

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Análise de Multiresolução e Wavelets Assimétricas de Haar**

**Mariana Macedo dos Santos**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em  
Matemática (PPG-Mat)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Mariana Macedo dos Santos**

## Análise de Multiresolução e Wavelets Assimétricas de Haar

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

**USP – São Carlos**  
**Janeiro de 2024**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M141a Macedo dos Santos, Mariana  
Análise de Multiresolução e Wavelets Assimétricas  
de Haar / Mariana Macedo dos Santos; orientador  
Daniel Smania Brandão. -- São Carlos, 2023.  
70 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas  
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Wavelets. I. Smania Brandão, Daniel, orient.  
II. Título.

**Mariana Macedo dos Santos**

## Multiresolution Analysis and Unbalanced Haar Wavelets

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

**USP – São Carlos**  
**January 2024**



*Dedico este trabalho a todos que sempre estiveram ao meu lado  
e que tornaram esse sonho possível.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por todo direcionamento e sustento, em tempos de alegria e tristeza.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Smania Brandão, que desde meu primeiro período me acolheu e me guiou, me orientando e motivando ao longo deste trabalho, além de me ajudar a crescer como pessoa e matemática. Sou imensamente grata a ele por onde cheguei.

À minha mãe Denise por sempre ter me dado suporte e inspiração, aos meus irmãos Juliana e Junior por sempre serem alegrias em tempos difíceis e ao meu padrinho e amigo Marcus Giotto, que sempre me apoiou e acreditou em mim, mesmo quando eu não acreditei. A eles todo meu amor e agradecimento.

Aos meus amigos Aires, João Pedro, Enos, Khayyam, Guilherme, Víctor, Hermes e Otaviano pela companhia, conselhos e por sempre estarem ao meu lado nos estudos. E a todos aqueles que participaram da minha formação, meus sinceros agradecimentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



*“Nós nunca descobriremos o que vem depois da escolha, se não tomarmos uma decisão.  
Por isso, entenda os seus medos, mas jamais deixe que eles sufoquem os seus sonhos.”  
(Alice no País das Maravilhas)*



# RESUMO

SANTOS, M. M. **Análise de Multiresolução e Wavelets Assimétricas de Haar**. 2024. 70 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise da teoria de wavelets, explorando importantes ferramentas como a análise de multiresolução e a transformada wavelet discreta. Além disso, apresenta-se um estudo introdutório às wavelets assimétricas de Haar.

**Palavras-chave:** Wavelets, Análise de Multiresolução, Transformada Wavelet, Wavelets Assimétricas de Haar.



# ABSTRACT

SANTOS, M. M. **Multiresolution Analysis and Unbalanced Haar Wavelets**. 2024. 70 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

The present work aims to conduct an analysis of the theory of wavelets, exploring essential tools such as multiresolution analysis and discrete wavelet transform. Additionally, an introductory study on unbalanced Haar wavelets is presented.

**Keywords:** Wavelets, Multiresolution Analysis, Wavelet Transform, Unbalanced Haar Wavelets.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Exemplo de uma wavelet de Haar. . . . .	29
Figura 2 – Algumas wavelets de Haar . . . . .	31
Figura 3 – Representação de um sinal discreto $v$ . . . . .	32
Figura 4 – Espaço de Aproximação. . . . .	32
Figura 5 – Espaço de Detalhe. . . . .	33
Figura 6 – Reconstrução do sinal original aplicando a Transformada Inversa de Haar . . . . .	33
Figura 7 – Ilustração esquemática da Transformada de Haar de múltiplos níveis. . . . .	34
Figura 8 – Representação gráfica do sinal $u$ através de funções escada. . . . .	34
Figura 9 – Coeficientes de aproximação $u_{ca_1} = \{6, 8, 3, -1\}$ . . . . .	35
Figura 10 – Coeficientes de detalhe $u_{cd_1} = \{-1, 0, 1, 0.5\}$ . . . . .	35
Figura 11 – Transformada de nível 2. . . . .	36
Figura 12 – Transformada de nível 3. . . . .	36
Figura 13 – Esboço de uma função escada (vermelho) e de uma wavelet de haar (verde) . . . . .	37
Figura 14 – Exemplo 4.5.1. . . . .	50
Figura 15 – Exemplo 4.5.2. . . . .	50
Figura 16 – Exemplo 4.5.3. . . . .	51
Figura 17 – Exemplo 5.2.3 . . . . .	59
Figura 18 – Exemplo de wavelet assimétrica de Haar . . . . .	59



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
2	PRELIMINARES . . . . .	21
2.1	Teoria da Medida . . . . .	21
2.2	Espaços de Hilbert . . . . .	22
2.3	Espaços $L^p$ . . . . .	23
2.4	Espaços $L^2(\mathbb{R})$ e $\ell^2(\mathbb{Z})$ . . . . .	24
2.5	Análise de Fourier . . . . .	25
3	WAVELETS DE HAAR . . . . .	27
3.1	Implementando a Transformada de Haar . . . . .	31
4	ANÁLISE DE MULTIRESOLUÇÃO . . . . .	39
4.1	Ideia e definição . . . . .	39
4.2	Construindo uma base de Wavelets . . . . .	40
4.3	Análise de Multiresolução de Haar . . . . .	45
4.4	Transformada discreta de Wavelets . . . . .	46
4.5	Exemplos . . . . .	49
5	WAVELETS ASSIMÉTRICAS DE HAAR . . . . .	53
5.1	Definições Iniciais . . . . .	53
5.2	Construção das Wavelets . . . . .	58
5.3	Propriedades . . . . .	60
5.4	Base Dual . . . . .	63
5.5	Análise de Multiresolução . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	69



---

# INTRODUÇÃO

---

A constante mudança no aumento da complexidade dos meios de comunicação, como o processamento e o envio de dados cada vez maiores e mais ricos em detalhes, tem despertado cada vez mais o interesse em técnicas que permitam uma representação mais eficiente de informações. Nesse contexto, as wavelets surgem como fortes ferramentas na análise de sinais, proporcionando um avanço cada vez mais na melhora do tratamento de dados.

A teoria das wavelets teve sua origem nas últimas décadas do século XX, com a motivação de superar as limitações das técnicas tradicionais de transformação de sinais, como a Transformada de Fourier, devido sua habilidade de localização tempo-frequência. Inicialmente, a ideia de representar sinais em diferentes escalas de resolução foi introduzida por Jean Morlet e Alex Grossmann na década de oitenta ([GROSSMANN; MORLET, 1984](#)), com o objetivo de analisar sinais geofísicos. Posteriormente, Ingrid Daubechies ([DAUBECHIES, 1988](#)), Stéphane Mallat ([MALLAT, 1998](#)) e Yves Meyer ([MEYER, 1993](#)), ([MEYER; RYAN, 1993](#)) desempenharam papéis fundamentais na formalização e popularização da teoria das wavelets, tornando-a uma ferramenta essencial em uma variedade de campos, desde compressão e análise de dados até a resolução de equações diferenciais. A versatilidade das wavelets, desencadeou uma revolução na maneira como interpretamos e manipulamos informações, consolidando-se como uma abordagem indispensável nas ciências e engenharias contemporâneas ([BENEDETTO, 1993](#)).

Esta dissertação explora o estudo das wavelets, dando ênfase nas wavelets de Haar, e sua aplicação na análise de multiresolução, destacando a importância de tais métodos na decomposição de sinais. Além disso, faz-se uma análise da teoria de wavelets assimétricas de Haar, que visa estender a ideia de wavelets para além da reta real, na teoria de espaços de medida.



---

## PRELIMINARES

---

As definições e resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em livros texto como (FOLLAND, 2013), (RUDIN, 1991), (BREZIS, 2010), (FIGUEIREDO, 2014).

### 2.1 Teoria da Medida

**Definição 2.1.1.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **função escada** se:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1})}(x),$$

em que:

- $[x_i, x_{i+1}) \subset [a, b]$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $c_i$  é uma constante que representa o valor da função  $f(x)$  nos intervalos  $[x_i, x_{i+1})$ ;
- $\mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1})}(x)$  é a **função indicadora** do intervalo  $[x_i, x_{i+1})$ , que é definida como:

$$\mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1})}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Definição 2.1.2.** Sendo  $X$  um conjunto não vazio, definimos

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\},$$

como o **conjunto das partes de  $X$** .

**Definição 2.1.3.** Uma família  $\mathbb{A}_X$  de subconjuntos de  $X$  é uma  **$\sigma$ -álgebra** se

- Se  $A \in \mathbb{A}_X$ , então  $A^c \in \mathbb{A}_X$ .

ii. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $\mathbb{A}_X$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{A}_X$ .

O par  $(X, \mathbb{A}_X)$  é definido como **espaço mensurável** e os elementos de  $\mathbb{A}_X$ , são chamados de **conjuntos mensuráveis**.

**Definição 2.1.4.** Seja  $(X, \mathbb{A}_X)$  um espaço mensurável. Uma **medida** em  $(X, \mathbb{A}_X)$  é uma função  $\mu : \mathbb{A}_X \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

i.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

ii. Se  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $\mathbb{A}_X$ , de forma que seus elementos são dois a dois disjuntos, então

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Se  $\mu$  é uma medida em  $(X, \mathbb{A}_X)$ , então  $(X, \mathbb{A}_X, \mu)$  é chamado **espaço de medida**. Se  $\mu(X) < \infty$ , dizemos que a medida é finita.

**Definição 2.1.5.** Uma medida é dita **completa**, se seu domínio contém todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula.

## 2.2 Espaços de Hilbert

**Definição 2.2.1.** Dado um espaço métrico  $(X, d)$ , uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  em  $X$  é chamada de **sequência de Cauchy** se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um índice  $N$  tal que, se  $m, n \geq N$ :

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Definição 2.2.2.** Sendo  $(E, \|\cdot\|)$  espaço vetorial normado, dizemos que  $E$  é **completo (ou Banach)** se toda sequência de Cauchy converge para um ponto no espaço, considerando a métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|$ .

**Definição 2.2.3.** Um **espaço de Hilbert**  $\mathcal{H}$  é um espaço vetorial equipado com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que é linear na primeira entrada, simétrico e satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|(\langle u, v \rangle)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Além disso,  $\mathcal{H}$  é completo em relação à norma induzida pelo produto interno.

**Definição 2.2.4.** Dizemos que dois vetores  $u, v \in \mathcal{H}$ , são **ortogonais** se seu produto interno é nulo, ou seja:

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Seja  $U \subset \mathcal{H}$ . Definimos o complemento ortogonal de  $U$  como o conjunto

$$U^\perp = \{v \in \mathcal{H} : \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Note que  $U^\perp$  é um subespaço de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 2.2.5.** Considere  $U$  um subespaço fechado de  $\mathcal{H}$ . Então,  $\mathcal{H} = U \oplus U^\perp$ . Ou seja, para qualquer  $x \in \mathcal{H}$ , existem  $u$  e  $v$  únicos tais que  $u \in U$ ,  $v \in U^\perp$ , e  $x = u + v$ .

O vetor  $u$  é definido como a projeção ortogonal de  $x$  em  $U$ . Isso ocorre porque

$$\langle x - u, u_0 \rangle = \langle v, u_0 \rangle = 0, \quad \text{para qualquer } u_0 \in U.$$

**Definição 2.2.6.** Seja  $I$  uma coleção de índices. Dizemos que uma coleção de elementos  $V = \{v_k\}_{k \in I}$  em  $\mathcal{H}$  é um **conjunto ortonormal** se  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ , onde  $i, j \in I$  e  $\delta_{i,j}$  é o **delta de Dirac**, uma função real que vale 1 se  $i = j$  e é nula em todo restante. Dizemos ainda que  $V$  é um conjunto ortonormal **completo** se  $\overline{\text{span}\{V\}} = \mathcal{H}$ . Dado um  $x \in \mathcal{H}$ , os coeficientes  $h(x, v_k)_{k \in I} = \langle x, v_k \rangle$  são chamados de **coeficientes de Fourier** de  $x$  em relação a  $V$ .

**Teorema 2.2.7.** Seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  um conjunto ortonormal em  $\mathcal{H}$ . Então, para todo  $x \in H$ , a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

converge na norma de  $H$ . Além disso,  $x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$  é ortogonal a  $e_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.2.8** (Identidade de Parseval). Dado um conjunto ortonormal completo  $\{v_n\}$  em um espaço de Hilbert  $H$  e um vetor  $x$  nesse espaço, temos que:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2.$$

## 2.3 Espaços $L^p$

**Definição 2.3.1.** O espaço  $L^p$  é definido como o conjunto de funções mensuráveis  $f$  para as quais a norma  $\|f\|_p$  é finita, onde a norma  $\|f\|_p$  é dada por:

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

**Teorema 2.3.2.** Dado um espaço vetorial normado  $(E, \|\cdot\|)$ , se  $1 \leq p \leq \infty$ , então  $L^p(E)$  é um espaço de Banach.

**Teorema 2.3.3** (Desigualdade de Hölder). Para  $p, q \geq 1$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , para quaisquer funções mensuráveis  $f$  e  $g$ :

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

**Teorema 2.3.4** (Convergência Monótona). Se  $f_n \leq f_{n+1}$  para todo  $n$  e  $f_n \rightarrow f$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$  para  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 2.3.5** (Convergência Dominada). Se  $f_n \rightarrow f$  quase sempre, para  $f$  mensurável e existe uma função integrável  $g$  tal que  $\|f_n\| \leq g$  para todo  $n$ , então  $f_n \rightarrow f$  em  $L^p$  para  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 2.3.6** (Riesz-Fischer). Para  $1 \leq p < \infty$ , o espaço  $L^p$  é completo, ou seja, toda sequência de Cauchy em  $L^p$  converge para uma função em  $L^p$ .

## 2.4 Espaços $L^2(\mathbb{R})$ e $\ell^2(\mathbb{Z})$

**Definição 2.4.1.** O espaço  $L^2(\mathbb{R})$  é o conjunto de todas as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  para as quais a integral do módulo ao quadrado de  $f$  em todo o domínio  $\mathbb{R}$  é finita:

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

O espaço  $L^2(\mathbb{R})$  é um espaço vetorial e, com a norma definida como a raiz quadrada da integral do módulo ao quadrado, torna-se um espaço de Hilbert.

**Definição 2.4.2.** Sendo  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , o **produto interno** em  $L^2(\mathbb{R})$  é definido por

$$\langle fg \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \bar{g} dx,$$

e a norma induzida pelo produto interno é

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Definição 2.4.3.** O espaço  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é definido como o espaço das sequências complexas indexadas por inteiros cujo quadrado é somável. Em outras palavras,

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

O produto interno em  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é dado por

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_n,$$

e a norma induzida pelo produto interno é

$$\|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

onde  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  são sequências em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

## 2.5 Análise de Fourier

Seja  $K > 0$  um número real positivo. Considere um conjunto de funções  $f$  que obedecem à seguinte propriedade:

$$f(x - 2K) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, funções que são "2K-periódicas", o que implica que elas se repetem a cada intervalo de comprimento  $2K$ .

Agora, consideremos um intervalo específico que vai de 0 a  $2K$  na reta real. Vale destacar que poderíamos, se perda de generalidade, escolher qualquer outro intervalo com comprimento  $2K$ . É possível demonstrar que o conjunto

$$\left\{ \frac{e^{in\pi x/K}}{\sqrt{2K}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

forma uma base ortonormal para o espaço  $L^2([0, 2K])$ .

**Definição 2.5.1.** Dada  $f \in L^2([0, 2K])$ , a sua **série de Fourier** é definida por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\pi x/K},$$

em que os  $f_n$  são denominados **coeficientes de Fourier** de  $f$ , e definidos por

$$f_n = \frac{1}{2K} \int_0^{2K} e^{-in\pi x/K} f dx.$$

**Teorema 2.5.2.** Seja  $f \in L^2([0, 2K])$ . Então,

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2K} \left| f - \sum_{n=-M}^N f_n e^{in\pi x/L} \right|^2 dx = 0.$$

**Teorema 2.5.3** (Identidade de Parseval para séries de Fourier). Seja  $f \in L^2([0, 2K])$ . Então,

$$\|f\|_{L^2([0, 2K])}^2 = \int_0^{2K} |f(x)|^2 dx = 2L \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2.$$

**Teorema 2.5.4.** Seja  $f \in L^2([0, 2K])$ . Então

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\pi x/K},$$

converge para  $f$  em quase todo ponto.

**Definição 2.5.5.** Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . A **transformada de Fourier** de  $f$  é definida por

$$\hat{f}(\omega) = F(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} f(x) dx.$$

**Observação 2.5.6.** A transformada de Fourier é uma transformação linear.

**Definição 2.5.7.** Seja  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  a transformada de Fourier de  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Definimos a **transformada inversa de Fourier** por

$$(F^{-1}(\hat{f}))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

**Teorema 2.5.8.** Com as hipóteses da definição acima, temos que  $f(x) = (F^{-1}(\hat{f}))(x)$  nos pontos de continuidade de  $f$ .

**Teorema 2.5.9.** Seja  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Então,  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  e satisfaz à identidade de Parseval  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

**Observação 2.5.10.** A partir do teorema acima, conseguimos concluir que a transformada de Fourier pode ser interpretada como um operador linear limitado que mapeia funções de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$  enquanto preserva a norma  $L_2$ . Além disso, podemos observar que essa transformação pode ser estendida para todas as funções em  $L^2(\mathbb{R})$  usando sequências de truncamentos da função original, ou seja, a partir da sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $f_n = f \chi_{[-n,n]}$ . Uma vez que cada um dos  $f_n$  está em  $L^1(\mathbb{R})$ , podemos então aplicar  $F$  em cada elemento desta sequência. A sequência resultante é de Cauchy em  $L^2(\mathbb{R})$ , e assim, da identidade de Parseval e da linearidade de  $F$ , temos que  $(\hat{f}_n)$  também é de Cauchy em  $L^2(\mathbb{R})$ , o que garante que ela converge para uma função  $\hat{f}$ , permitindo assim definir  $F(f) = \hat{f}$  para funções em  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.5.11.** Para  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , valem as seguintes propriedades:

1. (Fórmula de Parseval)  $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ ;
2. (Fórmula de Plancherel)  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ ;

**Teorema 2.5.12.** A transformada de Fourier é uma bijeção de  $L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$ .

## WAVELETS DE HAAR

As wavelets de Haar, introduzidas pelo matemático húngaro Alfred Haar em 1910 (LEPIK; HEIN, 2014), foram um dos primeiros tipos de wavelets desenvolvidos e possuem um papel de alta relevância na história da análise de wavelets, além de servir como base para o desenvolvimento posterior de outras wavelets mais sofisticadas e complexas.

Nas últimas décadas, devido às suas propriedades úteis em processamentos de sinais (BULTHEEL; HUYBRECHS, 2015), ganharam uma abordagem mais aplicada em diversos campos fora da matemática teórica (LEPIK; HEIN, 2014).

**Definição 3.0.1.** Uma função  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  é denominada **wavelet** se a família de funções

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad \text{em que} \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k),$$

é um conjunto ortonormal completo em  $L^2(\mathbb{R})$ . A wavelet  $\psi$  é definida como a **wavelet mãe**.

Sabemos de resultados prévios que qualquer função em  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser aproximada por funções escada. Dessa forma, ao definir a função

$$\mathbf{1}_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & 2^{-n}k \leq x < 2^{-n}(k+1); \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

em que  $k, n \in \mathbb{Z}$  e temos que, para qualquer função  $f \in L^2$ , existem funções escada de forma que:

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{n,k} \mathbf{1}_{n,k}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

com a propriedade de que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Visto isso, vamos definir os seguintes conjuntos:

$$V_n = \left\{ f_n \in L^2(\mathbb{R}) \mid f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} \phi_{n,k}, \quad (a_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2 \right\}, \quad \text{com } \phi = \mathbf{1}_{[0,1]}.$$

Note que os espaços vetoriais  $\{V_n\}$  definidos acima formam uma sequência de subespaços de  $L^2(\mathbb{R})$ , de forma que, para qualquer  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , existem funções  $f_n \in V_n$  tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Dessa forma temos que os subespaços  $\{V_n\}$  formam uma aproximação de  $L^2(\mathbb{R})$ . Podemos observar também que os subespaços  $\{V_n\}$  estão encaixados, ou seja:

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots \quad (3.1)$$

E a partir dessa informação, podemos notar duas propriedades dos espaços  $\{V_n\}$ :

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n} = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \{0\}. \quad (3.2)$$

Perceba que para obtermos uma base para  $V_n$  basta construirmos uma base ortonormal de  $V_0$ . Definimos então a função

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

que é a função característica do intervalo  $[0, 1)$ . É possível ver com clareza que o sistema de funções  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forma uma base ortonormal de  $V_0$ . E assim, conseqüentemente, uma base ortonormal de  $V_n$  pode ser obtida dilatando o sistema  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Para construir uma base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , considere  $W_n$  como o complemento ortogonal de  $V_n$  em relação a  $V_{n-1}$ , ou seja:

$$W_n \oplus V_n = V_{n-1}, \quad W_n \perp V_n.$$

Devido à estrutura aninhada dos espaços  $V_n$  (3.1) e as suas propriedades mostradas em (3.2), obtemos que:

$$L^2 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n \quad \text{com} \quad W_n \perp W_{n'}, n \neq n'. \quad (3.3)$$

Uma vez que cada subespaço  $V_n$  é uma dilatação de  $V_0$ , conseqüentemente,  $W_n$  é também uma dilatação de  $W_0$ .

Como sabemos que a dilatação preserva a ortogonalidade, se obtermos uma base ortogonal de  $W_0$ , sua dilatação por  $2^n$  será também uma base ortogonal de  $W_n$ .

Dessa forma, nosso objetivo será encontrar uma base ortonormal de  $W_0$ . Para isso, definiremos a seguinte função

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

e provaremos que a mesma é uma wavelet, conhecida como a **wavelet de Haar**.

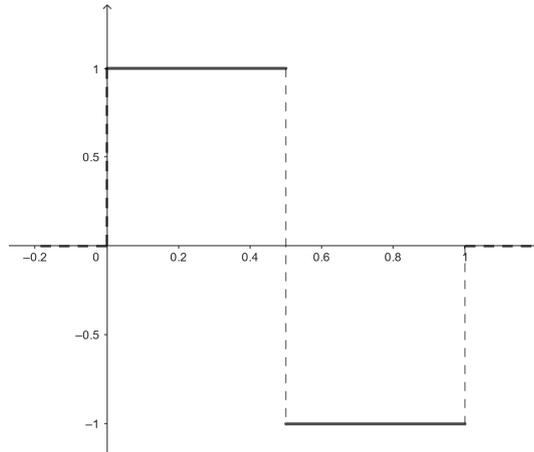


Figura 1 – Exemplo de uma wavelet de Haar.

Inicialmente, observe os seguintes fatos a respeito da função definida acima:

- $\psi$  é mensurável;
- $\psi$  se anula fora do intervalo  $[0, 1)$  e  $\|\psi\|_2 = 1 \Rightarrow \psi \in L^2(\mathbb{R})$ ;
- A partir da definição de  $\psi$ , segue que  $\psi_{j,k}$  possui suporte no intervalo  $[k2^j, (k+1)2^j)$ .

Agora, provaremos que o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  forma uma base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3.0.2.** O conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Primeiro, vejamos que as funções  $\psi_{j,k}$  possuem norma 1. Como observamos acima, o suporte da função  $\psi_{j,k}$  é o intervalo  $[k2^j, (k+1)2^j)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}\| &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left( 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left( 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^{-j}x - k)|^2 dx \right)^{1/2} = \left( 2^{-j} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} 1 dx \right)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

Agora, para a questão da ortogonalidade, precisamos provar que  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{m,n} \rangle = 0$ , no caso em que  $(j,k) \neq (m,n)$ .

Para isso, consideremos dois casos, sendo o primeiro caso  $j = m$  (e  $k \neq n$ ), e o segundo caso quando  $j \neq m$  (e  $k = n$ ).

No primeiro caso, é fácil ver que os intervalos  $[k2^j, (k+1)2^j)$  e  $[n2^m, (n+1)2^m)$ , os quais correspondem aos suportes das funções, são disjuntos, e daí, vemos que  $\psi_{j,k}$  e  $\psi_{m,n}$  são ortogonais entre si.

No segundo caso, suponha, sem perda de generalidade, que  $j > m$ . Assim, se fizermos a mudança de variável  $u = (2^{-j}x - k)$ , em

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{m,n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \right) \cdot \overline{(2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - n))} dx,$$

obteremos

$$2^{(m-j)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \cdot \overline{\psi(2^{-m+j}u - n + k2^j)} du = \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle,$$

em que  $a = (m - j)$ , e  $b = (n - k2^j)$ .

Como  $a < 0$  e  $b \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$  (pois  $j > m$  e  $k = n$ ), é fácil ver que o suporte da função  $\psi_{a,b}$  está contido em  $(-\infty, 0)$  ou  $[1, \infty)$  e, nesse caso,  $\psi$  e  $\psi_{a,b}$  têm suportes disjuntos, logo o produto interno resultante é 0;

E assim, temos que o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é ortonormal. Para provar que é base, tome  $g \in W_0$ . Consequentemente  $g \in V_{-1}$  e dessa forma, existe uma sequência  $(a_k) \in \ell^2$  de forma que

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (a_{2m} \phi_{-1,2m} + a_{2m+1} \phi_{-11,2m+1}).$$

Como sabemos que  $g$  é ortogonal a todas funções em  $V_0$ , logo  $a_{2m+1} = -a_{2m}$ . Além disso, temos também que

$$\psi_{0,m} = \sqrt{2}(\phi_{-1,2m} - \phi_{-1,2m-1}),$$

e portanto:

$$g = \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m} \psi_{0,m}, \quad (a_{2m}) \in \ell^2.$$

Ou seja,  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é base para  $W_0$ , o que, por (3.3) nos permite concluir que  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Exemplo 3.0.3.** Como vimos anteriormente, a wavelet de Haar é definida da seguinte maneira:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k).$$

Assim, podemos representar graficamente algumas das primeiras wavelets de Haar da seguinte forma:

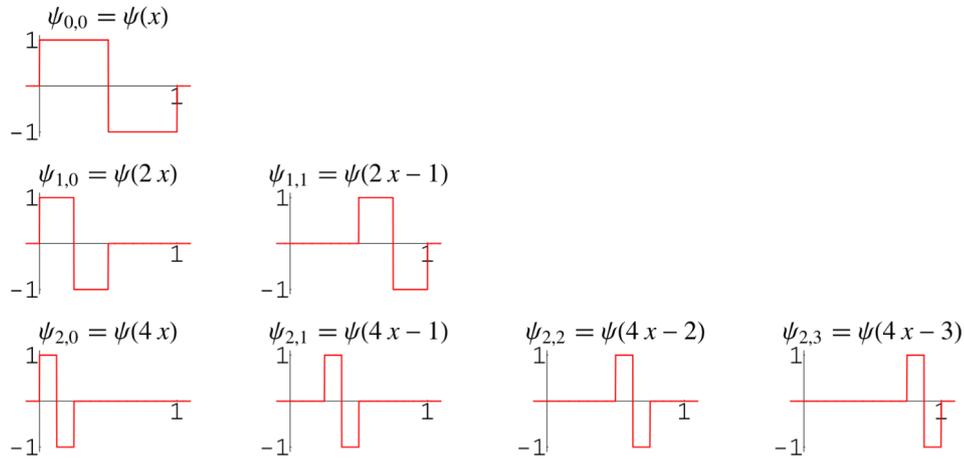


Figura 2 – Algumas wavelets de Haar

### 3.1 Implementando a Transformada de Haar

Nesta seção, trabalharemos com a implementação da transformada de Haar (SILVEIRA; KOZAKEVICIUS, 2016), Começaremos exemplificando o processo usando um sinal discreto  $v$ , com as seguintes entradas:

$$v = \{8, 6, 4, 5, 5, 6, 4, 4, 3, 4, 4, 6, 8, 10, 11, 13\},$$

representado na figura a seguir. Nosso objetivo será decompor esse sinal em um sinal mais simples.

Primeiro, computamos os valores médios, dois a dois, dos pontos que formam o sinal original, ou seja, sendo  $v = \{x_1, \dots, x_{16}\}$ :

$$a_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2},$$

assim criando o que chamamos de **Espaço de Aproximação** (formado pelos coeficientes de aproximação). Nele teremos metade da quantidade de valores presentes no sinal inicial:

$$v_a = \{7, 4.5, 5.5, 4, 3.5, 5, 9, 12\}.$$

Note que ao fazermos isso, já diminuimos pela metade o tamanho do sinal original. No entanto, perdemos informações, afinal, não conseguimos voltar aos valores iniciais, apenas com

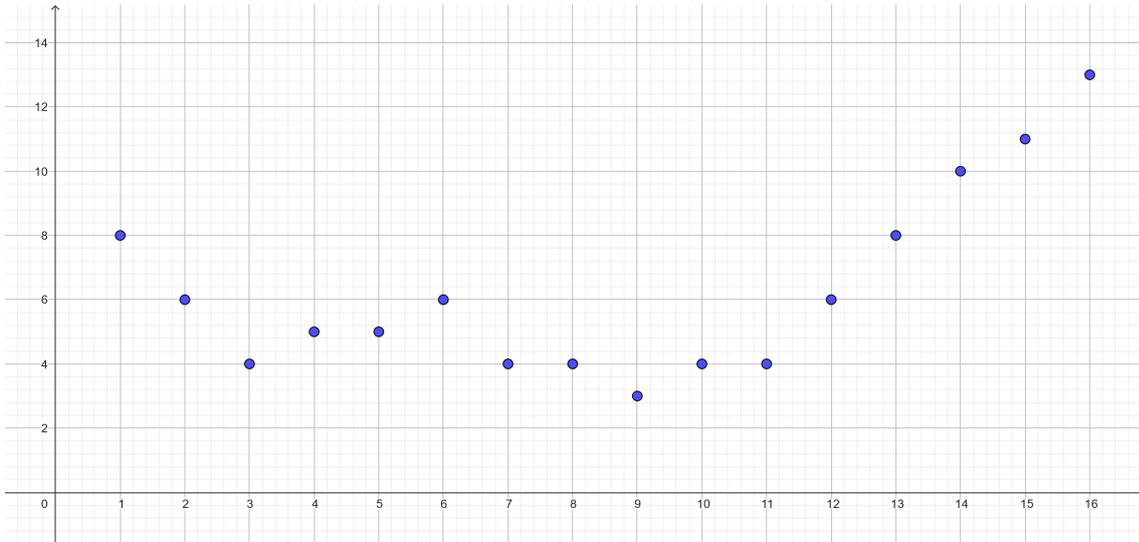


Figura 3 – Representação de um sinal discreto  $v$ .

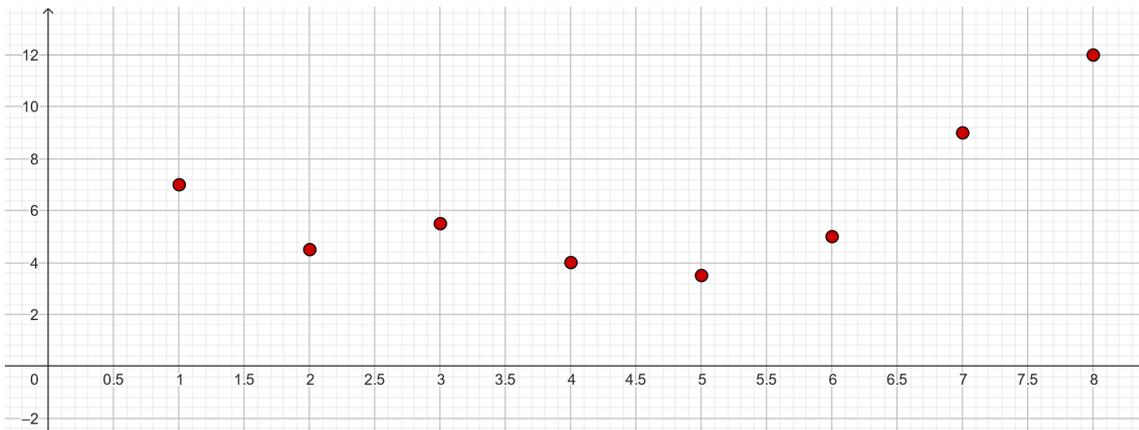


Figura 4 – Espaço de Aproximação.

a informação presente nos coeficientes de aproximação. Para obter mais detalhes e fazer com que seja possível recuperar o sinal original, criaremos o chamado **Espaço de Detalhe**, formado pelos coeficientes de detalhe, no qual computaremos a diferença, para todo  $n$  ímpar, entre  $x_n$  e o seu correspondente coeficiente de aproximação, isto é,

$$d_n = x_n - a_n.$$

Como da definição de média, a diferença entre ambos os pontos do par e seu respectivo ponto no espaço de aproximação é a mesma, em módulo, não precisamos computar esse valor duas vezes:

$$v_{cd} = \{1, -0.5, -0.5, 0, -0.5, -1, -1, -1\}.$$

Agora temos dois novos sinais mais simples e que contém toda informação necessária para recuperar o sinal original. Para isso, basta tomar o primeiro ponto do Espaço de Aproximação

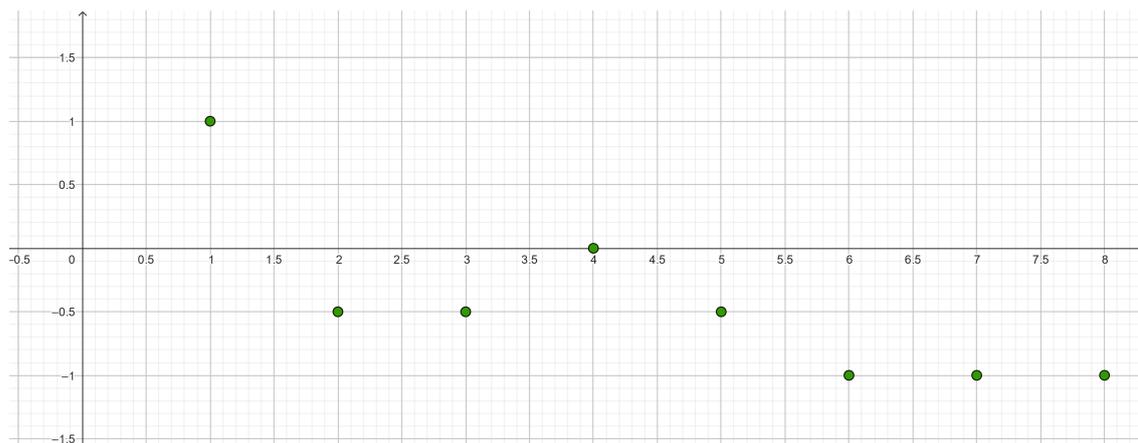


Figura 5 – Espaço de Detalhe.

mação, posicioná-lo no gráfico e somar com seu correspondente no Espaço de Detalhe, assim obtendo o primeiro do par de pontos do sinal. O segundo será facilmente encontrado por simetria.

Por exemplo, se tomarmos o primeiro coeficiente de aproximação 7 e somarmos com seu coeficiente de detalhe 1, obteremos o valor 8 e, por simetria, facilmente teremos 6 como segundo valor do primeiro par. E assim, obteremos todos os valores iniciais.

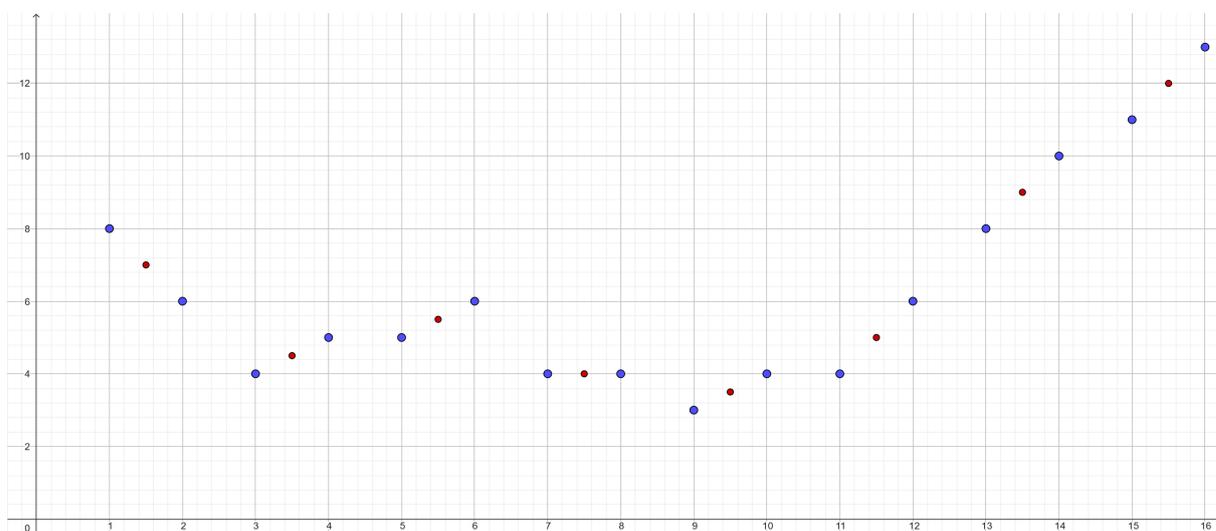


Figura 6 – Reconstrução do sinal original aplicando a Transformada Inversa de Haar

Perceba que podemos reapplicar o processo nesse novo Espaço de Aproximação, obtendo assim um sinal ainda mais aproximado, com um novo Espaço de Detalhe como complemento. Enquanto formos aplicando as transformadas, estamos comprimindo informações importantes do sinal em questão em um espaço cada vez menor, ou seja, a cada nova aplicação da transformada, teremos um novo nível de complexidade.

Agora, para ilustrar o que de fato seria uma transformada com múltiplos níveis, vejamos o seguinte exemplo.

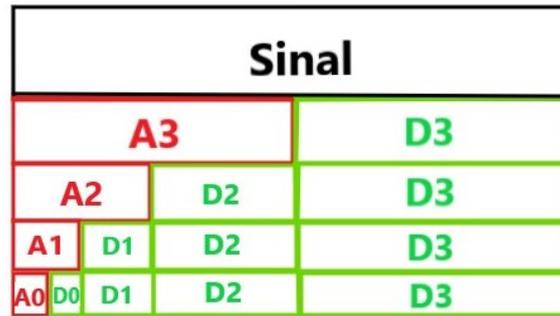


Figura 7 – Ilustração esquemática da Transformada de Haar de múltiplos níveis.

**Exemplo 3.1.1.** Considere o seguinte sinal:

$$u = \{5, 7, 8, 8, 4, 2, -0.5, -1.5\}.$$

Porém, ao invés de representá-lo com pontos, representaremos com funções escada.

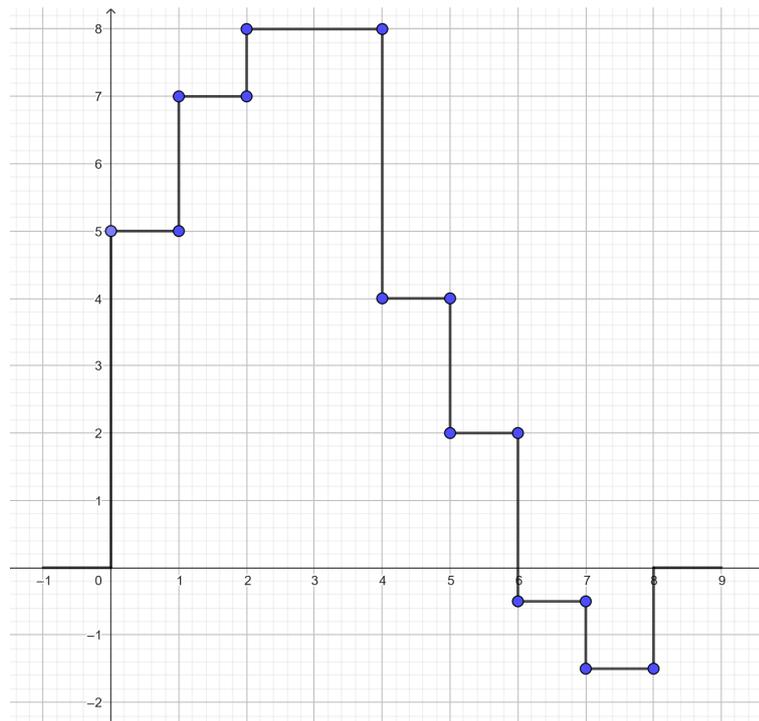


Figura 8 – Representação gráfica do sinal  $u$  através de funções escada.

Seguindo os passos do algoritmo, calculamos o primeiro Espaço de Aproximação. Em seguida, computamos os coeficientes que formam o Espaço de Detalhe.

Agora, podemos aplicar novamente o processo, obtendo uma segunda transformada. Aplicando mais uma vez, teremos uma terceira e última transformada, onde ficamos apenas com um coeficiente de aproximação, o qual representa o valor médio do sinal.

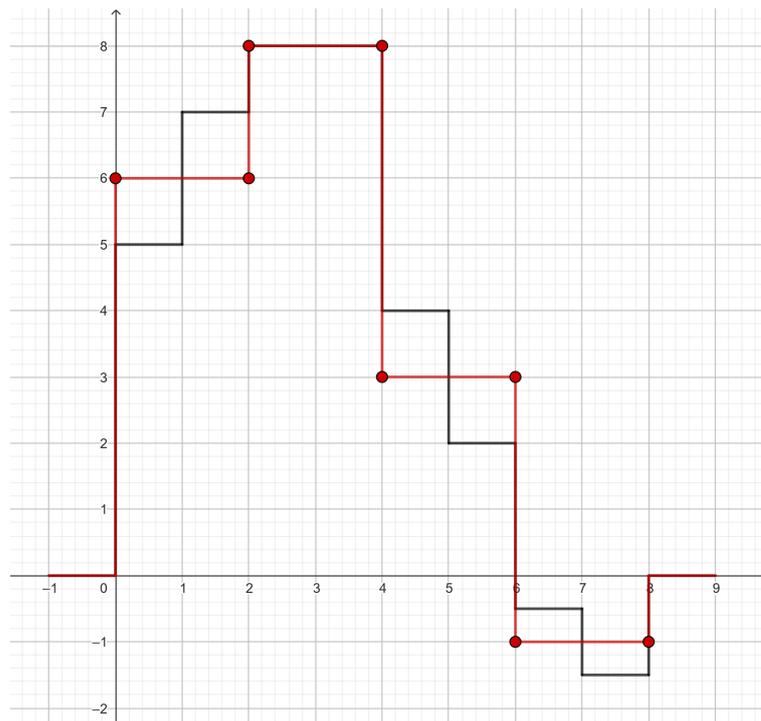


Figura 9 – Coeficientes de aproximação  $u_{ca_1} = \{6, 8, 3, -1\}$ .

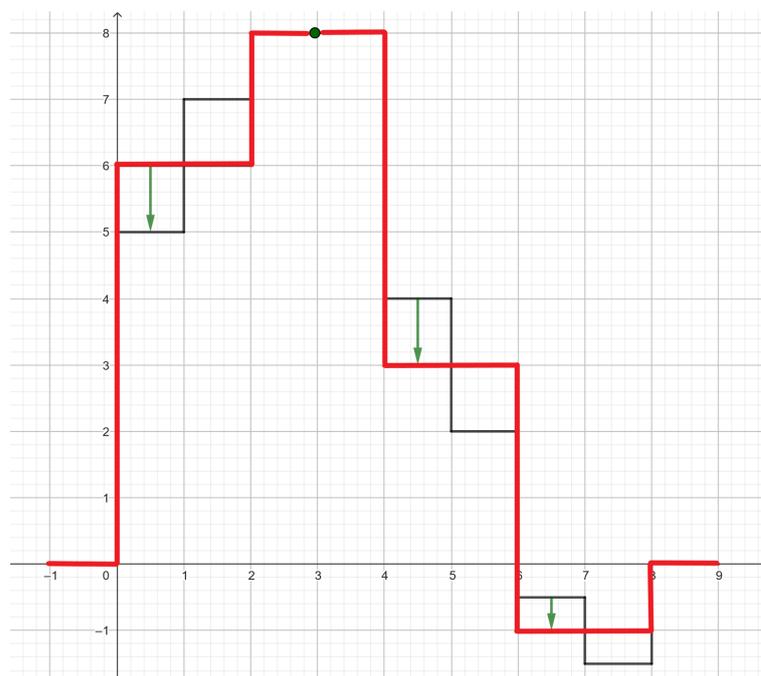


Figura 10 – Coeficientes de detalhe  $u_{cd_1} = \{-1, 0, 1, 0.5\}$ .

E assim teríamos os seguintes valores:

- Sinal original:  $u = \{5, 7, 8, 8, 4, 2, -0.5, -1.5\}$ ;
- Transformada de nível 1:  $u_{a_1} = \{6, 8, 3, -1\}$ ,  $u_{d_1} = \{-1, 0, 1, 0.5\}$ ;

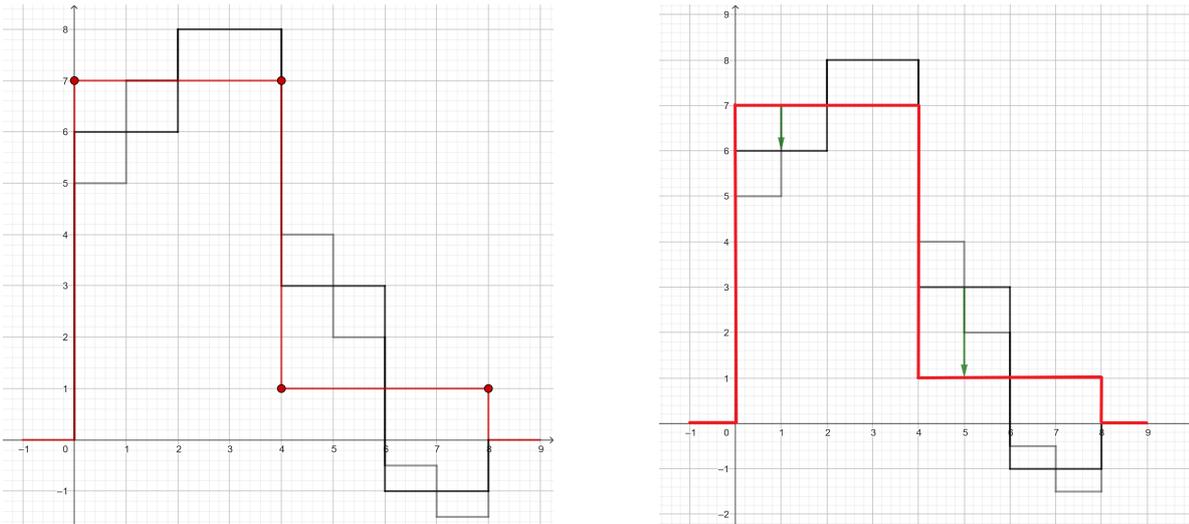


Figura 11 – Transformada de nível 2.

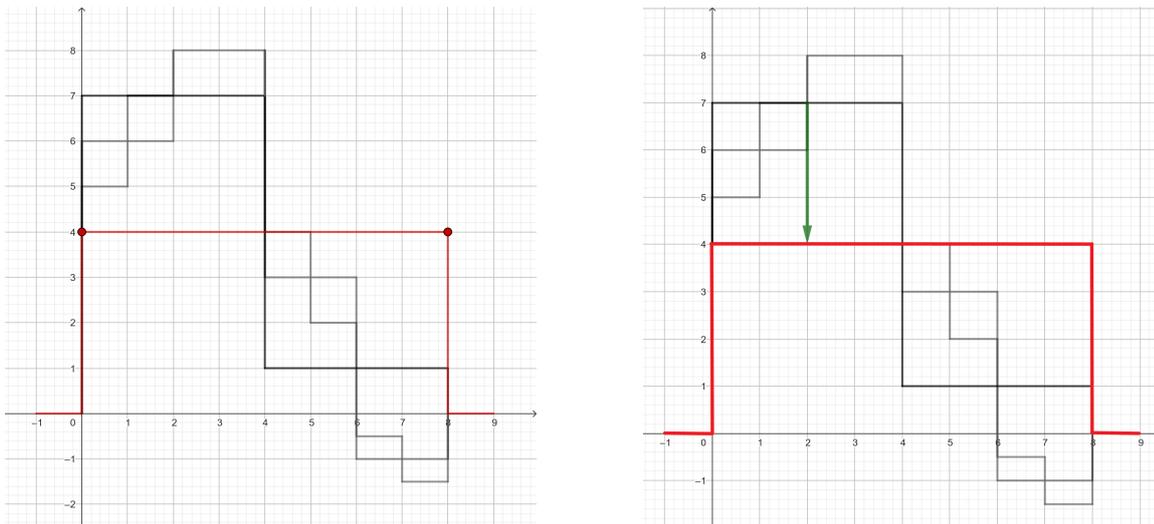


Figura 12 – Transformada de nível 3.

- Transformada de nível 2:  $u_{a_2} = \{7, 1\}$ ,  $u_{d_2} = \{\{-1, 2\}, \{-1, 0, 1, 0.5\}\}$ ;
- Transformada de nível 3:  $u_{a_3} = \{4\}$ ,  $u_{d_3} = \{\{3\}, \{-1, 2\}, \{-1, 0, 1, 0.5\}\}$ .

Veja que, quanto maior o nível da transformada, os valores tendem a ficar cada vez menores, o que representa bem o objetivo da Transformada de Haar, que é comprimir informação em um espaço menor. Observe também que sempre "carregamos" os coeficientes de detalhe para a próxima transformada.

Para voltarmos ao sinal original, utilizaremos as funções escada e as wavelets de Haar.

Para tanto, basta seguirmos os seguintes passos:

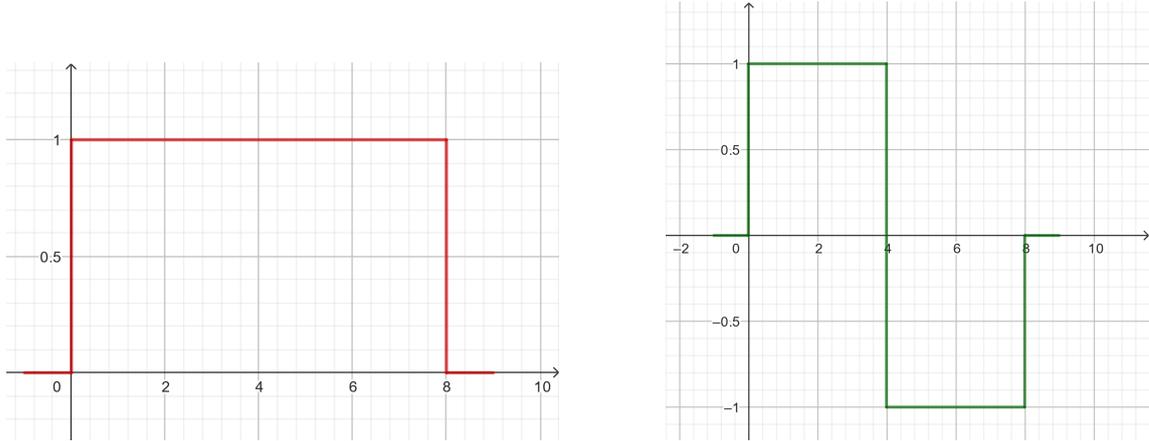


Figura 13 – Esboço de uma função escada (vermelho) e de uma wavelet de haar (verde)

1. Começando da transformada de maior nível (3), tomamos o coeficiente de aproximação e multiplicamos pela função escada representada na imagem.
2. Depois tomamos seu respectivo coeficiente de detalhe e o multiplicamos pela wavelet de Haar representada na imagem.
3. Agora somamos as duas funções.
4. Passaremos para os coeficientes de detalhe da transformada do nível anterior e faremos o mesmo processo de multiplicar pela função wavelet. Porém, como precisaremos utilizar duas funções wavelet, a primeira sera usada na primeira metade do sinal e a segunda na segunda metade.
5. De forma similar, ao passarmos para os coeficientes de detalhe do próximo nível, que agora são quatro, faremos o mesmo processo, mas agora dividindo o sinal em quatro partes, pois usaremos quatro wavelets.

**Observação 3.1.2.** O processo da transformada inversa pode ser feito a partir de qualquer nível de transformada.

Olhando agora com mais rigor matemático, a partir da wavelet de Haar, podemos escrever as seguintes relações:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x - 1) \right) := \sqrt{2}(h_0 \phi(2x) + h_1 \phi(2x - 1)) \quad (3.4)$$

$$\phi(x) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x - 1) \right) := \sqrt{2}(g_0 \phi(2x) + g_1 \phi(2x - 1)) \quad (3.5)$$

Podemos definir os coeficientes  $a_{j,k}$  (coeficientes de aproximação) e  $d_{j,k}$  (coeficientes de detalhe) como as projeções de  $f$  sobre  $\phi_{j,k}$  e  $\psi_{j,k}$ , respectivamente ou seja,

$$a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle \quad \text{e} \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Então, ao multiplicarmos as equações (3.4) e (3.5) por  $f$  e as integrarmos (em  $\mathbb{R}$ ), teremos as seguintes relações de coeficientes:

$$a_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j-1,2n} + a_{j-1,2n+1}), \quad (3.6)$$

e

$$d_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j-1,2n} - a_{j-1,2n+1}). \quad (3.7)$$

Com algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$a_{j-1,2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,n} + d_{j,n}) \quad (3.8)$$

$$a_{j-1,2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,n} - d_{j,n}) \quad (3.9)$$

as quais nos permitem passar do nível  $j$  para o nível  $j - 1$ . As igualdades (3.6) e (3.7) nos dão um algoritmo rápido de **decomposição** de uma função, da mesma forma que as igualdades (3.8) e (3.9) nos dão um algoritmo rápido de **reconstrução** de uma função. Esses algoritmos se generalizam para wavelets em geral, como será visto na seção de Análise de Multiresolução.

# ANÁLISE DE MULTIRESOLUÇÃO

---

A análise de multiresolução (AMR) é fundamental na teoria de wavelets. A partir dela, podemos analisar uma função ou sinal em diferentes escalas. Podemos olhar esse conceito como a observação de uma imagem em diferentes níveis de ampliação. Quanto mais nos aproximamos, detalhes menores se tornam mais evidentes, porém, perdemos a visão geral da imagem como um todo. Por outro lado, ao nos afastarmos, ganhamos uma compreensão mais abrangente da imagem, mas os detalhes menores tornam-se menos perceptíveis ([MORETTIN, 2014](#)).

A partir dessas diferentes escalas de detalhe podemos entender melhor as características do sinal, em diferentes níveis de refinamento. O que nos dá aplicações úteis em áreas como compressão de dados, remoção de ruído de sinais, detecção de bordas em imagens, entre outras.

Para a escrita deste capítulo foram utilizadas as seguintes referências: ([DAUBECHIES, 1999](#)), ([HERNANDEZ; WEISS, 1996](#)), ([MECHEE; HUSSAIN; SALMAN, 2021](#)).

## 4.1 Ideia e definição

**Definição 4.1.1.** Defina:

$$\phi_{j,n} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n).$$

Uma **Análise de Multiresolução** (AMR) é uma sequência crescente de subespaços fechados  $\{V_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$  que aproximam funções de  $L^2(\mathbb{R})$ , com as seguintes propriedades:

- (1)  $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$ ;
- (2)  $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ ;
- (3)  $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ;

- (4)  $f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$ ;
- (5)  $f(\cdot) \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- (6) Existe  $\phi \in V_0$  de forma que  $\{\phi_{0,n} = \phi(\cdot - n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  é base ortonormal de  $V_0$ .

A partir dessa definição, podemos fazer algumas observações sobre as propriedades listadas:

- A propriedade (4) assegura que todos os  $V_j$  se relacionem em escala a um mesmo espaço central  $V_0$ .
- As propriedades (4) e (5) nos dizem que  $f \in V_j \Rightarrow f(\cdot - 2^j n) \in V_j \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- As propriedades (4) e (6) garantem que  $\{\phi_{j,n} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n)\}$  é uma base ortonormal para  $V_j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .
- As propriedades (1) e (2) asseguram que para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  temos que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f,$$

sendo  $P_j$  a projeção ortogonal em  $V_j$ .

**Observação 4.1.2.** Note que os subespaços  $V_j$  podem ser vistos como espaços de aproximação em estágios sucessivos, em que quanto menor o índice  $j$ , mais precisa é a aproximação. Dessa forma, para passarmos de uma resolução de  $V_j$  para  $V_{j-1}$ , é necessário incorporar os detalhes de  $P_j f$  para  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Esses detalhes se encontram no complemento ortogonal de  $V_j$  em relação a  $V_{j-1}$ , que será denotaremos por  $W_j$ . Ou seja

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad W_j \perp V_j.$$

Juntando esse fato às propriedades (2) e (3), temos que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n, \quad W_n \perp W_{n'}, \quad n \neq n'.$$

## 4.2 Construindo uma base de Wavelets

A seguir, apresentaremos um resultado extremamente importante, que nos permitirá construir base de wavelets em  $L^2(\mathbb{R})$  através de uma AMR (DAUBECHIES, 1999). Além disso, a partir da demonstração do teorema, estabeleceremos uma representação nítida da função  $\psi$ , utilizando de ferramentas como a transformada de Fourier, devido ao fato de que operações como dilatação e translação podem ser efetuadas diretamente no domínio das frequências.

**Teorema 4.2.1.** Se uma sequência de subespaços fechados  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  em  $L^2(\mathbb{R})$  satisfaz as propriedades de uma AMR, então existe uma base de wavelets  $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$  para  $L^2(\mathbb{R})$  de forma que

$$P_{j-1} = P_j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

*Demonstração.* Para provarmos esse teorema, a ideia da demonstração será construir uma base ortonormal  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  em um espaço de Hilbert  $W_0$ . A construção segue a ideia de representar a wavelet mãe  $\psi$  em termos de suas translações e dilatações, utilizando propriedades da transformada de Fourier.

Perceba que  $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ , e, além disso, sabemos que  $\{\phi_{-1,n}\}$  é base ortonormal de  $V_{-1}$ , dessa forma:

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{-1,n}, \quad \text{com } h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle. \quad (4.1)$$

Dessa forma, podemos reescrever (4.1) como

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2x - n). \quad (4.2)$$

E também na forma de sua transformada de Fourier

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi/2} \hat{\phi}(\xi/2). \quad (4.3)$$

Onde vemos que a convergência é obtida no sentido  $L^2$ . Dessa forma, podemos olhar para (4.3) como

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), \quad \text{com } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}. \quad (4.4)$$

Sendo que a igualdade da equação acima vale em quase todo ponto. Além disso, por (4.1), pode-se ver que a função  $m_0$  é  $2\pi$ -periódica.

Da ortogonalidade das  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , temos

$$\int \phi(x) \overline{\phi(x-k)} dx = \int |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 d\xi = \delta_{0,k}. \quad (4.5)$$

Como a função  $\hat{\phi}$  só difere de 0 no intervalo  $[0, 2\pi]$ , temos que (4.5) vale. Além de que como as funções  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  são ortogonais, seu produto interno sempre será 1 ou 0.

Dessa forma, vê-se que para que a equação acima seja verdadeira, temos que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 = (2\pi)^{-1} \text{ q.s.} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.4) em (4.6) e fazendo  $\omega = \xi/2$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + \pi\ell)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi} \\
& \sum_{\ell \text{ par}} |m_0(\omega + \pi\ell)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 + \sum_{\ell \text{ ímpar}} |m_0(\omega + \pi\ell)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 = (2\pi)^{-1} \\
& \sum_{\ell \text{ par}} |m_0(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 + \sum_{\ell \text{ ímpar}} |m_0(\omega + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 = (2\pi)^{-1} \\
& |m_0(\omega)|^2 \sum_{\ell \text{ par}} |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \sum_{\ell \text{ ímpar}} |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2 = (2\pi)^{-1} \\
& \left( |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \right) \underbrace{\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + \pi\ell)|^2}_{=(2\pi)^{-1} \text{ por (4.6)}} = (2\pi)^{-1} \\
& \Rightarrow |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \text{ q.s.} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Tome agora  $f \in W_0$ , e note que  $f \in V_{-1}$  e  $f \perp V_0$ , e assim sendo, podemos reescrevê-la como

$$f = \sum_n f_n \phi_{-1,n}, \quad f_n = \langle f, \phi_{-1,n} \rangle$$

Aplicando a Transformada de Fourier na equação acima:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f_n e^{-in\xi/2} \hat{\phi}(\xi/2) = m_f(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), \quad \text{com } m_f(\xi) = f_n \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n e^{-in\xi} \tag{4.8}$$

Sendo a função  $m_f$   $2\pi$ -periódica em  $L^2([0, 2\pi])$  e a convergência da série presente se dá pontualmente. Já que  $f \perp V_0$ , consequentemente  $f \perp \phi_{0,k}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Dessa forma:

$$\int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi) e^{ik\xi}} d\xi = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \hat{f}(\xi + 2\pi\ell) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)} d\xi = 0,$$

logo, temos que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi\ell) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)} = 0. \tag{4.9}$$

Assim, substituindo (4.4) e (4.8) em (4.9), e lembrando que  $\|\phi\|^2 = 1$ , temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi\ell) \overline{\hat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} m_f(\xi/2 + \pi\ell) \hat{\phi}(\xi/2 + \pi\ell) \overline{m_0(\xi/2 + \pi\ell) \hat{\phi}(\xi/2 + \pi\ell)} \\
&= \sum_{\ell \text{ par}} m_f(\xi/2 + \pi\ell) \overline{m_0(\xi/2 + \pi\ell)} + \sum_{\ell \text{ ímpar}} m_f(\xi/2 + \pi\ell) \overline{m_0(\xi/2 + \pi\ell)} \\
&= \sum_{\ell \text{ par}} m_f(\xi/2) \overline{m_0(\xi/2)} + \sum_{\ell \text{ ímpar}} m_f(\xi/2 + \pi) \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \\
&\Rightarrow m_f(\omega) \overline{m_0(\omega)} + m_f(\omega + \pi) \overline{m_0(\omega + \pi)} = 0 \text{ q.s.} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Perceba que em (4.10), pelo menos uma das parcelas da equação deve ser diferente de zero. Suponha que  $m_f(\omega)\overline{m_0(\omega)} \neq 0$ , dessa forma:

$$m_f(\omega) + \frac{m_f(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)}}{\overline{m_0(\omega)}} = 0 \Rightarrow m_f(\omega) = -\frac{m_f(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)}}{\overline{m_0(\omega)}}$$

Definindo  $\lambda(\omega) = -\frac{m_f(\omega + \pi)}{\overline{m_0(\omega)}}$ , temos que

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{m_0(\omega + \pi)}. \quad (4.11)$$

Mais ainda, temos novamente por (4.10), que

$$\lambda(\omega) + \lambda(\omega + \pi) = 0,$$

em particular,  $|\lambda(\omega)|^2$  é periódica de período  $\pi$ .

Dessa forma, podemos reescrever (4.11) como

$$\lambda(\omega) = e^{i\omega} v(2\omega), \quad (4.12)$$

sendo  $v(2\omega)$  uma função  $2\pi$ -periódica. Assim, se substituirmos (4.11) e (4.12) em (4.8), obtemos a seguinte estrutura para  $\hat{f}$ :

$$\hat{f}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2 + \pi)}v(\xi)\hat{\phi}(\xi/2). \quad (4.13)$$

A equação acima para a Transformada de Fourier de  $f \in W_0$  sugere que tomemos como candidato a wavelet a transformada inversa de Fourier de:

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2 + \pi)}\hat{\phi}(\xi/2). \quad (4.14)$$

De fato, podemos escrever:

$$\hat{f}(\xi) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k e^{-ik\xi} \right) \hat{\psi}(\xi) \Rightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \psi(\cdot - k), \quad (4.15)$$

o que mostra que as funções  $\psi(\cdot - n)$  são boas candidatas a base. Para provar isso, precisamos primeiro ver se  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma família ortogonal em  $W_0$ :

$$\begin{aligned}
& \int \psi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = \int e^{ik\xi} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 d\xi \\
\Rightarrow & \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| e^{i(\xi+2\pi\ell)/2} m_0 \left( \frac{\xi + 2\pi\ell}{2} + \pi \right) \hat{\phi} \left( \frac{\xi + 2\pi\ell}{2} \right) \right|^2 \\
& = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi\ell + \pi \right) \hat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + \pi\ell \right) \right|^2 \\
& = \sum_{\ell \text{ par}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 \left| \hat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + \underbrace{2n}_{\ell} \pi \right) \right|^2 + \sum_{\ell \text{ impar}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + \pi\ell \right) \right|^2 \\
& = \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + 2n\pi \right) \right|^2 + \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + \pi + 2n\pi \right) \right|^2 \\
\stackrel{(4.6)}{=} & (2\pi)^{-1} \left[ \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 + \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 \right] \\
\stackrel{(4.7)}{=} & (2\pi)^{-1} \text{ q.s. Assim } \int \psi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = \delta_{k,0}.
\end{aligned}$$

Agora, para verificar que  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é base, vejamos que  $\hat{f}(\xi) = \gamma(\xi) \hat{\psi}(\xi)$  com  $\gamma \in L^2([0, 2\pi])$  sendo  $2\pi$ -periódica.

Por (4.13):

$$\hat{f}(\xi) = v(\xi) \hat{\psi}(\xi) \quad \text{com} \quad \int_0^{2\pi} |v(\xi)|^2 d\xi = 2 \int_0^{\pi} |\lambda(\omega)|^2 d\omega.$$

E por (4.8):

$$\int_0^{2\pi} |m_f(\xi)|^2 d\xi = \pi \sum_n |f_n|^2 = \pi \|f\|^2 < \infty$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} |m_f(\xi)|^2 d\xi \stackrel{(4.11)}{=} \int_0^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 d\xi |m_0(\xi + \pi)|^2 \\
& = \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi + \int_{\pi}^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Fazendo  $\xi = u + \pi$ , na segunda parcela da soma acima, temos:

$$\int_0^{\pi} \left| \underbrace{\lambda(u + \pi)}_{=u} \right|^2 \left| \underbrace{m_0(u + 2\pi)}_{=u} \right|^2 du.$$

Sem perda de generalidade, podemos novamente fazer a mudança  $u = \xi$  e assim voltando à expressão anterior:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi + \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi)|^2 d\xi = \\
& = \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 \left[ |m_0(\xi + \pi)|^2 + |m_0(\xi)|^2 \right] d\xi = \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 d\xi \Rightarrow \int_0^{2\pi} |v(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \|f\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

□

A partir do teorema anterior, conseguimos assegurar a existência de uma base de wavelets para o espaço  $L^2(\mathbb{R})$ . Mas note que a fórmula

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \hat{\phi}(\xi/2),$$

encontrada na prova do teorema, está em termos da transformada de Fourier da função  $\psi$ . Desse modo, para obtermos uma fórmula explícita para a função  $\psi$  aplicaremos o processo de inversão da transformada de Fourier. Inicialmente, com base na definição de  $m_0$  em (4.4), podemos escrever:

$$\begin{aligned} e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} &= \frac{e^{i\xi/2}}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ik(\xi/2 + \pi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{i(k+1)\xi/2} (-1)^k \end{aligned}$$

e fazendo a mudança  $k + 1 = -j$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{h_{-j-1}} e^{-ij\xi/2} (-1)^{j-1}.$$

Dessa forma, podemos reescrever:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{h_{-j-1}} e^{-ij\xi/2} (-1)^{-j-1} \hat{\phi}(\xi/2).$$

Como por (4.3), sabemos que

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{2} e^{-ik\xi/2} \hat{\phi}(\xi/2),$$

logo, podemos escrever  $\psi$  da forma

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \phi(2x - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{-1,k}(x), \quad \text{com } g_k = (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

### 4.3 Análise de Multiresolução de Haar

Defina a função:

$$\phi(x) = \mathbf{1}_{[0,1)}(x),$$

e o seu conjunto de translações e dilatações como:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k).$$

Para construirmos a AMR de Haar, escreveremos  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  na forma:

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j,k} \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

Podemos afirmar que  $V_j$  consiste nas funções quadrado-integráveis, que são constantes por partes em intervalos de tamanho  $2^j$ . Notemos agora que as propriedades (4.1.1) são satisfeitas:

1.  $V_{j+1} \subset V_j$  : Se  $f$  é constante por partes em intervalos de tamanho  $2^j$  também será em intervalos de tamanho  $2^{j-1}$ .
2.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$  : Sendo  $f \in V_j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , a mesma deve ser constante em toda a reta. De igual modo, para que ela seja quadrado-integrável, a única possibilidade é que seja a função identicamente nula.
3.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  : Essa propriedade corresponde ao Teorema (3.0.2).
4.  $f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$  : Essa propriedade se dá diretamente da definição dos  $V_j$  e de  $\phi_{j,k}$  feita acima.
5.  $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$  : Também decorre da definição dos  $V_j$  e de  $\phi_{j,k}$ .
6.  $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  constitui uma base ortonormal para  $V_0$  pela definição de função  $\phi$ .

Assim concluímos que os espaços  $V_j$  formam uma Análise de Multiresolução.

## 4.4 Transformada discreta de Wavelets

Seja  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  uma Análise de Multiresolução e  $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  os espaços complementares de wavelets em relação à AMR em  $L^2(\mathbb{R})$ . Ou seja os espaços que satisfazem à relação:

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, temos  $\phi$ , função escada associada a esta AMR, e  $\psi$  a sua wavelet correspondente. Na seção 3.1, obtivemos as seguintes relações:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k)$$

em que  $h_k$  são os coeficientes de aproximação de  $\phi$  e  $g_k$  são os coeficientes de detalhe de  $\psi$ . Podemos generalizar as relações acima de modo que:

$$\begin{aligned}\phi_{j,n}(x) &= 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - n) = 2^{-(j-1)/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2^{-(j-1)}x - 2n - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{j-1,2n+k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \phi_{j-1,k}(x), \quad \text{para } j, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

De forma análoga:

$$\psi_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{j-1,2n+k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \phi_{j-1,k}, \quad \text{para } j, n \in \mathbb{Z}.\tag{4.18}$$

Agora, seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , e denote por  $P_{V_j}, P_{W_j}$  as projeções ortogonais em  $V_j, W_j$  respectivamente. Da definição de  $V_j$ , denotando  $\langle P_{V_j}f, \phi_{j,k} \rangle$  por  $a_{j,k}$  (coeficientes de aproximação), obtemos então

$$P_{V_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}.$$

Das propriedades de projeções ortogonais obtemos a seguinte relação:

$$\langle f - P_{V_j}f, \phi_{j,k} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle P_{V_j}f, \phi_{j,k} \rangle = \langle f, \phi_{j,k} \rangle, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Desse modo, podemos encontrar os coeficientes  $(a_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  a partir dos coeficientes  $(a_{j-1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  de forma recursiva. Note que por (4.17), temos

$$\begin{aligned}a_{j,n} &= \langle P_{V_j}f, \phi_{j,n} \rangle = \langle f, \phi_{j,n} \rangle = \left\langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \phi_{j-1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2n}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2n}} a_{j-1,k}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Partindo do mesmo raciocínio, mostra-se que

$$\langle P_{W_j}f, \psi_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

E definindo  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  por  $d_{j,k}$ , temos

$$P_{W_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}.$$

A partir de (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} d_{j,n} &= \langle P_{W_j}f, \psi_{j,n} \rangle = \langle f, \psi_{j,n} \rangle = \left\langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \phi_{j-1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2n}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2n}} a_{j-1,k}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Das fórmulas representadas em (4.19) e (4.20), obtemos um algoritmo recursivo de decomposição para  $f$ , diagramado a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{j_0, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_0+1, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_0+2, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_0+3, \cdot} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & a_{j_0+l, \cdot} \\ & \searrow & \\ & & d_{j_0+1, \cdot} & & d_{j_0+2, \cdot} & & d_{j_0+3, \cdot} & & \cdots & & d_{j_0+l, \cdot} \end{array} \quad (4.21)$$

Definimos esse algoritmo como a **transformada discreta de wavelets**.

Agora, note que por (4.17), temos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1,k}, \phi_{j,n} \rangle &= \left\langle \phi_{j-1,k}, \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2n} \phi_{j-1,\ell} \right\rangle = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{h_{\ell-2n}} \langle \phi_{j-1,k}, \phi_{j-1,\ell} \rangle \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{h_{\ell-2n}} \delta_{k,\ell} = \overline{h_{k-2n}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Partindo do mesmo raciocínio, temos

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1,k}, \psi_{j,n} \rangle &= \left\langle \phi_{j-1,k}, \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_{\ell-2n} \psi_{j-1,\ell} \right\rangle = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{g_{\ell-2n}} \langle \phi_{j-1,k}, \psi_{j-1,\ell} \rangle \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{g_{\ell-2n}} \delta_{k,\ell} = \overline{g_{k-2n}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Já que  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ , temos que

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}.$$

E assim, a partir das relações em (4.22) e (4.23), segue que

$$\begin{aligned}
 a_{j-1,n} &= \langle P_{V_{j-1}} f, \phi_{j-1,n} \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \right\rangle \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \cdot a_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \cdot d_{j,k}.
 \end{aligned}$$

E a partir do algoritmo descrito acima, podemos esquematizar a **transformada discreta inversa de wavelets** em (4.24)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 a_{j_0+l, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_0+l-1, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_0+l-2, \cdot} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & a_{j_0+1, \cdot} & \longrightarrow & a_{j_0, \cdot} \\
 & \nearrow & \\
 d_{j_0+l, \cdot} & & d_{j_0+l-1, \cdot} & & d_{j_0+l-2, \cdot} & & \cdots & & d_{j_0+1, \cdot} & & 
 \end{array} \quad (4.24)$$

## 4.5 Exemplos

**Exemplo 4.5.1.** Neste exemplo, consideraremos a análise de dados de temperatura. Imagine que você possui uma série temporal de dados da temperatura diária medida ao longo de um ano e deseja realizar uma análise a fim de identificar padrões sazonais.

Utilizando AMR e a transformada de wavelet, simulamos a série de dados e cada gráfico representa uma escala diferente da análise, permitindo a observação dos padrões sazonais em diferentes momentos do ano.

**Exemplo 4.5.2.** Suponha que você está coletando dados de vibração de uma máquina industrial para monitorar seu funcionamento. Porém, tais dados estão sujeitos a ruídos que podem dificultar a identificação de padrões. Neste exemplo, estamos simulando um sinal de vibração com ruído, onde a frequência principal é de 50 Hz.

Neste cenário, a AMR pode ser usada para decompor o sinal de vibração em diferentes escalas de frequência e identificar quais frequências contêm informações relevantes sobre o funcionamento da máquina, enquanto isolam o ruído. Os coeficientes de aproximação de cada escala representam as diferentes componentes de frequência presentes no sinal.

**Exemplo 4.5.3.** Neste exemplo, geramos uma série temporal simulada de preços de ações usando retornos diários aleatórios. Em seguida, aplicamos a análise de multiresolução usando a transformada de wavelet para decompor a série em diferentes escalas de detalhe. Cada plot representa uma escala diferente da decomposição, permitindo que você observe padrões de volatilidade em diferentes níveis de refinamento. Isso pode ser útil em análises financeiras para entender a volatilidade de ativos em diferentes escalas temporais.

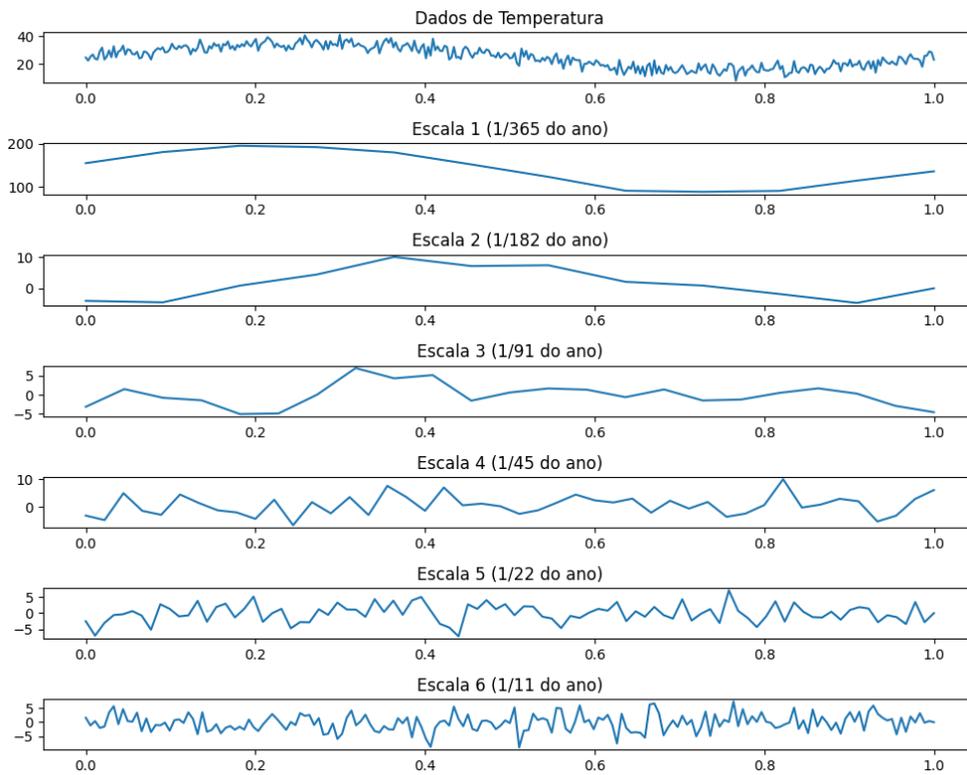


Figura 14 – Exemplo 4.5.1.

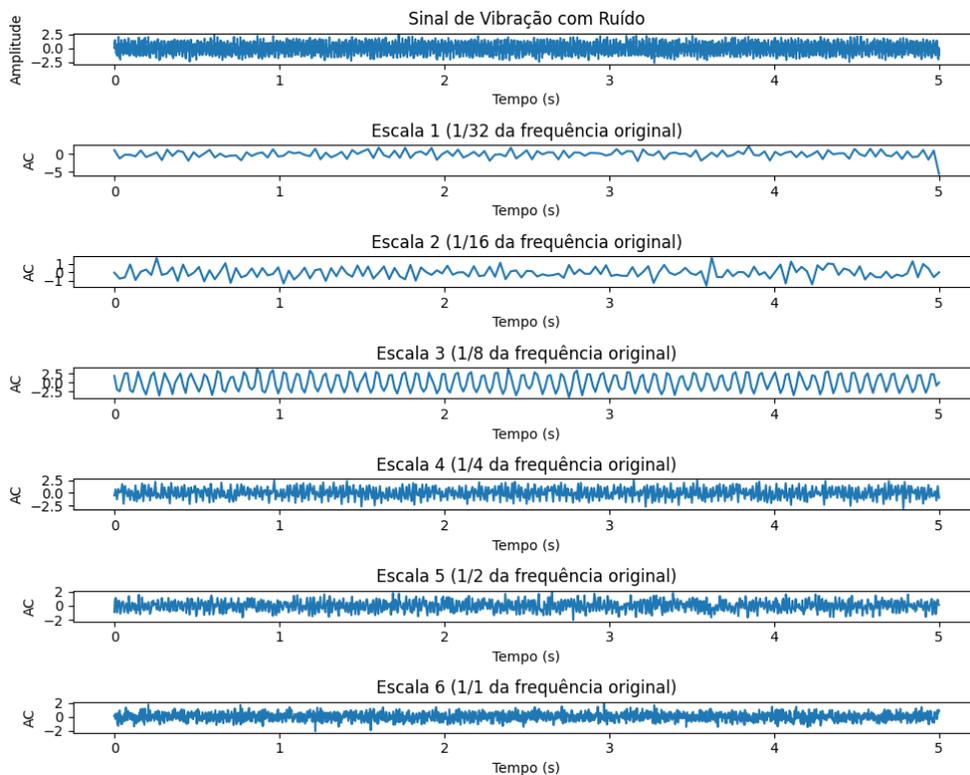


Figura 15 – Exemplo 4.5.2.

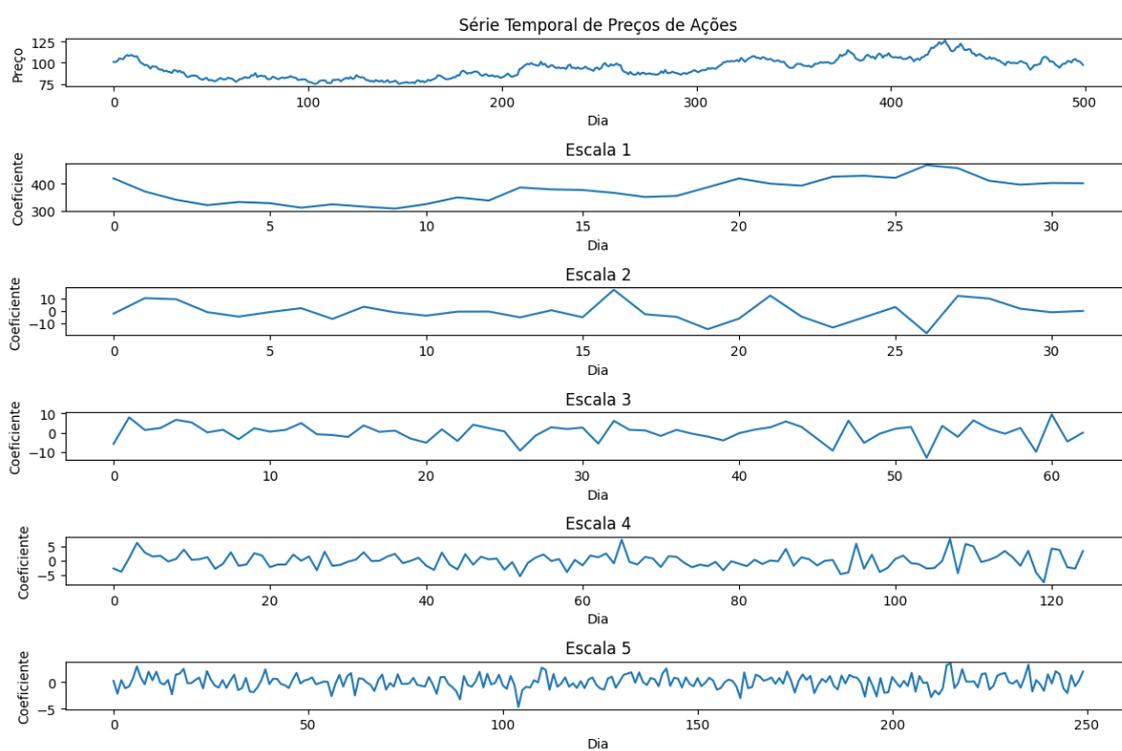


Figura 16 – Exemplo 4.5.3.



# WAVELETS ASSIMÉTRICAS DE HAAR

Após as definições apresentadas nos capítulos anteriores, uma pergunta natural é se a ideia de wavelets se generaliza para além da reta real, e a resposta é sim. Neste capítulo apresentaremos o conceito de wavelets assimétricas de Haar para um espaço  $L_p(X, \Sigma, \mu)$ .

Este capítulo foi escrito com base em (GIRARDI; SWELDENS, 1997) e (SMANIA, 2022).

## 5.1 Definições Iniciais

**Definição 5.1.1.** Uma família enumerável  $\{\psi_\gamma\}_{\gamma \in G}$  é uma base incondicional para  $L^p$  se para cada  $f \in L^p$ , existem únicos coeficientes reais  $\{c_\gamma\}_{\gamma \in G}$ , de forma que a série  $\sum c_\gamma \psi_\gamma$  converge incondicionalmente para  $f$  na norma  $L^p$  (BREZIS, 2010), (FOLLAND, 2013). Essa propriedade equivale às seguintes duas condições:

(C1) O fecho linear de  $\{\psi_\gamma \mid \gamma \in G\}$  é igual a  $L^p$ .

(C2) Existe uma constante  $K_p$  tal que, para todos os subconjuntos finitos  $\Gamma \subset G$ :

$$\left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon_\gamma c_\gamma \psi_\gamma \right\|_p \leq K_p \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \psi_\gamma \right\|_p,$$

para quaisquer valores de  $c_\gamma \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon_\gamma = \pm 1$ .

O menor valor de  $K_p$  para o qual a condição (C2) é satisfeita, denominado  $K_p(\{\psi_\gamma\})$ , é conhecido como a constante de base incondicional de  $\{\psi_\gamma\}$ .

**Definição 5.1.2.** Uma **árvore**  $(\mathcal{A}, g, p, C, <)$  é um conjunto enumerável  $\mathcal{A}$ , que pode possuir ou não um **elemento raiz**  $\rho$ ; além de uma **função geração**  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ , uma **função mãe**

$p : \mathcal{A} \setminus \{\rho\} \rightarrow \mathcal{A}$ , uma **função filhos**  $C : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$  e uma **ordenação parcial**  $<$  em  $\mathcal{A}$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(T1) \ C(\alpha) = \{\beta \in \mathcal{A} \mid p(\beta) = \alpha\};$$

$$(T2) \ 0 \leq \#C(\alpha) < \infty, \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A};$$

$$(T3) \ \text{Se } \beta \in C(\alpha), \text{ então } g(\beta) = 1 + g(\alpha);$$

$$(T4) \ \text{A ordenação } < \text{ ordena linearmente } C(\alpha) \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A};$$

$$(T5) \ \text{Se } g(\alpha) < g(\beta) \text{ e } p^m(\alpha) = p^n(\beta) \text{ para } m, n > 0, \text{ então } \beta < \alpha;$$

$$(T6) \ \text{Se } \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \text{ então existem } m, n \geq 0 \text{ de forma que } p^m(\alpha) = p^n(\beta).$$

As funções potência  $p^n$  da função mãe  $p$  são definidas por:

$$\begin{cases} p^0(\alpha) = \alpha; \\ p^n(\alpha) = p(p^{n-1}(\alpha)). \end{cases} \quad (5.1)$$

Para simplificar a notação, denotamos uma árvore  $(\mathcal{A}, g, p, C, <)$  apenas por  $\mathcal{A}$ . Podemos estender a ordenação parcial para uma ordenação total dentro de cada geração, isto é, ordenando cada  $\mathcal{A}_k$ , sendo  $\mathcal{A}_k$  a  $k$ -ésima geração de  $\mathcal{A}$ , onde

$$\mathcal{A}_k = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid g(\alpha) = k\}.$$

E dessa forma, as árvores satisfazem a propriedade adicional

$$(T7) \ \text{a ordenação } < \text{ ordena linearmente toda a árvore, isto é, é uma ordem total.}$$

Pode-se pensar em um elemento mãe  $\alpha \in \mathcal{A}_k$  na  $k$ -ésima geração de  $\mathcal{A}$  como gerando os elementos filhos  $\beta$  com  $\beta \in C(\alpha) \subset \mathcal{A}_{k+1}$ . O elemento raiz  $\rho$  não possui mãe.

**Definição 5.1.3.** Definimos uma **folha** como um elemento sem filhos, isto é:

$$C_l(\alpha) = \begin{cases} C(\alpha) & \text{se } \alpha \notin \mathcal{L} \\ \{\alpha\} & \text{se } \alpha \in \mathcal{L}. \end{cases}$$

Sendo  $\mathcal{L}$  o conjunto de folhas em  $\mathcal{A}$ .

Definimos as funções potência  $C^n$ , e respectivamente  $C_l^n$ , de forma análoga a definição das funções potência  $p^n$  (5.1). Note que para  $n \in \mathbb{N}$

$$C_l^n(\alpha) = C^n(\alpha) \cup \left[ \bigcup_{j=0}^{n-1} [C^j(\alpha) \cap \mathcal{L}] \right].$$

**Definição 5.1.4.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida e  $\mathcal{A}$  uma árvore. Uma família indexada

$$\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$$

em  $\Sigma$  é uma **partição encaixada** de  $X$ , com respeito à árvore  $\mathcal{A}$ , se cumpre as seguintes propriedades

(P1)  $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$ , se  $g(\alpha_1) = g(\alpha_2)$  e  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ;

(P2)  $X_\alpha \cap X_\rho = \emptyset$ , se  $\rho \in \mathcal{A}$  e  $p^n(\alpha) \neq \rho$  para cada  $n \geq 0$ ;

(P3) Se  $\alpha$  não é uma folha,  $X_\alpha$  pode ser escrito como a união disjunta

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta \in C(\alpha)} X_\beta;$$

(P4)  $X = \bigcup \{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ;

(P5)  $\sigma(\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}) = \Sigma$ .

**Definição 5.1.5.** Dada uma árvore  $\mathcal{A}$ , existem três tipos de partições encaixadas em relação à ela:

- Tipo 1:  $\rho \in \mathcal{A}$  e  $\mu(X) < \infty$ ;
- Tipo 2:  $\mu(X) < \infty$  e  $\rho \notin \mathcal{A}$ ;
- Tipo 3:  $\mu(X) = \infty$  e  $\rho \notin \mathcal{A}$ .

**Exemplo 5.1.6.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  o espaço de medida de Lebesgue em  $X = [0, 1)$ . Considere a árvore Tipo 1  $(\mathcal{A}, g, p, C, <)$  sendo

- $\mathcal{A} = \{(n, k) \mid n = 0, 1, \dots \text{ e } 1 \leq k \leq 2^n\}$ ,
- $\rho = (0, 1)$ ,
- $g((n, k)) = n$ ,
- $C((n, k)) = \{(n+1, 2k-1), (n+1, 2k)\}$ ,
- $(n+1, 2k-1) < (n+1, 2k)$ .

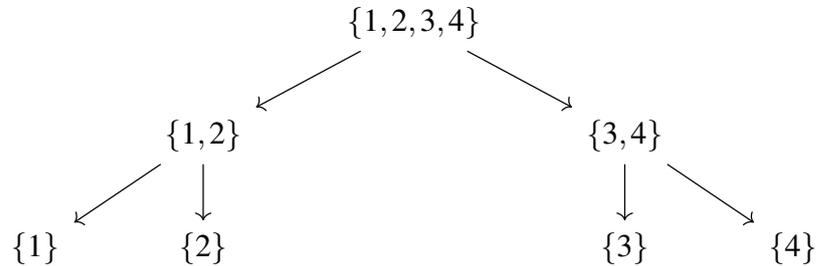
Defina  $X_{(n,k)} = [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)$ .

**Exemplo 5.1.7.** Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  o espaço de medida de Lebesgue em  $X = \mathbb{R}$ . Modifique a árvore do Exemplo 5.1.6 considerando  $n, k \in \mathbb{Z}$ , defina  $X_{(n,k)}$  de forma semelhante ao Exemplo 5.1.6. Nestes dois exemplos, cada  $X_{(n,k)}$  possui dois filhos. Este exemplo é do Tipo 3.

**Exemplo 5.1.8 (Árvore Logarítmica).** Seja  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ . A árvore  $\mathcal{A}_{\log}$  em  $M$  é unicamente determinada pelas seguintes propriedades:

1. Possui  $l$  gerações  $(0, \dots, l-1)$ , onde  $2^{l-2} < m \leq 2^{l-1}$ .
2. Cada elemento de  $\mathcal{A}_{\log}$  é um conjunto de números inteiros consecutivos de  $M$ .
3. Possui um elemento raiz  $\rho = M$  e  $g(\rho) = 0$ .
4. A  $(l-1)$  geração consiste das folhas  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$ .
5. Cada elemento de  $\mathcal{A}_{\log}$  com cardinalidade maior que 1 possui dois filhos, e a cardinalidade do filho mais jovem é igual ou uma unidade menor do que a cardinalidade do filho mais velho.

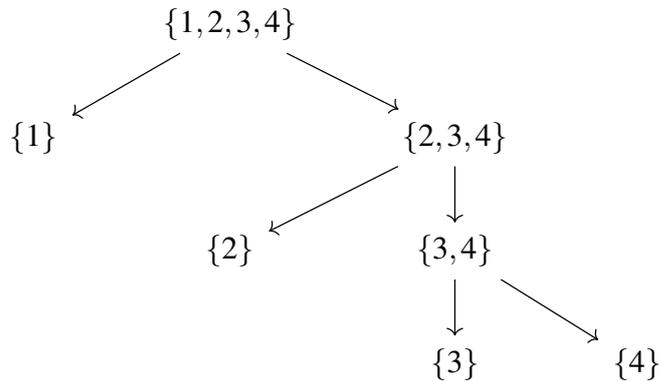
Assim se tomarmos, por exemplo,  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ , teremos:



**Exemplo 5.1.9 (Árvore Linear).** Seja  $M$  como no exemplo anterior. A árvore  $\mathcal{A}_{\text{lin}}$  em  $M$  é única e determinada pelas seguintes propriedades:

1. Possui  $m$  gerações  $(0, \dots, m-1)$ .
2. Cada elemento de  $\mathcal{A}_{\text{lin}}$  é um conjunto de números inteiros consecutivos de  $M$ .
3. Possui um elemento raiz  $\rho = M$  e  $g(\rho) = 0$ .
4. A  $(m-1)$  geração consiste das folhas  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}\}$ .
5. Cada elemento de  $\mathcal{A}_{\text{lin}}$  com cardinalidade maior que 1 possui dois filhos, e a cardinalidade do filho mais jovem é 1.

Assim se tomarmos, por exemplo,  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ , teremos:



**Observação 5.1.10.** As árvores construídas nos dois últimos exemplos são exemplos do Tipo 1 e serão usadas na construção geral de wavelets. O nome "logarítmico" vem do fato de que a lei da construção do número de gerações se comporta como o logaritmo de  $\#M$ ; já o nome "linear" é dado pois o número de gerações é proporcional ao número de elementos de  $M$ .

**Lema 5.1.11.** Todo espaço de medida completo, separável e  $\sigma$ -finito, possui uma partição encaixada.

*Demonstração.* Para demonstrar o lema, construiremos uma partição encaixada utilizando conjuntos de medida finita e explorando a completude do espaço de medida.

Como o espaço é separável, existe um subconjunto denso e enumerável  $D$ . Vamos denotar  $D$  como  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ .

Dado que o espaço é  $\sigma$ -finito, podemos escrever o espaço como uma união contável de conjuntos de medida finita:  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , onde  $A_i$  tem medida finita.

Para a construção da partição encaixada, definimos uma sequência de conjuntos da seguinte forma:

$$B_i = A_i \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)$$

Note que  $B_i$  é uma parte finita de  $A_i$  e  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

Agora, podemos definir uma partição encaixada  $\{C_i\}$  onde

$$C_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_i$$

Essa partição é encaixada porque  $C_i \subset C_{i+1}$  para todo  $i$ .

Pela  $\sigma$ -finitude, a medida de cada conjunto  $A_i$  é finita. Além disso, a medida de  $B_i$  é a diferença finita entre a medida de  $A_i$  e a medida dos conjuntos anteriores, então  $B_i$  também tem medida finita. Portanto, a medida de  $C_i$  é finita.

Como o espaço é completo, a união de  $C_i$ 's (ou seja,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ) pertence ao espaço de medida e tem medida finita. Isso implica que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  pertence à  $\sigma$ -álgebra do espaço de medida.

Portanto, construímos uma partição encaixada em um espaço de medida completo, separável e  $\sigma$ -finito.  $\square$

## 5.2 Construção das Wavelets

Para a construção das wavelets, precisaremos de um espaço de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ , uma árvore  $\mathcal{A}$  e uma partição encaixada  $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  de  $X$  com respeito à  $\mathcal{A}$ . Considere também as funções escada  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  definidas por:

$$\phi_\alpha = \mu(X_\alpha)^{-1/p} \mathbf{1}_{X_\alpha}.$$

**Definição 5.2.1.** Considere o conjunto:

$$G(\alpha) = \{(\alpha, \zeta) \in \{\alpha\} \times \mathcal{A}_M \mid \#C(\zeta) = 2\},$$

Definiremos o conjunto dos índices para a indexação das wavelets como uma união disjunta de todos  $G(\alpha)$ , para todos  $\alpha \in \mathcal{A}$ . A construção dessa família de conjuntos foi feita com intuito de que as wavelets sejam suportadas em  $X_\alpha$  e constantes em  $X_\beta$ , em que  $\beta \in C(\alpha)$ .

Além disso, a árvore  $\mathcal{A}_M$  é ou  $\mathcal{A}_{\text{lin}}$  (5.1.9) ou  $\mathcal{A}_{\text{log}}$  (5.1.8) e o conjunto  $G(\alpha)$  contém no máximo  $m - 1$  elementos ( $m = \#C(\alpha)$ ). Isto é, construímos uma sub-árvore entre as filhas de  $\alpha$ , enumerando-as com  $i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ , sendo  $\beta_i < \beta_{i+1}$ . Assim, podemos definir o conjunto de índices  $K$  como:

$$K^* = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G(\alpha).$$

**Observação 5.2.2.** Note que o elemento raiz não está incluso no nosso conjunto de índices criado acima, dessa forma o conjunto completo de índices é dado por

$$K = K^* \cup \{\rho\} \quad \text{com} \quad \psi_\rho = \phi_\rho = \mu(X)^{-1/p} \mathbf{1}_X.$$

**Exemplo 5.2.3.** Tome  $\mathcal{A}$  como a árvore logarítmica do Exemplo 5.1.8 e tome:

$$\mathcal{A}_M = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

Dessa forma teremos:

- Se tomarmos  $\gamma = (\alpha, \{1, 2\})$ , teremos  $P_\gamma = \bigcup_{i \in \{1\}} X_{\beta_i}$ ,  $N_\gamma = \bigcup_{i \in \{2\}} X_{\beta_i}$ .
- Agora se  $\gamma = (\alpha, \{1, 2, 3, 4\})$ , então  $P_\gamma = \bigcup_{i \in \{1, 2\}} X_{\beta_i}$ ,  $N_\gamma = \bigcup_{i \in \{3, 4\}} X_{\beta_i}$ .

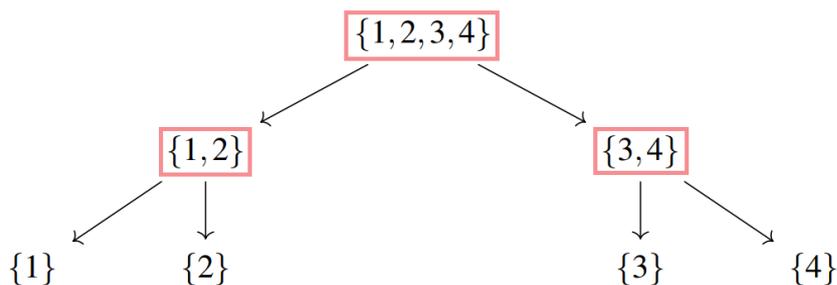


Figura 17 – Exemplo 5.2.3

**Definição 5.2.4.** Definimos como **wavelets assimétricas de Haar**, as funções na forma

$$\psi_\gamma = n_\gamma \left( \frac{1_{P_\gamma}}{\mu(P_\gamma)} - \frac{1_{N_\gamma}}{\mu(N_\gamma)} \right), \quad (5.2)$$

para  $P_\gamma$  e  $N_\gamma \in \Sigma$  com,  $\gamma \in K$  e  $n_\gamma$  como normalizador de  $\psi_\gamma$  em  $L^p$ . Como a norma de uma função  $f$  em  $L^p$  é dada por

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

e como estamos trabalhando com funções indicadoras, note que é fácil ver que o fator normalizador  $n_\gamma$  em  $L^p$  é dada por

$$n_\gamma = \left( \mu(P_\gamma)^{1-p} + \mu(N_\gamma)^{1-p} \right)^{-1/p}.$$

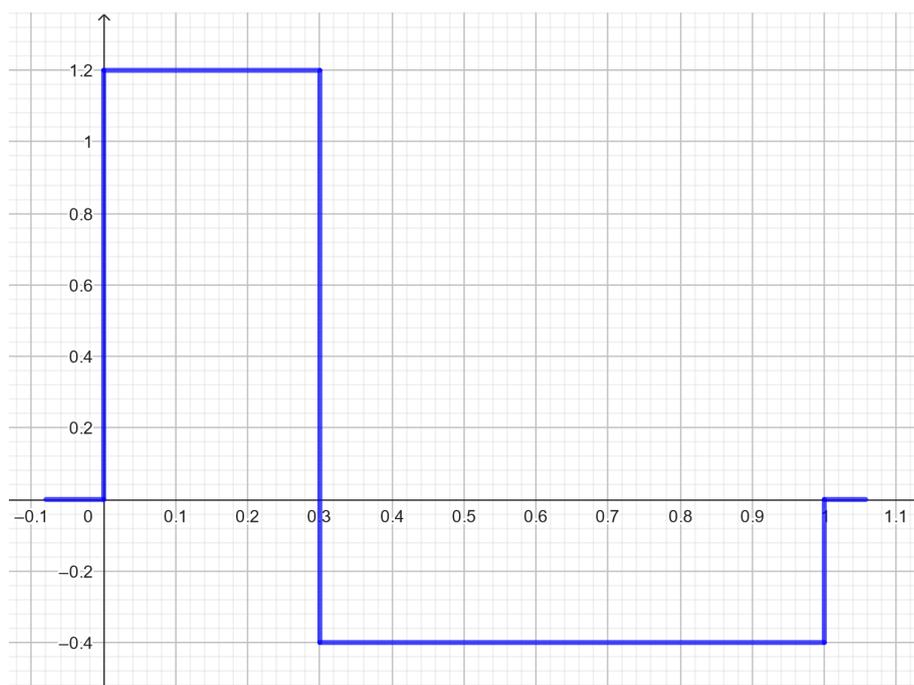


Figura 18 – Exemplo de wavelet assimétrica de Haar

**Observação 5.2.5.** Note que cada elemento de  $\mathcal{A}_M$  tem no máximo dois filhos. O elemento  $\gamma = (\alpha, \zeta) \in G(\alpha)$  gera uma wavelet  $\psi_\gamma$  conforme em (5.2) com

$$P_\gamma = \bigcup_{i \in \zeta_1} X_{\beta_i}, \quad \text{e} \quad N_\gamma = \bigcup_{i \in \zeta_2} X_{\beta_i},$$

em que  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são os dois filhos de  $\zeta$ .

Dessa forma, podemos construir o seguinte conjunto:

$$\Psi = \{\psi_\gamma \mid \gamma \in K\}. \quad (5.3)$$

### 5.3 Propriedades

Podemos ver pela definição, que as funções em  $\Psi$  (5.3) são normalizadas. Agora, observe que para cada  $\gamma \in K^*$ ,

$$\int_X \psi_\gamma d\mu = 0. \quad (5.4)$$

Além disso, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão em  $K$ , então

$$\int_X \psi_{\gamma_1} \psi_{\gamma_2} d\mu = 0, \quad (5.5)$$

pois se  $\psi_{\gamma_1}$  e  $\psi_{\gamma_2}$  não possuem suportes disjuntos e  $\gamma_1 < \gamma_2$ , então  $\psi_{\gamma_2}$  é constante no suporte de  $\psi_{\gamma_1}$ . Se  $\alpha \in \mathcal{A}$ , então

$$\text{span}\{\phi_\beta \mid \beta \in C_l(\alpha)\} = \text{span}\{\phi_\alpha, \psi_\gamma \mid \gamma \in G(\alpha)\}. \quad (5.6)$$

Note que podemos estender essa propriedade para todas as gerações, pois se  $i \in \mathbb{N}$ , então:

$$\text{span}\{\phi_\beta \mid \beta \in C_l(\alpha)\} = \text{span}\left\{\phi_\alpha, \psi_\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{j=0}^{i-1} G(C_j(\alpha))\right\} \quad (5.7)$$

**Lema 5.3.1** ((BILLINGSLEY, 1995)).

$$L^p = \overline{\text{span } \Phi}. \quad (5.8)$$

sendo  $\Phi = \{\phi_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ .

**Lema 5.3.2.**

$$\overline{\text{span } \Psi} = L^p.$$

*Demonstração.* Como a inclusão  $\overline{\text{span } \Psi} \subset L^p$  é trivial, para provar a igualdade, fixamos uma função indicadora  $1_{X_\delta} \in L^p$  com  $\delta \in \mathcal{A}$ . De acordo com (5.8), é suficiente mostrar que

$$1_{X_\delta} \in \overline{\text{span } \Psi}. \quad (5.9)$$

Se  $\delta = \rho$ , então (5.9) vale. Dessa forma, considere  $\delta \neq \rho$ . Seja  $\alpha \in \mathcal{A}$  na forma  $\alpha = p^i(\delta)$  para algum  $i > 0$ , juntamente com a função correspondente

$$f_i = 1_{X_\delta} - \frac{\mu(X_\delta)}{\mu(X_\alpha)} 1_{X_\alpha}.$$

Para mostrar que  $f_i$  está em  $\text{span } \Psi$ , considere (5.7) com os mesmos  $\alpha$  e  $i$  deste argumento. Claramente,  $f_i$  está no conjunto no lado esquerdo e, pela igualdade, também está no conjunto do lado direito. Note que  $f_i$  e  $\psi_\gamma$  possui uma integral nula, enquanto  $\phi_\alpha$  não tem, logo podemos afirmar que  $f_i$  não possui uma componente em  $\phi_\alpha$ . Assim,

$$f_i \in \text{span} \left\{ \psi_\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{j=0}^{i-1} G(C_j(\alpha)) \right\} \subset \text{span} \Psi.$$

Note que  $p_i(\delta) = \rho$  eventualmente para algum  $i$  e assim concluímos que  $1_{X_\rho} \in \text{span} \Psi$ . □

**Definição 5.3.3.** Dado um espaço de medida  $(X, \Sigma, \mu)$ , chamamos de **átomo** um conjunto  $A \in \Sigma$  mensurável, que possui medida positiva e não contém nenhum subconjunto  $B$ , com  $\mu(B) > 0$  de forma que  $\mu(A) > \mu(B)$ .

**Definição 5.3.4.** Dado  $X_0 \in \Sigma$  e uma sub- $\sigma$ -álgebra  $\Sigma_0$  de  $\Sigma$  que é gerado por uma partição  $\pi = \{E_1, \dots, E_n\}$  de  $X_0$  (portanto,  $X \setminus X_0$  é um átomo de  $\Sigma_0$ ). Considere  $g \in L^1(X, \Sigma, \mu)$  com suporte contido em  $X_0$ . Então, a **esperança condicional**  $E(g \mid \Sigma_0)$  de  $g$  em relação a  $\Sigma_0$  é dada por

$$E(g \mid \Sigma_0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu(E_i)} \int_{E_i} g d\mu \cdot 1_{E_i},$$

observando a convenção de que  $0/0$  é 0.

Chamamos de **martingale simples** (em relação a uma sequência não decrescente  $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$  de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\Sigma$ ) uma sequência finita  $\{f_i\}_{i=1}^n$  de funções simples com suporte finito que satisfazem:

- $f_i$  é mensurável em relação a  $\Sigma_i$  para  $1 \leq i \leq n$ ;
- $E(f_{i+1} \mid \Sigma_i) = f_i$  para  $1 \leq i < n$ .

Sua correspondente sequência de variações/diferença martingale  $\{d_i\}_{i=1}^n$  é dada por  $d_i = f_i - f_{i-1}$ , onde  $f_0$  é apenas a função nula, e dessa forma

$$f_k = \sum_{i=1}^k d_i.$$

**Teorema 5.3.5** (Burkholder). Se  $\{f_i\}_{i=1}^n$  é martingale simples com respeito a uma sequência não-decrescente  $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$  de  $\sigma$ -álgebras de  $\Sigma$ , então sua sequência correspondente de diferença martingale  $\{d_i\}_{i=1}^n$  satisfaz

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i c_i d_i \right\|_p \leq (p^* - 1) \left\| \sum_{i=1}^n c_i d_i \right\|_p \quad (5.10)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todas escolhas de  $c_i \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Sendo  $p^* = \max\{p, q\}$ , em que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

*Demonstração.* A prova deste teorema pode ser encontrada nas referências (BURKHOLDER, 1984), (BURKHOLDER, 1985), (BURKHOLDER; PARDOUX; SZNITMAN, 2006).  $\square$

**Teorema 5.3.6.** Se  $(X, \Sigma, \mu)$  não é puramente atômico, então a constante de base incondicional para qualquer base incondicional de  $L^p(X, \Sigma, \mu)$  é pelo menos  $(p^* - 1)$ , onde  $p^* = \max\{p, q\}$ .

*Demonstração.* (BURKHOLDER, 1982), (OLEVSKII, 1975)  $\square$

**Lema 5.3.7.** Fixe um subconjunto finito  $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$  de  $K$  que satisfaça  $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n$ . Escolha  $X_0 \in \Sigma^+$  de forma que  $\text{sup } \psi_{\gamma_i} \subset X_0$  para cada  $i$ . Considere as partições correspondentes

$$\pi_i = \{P_{\gamma_i}, N_{\gamma_i}, X_0 \setminus (P_{\gamma_i} \cup N_{\gamma_i})\}$$

de  $X_0$  e defina  $\Sigma_i = \sigma(\{\pi_j \mid 1 \leq j \leq i\})$ , a  $\sigma$ -álgebra gerada pela partição  $\pi_j$ . Então:

1.  $\psi_{\gamma_i}$  é mensurável em relação a  $\Sigma_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .
2.  $E(\psi_{\gamma_{i+1}} \mid \Sigma_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$ .

*Demonstração.* Observe que a validade da primeira propriedade decorre do fato de que  $\psi_{\gamma_i}$  permanece constante em cada um dos conjuntos  $P_{\gamma_i}$ ,  $N_{\gamma_i}$  e  $X_0 \setminus (P_{\gamma_i} \cup N_{\gamma_i})$ . Isso implica que a função é  $\Sigma_i$ -mensurável.

Para demonstrar a segunda propriedade, consideremos  $i$  pertencente ao conjunto  $\{1, \dots, n-1\}$  e  $E(\psi_{\gamma_{i+1}} \mid \Sigma_i)$ . Observamos que um átomo  $A \subset X_0$  de  $\Sigma_i$  assume a forma:

$$A = \bigcap_{k=1}^m A_k, \quad \text{com } A_k \in \bigcup_{j=1}^i \{P_{\gamma_j}, N_{\gamma_j}, X_0 \setminus (P_{\gamma_j} \cup N_{\gamma_j})\}$$

em que  $\gamma_{i+1} < \gamma_j$  para  $j = 1, \dots, i$ . Se  $\gamma_{i+1} < \gamma \in G$ , então  $P_\gamma$  (e analogamente para  $N_\gamma$  e  $X_0 \setminus (P_\gamma \cup N_\gamma)$ ) está ou disjunto do suporte de  $\psi_{\gamma_{i+1}}$  ou o contém. Além disso,  $\int_X \psi_{\gamma_{i+1}} d\mu$  é zero. Portanto,

$$E(\psi_{\gamma_{i+1}} \mid \Sigma_i) = 0,$$

como queríamos.  $\square$

Agora, dada uma árvore  $\mathcal{A}$ . Seja  $\{X_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$  uma partição aninhada de  $X$  com respeito a  $\mathcal{A}$ . Dessa forma, existem wavelets  $\Psi$  em  $X_\alpha$  e assim podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 5.3.8.** As wavelets  $\Psi$  formam uma base incondicional normalizada para  $L^p(X, \Sigma, \mu)$ , com  $K_p(\Psi) \leq (p^* - 1)$ . Se  $L^p$  não for puramente atômico, então  $K_p(\Psi) = (p^* - 1)$ .

*Demonstração.* Pelo Lema (5.3.2) e Teorema (5.3.6), perceba que basta mostrar que (C2) vale com  $K_p = p^* - 1$  para o conjunto  $\Psi$ . Como  $X$  é a união disjunta dos  $X_\alpha$ , para qualquer  $f \in L^p$

$$\|f\|_p^p = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|f1_{X(\alpha)}\|_p^p.$$

Além disso, para cada  $\gamma \in K$

$$\psi_\gamma 1_{X_\alpha} = \begin{cases} \psi_\gamma & \text{se } \gamma \in G(\alpha), \\ 0 & \text{se } \gamma \notin G(\alpha). \end{cases}$$

Mantendo a notação anterior, fixe uma coleção finita  $\Gamma \subset K$  e ordene  $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^n$  de forma que  $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n$ . Sejam  $\{\pi_i\}_{i=1}^n$  e  $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$  como na afirmação do Lema (5.3.7). Pelo Teorema (5.3.5), basta mostrar que a sequência  $\{f_i\}_{i=1}^n$  dada por

$$f_i = \sum_{j=1}^i \psi_{\gamma_j}$$

é uma martingale simples com relação a  $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$ .

O Lema (5.3.7) garante que cada  $f_i$  é  $\Sigma_i$ -mensurável. Se  $i < n$ , então pelo Lema (5.3.7) e pela linearidade do operador de esperança condicional

$$E\left(f_{i+1} \mid \Sigma_i\right) - E\left(f_i \mid \Sigma_i\right) = E\left(f_{i+1} - f_i \mid \Sigma_i\right) = E\left(\psi_{\gamma_{i+1}} \mid \Sigma_i\right) = 0.$$

Como  $f_i$  é  $\Sigma_i$ -mensurável,  $f_i = E(f_i | \Sigma_i)$ . Portanto,  $E(f_{i+1} | \Sigma_i) = f_i$ , como necessário. □

## 5.4 Base Dual

Para conseguirmos definir o que seria uma análise de multiresolução para as wavelets assimétricas de Haar, antes precisamos definir as propriedades do espaço dual.

Como o  $L^p$  é reflexivo, sabemos que as as funções coordenadas  $\{\tilde{\psi}_\gamma | \gamma \in K\}$  da base incondicional  $\Psi$ , formam uma base incondicional para o espaço dual  $L_q(X, \Sigma, \mu)$ . Além disso, temos que a família de funções coordenada  $\tilde{\psi}_\gamma$  são unicamente determinadas pela condição

$$\langle \psi_{\gamma_1}, \tilde{\psi}_{\gamma_2} \rangle = \delta_{\gamma_2 \gamma_1}.$$

Dessa forma, se temos  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ , então:

$$f = \sum_{\gamma \in K} \langle f, \tilde{\psi}_\gamma \rangle \psi_\gamma \quad \text{e} \quad g = \sum_{\gamma \in K} \langle \psi_\gamma, g \rangle \tilde{\psi}_\gamma,$$

em que a convergência é incondicional. Por (5.5), podemos afirmar que  $\tilde{\psi}_\gamma$  é um múltiplo de  $\psi_\gamma$ . Cálculos diretos mostram que se  $\gamma \in K^*$  então

$$\tilde{\psi}_\gamma = \tilde{n}_\gamma \left( \frac{1_{P_\gamma}}{\mu(P_\gamma)} - \frac{1_{N_\gamma}}{\mu(N_\gamma)} \right),$$

em que:

$$\tilde{n}_\gamma = \left[ n_\gamma \left( \frac{1}{\mu(P_\gamma)} + \frac{1}{\mu(N_\gamma)} \right) \right]^{-1},$$

e se  $\rho \in K$  então

$$\tilde{\psi}_\rho = \frac{1}{\sqrt[q]{\mu(X)}} 1_X,$$

Segue-se do Teorema 5.3.8 que

$$1 \leq \|\tilde{\psi}_\gamma\|_q \leq 2(p^* - 1) \quad \text{para} \quad \gamma \in K.$$

Se  $\gamma \in K \setminus K^*$ , então  $\|\tilde{\psi}_\gamma\|_q = 1$ . Agora, para um  $\gamma$  fixo em  $K^*$ , definimos sua norma em  $L^q(X, \Sigma, \mu)$  da seguinte forma:

$$\|\tilde{\psi}_\gamma\|_q = \tilde{n}_\gamma (\mu(P_\gamma)^{1-q} + \mu(N_\gamma)^{1-q})^{1/q},$$

o que não necessariamente é igual a um. Vamos examinar isso mais de perto. Defina

$$r = \frac{\mu(P_\gamma)}{\mu(N_\gamma)} \quad \text{e} \quad N(p, r) = \|\tilde{\psi}_\gamma\|_q.$$

Assim, conseguimos reescrever  $N(p, r)$  como:

$$N(p, r) = (1 + r^{1-p})^{1/p} (1 + r^{1-q})^{1/q} (1 + r^{-1})^{-1}.$$

E assim, podemos escrever algumas propriedades para  $N(p, r)$ , as quais valem para  $1 < p < \infty$  e  $0 < r < \infty$ :

1.  $N(p, r) = N(q, r)$
2.  $N(p, r) = N(p, 1/r)$
3.  $N(p, 1) = N(2, r) = 1$
4.  $1 \leq N(p, r) \leq 2$
5. Para qualquer valor fixo de  $p$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} N(p, r) = 1$ ,
6. Para qualquer valor fixo de  $r$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} N(p, r) = 2(1 + r^{-1})^{-1}$ .

## 5.5 Análise de Multiresolução

Como vimos nos capítulos anteriores, as wavelets são definidas como translações e dilatações de uma função. No entanto, quando se trabalha com partições arbitrárias e medidas não invariantes à translação, as wavelets não podem ser representadas dessa maneira. Neste caso, elas se enquadram no conceito de "wavelets de segunda geração", as quais mantêm as propriedades desejáveis das wavelets, como a análise de multiresolução e algoritmos de transformação, mas não possuem mais a estrutura de translação e dilatação. Nesta seção, mostraremos como construir uma análise de multiresolução para as wavelets assimétricas de Haar, partindo desse conceito.

Definimos dois novos conjuntos da seguinte forma:

$$S(\gamma) = C_l(\alpha) \quad \text{se} \quad \gamma \in G(\alpha) \quad \text{e} \quad S^*(\beta) = G(\alpha) \quad \text{se} \quad \beta \in C_l(\alpha)$$

Lembrando da relação entre os conjuntos em (5.6), temos que a base

$$\{\phi_\beta \mid \beta \in C_l(\alpha)\} \quad \text{possui uma base dual da forma} \quad \{\tilde{\phi}_\beta \mid \beta \in C_l(\alpha)\},$$

em que temos a relação de  $\tilde{\phi}_\beta$  ser um múltiplo de  $\phi_\beta$  e também  $\|\tilde{\phi}_\beta\|_q = 1$ , enquanto a outra base

$$\{\phi_\alpha, \psi_\gamma \mid \gamma \in G(\alpha)\} \quad \text{possui uma base dual da forma} \quad \{\tilde{\phi}_\alpha, \tilde{\psi}_\gamma \mid \gamma \in G(\alpha)\},$$

em que  $\tilde{\psi}_\gamma$  é como na definimos no capítulo anterior. Dessa forma, podemos construir algumas relações entre as duas bases acima da seguinte forma:

(R1) para  $\alpha \in \mathcal{A}$  e  $\gamma \in G^*$ ,

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta \in C_l(\alpha)} h_{\alpha,\beta} \phi_\beta \quad \text{e} \quad \psi_\gamma = \sum_{\beta \in S(\gamma)} g_{\gamma,\beta} \phi_\beta$$

onde

$$h_{\alpha,\beta} = \langle \phi_\alpha, \tilde{\phi}_\beta \rangle \quad \text{e} \quad g_{\gamma,\beta} = \langle \psi_\gamma, \tilde{\phi}_\beta \rangle$$

(R2) para  $\beta \neq \rho$ ,

$$\phi_\beta = \tilde{h}_p(\beta, \beta) \phi_{p(\beta)} + \sum_{\gamma \in S^*(\beta)} \tilde{g}_{\gamma,\beta} \psi_\gamma$$

onde

$$\tilde{h}_{\alpha,\beta} = \langle \phi_\beta, \tilde{\phi}_\alpha \rangle \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{\gamma,\beta} = \langle \phi_\beta, \tilde{\psi}_\gamma \rangle$$

Agora, para  $k \in g(\mathcal{A})$ , definimos  $G_k = \{\gamma \in G^* \mid g(\gamma) = k\}$  e consideramos os subespaços  $V_k$  e  $W_k$  de  $L^p$ , em que

$$V_k = \overline{\text{span}}\{\phi_\beta \mid \beta \in \mathcal{A}_k^*\},$$

e

$$W_k = \overline{\text{span}}\{\psi_\gamma \mid \gamma \in G_k\}.$$

Observe que as funções indicadas não apenas geram, mas também fornecem uma base incondicional para esses subespaços. A base dual para essa base de  $V_k$  é dada por

$$\{\tilde{\phi}_\beta \mid \beta \in \mathcal{A}_k^*\},$$

enquanto a base dual para essa base de  $W_k$  é dada por

$$\{\tilde{\psi}_\gamma \mid \gamma \in G_k\}.$$

Ao visualizar  $\mathcal{A}_k^* - 1 \cup \mathcal{A}_k^*$  como uma floresta de duas gerações, segue-se que

$$V_k = V_{k-1} \oplus W_{k-1} \tag{5.11}$$

e que  $V_k$  possui outra base

$$\{\phi_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_k^* - 1\} \cup \{\psi_\gamma \mid \gamma \in G_{k-1}\}$$

com base dual

$$\{\tilde{\phi}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_k^* - 1\} \cup \{\tilde{\psi}_\gamma \mid \gamma \in G_{k-1}\}.$$

Uma função  $f \in V_k$  tem uma representação como

$$f = \sum_{\beta \in \mathcal{A}_k^*} a_\beta \phi_\beta \quad \text{com} \quad a_\beta = \langle f, \tilde{\phi}_\beta \rangle. \tag{5.12}$$

E pela representação de  $V_k$  dada em (5.11), podemos reescrever:

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k^* - 1} a_\alpha \phi_\alpha + \sum_{\gamma \in G_{k-1}} c_\gamma \psi_\gamma \tag{5.13}$$

com

$$a_\alpha = \langle f, \tilde{\phi}_\alpha \rangle \quad \text{e} \quad c_\gamma = \langle f, \tilde{\psi}_\gamma \rangle.$$

As relações entre as diferentes representações derivam de argumentos simples de álgebra linear. Para simplificar a notação, suponha que a floresta não tenha folhas; na verdade, substitua cada  $\mathcal{A}_k$  por  $\mathcal{A}_k^*$ . Combinando (5.12) e a relação (R2) e identificando os coeficientes, obtemos

$$a_\alpha = \sum_{\beta \in C(\alpha)} \tilde{h}_{\alpha,\beta} a_\beta \quad \text{e} \quad c_\gamma = \sum_{\beta \in S(\gamma)} \tilde{g}_{\gamma,\beta} a_\beta \tag{5.14}$$

onde  $g(\beta) = k$  e  $g(\alpha) = g(\gamma) = k - 1$ . Da mesma forma, combinando (5.13) e a relação (R1) obtemos

$$a_\beta = h_p(\beta, \beta) a_p(\beta) + \sum_{\gamma \in S^*(\beta)} g_{\gamma, \beta} c_\gamma \tag{5.15}$$

Considere a função  $f$  pertencente a um espaço  $V_n$  com  $n$  constante. Com os coeficientes da função de escala  $a_\beta$ , onde  $g(\beta) = n$ , é possível utilizar a fórmula (5.14) de maneira recursiva para calcular todos os coeficientes da wavelet  $c_\gamma$  nas gerações anteriores, onde

Quando  $g(\gamma) < n$ , é possível fazer o inverso, usando os coeficientes  $a_\alpha$  com  $g(\alpha) = m$  juntamente com todos os coeficientes de wavelet  $c_\gamma$ , onde  $m \leq g(\gamma) < n$ . Isso nos permite, de forma recursiva, empregar a fórmula (5.15) para encontrar os coeficientes  $a_\beta$  na geração mais jovem, onde  $g(\beta) = n$ .

Essas operações compõem o que é conhecido como a "transformada rápida de wavelet". Dado que todas as somas na transformada são finitas, para a implementação de um algoritmo computacional, basta construir uma estrutura de dados com formato de árvore que atenda a todas as propriedades de árvore descritas ao longo deste capítulo.



## REFERÊNCIAS

---

BENEDETTO, J. J. **Wavelets: mathematics and applications**. [S.l.]: CRC press, 1993. v. 13. Citado na página 19.

BILLINGSLEY, P. **Probability and measure**. 3. ed. ed. New York [u.a.]: Wiley, 1995. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 0471007102. Disponível em: <[http://gso.gbv.de/DB=2.1/CMD?ACT=SRCHA&SRT=YOP&IKT=1016&TRM=ppn+164761632&sourceid=fbw\\_bibsonomy](http://gso.gbv.de/DB=2.1/CMD?ACT=SRCHA&SRT=YOP&IKT=1016&TRM=ppn+164761632&sourceid=fbw_bibsonomy)>. Citado na página 60.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer New York, 2010. (Universitext). ISBN 9780387709130. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GAA2XqOIIGoC>>. Citado nas páginas 21 e 53.

BULTHEEL, A.; HUYBRECHS, D. **Wavelets with applications in signal and image processing**. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 27.

BURKHOLDER, D.; PARDOUX, E.; SZNITMAN, A.-S. Explorations in martingale theory and its applications. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–66. ISBN 978-3-540-53841-7. Citado na página 62.

BURKHOLDER, D. L. A nonlinear partial differential equation and the unconditional constant of the haar system in  $l^p$ . **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, v. 7, p. 591–595, 1982. Citado na página 62.

\_\_\_\_\_. Boundary Value Problems and Sharp Inequalities for Martingale Transforms. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 12, n. 3, p. 647 – 702, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/aop/1176993220>>. Citado na página 62.

\_\_\_\_\_. An Elementary Proof of an Inequality of R. E. A. C. Paley. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 17, n. 5, p. 474–478, 09 1985. ISSN 0024-6093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/blms/17.5.474>>. Citado na página 62.

DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 41, n. 7, p. 909–996, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/cpa.3160410705>>. Citado na página 19.

\_\_\_\_\_. **Ten Lectures on Wavelets**. [S.l.]: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics). Available at libgen.lc. Citado nas páginas 39 e 40.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4th. ed. [S.l.]: Projeto Euclides, IMPA, 2014. Citado na página 21.

FOLLAND, G. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=wI4fAwAAQBAJ>>. Citado nas páginas 21 e 53.

- GIRARDI, M.; SWELDENS, W. A new class of unbalanced haar wavelets that form an unconditional basis for  $L^p$  on general measure spaces. **The journal of Fourier analysis and applications** [[Elektronische Ressource]], v. 3, n. 4, p. 457–474, 1997. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/59517>>. Citado na página 53.
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984. Citado na página 19.
- HERNANDEZ, E.; WEISS, G. L. **A First Course on Wavelets**. [S.l.]: CRC Press, 1996. (Studies in Advanced Mathematics). Available at libgen.lc. Citado na página 39.
- LEPIK Ülo; HEIN, H. **Haar Wavelets: With Applications**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. (Mathematical Engineering). Citado na página 27.
- MALLAT, S. **A Wavelet Tour of Signal Processing**. San Diego, CA: Academic Press, 1998. ISBN 978-0124666061. Citado na página 19.
- MECHEE, M. S.; HUSSAIN, Z. M.; SALMAN, Z. I. Wavelet theory: Applications of the wavelet. In: MOHAMMADY, S. (Ed.). **Wavelet Theory**. Rijeka: IntechOpen, 2021. cap. 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.5772/intechopen.94911>>. Citado na página 39.
- MEYER, Y. **Wavelets and Operators**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. ISBN 978-0-521-42000-6. Citado na página 19.
- MEYER, Y.; RYAN, R. **Wavelets: Algorithms & Applications**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993. (Miscellaneous Bks). ISBN 9780898713091. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0vpQAAAAMAAJ>>. Citado na página 19.
- MORETTIN, P. A. **Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas de séries temporais**. [S.l.]: EDUSP, 2014. Citado na página 39.
- OLEVSKII, A. M. **Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems**. New York: Springer-Verlag, 1975. Citado na página 62.
- RUDIN, W. **Functional Analysis**. McGraw-Hill, 1991. (International series in pure and applied mathematics). ISBN 9780070542365. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=Sh\\_vAAAAMAAJ](https://books.google.com.br/books?id=Sh_vAAAAMAAJ)>. Citado na página 21.
- SILVEIRA, T. L. T. da; KOZAKEVICIUS, A. J. **Transformada Wavelet de Haar: Conceitos, Formulações e Aplicações**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 31.
- SMANIA, D. Besov-ish spaces through atomic decomposition. **Analysis & PDE**, Mathematical Sciences Publishers, v. 15, n. 1, p. 123–174, mar 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140%2Fapde.2022.15.123>>. Citado na página 53.

