UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Classes características equivariantes de hipersuperfícies singulares

Amanda Monteiro

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Amanda Monteiro

Classes características equivariantes de hipersuperfícies singulares

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
Coorientadora: Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

USP – São Carlos
Abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M775c

Monteiro, Amanda
Classes características equivariantes de hipersuperfícies singulares / Amanda Monteiro; orientador Nivaldo de Góes Grulha Júnior; coorientadora Michelle Ferreira Zanchetta Morgado. -- São Carlos, 2023.
72 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Geometria e Topologia. 2. Teoria de Singularidades. 3. Classes Características. 4. Classes Características Equivariantes. 5. Número de Milnor Integrado Equivariante. I. de Góes Grulha Júnior, Nivaldo, orient. II. Ferreira Zanchetta Morgado, Michelle , coorient. III. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Amanda Monteiro

Equivariant characteristic classes of singular hypersurfaces

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
Co-advisor: Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

USP – São Carlos
April 2023

Dedico esta tese a todos que experienciaram os desafios e obstáculos de fazer um doutorado.
Para aqueles que lutaram contra suas próprias inseguranças,
muitas vezes sentindo que não pertenciam ao mundo acadêmico,
mas ainda assim ofereceram o seu melhor.
Aos que conciliaram suas atividades acadêmicas com desafios pessoais,
problemas de saúde e responsabilidades familiares.
Você não é o seu trabalho, ele lhe pertence.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão a todos os que contribuíram para minha jornada acadêmica, especialmente durante os tempos sem precedentes da pandemia da COVID-19. A conclusão desta tese de doutorado não teria sido possível sem o apoio, incentivo e compreensão de muitas pessoas e instituições.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer sinceramente aos meus orientadores, Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior e Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado, por seus ensinamentos e apoio ao longo desta jornada. Apesar de todos os desafios, eles estiveram presentes para fornecer críticas construtivas, percepções valiosas e apoio que me ajudaram a permanecer no caminho certo.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos, Carlos Vicente, Maurício Laurito, Murilo Pessôa, Raphael de Omena, Igor Chagas, Rejiane Calixto, Ana Lucília, Charles Valadão, por sua amizade, incentivo e inspiração. Apesar da distância física entre nós devido ao distanciamento social durante boa parte do desenvolvimento do meu doutorado, eles foram e têm sido meus companheiros constantes, compartilhando além de seus conhecimentos, suas experiências e suas companhias que alegra e me motiva diariamente, eu amo vocês.

Agradeço também a todos os professores que disponibilizaram seu tempo para responder minhas dúvidas e me ensinar matemática.

Além disso, gostaria de agradecer o apoio do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e de todos os seus funcionários, por fornecer os recursos, infraestrutura e serviços necessários que me permitiram realizar minha pesquisa e concluir esta tese.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e apoio financeiro da Fapesp (processo 2019/02068-8).

Por fim, gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha família, que têm sido meus pilares de força, amor e encorajamento, especialmente durante os tempos difíceis da pandemia. Em especial à minha mãe, Karina, que sempre sonhou comigo os meus sonhos e que nunca me deixou desmoronar. Mãe, você é minha inspiração, obrigada por todo o seu amor e carinho, eu amo você. À minha irmã, Alice, que com seus pequenos bracinhos, por vezes sem entender o motivo, me abraçava e me confortava quando eu mais precisava. Meu pedacinho, quando você crescer e ler isso quero que saiba que você foi importante para esta realização.

E agradeço também ao meu companheiro, Yuri, seu amor e apoio inabalável me ajudaram a superar os desafios, manter o foco em meus objetivos e realizar meu sonho de concluir esta tese de doutorado. Obrigada por estar ao meu lado.

A todos vocês minha profunda gratidão.

"Que nada nos defina,
que nada nos sujeite.
Que a liberdade seja
nossa própria substância, já que viver
é ser livre."
(Simone de Beauvoir)

RESUMO

MONTEIRO, A. **Classes características equivariantes de hipersuperfícies singulares**. 2023. 72 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

O estudo de classes características equivariantes de variedades singulares é um tópico atual e tem sido amplamente investigado em várias áreas da ciência. O principal objetivo desta tese é a construção de classes equivariantes inspirada na caracterização dada por Paruzinski e Pragacz de classe de Milnor, e fazendo o uso da classe equivariante de Schwartz-MacPherson já construída por Ohmoto.

Apresentamos classes características equivariantes do tipo Milnor e do tipo Fulton para hipersuperfícies singulares, além de versões equivariantes dos homomorfismos especializações e então mostramos uma relação entre estes objetos equivariantes.

Palavras-chave: Classes características equivariantes, Número de Milnor integrado equivariante, Especializações equivariantes.

ABSTRACT

MONTEIRO, A. **Equivariant characteristic classes of singular hypersurfaces**. 2023. 72 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

The study of equivariant characteristic classes of singular varieties is a current topic and has been widely investigated in several areas of science. The main objective of this thesis is the construction of equivariant classes inspired by the characterization given by Paruzinski and Pragacz of the Milnor class, and making use of the equivariant Schwartz-MacPherson class already constructed by Ohmoto.

We present Milnor type and Fulton type equivariant characteristic classes for singular hypersurfaces, as well as equivariant versions of the specialization homomorphisms, and then show a relation between these equivariant objects.

Keywords: Equivariant characteristic classes, Equivariant integrated Milnor number, Equivariant specializations.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Classes características equivariantes têm sido um tópico central de estudo em matemática por várias décadas, com diversas aplicações em muitas áreas da ciência. São ferramentas poderosas para estudar as simetrias e invariantes de espaços que admitem a ação de um grupo ou de uma simetria contínua, e têm sido aplicadas em diversos campos, incluindo geometria, física e topologia.

Nesta tese, exploramos a teoria equivariante e suas aplicações já desenvolvidas em trabalhos como (OHMOTO, 2006) e (ROBERTS, 1985), nos inspiramos em resultados da teoria de classes características singulares como os apresentados em (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998) para estabelecemos conexões entre classes características equivariantes e um tipo de número de Milnor equivariante, a fim de definir classes equivariantes do tipo Milnor e Fulton, além de obter resultados a respeito das mesmas.

Nos anos 1990, importantes matemáticos, como Brasselet, Seade e Suwa, perceberam que a diferença entre as classes de Schwartz-MacPherson e de Fulton de hipersuperfície, mais geralmente de interseções completas, carrega informações topológicas importantes sobre este objeto. Por exemplo, se X é uma interseção completa local compacta com singularidades isoladas, então a diferença $(-1)^{n-1}(c^F(X) - c^{SM}(X))$ está localizada no grau zero e é a soma dos números de Milnor dos pontos singulares. Esta diferença tem sido chamada de classe de Milnor de X, muitos autores tem estudado esta classe fornecendo diferentes caracterizações e definições equivalentes, que auxiliam na melhor interpretação deste objeto.

Nossa motivação para a definição de uma versão equivariante desta classe é caracterização dada por Parusinski e Pragacz (1998, Teorema 0.2) para a classe de Milnor de uma hipersuperfície definida como os zeros de uma seção de um fibrado de posto 1 sob certas hipóteses. Nesta caracterização aparecem alguns ingredientes importantes como os números de Milnor, as classes de Chern e as classes de Schwartz-MacPherson.

Os números de Milnor equivariantes foram estudados pela primeira vez por Wall (1980), embora tenham sua origem no trabalho de Arnol'd (1978). Aqui estamos interessados em definir um tipo de número de Milnor equivariante, o qual chamamos de número de Milnor integrado equivariante, nome motivado pelo fato de nos basearmos na construção de número de Milnor clássico como apresentada em (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998) e na construção de um número de Milnor equivariante como apresentada em (ROBERTS, 1985). Vemos que é possível estabelecer uma relação entre o número de Milnor equivariante já estabelecido e o número de Milnor integrado equivariante, no caso em que a hipersuperfície possui singularidades isoladas.

A transformação natural de MacPherson e as classes de Schwartz-MacPherson foram generalizadas em várias direções. Ohmoto (2006) obteve uma versão equivariante desta teoria. Sua construção também nos serve de instrumento e inspiração para a construção das classes e dos resultados a cerca delas.

Esta tese está divida em 7 capítulos, sendo o primeiro capítulo introdutório e os demais divididos conforme descreveremos a seguir.

O objetivo do capítulo 2 é fixar notações necessárias para o entendimento dos conceitos usados ao longo deste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos a construção de várias classes características equivariantes que são extremamente úteis para a construção da classe de Milnor equivariante e classe de Fulton equivariante, em especial a classe equivariante de Schwartz-MacPherson apresentada por Ohmoto (2006).

No capítulo 4 nos dedicamos a apresentação do teorema apresentado por Parusinski e Pragacz (1998) que relaciona a classe de Milnor com as classes de Chern e de Schwartz-MacPherson. Este teorema e a construção do mesmo é nossa motivação para que no capítulo 6 possamos definir uma classe equivariante de Milnor.

No capítulo 5 desenvolvemos as ferramentas equivariantes e resultados necessários para as definições apresentadas no capítulo posterior. Para isso, dividimos em dois casos, apresentados em duas seções, o caso em que a hipersuperfície tem singularidades isoladas e o caso em que a hipersuperfície tem singularidades não isoladas.

Apresentamos no capítulo 6 a definição do número de Milnor integrado equivariante μ_I^G e da classe equivariante de Milnor $\mathscr{M}_G(Z)$ para uma hipersuperfície singular Z. Neste capítulo também apresentamos alguns resultados como a constância de μ_I^G nos estratos de uma estratificação de Whitney de Z e que se Z tem singularidades isoladas $x_1, \cdots, x_k$, então $\mathscr{M}_{G,0}(Z) = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mu_I^G(x_i)$.

No último capítulo, 7, definimos a classe equivariante de Fulton-Johnson para uma hipersuperfície singular. Definimos também versões equivariantes dos homomorfismos especialização em funções construíveis e em homologia. Apresentamos uma versão equivariante da propriedade de especializações de Verdier, e fazendo uso desta propriedade garantimos uma relação entre as classes equivariantes de Fulton-Johnson e de Schwartz-MacPherson.

Os resultados desta tese possuem potencial para aplicações em várias áreas como singularidades, topologia algébrica, geometria algébrica e teoria da representação, podendo estimular novas pesquisas nestas áreas.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é fixar notações necessárias para o entendimento dos conceitos usados ao longo deste trabalho. Mencionamos sempre às referências no início das seções para maiores detalhes e demonstrações.

2.1 Limites para objetos algébricos

As definições de limite direto e projetivo podem ser apresentadas de maneira mais geral para uma categoria qualquer. Como em nosso trabalho os objetos utilizados são de natureza algébrica, nesta seção, apresentamos uma versão das definições de limite que valem para objetos algébricos, como conjuntos equipados com uma determinada estrutura algébrica, grupos, anéis, módulos (sobre um anel fixo), álgebras (sobre um corpo fixo), etc. Com isso em mente, os homomorfismos são entendidos no cenário correspondente (homomorfismos de grupo, etc.). Para esta seção utilizamos como referência (BOURBAKI, 1966).

Definição 2.1.1. Seja X um conjunto não-vazio e $\preceq$ uma relação em X. Dizemos que $(X,\preceq)$ é **quasi-ordenado** se:

(i) (Reflexividade) $x \preceq x$, $\forall x \in X$;

(ii) (Transitividade) Se $x,y,z \in X$, $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.

Dizemos que $(X,\preceq)$ é **direcionado** se $(X,\preceq)$ é quasi-ordenado e se para quaisquer $x,y \in X$ existe $z \in X$ tal que $x \preceq z$ e $y \preceq z$.

Definição 2.1.2. Seja $(I,\preceq)$ um conjunto direcionado. Seja $\{F_i\}_{i_I}$ uma família de objetos indexados em I e $\varphi^i_j : F_i \to F_j$ um homomorfismo para todo $i \leq j$, com as seguintes propriedades:

(i) $\varphi^i_i = id_{F_i}$ para todo $i \in I,$; onde id_{F_i} é a aplicação identidade de F_i.

(ii) $\varphi_k^j \circ \varphi_j^i = \varphi_k^i$, para todo $i \leq j \leq k$.

Então o par $\{F_i, \varphi_j^i : F_i \to F_j\}_{i,j \in I}$ é chamado **sistema direto** sobre I.

Definição 2.1.3. Seja $(I, \preceq)$ um conjunto direcionado. Seja $\{F_i\}_{i_I}$ uma família de objetos indexados em I e $\varphi_j^i : F_j \to F_i$ (observe a ordem dos índices) um homomorfismo para todo $i \leq j$, com as seguintes propriedades:

(i) $\varphi_i^i = id_{F_i}$ para todo $i \in I$;, onde id_{F_i} é a aplicação identidade de F_i.

(ii) $\varphi_j^i \circ \varphi_k^j = \varphi_k^i$, para todo $i \leq j \leq k$.

Então o par $\{F_i, \varphi_j^i : F_j \to F_i\}_{i,j \in I}$ é chamado **sistema projetivo** sobre I.

Definição 2.1.4. O **limite direto** de um sistema direto $\{F_i, \varphi_j^i : F_i \to F_j\}_{i,j \in I}$ é denotado por $\varinjlim F_i$ e definido como o quociente da união disjunta dos objetos F_i por uma certa relação de equivalência $\sim$

$$\varinjlim F_i = \bigsqcup F_i \Big/ \sim,$$

onde dados $x_i \in F_i$ e $x_j \in F_j$, $x_i \sim x_j$ se, e somente se, existe $k \in I$ com $i \leq k$ e $j \leq k$ tal que $\varphi_k^i(x_i) = \varphi_k^j(x_j)$.

Intuitivamente, dois elementos na união disjunta são equivalentes se, e somente se, eles “eventualmente tornam-se iguais" no sistema direto.

A partir desta definição obtêm-se aplicações canônicas $\phi_j : F_j \to \varinjlim F_i$, cada uma chamada de **aplicação identificação**, que envia cada elemento para sua respectiva classe de equivalência. As operações algébricas sobre $\varinjlim F_i$ são definidas de forma que as aplicações $\phi_j : F_j \to \varinjlim F_i$ tornem-se homomorfismos. Formalmente, o limite direto de um sistema direto $\{F_i, \varphi_j^i : F_i \to F_j\}_{i,j \in I}$ consiste do objeto $\varinjlim F_i$ e os homomorfismos canônicos $\phi_j : F_j \to \varinjlim F_i$.

Definição 2.1.5. O **limite projetivo** de um sistema direto $\{F_i, \varphi_j^i : F_j \to F_i\}_{i,j \in I}$ é denotado por $\varprojlim F_i$ e definido como um subgrupo particular do produto direto dos F_i

$$\varprojlim F_i = \left\{ \overrightarrow{x} \in \prod_{i \in I} F_i \;\middle|\; x_i = \varphi_j^i(x_j),\ \forall i \leq j \in I \right\}.$$

O limite inverso $\varprojlim F_i$ vem equipado com projeções naturais $r_i : \varprojlim F_i \to F_i$, chamadas de **projeções canônicas**, que captam a i-ésima componente do produto direto para cada i em I.

Observação 2.1.1. Estas mesmas construções de limites diretos e projetivos podem ser realizadas se os objetos F_i forem conjuntos, semigrupos, espaços topológicos, anéis, módulos (sobre um anel fixo), álgebras (sobre um anel fixo), etc., e os homomorfismos são morfismos na categoria correspondente. Os limites também pertencerão a esta mesma categoria.

2.2 Esquemas

Nesta seção faremos um breve resumos dos conceitos que nos serão úteis sobre esquemas, para isso usamos como referência (GöRTZ; WEDHORN, 2010).

Considere X um espaço topológico compacto, ou seja, toda cobertura aberta admite subcobertura finita.

Definição 2.2.1. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Um par $(X,\mathscr{O}_X)$ é chamado $\mathscr{C}$-espaço (ou espaço sobre $\mathscr{C}$) se X é um espaço topológico e $\mathscr{O}_X$ é um feixe de objetos em $\mathscr{C}$ sobre X. Neste caso, $(X,\mathscr{O}_X)$ é chamado **espaço anelado**, pois o feixe $\mathscr{O}_X$ associa cada aberto U de X a um anel $\mathscr{O}_X(U)$.

Definição 2.2.2. Um **esquema afim** é um espaço localmente anelado $(X,\mathscr{O}_X)$ que é isomorfo a $(Spec(A),\mathscr{O}_{Spec(A)})$, para algum anel A.

Definição 2.2.3. Um **esquema** é um espaço localmente anelado $(X,\mathscr{O}_X)$ no qual, para todo ponto $x\in X$, existe um aberto U de X contendo x tal que $(U,\mathscr{O}_X|_U)$ é um esquema afim.

Definição 2.2.4. Dizemos que um espaço anelado $(Y,\mathscr{O}_Y)$ é um **subesquema** de um esquema $(X,\mathscr{O}_X)$ se Y é um subconjunto localmente fechado de X, e se U denota o maior conjunto aberto de X contendo Y tal que X é fechado em U, então $(Y,\mathscr{O}_Y)$ é um subesquema de $(U,\mathscr{O}_X|_U)$ definido por um feixe que é localmente um cokernel de um morfismo de módulos livres (feixe quasicoerente) de ideais de $\mathscr{O}_X|_U$.

Definição 2.2.5. Um morfismo entre espaços anelados (X,O_X) e (Y,O_Y) é um par $(f,f^\sharp)$ de uma função confínua $f:X\to Y$ e um morfismo de feixe de anéis $f^\sharp:O_Y\to f_*O_X$. Um **morfismo entre espaços localmente anelados** $(f,f^\sharp)$ é um morfismo de espaços anelados tal que para todo $p\in X$, $f_p^\sharp:O_{Y,f(p)}\to f_*O_{X,p}$ é um homomorfismo local, ou seja, satisfaz $(f_p^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_{f_*O_{X,p}})=\mathfrak{m}_{O_{Y,f(p)}}$.

Definição 2.2.6. Um esquema $(X,\mathscr{O}_X)$ é **integral** se $\mathscr{O}_X(U)$ é domínio de integridade, $\forall U\subset X$ aberto.

Definição 2.2.7. Seja $(S,\mathscr{O}_S)$ um esquema. Um **esquema sobre** $(S,\mathscr{O}_S)$ é um esquema $(X,\mathscr{O}_X)$ munido de um morfismo de espaços localmente anelados

$$(\alpha,\alpha^\sharp):(X,\mathscr{O}_X)\to(S,\mathscr{O}_S),$$

o qual chamamos de **morfismo estrutura**.

Definição 2.2.8. Seja K um corpo. Um **esquema sobre** K (também chamado de K-esquema) é um esquema sobre $(Spec(K),\mathscr{O}_{Spec(K)})$.

Definição 2.2.9. Dizemos que um K-esquema $(X,\mathscr{O}_X)$ é do **tipo finito** se X pode ser coberto por finitos abertos $\{U_1,\dots,U_m\}$ tais que $\mathscr{O}_X(U_i)$ são K-álgebras finitamente geradas, $\forall i$.

Observação 2.2.1. Se X é um K-esquema do tipo finito, então todo subesquema de X é do tipo finito.

Definição 2.2.10. Considere $(\alpha,\alpha^\sharp):(X,\mathscr{O}_X)\to(Y,\mathscr{O}_Y)$ um morfismo de K-esquemas:

(i) $(\alpha,\alpha^\sharp)$ é uma **imersão** se $\alpha(X)$ é homeomorfo a um subespaço localmente fechado de Y e se os homomorfismos locais $\mathscr{O}_{Y,\alpha(x)}\to\mathscr{O}_{X,x}$ são sobrejetivos;

(ii) $(\alpha,\alpha^\sharp)$ é uma **imersão fechada** se $\alpha(X)$ é homeomorfo a um subespaço fechado de Y e se os homomorfismos locais $\mathscr{O}_{Y,\alpha(x)}\to\mathscr{O}_{X,x}$ são sobrejetivos;

(iii) $(\alpha,\alpha^\sharp)$ é uma **imersão aberta** se $\alpha(X)$ é homeomorfo a um subespaço aberto U de Y e se $\alpha^\sharp$ induz um isomorfismo $\mathscr{O}_Y|_U\cong\alpha^\sharp(\mathscr{O}_X)$ (de feixes sobre U).

Definição 2.2.11. Seja $(X,\mathscr{O}_X)$ um K-esquema, o par $(1_X,1_X)$ define um morfismo diagonal $d:X\to X\times X$. Dizemos que $(X,\mathscr{O}_X)$ é **separado** se d for uma imersão fechada.

No decorrer do trabalho chamaremos de **variedade** um esquema do tipo finito, integral e separado sobre um corpo K de característica 0.

Para a definição a seguir, enxergaremos o espaço projetivo $\mathbb{P}^n_K$ como um K-esquema, para entender com mais detalhes ver (GöRTZ; WEDHORN, 2010, p. 72).

Definição 2.2.12. (i) Um K-esquema X é chamado de **projetivo**, se existe $n\geq 0$ e uma imersão fechada $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n_K$;

(ii) Um K-esquema X é chamado de **quasi-projetivo**, se existe $n\geq 0$ e uma imersão $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n_K$.

Observação 2.2.2. Da observação 2.2.1 segue que todo K-esquema quasi-projetivo é do tipo finito. Além disso, todo K-esquema afim X do tipo finito é quasi-projetivo. De fato, sendo X um K-esquema afim, existe uma imersão fechada $i:X\to A^n_K$. Além disso, o espaço projetivo $\mathbb{P}^n_K$ é coberto por subesquemas abertos que são isomórficos a A^n_K por construção. Em particular, podemos encontrar uma imersão aberta $j:A^n_K\to\mathbb{P}^n_K$. A composição $j\circ i$ é então uma imersão $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n_K$.

Definição 2.2.13. Sejam X e Y dois esquemas sobre um esquema S. O produto fibrado de X por Y sobre S é um esquema $X\times_S Y$ com dois morfismos $p_1:X\times_S Y\to X$ e $p_2:X\times_S Y\to Y$, chamados de morfismos projeções, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X\times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, para todo esquema Z e todo morfismo $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$, tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

comuta, exite um único morfismo $\delta : Z \to X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ \delta$ e $g = p_2 \circ \delta$.

Definição 2.2.14. Um morfismo $f : X \to Y$ de esquemas é denominado **universalmente fechado** se para cada esquema Z com um morfismo $Z \to Y$, a projeção do produto de fibra

$$X \times_Y Z \to Z$$

é uma aplicação fechada dos espaços topológicos subjacentes.

Definição 2.2.15. Seja $f : X \to Y$ um morfismo de esquemas. Então X é um Y-esquema e podemos considerar o produto fibrado $X \times_Y X$, considerando $id_X : X \to X$, a identidade de X, segue da definição de produto fibrado que existe um único $\delta : X \to X \times_Y X$ tal que $id_X = p_1 \circ \delta$ e $id_X = p_2 \circ \delta$, δ é chamada de aplicação diagonal. Dizemos que o morfismo f é **separado** se a diagonal δ é uma imersão fechada.

Definição 2.2.16. Um morfismo $f : X \to Y$ de esquemas é do **tipo finito** se Y tem uma cobertura por subesquemas abertos afins $V_i = Spec(A_i)$ tal que $f^{-1}(V_i)$ tem uma cobertura finita por subesquemas abertos afins $U_{ij} = Spec(B_{ij})$ com B_{ij} uma A_i-álgebra de tipo finito.

Definição 2.2.17. Um morfismo de esquemas é denominado **próprio** se for separado, de tipo finito e universalmente fechado.

2.3 Grupos algébricos e G-variedades

Nesta seção abordaremos os conceitos de grupos algébricos e G-variedades e para isso utilizamos como referência (MUMFORD; FOGARTY; KIRWAN, 1982).

Definição 2.3.1. Um **ponto K-mensurado** de uma variedade X sobre K é um morfismo de $S = Spec(K)$ para X. Quando K for algebricamente fechado, tal ponto será referido como **ponto geométrico** de X.

Dadas duas variedades X e Y sobre K, então todos os morfismos $f : X \to Y$ serão entendidos como K-morfismos e $X \times_{Spec(K)} Y$ será abreviado para $X \times Y$. $\overline{K}$ representa o fecho algébrico de K, abreviaremos $X \times Spec(\overline{K})$ por $\overline{X}$.

Definição 2.3.2. Um **grupo algébrico** G é definido como uma variedade sobre K munida da topologia de Zariski, com uma estrutura de grupo tal que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são morfismos de variedades.

Quando o grupo algébrico G é subconjunto de K^n, para algum n, chamamos G de **grupo algébrico afim**. E quando o grupo algébrico G é um grupo de matrizes chamamos G de **grupo algébrico linear**. Todo grupo algébrico afim é um grupo algébrico linear, no sentido de que pode ser representado como um grupo de matrizes.

Exemplo 2.3.1. Para um inteiro positivo n, o grupo linear geral $GL(n)$ sobre um corpo K, consistindo de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis, é um grupo algébrico linear sobre K. Outro subgrupo algébrico de $GL(n)$ é o grupo linear especial $SL(n)$ de matrizes com determinante 1.

Definição 2.3.3. Sejam G um grupo algébrico e X uma variedade sobre K. Dizemos que X é uma G**-variedade**, se existe uma ação de G em X que é um morfismo de variedades. Mais precisamente, se existe um morfismo de variedades

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & G \times X & \to & X \\ & (g,x) & \mapsto & gx \end{array},$$

tal que $1_G x = x$ e $g(hx) = (gh)x$.

Exemplo 2.3.2. Podemos enxergar o próprio grupo algébrico G como uma G-variedade. Tomando $X = G$, G atua em si mesmo por translação à direita (resp. esquerda) da forma $\alpha(g,x) = gx$ (resp. $\alpha(g,x) = xg^{-1}$).

Definição 2.3.4. Sejam X e Y G-variedades. Dizemos que um morfismo de G-variedades $\phi : X \to Y$ é um **morfismo G-equivariante** (ou G-morfismo) se $\phi(gx) = g\phi(x)$, $\forall\, g \in G, x \in X$.

Definição 2.3.5. Considere uma ação σ de G em X (ambos sobre K). Dizemos que um par (Y,ϕ), consistindo de uma variedade Y sobre K e um K-morfismo $\phi : X \to Y$, é um **quociente geométrico** de X por G se ele satisfaz:

(i) $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$, onde p_2 é a projeção na segunda coordenada;

(ii) As fibras geométricas de ϕ são precisamente as órbitas dos pontos geométricos de X;

(iii) ϕ é submersivo, ou seja, um subconjunto $U \subset Y$ é aberto se, e somente se, $\phi^{-1}(U)$ é aberto em X;

Definição 2.3.6. Seja G um grupo algébrico e V um espaço vetorial n-dimensional. Denotando $GL(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ é invertível } \} \cong GL(n)$. Uma **representação** de G de grau n é um morfismo $\rho : G \to GL(V)$.

Exemplo 2.3.3. A representação trivial para um grupo algébrico G é

$$\begin{array}{rccc} I: & G & \to & GL(V) \\ & g & \mapsto & id_V \end{array},$$

para todo V de qualquer dimensão, onde id_V é a aplicação identidade de V. Então, todo grupo admite representação de grau k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dada uma representação $\rho : G \to GL(V)$, podemos definir uma ação de G em V da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & g \cdot v := \rho(g)(v) \end{array}.$$

Observação 2.3.1. Mais geralmente, poderemos nos referir a uma representação n-dimensional de G como o espaço vetorial n-dimensional V.

Definição 2.3.7. Seja V uma representação de G. Um subespaço W de V é **G-invariante** se $g \cdot w \in W$, $\forall g \in G$ e $\forall w \in W$.

Definição 2.3.8. Dado um grupo topológico G a sua **componente de identidade** G^0 é a componente conexa de G que contém o elemento identidade do grupo. O **radical** de um grupo algébrico é a componente de identidade de seu subgrupo solúvel normal máximo.

Definição 2.3.9. O grupo quociente G/G^0 é chamado de **grupo componente** de G. Seus elementos são apenas as componentes conexas de G.

Observação 2.3.2. O grupo componente G/G^0 é um grupo discreto se, e somente se, G^0 for aberto. Se G é um grupo algébrico de tipo finito, como um grupo algébrico afim, então G/G^0 é um grupo finito (ver (ARTIN, 2006, VI_A, Proposição 5.5.1)).

Definição 2.3.10. Um grupo algébrico G é **redutivo** se seu radical é um toro.

Exemplo 2.3.4. Um exemplo fundamental de um grupo algébrico redutivo é o grupo linear geral $GL(n)$, para um número natural n. Em particular, o grupo multiplicativo $Gm := GL(1)$.

2.4 Fibrados principais

Nesta seção trabalharemos com o conceito de fibrados principais. Para mais detalhes sobre fibrados principais e associados ver em (FORGER; ANTONELI, 2011). Para detalhes de fibrado principal universal ver (ARTEAGA, 2013).

Definição 2.4.1. Seja G um grupo topológico. Um **fibrado com grupo estrutural** ξ é uma quíntupla (E,B,π,F,G) composta de:

1. um espaço topológico E, chamado **espaço total**;
2. um espaço topológico B, chamado **espaço base**;
3. uma aplicação contínua $\pi : E \to B$, chamada **projeção**;
4. um espaço topológico F chamado **fibra típica**;
5. o grupo topológico G chamado **grupo estrutural**, com uma ação (à esquerda) livre

$$\begin{array}{ccc} G\times F & \to & F \\ (g,x) & \mapsto & gx \end{array},$$

   de G na fibra típica F;

e satisfazendo a **trivialidade local**: existem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de B e uma família $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de homeomorfismos

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F,$$

com $p_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ para todo $\alpha \in A$ (onde p_1 é a projeção na primeira coordenada), chamadas **trivializações locais**, tais que para quaisquer $\alpha,\beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta)\times F \to (U_\alpha \cap U_\beta)\times F,$$

é um homeomorfismo que pode ser representado por uma função contínua

$$h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G,$$

chamada a correspondente **função de transição**, conforme a fórmula

$$(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x,f) = (x, h_{\alpha\beta}(x)f),$$

para $x \in U_\alpha \cap U_\beta,\ f \in F$.

Também chamaremos o fibrado com grupo estrutural $\xi = (E,B,\pi,F,G)$ de G**-fibrado**. Assim como para os fibrados vetoriais, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ é chamado de fibra sobre b e poderá ser denotado também por F_b.

Definição 2.4.2. Um G-**fibrado principal** ξ é uma quádrupla (E,B,π,G) composta de:

1. uma G-variedade E, chamada **espaço total**;
2. uma G-variedade B, chamada **espaço base**;
3. um morfirmo G-equivariante $\pi : E \to B$, chamado **projeção**;
4. o grupo algébrico linear G chamado **grupo estrutural**, com uma ação (à direita)

$$\begin{array}{ccc} E\times G & \to & E \\ (x,g) & \mapsto & xg \end{array},$$

de G no espaço total E que é transitiva e livre nas fibras;

e satisfazendo a **trivialidade local equivariante**: existem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de B e uma família $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de homeomorfismos

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G,$$

com $p_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ para todo $\alpha \in A$, os quais são equivariantes, ou seja,

$$\phi_\alpha^{-1}(x,hg) = \phi_\alpha^{-1}(x,h)g,\ \forall x \in U_\alpha,\ g,h \in G,$$

chamadas **trivializações locais equivariantes**, tais que para quaisquer $\alpha,\beta \in A$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta)\times G \to (U_\alpha \cap U_\beta)\times G,$$

é um homeomorfismo que pode ser representado por uma função contínua

$$h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G,$$

chamada **função de transição**, conforme a fórmula

$$(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x,g) = (x, h_{\alpha\beta}(x)g),$$

para $x \in U_\alpha \cap U_\beta,\ g \in G$.

Também chamaremos o fibrado principal $\xi = (P,B,\pi,G)$ de G-**fibrado principal**. No decorrer do texto, se não for necessário exibir a projeção π e o grupo G em questão, denotaremos um G-fibrado apenas por $E \to B$ exibindo seu espaço total e seu espaço base.

Os G-fibrados principais podem ser vistos como uma classe especial entre os fibrados com grupo estrutural. Uma definição equivalente para um G-fibrado principal é de um G-fibrado $\xi = (E,B,\pi,F,G)$ que satisfaz $F = G$ e G age sobre si mesmo por translação à esquerda. Veja a demonstração da equivalência destas duas definições em (FORGER; ANTONELI, 2011, p. 103).

2.4.1 Fibrados associados

Um dos motivos para o uso do termo “fibrado principal" é que qualquer fibrado com grupo estrutural G pode ser obtido a partir de um G-fibrado principal por um método direto e global que mostraremos a seguir: a construção do “**fibrado associado**”.

Seja P um fibrado principal sobre um espaço topológico B com projeção $\pi : P \to B$ e grupo estrutural G, e seja Q um espaço topológico munido de uma ação de G

$$\begin{array}{ccc} G \times Q & \to & Q \\ (g,x) & \mapsto & gx \end{array}.$$

Considere o espaço produto $P \times Q$, munida da ação de G à direita definida por

$$\begin{array}{ccc} (P \times Q) \times G & \to & P \times Q \\ ((p,q),g) & \mapsto & (p,q)g = (pg, g^{-1}q) \end{array}.$$

Denotaremos o espaço das órbitas desta ação por $(P \times Q)_G$, a projeção canônica de $P \times Q$ sobre $(P \times Q)_G$ por π_Q e a classe de equivalência, ou órbita, de um par (p,q) por $[p,q]$, assim, vale

$$[pg, g^{-1}q] = [p,q] \text{ ou } [pg,q] = [p,gq],$$

para $p \in P,\ q \in Q,\ g \in G$.

Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} P \times Q & \xrightarrow{\pi_Q} & (P \times Q)_G \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{\pi}} \\ P & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & B \end{array}$$

onde as aplicações $\overline{\pi} : (P \times Q)_G \to B$ e $\pi_Q : P \times Q \to (P \times Q)_G$ são dadas por $\overline{\pi}[p,q] = \pi(p)$ e $\pi_Q(p,q) = [p,q]$, para $p \in P,\ q \in Q$.

Definição 2.4.3. Nas condições anteriores, $((P \times Q)_G, B, \overline{\pi}, Q, G)$ é chamado de **fibrado associado** ao fibrado principal P, mediante a ação dada de G sobre sua fibra típica Q.

Este novo G-fibrado está bem definido e esta demonstração pode ser vista em (FORGER; ANTONELI, 2011, p. 107, Teorema 2.2).

Observação 2.4.1. É possível classificar os G-fibrados mostrando que qualquer G-fibrado E sobre B com fibra Q, pode ser obtido como fibrado associado de algum G-fibrado principal P. A ideia é construir um G-fibrado principal usando as trivializações locais do fibrado E e depois considerar o fibrado $(P \times Q)_G$, por fim mostrar que este é isomorfo ao fibrado original E (ver (FORGER; ANTONELI, 2011, p. 110)).

Definição 2.4.4. Um **morfismo de G-fibrados principais** (P_1, B_1, π, G) e (P_2, B_2, π', G) é qualquer aplicação G-equivariante $\phi : P_1 \to P_2$. Para qualquer morfismo de G-fibrados principais $\phi : P_1 \to P_2$, existe uma aplicação $\widetilde{\phi} : B_1 \to B_2$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\phi} & P_2 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B_1 & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & B_2 \end{array}$$

é comutativo.

A aplicação $\widetilde{\phi} : B_1 \to B_2$ está unicamente definida por $\widetilde{\phi}(b) = \pi'(\phi(p))$, onde $b = \pi(p)$. Isto está bem definido, pois dados $p, q \in \pi^{-1}(b)$, temos que $q = pg$ para algum $g \in G$ e, assim,

$$\pi'(\phi(q)) = \pi'(\phi(pg)) = \pi'(\phi(p)g) = \pi'(\phi(p)).$$

2.4.2 Fibrado principal universal

Primeiramente vamos lembrar do conceito de join topológico. Intuitivamente o join de dois conjuntos $A_1 \circ A_2$ é formado por todos os segmentos de retas com extremidades nos conjuntos, o join de três conjuntos $A_1 \circ A_2 \circ A_3$ é formado por todos os triângulos com vértices nos conjuntos, o join de quatro conjuntos é formado por todos os tetraedros com vértices nos conjuntos e assim sucessivamente. Formalmente podemos definir:

Definição 2.4.5. Um ponto no **join** $A_1 \circ \cdots \circ A_n$ de n espaços topológicos será denotado por $t_1 a_1 \oplus \cdots \oplus t_n a_n$, onde

1. $t_1, \ldots, t_n$ são números reais, tais que $t_i \geq 0$ e $t_1 + \cdots + t_n = 1$;

2. $a_i \in A_i$ é escolhido de forma arbitrária para cada i tal que $t_i \neq 0$ ou omitido se $t_i = 0$.

Queremos considerar uma topologia forte em $A_1 \circ \cdots \circ A_n$, e por forte queremos dizer que seja a topologia mais forte tal que as funções coordenadas

$$t_i : A_1 \circ \cdots \circ A_n \to [0,1] \qquad a_i : t_i^{-1}(0,1] \to A_i$$

sejam contínuas. Em outras palavras, queremos construir uma topologia tal que dado $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$, o conjunto $t_i^{-1}(\alpha, \beta) = \{t_1 a_1 \oplus \cdots \oplus t_n a_n \mid t_i \in (\alpha, \beta)\}$ seja um aberto em $A_1 \circ \cdots \circ A_n$, e dado $U \subset A_i$ aberto, então $a_i^{-1}(U) = \{t_1 a_1 \oplus \cdots \oplus t_n a_n \mid a_i \in U, t_i \neq 0\}$ seja um aberto no join $A_1 \circ \cdots \circ A_n$.

Com essa finalidade, consideraremos como sub-base para a topologia em $A_1 \circ \cdots \circ A_n$ os conjuntos:

1. o conjunto de todos os pontos $t_1 a_1 \oplus \cdots \oplus t_n a_n$ tais que $\alpha < t_i < \beta$;

2. o conjunto de todos os pontos $t_1a_1 \oplus \cdots \oplus t_na_n$ tais que $a_i \in U$, $t_i \neq 0$, com $U \subset A_i$ aberto.

Chamaremos essa topologia de **topologia forte** em $A_1 \circ \cdots \circ A_n$.

Observação 2.4.2. Segue da topologia forte construída no join $A_1 \circ \cdots \circ A_n$ que uma função $f : X \to A_1 \circ \cdots \circ A_n$ é contínua se, e somente se, as funções $t_i \circ f$ e $f \circ a_i$ forem contínuas.

Definição 2.4.6. A definição de join para uma quantidade infinita de espaços topológicos é análoga à definição apara o caso finito, apenas se acrescenta a restrição de que quase todos os t_i são nulos, ou seja, apenas uma quantidade finita de t_i são não nulos.

Considere G um grupo topológico, e denote

$$EG_\infty = G \circ G \circ \cdots \circ G \circ \cdots ,$$

e seja $R : EG_\infty \times G \to EG_\infty$ a aplicação definida por

$$R((t_1g_1 \oplus \cdots \oplus t_ng_n \oplus 0 \oplus \cdots), g) = (t_1(g_1g) \oplus \cdots \oplus t_n(g_ng) \oplus 0 \oplus \cdots).$$

Da definição de topologia forte temos que R é contínua, além disso, é claro que R define uma ação a direita em EG_∞.

Em EG_∞ podemos definir uma relação de equivalência:

$$e \sim e' \Leftrightarrow \exists\, g \in G \text{ tal que } e' = R(e,g).$$

Sejam $BG_\infty = EG_\infty/\sim$ e $p : EG_\infty \to BG_\infty$ a projeção canônica.

Proposição 2.4.1. $\omega_G = (EG_\infty, BG_\infty, p, G)$ é um G-fibrado principal.

Demonstração. De fato, BG_∞ tem como vizinhanças coordenadas

$$V_j = \{p(t_0g_0 \oplus \cdots \oplus t_ng_n \oplus \cdots) \mid t_j \neq 0\}.$$

Como funções coordenadas, defina $\phi_j : V_j \times G \to p^{-1}(V_j)$ por

$$\phi_j(p(t_0g_0 \oplus \cdots \oplus t_ng_n \oplus \cdots), g) = t_0(g_0g_j^{-1}g) \oplus \cdots \oplus t_n(g_ng_j^{-1}g) \oplus \cdots .$$

Defina $p_j : p^{-1}(V_j) \to G$ por

$$p_j(t_0g_0 \oplus \cdots \oplus t_ng_n \oplus \cdots) = g_j,$$

as identidades $p(\phi_j(x,g)) = x$, $p_j(\phi_j(x,g)) = g$ e $\phi_j(p(e), p_j(e)) = e$ mostram que (p, p_j) é inversa de ϕ_j.

As transformações coordenadas $g_{ij} : V_i \cap V_j \to G$ são dadas por

$$g_{ij}(p(t_0 g_0 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus \cdots)) = g_i g_j^{-1},$$

e satisfaz a identidade $p_i(\phi_j(x,g)) = g_{ij}(x).g$.

Agora é necessário mostrar que todas essas funções são contínuas. Pela definição da topologia forte no join segue a continuidade da aplicação p_j, também é claro que p é contínua. Seja 1_G a identidade em G. A fórmula

$$\phi_j(p(e), 1_G) = R(e, p_j(e)^{-1})$$

mostra que $\phi_j(p(e), 1_G)$ é uma função contínua de e. Da definição de topologia quociente, segue que $\phi_j(x, 1_G)$ é uma função contínua de x. Agora, a identidade

$$\phi_j(x,g) = R(\phi_j(x, 1_G), g),$$

implica que ϕ_j é contínua como função de duas variáveis.

Por último, segue-se da identidade $g_{ij}(x) = p_i(\phi_j(x, 1_G))$ que as funções g_{ij} são contínuas, portanto nos podemos concluir que ω_G é um G-fibrado principal. □

Definição 2.4.7. Dizemos que o fibrado principal $\xi = (E, \pi, B, G)$ é **n-universal** se E é $(n-1)$-conexo, ou seja, $\pi_i(E) = 0$, para $0 \leqslant i < n$. Dizemos, portanto, que ξ é **∞-universal** (ou universal) se $\pi_i(E) = 0$, $\forall i$.

Exemplo 2.4.1. O fibrado principal ω_G é um fibrado ∞-universal (ver (MILNOR, 1956, Lema 2.3, p. 432)).

Definição 2.4.8. Um espaço B é um **espaço classificante** de G se B é espaço base de algum fibrado universal com grupo estrutural G.

Observação 2.4.3. Quando nos referimos a um espaço classificante de G qualquer, usa-se como notação habitual BG para o espaço classificante e EG para o espaço total do fibrado universal.

CAPÍTULO

3

CLASSES EQUIVARIANTES DE CHERN

Este capítulo tem como referência o artigo do Ohmoto (2006) onde ele apresenta a construção de várias classes equivariantes de Chern que nos serão extremamente úteis para a construção da classe de Milnor equivariante e classe de Fulton equivariante que apresentaremos nesta tese nos capítulos 6 e 7.

3.1 Objetos na G-versão

Seja G um grupo algébrico linear redutivo complexo de dimensão g. Tome V uma representação l-dimensional de G com um subconjunto S fechado de Zariski G-invariante tal que G age em $U := V - S$ livremente.

Observação 3.1.1. É possível tomar V e S de forma que $U \to U/G$ se torne um G-fibrado principal sobre uma variedade quasi-projetiva e a codimensão de S seja suficientemente alta (ver (TOTARO, 1999, Remark 1.4)).

Seja $I(G)$ o conjunto de todos os abertos de Zariski $U = V - S$, onde V é uma representação de G e S é um fechado de V tais que todas as propriedades acima mencionadas são respeitadas.

3.1.1 Cohomologia equivariante

Agora, vamos colocar uma ordem parcial em $I(G)$.

Definição 3.1.1. Sejam $U, U' \in I(G)$. Dizemos que

$$U(= V - S) < U'(= V' - S')$$

se $codim_V\ S < codim_{V'}\ S'$ e se existe uma inclusão linear G-equivariante $i_{V,V'} : V \to V'$ que leva U em U'.

Observação 3.1.2. $(I(G),<)$ é um conjunto direcionado.

Todos os G-fibrados principais $U \to U/G$ com as aplicações induzidas pelas inclusões formam um sistema direto

$$\{U \to U/G, i_{V,V'}|_U\}_{U,U' \in I(G)},$$

que é a aproximação algébrica do fibrado universal $EG \to BG$. A descrição dessa aproximação, construída por Totaro (1999), também pode ser vista em (EDIDIN; GRAHAM, 1996, p.6).

Seja X uma G-variedade. Para cada $U \in I(G)$, a ação diagonal de G em $X \times U$ que é livre define um fibrado principal

$$X \times U \to X \times_G U,$$

onde $X \times_G U$ representa o quociente geométrico $(X \times U)/G$, e assim usando a projeção equivariante $X \times U \to U$ e o G-fibrado principal $U \to U/G$ podemos construir o fibrado

$$X \times_G U \to U/G,$$

com fibra X, conforme diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X \times U & \longrightarrow & X \times_G U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U/G \end{array}$$

A grosso modo, o fibrado universal $X \times_G EG \to BG$ é aproximado por estes fibrados $X \times_G U \to U/G$, com $U \in I(G)$.

Definição 3.1.2. Sejam $U, U' \in I(G)$, com $U < U'$, $id_X \times_G \iota_{U,U'} : X \times_G U \to X \times_G U'$ a aplicação obtida através da aplicação identidade id_X em X e da inclusão linear G-equivariante $\iota_{U,U'}$ de U em U'. Denote $r_{U,U'} := (id_X \times_G \iota_{U,U'})^* : H^*(X \times_G U') \to H^*(X \times_G U)$ o homomorfismo induzido. Então, temos um sistema projetivo $\{H^*(X \times_G U), r_{U,U'}\}_{U,U' \in I(G)}$. O ***i*-ésimo grupo de cohomologogia *G*-equivariante** de X é dado por

$$H^i_G(X) = \varprojlim H^i(X \times_G U).$$

A soma formal é denotada por $H^*_G(X) = \prod H^i_G(X) = \varprojlim H^*(X \times_G U)$. Também denotamos por

$$r_U : H^*_G(X) \to H^*(X \times_G U)$$

a projeção canônica para U.

Definição 3.1.3. Dado um G-morfismo $f : X \to Y$, o **homomorfismo induzido em cohomologia *G*-equivariante** $f^*_G : H^i_G(Y) \to H^i_G(X)$ é definido como

$$f^*_G(\varprojlim \alpha_U) = \varprojlim (f \times_G id)^*(\alpha_U),$$

onde id é a aplicação identidade de U.

Definição 3.1.4. Dizemos que $\xi : E \to X$ é um **fibrado vetorial G-equivariante** se ξ é um fibrado vetorial onde E e X são G-variedades, ξ é um morfismo G-equivariante e a ação de G em E preserva as fibras linearmente. Neste caso, as trivializações locais também serão equivariantes, ou seja, $\phi_\alpha^{-1}(g \cdot x, t) = g \cdot \phi_\alpha^{-1}(x,t)$, onde $\phi_\alpha : \xi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$.

Seja ξ um fibrado vetorial G-equivariante $E \to X$, então ξ induz um fibrado vetorial

$$\xi_U := \xi \times_G id : E \times_G U \to X \times_G U,$$

onde id é a aplicação identidade de U.

Definição 3.1.5. O limite projetivo das classes de Chern $c(\xi_U)$ é a **classe G-equivariante de Chern** de ξ, denotada por $c^G(\xi) \in H_G^*(X)$.

Observação 3.1.3. Em particular, quando $X = \{pt\}$, um fibrado vetorial G-equivariante é $V \to \{pt\}$, sendo V uma representação de G. A classe G-equivariante de Chern é denotada por $c^G(V) \in H_G^*(\{pt\}) = H^*(BG)$.

Observação 3.1.4. Note que $c_0^G(\xi) = 1 \in H_G^*(X)$. De fato, como $c^G(\xi) = \varprojlim c(\xi_U) \in H_G^*(X) = \prod H_G^i(X)$, então $c_k^G(\xi) = \prod c_k(\xi_U)$. No grau 0, sabemos que a classe de Chern (clássica) vale $c_0(\xi_U) = 1$, para todo U, portanto $c_0^G(\xi) = \prod 1 = 1_{H_G^*(X)}$, que por simplicidade denotamos apenas como $c_0^G(\xi) = 1$.

3.1.2 Homologia equivariante

Vamos definir uma sub-ordem $<_*$ em $I(G)$:

Definição 3.1.6. Dados quaisquer $U(= V - S)$ e $U'(= V' - S')$, dizemos que $U <_* U'$ se existe uma representação V_1 de G tal que $V \oplus V_1 = V'$ e $U \oplus V_1 = U'$.

Note que se $U_1 < U_2$, então existe U' tal que $U' <_* U_1$ e $U_2 <_* U'$ (por exemplo, $U' = V_1 \oplus V_2 - S_1 \oplus S_2$).

Observação 3.1.5. $(I(G), <_*)$ é um conjunto direcionado.

Definição 3.1.7. Seja X uma G-variedade complexa n-dimensional. Para cada $U = V - S$ com $dim\, V = l$ e $codim\, S = s$, definimos a homologia truncada

$$H_{trunc}(X \times_G U) := \bigoplus_{2(n-s) < i \leqslant 2n} H_{i+2(l-g)}(X \times_G U).$$

Para cada par $U, U' \in I(G)$ é possível definir um homomorfismo graduado dos grupos de homologia truncados, cujos graus são deslocados por $k = dim\, U' - dim\, U$, denotado por

$$\varphi_{U,U'} : \bigoplus_{2(n-s) < i} H_{i+2(l-g)}(X \times_G U) \to \bigoplus_{2(n-s') < i} H_{i+2(l+k-g)}(X \times_G U),$$

o que nos fornece um sistema direto (ou indutivo) com respeito ao conjunto direcionado $(I(G), <_*)$, ver detalhes em (OHMOTO, 2006, Subseção 2.4).

Definição 3.1.8. Definimos o **i-ésimo grupo de homologia G-equivariante** de X como sendo o limite indutivo

$$H_i^G(X) = \varinjlim_{I(G)} H_{i+2(l-g)}(X \times_G U).$$

Observação 3.1.6. Sendo X uma G-variedade n-dimensional, estes grupos $H_i^G(X)$ são triviais para $i > 2n$ e possivelmente não trivial para qualquer i negativo.

Temos então a soma direta

$$H_*^G(X) = \oplus H_i^G(X) = \varinjlim_{I(G)} H_{trunc}(X \times_G U).$$

Para cada U a aplicação identificação é denotada por

$$\varphi_U : H_{trunc}(X \times_G U) \to H_*^G(X).$$

Definição 3.1.9. Dado um G-morfismo próprio $f : X \to Y$, temos um **homomorfismo induzido em homologia G-equivariante** $f_*^G : H_*^G(X) \to H_*^G(Y)$ definido por

$$f_*^G(\varphi_U(c)) := \varphi_U((f \times_G id)_*(c)),$$

onde $(f \times_G id)_* : H_{trunc}(X \times_G U) \to H_{trunc}(Y \times_G U)$.

Dado $U \in I(G)$ qualquer, a classe fundamental $[X \times_G U]$ tende a um único elemento de $H_{2n}^G(X)$, denotado por $[X]_G$, chamado de **classe fundamental G-equivariante** de X.

Existe então um homomorfismo bem definido

$$\begin{array}{rccc} \frown [X]_G : & H_G^{2n-i}(X) & \to & H_i^G(X) \\ & a & \mapsto & \varphi_U(r_U(a) \frown [X \times_G U]) \end{array}.$$

Observação 3.1.7. Se X é não singular, então $\frown [X]_G$ é isomorfismo para cada i chamado de **Dualidade de Poincaré G-equivariante**. Em particular, quando X é um ponto,

$$H_{-k}^G(pt) \simeq H_G^k(pt) = H^k(BG).$$

Denotamos por $Dual_G$ o inverso da aplicação $\frown [X]_G$ (para cada i). A aplicação composta $r_U \circ Dual_G \circ \varphi_U$ coincide com o Dual de Poincaré de $X \times_G U$ na homologia truncada.

3.1.3 Funções construtíveis equivariantes

Seja X uma G-variedade. O subgrupo de $\mathscr{F}(X)$ que consiste das funções construtíveis G-invariantes é denotado por

$$\mathscr{F}_{G-inv}(X) := \{\alpha \in \mathscr{F}(X) \mid \alpha(g.x) = \alpha(x),\ x \in X,\ g \in G\}.$$

Dado qualquer $U <_* U'$ ($V' = V \oplus V_1$, $U = V - S$, $U' = V' - S'$), seja $p_1 : V' \to V$ a projeção na primeira coordenada. Então p_1 induz um homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \phi_{U,U'} := (p_1)^* : & \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V) & \to & \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V') \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \circ (id \times p_1) \end{array}$$

(podendo também ser denotado por $\phi_{V,V'}$), onde id é a aplicação identidade de X.

Dessa forma, obtemos outro sistema direto $\{\mathscr{F}_{G-inv}(X \times V), \phi_{U,U'}\}_{U,U' \in I(G)}$.

Definição 3.1.10. O **grupo das funções G-equivariantes construtíveis** $\mathscr{F}^G(X)$ é definido como limite indutivo

$$\mathscr{F}^G(X) := \varinjlim_{I(G)} \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V).$$

A aplicação identificação é denotada por

$$\phi_U : \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V) \to \mathscr{F}^G(X).$$

3.1.4 Classe equivariante de Schwartz-MacPherson

Para cada $U = V - S \in I(G)$ não vazio, a inclusão $U \subset V$, que vamos denotar por j_U, induz $j_U^* : \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V) \to \mathscr{F}_{G-inv}(X \times U)$.

Observação 3.1.8. Como G atua livremente em $X \times U$, qualquer subesquema reduzido G-invariante W de X tem um G-fibrado principal $W \to W/G$. Assim, para $\mathbb{1}_W \in \mathscr{F}_{G-inv}(X \times U)$ atribuímos $\mathbb{1}_{W/G} \in \mathscr{F}_{G-inv}(X \times_G U)$, que, na verdade cria um isomorfismo de grupos e deste modo, identificamos $\mathscr{F}_{G-inv}(X \times U) = \mathscr{F}_{G-inv}(X \times_G U)$.

Agora, note que podemos aplicar a transformação (clássica) de MacPherson ao quociente geométrico $X \times_G U$

$$c_* : \mathscr{F}(X \times_G U) \to H_*(X \times_G U).$$

Vamos denotar por TU_G o fibrado vetorial

$$X \times_G TU (= X \times_G (U \oplus V)) \to X \times_G U$$

e sua classe de Chern por $c(TU_G) \in H^*(X \times_G U)$. Ou seja, $c(TU_G) := r_U(c^G(V))$, onde $r_U : H_G^*(X) \to H^*(X \times_G U)$ é a projeção canônica e $c^G(V)$ é a classe de Chern da representação V.

Definição 3.1.11. Combinando as aplicações acima, definimos

$$T_{U,*} := c(TU_G)^{-1} \frown c_* \circ j_U^* : \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V) \to H_*(X \times_G U).$$

Definição 3.1.12. Definimos o homomorfismo limite como

$$c_*^G := \varinjlim T_{U,*} : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}^G(X) & \to & H_*^G(X) \\ \phi_U(\alpha_U) & \mapsto & \varphi_U \circ T_{U,*}(\alpha_U) \end{array},$$

onde $\phi_U : \mathscr{F}_{G-inv}(X \times V) \to \mathscr{F}^G(X)$ e $\varphi_U : H_{trunc}(X \times_G U) \to H_*^G(X)$ são aplicações de identificação.

Teorema 3.1.1. Seja G um grupo algébrico linear redutivo complexo. Para a categoria das G-variedades algébricas complexas e G-morfismos próprios, existe uma transformação natural de funtores covariantes

$$c_*^G : \mathscr{F}^G(X) \to H_*^G(X)$$

tal que se X é não singular, então $c_*^G(\mathbb{1}_X) = c^G(TX) \frown [X]_G$, onde $c^G(TX)$ é a classe G-equivariante de Chern total do fibrado tangente de X. A transformação natural c_*^G é única em certo sentido.

A demonstração pode ser vista em (OHMOTO, 2006, Theorem 1.1).

Definição 3.1.13. A **classe G-equivariante de Schwartz-MacPherson** de uma G-variedade X é definida por

$$c_G^{SM}(X) := c_*^G(\mathbb{1}_X).$$

3.2 Classe equivariante de Mather

Em primeiro lugar, lembremos que existem dois fatores-chave na classe de Chern-MacPherson (clássica), a classe de Mather e a obstrução local de Euler, podemos ver os detalhes em (MACPHERSON, 1974).

A obstrução local de Euler Eu_X de uma variedade X é uma função construtível de X atribuindo a $x \in X$ um invariante local do germe (X,x), sendo definida usando a teoria da obstrução. Ela define um isomorfismo $Eu : Z(X) \to \mathscr{F}(X)$ mandando os ciclos algébricos $\sum n_k W_k$ nas funções construtíveis $\sum n_k Eu_{W_k}$, e c_* é construído de modo que

$$c_*(\sum n_k Eu_{W_k}) = \sum n_k (i_k)_* c^M(W_k),$$

onde c^M é a classe de Mather, $i_k : W_k \to X$ é a aplicação inclusão e $(i_k)_*$ é o homomorfismo induzido nos grupos de homologia (ver (MACPHERSON, 1974, Theorem 2)). Esta relação entre c_*, c_M e Eu pode ser elevada à versão equivariante.

Seja X um G-esquema do tipo finito, separado, reduzido e de equidimensão n e suponha que X está G-mergulhado em alguma G-variedade não singular, digamos M. Similarmente ao caso em que não temos ações envolvidas, temos o blow-up de Nash G-equivariante.

Definição 3.2.1. O **blow-up de Nash G-equivariante** $\widehat{X}$ é definido como o fecho da parte regular X_{reg} na Grassmaniana $Gr_n(TM)$ dos n-planos de TM em que G age naturalmente, e $\nu : \widehat{X} \to X$ a projeção natural, que é um morfismo próprio equivariante.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \longrightarrow & Gr_n(TM) \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & M \end{array}$$

Seja $\widehat{TX}$ o **G-fibrado de Nash** sobre $\widehat{X}$, que é a restrição sobre $\widehat{X}$ do G-fibrado vetorial tautológico da Grassmaniana.

Definição 3.2.2. Definimos a **classe G-equivariante de Mather** de X por

$$c_G^M(X) := \nu_*^G(c^G(\widehat{TX}) \frown [\widehat{X}]_G) \in H_*^G(X).$$

Observação 3.2.1. Segundo Ohmoto (2006, Observação 5.4) pode-se definir a transformação de MacPherson G-equivariante c_*^G por $c_G^M \circ Eu^{-1}$, entretanto esta escolha tornaria as demonstrações mais trabalhosas.

CAPÍTULO

4

CLASSE DE MILNOR

Este capítulo tem como referência o artigo de Parusinski e Pragacz (1998) onde eles apresentam o Teorema 4.1.1 (no artigo original (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998, Teorema 0.2)) que relaciona a classe de Milnor com as classes de Chern e de Schwartz-MacPherson. Este Teorema e a construção do mesmo será nossa motivação para que no capítulo 6 possamos definir uma classe equivariante de Milnor.

4.1 Apresentação do Teorema de Paruzinski-Pragacz

Seja X uma variedade complexa analítica compacta não singular de dimensão pura n e L um fibrado holomorfo de posto 1 sobre X. Tome s uma seção holomorfa de L tal que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X.

Definição 4.1.1. Denotando por TX o fibrado tangente de X, a **classe de Fulton-Johnson de** Z é dada por

$$c^{FJ}(Z) := c(TX|_Z - L|_Z) \frown [Z].$$

Definição 4.1.2. A **classe de Milnor de** Z é dada por

$$\mathscr{M}(Z) := (-1)^{n-1}(c^{FJ}(Z) - c_*(Z)).$$

Observação 4.1.1. A classe de Milnor tem suporte no conjunto singular de Z, ou seja, $\mathscr{M}(Z) = 0$, se $i > dim\,\Sigma(Z)$.

Observação 4.1.2. Suponha que o conjunto singular de Z é finito e igual $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Seja μ_{x_i} o número de Milnor de Z em x_i. Então,

$$\mathscr{M}(Z) = \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i} \in H_0(Z).$$

Considere a função

$$\begin{array}{rccc} \chi: & Z & \to & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & \chi(F_x) \end{array},$$

onde F_x é a fibra de Milnor de x e $\chi(F_x)$ é a característica de Euler de F_x. A partir de χ, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & Z & \to & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & (-1)^{n-1}(\chi - \mathbb{1}_Z)(x) \end{array}.$$

Tome uma estratificação $\mathscr{S} = \{S\}$ de Z tal que μ é constante nos estratos de $\mathscr{S}$, qualquer estratificação de Whitney satisfaz essa propriedade. Assim, se $x, y \in S$, então $\mu(x) = \mu(y)$. Por isso, denotamos por μ_S o valor de μ no estrato S.

Com estes objetos em mãos definimos indutivamente na dimensão descendente de S

$$\alpha(S) := \mu_S - \sum_{S' \neq S,\, S \subset \overline{S'}} \alpha(S').$$

Teorema 4.1.1. Nas condições anteriores, a Classe de Milnor de Z pode ser descrita por

$$\mathscr{M}(Z) = \sum_{S \in \mathscr{S}} \alpha(S) c(L|_Z)^{-1} \frown (i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}),$$

onde $i_{\overline{S},Z} : \overline{S} \to Z$ denota a aplicação inclusão.

4.2 Demonstração do Teorema 4.1.1

Esta demonstração está apresentada em (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998, Seção 5). Relembremos nossas hipóteses. Seja X uma variedade complexa analítica compacta não singular de dimensão pura n e L um fibrado holomorfo de linha sobre X. Tome s uma seção holomorfa de L tal que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X. Adicionalmente, vamos assumir que existe uma seção h tal que $Z' = h^{-1}(0)$ é suave e transversal aos estratos de uma estratificação de Whitney $\mathscr{S} = \{S\}$ de Z.

Para $t \in \mathbb{C}$, denotamos $s_t = s - th$ e $\mathscr{Z}$ irá denotar o seguinte conjunto em $X \times \mathbb{C}$

$$\mathscr{Z} = \{(x,t) \in X \times \mathbb{C} \mid s_t(x) = 0\}.$$

Denotando por $p : \mathscr{Z} \to \mathbb{C}$ a restrição a $\mathscr{Z}$ da projeção de $X \times \mathbb{C}$ na segundo coordenada, temos $p^{-1}(t) = \{(x,t) \in X \times \{t\} \mid s_t(x) = 0\} := Z_t$, para $t \in \mathbb{C}$. Observe que $Z_0 = \{(x,0) \in X \times \{0\} \mid s_t(x) = 0\} \cong \{x \in X \mid s_0(x) = 0\} = s^{-1}(0) = Z$.

Definição 4.2.1. Considere $\mathscr{F}(\mathscr{Z})$ e $\mathscr{F}(Z)$ os grupos das funções construtíveis de $\mathscr{Z}$ e Z, respectivamente. Definimos a **especialização em funções construtíveis**

$$\sigma_F : \mathscr{F}(\mathscr{Z}) \to \mathscr{F}(Z),$$

onde se Y é uma subvariedade fechada de $\mathscr{Z}$, considerando $\mathbb{1}_Y$ como gerador,

$$(\sigma_F \mathbb{1}_Y)(x) := \lim_{t\to 0} \chi(B(x,\varepsilon)\cap Y_t),$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $B(x,\varepsilon)$ é uma bola fechada centrada em x e $Y_t = Y \cap Z_t$.

Na nossa situação, pretendemos calcular $\sigma_F \mathbb{1}_{\mathscr{Z}}$. Mais explicitamente, para $x \in Z$, queremos calcular

$$(\sigma_F \mathbb{1}_{\mathscr{Z}})(x) := \lim_{t\to 0} \chi(B(x,\varepsilon)\cap Z_t).$$

Proposição 4.2.1. Nas condições anteriores, temos

$$(\sigma_F \mathbb{1}_{\mathscr{Z}})(x) = \begin{cases} \chi(x) = 1 + (-1)^{n-1}\mu(x), & \text{se } x \notin Z \cap Z' \\ 1, & \text{se } x \in Z \cap Z' \end{cases}$$

Ver demonstração em (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998, Proposição 5.1).

Agora queremos passar para a aplicação especialização das classes de homologia. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um disco de raio suficientemente pequeno tal que a inclusão $Z \cong Z_0 \subset p^{-1}(D)$ seja uma equivalência de homotopia, assim temos

$$r_* : H_*(p^{-1}(D)) \to H_*(Z),$$

induzido da retração r de $p^{-1}(D)$ em Z. Para um pequeno $t \in D$ diferente de zero, temos também um homomorfismo,

$$i_* : H_*(Z_t) \to H_*(p^{-1}(D)),$$

induzido da inclusão de Z_t em $p^{-1}(D)$.

Definição 4.2.2. A **especialização em homologia** é definida como a composição

$$\sigma_H = r_* \circ i_* : H_*(Z_t) \to H_*(Z).$$

Observação 4.2.1. O homomorfismo especialização em homologia carrega as classes de Chern de Z_t para as classes de Chern de Z, como $\sigma_*([Z_t]) = [Z]$ (ver (VERDIER, 1981, p. 150)), sendo Z_t suave, o homomorfismo especialização em homologia carrega as classes de Schwartz-MacPherson de Z_t para as classes de Schwartz-MacPherson de Z.

Lembre-se agora da **propriedade de especialização de Verdier** das classes de Schwartz-MacPherson ((VERDIER, 1981, Teorema 5.1)), para $\varphi \in F(\mathscr{Z})$ e t suficientemente pequeno, tem-se

$$\sigma_H c_*(\varphi|_{Z_t}) = c_*(\sigma_F \varphi).$$

Vamos utilizar a propriedade de especialização de Verdier para $\varphi = \mathbb{1}_{\mathscr{Z}}$. Para o lado esquerdo lê-se $\sigma_H c_*(Z_t)$. Para o lado direito começamos usando a Proposição 4.2.1

$$\begin{aligned} \sigma_F \mathbb{1}_{\mathscr{Z}} &= \mathbb{1}_Z + (-1)^{n-1}(\mu \cdot \mathbb{1}_{Z \setminus Z \cap Z'}) \\ &= \mathbb{1}_Z + (-1)^{n-1}(\mu \cdot \mathbb{1}_Z - \mu \cdot \mathbb{1}_{Z \cap Z'}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lema 4.2.1. $\mu = \sum_{S \in \mathscr{S}} \alpha(S) \mathbb{1}_{\overline{S}}$.

Demonstração. Seja S_0 um estrato arbitrário e um ponto $x \in S_0$. Então temos

$$\begin{aligned} \Big(\sum_S \alpha(S)\mathbb{1}_{\overline{S}}\Big)(x) &= \sum_{S \neq S_0,\, \overline{S} \supset S_0} \alpha(S) + \alpha(S_0) \\ &= \sum_{S \neq S_0,\, \overline{S} \supset S_0} \alpha(S) + \Big(\mu_{S_0} - \sum_{S \neq S_0,\, \overline{S} \supset S_0} \alpha(S)\Big) \\ &= \mu_{S_0} \\ &= \mu(x). \end{aligned}$$

□

Usando a igualdade o Lema 4.2.1, reescrevemos a equação (4.1) como

$$\sigma_F \mathbb{1}_{\mathscr{Z}} = \mathbb{1}_Z + (-1)^{n-1}(\sum_S \alpha(S)\mathbb{1}_{\overline{S}} - \sum_S \alpha(S)\mathbb{1}_{\overline{S} \cap Z'}),$$

e finalmente aplicando c_* obtemos para o lado direto

$$c_*(\sigma_F \mathbb{1}_{\mathscr{Z}}) = c_*(Z) + (-1)^{n-1}\Big(\sum_S \alpha(S)[(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}) - (i_{\overline{S} \cap Z',Z})_* c_*(\overline{S} \cap Z')]\Big),$$

onde $i_{\overline{S} \cap Z',Z}$ denota a inclusão $\overline{S} \cap Z' \to Z$.

Resumindo, em virtude da propriedade de especialização de Verdier provamos a seguinte proposição.

Proposição 4.2.2. Para $t \neq 0$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\sigma_H c_*(Z_t) = c_*(Z) + (-1)^{n-1}\Big(\sum_{S \in \mathscr{S}} \alpha(S)[(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}) - (i_{\overline{S} \cap Z',Z})_* c_*(\overline{S} \cap Z')]\Big).$$

Observação 4.2.2. Temos $\sigma_H(c^{FJ}(Z_t)) = c^{FJ}(Z)$. De fato, temos

$$c^{FJ}(Z) = c(TX|_Z - L|_Z) \frown [Z] = c(TM|_Z).c(L|_Z)^{-1} \frown [Z]$$

Aplicando a especialização em homologia temos

$$\sigma_H(c^{FJ}(Z_t)) = \sigma_H(c(TM|_{Z_t}).c(L|_{Z_t})^{-1} \frown [Z_t]).$$

Basta aplicarmos a fórmula de projeção

$$\sigma_*(\sigma^*(a) \frown b) = a \frown \sigma_*(b)$$

para $a = c(TM|_Z).c(L|_Z)^{-1}$ e $b = [X_t]$, onde $\sigma^* = r^* \circ i^* : H^*(X) \to H^*(X_t)$ e $\sigma_* = \sigma_H$. Pois, $\sigma_*([Z_t]) = [Z]$ e o homomorfismo especialização em homologia carrega as classes de Chern de $TM|_{X_t}$ e $L|_{X_t}$ para as classes de Chern de $TM|_X$ e $L|_X$, respectivamente, logo

$$\sigma^*(c(TM|_Z).c(L|_Z)^{-1}) = \sigma^*(c(TM|_Z)).\sigma^*(c(L|_Z)^{-1}) = c(TM|_{Z_t}).c(L|_{Z_t})^{-1}.$$

Teorema 4.2.1. $\mathscr{M}(Z) = \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S)[(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}) - (i_{\overline{S}\cap Z',Z})_* c_*(\overline{S}\cap Z')]$.

Demonstração. Observe que para t como na Proposição 4.2.2, temos $c_*(Z_t) = c^{FJ}(Z_t)$, pois Z_t é suave. Além disso, pela Observação 4.2.2, temos $\sigma_H(c^{FJ}(Z_t)) = c^{FJ}(Z)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(Z) &= (-1)^{n-1}(c^{FJ}(Z) - c_*(Z)) \\
&= (-1)^{n-1}(\sigma_H(c^{FJ}(Z_t)) - c_*(Z)) \\
&= (-1)^{n-1}(\sigma_H(c_*(Z_t)) - c_*(Z)) \\
&= \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S)[(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}) - (i_{\overline{S}\cap Z',Z})_* c_*(\overline{S}\cap Z')].
\end{aligned}$$

□

Considere o Lema a seguir que pode ser visto em (YOKURA, 1999, Proposição 1.8) e (PARUSIŃSKI; PRAGACZ, 1995, Proposição 1.3).

Lema 4.2.2. Sejam $\mathscr{X}$ uma estratificação de Whitney de X, E um fibrado vetorial G-equivariante sobre X e Z a variedade dos zeros de uma seção holomorfa equivariante s de E. Assuma que s intersecta, em cada estrato de $\mathscr{X}$, a seção zero de E transversalmente. Dada uma subvariedade fechada Y de X dada por uma união de estratos de $\mathscr{X}$, então

$$i_*^G c_*^G(Y\cap Z) = c^G(E)^{-1}.c^G_{posto\,E}(E) \frown c_*^G(Y).$$

Usando o Lema anterior para as nossas condições, onde $Y = \overline{S}$, $E = L|_{\overline{S}}$ e $i : \overline{S}\cap Z' \hookrightarrow \overline{S}$, temos

$$\begin{aligned}
(i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_*^G(\overline{S}\cap Z') &= (i_{\overline{S},Z})_*^G (i_{\overline{S}\cap Z',\overline{S}})_*^G c_*^G(\overline{S}\cap Z') \\
&= (i_{\overline{S}\cap Z'})_*^G c^G(L|_{\overline{S}})^{-1}.c_1^G(L|_{\overline{S}}) \frown c_*^G(\overline{S}).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(Z) &= \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S)[(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}) - (i_{\overline{S}\cap Z',Z})_* c_*(\overline{S}\cap Z')] \\
&\overset{(4.2)}{=} \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S)[(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}) - (i_{\overline{S}\cap Z'})_* c(L|_{\overline{S}})^{-1}.c_1(L|_{\overline{S}}) \frown c_*(\overline{S})] \\
&= \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S) c(L|_{\overline{S}})^{-1} \frown [(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S})(c(L|_{\overline{S}}) - c_1(L|_{\overline{S}}))] \\
&= \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S) c(L|_{\overline{S}})^{-1} \frown [(i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S})(c_0(L|_{\overline{S}}))] \\
&= \sum_{S\in\mathscr{S}} \alpha(S) c(L|_Z)^{-1} \frown (i_{\overline{S},Z})_* c_*(\overline{S}),
\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração do Teorema 4.1.1.

CAPÍTULO

5

FERRAMENTAS EQUIVARIANTES

Neste capítulo desenvolveremos as ferramentas equivariantes necessárias para as definições apresentadas no capítulo posterior. Para isso, dividiremos em dois casos, apresentados nas próximas duas seções, o caso em que temos singularidades isoladas e o caso em que temos singularidades não isoladas. Para o primeiro caso, apresentado na seção 5.1, utilizaremos como referência o artigo (ROBERTS, 1985).

Aqui, trabalharemos apenas considerando grupo finitos. Para isso, precisamos garantir que estes enquadrem-se nas hipóteses já apresentadas nos artigos do Ohmoto (2006) e de Parusinski e Pragacz (1998) em que estamos nos baseando, ou seja, que estes grupos sejam algébricos lineares redutivos. Com este objetivo apresentamos a proposição a seguir.

Proposição 5.0.1. Todo grupo finito G é um grupo algébrico linear redutivo.

Demonstração. Todo grupo finito G pode ser realizado como um subgrupo de algum $GL(n)$, via

$$G \xhookrightarrow{\text{Rep. Cayley}} Sym_n \xhookrightarrow{\text{Permutação}} GL(n).$$

De fato, o Teorema da Representação de Cayley afirma que todo grupo G é isomorfo a um subgrupo do grupo simétrico agindo em G e como em nosso caso G é finito este subgrupo é isomorfo a um subgrupo finito de $GL(n)$.

Sendo $GL(n)$ é um grupo algébrico redutivo, então seu radical é um toro. Como $G \subset GL(n)$ é finito, e sabendo que o $1_{GL(n)}$ pertence a qualquer subgrupo possível de G, concluímos que o radical de G, que é a componente conexa que contém $1_{GL(n)}$ de um subgrupo de G, é o grupo multiplicativo $\{1_{GL(n)}\} = GL(1) = Gm$.

Portanto, G é um grupo algébrico linear redutivo. $\square$

5.1 Caso singularidades isoladas

O número de Milnor μ de uma função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com ponto crítico isolado pode ser definido como a dimensão da álgebra $\mathscr{E}_n / \mathscr{J}_f$, onde $\mathscr{E}_n$ é a álgebra dos germes de funções holomorfas sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ e $\mathscr{J}_f$ é o ideal gerado pelas derivadas parciais de f. Também é igual ao posto do grupo de homologia médio $H_{n-1}(F_f)$ da fibra de Milnor F_f de f e ao número de pontos críticos em uma aproximação genérica (ou Morse) de f.

Seja G um grupo finito e seja V uma representação n-dimensional complexa de G. Denote o anel dos germes de funções holomorfas sobre $(V, 0)$ por $\mathscr{E}(V)$ e seja $\mathscr{E}_G(V)$ o subanel consistindo de todos os germes G-invariantes, ou seja,

$$\mathscr{E}_G(V) := \{f \in \mathscr{E}(V) \mid f(g.x) = f(x)\}.$$

Os anéis $\mathscr{E}(V)$ e $\mathscr{E}_G(V)$ são anéis locais. Se não houver confusão, V será omitido na notação. Se $f \in \mathscr{E}_G$, então o símbolo f também denotará um representante invariante de f definido em uma vizinhança G-invariante da origem em V.

Teorema 5.1.1. Para qualquer $x \in V(g) := \{x \in V \mid g \cdot x = x\}$ o vetor gradiente $\nabla f(x)$ é fixado por g, e assim $\nabla f|_{V(g)}(x) = \nabla f(x)$. Logo, f tem um ponto crítico em x se e somente se $f|_{V(g)}$ tem um ponto crítico em x.

Ver detalhes em (ROBERTS, 1985, Demonstração do Teorema 1.1).

Para definirmos a característica de Euler equivariante vamos precisar definir o caráter de uma representação de grupo.

Definição 5.1.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de um grupo G em V. O **caráter** de ρ é a função $\mathscr{C}_\rho : G \to K$ dada por

$$\mathscr{C}_\rho(g) = Tr(\rho(g)),$$

onde Tr é a função traço.

Considere $f \in \mathscr{E}_G(V)$ com singularidade isolada e seja F_f a fibra de Milnor de f. A partir da homologia reduzida de F_f, com coeficientes em $\mathbb{C}$, temos $posto(\tilde{H}_p(F_f)) = 0$, para $p \neq n-1$, e $posto(\tilde{H}_{n-1}(F_f)) = \mu$.

A ação de G sobre V induz uma ação sobre F_f, definida por $(g.f)(x) = f(g.x)$, que induz uma ação linear sobre $H_{n-1}(F_f)$, o caráter da representação correspondente será denotado por $\psi(F_f)$, ou simplesmente ψ.

Definição 5.1.2. A **característica de Euler equivariante** de f, denotada por $\chi_G(F_f)$, ou simplesmente χ_G, é a aplicação definida por

$$\chi_G = 1 - (-1)^n \psi.$$

Para cada $g \in G$, a restrição $f|_{V(g)}$ tem singularidade isolada em 0 portanto, possui fibra de Milnor, que é

$$F_f(g) = \{x \in F_f \mid g.x = x\}.$$

Proposição 5.1.1. Considere f com sigularidade isolada, então

$$\chi_G(F_f)(g) = \chi(F_f(g)).$$

Demonstração. Este resultado é mencionado no texto do artigo (ROBERTS, 1985) e aqui apresentaremos uma demostração.

Por uma consequência do Teorema de Lefschetz-Hopf (ver (DOLD, 1980, Exemplo 6.21, p. 212)), temos $\chi(F_f(g)) = \Lambda_{id_{F_f(g)}}$, onde $id_{F_f(g)}$ é a aplicação identidade de $F_f(g)$ e $\Lambda_{id_{F_f(g)}}$ representa os números de Lefschetz.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \chi(F_f(g)) &= \Lambda_{id_{F_f(g)}} \\ &= \sum_{j\geq 0}(-1)^j tr((id_{F_f(g)})_*|_{H_j(F_f(g))}) \\ &= 1 + (-1)^{n-1} tr((id_{F_f(g)})_*|_{H_{n-1}(F_f(g))}). \end{aligned}$$

Agora, considere a ação de G em V obtida pela representação trivial

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,v) & \mapsto & g\cdot v := I(g)(v) = id_V(v) \end{array}.$$

Esta ação induz uma ação sobre $F_f(g) = F_f \cap V(g) \subset V$, que por sua vez induz uma ação sobre $H_{n-1}(F_f(g))$. Logo,

$$\psi(g) = tr((id_{F_f(g)})_*|_{H_{n-1}(F_f(g))}).$$

Portanto,

$$\chi(F_f(g)) = 1 + (-1)^{n-1}\psi(g) = \chi_G(F_f)(g).$$

□

Observação 5.1.1. Pela Proposição 5.1.1, temos

$$\chi_G(F_f)(g) = 1 - (-1)^{dim\, V(g)}\mu(f|_{V(g)}).$$

5.2 Caso singularidades não isoladas

Para o caso de um germe h com singularidades não isoladas, Massey (2006, Teorema 3.3) mostra que fibra de Milnor de h tem uma decomposição em alças, na qual o número de alças atachadas de cada índice são dadas pelos chamados números de Lê, definidos por ele, no índice apropriado. Precisamente, $posto(H_{n-1-k}(F_h)) = \lambda^k(h)$, $k = 0, \cdots, dim\,\Sigma(h)$. Portanto,

$$\chi(F_h) = 1 + \sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(h)} (-1)^{n-1-k} \lambda^k(h). \tag{5.1}$$

Dado $x \in Z$, considere F_x a fibra de Milnor de um germe $f_x \in \mathscr{E}_G(V)$. A ação de G sobre V induz uma ação sobre F_x, definida por $(g.f)(x) = f(g.x)$, que induz uma ação linear sobre $H_{n-1-k}(F_x)$, $k = 0, \cdots, dim\,\Sigma(Z)$, o caráter da representação correspondente será denotado por $\psi_k(F_x)$, ou simplesmente ψ_k.

Definição 5.2.1. A **característica de Euler equivariante** de f_x, denotada por $\chi_G(F_x)$, é a aplicação definida por

$$\chi_G(F_x) = 1 + \sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(Z)} (-1)^{n-1-k} \psi_k.$$

Observação 5.2.1. Note que se Z possui singularidade isolada, então $dim\,\Sigma(Z) = 0$ e f_x tem singularidade isolada, logo a característica de Euler equivariante de f é $\chi_G = 1 + (-1)^{n-1}\psi_0 = 1 - (-1)^n \psi_0$, onde ψ_0 é o caráter da representação correspondente a ação de G em $H_{n-1}(F_x)$.

Proposição 5.2.1. Para o caso de singularidades não isoladas, vale também

$$\chi_G(F_x)(g) = \chi(F_x(g)).$$

Demonstração. Como vimos anteriormente justificado na demonstração da Proposição 5.1.1, pela consequência do Teorema de Lefschetz-Hopf, temos

$$\chi(F_x(g)) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j tr((id_{F_x(g)})_*|_{H_j(F_x(g))}).$$

De mesmo modo, a ação de G em V obtida pela representação trivial induz uma ação sobre $F_x(g) = F_x \cap V(g) \subset V$, que por sua vez induz uma ação sobre $H_{n-1-k}(F_x(g))$, para $k = 0, \cdots, dim\,\Sigma(Z)$. Logo,

$$\psi_k(g) = tr((id_{F_x(g)})_*|_{H_{n-1-k}(F_x(g))}).$$

Portanto,

$$\chi(F_x(g)) = 1 + \sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(Z)} (-1)^{n-1-k} \psi_k(g) = \chi_G(F_x)(g).$$

□

Observação 5.2.2. Aplicando (5.1), segue que

$$\chi(F_x(g)) = 1 + \sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(f_x|_{V(g)})} (-1)^{dim\,V(g)-1-k} \lambda^k(f_x|_{V(g)}).$$

CAPÍTULO

6

CLASSE EQUIVARIANTE DE MILNOR

Neste capítulo, nosso objetivo é definir a classe equivariante de Milnor, que será apresentada na seção 6.4. Esta definição será inspirada pelo Teorema 4.1.1 que foi apresentado por Parusinski e Pragacz (1998). Por esse motivo, nas primeiras três seções deste capítulo estaremos interessados em definir um tipo número de Milnor equivariante, o qual chamaremos de número de Milnor integrado equivariante. A motivação para a escolha do nome deste número é pelo fato de nos basearmos na construção de número de Milnor clássico como apresentada em (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998) e na construção do número de Milnor equivariante apresentada em (ROBERTS, 1985). Os números de Milnor equivariantes foram estudados pela primeira vez por Wall (1980), embora tenham sua origem no trabalho de Arnol'd (1978).

Primeiramente, vamos estabelecer as hipóteses utilizadas no decorrer do capítulo para a definição da classe equivariante de Milnor. Seja G um grupo algébrico linear redutivo complexo e V uma representação n-dimensional de G. Considere X uma G-variedade complexa compacta não singular de dimensão pura n e L um fibrado vetorial G-equivariante holomorfo de posto 1 sobre X. Seja s uma seção holomorfa equivariante de L tal que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X.

Observação 6.0.1. $Z \subset X$ é uma G-variedade. Sendo X uma G-variedade, existe uma ação $\alpha : G \times X \to X$ de G em X que é um morfismo de variedades, basta tomarmos $\alpha|_Z : G \times Z \to Z$ como a ação de G em Z, isto porque se $x \in Z$, que são os zero de s, então $s(g.x) = gs(x) = g.0 = 0$, logo $g.x \in Z$.

É interessante discorrermos um pouco sobre o fato da variedade Z ser definida como zeros de uma seção holomorfa equivariante de um fibrado vetorial G-equivariante. Dada uma seção s do fibrado L, fixando uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X e usando os difeomorfismos $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ (trivializações locais), podemos escrever

$$\phi_\alpha(s(x)) = (x, s_\alpha(x)), \text{ para } x \in U_\alpha,$$

onde s_α é uma aplicação de U_α em $\mathbb{C}$ (ver detalhes em (SUWA, 1998, p.28)).

Logo, podemos considerar $Z \cap U_\alpha$ como os zeros de s_α. Sendo U_α um aberto de X, que é uma G-variedade complexa compacta não singular de dimensão pura n, U_α pode ser visto como um abeto de $\mathbb{C}^n$, que por sua vez é isomorfo a um subespaço do espaço vetorial complexo n-dimensional V.

Dessa forma, s_α será visto como um elemento de $\mathscr{E}(V)$. Sendo a seção s e as trivializações ϕ_α equivariantes, temos

$$g \cdot \phi_\alpha^{-1}(x, s_\alpha(x)) = g \cdot s(x) = s(gx) = \phi_\alpha^{-1}(g \cdot x, s_\alpha(g \cdot x)) = g \cdot \phi_\alpha^{-1}(x, s_\alpha(g \cdot x)),$$

então $s_\alpha(g \cdot x) = s_\alpha(x)$, portanto $s_\alpha \in \mathscr{E}_G(V)$.

Definição 6.0.1. Dado $x \in Z$, existe uma vizinhança U_α de X com $x \in U_\alpha$ e um germe $s_\alpha \in \mathscr{E}_G(V)$. Os k-ésimos números de Lê (respectivamente, número de Milnor) de x em Z são definidos por $\lambda^k(Z, x) := \lambda^k(s_\alpha, x)$ (respectivamente, $\mu(Z, x) := \mu(s_\alpha, x)$).

Note que estes números estão bem definidos, pois tomando uma vizinhança U_β tal que $x \in U_\beta$, basta definirmos uma nova vizinhança $U = U_\alpha \cap U_\beta$ e teremos $s_\alpha|_U \cong s_\beta|_U$.

Proposição 6.0.1. Para cada k, $\lambda^k(Z, x) = \lambda^k(Z, y)$, $\forall x, y \in S$, onde $\mathscr{S} = \{S\}$ é uma estratificação de Whitney de Z. Em particular, isto vale para os números de Milnor.

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ a cobertura aberta de X. Considere Λ' o subconjunto dos índices α tal que $U_\alpha \cap S \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in \Lambda'$, logo $S \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda'} U\alpha$.

Fixe $\beta \in \Lambda'$. Suponha que $U_\beta \cap U_\alpha = \emptyset$, $\forall \alpha \in \Lambda'$. Absurdo, pois poderíamos escrever

$$S = (U_\beta \cap S) \cup (\bigcup_{\alpha \neq \beta,\, \alpha \in \Lambda'} U_\alpha \cap S),$$

mas S é conexo. Portanto, existe $\eta \in \Lambda'$ tal que $U_\beta \cap U_\eta \neq \emptyset$.

Agora, note que em $U_\beta \cup U_\eta$, os k-ésimos números de Lê são constantes em S. De fato, por (MASSEY, 2006, Teorema 10.19), temos $\lambda^k(f_\beta, x) = \lambda^k(f_\beta, y)$, se $x, y \in U_\beta \cap S$. Se $y \in U_\beta \cap U_\eta$, então $\lambda^k(f_\beta, y) = \lambda^k(f_\eta, y)$ por definição. Novamente por (MASSEY, 2006, Teorema 10.19), temos $\lambda^k(f_\eta, y) = \lambda^k(f_\eta, w)$, se $y, w \in U_\eta \cap S$.

Suponha agora que $(U_\beta \cup U_\eta) \cap U_\alpha = \emptyset$, $\forall \alpha \in \Lambda'$. Novamente teremos um absurdo, pois poderíamos escrever

$$S = ((U_\beta \cup U_\eta) \cap S) \cup (\bigcup_{\alpha \neq \beta \text{ e } \eta,\, \alpha \in \Lambda'} U_\alpha \cap S),$$

mas S é conexo. Portanto, existe $\sigma \in \Lambda'$ tal que $(U_\beta \cup U_\eta) \cap U_\sigma \neq \emptyset$.

Com argumento análogo ao usado anteriormente, garantimos que em $U_\beta \cup U_\eta \cup U_\sigma$ os k-ésimos números de Lê são constantes em S.

Como X é compacto e então a cobertura é finita, a subcobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$ também é. E assim, garantimos que em $S \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} U\alpha$ os k-ésimos números de Lê são constantes. □

Para definir o número de Milnor integrado equivariante vamos dividir em três casos, apresentados nas próximas seções. Nas seções 6.1 e 6.2 pedimos que G seja um grupo finito, como visto na Proposição 5.0.1, este tipo de grupo satisfaz nossas hipóteses, a diferença entre essas seções é que primeiro trabalhamos com a possibilidade da hipersuperfície Z ter singularidades isoladas e depois de Z ter singularidades não isoladas. Na seção 6.3 trabalhamos com G um grupo algébrico linear redutivo complexo infinito.

6.1 Grupos finitos, singularidades isoladas

Seja G um grupo finito e considere que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X com singularidades isoladas.

Considere a função

$$\begin{array}{rccc} \chi_G: & Z & \to & \mathscr{L} \\ & x & \mapsto & \chi_G(F_x) \end{array},$$

onde F_x é a fibra de Milnor em x e $\chi_G(F_x)$ é a aplicação característica de Euler equivariante de F_x, e a partir de χ_G, defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu^G: & Z & \to & \mathscr{L} \\ & x & \mapsto & \mu^G(x) = (-1)^{n-1}(\chi_G - \mathbb{1}_Z)(x) \end{array}$$

Para cada $x \in Z$, vimos que existe uma vizinhança U e um germe $f_x \in \mathscr{E}_G(V)$ tal que $Z \cap U \cong f_x^{-1}(0)$. Deste modo, x pode ser visto em $V(g)$ e $x \in F_x(g) = \{y \in F_x | g.y = y\}$, $\forall g \in G$. Assim, utilizando a Proposição 5.1.1 e a Observação 5.1.1, temos

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G} \mu^G(x)(g) &= \sum_{g\in G} (-1)^{n-1}(\chi_G(F_x)(g) - \mathbb{1}_Z(x)) \\ &= \sum_{g\in G} (-1)^{n-1}(\chi(F_x(g)) - 1) \\ &= \sum_{g\in G} (-1)^{n-1}(1 - (-1)^{dimV(g)}\mu(f_x|_{V(g)}) - 1) \\ &= \sum_{g\in G} (-1)^{n-1}((-1)^{dimV(g)+1}\mu(f_x|_{V(g)})) \\ &= \sum_{g\in G} (-1)^{n+dimV(g)}\mu(f_x|_{V(g)}) \\ &= \sum_{g\in G} (-1)^{n-dimV(g)}\mu(f_x|_{V(g)}). \end{aligned}$$

Definição 6.1.1. Para cada $x \in Z$, defina

$$\mu_I^G(x) = \sum_{g\in G} \mu^G(x)(g) = \sum_{g\in G} (-1)^{n-dimV(g)}\mu(f_x|_{V(g)}) \in \mathbb{Z},$$

que chamaremos de **número de Milnor integrado equivariante**.

Observação 6.1.1. É possível estabelecer uma relação entre o número de Milnor integrado equivariante e o número de Milnor equivariante apresentado em (ROBERTS, 1985), que aqui denotaremos por $\mu_R^G(g)$. Observando (ROBERTS, 1985, Corolário 2.2) e a definição anterior, temos

$$\mu_I^G(x) = \sum_{g \in G} det(g)\mu_R(g),$$

onde $det(g)$ é o determinante de uma matriz que representa a ação de $g \in G$ em V.

Proposição 6.1.1. Se x é regular, então $\mu_I^G(x) = 0$.

Demonstração. Seja $x \in Z$ ponto regular, então temos que $\nabla f_x(x) \neq 0$. Assim, pelo Teorema 5.1.1 segue que $\nabla f_x|_{V(g)}(x) \neq 0$ e, portanto $\mu(f_x|_{V(g)}) = 0, \forall g \in G$. □

Proposição 6.1.2. Para toda estratificação de Whitney $\mathscr{S} = \{S\}$ de Z temos que μ_I^G é constante nos estratos de $\mathscr{S}$.

Demonstração. Considere $\mathscr{S} = \{S_0, \ldots, S_k\}$ a estratificação de Whitney minimal, dada por $S_0 = Z - \Sigma(Z)$ e $S_i = \{x_i\}, i = 1, \ldots k$, onde x_i são as singularidades de Z. Como para $i = 1, \ldots k$, S_i possui um único ponto e assim a constância já é válida, basta analisarmos S_0. Dado $x \in S_0$, como x é regular, segue da observação anterior que $\mu_I^G(x) = 0$. Como as demais estratificações de Whitney de Z só podem se diferenciar da minimal pela modificação do estrato da parte regular e nesses possíveis novos estratos temos que $\mu_I^G(x) = 0$, então mantém-se o resultado. □

6.2 Grupos finitos, singularidades não isoladas

Seja G um grupo finito e considere que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X com singularidades não isoladas.

Da mesma maneira em que foi feita no caso de singularidades isoladas, consideramos a função

$$\begin{array}{rccc} \chi_G: & Z & \rightarrow & \mathscr{L} \\ & x & \mapsto & \chi_G(F_x) \end{array},$$

onde F_x é a fibra de Milnor de x e $\chi_G(F_x)$ é a aplicação característica de Euler equivariante de F_x, e a partir de χ_G, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu^G: & Z & \rightarrow & \mathscr{L} \\ & x & \mapsto & \mu^G(x) = (-1)^{n-1}(\chi_G - \mathbb{1}_Z)(x) \end{array}.$$

Utilizando a Proposição 5.2.1 e a Observação 5.2.2, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G}\mu^G(x)(g) &= \sum_{g\in G}(-1)^{n-1}(\chi_G(F_x)(g)-\mathbb{1}_Z(x))\\
&= \sum_{g\in G}(-1)^{n-1}(\chi(F_x(g))-1)\\
&= \sum_{g\in G}(-1)^{n-1}(1+\sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(f_x|_{V(g)})}(-1)^{dim\,V(g)-1-k}\lambda^k(f_x|_{V(g)})-1)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(f_x|_{V(g)})}(-1)^{n-1}(-1)^{dim\,V(g)-1-k}\lambda^k(f_x|_{V(g)})\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(f_x|_{V(g)})}(-1)^{n-dim\,V(g)-k}\lambda^k(f_x|_{V(g)}).
\end{aligned}$$

Definição 6.2.1. Para cada $x\in Z$, defina

$$\mu_I^G(x)=\sum_{g\in G}\mu^G(x)(g)=\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{dim\,\Sigma(f_x|_{V(g)})}(-1)^{n-dim\,V(g)-k}\lambda^k(f_x|_{V(g)})$$

que chamaremos de **número de Milnor integrado equivariante**.

Observação 6.2.1. Note que o número de Milnor integrado equivariante definido aqui, quando Z possui singularidades não isoladas é uma generalização do número de Milnor integrado equivariante definido na seção anterior. De fato, como visto na Observação 5.2.1 segue que se Z possui singularidade isolada temos $dim\,\Sigma(Z)=0$, logo o único número de Lê possível é $\lambda^0(f_x|_{V(g)})=posto(H_{n-1}(F_x(g)))$. Portanto,

$$\mu_I^G(x)=\sum_{g\in G}(-1)^{n-dim\,V(g)}posto(H_{n-1}(F_x(g)))=\sum_{g\in G}(-1)^{n-dimV(g)}\mu(f_x|_{V(g)}).$$

Proposição 6.2.1. Se x é regular, então $\mu_I^G(x)=0$.

Demonstração. Seja $x\in Z$ ponto regular, então temos que $\nabla f_x(x)\neq 0$. Assim, pelo Teorema 5.1.1 segue que $\nabla f_x|_{V(g)}(x)\neq 0$, portanto $\lambda^k(f_x|_{V(g)})=0,\forall g\in G$. □

Proposição 6.2.2. Para toda estratificação de Whitney $\mathscr{S}=\{S\}$ de Z temos que μ_I^G é constante nos estratos de $\mathscr{S}$.

Demonstração. Considere $\mathscr{S}$ uma estratificação de Whitney de Z. Note que um estrato S não pode ter pontos regulares e singulares de Z simultaneamente. De fato, se $x_1,x_2\in S$ com x_1 regular de Z e x_2 singular de Z, temos $\lambda^k(f_{x_1})=0$ e $\lambda^k(f_{x_2})\neq 0$, $\forall k$, mas os números de Lê são constantes em S.

Para um estrato S_i somente com pontos regulares de Z, pela Proposição 6.2, teremos que $\mu_I^G(x)=0$, $\forall x\in S_i$, portanto μ_I^G é constante neste estrato.

Agora, considere um estrato S_j somente com pontos singulares de Z. Seja $x_1,x_2\in S_j$, pela constância dos números de Lê em S_j, temos $\lambda^k(f_{x_1})=\lambda^k(f_{x_2})$, $\forall k$. Pelo Teorema 5.1.1 segue que $\lambda^k(f_{x_1}|_{V(g)})=\lambda^k(f_{x_2}|_{V(g)})$, $\forall k$, portanto μ_I^G é constante neste estrato. □

6.3 Grupos infinitos

Nosso objetivo nesta seção é definir o número de Milnor integrado equivariante para o caso em que temos um grupo algébrico linear redutivo complexo G infinito. Sabemos da Observação 2.3.2 que dado um grupo algébrico do tipo finito, o grupo componente G/G^0 é um grupo finito. Este fato nos motiva a próxima definição.

Definição 6.3.1. Seja G um grupo algébrico linear redutivo complexo infinito. Considere X uma G-variedade complexa compacta não singular de dimensão pura n e L um fibrado vetorial G-equivariante holomorfo de posto 1 sobre X. Dada s uma seção holomorfa equivariante de L tal que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X. Para cada $x \in Z$, definimos o **número de Milnor integrado equivariante** por

$$\mu_I^G(x) := \mu_I^{G/G^0}(x),$$

onde o número de Milnor integrado equivariante que aparece do lado direito da equação é o número apresentado nas seções anteriores.

Observação 6.3.1. Note que definindo μ_I^G deste modo para os grupo algébricos afins infinitos, as propriedades apresentadas nas seções anteriores de $\mu_I^G(x) = 0$ para pontos regulares de Z e constância na estratificação de Z mantêm-se válidas neste caso.

Observação 6.3.2. Note ainda que como os elementos de G/G^0 são apenas as componentes conexas de G, se G é um grupo finito, então $G/G^0 \cong G$, portanto, a definição apresentada nesta seção torna-se uma generalização das definições apresentadas anteriormente para o número de Milnor integrado equivariante.

6.4 Definição da classe equivariante de Milnor

Seja G um grupo finito ou um grupo algébrico linear redutivo complexo. Considere X uma G-variedade complexa compacta não singular de dimensão pura n e L um fibrado vetorial G-equivariante holomorfo de posto 1 sobre X. Dada s uma seção holomorfa equivariante de L tal que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X, o nosso objetivo agora é definir a classe equivariante de Milnor de Z.

Seja $\mathscr{S}$ uma estratificação de Whitney de Z. Como μ_I^G é constante nos estratos de $\mathscr{S}$, denotamos por $\mu_{I,S}^G$ o valor de μ_I^G no estrato S. Com estes objetos em mãos podemos definir indutivamente na dimensão descendente de S

$$\alpha_G(S) := \mu_{I,S}^G - \sum_{S' \neq S,\, S \subset \overline{S'}} \alpha_G(S').$$

Observação 6.4.1. $L|_Z$ é um fibrado vetorial G-equivariante. De fato, como L é um fibrado vetorial G-equivariante sobre X, então L é uma G-variedade, π é um morfismo G-equivariante e a ação de G em L preserva as fibras linearmente. A partir deste fibrado, construímos o fibrado restrição $L|_Z$, que tem como espaço total $\pi^{-1}(Z)$ e projeção $\pi|_{\pi^{-1}(Z)} : \pi^{-1}(Z) \to \bar{X}$. A subvariedade $\pi^{-1}(Z) \subset L$ é uma G-variedade, argumento análogo à Observação 6.0.1, visto que π é equivariante, $\pi|_{\pi^{-1}(Z)}$ é ainda um morfismo G-equivariante e a ação de G em $L|_Z$ preserva as fibras linearmente.

Definição 6.4.1. A **classe G-equivariante de Milnor** de Z é dada por

$$\mathscr{M}_G(Z) := \frac{1}{|G|} \sum_{S \in \mathscr{S}} \alpha_G(S) c^G(L|_Z)^{-1} \frown (i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}),$$

se G é um grupo finito e

$$\mathscr{M}_G(Z) := \mathscr{M}_{G/G^0}(Z)$$

se G é um grupo algébrico linear redutivo infinito, onde $i_{\overline{S},Z} : \overline{S} \to Z$ denota a aplicação inclusão, $c^G(L|_Z)$ a classe equivariante de Chern de $L|_Z$ e $c_G^{SM}(\overline{S})$ a classe equivariante de Schwartz-MacPherson de $\overline{S}$.

Com argumento análogo ao da observação 6.0.1, note que $\overline{S}$ também é G-variedade.

Observação 6.4.2. Como as classes equivariantes de Chern e de Schwartz-MacPherson de Z independem da escolha de uma estratificação de Z, então a classe equivariante de Milnor acima definida também independe da escolha da estratificação de Whitney de Z (ver (BRASSELET, 2002) e (OHMOTO, 2006)).

Teorema 6.4.1. $\mathscr{M}_G(Z)$ tem suporte no conjunto singular de Z, ou seja, $\mathscr{M}_{G,i}(Z) = 0$, se $i > dim\, \Sigma(Z)$.

Demonstração. $\mathscr{M}_G(Z)$ tem suporte no $\Sigma(Z)$. De fato, temos que

$$\mathscr{M}_G(Z) = \frac{1}{|G|} \sum_{S \in \mathscr{S}} \alpha_G(S) c^G(L|_Z)^{-1} \frown (i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}),$$

onde $\alpha_G(S) := \mu_{I,S}^G - \sum_{S' \neq S,\, S \subset \overline{S'}} \alpha_G(S')$.

Vamos dividir a demonstração em dois casos, o caso em que Z possui singularidades isoladas e o caso em que Z possui singularidades não isoladas.

Para o caso em que Z possui singularidades isoladas, usando a Proposição 6.1.2 temos que μ_I^G é constante nos estratos de $\mathscr{S}$. E pela Proposição 6.1 sabemos que $\mu_{I,S}^G = 0$, se S possui um ponto regular de Z.

Seja S um estrato que possui um ponto regular de Z, temos então que $\mu_{I,S}^G = 0$. Agora, snedo S um estrato de pontos regulares, se $S \subset \overline{S'}$, segue que $S = S'$, portanto $\alpha_G(S) = \mu_{I,S}^G - \sum_{S' \neq S,\, S \subset \overline{S'}} \alpha_G(S') = 0$ para todo estrato que possui ponto regular de Z.

Daí

$$\mathscr{M}_G(Z) = \frac{1}{|G|} \sum_{S \subset \Sigma(Z)} \alpha_G(S) c^G(L|_Z)^{-1} \frown (i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}).$$

Como $dim\,\overline{S} \leq dim\,\Sigma(Z)$, então $c_{G,j}^{SM}(\overline{S}) = 0$ se $j > dim\,\Sigma(Z)$. Pela definição de produto cap, note que em $\mathscr{M}_{G,i}(Z)$, os graus das cadeias da classe de Schwartz-MacPherson equivariante que aparecem no produto são $j = i + l$, portanto $j > i$. Se $i > dim\,\Sigma(Z)$, então $j > dim\,\Sigma(Z)$, logo $c_{G,j}^{SM}(\overline{S}) = 0$ e concluímos $\mathscr{M}_{G,i}(Z) = 0$.

A demonstração para o caso em que Z possui singularidades não isoladas é análoga à feita anteriormente, com a diferença de que agora usamos as Proposições 6.2.2 e 6.2, já que para o caso de singularidades não isoladas fazemos o uso dos números de Lê. □

Teorema 6.4.2. Se Z possui singularidades isoladas $x_1, \cdots, x_k$, então

$$\mathscr{M}_{G,0}(Z) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \mu_I^G(x_i).$$

Demonstração. Considere $\mathscr{S}$ a estratificação de Whitney minimal de Z.

Sabemos que

$$\mathscr{M}_{G,0}(Z) = \frac{1}{|G|} \sum_{S \subset \Sigma(Z)} \alpha_G(S) c^G(L|_Z)^{-1} \frown (i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}),$$

onde $\alpha_G(S) := \mu_{I,S}^G - \sum_{S' \neq S,\, S \subset \overline{S'}} \alpha_G(S')$.

Temos $\alpha_G(S_0) = 0$, pois $Z - \Sigma(Z)$ é suave, e $\alpha_G(S_i) = \mu_I^G(x_i)$, $i = 1, \ldots k$. Como $dim\,\overline{S_i} = 0$, então $c_{G,l}^{SM}(\overline{S_i}) = 0$ se $l > 0$. Logo, as únicas cadeias que aparecerão no produto cap serão $c_0^G(L|_Z)^{-1} = 1$ e $c_{G,0}^{SM}(\overline{S}) = 1$, portanto segue

$$\mathscr{M}_{G,0}(Z) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \mu_I^G(x_i).$$

□

CAPÍTULO

7

CLASSE EQUIVARIANTE DE FULTON-JOHNSON

Neste capítulo trabalharemos com as mesmas hipóteses apresentadas no capítulo anterior. Para que não seja repetitivo no decorrer dos resultados apresentados neste capítulo a descrição destas hipóteses, vamos estabelece-las aqui e referencia-las sempre que necessário:

Hipóteses 7.0.1. Seja G um grupo finito ou um grupo algébrico linear redutivo complexo e seja V uma representação n-dimensional complexa de G. Considere X uma G-variedade complexa compacta não singular de dimensão pura n e L um fibrado vetorial G-equivariante holomorfo de posto 1 sobre X. Dada s uma seção holomorfa equivariante de L tal que a variedade Z dos zeros de s é uma hipersuperfície em X com singularidades isoladas.

Definição 7.0.1. Definimos a **classe G-equivariante de Fulton-Johnson** de Z por

$$c_G^{FJ}(Z) = (-1)^{n-1}\mathscr{M}_G(Z) + c_G^{SM}(Z),$$

onde $\mathscr{M}(Z)$ é a classe equivariante de Milnor de Z e $c_G^{SM}(Z)$ é a classe equivariante de Schwartz-MacPherson de Z.

7.1 Relação entre classes equivariantes via especialização

A construção apresentada a seguir está baseada na construção feita por Parusinski e Pragacz (1998) e apresentada na seção 4.2. Considere h uma seção equivariante de L tal que $Z' = h^{-1}(0)$ é suave e transversal aos estratos de uma estratificação $\mathscr{S}$ de Z. Para cada $t \in \mathbb{C}$, denotamos $s_t = s - th$. Como no caso original, denotamos

$$\mathscr{Z} = \{(x,t) \in X \times \mathbb{C} \mid s_t(x) = 0\}$$

e $p : \mathscr{Z} \to \mathbb{C}$ a restrição da projeção de $X \times \mathbb{C}$ na segunda coordenada à $\mathscr{Z}$, temos

$$p^{-1}(t) = \{(x,t) \in X \times \{t\} \mid s_t(x) = 0\} := Z_t,$$

para $t \in \mathbb{C}$. Observe que $Z_0 = \{(x,0) \in X \times \{0\} \mid s_t(x) = 0\} \cong \{x \in X \mid s_0(x) = 0\} = s^{-1}(0) = Z$ e note que para $t \neq 0$, como $h^{-1}(0)$ é suave e transversal aos estratos de Z, então Z_t é suave.

Definição 7.1.1. Considere $\mathscr{F}^G(\mathscr{Z})$ e $\mathscr{F}^G(Z)$ os grupos das funções equivariantes construtíveis de $\mathscr{Z}$ e Z, respectivamente. Definimos a **especialização equivariante em funções construtíveis**

$$\sigma_F^G : \mathscr{F}^G(\mathscr{Z}) \to \mathscr{F}^G(Z),$$

onde se Y é uma subvariedade fechada de $\mathscr{Z}$, considerando $\mathbb{1}_Y$ como gerador,

$$(\sigma_F^G \mathbb{1}_Y)(x) := \lim_{t \to 0} \sum_{g \in G} \chi_G(B(x,\varepsilon) \cap Y_t)(g),$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $B(x,\varepsilon)$ é uma bola fechada centrada em x e $Y_t = Y \cap Z_t$. Note que $B(x,\varepsilon) \cap Y_t = B(x,\varepsilon) \cap Y \cap Z_t = B(x,\varepsilon) \cap Y \cap p^{-1}(t)$ é uma fibra de $p|_Y : Y \to \mathbb{C}$, logo $\chi_G(B(x,\varepsilon) \cap Y_t)$ está bem definida.

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um disco de raio suficientemente pequeno tal que a inclusão $Z \cong Z_0 \subset p^{-1}(D)$ seja uma equivalência de homotopia, assim temos

$$r_*^G : H_*^G(p^{-1}(D)) \to H_*^G(Z),$$

induzido da retração r de $p^{-1}(D)$ em Z. Para um pequeno $t \in D$ diferente de zero, temos também um homomorfismo,

$$i_*^G : H_*^G(Z_t) \to H_*^G(p^{-1}(D)),$$

induzido da inclusão de Z_t em $p^{-1}(D)$.

Definição 7.1.2. A **especialização equivariante em homologia** é definida como a composição

$$\sigma_H^G := r_*^G \circ i_*^G : H_*^G(Z_t) \to H_*^G(Z).$$

Observação 7.1.1. Como no caso clássico, o homomorfismo especialização equivariante em homologia carrega as classes de Schwartz-MacPherson de Z_t para as classes de Schwartz-MacPherson de Z, já que as classes equivariantes são definidas fazendo uso das classes clássicas, que são carregadas como visto na Observação 4.2.1.

O objetivo do próximo teorema será estabelecer uma versão equivariante para a propriedade de especialização de Verdier. Primeiramente, vamos estabelecer algumas relações úteis para sua demonstração.

Denote $c_{U,*} = c(TU_G)^{-1} \frown c_*$ e observe que $c_{U,*}(\mathbb{1}_{\mathscr{Z} \times_G U}) = c(TU_G)^{-1} \frown c_*(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}})$. Utilizando a propriedade de especialização de Verdier, $\sigma_H c_*(\varphi|_{Z_t}) = c_*(\sigma_F \varphi)$, para $\varphi = \mathbb{1}_{\mathscr{Z} \times_G U}$, obtemos

$$\sigma_H(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t \times_G U})) = c_{U,*}(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z} \times_G U})). \tag{7.1}$$

Fazendo o uso da especialização equivariante em funções construtíveis e do homomorfismo especialização clássico para $\mathscr{F}(\mathscr{Z}\times V)$, ou seja, $\sigma_F:\mathscr{F}(\mathscr{Z}\times V)\to\mathscr{F}(Z\times V)$, onde $\tilde{p}:\mathscr{Z}\times V\to\mathbb{C}$ é a restrição a $\mathscr{Z}\times V$ da projeção de $X\times\mathbb{C}\times V$ para $\mathbb{C}$ e $\tilde{p}^{-1}(t)=Z_t\times V$, obtemos a seguinte relação

$$\sigma_F^G(\phi_{U,\mathscr{Z}}(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V}))=\phi_{U,Z}(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V})),\tag{7.2}$$

com $\phi_{U,\mathscr{Z}}:\mathscr{F}_{G-inv}(\mathscr{Z}\times V)\to\mathscr{F}^G(\mathscr{Z})$ e $\phi_{U,Z}:\mathscr{F}_{G-inv}(Z\times V)\to\mathscr{F}^G(Z)$ denotando as aplicações identificação. De fato,

$$\begin{aligned}\sigma_F^G(\phi_{U,\mathscr{Z}}(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V})) &= \sigma_F^G(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}})\\ &= \mathbb{1}_Z.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\phi_{U,Z}(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V})) &= \phi_{U,Z}(\mathbb{1}_{Z\times V})\\ &= \mathbb{1}_Z.\end{aligned}$$

Agora, usaremos a especialização equivariante em homologia e especialização clássica para a homologia truncada, ou seja, $\sigma_H:H_{trunc}(Z_t\times_G U)\to H_{trunc}(Z\times_G U)$, definida da seguinte forma. Considere $\tilde{p}:\mathscr{Z}\times_G U\to\mathbb{C}$ a restrição a $\mathscr{Z}\times_G U$ da projeção de $X\times_G U\times\mathbb{C}$ para $\mathbb{C}$ e seja D um disco de raio suficientemente pequeno, de modo que $Z\times_G U\cong Z_0\times_G U\subset\tilde{p}^{-1}(D)$ seja uma equivalência de homotopia. Para $t\in D$, temos dois homomorfismos induzidos da retração e inclusão, respectivamente, $r_{trunc}:H_{trunc}(\tilde{p}^{-1}(D))\to H_{trunc}(Z\times_G U)$ e $i_{trunc}:H_{trunc}(Z_t\times_G U)\to H_{trunc}(\tilde{p}^{-1}(D))$, que define $\sigma_H:=r_{trunc}\circ i_{trunc}$. Então, temos a seguinte relação

$$\sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U})))=\varphi_{U,Z}(\sigma_H(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U}))),\tag{7.3}$$

com $\varphi_{U,Z_t}:H_{trunc}(Z_t\times_G U)\to H_*^G(Z_t)$ e $\varphi_{U,Z}:H_{trunc}(Z\times_G U)\to H_*^G(Z)$ denotando as aplicações identificação. De fato,

$$\begin{aligned}\sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U}))) &= \sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U})))\\ &= \sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*\circ j_U^*(\mathbb{1}_{Z_t\times V})))\\ &= \sigma_H^G(c_*^G(\mathbb{1}_{Z_t}))\\ &= c_*^G(\mathbb{1}_Z).\end{aligned}$$

E, ainda

$$\begin{aligned}\varphi_{U,Z}(\sigma_H(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U}))) &= \varphi_{U,Z}(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z\times_G U}))\\ &= \varphi_{U,Z}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*(\mathbb{1}_{Z\times_G U}))\\ &= \varphi_{U,Z}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*\circ j_U^*(\mathbb{1}_{Z\times V}))\\ &= c_*^G(\mathbb{1}_Z).\end{aligned}$$

Agora, note que considerando novamente o homomorfismo especialização clássico para $\mathscr{F}(\mathscr{Z}\times V)$, ou seja, $\sigma_F:\mathscr{F}(\mathscr{Z}\times V)\to\mathscr{F}(Z\times V)$, onde $\tilde{p}:\mathscr{Z}\times V\to\mathbb{C}$ é a restrição a : $\mathscr{Z}\times V$ da projeção de $X\times\mathbb{C}\times V$ para $\mathbb{C}$ e $\tilde{p}^{-1}(t):=Z_t\times V$, temos também

$$j_U^*(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V}))=\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times_G U}),\tag{7.4}$$

onde $j_U^* : \mathscr{F}_{G-inv}(\mathscr{Z} \times V) \to \mathscr{F}_{G-inv}(\mathscr{Z} \times_G U)$. Pois,

$$\begin{aligned} j_U^*(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V})) &= j_U^*(\lim_{t\to 0}\chi(B(x,\varepsilon)\cap(Z_t \times V))) \\ &= \lim_{t\to 0} j_U^*(\chi(B(x,\varepsilon)\cap(Z_t\times V))) \\ &= \lim_{t\to 0}\chi(B(x,\varepsilon)\cap(Z_t\times_G U)) \\ &= \sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times_G U}). \end{aligned}$$

Com as relações estabelecidas acima, podemos demonstrar o teorema a seguir, que fornece a versão equivariante da propriedade de especialização de Verdier.

Teorema 7.1.1. Nas condições impostas pelas pelo conjunto de hipóteses 7.0.1 e considerando σ_H^G e σ_F^G as especializações equivariantes em homologia e em funções construtíveis, respectivamente, temos

$$\sigma_H^G(c_*^G(\mathbb{1}_{Z_t})) = c_*^G(\sigma_F^G(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}})).$$

Demonstração. Por um lado temos,

$$\begin{aligned} \sigma_H^G(c_*^G(\mathbb{1}_{Z_t})) &= \sigma_H^G(c_*^G(\phi_{U,Z_t}(\mathbb{1}_{Z_t\times V}))) \\ &= \sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*\circ j_U^*(\mathbb{1}_{Z_t\times V}))) \\ &= \sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U}))) \\ &= \sigma_H^G(\varphi_{U,Z_t}(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U}))) \\ &\overset{(7.3)}{=} \varphi_{U,Z}(\sigma_H(c_{U,*}(\mathbb{1}_{Z_t\times_G U}))) \\ &\overset{(7.1)}{=} \varphi_{U,Z}(c_{U,*}(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times_G U}))). \end{aligned}$$

Já pelo lado direito temos,

$$\begin{aligned} c_*^G(\sigma_F^G(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}})) &= c_*^G(\sigma_F^G(\phi_{U,\mathscr{Z}}(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V}))) \\ &\overset{(7.2)}{=} c_*^G(\phi_{U,Z}(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V}))) \\ &= \varphi_{U,Z}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*\circ j_U^*(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times V}))) \\ &\overset{(7.4)}{=} \varphi_{U,Z}(c(TU_G)^{-1}\frown c_*(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times_G U}))) \\ &= \varphi_{U,Z}(c_{U,*}(\sigma_F(\mathbb{1}_{\mathscr{Z}\times_G U}))). \end{aligned}$$

A igualdade em ambos os lados conclui a prova. □

Proposição 7.1.1. Nas condições impostas pelo conjunto de hipóteses 7.0.1 e considerando h uma seção equivariante de L tal que $Z' = h^{-1}(0)$ é suave e transversal aos estratos de uma estratificação $\mathscr{S}$ de Z, temos

$$(\sigma_F^G \mathbb{1}_{\mathscr{Z}})(x) = \begin{cases} |G| + (-1)^{n-1}\mu_I^G(x), & \text{se } x \notin Z\cap Z' \\ |G|, & \text{se } x \in Z\cap Z' \end{cases}$$

Demonstração. Se $x \notin Z \cap Z'$, isto é, $h(x) \neq 0$, então

$$Z_t = \{(z,t) \in X \times \{t\} \mid s(z) - th(z) = 0\} = \{(z,t) \in X \mid \frac{s(z)}{h(z)} = t\} \cong (s/h)^{-1}(t).$$

Assim, temos que a interseção $B(x,\varepsilon) \cap Z_t \cong F_{s/h}$ é a fibra de Milnor de s/h em x, e como $h^{-1}(0)$ é suave e transversal aos estratos de $\mathscr{S}$, s/h define Z numa vizinhança de x.

Por definição temos,

$$(\sigma_F^G \mathbb{1}_{\mathscr{Z}})(x) = \lim_{t \to 0} \sum_{g \in G} \chi_G(B(x,\varepsilon) \cap Z_t)(g) = \lim_{t \to 0} \sum_{g \in G} \chi_G(F_{s/h})(g).$$

Agora, sabemos que

$$\chi_G(F_{s/h})(g) = \chi(F_{s/h}(g)) = 1 + \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{dim\, V(g)-1-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)}),$$

então temos

$$\begin{aligned}
(\sigma_F^G \mathbb{1}_{\mathscr{Z}})(x) &= \sum_{g \in G} \big(1 + \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{dim\, V(g)-1-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)})\big) \\
&= \sum_{g \in G} 1 + \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{dim\, V(g)-1-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)}) \\
&= |G| + \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{dim\, V(g)-1-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)}) \\
&= |G| + \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{n-1} (-1)^{dim\, V(g)-n-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)}) \\
&= |G| + (-1)^{n-1} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{dim\, V(g)-n-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)}) \\
&= |G| + (-1)^{n-1} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{dim\, \Sigma(s/h|_{V(g)})} (-1)^{n-dim\, V(g)-k} \lambda^k(s/h|_{V(g)}) \\
&= |G| + (-1)^{n-1} \mu_I^G(x).
\end{aligned}$$

Se $x \in Z \cap Z'$, procedendo localmente, podemos assumir que x é a origem de $\mathbb{C}^n$, que em nossas coordenadas locais $h(z) \equiv z_n$ e que $\{z_n = 0\}$ é transversal a uma estratificação de Whitney $\mathscr{S}$ de $Z = \{f = 0\}$. Pode-se mostrar que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $0 < \delta < \varepsilon$, se $t \in \mathbb{C}$ satisfaz $0 < |t| < \delta$, então

$$Z \cap B_\varepsilon = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z| < \varepsilon,\ f - tz_n = 0\}$$

é contrátil, onde $B_\varepsilon = B(0,\varepsilon)$ (ver detalhes em (PARUSINSKI; PRAGACZ, 1998, Proposisão 5.1)).

Sendo $B(x,\varepsilon)\cap Z_t$ contrátil, então $B(x,\varepsilon)\cap Z_t$ é conexo por caminhos. Como $V(g)$ é um subespaço vetorial convexo, então $B(x,\varepsilon)\cap Z_t\cap V(g)$ é convexo, portanto contrátil. Logo,

$$(\sigma_F^G \mathbb{1}_{\mathscr{Z}})(x) = \lim_{t\to 0}\sum_{g\in G}\chi_G(B(x,\varepsilon)\cap Z_t)(g) = \lim_{t\to 0}\sum_{g\in G}\chi(B(x,\varepsilon)\cap Z_t\cap V(g)) = \sum_{g\in G} 1 = |G|.$$

□

Lema 7.1.1. Nas condições impostas pelo conjunto de hipóteses 7.0.1, temos

$$\mu_I^G = \sum_{S\in\mathscr{S}}\alpha_G(S)\mathbb{1}_{\overline{S}}.$$

Demonstração. Seja S_0 um estrato arbitrário e um ponto $x\in S_0$. Então temos

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_S \alpha_G(S)\mathbb{1}_{\overline{S}}\Big)(x) &= \sum_{S\neq S_0,\,\overline{S}\supset S_0}\alpha_G(S)+\alpha_G(S_0)\\
&= \sum_{S\neq S_0,\,\overline{S}\supset S_0}\alpha_G(S)+\Big(\mu_{I,S_0}^G - \sum_{S\neq S_0,\,\overline{S}\supset S_0}\alpha_G(S)\Big)\\
&= \mu_{I,S_0}^G\\
&= \mu_I^G(x).
\end{aligned}$$

□

Vamos utilizar a propriedade apresentada no Teorema 7.1.1. Para o lado esquerdo lê-se $\sigma_H^G c_G^{SM}(Z_t)$. Para o lado direito começamos usando a Proposição 7.1.1

$$\begin{aligned}
\sigma_F^G\mathbb{1}_{\mathscr{Z}} &= |G|\cdot\mathbb{1}_Z + (-1)^{n-1}\mu_I^G\cdot\mathbb{1}_{Z\setminus Z\cap Z'}\\
&= |G|\cdot\mathbb{1}_Z + (-1)^{n-1}(\mu_I^G\cdot\mathbb{1}_Z - \mu_I^G\cdot\mathbb{1}_{Z\cap Z'}).
\end{aligned}$$

Usando a igualdade $\mu_I^G = \sum_{S\in\mathscr{S}}\alpha_G(S)\mathbb{1}_{\overline{S}}$, do Lema 7.1.1, reescrevemos a equação acima como

$$\sigma_F^G\mathbb{1}_{\mathscr{Z}} = |G|\cdot\mathbb{1}_Z + (-1)^{n-1}\Big(\sum_S\alpha_G(S)\mathbb{1}_{\overline{S}} - \sum_S\alpha_G(S)\mathbb{1}_{\overline{S}\cap Z'}\Big),$$

e finalmente aplicando c_*^G obtemos para o lado direto

$$c_*^G(\sigma_F^G\mathbb{1}_{\mathscr{Z}}) = |G|\cdot c_G^{SM}(Z) + (-1)^{n-1}\Big(\sum_S\alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}) - (i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')]\Big),$$

onde $i_{\overline{S}\cap Z',Z}$ denota a inclusão $\overline{S}\cap Z'\hookrightarrow Z$.

Resumindo, em virtude da propriedade do Teorema 7.1.1, provamos:

Proposição 7.1.2. Nas condições impostas pelo conjunto de hipóteses 7.0.1 e considerando σ_H^G a especialização equivariante em homologia, para $t\neq 0$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\sigma_H^G c_G^{SM}(Z_t) = |G|\cdot c_G^{SM}(Z) + (-1)^{n-1}\Big(\sum_S\alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}) - (i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')]\Big).$$

Nosso objetivo agora é mostrar que

$$|G|\cdot\mathscr{M}_G(Z)=\sum_S \alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})-(i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')],$$

para isso façamos primeiro o seguinte lema.

Lema 7.1.2. Sejam $\mathscr{X}$ uma estratificação de Whitney de X, E um fibrado vetorial G-equivariante holomorfo sobre X e Z a variedade dos zeros de uma seção holomorfa equivariante s de E. Assuma que s intersecta, em cada estrato de $\mathscr{X}$, a seção zero de E transversalmente. Dada uma subvariedade fechada Y de X dada por uma união de estratos de $\mathscr{X}$, então

$$i_*^G c_G^{SM}(Y\cap Z)=c^G(E)^{-1}.c^G_{posto\,E}(E)\frown c_G^{SM}(Y).$$

Demonstração. Considere o Blow up de Nash G-equivariante $\nu:\widetilde{X}\to X$ e $\nu_Z:\widetilde{Z}=\nu^{-1}(Z)\to Z$, onde ν_Z é a restrição de ν à $\widetilde{Z}$, então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \widetilde{X}\\ {\scriptstyle \nu_Z}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu}\\ Z & \xrightarrow{i} & X\end{array}$$

onde $\tilde{i}:\widetilde{Z}\to\widetilde{X}$ e $i:Z\to X$ denotam as aplicações inclusão.

Além disso, sobre $\widetilde{Z}$ temos uma sequência exata de fibrados vetoriais equivariantes

$$0\to\widetilde{TZ}\to\widetilde{TX}|_{\widetilde{Z}}\to\nu_Z^*(E|_Z)\to 0,$$

e como vimos anteriormente dado um fibrado ξ é possível induzir um novo um fibrado vetorial $\xi_U:=\xi\times_G id$, onde id é a aplicação identidade de $U\in I(G)$, deste modo induzimos uma nova sequência exata de fibrados vetoriais

$$0\to\widetilde{TZ}\times_G U\to\widetilde{TX}|_{\widetilde{Z}}\times_G U\to\nu_Z^*(E|_Z)\times_G U\to 0,$$

segue desta nova sequência e propriedades da classe de Chern (ver (FULTON, 1984, Teorema 3.2, item e)) que

$$c(\widetilde{TZ}\times_G U)=(\tilde{i}\times_G id)^*((\nu\times_G id)^*c(E\times_G U)^{-1}.c(\widetilde{TX}\times_G U)).$$

Aplicando o limite projetivo com índices em $I(G)$, como na definição da classe equivariante de Chern, em ambos os lados da equação, obtemos

$$c^G(\widetilde{TZ})=\tilde{i}_G^*(\nu_G^*c^G(E)^{-1}.c^G(\widetilde{TX})). \tag{7.5}$$

Agora, considerando a sequência exata de fibrados sobre $X\times_G U$

$$0\to\widetilde{Z}\times_G U\overset{\tilde{i}\times_G id}{\to}\widetilde{X}\times_G U\overset{(s\circ\nu)\times_G id}{\to}E\times_G U,$$

por (FULTON, 1984, Exemplo 6.3.5), temos a seguinte propriedade

$$(\tilde{i} \times_G id)_*[\widetilde{Z} \times_G U] = c_{posto\, E\times_G U}((\nu \times_G id)^*(E \times_G U)) \frown [\widetilde{X} \times_G U].$$

Note que usando a propriedade do *pullback* (ver (FULTON, 1984, Teorema 3.2, item d)) temos

$$\begin{array}{rl} & c_{posto\, E\times_G U}((\nu \times_G id)^*(E \times_G U)) \frown [\widetilde{X} \times_G U] = \\ = & c_{posto\, E\times_G U}((\nu \times_G id)^*(E \times_G U)) \frown (\nu \times_G id)^*((\nu \times_G id)_*[\widetilde{X} \times_G U]) \\ = & (\nu \times_G id)^*(c_{posto\, E\times_G U}(E \times_G U) \frown (\nu \times_G id)_*[\widetilde{X} \times_G U])) \\ = & (\nu \times_G id)^*(c_{posto\, E\times_G U}(E \times_G U)) \frown (\nu \times_G id)^*(\nu \times_G id)_*[\widetilde{X} \times_G U])) \\ = & (\nu \times_G id)^*(c_{posto\, E\times_G U}(E \times_G U)) \frown [\widetilde{X} \times_G U]. \end{array}.$$

Portanto,

$$(\tilde{i} \times_G id)_*[\widetilde{Z} \times_G U] = (\nu \times_G id)^*(c_{posto\, E\times_G U}(E \times_G U)) \frown [\widetilde{X} \times_G U],$$

aplicando o limite projetivo com índices em $I(G)$, obtemos

$$\tilde{i}^G_*[\widetilde{Z}]_G = \nu_G^*(c^G_{posto\, E}(E)) \frown [\widetilde{X}]_G. \tag{7.6}$$

Considere agora $c^M_G(Z)$ a classe equivariante de Mather de Z, logo

$$\begin{array}{rcl} i^G_* c^M_G(Z) & = & i^G_*(\nu_Z)^G_*(c^G(\widetilde{TZ}) \frown [\widetilde{Z}]_G) \\ & \overset{(7.5)}{=} & i^G_*(\nu_Z)^G_*(\tilde{i}^*_G(\nu^*_G c^G(E)^{-1}.c^G(\widetilde{TX})) \frown [\widetilde{Z}]_G) \\ & = & \nu^G_* \tilde{i}^G_*(\tilde{i}^*_G(\nu^*_G c^G(E)^{-1}.c^G(\widetilde{TX})) \frown [\widetilde{Z}]_G) \\ & = & \nu^G_*(\nu^*_G c^G(E)^{-1}.c^G(\widetilde{TX}) \frown \tilde{i}^G_*[\widetilde{Z}]_G) \\ & \overset{(7.6)}{=} & \nu^G_*(\nu^*_G c^G(E)^{-1}.c^G(\widetilde{TX}) \frown (\nu^*_G c^G_{posto\, E}(E) \frown [\widetilde{X}]_G)) \\ & = & \nu^G_*(\nu^*_G c^G(E)^{-1}.\nu^*_G c^G_{posto\, E}(E).c^G(\widetilde{TX}) \frown [\widetilde{X}]_G) \\ & = & c^G(E)^{-1}.c^G_{posto\, E}(E) \frown c^M_G(X). \end{array}$$

Suponha que Y é uma subvariedade fechada de X dada por uma união de estratos de $\mathscr{X}$. Então, como Z intercepta $\mathscr{X}$ transversalmente, pelo mesmo argumento acima para a inclusão $i : Y \cap Z \hookrightarrow Y$, temos

$$i^G_* c^M_G(Y \cap Z) = c^G(E)^{-1}.c^G_{posto\, E}(E) \frown c^M_G(Y).$$

Como as classes equivariantes de Schwartz-MacPherson podem ser vistas como combinações das classes equivariantes de Mather, concluímos a seguinte fórmula

$$i^G_* c^{SM}_G(Y \cap Z) = c^G(E)^{-1}.c^G_{posto\, E}(E) \frown c^{SM}_G(Y).$$

□

Teorema 7.1.2. Nas condições impostas pelo conjunto de hipóteses 7.0.1, temos

$$|G|\cdot\mathscr{M}_G(Z)=\sum_S \alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})-(i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')].$$

Demonstração. Primeiramente, usando o lema anterior para as nossas condições, onde $Y=\overline{S}$, $E=L|_{\overline{S}}$ e $i:\overline{S}\cap Z'\hookrightarrow\overline{S}$, temos

$$\begin{aligned}(i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z') &= (i_{\overline{S},Z})_*^G(i_{\overline{S}\cap Z',\overline{S}})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')\\ &= (i_{\overline{S}\cap Z'})_*^G c^G(L|_{\overline{S}})^{-1}.c_1^G(L|_{\overline{S}})\frown c_G^{SM}(\overline{S}).\end{aligned}\tag{7.7}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}&\sum_S \alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})-(i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')]\\ \stackrel{(7.7)}{=}\ &\sum_S \alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})-(i_{\overline{S}\cap Z'})_*^G c^G(L|_{\overline{S}})^{-1}.c_1^G(L|_{\overline{S}})\frown c_G^{SM}(\overline{S})]\\ =\ &\sum_S \alpha_G(S)c^G(L|_{\overline{S}})^{-1}\frown[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})(c^G(L|_{\overline{S}})-c_1^G(L|_{\overline{S}}))]\\ =\ &\sum_S \alpha_G(S)c^G(L|_{\overline{S}})^{-1}\frown[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})(c_0^G(L|_{\overline{S}}))]\\ =\ &\sum_S \alpha_G(S)c^G(L|_{\overline{S}})^{-1}\frown(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})\\ =\ &|G|\cdot\mathscr{M}_G(Z).\end{aligned}$$

□

Com todas as ferramentas em mãos, podemos agora demonstrar o resultado abaixo.

Teorema 7.1.3. Nas condições impostas pelo conjunto de hipóteses 7.0.1, temos

$$\sigma_H^G c_G^{SM}(Z_t)=|G|\cdot c_G^{FJ}(Z).$$

Demonstração. Pela Proposição 7.1.2 temos

$$\sigma_H^G c_*^G(Z_t)=|G|\cdot c_G^{SM}(Z)+(-1)^{n-1}\Big(\sum_S \alpha_G(S)[(i_{\overline{S},Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S})-(i_{\overline{S}\cap Z',Z})_*^G c_G^{SM}(\overline{S}\cap Z')]\Big),$$

usando o Teorema 7.1.2 podemos concluir

$$\sigma_H^G c_G^{SM}(Z_t)=|G|\cdot c_*^G(Z)+(-1)^{n-1}|G|\cdot\mathscr{M}_G(Z)=|G|\cdot c_G^{FJ}(Z).$$

□

Note que o teorema anterior nos fornece uma maneira de estudar a classe característica equivariante de um objeto possivelmente singular, a hipersuperfície Z, através da classe característica equivariante de uma família de objetos suaves Z_t, com $t\neq 0$.

REFERÊNCIAS

ARNOL'D, V. I. Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple lie groups bk, ck, and f4 and singularities of evolutes. **Russian Mathematical Surveys**, IOP Publishing, v. 33, n. 5, p. 99, 1978. Citado nas páginas 18 e 53.

ARTEAGA, J. A. S. **Classificação de espaços fibrados**. Paraná: [s.n.], 2013. Citado na página 28.

ARTIN, M. **Schemas en Groupes. Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3): I: Proprietes Generales des Schemas en Groupes**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 151. Citado na página 27.

BOURBAKI, N. **Elements of mathematics**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1966. Citado na página 21.

BRASSELET, J.-P. **Classes características de variedades singulares**. [S.l.]: ICMC/USP, 2002. Citado na página 59.

DOLD, A. **Lectures on algebraic topology**. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1980. Citado na página 51.

EDIDIN, D.; GRAHAM, W. Equivariant intersection theory. **arXiv preprint alg-geom/9609018**, 1996. Citado na página 36.

FORGER, M.; ANTONELI, F. **Fibrados, Conexões e Classes Características**. [S.l.]: IME-USP, 2011. Citado nas páginas 28, 29 e 30.

FULTON, W. **Intersection theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1984. v. 1. Citado nas páginas 67 e 68.

GöRTZ, U.; WEDHORN, T. **Algebraic Geometry I: Schemes with Examples and Exercises**. [S.l.]: Springer, 2010. Citado nas páginas 23 e 24.

MACPHERSON, R. D. Chern classes for singular algebraic varieties. **Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 100, n. 2, p. 423–432, 1974. Citado na página 40.

MASSEY, D. **Lê cycles and hypersurface singularities**. [S.l.]: Springer, 2006. Citado nas páginas 51 e 54.

MILNOR, J. Construction of universal bundles, ii. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 430–436, 1956. Citado na página 33.

MUMFORD, D.; FOGARTY, J.; KIRWAN, F. **Geometric invariant theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1982. v. 34. Citado na página 25.

OHMOTO, T. Equivariant chern classes of singular algebraic varieties with group actions. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society**. [S.l.], 2006. v. 140, n. 1, p. 115–134. Citado nas páginas 17, 18, 35, 38, 40, 41, 49 e 59.

PARUSIŃSKI, A.; PRAGACZ, P. Chern-schwartz-macpherson classes and the euler characteristic of degeneracy loci and special divisors. **Journal of the American Mathematical Society**, v. 8, n. 4, p. 793–817, 1995. Citado na página 47.

PARUSINSKI, A.; PRAGACZ, P. Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles. **arXiv preprint math/9801102**, 1998. Citado nas páginas 17, 18, 43, 44, 45, 49, 53, 61 e 65.

ROBERTS, M. Equivariant milnor numbers and invariant morse approximations. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 2, n. 3, p. 487–500, 1985. Citado nas páginas 17, 18, 49, 50, 51, 53 e 56.

SUWA, T. Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations. **Actualités Mathématiques**, Hermann, 1998. Citado na página 54.

TOTARO, B. The chow ring of a classifying space. In: PROVIDENCE, RI; AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY; 1998. **Proceedings of symposia in pure mathematics**. [S.l.], 1999. v. 67, p. 249–284. Citado nas páginas 35 e 36.

VERDIER, J.-L. Spécialization des classes de chern. **Astérisque**, v. 82, p. 149–159, 1981. Citado na página 45.

WALL, C. A note on symmetry of singularities. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, v. 12, n. 3, p. 169–175, 1980. Citado nas páginas 17 e 53.

YOKURA, S. On characteristic classes of complete intersections. **Contemporary Mathematics**, Providence, RI: American Mathematical Society, v. 241, p. 349, 1999. Citado na página 47.

ICMC USP
SÃO CARLOS