42}^2 \omega_2^2] e_4
\end{aligned}$$

Utilizamos (3), (4), (6) e (8).

(iii) *Relativamente a Y_3*

$$\begin{aligned}
\omega_3 = 0 &\implies d^2x \cdot e_3 = -dx \cdot de_3 = -(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \cdot de_3 = \\
&= \omega_1 \omega_{31} - \omega_2 \omega_{32} = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = \\
&= \omega_1 (A_{31}^1 \omega_1 + A_{31}^2 \omega_2) + \omega_2 (A_{32}^1 \omega_1 + A_{32}^2 \omega_2) = \\
&= A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{32}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_4 = 0 &\implies d^2x \cdot e_4 = -dx \cdot de_4 = -(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) \cdot de_4 = \\
&= \omega_1 \omega_{41} - \omega_2 \omega_{42} = \omega_1 \omega_{14} + \omega_2 \omega_{24} = \\
&= A_{41}^1 \omega_1^2 + 2A_{42}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{42}^2 \omega_2^2
\end{aligned}$$

logo α pode ser escrita:

$$\alpha = [A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{32}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2] e_3 + \\ + [A_{41}^1 \omega_1^2 + 2A_{42}^1 \omega_1 \omega_2 + A_{42}^2 \omega_2^2] e_4$$

Utilizamos (3), (4), (6) e (9).

Os A's são funções em F , provenientes das fórmulas (6), (ver [4], p. 279).

Fica assim associado a cada referencial

$$\bar{p} = (p, e_1(p), e_2(p), e_3(p), e_4(p))$$

o par de formas quadráticas reais em M $(\alpha_3(p), \alpha_4(p))$ onde $\alpha_3(p)$ e $\alpha_4(p)$ são as expressões nas direções $e_3(p)$ e $e_4(p)$ anteriormente descritas em cada um dos três casos.

O conjunto de todos estes pares de formas quadráticas em um ponto p de M é um espaço que pode ser identificado com o R^6 .

3.2. Relativamente a cada produto interno, teremos um grupo agindo neste conjunto. A ação é dada por:

$$\tilde{A}_{ri}^{\ell} = \sum_{sjk} \hat{W}_r^s A_{sj}^k L_j^i L_k^{\ell} \quad \text{com } s, r = 3, 4 ; i, j, k, \ell = 1, 2.$$

Observemos que relativamente a $Y_1 : (\hat{W}_r^s) \in SO(2)$ e $(L_1^j) \in SO(2)$; relativamente a $Y_2 : (\hat{W}_r^s) \in SO(1,1)$ e $(L_1^j) \in SO(2)$; relativamente a $Y_3 : \hat{W}_r^s \in SO(2)$ e $(L_1^j) \in SO(1,1)$.

A fórmula acima indica como mudam os coeficientes A_{sj}^k pelas ações dos grupos em TM_p e NM_p quando mudamos o referencial.

Há quatro invariantes sob estas ações que serão tratados a seguir. Os dois primeiros serão calculados para Y_2 sendo que para Y_1 e Y_3 , apenas citaremos os resultados.

§ 4. Os Invariantes K , N , \vec{H} e a Elipse de Curvatura

4.1. A curvatura de Gauss K e a curvatura normal N , são definidas através das igualdades:

$$(a) \quad d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$$

e

$$(b) \quad d\omega_{34} = -N\omega_1 \wedge \omega_2$$

A seguir apresentamos os cálculos relativamente a Y_2 , iniciando-se com o cálculo de K .

De 2.3, fórmula (2), temos:

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \omega_{14} \wedge \omega_{42}$$

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= [(A_{31}^1\omega_1 + A_{31}^2\omega_2) \wedge (-A_{32}^1\omega_1 - A_{32}^2\omega_2)] + \\ &+ [(A_{41}^1\omega_1 + A_{42}^2\omega_2) \wedge (A_{42}^1\omega_1 + A_{42}^2\omega_2)] = \\ &= [-A_{31}^1A_{32}^2 + A_{31}^2A_{32}^1 + A_{41}^1A_{42}^2 - (A_{42}^1)^2]\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

De (a):

$$K = [(A_{42}^1)^2 - A_{41}^1A_{42}^2] - [(A_{32}^1)^2 - A_{31}^1A_{32}^2]$$

Cálculo de N :

$$\text{De 2.3, (2), temos que } d\omega_{34} = \omega_{31} \wedge \omega_{14} + \omega_{32} \wedge \omega_{24}$$

$$\begin{aligned} d\omega_{34} &= [(-A_{31}^1\omega_1 - A_{31}^2\omega_2) \wedge (A_{41}^1\omega_1 + A_{41}^2\omega_2)] + \\ &+ [(-A_{32}^1\omega_1 - A_{32}^2\omega_2) \wedge (A_{42}^1\omega_1 + A_{42}^2\omega_2)] = \\ &= [-A_{31}^1A_{41}^2 + A_{31}^2A_{41}^1 - A_{32}^1A_{42}^2 + A_{32}^2A_{42}^1]\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

De (b):

$$N = [(A_{31}^1 - A_{32}^2)A_{41}^2 + (A_{42}^2 - A_{41}^1)A_{31}^2]$$

Observações:

(i) Para as igualdades acima ver também 2.3, (6) e (8).

(ii) As formas ω_{12} e ω_{34} são as formas de conexão nos fibrados FTM e FNM respectivamente e $d\omega_{12}$, $d\omega_{34}$ são as formas de curvatura nos respectivos fibrados.

Com o mesmo processo se obtém para Y_1 :

$$K = A_{31}^1A_{32}^2 - (A_{31}^2)^2 + A_{41}^1A_{42}^2 - (A_{42}^1)^2$$

$$N = (A_{42}^2 - A_{41}^1)A_{32}^1 + (A_{31}^1 - A_{32}^2)A_{42}^1$$

e para Y_3 :

$$K = A_{31}^1A_{32}^2 - (A_{32}^1)^2 + A_{41}^1A_{42}^2 - (A_{42}^1)^2$$

$$N = (A_{41}^1 + A_{42}^2)A_{31}^2 - (A_{31}^1 + A_{32}^2)A_{42}^1$$

4.2. Lembremos que $\alpha : TM_p \times TM_p \rightarrow NM_p$ é dada por:

$$\alpha(p) = \alpha_3(p)e_3(p) + \alpha_4(p)e_4(p)$$

onde $\alpha_3(p)$ e $\alpha_4(p)$ são formas quadráticas.

Dada uma forma quadrática num espaço vetorial do tipo $(+,+)$ ou $(-,+)$ que relativamente a uma base ortonormal se escreve como $A(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ poremos para o caso $(+,+)$, "traço" $A = \alpha + \gamma$ e para $(-,+)$, "traço" $A = -\alpha + \gamma$.

A razão desta consideração é que estas são funções invariantes relativamente a $SO(2)$ e $SO(1,1)$, respectivamente, como será mostrado em 7.3.

4.3. DEFINIÇÃO: Com esta observação, podemos agora definir o vetor curvatura média \vec{H} que é dado por:

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \text{"traço"} \alpha_3(p) e_3 + \frac{1}{2} \text{"traço"} \alpha_4(p) e_4.$$

Olhando-se para 4.3 e 3.1, teremos respectivamente:

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) e_3 + \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) e_4$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) e_3 - \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) e_4$$

$$\vec{H}_3 = \frac{1}{2}(A_{32}^2 - A_{31}^1) e_3 + \frac{1}{2}(A_{42}^2 - A_{41}^1) e_4$$

4.4. OBSERVAÇÃO: \vec{H} será invariante em cada caso pois é dado através dos "traços" que são funções invariantes relativamente às ações dos grupos.

4.5. Para melhor descrever as configurações dos invariantes, nos três casos, será conveniente considerarmos Y_1 e Y_2 inicialmente e fazer um tratamento posterior referente a Y_3 . Nos dois primeiros casos os invariantes podem ser visualizados pela construção de uma elipse de curvatura.

Pensaremos, então, na segunda forma fundamental como sendo uma aplicação η em cada ponto p do círculo tangente unitário no espaço normal em p , $\eta : S^1 \rightarrow NM_p$; dada por:

A cada ponto e , do círculo S em p , seja $\gamma(S)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, escolhida de modo que o vetor tangente a γ em p seja e . Definimos então $\eta(e)$ como sendo a projeção de $\frac{d^2\gamma}{ds^2}(p)$ em NM_p .

Esta definição independe da escolha de γ , como veremos a seguir:

$\vec{\eta}(e)$ é denominado *vetor curvatura normal*. (Ver [4], p. 264).

Se num referencial fixo $\vec{e} = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, então:

(i) *Relativamente a Y_1*

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(e) = & (A_{31}^1 \cos^2\theta + 2A_{31}^2 \cos\theta \sin\theta + A_{32}^2 \sin^2\theta) e_3 + \\ & + (A_{41}^1 \cos^2\theta + 2A_{42}^1 \cos\theta \sin\theta + A_{42}^2 \sin^2\theta) e_4 \end{aligned}$$

Observando-se as expressões de $\vec{\eta}(e)$ e \vec{H} , obtemos:

$$\overrightarrow{(\eta-H)}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) & A_{31}^2 \\ \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) & A_{41}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

(ii) *Relativamente a Y_2*

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(e) = & (A_{31}^1 \cos^2\theta + 2A_{31}^2 \cos\theta \sin\theta + A_{32}^2 \sin^2\theta) e_3 \\ & - (A_{41}^1 \cos^2\theta + 2A_{42}^1 \cos\theta \sin\theta + A_{42}^2 \sin^2\theta) e_4 \end{aligned}$$

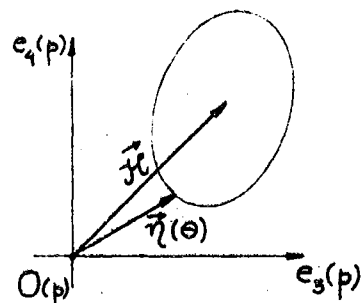
Logo

$$\vec{(\eta-\vec{H})}(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) & A_{31}^2 \\ -\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) & -A_{41}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

Nos dois casos, como a imagem de um círculo sob uma transformação afim é uma elipse, vemos que o vetor curvatura normal se move sobre uma elipse, em torno do vetor \vec{H} , no plano normal, que é chamada elipse de curvatura. Ela é invariante sob $SO(2)$ relativamente a Y_1 e Y_2 e com seu auxílio detectamos os invariantes escalares.

O círculo tangente unitário é levado em si mesmo, por rotações.

Logo, a elipse de curvatura, como conjunto de pontos no plano normal é independente de rotações no espaço tangente.



CONCLUSÃO: Qualquer quantidade invariante da elipse de curvatura, invariante através das ações do grupo estrutural no plano normal pela origem, é invariante pelas ações nos espaços tangente e normal e é portanto um *invariante escalar*.

EXEMPLOS: (1) \vec{H} é vetor invariante, $||\vec{H}||$ é invariante escalar.
 (2) $S = \text{área da elipse}$ é um invariante escalar.

$$S_{Y_1} = \left| \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)A_{41}^2 - \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2)A_{31}^2 \right| \pi = \frac{1}{2}\pi |N|$$

e

$$S_{Y_2} = \left| -\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)A_{41}^2 + \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2)A_{31}^2 \right| \pi = \frac{1}{2}\pi |N|$$

$\frac{1}{2}\pi N$ pode ser visto como a área orientada da elipse.

§ 5. A Expressão $||\vec{H}|| - K = ||\vec{A}|| + ||\vec{B}||$

Neste parágrafo vamos desenvolver três lemas com o objetivo de mostrar que $||\vec{H}|| - K = ||\vec{A}|| + ||\vec{B}||$ onde \vec{A} designará o semi-eixo maior da elipse e \vec{B} o semi-eixo menor.

A fórmula é válida para Y_1 e Y_2 , sendo que faremos a demonstração para o caso Y_2 por não se encontrar no texto base. Neste caso, não sabemos a priori o comportamento dos máximos e mínimos da função distância. Se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse e O o seu centro, teremos $d(P, O) = x^2 - y^2$.

5.1. LEMA: As direções de máximo \vec{A} e mínimo \vec{B} da função distância são ortogonais entre si e a equação da elipse de curvatura relativamente ao sistema (O, \vec{A}, \vec{B}) se apresenta na forma reduzida.

Demonstração:

Sabemos que relativamente a um sistema ortogonal de coordenadas (O, e_3, e_4) a equação de uma elipse centrada na origem é dada por: $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - 1 = 0$.

Obviamente $d(P, O)$ atinge um máximo e um mínimo em alguma direção pois e_3 tem norma positiva e e_4 tem norma negativa.

Consideremos um novo sistema ortogonal de coordenadas $(0, e'_3, e'_4)$ onde e'_3 é a direção onde o máximo da função distância é atingido.

Portanto para $y' = 0$, obtemos pontos de máximo.

Relativamente ao novo sistema teremos:

$$F'(x', y') = \alpha' x'^2 + 2\beta' x' y' + \gamma' y'^2 - 1$$

Sejam $(\pm a', 0)$, $(0, \pm b')$ os pontos onde a elipse corta os novos eixos.

Observação: Para simplificar a notação abandonaremos as "linhas".

Logo,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + 2\beta xy + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

é uma função com derivadas parciais $F_x(x, y)$ e $F_y(x, y)$ contínuas.

Além disso:

$$F(a, 0) = 0$$

$$F_x(x, y) = \frac{2x}{a^2} + 2\beta y \quad \text{e} \quad F_x(a, 0) = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a} > 0 \quad (a \neq 0)$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas, podemos obter localmente $x = \psi(y)$ / $\psi(0) = a$, $F(\psi(y), y) = 0$ e

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{-F_y(\psi(y), y)}{F_x(\psi(y), y)}$$

$$\text{Então} \quad \frac{d\psi}{dy}(0) = -\frac{2\beta a}{2/a} = -\frac{2\beta a^2}{2}$$

Como obtivemos $x = \psi(y)$, podemos escrever a função distância só em função de y ou seja $\psi(y) = \psi^2(y) - y^2$.

Mas $\left(\frac{d\psi(y)}{dy}\right)_{y=0} = 0 \rightarrow$ pois $y = 0$ é

um ponto de máximo para a função distância.

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\psi(y)}{dy}\right)_{y=0} &= (2\psi\psi' - 2y)_{y=0} = \\ &= 2a - \left(\frac{2\beta a^2}{2}\right) - 2 \cdot 0 = -2\beta a^3 \end{aligned}$$

Portanto $-2\beta a^3 = 0$ e como $a \neq 0 \implies \beta = 0$.

Conseqüentemente $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, ou seja relativamente a um sistema ortogonal de coordenadas $(0, e'_3, e'_4)$ onde e'_3 é a direção em que o máximo da função distância é atingido, a elipse é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Para obter os pontos de mínimo, vamos escrever a expressão da distância em coordenadas polares.

Temos

$$x = \rho \cos \theta \quad \rho > 0$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\text{Assim } \psi(\theta) = \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2 \cos 2\theta$$

$$\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} = -2\rho^2 \sin 2\theta$$

Segue que os pontos críticos são da forma $\theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{d^2\psi(\theta)}{d^2\theta} = -4\rho^2 \cos 2\theta \implies \text{para } k \text{ par} \implies$$

$$\implies \frac{d^2\psi(\theta)}{d^2\theta} < 0$$

$$\text{para } k \text{ ímpar} \implies \frac{d^2\psi(\theta)}{d^2\theta} > 0$$

Assim para $\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots$, obtemos pontos de máximo, o que é coerente pois sabíamos que $y = 0$ fornecia tais pontos.

Para $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$, obtemos pontos de mínimo e estas são justamente as direções ortogonais a $y = 0$.

Chamando-se $\vec{e}'_3 = \vec{A}$, $\vec{e}'_4 = \vec{B}$, concluímos que \vec{A} e \vec{B} são direções ortogonais e relativamente a $(0, \vec{A}, \vec{B})$ a elipse se escreve na forma reduzida.

Antes de enunciar o próximo lema, convém fazer algumas considerações:

5.2. (a) Dois diâmetros de uma circunferência ou de uma elipse são conjugados se as tangentes nos extremos de um são paralelas ao outro.

(b) Valem os seguintes fatos:

(i) Numa circunferência do plano euclidiano dois diâmetros são conjugados \iff são ortogonais.

(ii) Como as transformações afins conservam o paralelismo e a tangência, diâmetros conjugados são levados em diâmetros conjugados.

(iii) Se relativamente a determinados eixos a equação da elipse se apresenta na forma reduzida, então estes eixos são diâmetros conjugados. Segue de 5.1 que \vec{A} e \vec{B} são diâmetros conjugados.

(c) Façamos S_1^1 , S_2^1 representarem os círculos unitários de TM_p dados respectivamente por $(\cos\theta, \sin\theta)$ e $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ e consideremos a aplicação natural

$$f : S_1^1 \rightarrow S_2^1.$$

Como temos

$$\overrightarrow{\eta(\theta)-H} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

representando a elipse de curvatura em NM_p , teremos de (b), (iii) e (ii) que \vec{A} e \vec{B} provêm de diâmetros conjugados \vec{a} e \vec{b} em S_2^1 .

Mas por (b), (i) \vec{a} e \vec{b} são ortogonais, ou seja, diferem entre si de $2\theta = 90^\circ$.

Pela aplicação $f : S_1^1 \rightarrow S_2^1$ podemos notar que \vec{a} e \vec{b} provêm de direções em S_1^1 que diferem entre si de $\theta = 45^\circ$.

As considerações feitas em 5.2 voltarão a ser utilizadas no Capítulo III.

5.3. LEMA: Podemos escolher e_1, e_2 referenciais tangentes de modo que $\overrightarrow{\eta(\theta)-H}$ seja o semi-eixo maior para $\theta = 0^\circ$ e o semi-eixo menor para $\theta = 45^\circ$.

Demonstração: Segue de 5.2.

5.4. LEMA: $||\vec{H}|| - K = ||\vec{A}|| + ||\vec{B}||$, onde \vec{A} e \vec{B} são os semi-eixos maior e menor da elipse, respectivamente.

Demonstração:

Por 5.3, teremos:

$$\vec{A} = \overrightarrow{\eta(0^\circ)-H} = \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)e_3 - \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2)e_4$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\eta(45^\circ)-H} = A_{31}^2 e_3 - A_{41}^2 e_4$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2)e_3 - \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2)e_4$$

$$K = [(A_{42}^1)^2 - A_{41}^1 A_{42}^2] - [(A_{32}^1)^2 - A_{31}^1 A_{32}^2]$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\vec{H}|| - K &= \frac{1}{4}[(A_{31}^1)^2 + 2A_{31}^1 A_{32}^2 + (A_{32}^2)^2] \\ &\quad - \frac{1}{4}[(A_{41}^1)^2 + 2A_{41}^1 A_{42}^2 + (A_{42}^2)^2] \\ &\quad - (A_{42}^1)^2 + A_{41}^1 A_{42}^2 + (A_{32}^1)^2 - A_{31}^1 A_{32}^2 \\ &= \frac{1}{4}[(A_{31}^1)^2 - 2A_{31}^1 A_{32}^2 + (A_{32}^2)^2] \\ &\quad - \frac{1}{4}[(A_{41}^1)^2 - 2A_{41}^1 A_{42}^2 + (A_{42}^2)^2] \\ &\quad + (A_{31}^2)^2 - (A_{42}^1)^2 = ||\vec{A}|| + ||\vec{B}|| \end{aligned}$$

Ressaltamos mais uma vez que as considerações anteriores ligadas à elipse de curvatura se referem a Y_1 e Y_2 .

§ 6. As Hipérboles de Curvatura

Neste parágrafo esclareceremos qual é a cônica relacionada com os invariantes quando consideramos em E^4 o produto Y_3 .

6.1. A métrica induzida em TM_p neste caso é do tipo $(-1,+1)$.

Portanto, os vetores não nulos, tangentes a M em p , podem ter norma negativa, positiva ou nula, como é o caso, por exemplo, dos vetores $u = (a,0)$, $v = (0,a)$ e $w = (a,\pm a)$, respectivamente.

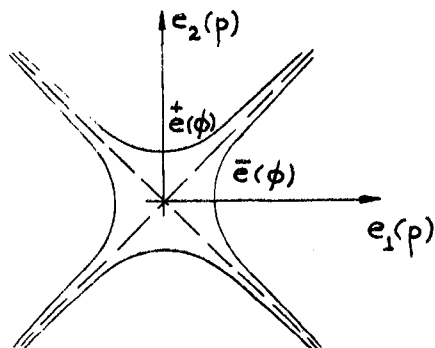
Teremos, em particular, o conjunto dos vetores de norma 1 e o conjunto dos vetores de norma ± 1 , formando duas hipérboles em TM_p cujos eixos de simetrias têm direções de e_1 e e_2 respectivamente.

As direções assintóticas dessas hipérboles serão as direções de norma nula em TM_p .

Como tínhamos

$$\alpha : TM_p \times TM_p \rightarrow NM_p, \text{ teremos}$$

$$\alpha/H : H \times H \rightarrow NM_p.$$



Novamente, a diagonal desta aplicação será o vetor curvatura normal \vec{n} .

6.2. Fixemos em p um referencial (e_1, e_2) e consideremos os vetores:

$$\bar{e} = \bar{e}(\phi) = \text{ch}\phi e_1 + \text{sh}\phi e_2$$

$$\bar{e} = \bar{e}(\phi) = \text{sh}\phi e_1 + \text{ch}\phi e_2$$

Observemos que $\gamma_3(\bar{e}, \bar{e}) = -1$, $\gamma_3(\bar{e}, \bar{e}) = 1$ e variando-se ϕ , \bar{e} e \bar{e} representam um ramo de cada uma das hipérboles citadas. Obviamente, conhecendo-se um ramo de hipérbole, ela estará bem determinada, no referencial fixado.

Consideremos:

$$\dot{e}_1 = \dot{e}_1(\phi) = \frac{1}{2}e^\phi (e_1 + e_2)$$

$$\dot{e}_2 = \dot{e}_2(\phi) = \frac{1}{2}e^{-\phi} (e_1 - e_2)$$

e notemos que estes descrevem as direções assintóticas das duas hipérboles mencionadas.

De fato:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\bar{e} - \dot{e}_1}{e^\phi} = 0 \quad ; \quad \lim_{\phi \rightarrow -\infty} \frac{\bar{e} - \dot{e}_2}{e^{-\phi}} = 0$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{e^+ - \dot{e}_1}{e^\phi} = 0 \quad ; \quad \lim_{\phi \rightarrow -\infty} \frac{e^+ - (-\dot{e}_2)}{e^{-\phi}} = 0$$

Sendo os limites acima todos nulos, teremos que cada numerador comparado com o respectivo denominador se torna suficientemente pequeno; o que prova serem \dot{e}_1 e \dot{e}_2 as direções assintóticas.

6.3. Determinemos as imagens dos vetores acima pela aplicação $\vec{\eta}$.

$$\vec{\eta}(\bar{e}) = (A_{31}^1 \text{ch}^2 \phi + 2A_{32}^1 \text{ch} \phi \text{sh} \phi + A_{32}^2 \text{sh}^2 \phi) e_3$$

$$+ (A_{41}^1 \text{ch}^2 \phi + 2A_{42}^1 \text{ch} \phi \text{sh} \phi + A_{42}^2 \text{sh}^2 \phi) e_4$$

$$\vec{\eta}(e^+) = (A_{31}^1 \text{sh}^2 \phi + 2A_{32}^1 \text{sh} \phi \text{ch} \phi + A_{32}^2 \text{ch}^2 \phi) e_3$$

$$+ (A_{41}^1 \text{sh}^2 \phi + 2A_{42}^1 \text{sh} \phi \text{ch} \phi + A_{42}^2 \text{ch}^2 \phi) e_4$$

$$\vec{\eta}(\dot{e}_1) = \frac{1}{4} e^{2\phi} [(A_{31}^1 + 2A_{32}^1 + A_{32}^2) e_3 + (A_{41}^1 + 2A_{42}^1 + A_{42}^2) e_4]$$

$$\vec{\eta}(\dot{e}_2) = \frac{1}{4} e^{-2\phi} [(A_{31}^1 - 2A_{32}^1 + A_{32}^2) e_3 + (A_{41}^1 - 2A_{42}^1 + A_{42}^2) e_4]$$

Usando-se que $2\text{ch}^2 \phi - 1 = \text{ch} 2\phi$ e $2\text{sh}^2 \phi + 1 = \text{ch} 2\phi$,

obtemos

$$\overrightarrow{(\eta(\bar{e}) + H)}(\phi) = \left[\frac{1}{2} (A_{31}^1 + A_{32}^2) \text{ch} 2\phi + A_{32}^1 \text{sh} 2\phi \right] e_3$$

$$+ \left[\frac{1}{2} (A_{41}^1 + A_{42}^2) \text{ch} 2\phi + A_{42}^1 \text{sh} 2\phi \right] e_4$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\eta(\vec{e}^+) - H)}(\phi) &= \left[\frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) \operatorname{ch} 2\phi + A_{32}^1 \operatorname{sh} 2\phi \right] \mathbf{e}_3 \\ &+ \left[\frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) \operatorname{ch} 2\phi + A_{42}^1 \operatorname{sh} 2\phi \right] \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

Em termos matriciais:

$$\overrightarrow{(\eta(\vec{e}^-) + H)}(\phi) = \overrightarrow{(\eta(\vec{e}^+) - H)}(\phi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) & A_{32}^1 \\ \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) & A_{42}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} 2\phi \\ \operatorname{sh} 2\phi \end{bmatrix}$$

Como $(\operatorname{ch} 2\phi, \operatorname{sh} 2\phi)$ representa um ramo da hipérbole em TM_p , e como sua imagem por uma transformação afim será também um ramo de hipérbole, teremos no espaço normal ramos de duas hipérboles cujos centros estão em $-\vec{H}$ e \vec{H} respectivamente.

Novamente, conhecendo-se um dos ramos de cada hipérbole, por simetria, obtemos o outro e portanto teremos duas hipérboles em NM_p que são paralelas e obtidas uma da outra pelo vetor $2\vec{H}$. Para simplicidade de notação chamaremos de H^- a hipérbole dada por $\overrightarrow{(\eta(\vec{e}^-) + H)}(\phi)$ e H^+ a hipérbole $\overrightarrow{(\eta(\vec{e}^+) - H)}(\phi)$.

6.4. Veremos, agora, que $\vec{n}(\vec{e}_1)$ e $\vec{n}(\vec{e}_2)$ determinam as direções assintóticas de H^+ , bem como de H^- .

De fato:

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\vec{n}(\vec{e}^-) - \vec{n}(\vec{e}_1)}{e^{2\phi}} &= 0 & (2) \quad \lim_{\phi \rightarrow -\infty} \frac{\vec{n}(\vec{e}^-) - \vec{n}(\vec{e}_2)}{e^{-2\phi}} &= 0 \\ (3) \quad \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\vec{n}(\vec{e}^+) - \vec{n}(\vec{e}_1)}{e^{2\phi}} &= 0 & (4) \quad \lim_{\phi \rightarrow -\infty} \frac{\vec{n}(\vec{e}^+) - \vec{n}(\vec{e}_2)}{e^{-2\phi}} &= 0 \end{aligned}$$

Calculemos, por exemplo, o limite (1):

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{\vec{\eta}(\bar{e}) - \vec{\eta}(\bar{e}_1)}{e^{2\phi}} = \\
 & = \lim_{\phi \rightarrow \infty} [(A_{31}^1 \text{ch}^2 \phi + 2A_{32}^1 \text{ch} \phi \text{sh} \phi + A_{32}^2 \text{sh}^2 \phi - \frac{1}{4} e^{2\phi} (A_{31}^1 + 2A_{32}^1 + A_{32}^2)] e_3 \\
 & + \lim_{\phi \rightarrow \infty} [(A_{41}^1 \text{ch}^2 \phi + 2A_{42}^1 \text{ch} \phi \text{sh} \phi + A_{42}^2 \text{sh}^2 \phi - \frac{1}{4} e^{2\phi} (A_{41}^1 + 2A_{42}^1 + A_{42}^2)] e_4 \\
 & = \lim_{\phi \rightarrow \infty} [A_{31}^1 \left(\frac{\text{ch}^2 \phi - \frac{1}{4} e^{2\phi}}{e^{2\phi}} \right) + A_{32}^1 \left(\frac{\text{sh} 2\phi - \frac{1}{2} e^{2\phi}}{e^{2\phi}} \right) + A_{32}^2 \left(\frac{\text{sh}^2 \phi - \frac{1}{4} e^{2\phi}}{e^{2\phi}} \right)] e_3 \\
 & + \lim_{\phi \rightarrow \infty} [A_{41}^1 \left(\frac{\text{ch}^2 \phi - \frac{1}{4} e^{2\phi}}{e^{2\phi}} \right) + A_{42}^1 \left(\frac{\text{sh} 2\phi - \frac{1}{2} e^{2\phi}}{e^{2\phi}} \right) + A_{42}^2 \left(\frac{\text{sh}^2 \phi - \frac{1}{4} e^{2\phi}}{e^{2\phi}} \right)] e_4 \\
 & = \lim_{\phi \rightarrow \infty} [A_{31}^1 \left(\frac{2+e^{-2\phi}}{4e^{2\phi}} \right) + A_{32}^1 \left(\frac{-e^{-2\phi}}{2e^{2\phi}} \right) + A_{32}^2 \left(\frac{-2+e^{-2\phi}}{4e^{2\phi}} \right)] e_3 \\
 & + \lim_{\phi \rightarrow \infty} [A_{41}^1 \left(\frac{2+e^{-2\phi}}{4e^{2\phi}} \right) + A_{42}^1 \left(\frac{-e^{-2\phi}}{2e^{2\phi}} \right) + A_{42}^2 \left(\frac{-2+e^{-2\phi}}{4e^{2\phi}} \right)] e_4 = 0
 \end{aligned}$$

Os demais limites são obtidos do mesmo modo.

§ 7. O Quarto Invariante Δ

Vamos agora tratar do quarto invariante Δ , que determina a posição da origem de NM_p em relação à cônica.

7.1. Consideremos

$$\Delta_{Y_1} = \Delta_{Y_3} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} A_{31}^1 & 2A_{32}^1 & A_{32}^2 & 0 \\ A_{41}^1 & 2A_{42}^1 & A_{42}^2 & 0 \\ 0 & A_{31}^1 & 2A_{32}^1 & A_{32}^2 \\ 0 & A_{41}^1 & 2A_{42}^1 & A_{42}^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{Y_2} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} A_{31}^1 & 2A_{32}^1 & A_{32}^2 & 0 \\ -A_{41}^1 & -2A_{42}^1 & -A_{42}^2 & 0 \\ 0 & A_{31}^1 & 2A_{32}^1 & A_{32}^2 \\ 0 & -A_{41}^1 & -2A_{42}^1 & -A_{42}^2 \end{vmatrix}$$

Δ pode ser visto como a resultante dos dois polinômios

$$A_{31}^1 x^2 + 2A_{32}^1 xy + A_{32}^2 y^2 \quad \text{e} \quad A_{41}^1 x^2 + 2A_{42}^1 xy + A_{42}^2 y^2$$

onde (x, y) são as coordenadas homogêneas de um ponto. (ver [8]).

Observemos, por propriedades de determinantes, que $\Delta_{Y_1} = \Delta_{Y_2} = \Delta_{Y_3}$. Por esta razão os três determinantes serão identificados por Δ .

7.2. Antes de mostrar que Δ é invariante, vamos desenvolver uma forma quadrática invariante, cujos cálculos são análogos para os três produtos internos.

Seja $e = xe_1 + ye_2$ e consideremos

$$de = xde_1 + yde_2 + dx e_1 + dy e_2$$

logo,

$$de \cdot e_3 = x\omega_{13} + y\omega_{23}$$

$$de \cdot e_4 = x\omega_{14} + y\omega_{24}$$

Agora usando as equações 2.3, (6), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
de.e_3 \wedge de.e_4 &= [x\omega_{13} + y\omega_{23}] \wedge [x\omega_{14} + y\omega_{24}] \\
&= [x(A_{31}^1\omega_1 + A_{31}^2\omega_2) + y(A_{32}^1\omega_1 + A_{32}^2\omega_2)] \\
&\wedge [x(A_{41}^1\omega_1 + A_{41}^2\omega_2) + y(A_{42}^1\omega_1 + A_{42}^2\omega_2)] \\
&= [(A_{31}^1A_{41}^2 - A_{31}^2A_{41}^1)x^2 + (A_{31}^1A_{42}^2 - A_{32}^1A_{41}^1)xy + (A_{32}^1A_{42}^2 - A_{32}^2A_{42}^1)y^2]\omega_1 \wedge \omega_2
\end{aligned}$$

Definimos

$$S(x,y) = (A_{31}^1A_{41}^2 - A_{31}^2A_{41}^1)x^2 + (A_{31}^1A_{42}^2 - A_{32}^1A_{41}^1)xy + (A_{32}^1A_{42}^2 - A_{32}^2A_{42}^1)y^2$$

$S(x,y)$ é invariante sob G_i , $i = 1, 2, 3$ respectivamente em relação a Y_1 , Y_2 e Y_3 . (Ver 1.7)

7.3. A seguir mostraremos que o "traço" de $S(x,y)$ e o seu determinante são invariantes escalares.

Relativamente a Y_3

O grupo que age em FTM, onde estão definidos os coeficientes de $S(x,y)$, é $SO(1,1)$.

Assim as mudanças são dadas por:

$$x = \text{ch}\theta x' + \text{sh}\theta y'$$

$$y = \text{sh}\theta x' + \text{ch}\theta y'$$

$$\text{Temos } S(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

$$\begin{aligned}
S(x',y') &= \alpha(\text{ch}\theta x' + \text{sh}\theta y')^2 \\
&\quad + 2\beta(\text{ch}\theta x' + \text{sh}\theta y')(\text{sh}\theta x' + \text{ch}\theta y') \\
&\quad + \gamma(\text{sh}\theta x' + \text{ch}\theta y')^2
\end{aligned}$$

Assim $S(x', y') = \alpha' x'^2 + 2\beta' x'y' + \gamma' y'^2$ onde

$$\alpha' = \alpha \operatorname{ch}^2 \theta + 2\beta \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \theta + \gamma \operatorname{sh}^2 \theta$$

$$\beta' = (\alpha + \gamma) \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \theta + \beta (\operatorname{ch}^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \theta)$$

$$\gamma' = \alpha \operatorname{sh}^2 \theta + 2\beta \operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \theta + \gamma \operatorname{ch}^2 \theta$$

$$\text{Temos } [S] = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \beta' & \gamma' \end{bmatrix}.$$

Se considerarmos " $\alpha' + \gamma'$ ", que seria o traço de $S(x, y)$ no sentido conhecido, veremos que esta função não é invariante pois $\alpha' + \gamma' \neq \alpha + \gamma$.

Por esta razão, consideraremos

$$\text{"traço"} \quad S(x, y) = -\alpha + \gamma,$$

já que esta é invariante.

$$\underline{\text{De fato:}} \quad -\alpha' + \gamma' = \alpha(-\operatorname{ch}^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \theta) + \gamma(-\operatorname{sh}^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \theta) = -\alpha + \gamma.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \det S(x', y') &= \alpha' \gamma' - \beta'^2 \\ &= [\alpha \operatorname{ch}^2 \theta + 2\beta \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \theta + \gamma \operatorname{sh}^2 \theta][\alpha \operatorname{sh}^2 \theta + 2\beta \operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \theta + \gamma \operatorname{ch}^2 \theta] \\ &\quad - [(\alpha + \gamma) \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \theta + \beta (\operatorname{ch}^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \theta)]^2 \\ &= (\alpha \gamma - \beta^2) (\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta)^2 = \alpha \gamma - \beta^2 = \det S(x, y). \end{aligned}$$

Logo as funções $\det S(x, y) = \alpha \gamma - \beta^2$ e "traço" $S(x, y) = -\alpha + \gamma$ são invariantes.

OBSERVAÇÃO: Relativamente a Y_1 e Y_2 o grupo que age em FTM é $SO(2)$. Neste caso já sabemos que para $S(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$, as funções traço $S(x,y) = \alpha + \gamma$ e $\det S(x,y) = \alpha\gamma - \beta^2$ são invariantes.

7.4. Observando-se a expressão de $S(x,y)$, obtemos nos três casos $\Delta = \det S$.

Mostremos, também que $N = \text{"traço"} S$, relativamente a Y_3 . O resultado também é válido nos outros dois casos, tomando-se o cuidado de considerar a conveniente definição da função "traço" em cada situação.

Em Y_3 , temos:

$$[S] = \begin{bmatrix} A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{31}^2 A_{41}^1 & \frac{1}{2}(A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1) \\ \frac{1}{2}(A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1) & A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{42}^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{"traço"} S &= -(A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{31}^2 A_{41}^1) + (A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{42}^1) \\ &= (A_{41}^1 + A_{42}^2) A_{31}^2 - (A_{31}^1 + A_{32}^2) A_{41}^1 = N \end{aligned}$$

Logo N e Δ são invariantes escalares.

Notemos que, relativamente a Y_3 , $S(x,y)$ pode não ser identicamente nula mesmo quando $N = \text{"traço"} S$ e $\Delta = \det S$ são ambos nulos. Basta tomar, por exemplo, $S(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.

Observação: A invariança de K é obtida, definindo-se uma forma quadrática $F(x,y)$ por $d\nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2 = F(x,y) \omega_1 \wedge \omega_2$ onde $\nu = xe_3 + ye_4$ e observando-se que $K = \text{"traço"} F$. Devemos tomar o mesmo cuidado anterior para a função "traço" relativamente a cada produto interno.

7.5. DESCRIÇÃO DE Δ EM TERMOS DA CONFIGURAÇÃO:

Enunciaremos os teoremas 7.5.A. e 7.5.B. sendo o primeiro válido tanto para Y_1 como para Y_2 e o segundo somente para Y_3 .

Como a técnica de demonstração será a mesma, apresentaremos apenas a demonstração de 7.5.B.

7.5.A. TEOREMA: Seja O' a origem do espaço normal NM_p e $N \neq 0$ em p .

Então: se $\Delta > 0$, o ponto O' estará no interior da elipse;

se $\Delta = 0$, sobre a elipse e se $\Delta < 0$ no seu exterior.

7.5.B. TEOREMA: Seja O' , origem de NM_p e $N \neq 0$ em p .

(a) Se a reta através de \vec{H} intercepta H^- (e também H^+) então O' estará interno, sobre ou externo a H^- (e também a H^+) se respectivamente $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

(b) Se a reta através de \vec{H} não intercepta H^- (e H^+) então $\Delta < 0$.

Demonstração:

Fixaremos os cálculos para H^- , sendo que para H^+ o procedimento é análogo.

(a) Consideremos a transformação:

$T : R^2 \simeq TM_p \rightarrow R^2 \simeq NM_p$ dada por

$$T(u, v) = \left(\frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2)u + A_{32}^1 v, \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2)u + A_{42}^1 v \right).$$

Tomemos um novo referencial (f_3, f_4) com origem em $-\vec{H}$.

Obviamente, em (f_3, f_4) , o ponto O' tem coordenadas $(\frac{1}{2}(A_{32}^2 - A_{31}^1), \frac{1}{2}(A_{42}^2 - A_{41}^1))$

Queremos $(u, v) \in TM_p$ que é levado em O' pela transformação para estudar a sua posição relativamente à hipérbole H^- . Basta então resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(A_{32}^2 - A_{31}^1) = \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2)u + A_{32}^1 v \\ \frac{1}{2}(A_{42}^2 - A_{41}^1) = \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2)u + A_{42}^1 v \end{cases}$$

que possui por discriminante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) & A_{32}^1 \\ \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) & A_{42}^1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}N$$

Como $N \neq 0$, $\Delta' \neq 0$. Podemos então resolver o sistema por "Cramer" e obter o ponto procurado que será dado por

$$u_0 = \frac{\Delta u}{\Delta'} \quad \text{e} \quad v_0 = \frac{\Delta v}{\Delta'}. \quad \text{Chamemos } O = (u_0, v_0).$$

Então teremos:

- (i) Se $-u_0^2 + v_0^2 < -1 \implies O$ está interno à hipérbole dada por $\bar{e} \implies O' = T(O)$ está interno à hipérbole H^- .
- (ii) Se $-u_0^2 + v_0^2 = -1 \implies O'$ está sobre a hipérbole H^- .
- (iii) Se $-u_0^2 + v_0^2 > -1 \implies O'$ está externo à hipérbole H^- .

Para concluir a demonstração, basta relacionar o valor de $-u_0^2 + v_0^2 + 1$ com o de Δ .

Efetuando-se os cálculos temos:

$$\begin{aligned} -u_0^2 + v_0^2 + 1 &= -\left(\frac{\Delta u}{\Delta'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta'}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{-\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta'^2}{\Delta'^2} = -\frac{\Delta}{\Delta'^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta > 0 \iff -u_0^2 + v_0^2 + 1 < 0$$

$$\Delta = 0 \iff -u_0^2 + v_0^2 + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \iff -u_0^2 + v_0^2 + 1 > 0$$

Agora por (i), (ii) e (iii) segue o resultado.

(b) Se a reta através de \vec{H} não intercepta H^- então a origem O' é um ponto externo à hipérbole ou seja $-u_0^2 + v_0^2 + 1 > 0$. Conseqüentemente $\Delta < 0$.

O teorema seguinte é válido para Y_1 e Y_2 , sendo que faremos a demonstração para o caso Y_1 . Relativamente a Y_3 , teremos que somente (a), (b) e (c) são equivalentes, pois (d) não implica (a).

No entanto, como ainda neste caso (c) implica (d), teremos que (a) implica (d) e (b) implica (d).

7.5.C. TEOREMA: Seja $p \in M$. As quatro seguintes condições são equivalentes:

(a) a forma quadrática $S \equiv 0$ em p

(b) posto de $\alpha \leq 1$ em p onde:

$$\alpha = \begin{bmatrix} A_{31}^1 & A_{31}^2 & A_{32}^2 \\ A_{41}^1 & A_{41}^2 & A_{42}^2 \end{bmatrix}$$

(c) p é ponto de inflexão

(d) $\Delta = 0$ e $N = 0$ em p .

Demonstração: (a) \implies (b).

Se $S \equiv 0$ em p então:

$$A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{31}^2 A_{41}^1 = 0$$

$$A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1 = 0 \quad (\text{ver 7.2})$$

$$A_{31}^2 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2 = 0$$

Logo posto de $\alpha \leq 1$, pois todos os menores de segunda ordem se anulam.

(b) \implies (c)

Observação: Um ponto de inflexão de M é um ponto onde a dimensão da imagem da segunda forma fundamental é menor que dois (ver 4.5 e [3], p. 327).

Se posto de $\alpha \leq 1$ em p , $\vec{n}(e)$ é independente de θ ou seja, a imagem da segunda forma fundamental tem dimensão no máximo um ou seja, p é ponto de inflexão.

(c) \implies (b)

Se p é um ponto de inflexão, o vetor $\vec{n}(e)$ descreve uma reta através da origem de NM_p . Logo seu argumento deve ser constante ou seja

$$\begin{aligned} & A_{31}^1 \cos^2 \theta + 2A_{32}^1 \cos \theta \sin \theta + A_{32}^2 \sin^2 \theta \\ = & \lambda (A_{41}^1 \cos^2 \theta + 2A_{42}^1 \cos \theta \sin \theta + A_{42}^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Como $\cos^2 \theta$, $\cos \theta \sin \theta$, $\sin^2 \theta$ são funções independentes, obtemos posto de $\alpha \leq 1$.

(c) \implies (d)

Se p é ponto de inflexão, por (b) \iff (c), temos:

$$(a) \quad A_{31}^1 A_{42}^1 - A_{41}^1 A_{32}^1 = 0$$

$$(b) \quad A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{42}^1 A_{32}^2 = 0$$

$$\text{Agora } N = (A_{31}^1 - A_{32}^2) A_{42}^1 + (A_{42}^2 - A_{41}^1) A_{32}^1 = (a) + (b) = 0$$

$$\Delta = 0 \quad (\text{obviamente})$$

(d) \implies (a)

Temos $\Delta = N = 0$.

Logo $\det S = \text{traço } S = 0$ em p (ver 7.4).

$$\text{Como } [S] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{teremos:}$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{o que mostra } S \equiv 0 \quad \text{em } p.$$



CAPÍTULO II

No § 1 definiremos uma generalização dos campos vetoriais que nos permitirá obter propriedades globais para M , relativamente a Y_1 e Y_2 . Estes resultados estarão relacionados com as singularidades que serão introduzidas no § 2.

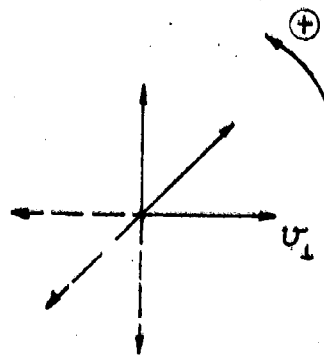
§ 1. Campos de Cruzes

1.1. DEFINIÇÃO: Uma r -cruz é um conjunto de r vetores unitários no plano cujas extremidades formam um polígono regular.

Se considerarmos C_r a família de todas as r -cruzes no plano teremos que C_r é homeomorfo a S^1 .

Podemos visualizar este fato do seguinte modo:

Fixamos uma das r -cruzes e escolhemos uma de suas pernas v_1 , como ponto de partida. Fixado o sentido positivo da rotação, associamos a cada r -cruz, a sua perna mais próxima de v_1 , no sentido positivo. Notemos que enquanto as pernas mais próximas varrem um ângulo de $\frac{2\pi}{r}$, as $r-1$ pernas restantes também o varrem. No total teremos um ângulo de 2π . Após uma rotação de $\frac{2\pi}{r}$ voltamos à cruz original.



ILUSTRAÇÃO_ 2-cruzes

Seja $C_r(M)$ o fibrado de r -cruzes associado a TM ou seja

$$C_r(M) = \{(p, c_r(p)) \text{ tal que } p \in M \text{ e } c_r(p) \text{ seja uma } r\text{-cruz em } TM_p\}.$$

1.2. DEFINIÇÃO: Um campo de r -cruzes é uma secção $\sigma: M \rightarrow C_r(M)$.

1.3. DEFINIÇÃO: PONTO SINGULAR de um campo de cruzes σ é um ponto $p \in M$ onde σ não é definido.

1.4. A definição de *índice de ponto singular* neste caso é análoga à que é dada para campo vetorial:

Seja V uma vizinhança de p_0 sobre a qual o fibrado é trivial e que não contém outros pontos singulares além de p_0 .

Consideremos C um círculo ao redor de p_0 tal que $C \subset V$.

Pela definição de campo de cruzes temos

$$\sigma: V - \{p_0\} \rightarrow V - \{p_0\} \times C_r$$

Logo podemos definir $\delta: C \rightarrow C_r$ por $\delta = \pi_2 \circ \sigma \circ i$ que é uma aplicação com um determinado grau G .

Definimos o índice do campo em p_0 por $\text{Ind}(\sigma, p_0) = \frac{1}{r}G$.

Observação: Se $\frac{G}{r}$ é inteiro então cada perna da cruz determina um campo com singularidade no ponto dado, cujo índice vale $\frac{G}{r}$.

As provas de que esta definição independe da vizinhança e do círculo são feitas em [2].

1.5. PROPOSIÇÃO: Seja M uma superfície compacta.

Se o campo de r -cruzes $\sigma: M \rightarrow C_r(M)$ tem um número finito p_1, p_2, \dots, p_s de singularidades então

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^s \text{Ind}(\sigma, p_i)$$

Demonstração: (Ver [4], p. 277-278).

O próximo lema será muito útil no cálculo do índice de um ponto singular isolado p_0 de um r -campo tangente.

Seja D um disco em torno de p_0 , sobre o qual TM é trivial.

Fixemos e_1, e_2 um campo de referenciais ortonormais tangentes nesta vizinhança e v_1 uma das pernas da r -cruz.

Definiremos argumento do campo de cruzes = $\ast (v_1, e_1)$

Consideremos, ainda, $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que o jacobiano de ψ não é zero em p_0 e $\psi(p_0) = 0$.

Seja o argumento de ψ dado por $(\arg \psi)q = \ast \overline{O\psi(q)}$ com uma dada direção em \mathbb{R}^2 e $q \in D - \{p_0\}$.

1.6. LEMA: Se $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação nas condições acima, σ o campo de cruzes tendo p_0 como ponto singular isolado e se $n \cdot \arg \psi = \arg \sigma \pmod{\frac{2\pi}{r}}$ então o índice de σ em p_0 é $\pm n$. Além disso o sinal depende do sinal $\det \text{Jac } \psi(p_0)$.

Observação: n pode ser um número racional.

Demonstração: (Ver [2], p. 17).

§ 2. Transversalidade Geométrica

Este parágrafo se refere aos três produtos internos.

Consideremos uma imersão $X : M \rightarrow E^4$.

Sabemos que a segunda forma fundamental é uma forma quadrática vetorial definida no fibrado de referenciais F que pode ser escrita como

$$(A_{31}^1 \omega_1^2 + 2A_{31}^2 \omega_1 \omega_2 + A_{32}^2 \omega_2^2) e_3 \pm (A_{41}^1 \omega_1^2 + 2A_{41}^2 \omega_1 \omega_2 + A_{42}^2 \omega_2^2) e_4$$

dependendo do produto interno considerado em E^4 .

Sabemos que cada ponto de F é do tipo

$$\bar{p} = (p, e_1(p), e_2(p), e_3(p), e_4(p))$$

onde $p \in M$ e $\{e_1(p), e_2(p)\}$ é base de TM_p e $\{e_3(p), e_4(p)\}$ é base de NM_p .

Assim para cada $\bar{p} \in F$, a segunda forma fundamental dá origem a um par de formas quadráticas $(R^2 \rightarrow R)$ do tipo:

$$(x, y) \longrightarrow \begin{array}{l} A_{31}^1(\bar{p})x^2 + 2A_{31}^2(\bar{p})xy + A_{32}^2(\bar{p})y^2 \\ A_{41}^1(\bar{p})x^2 + 2A_{41}^2(\bar{p})xy + A_{42}^2(\bar{p})y^2 \end{array}$$

Isto nos leva a considerar o conjunto Z de todos os pares de formas quadráticas do tipo acima que pode ser identificado com o R^6 .

Então a segunda forma fundamental induz uma aplicação $\mu : F \rightarrow Z$ que leva um ponto de F no par de formas quadráticas.

Daremos a seguir algumas definições, (ver [4]), que se referem a Y_1 , Y_2 e Y_3 .

2.1. DEFINIÇÃO: Uma subvariedade algébrica K de Z , invariante sob a ação de $SO(2) \times SO(2)$, $SO(2) \times SO(1,1)$ e $SO(1,1) \times SO(2)$ respectivamente é chamada *singularidade modelo*. (Ver III, 2.1, (ii))

2.2. DEFINIÇÃO: Um ponto p de M tal que $\mu(F_p) \cap K \neq \emptyset$ é chamado *ponto K -geometricamente singular de M* .

2.3. DEFINIÇÃO: Se $\mu(F)$ corta K transversalmente em Z ao longo de toda a fibra sobre p , dizemos que p é um ponto singular K -geometricamente transversal de M .

2.4. DEFINIÇÃO: Dizemos que a imersão $X : M \rightarrow E^4$ é K -geometricamente transversal (ou K -genérica) se todo ponto 2.2 de M é um ponto 2.3 de M .

A seguir, esclarecemos o que significa μ ser transversal a K se $\mu(\bar{p})$ é um ponto singular da variedade algébrica K .

Denotaremos por $\Sigma(K)$ a subvariedade algébrica própria de K , constituída pelos seus pontos singulares.

Consideremos uma coleção K de subvariedades algébricas de Z tal que K seja a menor possível a satisfazer às condições:

- (1) $K \in K$.
- (2) Se $K_1 \in K$ então $\Sigma(K_1) \in K$.
- (3) Se $K_1 \in K$ então todas as componentes irredutíveis de K_1 estão em K .
- (4) Se $K_1, K_2 \in K$ então $K_1 \cap K_2 \in K$.

K é uma coleção finita bem definida de variedades algébricas.

2.5. DEFINIÇÃO: μ é transversal a K em \bar{p} se μ é transversal a cada $K_1 \in K$ com $\mu(\bar{p})$ ponto regular de K_1 .

Seja p um ponto K -singular e $\sigma : U \rightarrow F$ um referencial definido em uma vizinhança de p .

Como as funções $A_{31}^1, A_{31}^2, A_{32}^2, A_{41}^1, A_{41}^2, A_{42}^2$ são definidas em F , podemos puxá-las para baixo, através deste referencial, obtendo assim funções em M que serão denotadas por $(A_{31}^1)', (A_{31}^2)', (A_{32}^2)', (A_{41}^1)', (A_{41}^2)', (A_{42}^2)'$.

Então podemos estabelecer o seguinte:

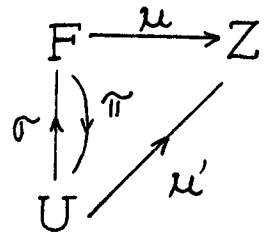
2.6. LEMA: p_0 é um ponto singular K -geometricamente transversal se e somente se $\mu' = \mu \circ \sigma : U \rightarrow Z$ é transversal a K em p_0 para todo σ definido numa vizinhança de p_0 .

Demonstração:

(\Leftarrow) Como $\sigma(U) \subset F(U)$ (fibrado F restrito a U), então $\mu(\sigma(U)) \subset \mu(F(U))$, ou seja $\mu'(U) \subset \mu(F(U))$.

Assim se μ' é transversal a K em p_0 implica que μ é transversal em $\sigma(p_0)$.

σ pode ser escolhido arbitrariamente de modo que μ seja transversal em todo ponto na fibra sobre p_0 .



(\Rightarrow) Mostremos que se μ é transversal em $\bar{p}_0 = (p_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ então μ' é transversal a K em $\pi(\bar{p}_0) = p_0$.

Suponhamos que $\mu(\bar{p}_0)$ seja ponto regular de K .

Estaremos considerando coordenadas x_1, x_2 em U e θ, ψ nas fibras sobre U .

Suponhamos que em \bar{p}_0 , $\theta = \psi = 0$.

Suponhamos, ainda, que K seja dada pelos polinômios:

$$\psi_i(A_{31}^1, A_{31}^2, A_{32}^2, A_{41}^1, A_{41}^2, A_{42}^2) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Com isto queremos dizer que $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r\}$ forma uma base para $I(K)$, o ideal dos polinômios em Z que se anulam em K , e se $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$ então $K = \psi^{-1}(0)$.

Seja $\alpha = (A_{31}^1, A_{31}^2, A_{32}^2, A_{41}^1, A_{41}^2, A_{42}^2)$ - vetor coluna e $H(\theta, \psi)$ a matriz 6×6 representando a ação de G_i , $i=1, 2, 3$ em Z . (Ver I.1.7).

Definamos $\psi_{i\theta\psi} : Z \rightarrow R$ por $\psi_{i\theta\psi}(\alpha) = \psi_i(H(\theta, \psi)\alpha)$.

Como K é invariante por $H(\theta, \psi)$,

$$\alpha \in K \implies H(\theta, \psi)\alpha \in K \implies \psi_i(H(\theta, \psi)\alpha) = 0 \implies$$

$$\implies \psi_{i\theta\psi}(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in K.$$

Logo $\psi_{i\theta\psi} \in I(K)$. Decorre daí que existem funções $L_{ij}(\theta, \psi)$ tais que:

$$\psi_{i\theta\psi}(\alpha) = \sum_{j=1}^r L_{ij}(\theta, \psi) \psi_j(\alpha) \quad \text{para todo } \alpha.$$

Seja J a matriz $2 \times r$ com primeira linha

$$\frac{\partial(\psi_1 \circ \mu)}{\partial x_1}(\bar{p}_0) \quad \text{e segunda linha} \quad \frac{\partial(\psi_1 \circ \mu)}{\partial x_2}(\bar{p}_0)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\psi_1 \circ \mu)}{\partial x_1}(\bar{p}_0) & \frac{\partial(\psi_2 \circ \mu)}{\partial x_1}(\bar{p}_0) & \dots & \frac{\partial(\psi_r \circ \mu)}{\partial x_1}(\bar{p}_0) \\ \frac{\partial(\psi_1 \circ \mu)}{\partial x_2}(\bar{p}_0) & \frac{\partial(\psi_2 \circ \mu)}{\partial x_2}(\bar{p}_0) & \dots & \frac{\partial(\psi_r \circ \mu)}{\partial x_2}(\bar{p}_0) \end{bmatrix}$$

Agora como μ é transversal a K em \bar{p}_0 , $\mu(\bar{p}_0)$ é ponto regular de $K \implies J$ tem posto máximo ρ em \bar{p}_0 .

Consideremos agora J' o Jacobiano de $\psi_1(\mu'(x_1, x_2))$ em $\pi(\bar{p}_0) = p_0$.

Mostremos que $J = L_{ij}(\theta, \psi)J'$.

De fato: Sabemos que $F_{p_0} \cong G_1$.

Uma vizinhança de \bar{p}_0 em F_{p_0} fica parametrizada por $(\theta, \psi)(\sigma(x_1^0, x_2^0))$, θ, ψ variando e (x_1^0, x_2^0) as coordenadas de p_0 .

Logo em $U \times F_{p_0}$ pode-se tomar coordenadas

$$(x_1, x_2, \theta, \psi) \cong (\theta, \psi)(\sigma(x_1, x_2)).$$

Portanto, fazendo $x = (x_1, x_2)$ teremos:

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \mu(x, \theta, \psi) &= \psi_1[\mu((\theta, \psi)(\sigma(x)))] = \psi_1[H(\theta, \psi)(\mu \circ \sigma(x))] = \\ &= \psi_1 \theta \psi(\mu \circ \sigma(x)) = \sum_{j=1}^r L_{ij}(\theta, \psi) \psi_j(\mu'(x)). \end{aligned}$$

$$\text{Assim } \frac{\partial(\psi_1 \circ \mu)}{\partial x_\ell}(x, \theta, \psi) = \sum_{j=1}^r L_{ij}(\theta, \psi) \frac{\partial(\psi_j \circ \mu')}{\partial x_\ell}(x).$$

Conclusão: $J = L_{ij}(\theta, \psi)J'$

Como em \bar{p}_0 , $\theta = \psi = 0$ e portanto $L_{ij}(0, 0) = \delta_{ij}$ temos:

$$\frac{\partial(\psi_1 \circ \mu)}{\partial x_j}(\bar{p}_0) = \frac{\partial(\psi_1 \circ \mu')}{\partial x_j}(p_0).$$

Logo J' tem posto máximo ρ em p_0 .

Conclusão: μ' é transversal a K em p_0 .

Observação: Se $\mu(\bar{p}_0)$ não é ponto regular de K aplicamos o argumento acima a cada um dos elementos de K dos quais $\mu(\bar{p}_0)$ é ponto regular.

Deste lema segue facilmente (ver [2]) o

2.7. TEOREMA: Se $X : M \rightarrow E^4$ é uma imersão K -geometricamente transversal tal que $\mu(F) \cap \Sigma(K) = \emptyset$ então a co dimensão do conjunto de pontos K -singulares em M é igual à codimensão de K em Z .

Vale ainda

2.8. TEOREMA: Se K é uma subvariedade diferenciável de Z , ou ainda se para toda imersão $X : M \rightarrow E^4$ que seja K -genérica valha $\mu(F) \cap \Sigma(K) = \emptyset$ então o subconjunto das aplicações genéricas de M em E^4 é aberto e denso.

Demonstração: (Ver [2] ou [4]).



CAPÍTULO III

Este capítulo conterá essencialmente um estudo paralelo dos campos de cruzes e singularidades genéricas relativamente a Y_1 e Y_2 . Tentaremos sempre dar destaque à situação mais interessante e quando for necessário apresentaremos os resultados para os dois casos. Se não fizermos nenhum comentário a respeito do produto não considerado, estaremos subentendendo que relativamente a ele, o raciocínio é análogo.

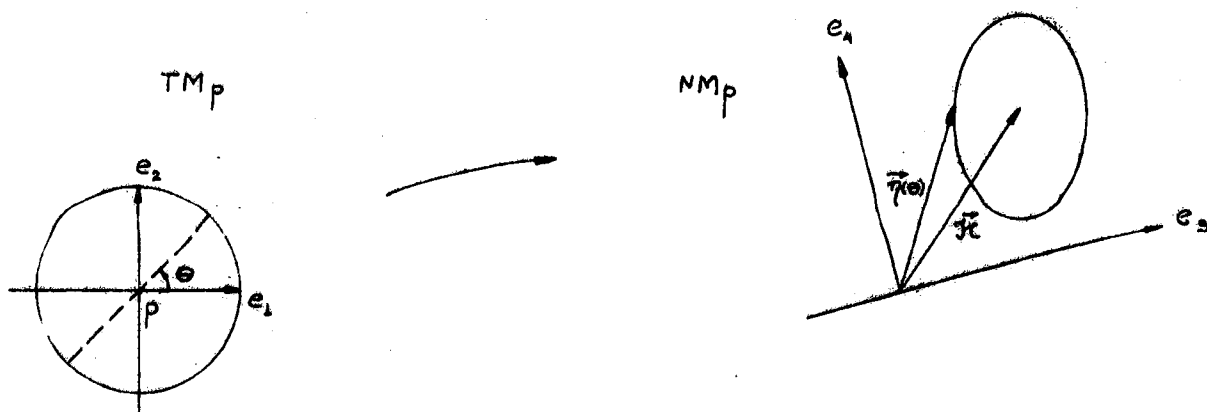
Na parte final do capítulo aparece um estudo isolado em relação a Y_3 , pois neste caso não teremos os campos de cruzes que surgem para Y_1 e Y_2 . (Ver § 5).

§ 1. Campos de Cruzes e Singularidades nos Casos Y_1 e Y_2

1.1. MOTIVAÇÃO

Sabemos que o vetor $\vec{n}(\theta)$ é o vetor posição da elipse de curvatura. (Ver I.4.5).

Como $\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta+180^\circ)$, todo ponto da elipse corresponde a dois pontos diametralmente opostos no círculo unitário do espaço tangente.



Com este raciocínio podemos construir campos de cruzes contínuos em M . A construção falha nos pontos singulares que são caracterizados pelos invariantes de segunda ordem da imersão.

1.2. CONSTRUÇÃO DOS CAMPOS DE CRUZES

(i) *campos de 4-cruzes (a):*

A reta suporte do vetor curvatura média \vec{H} encontra a elipse em dois pontos que determinam um par de retas ortogonais no plano tangente. Esta construção, válida para Y_1 e Y_2 , falha se $\vec{H} = 0$ ou se a elipse se torna um segmento de reta ao longo de \vec{H} ou se a elipse é um ponto.

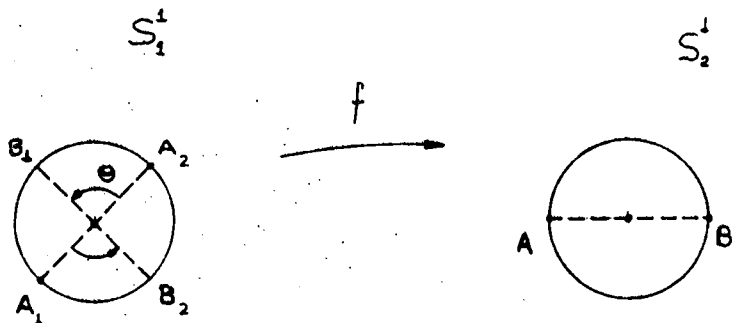
Mostremos que realmente as retas do plano tangente formando a 4-cruz são ortogonais.

Temos

$$\vec{\eta}(\theta) - H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

Consideremos $f : S_1^1 \rightarrow S_2^1$, como em I.5.2, (c), dada por $f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$. A reta suporte de \vec{H} determina dois pontos antípodas na elipse que pela transformação afim provêm de dois pontos A e B antípodas em S_2^1 .

Notemos que A e B distam entre si de $2\theta = 180^\circ$ e por f provêm cada um de dois pontos em S_1^1 , respectivamente A_1 e A_2 , B_1 e B_2 .



Como $\theta = 90^\circ$, ao considerarmos as retas A_1A_2 e B_1B_2 vemos que são ortogonais e determinam, pela intersecção com S_1^1 , uma 4-cruz em TM_p .

(ii) campos de 4-cruzes (b) e (c):

Sabemos que, relativamente a Y_2 , os vetores dos tipos $\vec{v}_1 = (a, a)$ e $\vec{v}_2 = (a, -a)$ em NM_p têm norma nula. Uma reta que tenha uma destas direções será chamada "reta de norma nula".

A intersecção da elipse com uma reta, nestas condições, que passa pelo seu centro, fornece dois pontos bem definidos na elipse, originando uma 4-cruz em TM_p . Como há duas retas nestas condições, obtem-se dois campos de 4-cruzes (tipos (b) e (c)).

A construção falha se a elipse é um segmento da reta de norma nula ou um ponto.

OBSERVAÇÃO: Obviamente os campos de 4-cruzes (b) e (c) só surgem relativamente ao produto interno Y_2 , pois em relação a Y_1 o único vetor que tem norma nula é o vetor nulo.

(iii) campos de 8-cruzes:

Os dois máximos e dois mínimos da norma de $\overrightarrow{\eta(\theta)-H}$ fornecem dois campos de 4-cruzes que por I.5.2, são deslocados de 45° entre si e juntos formam um campo de 8-cruzes.

Dependendo do produto interno considerado, a construção deste campo falhará em determinados pontos. Então:

(A). Relativamente a Y_1 , a construção deixa de existir quando a elipse se degenera em um círculo (em particular: em um ponto).

(B). Relativamente a Y_2 , a construção falha se a elipse se torna um segmento de norma nula ou um ponto.

1.3. OBSERVAÇÃO: Relativamente a Y_1 , a elipse é um círculo $\iff ||\vec{H}|| - K = |N|$.

Com efeito: De I.4.5, Exemplo (2) temos que a área da elipse é $\frac{1}{2}\pi|N|$ e como a área também pode ser dada por $\pi||\vec{A}||^{1/2} \cdot ||\vec{B}||^{1/2}$, obtemos $|N| = 2||\vec{A}||^{1/2} \cdot ||\vec{B}||^{1/2}$.

De I.5.4: $||\vec{H}|| - K = ||\vec{A}|| + ||\vec{B}||$.

O resultado agora segue do fato que a elipse é um círculo $\iff ||\vec{A}|| = ||\vec{B}||$.

Consideraremos a degeneração da elipse em ponto como caso particular da degeneração em círculo.

1.4. DEFINIÇÃO: Relativamente a Y_1 , diremos que p é umbílico se em p tivermos $||\vec{H}|| - K = |N|$.

1.5. DEFINIÇÃO: Relativamente a Y_2 , diremos que p é umbílico se em p $||\vec{H}|| - K = N = 0$. (Ver 2.2.B. Observação Final).

A seguir são dados alguns resultados globais com base no fato conhecido: uma superfície compacta M tem um campo de r -cruzes sem singularidades \iff a característica de Euler $\chi(M)$ é zero. Logo se $\chi(M) \neq 0$, o campo de r -cruzes não é definido em algum ponto.

1.6.A. TEOREMA: Se $f : M \rightarrow (E^4, Y_1)$ é uma imersão onde M é variedade compacta, orientada com $\chi(M) \neq 0$ então existe pelo menos um ponto em M onde $||\vec{H}|| - K = |N|$.

Demonstração:

Basta observar que $||\vec{H}|| - K = |N|$ caracteriza a degeneração em círculo (singularidade do campo de 8-cruzes).

1.6.B. TEOREMA: Se $f : M \rightarrow (E^4, Y_2)$ é uma imersão onde M é variedade compacta, orientada com $\chi(M) \neq 0$ então existe pelo menos um ponto p em M onde $||\vec{H}|| - K = N = 0$.

Demonstração:

Relativamente a Y_2 , $||\vec{H}|| - K = N = 0$ caracteriza a degeneração da elipse em um segmento de norma nula ou, particularmente, em um ponto. Estes são os dois casos em que o campo de 8-cruzes deixa de ser definido.

No próximo parágrafo esclarecemos que realmente $||\vec{H}|| - K = N = 0$ caracteriza tal degeneração. (Ver 2.2.B. Observação Final).

§ 2. As Singularidades Genéricas

Vamos a seguir fazer um estudo mais detalhado sobre os campos de cruzes construídos, que permitirá analisar as singularidades genéricas em cada caso.

Apresentaremos, também, teoremas referentes a *Imersões Genéricas* e neste sentido serão úteis as:

2.1. OBSERVAÇÕES:

(i) Se as singularidades modelo tiverem codimensão 2 em Z , por II.2.7 o conjunto de pontos K -singulares terão codimensão 2 em M , o que constitui um conjunto de pontos isolados. Pelo mesmo motivo se a codimensão for maior ou igual a 3, teremos um conjunto vazio em M . Os dois resultados se referem a imersões genéricas. (Ver II.2.4).

(ii) Uma subvariedade algébrica K de Z é o lugar dos zeros comuns de um número finito de polinômios (identificamos Z com \mathbb{R}^n). Se considerarmos $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\psi_i = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ dada por $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$, teremos $K = \psi^{-1}(0)$.

Considerando-se $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ geradores de $I(K)$ (ideal de K) e a matriz jacobiana de ψ no ponto $p \in K$ com notação $J(\psi)_p = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right)_p$ então

$$\text{codim}_Z K = \max_p \text{rank}_p J(\psi)$$

onde $\text{codim}_Z K$ é a codimensão de K em Z .

2.2. SINGULARIDADES DO CAMPO DE 8-CRUZES:

Como foi apresentado anteriormente, será conveniente analisarmos os dois casos separadamente. (Ver 1.2, (iii)).

(A) Em relação a Y_1 :

Sabemos que a elipse de curvatura é dada por:

$$\vec{n(\theta)-H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) & A_{31}^2 \\ \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) & A_{41}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

Logo, a elipse é um círculo se e somente se $|\vec{n(\theta)-H}|$ for constante para todo θ , ou seja:

$$\begin{cases} (1) & (A_{31}^1 - A_{32}^2)A_{31}^2 + (A_{41}^1 - A_{42}^2)A_{41}^2 = 0 \\ (2) & \left[\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2)\right]^2 = (A_{31}^2)^2 + (A_{41}^2)^2 \end{cases}$$

Multiplicando-se ambos os membros de (2) por $(A_{31}^2)^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(A_{31}^1 - A_{32}^2)^2 (A_{31}^2)^2 + \frac{1}{4}(A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 (A_{31}^2)^2 = \\ & = [(A_{31}^2)^2 + (A_{41}^2)^2] (A_{31}^2)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

De (1), temos que $(A_{31}^1 - A_{32}^2)^2 (A_{31}^2)^2 = (A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 (A_{41}^2)^2$.

Assim (3) fica:

$$\frac{1}{4}(A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 [(A_{41}^2)^2 + (A_{31}^2)^2] = [(A_{31}^2)^2 + (A_{41}^2)^2] (A_{31}^2)^2$$

(i) Se $(A_{41}^2)^2 + (A_{31}^2)^2 \neq 0$.

$$\text{Obtemos (4) } A_{31}^2 = \pm \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2)$$

Substituindo-se (4) em (1), obtemos:

$$(A_{31}^1 - A_{32}^2)A_{31}^2 \pm 2A_{31}^2 A_{41}^2 = 0$$

$$\text{Se } A_{31}^2 \neq 0 \implies (5) \quad A_{41}^2 = \pm \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)$$

$$\text{Se } A_{31}^2 = 0, \text{ de (4) obtemos } A_{41}^1 - A_{42}^2 = 0 \text{ e}$$

$$A_{41}^2 = \pm \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2).$$

Resulta do caso (i) que:

Se $A_{31}^2 \neq 0$ obtemos a singularidade modelo dada pela reunião dos subespaços lineares definidos por (a) e (b)

$$(a) \begin{cases} A_{31}^2 = \frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) \\ A_{41}^2 = -\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} A_{31}^2 = -\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) \\ A_{41}^2 = \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \end{cases}$$

e que tem codimensão 2 em Z .

Se $A_{31}^2 = 0$ então

$$\begin{cases} A_{31}^2 = A_{41}^1 - A_{42}^2 = 0 \\ A_{41}^2 = \pm \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \end{cases}$$

que constitui uma singularidade modelo de codimensão 3 em Z .

As duas situações caracterizam a degeneração da elipse em círculo.

(ii) Se $(A_{41}^2)^2 + (A_{31}^2)^2 = 0$ então $A_{41}^2 = A_{31}^2 = 0$ e de (2) obtemos

$$A_{31}^1 - A_{32}^2 = A_{41}^1 - A_{42}^2 = 0$$

A singularidade modelo

$$\begin{cases} A_{41}^2 = A_{31}^2 = 0 \\ A_{31}^1 - A_{32}^2 = A_{41}^1 - A_{42}^2 = 0 \end{cases}$$

tem codimensão 4 em Z e representa o caso em que a elipse se degenera em um ponto.

(B) Em relação a Y_2 :

Neste caso vamos partir da definição de campo de 8-cruzes.

Seja θ argumento deste campo que é bem definido mod 45° (Ver I.5.2).

Como os dois máximos e dois mínimos da norma de $\overrightarrow{\eta(\theta) - H}$ definem o campo de 8-cruzes, para obtê-lo devemos impor que θ satisfaça:

$$\frac{d}{d\theta} [\overrightarrow{(\eta(\theta) - H)} \cdot \overrightarrow{(\eta(\theta) - H)}] = 0$$

ou seja

$$2 \cdot \left[\frac{d}{d\theta} \overrightarrow{(\eta(\theta) - H)} \cdot \overrightarrow{(\eta(\theta) - H)} \right] = 0$$

Temos:

$$\overrightarrow{\eta(\theta) - H} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \cos 2\theta + A_{31}^2 \sin 2\theta, -\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) \cos 2\theta - A_{41}^2 \sin 2\theta \right)$$

$$\frac{d}{d\theta}(\vec{n}(\theta) \cdot \vec{H}) =$$

$$= (-(A_{31}^1 - A_{32}^2) \sin 2\theta + 2A_{31}^2 \cos 2\theta, (A_{41}^1 - A_{42}^2) \sin 2\theta - 2A_{41}^2 \cos 2\theta)$$

Fazendo-se o produto escalar, obtemos:

$$-\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)^2 \cos 2\theta \sin 2\theta + A_{31}^2 (A_{31}^1 - A_{32}^2) (\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) +$$

$$+ 2(A_{31}^2)^2 \sin 2\theta \cos 2\theta - \left[-\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 \cos 2\theta \sin 2\theta + \right.$$

$$\left. + A_{41}^2 (A_{41}^1 - A_{42}^2) (\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) + 2(A_{41}^2)^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \right] =$$

$$= [A_{31}^2 (A_{31}^1 - A_{32}^2) - A_{41}^2 (A_{41}^1 - A_{42}^2)] \cos 4\theta +$$

$$+ \left[(A_{31}^2)^2 - (A_{41}^2)^2 - \frac{1}{4}(A_{31}^1 - A_{32}^2)^2 + \frac{1}{4}(A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 \right] \sin 4\theta = 0$$

Então θ é bem definido mod 45° exceto na singularidade modelo dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} (6) \quad A_{31}^2 (A_{31}^1 - A_{32}^2) - A_{41}^2 (A_{41}^1 - A_{42}^2) = 0 \\ (7) \quad -\left[\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) \right]^2 + (A_{31}^2)^2 - (A_{41}^2)^2 = 0 \end{array} \right.$$

De (6) obtemos: (8) $(A_{31}^2)^2 (A_{31}^1 - A_{32}^2)^2 = (A_{41}^2)^2 (A_{41}^1 - A_{42}^2)^2$.

Multiplicando-se (7) por $(A_{31}^2)^2$ e usando-se (8) obtemos:

$$-\frac{1}{4}(A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 \cdot [(A_{41}^2)^2 - (A_{31}^2)^2] = [(A_{41}^2)^2 - (A_{31}^2)^2] (A_{31}^2)^2$$

(i) Se $(A_{41}^2)^2 - (A_{31}^2)^2 \neq 0 \implies -\frac{1}{4}(A_{41}^1 - A_{42}^2)^2 = (A_{31}^2)^2 \implies$

$$\implies A_{41}^1 - A_{42}^2 = A_{31}^2 = 0$$

Substituindo-se em (7), obtemos:

$$-\left[\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2)^2\right] = (A_{41}^2)^2 \implies A_{31}^1 - A_{32}^2 = A_{41}^2 = 0$$

Chegamos então a (9) $\left\{ \begin{array}{l} A_{41}^1 - A_{42}^2 = A_{31}^2 = 0 \\ A_{31}^1 - A_{32}^2 = A_{41}^2 = 0 \end{array} \right.$

Como em (A), (ii), a singularidade modelo (9) tem codimensão 4 em Z

(ii) Se $(A_{41}^2)^2 - (A_{31}^2)^2 = 0$, então $A_{41}^2 = \pm A_{31}^2$.

(a) Para $A_{41}^2 = A_{31}^2$, obtemos de (6) que

$$A_{31}^2 (A_{31}^1 - A_{32}^2) - A_{31}^2 (A_{41}^1 - A_{42}^2) = 0$$

Supondo $A_{31}^2 \neq 0$, obtemos $A_{31}^1 - A_{32}^2 = A_{41}^1 - A_{42}^2$.

Supondo $A_{31}^2 = 0$, obtemos $A_{41}^2 = 0$ e por (7),

$$A_{31}^1 - A_{32}^2 = \pm (A_{41}^1 - A_{42}^2)$$

(b) Para $A_{41}^2 = -A_{31}^2$, obtemos de (6) que

$$A_{31}^2 (A_{31}^1 - A_{32}^2) + A_{31}^2 (A_{41}^1 - A_{42}^2) = 0$$

Supondo $A_{31}^2 \neq 0$, obtemos $A_{31}^1 - A_{32}^2 = -(A_{41}^1 - A_{42}^2)$

Supondo $A_{31}^2 = 0$, obtemos $A_{41}^2 = 0$ e

$$A_{31}^1 - A_{32}^2 = \pm (A_{41}^1 - A_{42}^2).$$

Resumindo-se as situações encontradas, teremos:

Se $A_{31}^2 \neq 0$, surgem as singularidades modelo

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} A_{41}^2 = A_{31}^2 \\ A_{41}^1 - A_{42}^2 = A_{31}^1 - A_{32}^2 \end{array} \right.$$

e

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} A_{41}^2 = -A_{31}^2 \\ A_{41}^1 - A_{42}^2 = A_{32}^2 - A_{31}^1 \end{array} \right.$$

Novamente a singularidade modelo tem codimensão 2 em Z e representa uma situação em que a elipse se degenera num segmento de norma nula.

$$\text{Se } A_{31}^2 = 0 \text{ então (12) } \left\{ \begin{array}{l} A_{31}^2 = A_{41}^2 = 0 \\ A_{31}^1 - A_{32}^2 = \pm (A_{41}^1 - A_{42}^2) \end{array} \right.$$

Neste caso a singularidade modelo tem codimensão 3 e também representa uma situação em que a elipse se degenera num segmento de norma nula.

OBSERVAÇÃO: Efetuando-se os cálculos podemos observar que (9), (10), (11) e (12) são equivalentes a $||H|| - K = N = 0$, que comparece em 1.5 e 1.6.B.

2.3. SINGULARIDADES DO CAMPO DE 4-CRUZES (a)

Estaremos considerando em E^4 o produto interno Y_2 .
(Ver 1.2, (i)).

$$(i) \vec{H} = 0$$

Obtemos a singularidade modelo K , de codimensão 2, dada por:

$$\begin{cases} A_{31}^1 + A_{32}^2 = 0 \\ A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0 \end{cases}$$

(ii) A elipse é um segmento de reta ao longo de \vec{H} .

Obviamente esta situação caracteriza os pontos de inflexão. A singularidade modelo K é dada por: (Ver I.7.5.C.)

$$\psi_1 = A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{31}^2 A_{41}^1 = 0$$

$$\psi_2 = A_{31}^2 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2 = 0$$

$$\psi_3 = A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1 = 0$$

Com alguns cálculos observamos que o posto máximo do jacobiano de $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ é dois. A codimensão 2 de K em Z segue de 2.1, (ii).

(iii) A elipse de curvatura é um ponto (Ver 2.2.A, (ii)).

Observação: O caso em que a elipse se torna um segmento não radial, não deixa de ser uma situação especial, embora não forneça pontos singulares deste campo.

Esta situação se caracteriza por $N = 0$ e o conjunto de pontos deste tipo é uma subvariedade de codimensão 1 em R^6 .

2.4. SINGULARIDADES DOS CAMPOS DE 4-CRUZES (b) e (c)

Este caso só ocorre quando consideramos em E^4 , o produto interno Y_2 (Ver 1.2, (ii)).

(i) A elipse é um segmento da reta de norma nula.

Fazendo-se $\theta =$ argumento do campo de 4-cruzes (b) e (c), segundo a definição deveremos ter $|\overrightarrow{n(\theta)-H}| = 0$ ou seja:

$$\overrightarrow{(n(\theta)-H)} \cdot \overrightarrow{(n(\theta)-H)} = 0$$

Efetuada-se o produto indicado, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \cos 2\theta + A_{31}^2 \sin 2\theta\right)^2 \\ & - \left(\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) \cos 2\theta + A_{41}^2 \sin 2\theta\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A_{31}^1 - A_{32}^2) \cos 2\theta + A_{31}^2 \sin 2\theta = \\ & = \pm \left[\frac{1}{2}(A_{41}^1 - A_{42}^2) \cos 2\theta + A_{41}^2 \sin 2\theta \right] \end{aligned}$$

Obtemos, finalmente:

$$\frac{1}{2}[(A_{31}^1 - A_{32}^2) \pm (A_{41}^1 - A_{42}^2)] \cos 2\theta + [A_{31}^2 \pm A_{41}^2] \sin 2\theta = 0 \quad (14)$$

que é bem definida a menos que:

$$(15) \quad \begin{cases} (A_{31}^1 - A_{32}^2) \pm (A_{41}^1 - A_{42}^2) = 0 \\ A_{31}^2 \pm A_{41}^2 = 0 \end{cases}$$

ou melhor

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} A_{41}^2 = A_{31}^2 \\ A_{41}^1 - A_{42}^2 = A_{31}^1 - A_{32}^2 \end{array} \right.$$

e

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} A_{41}^2 = -A_{31}^2 \\ A_{41}^1 - A_{42}^2 = -(A_{31}^1 - A_{32}^2) \end{array} \right.$$

Olhando-se para a expressão matricial da elipse podemos observar que estes dois modelos fornecem direções das formas $(a, -a)$ e (a, a) respectivamente, que são justamente as direções de norma nula em NM_p .

É imediato que as singularidades modelo (16) e (17) têm codimensão 2.

(ii) A elipse é um ponto (Ver 2.2.B, (i)).

A observação feita no final do item 2.3 é válida também para estes campos.

A partir das codimensões obtidas nos estudos 2.2, 2.3 e 2.4 resultam facilmente os teoremas abaixo sendo 2.5 válido quando consideramos em E^4 os produtos Y_1 e Y_2 ; 2.6 e 2.7.B. válidos só para Y_2 e 2.7.A. válido para Y_1 (Ver II, 2.4 e III, 2.1, (i)).

- 2.5. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow E^4$ uma imersão genérica. Então existe em M um campo de 4-cruzes (a), exceto em um conjunto de pontos isolados onde $\vec{H} = 0$ ou de inflexão.
- 2.6. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y_2)$ uma imersão genérica. Então existe em M um campo de 4-cruzes (b) (respectivamente (c)) exceto em um conjunto de pontos isolados onde a elipse é um segmento de norma nula ao longo de e_3+e_4 (respectivamente e_3-e_4).
- 2.7.A. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y_1)$ uma imersão genérica. Então existe em M um campo de 8-cruzes, exceto em um conjunto de pontos isolados onde a elipse se degenera num círculo.
- 2.7.B. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y_2)$ uma imersão genérica. Então existe em M um campo de 8-cruzes, exceto em um conjunto de pontos isolados onde a elipse é um segmento de norma nula.

§ 3. Estudo dos Índices Genéricos

O próximo teorema é verdadeiro quando consideramos em E^4 tanto Y_1 quanto Y_2 . Optamos por apresentar a prova relativamente a Y_2 .

3.1. TEOREMA: As singularidades do campo de 4-cruzes (a) têm índice genérico igual a $\pm \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Suponha que p_0 seja um ponto singular isolado do campo de 4-cruzes. Logo p_0 é um ponto onde $\vec{H} = 0$ ou é um ponto de inflexão.

Seja U , vizinhança coordenada de p_0 , não contendo outros pontos singulares além de p_0 e seja e_1, e_2 o campo de referenciais tangentes, ortonormais, nesta vizinhança.

Seja θ o argumento do campo de 4-cruzes, que é bem definido mod 90° (Ver 1.2, (i)).

Observando-se a definição do campo de 4-cruzes (a), vemos que \vec{H} e $\vec{n}(\theta)$ devem estar na mesma direção ou seja $\vec{H} \wedge \vec{n}(\theta) = 0$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2)e_3 - \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2)e_4 \right] \wedge \\ & \wedge \left[(A_{31}^1 \cos^2 \theta + 2A_{32}^1 \cos \theta \sin \theta + A_{32}^2 \sin^2 \theta)e_3 \right. \\ & \left. - (A_{41}^1 \cos^2 \theta + 2A_{41}^2 \cos \theta \sin \theta + A_{42}^2 \sin^2 \theta)e_4 \right] = 0 \end{aligned}$$

Efetuando-se o produto vetorial, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) \cdot [-A_{41}^1 \cos^2 \theta - 2A_{41}^2 \cos \theta \sin \theta - A_{42}^2 \sin^2 \theta] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) \cdot [A_{31}^1 \cos^2 \theta + 2A_{32}^1 \cos \theta \sin \theta + A_{32}^2 \sin^2 \theta] \right\} e_3 \wedge e_4 = 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}(-A_{31}^1 A_{41}^2 + A_{41}^1 A_{32}^1) \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{2}(A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2) \operatorname{sen}^2 \theta +$$

$$+ \frac{1}{2}(-A_{32}^2 A_{41}^1 + A_{42}^2 A_{31}^1) \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(-A_{32}^2 A_{41}^2 + A_{42}^2 A_{32}^1) \operatorname{sen} 2\theta = 0$$

Simplificando-se, obtemos

$$(A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2) \cos 2\theta$$

$$- [A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{41}^1 A_{32}^1 - (A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1)] \operatorname{sen} 2\theta = 0 \quad (1)$$

Esta expressão é bem definida módulo 90° , a menos que:

$$(2) \begin{cases} A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2 = 0 \\ A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{41}^1 A_{32}^1 = A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1 \end{cases}$$

Mostremos que o sistema (2) é equivalente a

$$(3) \begin{cases} A_{31}^1 + A_{32}^2 = 0 \\ A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$(4) \begin{cases} A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1 = 0 \\ A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{32}^1 A_{41}^1 = 0 \\ A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2 = 0 \end{cases}$$

De fato:

Suponhamos que

$$\Delta' = \det \begin{bmatrix} A_{42}^2 & -A_{32}^2 \\ A_{41}^2 & -A_{32}^1 \end{bmatrix} = -(A_{42}^2 A_{32}^1 - A_{41}^2 A_{32}^2) \neq 0$$

Pela Regra de Cramer, o sistema (2) tem solução

$$\Delta_{A_{31}}^1 = \begin{vmatrix} 0 & -A_{32}^2 \\ A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2 & -A_{32}^1 \end{vmatrix} = A_{32}^2 (A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2)$$

$$\Delta_{A_{41}}^1 = \begin{vmatrix} A_{42}^2 & 0 \\ A_{41}^2 & A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2 \end{vmatrix} = A_{42}^2 (A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2)$$

Logo

$$\begin{aligned} A_{31}^1 &= \frac{\Delta_{A_{31}}^1}{\Delta'} = -A_{32}^2 \\ A_{41}^1 &= \frac{\Delta_{A_{41}}^1}{\Delta'} = -A_{42}^2 \end{aligned} \implies \begin{cases} A_{31}^1 + A_{32}^2 = 0 \\ A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } \Delta' = -(A_{42}^2 A_{32}^1 - A_{41}^2 A_{32}^2) = 0$$

Em (2), teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2 = 0 \\ A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{41}^1 A_{32}^1 = 0 \\ A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Obtemos então a singularidade modelo de pontos onde $\vec{H} = 0$ ou pontos de inflexão.

Assumindo-se que a imersão $X : M \rightarrow E^4$ seja K -genérica com relação à singularidade modelo definida por (2), temos que pontos onde $\vec{H} = 0$ e pontos de inflexão são pontos isolados distintos.

Olhemos para cada uma das expressões em (2) como definidas em U , via o campo de referenciais e_1, e_2 .

Seja $\psi : U \rightarrow R^2$ definida por:

$$\psi = (A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{41}^1 A_{32}^1 - (A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2), A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2)$$

(Ver (2))

Para utilizarmos o Lema II-1.6, precisamos de $\text{Jac } \psi(p_0) \neq 0$.

Como estamos assumindo $X : M \rightarrow E^4$ K -genérica em relação à singularidade modelo dada por (2), teremos que o ponto p_0 do tipo (3) ou (4) é um ponto singular K -geometricamente transversal.

Mas, se isto ocorre, pela demonstração do Lema II-2.6, teremos $\text{Jac } \psi(p_0)$ tem posto máximo ou seja ψ é regular em p_0 .

Se agora pudermos mostrar $n.\text{arg } \psi = \theta \text{ mod } 90^\circ$, por II-1.6 o índice do ponto p_0 será $\pm n$.

Por (1) temos:

$$\tan 2\theta = \frac{A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2}{A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2 - (A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1)}$$

Consideremos $\arg \psi = \angle \overline{O\psi}(q)$ com a direção e_1 em \mathbb{R}^2 .

Assim $\tan \arg \psi = \tan 2\theta$

$$\arg \psi = 2\theta \text{ mod } 180^\circ \implies \frac{1}{2}\arg \psi = \theta \text{ mod } 90^\circ.$$

CONCLUSÃO: Todo ponto p_0 do tipo (3) ou (4) é uma singularidade genérica com índice $\pm \frac{1}{2}$.

O teorema 3.2 só tem significado quando consideramos em E^4 o produto interno Y_2 , por razões já explicadas. O teorema 3.3 é válido tanto para Y_1 quanto para Y_2 .

3.2. TEOREMA: O índice genérico das singularidades do campo de 4-cruzes (b) e (c) é $\pm \frac{1}{2}$.

Demonstração: Basta seguir o raciocínio de 3.1 e utilizar os cálculos efetuados em 2.4, (i).

3.3. TEOREMA: O índice genérico das singularidades do campo de 8-cruzes é $\pm \frac{1}{4}$.

Demonstração: Raciocinar como em 3.1 e usar os cálculos feitos em 2.2.

Os dois teoremas que seguem apresentam importantes conclusões que provêm dos resultados anteriores. Apresentaremos a demonstração de apenas um, devido ao raciocínio ser exatamente o mesmo, no outro caso.

3.4.A. TEOREMA: Toda imersão genérica $X : M \rightarrow (E^4, Y_1)$ onde M é compacta, orientada e $\chi(M) \neq 0$ tem pelo menos:

- (i) $4|\chi|$ pontos onde $||\vec{H}|| - K = N$ (a elipse se degenera em círculo)
- (ii) $2|\chi|$ pontos onde $\vec{H} = 0$ ou $\Delta = N = 0$ (pontos de inflexão).

Observação: Como exemplo, podemos citar que uma esfera imersa em (E^4, Y_1) deve ter pelo menos 8 pontos genéricos onde a elipse é um círculo e 4 pontos genéricos onde $\vec{H} = 0$ ou que são de inflexão.

Isto ocorre pois $\chi(S) = 2$.

3.4.B. TEOREMA: Toda imersão genérica $X : M \rightarrow (E^4, Y_2)$ onde M é compacta, orientada e $\chi(M) \neq 0$ tem pelo menos:

- (i) $4|\chi|$ pontos onde $N = ||\vec{H}|| - K = 0$ tais que em $2|\chi|$ pontos $\overrightarrow{\eta(\theta) - \vec{H}} // e_3 + e_4$ e em $2|\chi|$ pontos $\overrightarrow{\eta(\theta) - \vec{H}} // e_3 - e_4$.
- (ii) $2|\chi|$ pontos onde $\vec{H} = 0$ ou $\Delta = N = 0$ (pontos de inflexão).

Demonstração:

(i) Por 2.7.B. toda imersão genérica de M admite um campo bem definido de 8-cruzes, exceto em um conjunto de pontos isolados onde a elipse é um segmento de norma nula. Como M é compacta este conjunto é finito. Ainda por 3.3 o índice genérico de cada ponto singular é $\pm \frac{1}{4}$. A conclusão agora segue de II-1.5.

(ii) O mesmo raciocínio é aplicado para o campo de 4-cruzes fornecido pelo teorema 2.5, com auxílio do teorema 3.1 e proposição II-1.5.

Observação: Como $\chi(M) = 2$ quando M é uma esfera imersa em (E^4, Y_2) tem-se genericamente, pelo menos, 8 pontos onde $||\vec{H}|| - K = N = 0$ e 4 pontos onde $\vec{H} = 0$ ou que são de inflexão.

§ 4. *Alguns Resultados Importantes Relativamente a Y_1 e Y_2*

4.1. Devemos notar que os pontos onde $\vec{H} = 0$ são pontos singulares do campo de 4-cruzes (a) bem como pontos singulares do campo vetorial \vec{H} normal a M . O índice genérico no primeiro caso é $\pm \frac{1}{2}$ e no segundo caso é ± 1 . Este último resultado é válido para Y_1 e Y_2 e sua prova será omitida pois pode ser encontrada em [2], p. 30.

4.2. A seguir enunciaremos os teoremas que caracterizam a relação entre estes sinais. Como o resultado de cada teorema é diferente quando consideramos E^4 munido dos produtos Y_1 ou Y_2 , daremos os enunciados em relação a cada caso. Convém frisar que

os teoremas 4.3.A. e 4.4.A., abaixo enunciados, não aparecem desta forma em [4]. Isto se deve a um erro de sinal que foi corrigido em 1977, por Asperti (Ver [1]).

Como, considerando-se Y_2 , esta relação entre os sinais é contrária, vindo assim a coincidir com o que havia sido obtido em [4], achamos conveniente as demonstrações dos teoremas 4.3.B. e 4.4.B.

4.3.A. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y^1)$ uma imersão K -genérica com curvatura normal N não nula. Então um ponto p onde $\vec{H} = 0$ é uma singularidade do vetorial normal com índice genérico ± 1 e do campo de 4-cruzes (a) com índice genérico $\pm \frac{1}{2}$. Os sinais concordam se $N > 0$ e discordam se $N < 0$.

Demonstração: Ver [2], p. 34.

4.3.B. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y_2)$ uma imersão K -genérica. Um ponto p onde $\vec{H} = 0$ é uma singularidade do campo vetorial normal com índice genérico ± 1 e do campo de 4-cruzes (a) com índice genérico $\pm \frac{1}{2}$. Além disso, se $N < 0$ os sinais concordam e se $N > 0$ discordam.

Demonstração:

A primeira parte do teorema se refere a 4.1.

Segunda parte: Para o primeiro campo, o sinal do índice é obtido através do sinal do determinante do Jacobiano

$$J = \frac{\partial (A_{31}^1 + A_{32}^2, -(A_{41}^1 + A_{42}^2))}{\partial (u, v)} \quad (\text{Ver II-1.6})$$

Como vamos trabalhar com derivadas parciais relativamente a u e a v , será conveniente, neste ponto, mudarmos a notação fazendo:

$$A_{31}^1 = a, \quad A_{32}^1 = b, \quad A_{32}^2 = c, \quad A_{41}^1 = e, \quad A_{41}^2 = f \quad e$$

$$A_{42}^2 = g$$

Assim

$$J = \begin{bmatrix} a_u + c_u & a_v + c_v \\ -e_u - g_u & -e_v - g_v \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, para o segundo campo, o sinal é dado pelo sinal de

$$J' = \frac{\partial (A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2, -(A_{32}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1), A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{41}^1 A_{32}^2)}{\partial (u, v)}$$

(Ver definição de ψ no final de 3.1)

Logo,

$$J' = \begin{bmatrix} a_u f + a_f u - e_u b - e_b u - (b_u g + b_g u - c_u f - c_f u) & a_v f + a_f v - e_v b - e_b v - (b_v g + b_g v - c_v f - c_f v) \\ a_u g + a_g u - e_u c - e_c u & a_v g + a_g v - e_v c - e_c v \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$J' = \begin{bmatrix} f & b \\ g & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_u + c_u & a_v + c_v \\ -e_u - g_u & -e_v - g_v \end{bmatrix} \implies J' = \begin{bmatrix} f & b \\ g & c \end{bmatrix} \cdot J$$

Mas

$$\begin{vmatrix} f & b \\ g & c \end{vmatrix} = cf - bg = -\frac{1}{2}(-2cf + 2bg) = -\frac{1}{2}N$$

pois para Y_2 $N = (a-c)f + (g-e)b$ e pelo visto acima estamos com $a = -c$, $e = -g$.

Conclusão: Se $N < 0 \implies$ sinal do $\det J =$ sinal do $\det J'$

Se $N > 0 \implies$ sinal do $\det J = -$ sinal do $\det J'$

Observação: Se $\vec{H} = 0$ e $N = 0$, temos um ponto de inflexão.

Mas numa situação genérica, podemos assumir que pontos onde $\vec{H} = 0$ e pontos de inflexão são distintos. Deste modo, em pontos onde $\vec{H} = 0$ podemos supor $N \neq 0$. Daí a discussão se resumir em $N > 0$ ou $N < 0$.

4.4.A. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y_1)$ uma imersão de uma superfície compacta orientada. Suponha que a curvatura normal N seja sempre positiva (negativa). Então X é uma imersão livre de inflexão e $\chi(NM) = 2\chi(M)$ ($\chi(NM) = -2\chi(M)$).

4.4.B. TEOREMA: Seja $X : M \rightarrow (E^4, Y_2)$ uma imersão de uma superfície compacta orientada. Suponha que N seja sempre positiva (negativa).

Então X é uma imersão livre de inflexão e

$$\chi(NM) = -2\chi(M) \quad (\chi(NM) = 2\chi(M)).$$

Demonstração:

Chamemos $I_1(p)$, o índice de p como ponto singular do campo vetorial normal \vec{H} e $I_2(p)$, o índice de p como ponto singular do campo de 4-cruzes (a).

Obviamente p é um ponto onde $\vec{H} = 0$ sendo que, na situação genérica podemos assumir a existência de apenas um número finito de tais pontos.

(a) Se $N > 0$, pelo teorema 4.3.B., obtemos $I_1(p) = -2I_2(p)$.

Como X é livre de inflexão ($N \neq 0$ em todo ponto), as únicas singularidades do campo de 4-cruzes (a) são em pontos onde $\vec{H} = 0$ (Ver 2.5).

Por II-1.5 temos $\chi(M) = \sum I_2(p)$ e $\chi(NM) = \sum I_1(p)$.

Logo $\chi(NM) = -2\chi(M)$.

(b) Se $N < 0 \implies I_1(p) = 2I_2(p)$ e $\chi(NM) = 2\chi(M)$.

Observemos que a demonstração foi obtida para o caso genérico. No entanto, como M é compacta, por uma pequena deformação contínua podemos obter a situação genérica.

Fica assim provado o caso geral. (Ver II-2.8).

Os corolários, que seguem, dos teoremas 4.4.A e B, serão evidenciados pelos resultados importantes que contêm cada um.

O corolário 4.5.A. não aparece assim enunciado em [4], (Corolário 1.22, p. 291) devido ao erro de sinal, já mencionado, que foi corrigido por [1]. Neste último artigo são apresentados contra-exemplos mostrando que o resultado em [4] não é verdadeiro quando $M = S^2$.

No entanto, relativamente a Y_2 , teremos um resultado mais geral contido no corolário 4.5.B.

4.5.A. COROLÁRIO: Toda variedade bidimensional M compacta, orientada, imersa em (E^4, Y_1) que não seja homeomorfa à esfera S^2 , tem pelo menos um ponto onde $N = 0$. (Ver [1])

Demonstração: De 4.4.A., temos que:

Se $N > 0$ em todos os pontos $\implies \chi(NM) = 2\chi(M)$.

Se $N < 0$ em todos os pontos $\implies \chi(NM) = -2\chi(M)$.

Como $\chi(NM) = \frac{1}{2\pi} \int NdA$ (ver [4], p. 275-278), obtemos:

Se $N > 0$

em todos os pontos $\implies \chi(M) > 0$.

Se $N < 0$

Conseqüentemente temos uma contradição se M não é homeomorfa à esfera S^2 . Neste caso existe pelo menos um ponto onde $N = 0$.

4.5.B. COROLÁRIO: Toda variedade bidimensional M compacta, orientada imersa em (E^4, Y_2) tem pelo menos um ponto onde $N = 0$.

Demonstração: Se $\chi(M) \neq 0$, a prova está contida no teorema 1.6.B.

Se $\chi(M) = 0$.

De 4.4.B., temos:

Se $N > 0$ $\chi(NM) = -2\chi(M)$

em todos os pontos \implies

Se $N < 0$ $\chi(NM) = 2\chi(M)$

Em qualquer caso como $\chi(M) = 0$, obtemos $\chi(NM) = 0$.

Como $\chi(NM) = \frac{1}{2\pi} \int NdA$, obtemos absurdo; ou seja $N = 0$ em pelo menos um ponto.

Observação: No caso de Y_1 não temos a caracterização de singularidades em termos de $||\vec{H}|| - K = N = 0$ como ocorre no caso Y_2 (ver 1.6.B.) e que está relacionada com $\chi(M)$. Daí a diferença de resultados em cada caso.

§ 5. Considerações Referentes a Y_3

Optamos por fazê-lo separadamente pois neste caso não teremos em TM_p os campos de cruces. Isto se deve ao fato de não existir aí o conceito de polígono regular e ao fato do ortogonal a um vetor de norma positiva ter norma negativa e vice-versa. Não teremos também teoremas globais pois o espaço de Minkowski não admite subvariedades compactas do tipo t .

Deste modo não vamos nos aprofundar neste caso, abordando apenas como se caracterizam as degenerações das hipérboles em termos dos invariantes do Capítulo I.

5.1. MOTIVAÇÃO:

Os vértices das hipérboles H^+ e H^- podem ser encontrados calculando-se o mínimo de $\overrightarrow{\eta(\bar{e})+H(\phi)}$ ou $\overrightarrow{\eta(\bar{e})-H(\phi)}$. No caso de haver uma degeneração das hipérboles consideradas em uma semi-reta ou reta, os vértices podem não ficar bem definidos.

Como estamos interessados particularmente nestas situações, apresentamos os seguintes resultados:

5.2. TEOREMA: Em um ponto fixo p de M são equivalentes:

- (a) p é ponto de inflexão, $\vec{n}(\bar{e}_1) \neq 0$ e $\vec{n}(\bar{e}_2) \neq 0$
 (b) $||\vec{H}|| + K \neq 0$ e $N = \Delta = 0$.

Demonstração: (a) \implies (b)

Se p é ponto de inflexão (ver I.7.5.C.)

$$\begin{aligned} N &= (A_{41}^1 + A_{42}^2)A_{31}^2 - (A_{31}^1 + A_{32}^2)A_{41}^2 = \\ &= -(A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{31}^2 A_{41}^1) + (A_{31}^2 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (A_{31}^1 A_{41}^2 - A_{31}^2 A_{41}^1) (A_{31}^2 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^2) \\ &\quad - \frac{1}{4} (A_{31}^1 A_{42}^2 - A_{32}^2 A_{41}^1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Suponhamos, por absurdo, $||\vec{H}|| + K = 0$

$$(1) \quad ||\vec{H}|| + K = \frac{1}{4} (A_{31}^1 + A_{32}^2)^2 + \frac{1}{4} (A_{41}^1 + A_{42}^2)^2 - (A_{31}^2)^2 - (A_{41}^2)^2 = 0$$

$$\text{Como } N = 0 \implies (2) \quad (A_{41}^1 + A_{42}^2)^2 (A_{31}^2)^2 = (A_{31}^1 + A_{32}^2)^2 (A_{41}^2)^2$$

Multiplicando-se ambos os membros de (1) por $(A_{31}^2)^2$, usando-se (2) e resolvendo-se, obtemos $\vec{n}(\bar{e}_1) \equiv 0$ ou $\vec{n}(\bar{e}_2) \equiv 0$ (contra a hipótese).

(b) \implies (a)Temos, por hipótese, $||\vec{H}|| + K \neq 0$ e $N = \Delta = 0$.

Suponhamos:

(i) $\vec{n}(\dot{e}_1) \equiv 0 \implies$

$$\implies A_{31}^1 + 2A_{31}^2 + A_{32}^2 = 0 \implies A_{31}^1 + A_{32}^2 = -2A_{31}^2$$

$$\implies ||\vec{H}|| + K = 0$$

$$A_{41}^1 + 2A_{41}^2 + A_{42}^2 = 0 \implies A_{41}^1 + A_{42}^2 = -2A_{41}^2$$

(ii) $\vec{n}(\dot{e}_2) \equiv 0 \implies A_{31}^1 + A_{32}^2 = 2A_{31}^2$

$$\implies ||\vec{H}|| + K = 0$$

$$A_{41}^1 + A_{42}^2 = 2A_{41}^2$$

Logo não ocorrem (i) e (ii) ou seja $\vec{n}(\dot{e}_1) \neq 0$ e $\vec{n}(\dot{e}_2) \neq 0$.

Para concluir a demonstração, só precisamos mostrar que, nas condições acima, p é ponto de inflexão.

Temos, por hipótese, $N = 0$.Podemos então tomar $(\eta(\bar{e}) + \vec{H})(\phi) // e_3$ e obter

$$\begin{cases} A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0 \\ A_{41}^2 = 0 \end{cases}$$

Assim

$$\Delta = (A_{31}^2 A_{42}^2)^2 - \frac{1}{4}(A_{31}^1 + A_{32}^2)(A_{42}^2)^2$$

$$||\vec{H}|| + K = \frac{1}{4}(A_{31}^1 + A_{32}^2)^2 - (A_{31}^2)^2$$

ou seja $\Delta = -(\|\vec{H}\| + K) \cdot (A_{42}^2)^2$.

Como $\Delta = 0$ e $\|\vec{H}\| + K \neq 0$ por hipótese $\implies A_{42}^2 = 0$.

Assim $A_{41}^1 = A_{42}^2 = A_{41}^2 = 0$ e p é ponto de inflexão.

Conclusão: (b) \implies (a)

5.3. TEOREMA: Seja p um ponto de M que não é de inflexão.

- (1) Se $N = 0$, a hipérbole de curvatura é uma reta, semi-reta ou um ponto. (Neste último caso dizemos que p é umbílico).
- (2) Se $N \neq 0$ e se o ponto não é umbílico então:
 - (a) Se $\Delta > 0$, a hipérbole de curvatura não apresenta vértice.
 - (b) Se $\Delta = 0$, tem vértice correspondente a uma direção de norma nula de TM_p .
 - (c) Se $\Delta < 0$, tem vértice bem definido.

Demonstração:

Para fixar a notação, faremos a demonstração para H^-

$$(1) \text{ Se } N = 0 \implies \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) & A_{32}^1 \\ \frac{1}{2}(A_{41}^1 + A_{42}^2) & A_{42}^1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

a matriz tem duas linhas proporcionais e conseqüentemente

$$\overrightarrow{(\eta(\vec{e}) + H)(\phi)}$$

se degenera em reta, semi-reta ou ponto.

(2) Se $N = 0$, pelo item (a), a hipérbole se degenera.

Logo podemos tomar o referencial de modo que

$$\overrightarrow{(\eta(\bar{e}) + H)}(\phi) // e_3$$

ou seja

$$\begin{cases} A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0 \\ A_{41}^2 = 0 \end{cases}$$

Teremos então três situações:

$$(i) \text{ Se } ||\vec{H}|| + K < 0 \implies 4(A_{32}^1)^2 > (A_{31}^1 + A_{32}^2)^2 \text{ (ver 5.2-(1))}$$

Fixando-se $A_{31}^1 + A_{32}^2 = 0$, através da transformação,

teremos:

$$K \leq 0, \Delta \geq 0 \text{ e } \overrightarrow{(\eta(\bar{e}) + H)}(\phi) = A_{32}^1 \text{sh}2\phi e_3$$

Obtivemos então uma reta que não tem vértice.

$$(ii) \text{ Se } ||\vec{H}|| + K > 0 \implies 4(A_{32}^1)^2 < (A_{31}^1 + A_{32}^2)^2$$

Fixando-se $A_{32}^1 = 0$, teremos:

$$K = A_{31}^1 A_{32}^2 - (A_{41}^1)^2, \Delta \leq 0$$

e

$$\overrightarrow{(\eta(\bar{e}) + H)}(\phi) = \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2) \text{ch}2\phi e_3$$

que apresenta vértice bem definido.

$$(iii) \text{ Se } ||\vec{H}|| + K = 0 \implies 4(A_{32}^1)^2 = (A_{31}^1 + A_{32}^2)^2 \implies$$

$$\implies A_{31}^1 + A_{32}^2 = \pm 2A_{32}^1 \implies$$

$$\vec{\eta}(\bar{e}_1) \equiv 0 \text{ ou } \vec{\eta}(\bar{e}_2) \equiv 0$$

Teremos ainda $K \leq 0$, $\Delta = 0$ e

$$\overrightarrow{(\eta(\bar{e}) + H)(\phi)} = \frac{1}{2}(A_{31}^1 + A_{32}^2)e^{\pm 2\phi}e_3.$$

A expressão de $\overrightarrow{(\eta(\bar{e}) + H)(\phi)}$ fornece, neste caso, uma semi-reta aberta, cujo vértice pode ser definido como o fecho da semi-reta.

Para concluir a demonstração, observemos:

Se $N = 0$ e se o ponto não é umbílico, a hipérbole se degenera em reta ou semi-reta.

Por hipótese p não é de inflexão, logo, pelo teorema 5.2, teremos:

$$(a) \text{ Se } \Delta > 0 \implies ||\vec{H}|| + K \neq 0 \implies \begin{cases} ||\vec{H}|| + K > 0 \\ \text{ou} \\ ||\vec{H}|| + K < 0 \end{cases}$$

Mas se $||\vec{H}|| + K > 0$, teremos por (ii) que $\Delta \leq 0$ (absurdo).

Só resta então $||\vec{H}|| + K < 0$ e por (i) a hipérbole de curvatura não tem vértice.

(b) Se $\Delta = 0 \implies ||\vec{H}|| + K = 0$ e por (iii) a hipérbole possui vértice correspondendo a uma direção de norma nula de TM_p .

$$(c) \text{ Se } \Delta < 0 \implies \begin{cases} ||\vec{H}|| + K > 0 \\ \text{ou} \\ ||\vec{H}|| + K < 0 \end{cases}$$

Mas se $||\vec{H}|| + K < 0$, por (i) obtemos $\Delta \geq 0$ (absurdo).

Logo $||\vec{H}|| + K > 0$ e por (ii) a hipérbole tem vértice bem definido.

A seguir damos três exemplos particulares que se encontram nas situações (i), (ii) e (iii), respectivamente:

(i) Consideremos

$$A_{31}^1 = 1 \qquad A_{41}^1 = 2$$

$$A_{32}^1 = 2 \qquad A_{42}^1 = 2$$

$$A_{32}^2 = 2 \qquad A_{42}^2 = 1$$

Efetuando-se os cálculos: $N = 0$, $||\vec{H}|| + K < 0$, $\Delta > 0$, $K < 0$.

$$(ii) \quad A_{31}^1 = 0 \qquad A_{41}^1 = 1$$

$$A_{32}^1 = 0 \qquad A_{42}^1 = 0$$

$$A_{32}^2 = 2 \qquad A_{42}^2 = 1$$

Neste caso: $N = 0$, $||\vec{H}|| + K > 0$, $\Delta < 0$, $K > 0$.

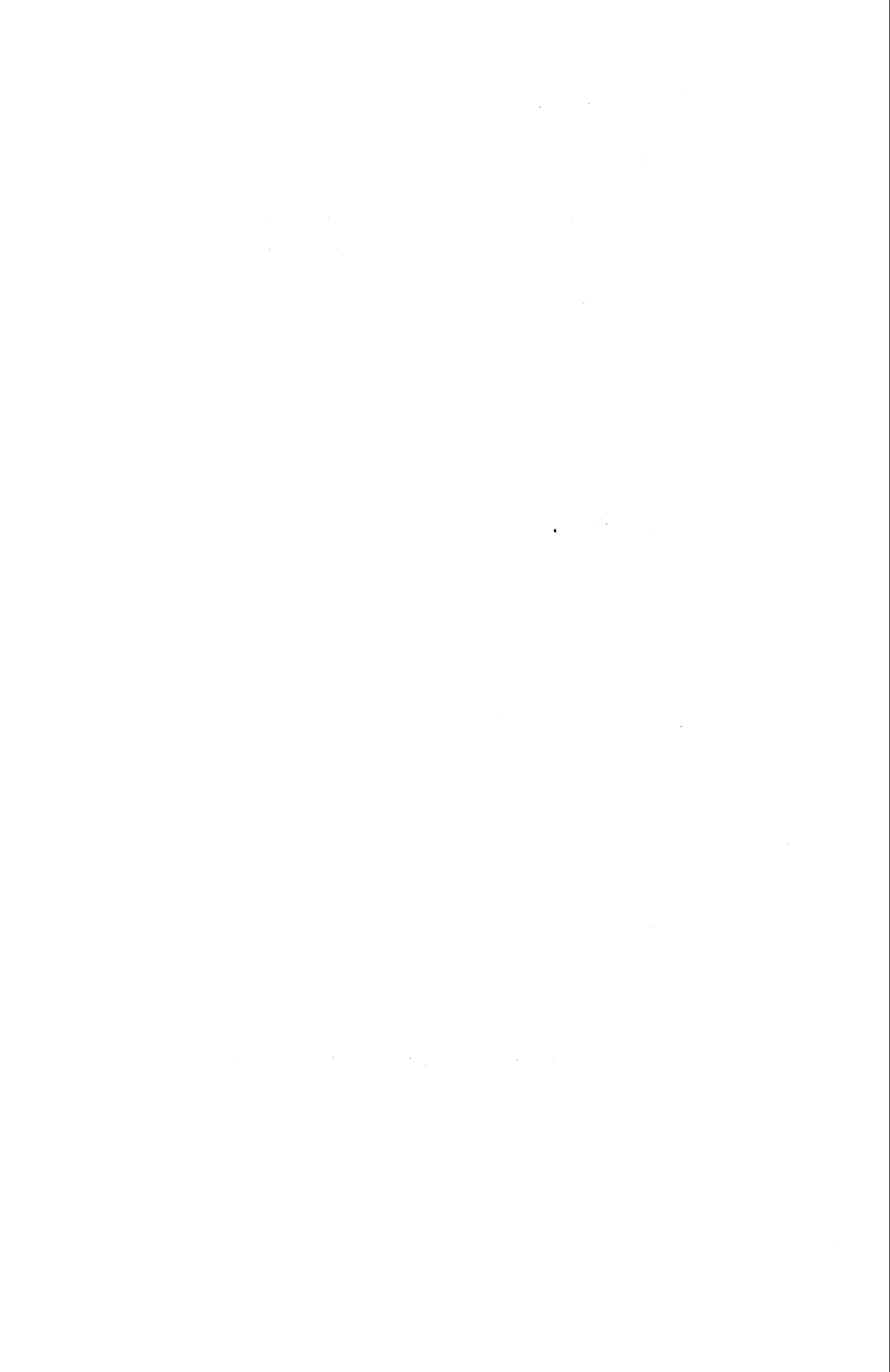
$$(iii) \quad A_{31}^1 = 2 \qquad A_{41}^1 = 1$$

$$A_{32}^1 = 1 \qquad A_{42}^1 = 1$$

$$A_{32}^2 = 0 \qquad A_{42}^2 = 1$$

Teremos: $N = 0$, $||\vec{H}|| + K = 0$, $\Delta = 0$, $K < 0$.

Nos três exemplos p não é ponto de inflexão e nem um bílico.



BIBLIOGRAFIA

- [1] - Asperti, Antonio Carlos - *Some generic properties of Riemannian immersions* - Anais da Academia Brasileira de Ciências, 1978.
- [2] - Asperti, Antonio Carlos - *Algumas propriedades genéricas de imersões Riemannianas* - Notas mimeografadas - IMPA, 1977.
- [3] - Dhooche, P. F. J. - *Generic singularities of 2-dimensional subspaces of Minkowski space* - Bulletin de la Société Mathématique de Belgique (t. XXVI), 1974.
- [4] - Little, John A. - *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces* - Annali di Matematica Pura ed Applicata (83), 1969.
- [5] - Manfredo P. do Carmo - *Formas diferenciais e aplicações* - 8.º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, MG, 1971.
- [6] - Manfredo P. do Carmo - *O método do referencial móvel* - III Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, 1976.
- [7] - Sagle, Arthur A. e Walde, Ralph E. - *Introduction to Lie groups and Lie algebras* - Pure and Applied Mathematics, 1973.
- [8] - Vaisencher, Israel - *Introdução às curvas algébricas planas* - 12.º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1979.