UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Ultradistribuições no toro e aplicações em certas equações diferenciais parciais

Isadora Vieira Coelho da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Isadora Vieira Coelho da Silva

Ultradistribuições no toro e aplicações em certas equações diferenciais parciais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
Abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586u

Silva, Isadora Vieira Coelho da
Ultradistribuições no toro e aplicações em certas equações diferenciais parciais / Isadora Vieira Coelho da Silva; orientador Paulo Leandro Dattori da Silva. -- São Carlos, 2023.
92 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Equações diferenciais parciais lineares. 2. Funções ultradiferenciáveis. 3. Hipoeliticidade global . 4. Resolubilidade semiglobal. I. Dattori da Silva, Paulo Leandro, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Isadora Vieira Coelho da Silva

Ultradistributions on torus and applications in certain partial differential equations

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
April 2023

À memória de meus queridos avós,
Odivaldo e Mercedes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus, que é digno de toda a glória. Sou grata pelo sustento, provisão e força que Ele me deu diariamente para desempenhar esse projeto e por fazer em minha vida infinitamente mais do que eu poderia imaginar.

Aos meus pais, Valter e Sandra, e aos meus irmãos, Jonathan e Raquel, por todo apoio e incentivo que sempre me ofereceram. Por estarem presentes todas as vezes que precisei de colo. Sem eles nada disso seria possível.

Agradeço de forma muito especial ao meu orientador, Prof. Paulo, que me acompanha desde o meu primeiro dia da graduação. Sou grata por todos os seus ensinos, pela sua atenção, por toda ajuda na matemática e fora dela, por todos os conselhos e conversas enriquecedoras.

Aos professores e a todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para minha formação. Aos meus amigos da graduação e do mestrado, por tornarem a minha caminhada um pouco mais leve. Aos funcionários do ICMC que nos proporcionam um ambiente tão agradável.

Aos meus queridos irmãos da Igreja Presbiteriana Central de São Carlos, pelo acolhimento, amizade e conforto durante esse período da minha vida. Em particular, à minha amiga e irmã da fé e da carreira, Amanda.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Pois, assim como os céus são mais altos que a terra,
meus caminhos são mais altos que seus caminhos,
e meus pensamentos, mais altos que seus pensamentos."
(BÍBLIA, Isaías 55.9)

RESUMO

SILVA, I. V. C. **Ultradistribuições no toro e aplicações em certas equações diferenciais parciais** . 2023. 92 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

O objetivo deste trabalho é estudar certas equações diferenciais parciais nos espaços de funções ultradiferenciáveis no toro N-dimensional. Primeiro, vamos introduzir estes espaços, conhecidos como classes de Denjoy-Carleman, e seus espaços duais cujos elementos são as ultradistribuições. Vamos caracterizar funções ultradiferenciáveis e ultradistribuições via séries (parciais) de Fourier.

Assim, seremos capazes de estender o Teorema de Greenfield-Wallach que descreve a hipoeliticidade de uma classe de operadores de coeficientes constantes dados por $P_\alpha(D_1, D_2) = D_1 - \alpha D_2,\ \alpha \in \mathbb{C}$. Uma outra aplicação da teoria será o estudo da resolubilidade no contexto das classes de Denjoy-Carleman de classes de campos vetoriais complexos definidos em $\mathbb{R} \times S^1$, dados por $\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a(x,t) + ib(x,t))\frac{\partial}{\partial x},\ b \not\equiv 0$, numa vizinhança do conjunto $\{0\} \times S^1$.

Palavras-chave: Funções Ultradiferenciáveis, Ultradistribuições, Séries de Fourier, Hipoeliticidade, Resolubilidade.

ABSTRACT

SILVA, I. V. C. **Ultradistributions on torus and applications in certain partial differential equations**. 2023. 92 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

The aim of this work is to study certain partial differential equations on the N-dimensional torus spaces of ultradifferentiable functions. First, we will introduce these spaces known as Denjoy-Carleman classes and their dual spaces whose elements are the ultradistribuitions. We will characterize ultradifferentiable functions and ultradistribuitions via Fourier series.

So, we will be able to extend the Greenfield-Wallach theorem that describes the hypoelicity for a class of constant coefficient operators given by $P_\alpha(D_1, D_2) = D_1 - \alpha D_2,\ \alpha \in \mathbb{C}$. Another application of this theory is the study of solvability in the context of Denjoy-Carleman classes of classes of complex vector fields defined on $\mathbb{R} \times S^1$, given by $\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a(x,t) + ib(x,t))\frac{\partial}{\partial x}$, $b \not\equiv 0$, near the set $\{0\} \times S^1$.

Keywords: Ultradifferentiable Functions, Ultradistributions, Fourier Series, Hypoellipticity, Solvability.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Uma grande questão do estudo de equações diferenciais parciais é verificar se certa equação possui ou não alguma solução. Para isso é preciso determinar os espaços em que as soluções podem ser definidas. Assim, surge a importância de investigar classes intermediárias entre o espaço das funções analíticas e o espaço das funções suaves.

Seja $N \in \mathbb{N}$ e considere $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N$ o toro N-dimensional. A classe das funções analíticas em $\mathbb{T}^N$, denotada por $C^\omega(\mathbb{T}^N)$, pode ser caracterizada de acordo com o crescimento das derivadas das funções. Mais especificamente, $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é analítica se, e somente se, existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$|D^\alpha f(x)| \leq C \cdot R^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Quando propriedades de um operador diferem nos contextos C^ω e C^∞ é natural analisar tais propriedades no contexto das classes Gevrey, veja por exemplo (RODINO, 1993). Dado $s \geq 1$, dizemos que $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ pertence a classe das funções s-Gevrey, denotada por $\mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N)$, se existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$|D^\alpha f(x)| \leq C \cdot R^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!^s, \ \forall x \in \mathbb{T}^N, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Observe que $\mathscr{G}^1(\mathbb{T}^N) = C^\omega(\mathbb{T}^N)$. Por outro lado, sabe-se que

$$C^\omega(\mathbb{T}^N) \subsetneq \bigcap_{s>1} \mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N).$$

Além disso, é possível exibir subespaços de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ que contém elementos que não são são analíticos em nenhum ponto, mas satisfazem a propriedade de continuação analítica, isto é,

$$x_0 \in \mathbb{T}^N \text{ e } \ D^\alpha f(x_0) = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \implies f \equiv 0.$$

As classes que satisfazem essa propriedade são chamadas quase-analíticas. Contudo, essa condição não é satisfeita para qualquer $\mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N)$ com $s > 1$. Assim, somos levados ao estudo de outras classes intermediárias, chamadas classes de Denjoy-Carleman, que abrangem as classes Gevrey.

No Capítulo 2 deste trabalho definiremos as classes de Denjoy-Carleman a partir de sequências numéricas. Este capítulo está baseado em (VICTOR, 2021). Na Seção 2.1 descreveremos as sequências de pesos e na Seção 2.2 as classes de funções associadas a elas, cujos elementos serão chamados de funções ultradiferenciáveis. Na Seção 2.3 estudaremos a demonstração do Teorema de Denjoy-Carleman, em (RUDIN, 1970), que caracteriza os espaços quase-analíticos de acordo com a sequência a qual ele é associado. Por fim, na Seção 2.4, daremos uma breve introdução sobre a topologia desses espaços.

O Capítulo 3 traz uma importante ferramenta para o estudo de equações diferenciais parciais no ambiente periódico: a caracterização de funções via séries de Furier. Estabelecidos os espaços de funções ultradiferenciáveis, na Seção 3.1 definiremos os seus espaços duais, conhecidos como espaços de ultradistribuições. Nas Seções 3.2 e 3.3 caracterizaremos funções ultradiferenciáveis e ultradistribuições via séries (parciais) de Fourier, como feito no Capítulo 2 de (VICTOR, 2021).

A partir do Capítulo 4 traremos algumas aplicações dessa teoria. Em (VICTOR, 2021) foi estendido o Teorema de Greefield-Wallach (GREENFIELD; WALLACH, 1972) para o contexto das classes de Denjoy-Carleman. Com base nisso, na Seção 4.1 trataremos do estudo da hipoeliticidade de operadores da forma

$$P_\alpha(D_1, D_2) = D_1 - \alpha D_2,\ \alpha \in \mathbb{C},$$

de acordo com propriedades numéricas de α. Já na Seção 4.2 veremos de que forma se relaciona a hipoeliticidade de P_α em duas classes distintas.

Finalmente, também aplicaremos a teoria ao estudo de resolubilidade no contexto Denjoy-Carleman. Estenderemos os resultados de (ARAUJO; BERGAMASCO; SILVA, in press) a respeito da resolubilidade Gevrey de um campo vetorial complexo definido em $\Omega = \mathbb{R} \times S^1$ do tipo

$$\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a(x,t) + ib(x,t))\frac{\partial}{\partial x},\ b \not\equiv 0,$$

onde a e b são funções ultradiferenciáveis a valores reais. Para isso, precisaremos munir a sequência de pesos com propriedades mais fortes do que pedido anteriormente.

CAPÍTULO

2

CLASSES DE DENJOY-CARLEMAN

O nosso objetivo neste capítulo é descrever as classes de funções ultradiferenciáveis, conhecidas como classes de Denjoy-Carleman. Antes precisaremos tratar de sequências de pesos. Estudaremos propriedades importantes desses espaços e introduziremos a topologia da qual serão munidos.

2.1 Sequências de pesos

Definiremos as sequências de pesos com propriedades que serão necessárias no decorrer deste trabalho.

Definição 2.1.1. Uma sequência de pesos é uma sequência de números reais positivos $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ que satisfaz as seguintes condições:

M.1 (Condição inicial) $m_0 = m_1 = 1$;

M.2 (Convexidade logarítmica) $m_n^2 \leq m_{n-1}\cdot m_{n+1},\ \forall n \geq 1$;

M.3 (Crescimento moderado) $\sup\limits_{j,k}\left(\dfrac{m_{j+k}}{m_j\cdot m_k}\right)^{1/(j+k)} \leq H$, para algum $H>1$.

A condição (**M.2**) é definida dessa forma por motivos técnicos e garante que as classes de funções que serão definidas a partir da sequência $\mathscr{M}$ sejam fechadas para inversão e composição (veja os Teoremas 2.2.5 e Teorema 2.2.7). Já a propriedade (**M.3**), também conhecida na literatura por *"Estabilidade sob Operadores Ultradiferenciáveis"*, é suficiente (embora não necessária) para garantir que tais classes sejam fechadas em relação a diferenciação (veja Teorema 2.2.14).

Vejamos alguns resultados técnicos decorrentes de (**M.2**).

Proposição 2.1.2. Se $\{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequência de pesos, então a sequência dada por $(m_n)^{1/n}$, para $n\in\mathbb{N}$, é não decrescente.

Demonstração. Considere a sequência $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ dada por $\omega_n = \log m_n$. Como $\{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequências de pesos segue que $\omega_0 = \omega_1 = 0$ e, por (**M.2**), para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$2\omega_k = \log(m_k^2) \leq \log(m_{k-1}\cdot m_{k+1}) = \log m_{k-1} + \log m_{k+1} = \omega_{k-1} + \omega_{k+1}. \tag{2.1}$$

Suponha válido

$$\omega_p \leq \left(\frac{p}{p+q}\right)\omega_{p+q},\ \forall p,q \in \mathbb{Z}_+,\ \text{com } p+q \neq 0. \tag{2.2}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $p = n$ e $q = 1$, temos

$$\frac{\log m_n}{n} \leq \frac{\log m_{n+1}}{n+1} \implies \log[(m_n)^{1/n}] \leq \log[(m_{n+1})^{1/(n+1)}] \implies (m_n)^{1/n} \leq (m_{n+1})^{1/(n+1)}.$$

Logo, $\{(m_n)^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não decrescente.

Provemos a afirmação (2.2) por indução em p e q. Quando $p = 0$ ou $q = 0$, é claro que o resultado é válido. Quando $q = 1$ mostremos por indução em p que

$$\omega_p \leq \left(\frac{p}{p+1}\right)\omega_{p+1},\ \forall p \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Observe que se $p = 1$ o resultado segue de (2.1). Agora, suponha (2.3) válido para $p = k$. Novamente por (2.1) e pela hipótese de indução, temos

$$\omega_{k+1} \leq \frac{\omega_{k+2}}{2} + \frac{\omega_k}{2} \leq \frac{\omega_{k+2}}{2} + \left(\frac{k}{k+1}\right)\frac{\omega_{k+1}}{2} \implies \omega_{k+1} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)\omega_{k+2}.$$

Agora, suponha por indução que (2.2) vale para $q = n$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Então, segue de (2.3) que

$$\omega_p \leq \left(\frac{p}{p+n}\right)\omega_{p+n} \leq \left(\frac{p}{p+n}\right)\left(\frac{p+n}{p+n+1}\right)\omega_{p+n+1} = \left(\frac{p}{p+n+1}\right)\omega_{p+n+1}.$$

Como queríamos demonstrar. □

Segue diretamente da Proposição 2.1.2 o seguinte corolário:

Corolário 2.1.3. Toda sequência de pesos é não decrescente.

Proposição 2.1.4. Se $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequência de pesos, então

$$m_k \cdot m_{n-k} \leq m_n,\ \forall k,n \in \mathbb{Z}_+,\ n \geq k. \tag{2.4}$$

Demonstração. Considere $\omega_n = \log m_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, como na demonstração da Proposição 2.1.2. Se $p \leq q$, segue de (2.2) que

$$\omega_p \leq \frac{p}{q}\cdot\omega_q.$$

Logo, para todo $n,k \in \mathbb{Z}_+$ com $n \geq k$, temos

$$\log(m_k \cdot m_{n-k}) = \omega_k + \omega_{n-k} \leq \frac{k}{n}\cdot\omega_n + \frac{n-k}{n}\cdot\omega_n = \omega_n = \log(m_n).$$

Portanto, vale (2.4). □

Agora, vejamos alguns exemplos de sequências deste tipo.

Exemplo 2.1.5. Dado $s \geq 1$, a sequência definida por $m_n = (n!)^{s-1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, é uma sequência de pesos. De fato, vale $m_0 = m_1 = 1$ e

$$\frac{m_{n-1} \cdot m_{n+1}}{m_n^2} = \frac{[(n-1)!]^{s-1} \cdot [(n+1)!]^{s-1}}{(n!)^{2(s-1)}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{s-1} \geq 1.$$

Além disso,

$$\left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right) = \left(\frac{(j+k)!}{j! \cdot k!}\right)^{s-1} = \binom{j+k}{k}^{s-1} \leq 2^{(j+k)(s-1)}, \ \ \forall j,k \in \mathbb{Z}_+$$

e, portanto,

$$\sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right)^{1/(j+k)} \leq 2^{s-1}.$$

Em particular, quando $s = 2$ temos

$$(j+k)! \leq 2^{j+k} \cdot j! \cdot k!, \ \forall j,k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.5}$$

A desigualdade (2.5) será útil nas demonstrações ao longo deste trabalho.

Exemplo 2.1.6. Dado $\sigma > 0$, a sequência definida por $m_n = [\ln(n+e-1)]^{\sigma n}$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, é uma sequência de pesos. De fato, vale (**M.1**), pois

$$m_0 = [\ln(e-1)]^0 = 1 \text{ e } m_1 = [\ln(e)]^\sigma = 1.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{m_{n-1} \cdot m_{n+1}}{m_n^2} &= \left(\frac{[\ln(n-2+e)]^{n-1} \cdot [\ln(n+e)]^{n+1}}{[\ln(n+e-1)]^{2n}}\right)^\sigma \\ &= \left(\frac{[\ln(n-2+e)]^{n-1}}{[\ln(n+e-1)]^n} \cdot \frac{[\ln(n+e)]^{n+1}}{[\ln(n+e-1)]^n}\right)^\sigma. \end{aligned}$$

Definindo $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{[\ln(x+e)]^{x+1}}{[\ln(x+e-1)]^x} = \exp[(x+1)\ln(\ln(x+e)) - x\ln(\ln(x+e-1))],$$

podemos escrever

$$\frac{m_{n-1} \cdot m_{n+1}}{m_n^2} = \left(\frac{f(n)}{f(n-1)}\right)^\sigma.$$

Assim, para concluir que vale (**M.2**), basta mostrarmos que f é não decrescente.

Observe que

$$f'(x) = f(x)\left[\ln(\ln(x+e)) + \frac{x+1}{(x+e)\ln(x+e)} - \ln(\ln(x+e-1)) - \frac{x}{(x+e-1)\ln(x+e-1)}\right].$$

Definindo $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \ln(\ln(x+e-1)) + \frac{x}{(x+e-1)\cdot\ln(x+e-1)},$$

obtemos $f'(x) = f(x)\cdot[g(x+1)-g(x)]$. Como

$$g'(x) = \frac{(x+2e-2)\cdot\ln(x+e-1)-x}{[(x+e-1)\ln(x+e-1)]^2},$$

concluímos que g é crescente e, portanto, $f'(x) > 0$ $\forall x \geq 1$.

Resta verificarmos (**M.3**). Observe que a função $\dfrac{\ln(x)}{x}$ é decrescente para $x \geq e$. Assim, se $j,k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{m_{j+k}}{m_j\cdot m_k} &= \left[\frac{\ln(j+k+e-1)}{\ln(j+e-1)}\right]^{\sigma j}\cdot\left[\frac{\ln(j+k+e-1)}{\ln(k+e-1)}\right]^{\sigma k} \\
&\leq \left[\frac{j+k+e-1}{j+e-1}\right]^{\sigma j}\cdot\left[\frac{j+k+e-1}{k+e-1}\right]^{\sigma k} \\
&= \left[1+\frac{k}{j+e-1}\right]^{\sigma j}\cdot\left[1+\frac{j}{k+e-1}\right]^{\sigma k}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Defina $h(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+1/x)}$, para $x > 0$. Afirmamos que h é crescente. De fato, dado $x > 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, x+1)$ tal que

$$\ln(x+1)-\ln(x) = \frac{1}{c}(x+1-x) \implies \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{c} \geq \frac{1}{x+1}.$$

Logo,

$$h'(x) = e^{x\ln(1+1/x)}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right) \geq 0.$$

Assim, como h é crescente e $h(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} e$, temos $h(x) \leq e$, $\forall x > 0$. Se $x = \dfrac{j}{k}$,

$$\left(1+\frac{k}{j+e-1}\right)^{\sigma j} \leq \left(1+\frac{k}{j}\right)^{\sigma k x} = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{k\sigma} \leq e^{k\sigma}.$$

Analogamente, obtemos

$$\left(1+\frac{j}{k+e-1}\right)^{\sigma k} \leq e^{j\sigma}.$$

Logo, segue de (2.6) que

$$\frac{m_{j+k}}{m_j\cdot m_k} \leq e^{\sigma(k+j)}$$

e, portanto, $\displaystyle\sup_{j,k\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_{j+k}}{m_j\cdot m_k}\right)^{1/(j+k)} \leq e^{\sigma}$.

2.2 Funções ultradiferenciáveis

Estabelecidas as sequências de pesos, estamos prontos para definir as classes de funções ultradiferenciáveis, de acordo com o comportamento de suas derivadas. Na maior parte deste trabalho, estudaremos essas classes no toro N- dimensional, $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N$, para $N \in \mathbb{N}$.

No que segue utilizaremos a seguinte notação de multi-índices: dado $N \in \mathbb{N}$, para $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, consideramos

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N, \quad \alpha! = \alpha_1!...\alpha_N! \quad \text{e} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}.$$

Também denotamos

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \text{ onde } \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

e

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} ... D_{x_n}^{\alpha_n}, \text{ onde } D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Além disso, assumiremos em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ a fórmula de Leibniz:

$$\partial^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\varphi \cdot \partial^\beta \psi.$$

Definição 2.2.1. Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência de pesos.

1. Dizemos que uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é ultradiferenciável de classe $\{\mathscr{M}\}$ se existem constantes $C, h > 0$ tais que
$$|D^\alpha f(x)| \le C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

2. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$. Dizemos que $f \in C^\infty(\Omega)$ é ultradiferenciável de classe $\{\mathscr{M}\}$ se para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ existem constantes $C, h > 0$ tais que
$$|D^\alpha f(x)| \le C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in K, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Denotamos o espaço das funções ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$ em $\mathbb{T}^N$ (resp. em Ω) por $\mathscr{E}_\mathscr{M}(\mathbb{T}^N)$ (resp. $\mathscr{E}_\mathscr{M}(\Omega)$). Estes espaços são chamados de classes de Denjoy-Carleman do tipo Romieu.

Exemplo 2.2.2. Quando tomamos $\mathscr{M}$ sendo a sequência de pesos do Exemplo 2.1.5, recuperamos os espaços das funções Gevrey de ordem s, para $s > 1$. Neste caso, denotamos $\mathscr{E}_\mathscr{M}(\mathbb{T}^N)$ por $\mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N)$. Em particular, quando $s = 1$, $\mathscr{G}^1(\mathbb{T}^N) = C^\omega(\mathbb{T}^N)$.

Fixada $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos, vejamos algumas propriedades da classe $\mathscr{E}_\mathscr{M}(\mathbb{T}^N)$.

Proposição 2.2.3. $\mathscr{E}_\mathscr{M}(\mathbb{T}^N)$ é um espaço vetorial que contém o espaço das funções analíticas reais $C^\omega(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Se $f \in C^{\omega}(\mathbb{T}^N) = \mathscr{G}^1(\mathbb{T}^N)$, existem $C, h > 0$ tais que

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Como $m_{|\alpha|} \geq 1, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, seque que

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N$$

e, portanto, $C^{\omega}(\mathbb{T}^N) \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Além disso, se $f, g \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, existem $C_1, C_2, h_1, h_2 > 0$ tais que para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ temos

$$\begin{aligned} |D^{\alpha} f(x)| &\leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N \text{ e} \\ |D^{\alpha} g(x)| &\leq C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N. \end{aligned}$$

Assim, para cada $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\begin{aligned} |D^{\alpha}(f + \lambda g)(x)| &\leq |D^{\alpha} f(x)| + |\lambda| \cdot |D^{\alpha} g(x)| \\ &\leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! + |\lambda| \cdot C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \\ &\leq (C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} + |\lambda| \cdot C_2 \cdot h_2^{|\alpha|}) \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!. \end{aligned}$$

Tomando $C = C_1 + |\lambda| \cdot C_2$ e $h = \max\{h_1, h_2\}$, obtemos

$$|D^{\alpha}(f + \lambda g)(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Logo, $f + \lambda g \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. □

Proposição 2.2.4. $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é uma subálgebra de $C^{\infty}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Se $f, g \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem $C_1, C_2, h_1, h_2 > 0$ tais que para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ temos

$$\begin{aligned} |D^{\alpha} f(x)| &\leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N \text{ e} \\ |D^{\alpha} g(x)| &\leq C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall x \in \mathbb{T}^N. \end{aligned}$$

Segue da fórmula de Leibniz que

$$\begin{aligned} |D^{\alpha}(f \cdot g)(x)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha - \beta} f(x) \cdot D^{\beta} g(x) \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^{\alpha - \beta} f(x)| \cdot |D^{\beta} g(x)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(C_1 \cdot h_1^{|\alpha| - |\beta|} \cdot m_{|\alpha| - |\beta|} \cdot |\alpha - \beta|! \right) \cdot \left(C_2 \cdot h_2^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|! \right) \end{aligned}$$

Tomando $h = \max\{h_1, h_2\}$ e usando a Proposição 2.1.4, temos

$$\begin{aligned}
|D^\alpha(f\cdot g)(x)| &\le (C_1\cdot C_2)\cdot h^{|\alpha|}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta} m_{|\alpha|-|\beta|}\cdot|\alpha-\beta|!\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\\
&\le (C_1\cdot C_2)\cdot h^{|\alpha|}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta} m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\\
&\le (C_1\cdot C_2)\cdot(2h)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!
\end{aligned}$$

Logo, $fg \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. □

A condição (**M.2**) nos permite mostrar, por (RUDIN, 1962, Teorema A), que o espaço $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é fechado para inversão:

Teorema 2.2.5. Seja $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tal que $\inf_{x\in\mathbb{T}^N}|f(x)| > 0$. Então, $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e considere as constantes $C, h > 1$ tais que

$$|D^\alpha f(x)| \le C\cdot h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot\alpha!,\ \forall x\in\mathbb{T}^N,\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^N.$$

Seja $\sigma = \inf_{x\in\mathbb{T}^N}|f(x)|$. Defina $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{2C+\sigma}$ e uma sequência $\{r_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ por

$$r_j = \frac{\varepsilon}{h(m_j)^{1/j}},\ \forall j\in\mathbb{Z}_+.$$

Fixados $x_0 \in \mathbb{T}^N$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, com $|\alpha| = k \in \mathbb{Z}_+$, considere a função

$$Q(x) = \sum_{|\beta|\le k}\frac{\partial_x^\beta f(x_0)}{\beta!}x^\beta, \quad \forall x\in\mathbb{T}^N,$$

e sua extensão

$$\widetilde{Q}(z) = \sum_{|\beta|\le k}\frac{\partial_x^\beta f(x_0)}{\beta!}z^\beta,$$

onde $z = x + iy \in \mathbb{C}^N$.

Observe que, para $1 \le |\beta| \le k$, temos

$$\frac{|D^\beta f(x_0)|}{\beta!} \le Ch^{|\beta|}m_{|\beta|} \le Ch^{|\beta|}(m_k)^{|\beta|/k}, \tag{2.7}$$

em que a última desigualdade provém da Proposição 2.1.2 que, por sua vez, é consequência de (**M.2**). Se $|z| \le r_k$, decorre de (2.7) que

$$\begin{aligned}
|\widetilde{Q}(z)| &\ge |f(x_0)| - \left|\sum_{|\beta|=1}^{k}\frac{\partial_x^\beta f(x_0)}{\beta!}z^\beta\right| \ge \sigma - C\sum_{|\beta|=1}^{k}(h(m_k)^{1/k}r_k)^{|\beta|}\\
&= \sigma - C\sum_{|\beta|=1}^{k}\varepsilon^{|\beta|} > \sigma - C\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s = \sigma - \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\sigma}{2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $\partial_x^\beta f(x_0) = \partial_x^\beta Q(0)$ para todo $0 \leq |\beta| \leq k$, temos $\partial_x^\alpha(1/f)(x_0) = \partial_x^\alpha(1/Q)(0)$. Além disso, observe que $\widetilde{Q}_{|y=0} = Q$ e, portanto,

$$\partial_x^\beta Q(0) = \partial_z^\beta \widetilde{Q}(0,0), \text{ para todo } 0 \leq |\beta| \leq k.$$

Logo, $\partial_x^\alpha(1/Q)(0) = \partial_z^\alpha(1/\widetilde{Q})(0,0)$.

Assim, usando a fórmula de Cauchy no polidisco $\prod_1^N D(0,r_k)$ temos

$$\begin{aligned}|D^\alpha(1/f)(x_0)| &= |\partial_x^\alpha(1/f)(x_0)| = |\partial_x^\alpha(1/Q)(0)| = |\partial_z^\alpha(1/\widetilde{Q})(0,0)| \\ &= \frac{\alpha!}{(2\pi i)^N}\int_{|z_N|=r_k}\cdots\int_{|z_1|=r_k}\frac{1}{Q(z)z_1^{\alpha_1+1}\ldots z_N^{\alpha_N+1}}dz_1\ldots dz_N.\end{aligned}$$

Com isso, segue de (2.8) que

$$|D^\alpha(1/f)(x_0)| \leq \frac{\alpha!}{(2\pi)^N}\cdot\frac{2}{\sigma}\cdot\frac{(2\pi)^N}{r_k^{|\alpha|}} = \frac{2}{\sigma}\cdot\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot\alpha!.$$

Logo, $1/f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

□

Além disso, vejamos que o espaço das funções ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$ é fechado para composição. Para isso, faremos uso da fórmula Faà di Bruno em várias variáveis:

Teorema 2.2.6. (BIERSTONE; MILMAN, 2004, Proposição 4.3) Sejam $f : V \to \mathbb{R}^n$ e $g = (g_1,\ldots,g_p) : U \to V$, com U e V abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{D^\gamma(f\circ g)(x)}{\gamma!} = \sum\frac{\alpha!}{k_1!\ldots k_\ell!}\cdot\frac{D^\alpha f(g(x))}{\alpha!}\cdot\left(\frac{D^{\delta_1}g(x)}{\delta_1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{D^{\delta_\ell}g(x)}{\delta_\ell!}\right)^{k_\ell}, \tag{2.9}$$

onde $\alpha = k_1+\ldots+k_\ell$ e a soma é feita em todos os conjuntos $\{\delta_1,\ldots,\delta_\ell\}$ de ℓ elementos distintos de $\mathbb{N}^n\setminus\{0\}$ e todas as ℓ-uplas ordenadas $(k_1,\ldots,k_\ell) \in (\mathbb{N}^p\setminus\{0\})^\ell$, $\ell = 1,2,3,\ldots$, tais que

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\ell}|k_i|\delta_i.$$

Teorema 2.2.7. (BIERSTONE; MILMAN, 2004, Teorema 4.7) Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Sejam $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(V)$ e $g = (g_1,\ldots,g_p) : U \to V$, onde cada $g_j \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(U)$. Então $f\circ g \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(U)$.

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de U. Então existem constantes $C_1, R_1, C_2, R_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}&|D^\alpha f(y)| \leq C_1\cdot R_1^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot\alpha!,\ \forall y \in g(K),\ \alpha \in \mathbb{N}^p,\\ &|D^\delta g_j(x)| \leq C_2\cdot R_2^{|\delta|}\cdot m_{|\delta|}\cdot\delta!,\ \forall x \in K,\ \delta \in \mathbb{N}^p,\ j = 1,\ldots,p.\end{aligned}$$

Segue do Teorema 2.2.6 que, para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ e $x \in K$,

$$\begin{aligned}
\frac{|D^\gamma(f\circ g)(x)|}{\gamma!} &\leq \sum \frac{\alpha!}{k_1!\ldots k_\ell!}\cdot\frac{|D^\alpha f(g(x))|}{\alpha!}\cdot\left(\frac{|D^{\delta_1}g(x)|}{\delta_1!}\right)^{|k_1|}\ldots\left(\frac{|D^{\delta_\ell}g(x)|}{\delta_\ell!}\right)^{|k_\ell|}\\
&\leq \sum \frac{\alpha!}{k_1!\ldots k_\ell!}\cdot C_1\cdot R_1^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot\left(C_2\cdot R_2^{|\delta_1|}\cdot m_{|\delta_1|}\right)^{|k_1|}\ldots\left(C_2\cdot R_2^{|\delta_\ell|}\cdot m_{|\delta_\ell|}\right)^{|k_\ell|}\\
&\leq C_1\sum \frac{\alpha!}{k_1!\ldots k_\ell!}\cdot(R_1C_2)^{|\alpha|}\cdot R_2^{|\gamma|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot m_{|\delta_1|}^{|k_1|}\cdot\ldots\cdot m_{|\delta_\ell|}^{|k_\ell|},
\end{aligned}$$

em que a soma é como no Teorema 2.2.6.

Pela condição (**M.2**), temos que vale o seguinte (desigualdade de Childress, veja (BIERSTONE; MILMAN, 2004, Corolário 4.5)):

$$m_{|\alpha|}\cdot m_{|\delta_1|}^{|k_1|}\cdot\ldots\cdot m_{|\delta_\ell|}^{|k_\ell|}\leq m_{|\gamma|}.$$

Logo,

$$\frac{|D^\gamma(f\circ g)(x)|}{\gamma!}\leq C_1\sum\frac{\alpha!}{k_1!\ldots k_\ell!}\cdot(R_1C_2)^{|\alpha|}\cdot R_2^{|\gamma|}\cdot m_{|\gamma|}.$$

Além disso, por (BIERSTONE; MILMAN, 2004, Lema 4.8), existem constantes $C,R>0$ tais que

$$\sum\frac{\alpha!}{k_1!\ldots k_\ell!}\cdot(R_1C_2)^{|\alpha|}\leq CR^{|\gamma|}$$

e, portanto,

$$\frac{|D^\gamma(f\circ g)(x)|}{\gamma!}\leq C_1C(RR_2)^{|\lambda|}m_{|\lambda|}.$$

Logo, $f\circ g\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(U)$.

□

A hipótese (**M.3**) das sequências de pesos é suficiente para garantir que o espaço $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ também é fechado com relação a diferenciação. De fato, veremos que basta uma condição mais fraca para obter esta conclusão. Antes precisamos estabelecer alguns resultados sobre comparação entre dois espaços ultradiferenciáveis de diferentes classes.

Definição 2.2.8. Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$ duas sequências de pesos. Dizemos que $\mathscr{M}\preceq\mathscr{L}$ se, e somente se,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n}{l_n}\right)^{1/n}<\infty.$$

Se $\mathscr{M}\preceq\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}\preceq\mathscr{M}$, denotamos $\mathscr{M}\approx\mathscr{L}$.

Observação 2.2.9. Como a relação $\preceq$ é claramente reflexiva e transitiva, $\approx$ é uma relação de equivalência.

Mostraremos que a relação $\preceq$ entre duas sequências equivale a inclusão dos espaços associados a elas. Para isso precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.2.10. (THILLIEZ, 2008, Teorema 1) Dada uma sequências de pesos $\mathscr{M}$, existe um elemento θ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ tal que

$$|\theta^{(j)}(0)| \geq m_j \cdot j!, \ \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, defina $\alpha_n = \dfrac{m_{n+1} \cdot (n+1)}{m_n}$. Note que a sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ é crescente. De fato, por (**M.2**) temos

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{m_{n+2} \cdot (n+2)}{m_{n+1}} \cdot \frac{m_n}{m_{n+1} \cdot (n+1)} \geq \frac{m_{n+2} \cdot m_n}{m_{n+1}^2} \geq 1.$$

Com isso, mostremos que

$$\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^{k-j} \leq \frac{m_j \cdot j!}{m_k \cdot k!}, \ \forall j,k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.10}$$

É claro que se $j = k$ vale a igualdade. Se $j > k$ temos

$$\begin{aligned} \frac{m_j \cdot j!}{m_k \cdot k!} &= \frac{m_j \cdot j!}{m_{j-1} \cdot (j-1)!} \cdot \frac{m_{j-1} \cdot (j-1)!}{m_{j-2} \cdot (j-2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{m_{k+1} \cdot (k+1)!}{m_k \cdot k!} \\ &= \alpha_{j-1} \cdot \alpha_{j-2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k \\ &\geq \alpha_k^{j-k} = \left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^{k-j}. \end{aligned}$$

Por fim, se $j < k$

$$\begin{aligned} \frac{m_k \cdot k!}{m_j \cdot j!} &= \frac{m_k \cdot k!}{m_{k-1} \cdot (k-1)!} \cdot \frac{m_{k-1} \cdot (k-1)!}{m_{k-2} \cdot (k-2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{m_{j+1} \cdot (j+1)!}{m_j \cdot j!} \\ &= \alpha_{k-1} \cdot \alpha_{k-2} \cdot \ldots \cdot \alpha_j \\ &\leq \alpha_k^{k-j}. \end{aligned}$$

Portanto, vale (2.10).

Agora, defina em $\mathbb{T}$ a função

$$\theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \cdot k!}{(2\alpha_k)^k} \cdot \exp(2i\alpha_k x).$$

Para todo $x \in \mathbb{T}$ a série acima é absolutamente convergente. Com efeito, usando (2.10) com $j = 0$,

$$|\theta(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{m_k \cdot k!}{(2\alpha_k)^k} \cdot \exp(2i\alpha_k x) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \cdot k!}{2^k} \cdot \frac{m_0 \cdot 0!}{m_k \cdot k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2.$$

Estimando as derivadas de θ, decorre novamente de (2.10) que

$$
\begin{aligned}
|\theta^{(j)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{m_k \cdot k!}{(2\alpha_k)^k} \cdot (2i\alpha_k)^j \cdot \exp(2i\alpha_k x) \right| \\
&\leq 2^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \cdot k!}{2^k} \cdot \frac{m_j \cdot j!}{m_k \cdot k!} \\
&\leq 2^{j+1} \cdot m_j \cdot j!.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\theta \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$. Finalmente, calculando as derivadas de θ no ponto $x = 0$,

$$
|\theta^{(j)}(0)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k \cdot k!}{(2\alpha_k)^k} \cdot (2\alpha_k)^j \geq \frac{m_j \cdot j!}{(2\alpha_j)^j} \cdot (2\alpha_j)^j = m_j \cdot j!.
$$

□

Teorema 2.2.11. Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$ duas sequências de pesos. Então, $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subset \mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$.

Demonstração. Suponha que $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$, isto é, existe $B > 0$ tal que

$$
\frac{m_n}{l_n} \leq B^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.
$$

Assim, se $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem constantes $C, h > 0$ tais que, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$,

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha f(x)| &\leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \\
&\leq C \cdot (h \cdot B)^{|\alpha|} \cdot l_\alpha \cdot |\alpha|!, \forall x \in \mathbb{T}^N.
\end{aligned}
$$

Logo, $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$.

Reciprocamente, mostremos por contrapositiva. Supondo $\mathscr{M} \npreceq \mathscr{L}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe n_k tal que

$$
\frac{m_{n_k}}{l_{n_k}} \geq k^{n_k}.
$$

Pelo Lema 2.2.10, existe $\theta \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ satisfazendo $|\theta^{(j)}(0)| \geq m_j \cdot j!$, $\forall j \in \mathbb{Z}_+$. Defina a função $\varphi : \mathbb{T}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi = \theta \circ \pi_1$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Pela forma que foi definida, $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Por outro lado, tomando $\alpha_{n_k} = (n_k, 0, ..., 0)$, temos

$$
|D^{\alpha_{n_k}} \varphi(0)| = |\theta^{(n_k)}(0)| \geq (n_k)! \cdot m_{n_k} \geq (n_k)! \cdot l_{n_k} \cdot k^{n_k}.
$$

Disso decorre

$$
\left(\frac{|D^{\alpha_{n_k}} \varphi(0)|}{(n_k)! \cdot l_{n_k}} \right)^{1/n_k} \longrightarrow \infty
$$

e, portanto, $\varphi \notin \mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$. □

Segue diretamente do Teorema 2.2.11 que a igualdade entre os espaços $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$ equivale a $\mathscr{M} \approx \mathscr{L}$.

Recuperando os espaços Gevrey, decorre do Teorema 2.2.11 o seguinte.

Exemplo 2.2.12. Se $r < s$, então $\mathscr{G}^r(\mathbb{T}^N) \subsetneq \mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N)$. De fato, as sequências de pesos dadas por $\mathscr{M} = \{(n!)^{r-1}\}$ e $\mathscr{L} = \{(n!)^{s-1}\}$, geram os espaços $\mathscr{G}^r(\mathbb{T}^N)$ e $\mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N)$, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left(\frac{(n!)^{r-1}}{(n!)^{s-1}}\right)^{1/n} = (n!)^{(r-s)/n} \ \text{ e } \ \left(\frac{(n!)^{s-1}}{(n!)^{r-1}}\right)^{1/n} = (n!)^{(s-r)/n}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} (n!)^{(1/n)} = \infty$ e $r < s$, temos

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{(r-s)/n} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} (n!)^{(s-r)/n} = \infty.$$

Logo, $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$, mas $\mathscr{L} \not\preceq \mathscr{M}$ e o resultado segue do Teorema 2.2.11.

Em particular, como $C^\omega(\mathbb{T}^N) = \mathscr{G}^1(\mathbb{T}^N)$, cuja sequência de pesos associada é $\{1\}$, temos para $\mathscr{M} = \{m_j\}$ que

$$\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) = C^\omega(\mathbb{T}^N) \iff \sup_{j\geq 1} (m_j)^{1/j} < \infty.$$

Dados $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de pesos e $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\mathscr{M}^k$ a sequência $\{m_n^k\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, onde $m_n^k = m_{n+k}$. Utilizaremos a notação $\mathscr{E}_{\mathscr{M}^k}(\mathbb{T}^N)$, ainda que $\mathscr{M}^k$ não seja necessariamente uma sequência de pesos.

Proposição 2.2.13. Se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, com $|\alpha| = k$ e $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, então $D^\alpha\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}^k}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Sejam $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ e $x \in \mathbb{T}^N$. Como $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem $C, h > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha+\beta}\varphi(x)| &\leq C\cdot h^{|\alpha+\beta|}\cdot m_{|\alpha+\beta|}\cdot|\alpha+\beta|! \\
&\leq (C\cdot h^{|\alpha|})\cdot h^{|\beta|}\cdot m_{k+|\beta|}\cdot|\alpha+\beta|! \\
&\leq (C\cdot h^{|\alpha|})\cdot h^{|\beta|}\cdot m^k_{|\beta|}\cdot(|\alpha|+|\beta|)! \\
&\leq (C\cdot h^{|\alpha|})\cdot h^{|\beta|}\cdot m^k_{|\beta|}\cdot(2^{|\alpha|+|\beta|}\cdot|\alpha|!\cdot|\beta|!) \\
&= (C\cdot h^{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot 2^{|\alpha|})\cdot(2\cdot h)^{|\beta|}\cdot m^k_{|\beta|}\cdot|\beta|!.
\end{aligned}$$

Logo, $D^\alpha\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}^k}(\mathbb{T}^N)$. □

Finalmente, estamos aptos a mostrar o seguinte resultado:

Teorema 2.2.14. $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é fechado com relação a diferenciação.

Demonstração. Pela Proposição 2.2.13, basta mostrarmos que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}^p}(\mathbb{T}^N) \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

Mostremos que

$$\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+p}}{m_j}\right)^{1/j} < \infty,\ \forall p\in\mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Como $\mathscr{M}$ é uma sequência de pesos, (**M.3**) implica que

$$\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+1}}{m_j}\right)^{1/j} < \infty. \tag{2.12}$$

Suponha por indução que o resultado vale para $p = k$. Então

$$\begin{aligned}\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+k+1}}{m_j}\right)^{1/j} &\leq \sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+k+1}}{m_{j+k}}\right)^{1/j}\cdot\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+k}}{m_j}\right)^{1/j}\\ &\leq \sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+1}}{m_j}\right)^{1/j}\cdot\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+k}}{m_j}\right)^{1/j} < \infty.\end{aligned}$$

Logo, vale (2.11) e segue do Teorema 2.2.11 que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}^p}(\mathbb{T}^N)\subset\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

$\square$

Observação 2.2.15. Segue de (2.11) que para todo $p\in\mathbb{N}$, existe $C_{\{p\}} > 1$ tal que

$$\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+p}}{m_j}\right)^{1/j} \leq C_{\{p\}}. \tag{2.13}$$

Em particular, quando $m_n = n!$, como

$$\sup_{j\geq 1}\left(\frac{m_{j+1}}{m_j}\right)^{1/j} = \sup_{j\geq 1}(j+1)^{1/j} = 2,$$

temos que para cada $q\in\mathbb{N}$ existe uma constante $B_{\{q\}}$ tal que

$$\sup_{j\geq 1}\left(\frac{(j+q)!}{j!}\right)^{1/j} \leq B_{\{q\}}. \tag{2.14}$$

As desigualdades (2.13) e (2.14) serão frequentemente usadas nas demonstrações das próximas seções.

Observe que até aqui (**M.3**) poderia ter sido substituída por (2.12). Contudo, o crescimento moderado das sequências de pesos também será útil no Capítulo 3 para a caracterização de funções ultradiferenciáveis (e ultradistribuições) via séries de Fourier. Além disso, se $\mathscr{M}$ é uma sequência de pesos, então a sequência $\{M_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, dada por $M_j = m_j j!$, satisfaz as condições (1) e (2) de (KOMATSU, 1979):

1. $M_0 = M_1 = 1$;

2. Existe uma constante A tal que

$$(M_q/q!)^{1/(q-1)} \leq A(M_p/p!)^{1/(p-1)} \quad 2 \leq q \leq p.$$

Com efeito, para $2 \leq q \leq p$, temos por (**M.3**)

$$\left(\frac{m_q}{m_{q-1}m_1}\right)^{1/q} \leq H$$

e, portanto,

$$m_q^{1/(q-1)} \leq H^{q/(q-1)} \cdot m_{q-1}^{1/(q-1)} \leq H^2 \cdot m_{p-1}^{1/(p-1)} \leq H^2 \cdot m_p^{1/(p-1)},$$

onde as duas últimas desigualdades seguem da Proposição 2.1.2 e do Corolário 2.1.3, respectivamente. Com isso, vale o Teorema da Função Inversa para as classes $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}$:

Teorema 2.2.16. (KOMATSU, 1979, Teorema da Função Inversa) Se $F = (f_1,\dots,f_N)$ é uma função ultradiferenciável de classe $\{\mathscr{M}\}$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^N$ em um aberto $V \subset \mathbb{R}^N$ (isto é, todas as componentes f_i são ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$) e o Jacobiano

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_N)}{\partial(x_1,\dots,x_N)} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$$

não se anula em $x^0 \in U$, então existe uma vizinhança aberta U_0 de x^0 em U e uma vizinhança aberta V_0 de $y^0 = F(x^0)$ em V tal que F restrita a U_0 é um homeomorfismo em V_0 e sua inversa é uma função ultradiferenciável de classe $\{\mathscr{M}\}$ em V_0.

Este resultado será útil no estudo da resolubilidade de classes de campos vetoriais no Capítulo 5 (ver Proposição 5.2.2).

2.3 Classes quase-analíticas

Existem subespaços de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ que contém elementos que não são analíticos em nenhum ponto, mas satisfazem a propriedade de continuação analítica, isto é,

$$x_0 \in \mathbb{T}^N \text{ e } D^\alpha f(x_0) = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \implies f \equiv 0.$$

O Teorema de Denjoy-Carleman caracteriza as classes $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ (ou $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\Omega)$) que satisfazem tal condição. Nesta seção, provaremos este teorema com base em (RUDIN, 1970). Para isso, assumiremos alguns resultados.

Definição 2.3.1. Definimos por H^∞ o espaço de todas as funções holomorfas limitadas no disco aberto unitário $D = D(0;1)$, cuja norma é dada por

$$||f||_\infty = \sup_{z\in D} |f(z)|.$$

Teorema 2.3.2. (RUDIN, 1970, Teorema 11.20) Para cada $f \in H^{\infty}$, existe uma função correspondente $f^{*} \in L^{\infty}(\partial D)$, definida em quase todo ponto por

$$f^{*}(e^{it}) = \lim_{r \to 1} f(re^{it}).$$

Além disso, vale $||f||_{\infty} = ||f^{*}||_{\infty}$.

Teorema 2.3.3. (RUDIN, 1970, Teorema 15.6) Sejam f_n funções holomorfas em Ω, para $n = 1, 2, 3, ...$, não identicamente nulas em qualquer componente de Ω. Suponha que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

seja uniformemente convergente em qualquer subconjunto compacto de Ω. Então o produto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

também converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω. Consequentemente, f é holomorfa em Ω. Além disso,

$$m(f;z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n;z), \; z \in \Omega,$$

onde $m(f;z)$ é a multiplicidade do zero de f em z.

Teorema 2.3.4. (RUDIN, 1970, Teorema 15.19) Seja $f \in H^{\infty}$. Se f^{*} é a função limite radial de f, dada pelo Teorema 2.3.2, então

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f^{*}(e^{i\theta})| d\theta, \tag{2.15}$$

para todo r entre 0 e 1, e o termo central de (2.15) é uma função não decrescente de r. Além disso, se f não é identicamente nula, segue que a última integral em (2.15) é maior que $-\infty$. Assim, $f^{*}(e^{i\theta}) \neq 0$ em quase todo ponto da fronteira de D.

Lembremos que se $f \in L^1$, sua transformada de Fourier é definida por

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx,$$

e a transformada inversa é dada por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt.$$

O próximo teorema é uma versão do Teorema de Paley-Wiener, que oferece uma relação entre o crescimento de uma função e a transformada de Fourier.

Teorema 2.3.5. (RUDIN, 1970, Teorema 19.3) Sejam A e C constantes positivas e f uma função inteira tal que

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$$

para todo z, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Então existe uma função $F \in L^2(-A,A)$ tal que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)e^{itx} dt.$$

De forma mais geral que os espaços de funções ultradiferenciáveis, definimos:

Definição 2.3.6. Seja $M_0, M_1, M_2, \ldots$ uma sequência de números positivos. Definimos a classe $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N)$ como o conjunto de todas as $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ para as quais existem constantes $\beta_f, B_f > 0$ de modo que

$$||D^{\alpha} f||_{\infty} \leq \beta_f B_f^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N_+.$$

Definição 2.3.7. Dizemos que $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N)$ é quase analítica se o seu único elemento *flat* é a função nula, isto é,

$$f \in C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N),\ x_0 \in \mathbb{R}^N |\ D^{\alpha} f(x_0) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^N_+ \implies f \equiv 0.$$

Equivalentemente, para o caso unidimensional temos:

Teorema 2.3.8. (RUDIN, 1970, Teorema 19.10) $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ é quase analítica se, e somente se, $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ não contém nenhuma função não trivial com suporte compacto.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ é quase analítica. Para qualquer $f \in C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ com suporte compacto, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x_0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f \equiv 0$.

($\Leftarrow$) Agora suponha que $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ não é quase analítica. Então, existe $f \in C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ com $D^n f(0) = 0\ \forall n$, mas $f(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Podemos assumir $x_0 > 0$. Considere

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Assim, $g \in C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$. Agora, defina $h(x) = g(x)g(2x_0 - x)$. Como $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ é uma álgebra com respeito ao produto, temos $h \in C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$. Além disso, $h(x) = 0$ se $x < 0$ ou se $x > 2x_0$ e, portanto, h tem suporte compacto, mas $h(x_0) = f^2(x_0) \neq 0$. □

Finalmente, o Teorema de Denjoy-Carleman dá uma caracterização para as classes $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ quase analíticas cujas sequências $\{M_n\}$ possuem certas propriedades:

Teorema 2.3.9. (RUDIN, 1970, Teorema 19.11) Seja $M_0, M_1, M_2, \ldots$ uma sequência de números positivos tais que $M_0 = 1$ e $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Defina, para $x > 0$,

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{M_n} \text{ e } q(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{x^n}{M_n}.$$

Então, são equivalentes:

(1) $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ é não quase analítica.

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \log Q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n} < \infty.$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty.$

Observe que as integrais em **(2)** e **(3)** estão bem definidas, pois

$$Q(x), q(x) \geq \frac{x^0}{M_0} = 1, \ \forall x > 0.$$

Demonstração. **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)**: Como $C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ não é quase analítica, pelo Teorema 2.3.8, existe uma função não trivial de suporte compacto no espaço. Com uma mudança de variável, é possível obter $F \in C^{\infty}_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ não nula, com suporte em $[0, A]$ e tal que

$$||D^n F||_{\infty} \leq 2^{-n} M_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Definimos as funções f em $\mathbb{C}$ e g em $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ por

$$f(z) = \int_0^A F(t) e^{itz} dt \text{ e } g(w) = f\left(\frac{i - iw}{1+w}\right).$$

Temos que f é inteira, não nula e, se $\operatorname{Im} z > 0$,

$$|f(z)| \leq \int_0^A |F(t)||e^{itx}||e^{-ty}| dt \leq A||F||_{\infty}, \text{ para } z = x + iy.$$

Dessa forma, f é limitada no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$. Isso implica que g é limitada no disco unitário. De fato, se $w = x + iy \in D$, isto é, $x^2 + y^2 < 1$, temos

$$\frac{i - iw}{1+w} = \frac{i - xi + y}{1 + x + iy} \cdot \frac{(1 + x - iy)}{(1 + x - iy)} = \frac{2y + i(1 - x^2 - y^2)}{(1+x)^2 + y^2}.$$

Logo,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{i - iw}{1+w}\right) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2} > 0.$$

Além disso, g é não nula e contínua em $\bar{D}\setminus\{-1\}$. Assim, valem as hipóteses do Teorema 2.3.4, no qual g^* (limite radial da função g) é igual a função g em quase todo ponto. Portanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(e^{i\theta})|d\theta > -\infty. \tag{2.16}$$

Fazendo uma mudança de variável na integral em (2.16), com

$$x=\frac{i(1-e^{i\theta})}{1+e^{i\theta}}=\frac{2(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})}{2i(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \implies d\theta=2(1+x^2)^{-1}dx,$$

obtemos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log|f(x)|\frac{dx}{1+x^2} > -\infty. \tag{2.17}$$

Por outro lado, fazendo integração por partes n vezes na definição da f e usando que $F^{(k)}(0)=F^{(k)}(A)=0$, para $k=0,1,...$, concluímos que

$$f(z)=(-iz)^{-n}\int_0^A(D^nF)(t)e^{itz}dt,\ \text{ para } z\neq 0.$$

Se $x\in\mathbb{R}$, temos

$$|x^nf(x)|\leq\int_0^A||D^nF||dt\leq 2^{-n}AM_n,\ n=0,1,2,\dots\ .$$

Disso decorre, para $x\geq 0$,

$$Q(x)|f(x)|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n|f(x)|}{M_n}\leq 2A.$$

Como f é inteira, seus zeros são isolados e de ordem finita. Assim, usando (2.17) temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\log Q(x)\frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{\infty}\log\left(\frac{Q(x)|f(x)|}{|f(x)|}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\\ &= \int_0^{\infty}\log(Q(x)|f(x)|)\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^{\infty}\log|f(x)|\frac{dx}{1+x^2}<\infty.\end{aligned}$$

Portanto, vale **(2)**.

(2) $\implies$ **(3)**: Observe que

$$\frac{x^n}{M_n}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{M_j},\ \forall n\geq 0 \implies q(x)\leq Q(x).$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty}\log q(x)\frac{dx}{1+x^2}\leq\int_0^{\infty}\log Q(x)\frac{dx}{1+x^2}<\infty.$$

(3) $\implies$ **(4)**: Defina $a_n=M_n^{1/n}$. Como $M_0=1$ e $M_n^2\leq M_{n-1}M_{n+1}$, temos $a_n\leq a_{n+1}$, para cada $n>0$. De fato,

$$M_1^2\leq M_0M_2=M_2 \implies M_1^{1/1}\leq M_2^{1/2}.$$

Suponha por indução que $M_k^{1/k} \le M_{k+1}^{1/(k+1)}$. Então,

$$M_{k+1}^2 \le M_k \cdot M_{k+2} \le M_{k+1}^{k/(k+1)} \cdot M_{k+2} \implies M_{k+1}^{1/(k+1)} \le M_{k+2}^{1/(k+2)}.$$

Agora, observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $x \ge ea_n$, então $\dfrac{x^n}{M_n} \ge \dfrac{e^n a_n^n}{M_n} = e^n$. Logo,

$$\log q(x) \ge \log \frac{x^n}{M_n} \ge \log e^n = n, \ \forall x \ge ea_n.$$

Assim, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} e\int_{ea_1}^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{x^2} &\ge e \sum_{n=1}^{N} n \int_{ea_n}^{ea_{n+1}} x^{-2} dx + e\int_{ea_{N+1}}^{\infty} (N+1) x^{-2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} n \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) + \frac{N+1}{a_{N+1}} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{ea_1}^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{x^2} &= \int_{ea_1}^{\infty} \log q(x) \frac{1+x^2}{x^2} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{ea_1}^{\infty} \log q(x) \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \frac{dx}{1+x^2} \\ &\le \left(1 + \frac{1}{(ea_1)^2} \right) \int_{ea_1}^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} \le A \int_0^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty, \end{aligned}$$

onde $A = 1 + \dfrac{1}{(ea_1)^2} > 0$.

Isso mostra que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{a_n} < \infty.$$

Portanto, vale **(4)**.

(4) $\implies$ **(5)**: Defina $\lambda_n = \dfrac{M_{n-1}}{M_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Para todo $n > 0$, temos

$$M_n^2 \le M_{n-1} M_{n+1} \implies \frac{M_n}{M_{n+1}} \le \frac{M_{n-1}}{M_n} \implies \lambda_{n+1} \le \lambda_n.$$

Assim,

$$(a_n \lambda_n)^n = M_n \lambda_n^n \le M_n \cdot \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 1.$$

Isto é, $\lambda_n \le \dfrac{1}{a_n}$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty.$$

(5) $\Longrightarrow$ (1): Defina

$$f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}.$$

Observe que, para $z \neq 0$,

$$\frac{z - \sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[z - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)!} z^{2j-1}.$$

A série é convergente em $|z| \leq 1$ pelo teste da razão, pois

$$\left|\frac{z^{2j+1}}{(2j+3)!} \cdot \frac{(2j+1)!}{z^{2j-1}}\right| = \frac{|z|^2}{(2j+3)(2j+2)} \leq \frac{1}{(2j+2)(2j+3)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1, \quad \text{em } |z| \leq 1.$$

Segue que existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\left|1 - \frac{\sin z}{z}\right| \leq B|z|, \text{ para } |z| \leq 1.$$

Dessa forma,

$$\left|1 - \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}\right| \leq B\lambda_n |z|, \text{ para } |z| \leq \frac{1}{\lambda_n}.$$

Por hipótese, $\lambda_n \longrightarrow 0$, isto é, $\dfrac{1}{\lambda_n} \longrightarrow \infty$. Assim, se $K \subset \mathbb{C}$ é um conjunto compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z| \leq \dfrac{1}{\lambda_{n_0}}$, $\forall z \in K$. Temos então

$$\left|1 - \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}\right| \leq B\lambda_n |z| \leq \frac{B\lambda_n}{\lambda_{n_0}}, \ \forall n \geq n_0, \ \forall z \in K.$$

E, como

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} B\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_0}} \leq \frac{B}{\lambda_{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

o Teste M de Weierstrass implica que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}\right|$ é uniformemente convergente em compactos. Decorre do Teorema 2.3.3 que o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}$$

define uma função inteira. Consequentemente, f é uma função inteira não identicamente nula.

Além disso, se $x \in \mathbb{R}$, como $|\sin x| \leq 1$ temos

$$|x^k f(x)| \leq |x^k| \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \prod_{n=1}^{k} \left|\frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n x}\right| \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k)^{-1} = M_k \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \tag{2.18}$$

para todo $k \geq 1$. Observe que para $k = 0$ também vale

$$|f(x)| \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = M_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2. \tag{2.19}$$

Integrando a desigualdade (2.18) para $k \geq 0$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} M_k \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = M_k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx. \tag{2.20}$$

Usando integração por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \underset{\substack{u=\sin^2 x,\\ dv=\frac{1}{x^2}dx}}{=} \left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx \underset{u=2x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Defina a função

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ para } y \geq 0.$$

Queremos encontrar o valor de $I(0)$. Observe que

$$I'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx.$$

Integrando por partes duas vezes,

$$\begin{aligned}
\int e^{-xy} \sin x \, dx &\underset{\substack{u=\sin x,\\ dv=e^{-xy}dx}}{=} -\frac{e^{-xy}}{y} \sin x + \frac{1}{y} \int e^{-xy} \cos x \, dx \\
&\underset{\substack{u=\cos x,\\ dv=e^{-xy}dx}}{=} -\frac{e^{-xy}}{y} \sin x + \frac{1}{y} \left[-\frac{e^{-xy}}{y} \cos x - \frac{1}{y} \int e^{-xy} \sin x \, dx\right] \\
&\implies \int e^{-xy} \sin x \, dx = -\frac{e^{-xy}(y \sin x + \cos x)}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I'(y) = -\left[-\frac{e^{-xy}(y \sin x + \cos x)}{1+y^2}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Integrando os dois lados da igualdade acima de 0 a ∞, concluímos que

$$\lim_{y \to \infty} I(y) - I(0) = \lim_{y \to \infty} (-\arctan y) + \arctan 0 = -\frac{\pi}{2}. \tag{2.21}$$

Pela pela forma que a função I foi definida, $\lim_{y \to \infty} I(y) = 0$. Logo, decorre de (2.21) que $I(0) = \frac{\pi}{2}$.
Finamente, como $\frac{\sin x}{x}$ é uma função par, podemos concluir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2I(0) = \pi.$$

Assim, por (2.20), vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx \leq M_k \pi, \ \forall k \geq 0. \tag{2.22}$$

Além disso, usando novamente que $|\sin x| \leq |x|$, para $x \in \mathbb{R}$, por (2.19) temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi < \infty.$$

Como $\dfrac{\sin z}{z} = \dfrac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2iz} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itz} dt,$

$$|z^{-1} \sin z| \leq e^{|y|},\ z = x + iy.$$

Isso implica que

$$|f(z)| \leq e^{A|z|},\ \text{com}\ A = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Assim, mostramos que f satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.3.5 e, portanto, sua transformada de Fourier

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx,\ t \in \mathbb{R},$$

é uma função não nula de suporte compacto.

Derivando a função F sob sinal de integração obtemos

$$(D^k F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) e^{-itx} dx,\ \forall k \geq 0,$$

e, por (2.22), segue que

$$||D^k F||_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)||e^{-itx}| dx \leq M_k,\ \forall k \geq 0.$$

Isso mostra que $F \in C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ e, pelo Teorema 2.3.8, $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ não é quase analítica.

□

Observação 2.3.10. Apesar do Teorema 2.3.9 estar demonstrado para classes em $C^\infty(\mathbb{R})$, mostremos que o mesmo vale para classes em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Primeiro, suponha que a classe $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ seja não quase analítica (isto é, valem as condições **(1)**-**(5)**). Então, pelo Teorema 2.3.8 existe $f \in C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ não trivial com suporte compacto. Em particular, podemos considerar que supp $f \subset (0, 2\pi)$. Considere a função

$$\widetilde{f}(x) \doteq \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [0, 2\pi], \\ f(x - 2\pi j), & \text{se } x \in [2\pi j, 2\pi(j+1)]. \end{cases}$$

Logo, $\widetilde{f}$ é uma função 2π-periódica em $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$. Definindo F em $\mathbb{R}^N$ por $F(x_1, ..., x_N) = \widetilde{f}(x_1)$, temos que F é uma função 2π-periódica em $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{T}^N)$ é não quase analítica.

Por outro lado, suponha que $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{T}^N)$ seja não quase analítica. Pela inclusão $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{T}^N) \subset C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N)$, podemos concluir que $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N)$ também é não quase analítica. Logo, existe $F \in C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R}^N)$ não trivial e flat em $0 \in \mathbb{R}^N$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $F(x_0) \neq 0$ e defina f em $\mathbb{R}$ por $f(t) = F(tx_0)$. Assim, temos $f \in C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$, $f^{(j)}(0) = 0\ \forall j \in \mathbb{Z}_+$ e $f(1) = F(x_0) \neq 0$. Portanto, $C^\infty_{\{M_n\}}(\mathbb{R})$ é não quase analítica e valem as condições **(1)**-**(5)**.

□

Dada $\mathscr{M} = \{m_n\}$ uma sequência de pesos, defina $M_n = m_n \cdot n!$, para $n \geq 0$. Observe que $M_0 = m_0 \cdot 0! = 1$ e, por (**M.2**), para cada $n \geq 1$

$$\begin{aligned} M_n^2 &= m_n^2 \cdot (n!)^2 \\ &\leq m_{n-1} \cdot m_{n+1} \cdot n! \cdot n \cdot (n-1)! \\ &\leq m_{n-1} \cdot (n-1)! \cdot m_{n+1} \cdot (n+1)! \\ &= M_{n-1} \cdot M_{n+1}. \end{aligned}$$

Logo, segue do Teorema 2.3.9 e da Observação 2.3.10 que a classe $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é quase analítica se, e somente se,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{m_{n+1} \cdot (n+1)} = \infty. \tag{2.23}$$

Vejamos alguns exemplos de espaços quase-analíticos e espaços não quase-analíticos.

Exemplo 2.3.11. Os espaços Gevrey $\mathscr{G}^s(\mathbb{T}^N)$ são não quase analíticos para $s > 1$. De fato, usando as sequências dadas por $(n!)^{s-1}$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^{s-1}}{(n+1)!^{s-1} \cdot (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} < \infty.$$

Por outro lado, $\mathscr{G}^1(\mathbb{T}^N)$, o espaço das funções analíticas, é também quase analítico.

Exemplo 2.3.12. Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ a sequência de pesos definida no Exemplo 2.1.6, onde $m_n = [\ln(n+e-1)]^{\sigma n}$, para algum $\sigma > 0$. Mostremos que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é quase analítica para $0 < \sigma \leq 1$ e não-quase analítica para $\sigma > 1$.

Primeiro, suponha que $0 < \sigma \leq 1$. Temos

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \frac{m_j}{(j+1) m_{j+1}} &= \sum_{j \geq 1} \frac{[\ln(j+e-1)]^{\sigma j}}{(j+1)[\ln(j+e)]^{\sigma(j+1)}} \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j+1)[\ln(j+e)]^{\sigma}} \left(\frac{\ln(j+e-1)}{\ln(j+e)} \right)^{\sigma j} \\ &\geq \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j+1)[\ln(j+e)]^{\sigma}} \left(\frac{j+e-1}{j+e} \right)^{\sigma j}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

usando na última desigualdade novamente o fato da função $\dfrac{\ln(x)}{x}$ ser decrescente para $x \geq e$.

Observe que

$$\lim_{j \to \infty} \left(\frac{j+e-1}{j+e} \right)^j = \lim_{j \to \infty} e^{j \ln\left(\frac{j+e-1}{j+e}\right)},$$

e

$$\lim_{j \to \infty} j \ln\left(\frac{j+e-1}{j+e} \right) = \lim_{j \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{j+e-1}{j+e}\right)}{1/j} = \lim_{j \to \infty} -j^2 \left(\frac{1}{j+e-1} - \frac{1}{j+e} \right) = -1.$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{j+e-1}{j+e}\right)^j=\frac{1}{e}.$$

Logo, existe $j_0\in\mathbb{Z}$ tal que para todo $j\geq j_0$

$$\left(\frac{j+e-1}{j+e}\right)^j\geq\frac{1}{2e}. \tag{2.25}$$

Voltando a estimativa (2.24), temos

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}}&\geq\sum_{j=1}^{j_0}\frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}}+\frac{1}{(2e)^\sigma}\sum_{j\geq j_0}\frac{1}{(j+1)[\ln(j+e)]^\sigma}\\&\geq K+\frac{1}{2e}\sum_{j\geq j_0}\frac{1}{(j+1)\ln(j+e)}\\&\geq K+\frac{1}{2e}\sum_{j\geq j_0}\frac{1}{(j+e)\ln(j+e)},\end{aligned} \tag{2.26}$$

para alguma constante $K>0$ (usamos na segunda passagem que $\sigma\leq 1$). Defina a função $f:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\frac{1}{(x+e)\ln(x+e)}.$$

Observe que f é contínua, positiva, decrescente e

$$\int_1^\infty\frac{1}{(x+e)\ln(x+e)}dx=\int_{\ln(1+e)}^\infty\frac{1}{u}du=\ln(u)\Big|_{\ln(1+e)}^{+\infty}=+\infty.$$

Portanto, pelo teste da integral, $\sum\limits_{j\geq 1}f(j)$ diverge e, por (2.26), temos

$$\sum_{j\geq 1}\frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}}=\infty.$$

Logo, $\mathscr{M}$ satisfaz (2.23) e assim provamos que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é quase analítica para $0<\sigma\leq 1$.

Agora, suponha que $\sigma>1$. Temos

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}}&=\sum_{j\geq 1}\frac{1}{(j+1)[\ln(j+e)]^\sigma}\left(\frac{\ln(j+e-1)}{\ln(j+e)}\right)^{\sigma j}\\&\leq\sum_{j\geq 1}\frac{1}{(j+1)[\ln(j+e)]^\sigma}\leq\sum_{j\geq 1}\frac{1}{(j+1)[\ln(j+1)]^\sigma}.\end{aligned}$$

Defina a função $g:[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\frac{1}{(x+1)[\ln(x+1)]^\sigma}.$$

Observe que g é contínua, positiva, decrescente e

$$\int_1^\infty\frac{1}{(x+1)[\ln(x+1)]^\sigma}dx=\int_{\ln 2}^\infty\frac{1}{u^\sigma}du=-\frac{1}{(\sigma-1)u^{\sigma-1}}\Big|_{\ln 2}^{+\infty}=\frac{1}{(\sigma-1)(\ln 2)^{\sigma-1}}<\infty.$$

Novamente pelo teste da integral, segue que $\sum_{j\geq 1} g(j)$ é convergente e, consequentemente,

$$\sum_{j\geq 1} \frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}} < \infty.$$

Logo, $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é não quase analítica para $\sigma > 1$.

2.4 Topologia das classes de Denjoy-Carleman

Dada uma sequência de pesos $\mathscr{M}$, podemos munir $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ com uma topologia de limite indutivo, que o torna um espaço DFS, isto é, uma sequência injetiva compacta de espaços localmente convexos. Introduziremos aqui apenas os conceitos necessários para o decorrer deste trabalho, mais informações podem ser encontradas em (KOMATSU, 1967).

Definição 2.4.1. Dado $h > 0$, definimos o espaço

$$\mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N) = \left\{ f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N);\ \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+}} \left[\frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot |\alpha|!} \right] < \infty \right\}.$$

Dado $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$, definimos a norma

$$||f||_{\mathscr{M},h} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+}} \left[\frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot |\alpha|!} \right].$$

Proposição 2.4.2. Sejam $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos e $h > 0$. O espaço $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ munido da norma $||\cdot||_{\mathscr{M},h}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Precisamos mostrar que toda sequência de Cauchy em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ é convergente no espaço. Com efeito, seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy qualquer em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ e fixado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\varphi_j - \varphi_k||_{\mathscr{M},h} < \frac{\varepsilon}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot |\alpha|!},\ \forall j,k > n_0.$$

Para cada $x \in \mathbb{T}^N$, segue da definição da norma em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ que

$$\frac{|D^\alpha(\varphi_j - \varphi_k)(x)|}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot |\alpha|!} < \frac{\varepsilon}{h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot |\alpha|!},\ \forall j,k > n_0,$$

isto é,

$$|D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi_k(x)| < \varepsilon,\ \forall j,k > n_0.$$

Desa forma, $\{D^\alpha\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente de Cauchy. Assim, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ definindo a função ψ_α por

$$\psi_\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} D^\alpha\varphi_n(x),\ \forall x \in \mathbb{T}^N,$$

podemos concluir que as convergências são uniformes, pois $\mathbb{T}^N$ é compacto. Portanto, $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $D^\alpha \psi_0 = \psi_\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$.

Denote ψ_0 por φ. Vamos mostrar que $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\varphi_j - \varphi_k||_{\mathscr{M},h} < 1$, $\forall j,k > k_0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ e $x \in \mathbb{T}^N$, temos

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha \varphi(x)| &\leq |D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi_{k_0}(x)| + |D^\alpha \varphi_{k_0}(x)| \\
&= \left| \lim_{j\to\infty} D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi_{k_0}(x) \right| + |D^\alpha \varphi_{k_0}(x)| \\
&\leq \lim_{j\to\infty} ||\varphi_j(x) - \varphi_{k_0}(x)||_{\mathscr{M},h} \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! + |D^\alpha \varphi_{k_0}(x)| \\
&\leq 1 \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! + C_{k_0} \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \\
&= (1 + C_{k_0}) \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.
\end{aligned}
$$

Logo, $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$.

Finalmente, mostremos que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\varphi_j - \varphi_k||_{\mathscr{M},h} < \varepsilon,\ \forall j,k > n_0.$$

Por definição, para todo $x \in \mathbb{T}^N$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, decorre que

$$\frac{|D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi_k(x)|}{h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} < \varepsilon,\ \forall j,k > n_0.$$

Calculando o limite quando $k \to \infty$, obtemos

$$||\varphi_j - \varphi||_{\mathscr{M},h} < \varepsilon,\ \forall j > n_0$$

e, portanto, $||\varphi_j - \varphi||_{\mathscr{M},h} \longrightarrow 0$. □

Proposição 2.4.3. Sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, com $0 < h_1 < h_2$. Então $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N) \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$ e a inclusão $i_{h_1}^{h_2} : \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$ é compacta.

Demonstração. Seja $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N)$. Como $\dfrac{1}{h_2} < \dfrac{1}{h_1}$, segue que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+}} \left[\frac{|D^\alpha f(x)|}{h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right] < \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+}} \left[\frac{|D^\alpha f(x)|}{h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right] < \infty.$$

Portanto, $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$.

Para mostrar que a inclusão $i_{h_1}^{h_2}$ é compacta, dada uma sequência limitada em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N)$, vamos mostrar que ela possui uma subsequência convergente em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$.

Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N)$ tal que $||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_1} \leq C$ para alguma constante $C > 0$, isto é,

$$|D^\alpha \varphi_n(x)| \leq C \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,\ \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Observe que para qualquer $k \in \mathbb{Z}_+$ temos

$$\sum_{|\beta|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{T}^N} |D^\beta \varphi_n(x)| \leq \sum_{|\beta|\leq k} C\cdot h_1^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|! \leq \sum_{|\beta|\leq k} C\cdot h_1^k\cdot m_k\cdot k!,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

onde o último termo é uma constante dependente de k. Logo, aplicando o Teorema de Arzelà-Ascoli a cada sequência $\{D^\alpha\varphi_n\}$, podemos concluir que $\{\varphi_n\}$ possui uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ que converge uniformemente para uma função φ em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $D^\alpha\varphi_{n_k}\to D^\alpha\varphi$, $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$.

Como φ_{n_k} satisfaz (2.27), fazendo $n_k\longrightarrow\infty$ segue que

$$|D^\alpha\varphi(x)|\leq C\cdot h_1^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\leq C\cdot h_2^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!,\ \forall x\in\mathbb{T}^N,\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^N.$$

Portanto, $\varphi\in\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$.

Por fim, mostremos que $||\varphi_{n_k}-\varphi||_{\mathscr{M},h_2}\longrightarrow 0$. Como $D^\alpha\varphi_{n_k}\longrightarrow D^\alpha\varphi$ em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ para todo $\alpha\in\mathbb{Z}_+^N$, temos que para qualquer $\varepsilon>0$ existe $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^N}|D^\alpha\varphi_{n_k}(x)-D^\alpha\varphi(x)|\leq\varepsilon,\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^N,\ \forall k\geq k_\varepsilon.$$

Dado $\delta>0$, seja $p\in\mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p\leq\frac{\delta}{2C}$ e defina $M=\max\left\{(h_2^q\cdot m_q\cdot q!)^{-1};\ 0\leq q\leq p\right\}$. Logo, para $|\lambda|\leq p$,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^N}\left(\frac{|D^\lambda\varphi_{n_k}(x)-D^\lambda\varphi(x)|}{h_2^{|\lambda|}\cdot m_{|\lambda|}\cdot|\lambda|!}\right)\leq\frac{\delta}{M}\cdot\frac{1}{h_2^{|\lambda|}\cdot m_{|\lambda|}\cdot|\lambda|!}\leq\frac{\delta}{M}\cdot M=\delta,\ \forall k\geq k_{\frac{\delta}{M}}.$$

Agora, no caso em que $|\lambda|>p$, como

$$\frac{1}{h_2}\leq\frac{1}{h_1}\implies\left(\frac{1}{h_2}\right)^{|\lambda|-p}\leq\left(\frac{1}{h_1}\right)^{|\lambda|-p},$$

temos

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{T}^N}\left(\frac{|D^\lambda\varphi_{n_k}(x)-D^\lambda\varphi(x)|}{h_2^{|\lambda|}\cdot m_{|\lambda|}\cdot|\lambda|!}\right)&\leq\sup_{x\in\mathbb{T}^N}\left(\frac{|D^\lambda\varphi_{n_k}(x)-D^\lambda\varphi(x)|}{h_1^{|\lambda|}\cdot m_{|\lambda|}\cdot|\lambda|!}\right)\cdot\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p\\&\leq\sup_{x\in\mathbb{T}^N}\left(\frac{|D^\lambda\varphi_{n_k}(x)-D^\lambda\varphi(x)|}{h_1^{|\lambda|}\cdot m_{|\lambda|}\cdot|\lambda|!}\right)\cdot\frac{\delta}{2C}\\&\leq(||\varphi_{n_k}||_{\mathscr{M},h_1}+||\varphi_{n_k}||_{\mathscr{M},h_1})\cdot\frac{\delta}{2C}\\&\leq\delta.\end{aligned}$$

Assim, $||\varphi_{n_k}-\varphi||_{\mathscr{M},h_2}\leq\delta$, $\forall k\geq k_{\frac{\delta}{M}}$, como queríamos provar.

$\square$

Seja $\{h_n\}$ uma sequência de números reais positivos, estritamente crescente, com $h_n \nearrow \infty$ e considere, para cada $k \in \mathbb{N}$, as aplicações em cadeia

$$i_{h_k}^{h_{k+1}} : \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_{k+1}}(\mathbb{T}^N).$$

Vimos na Proposição 2.4.2 que os espaços são de Banach e, portanto, localmente convexos e, pela Proposição 2.4.3, as inclusões $i_{h_k}^{h_{k+1}}$ são compactas. Além disso,

$$\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N).$$

Agora, munimos $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ com a topologia forte induzida por

$$\mathscr{F} = \{i_k : \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N);\ k \in \mathbb{N}\},$$

isto é, a maior topologia que torna todas as inclusões em $\mathscr{F}$ contínuas. Dizemos que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é o limite indutivo dos espaços $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N)$ e denotamos

$$\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N).$$

Com tais propriedades, $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é um espaço DFS.

Acerca dessa topologia, serão necessários para este trabalho os seguintes resultados que decorrem de (KOMATSU, 1967, Teorema 6'):

Teorema 2.4.4. Um conjunto $A \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é aberto (fechado) se, e somente se, $A \cap \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N)$ é aberto (fechado) em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.5. Um conjunto $B \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é limitado se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N)$ e B é limitado em relação a topologia de $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 2.4.6. Uma sequência $\{f_n\}$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ converge para zero se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{f_n\} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N)$ e $f_n \longrightarrow 0$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N)$.

Segue do Teorema 2.4.4 uma caracterização para funções contínuas em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 2.4.7. Seja X um espaço topológico qualquer. Uma função $f : \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \longrightarrow X$ é contínua se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, a restrição $f_n : \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N) \longrightarrow X$ é contínua.

Demonstração. Suponha que f seja contínua. Como as inclusões $i_n : \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N) \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ são contínuas em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, temos que as restrições $f_n = f \circ i_n$ também serão contínuas.

Reciprocamente, suponha que cada f_n seja contínua. Então, se A é aberto em X, $f_n^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N)$ é aberto para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 2.4.4 que $f^{-1}(A)$ é aberto e, portanto, f é contínua.

□

CAPÍTULO

3

SÉRIES DE FOURIER

Estabelecido o espaço vetorial topológico $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, estudaremos o seu dual topológico, cujos elementos serão denominados ultradistribuições. Além disso, caracterizaremos os elementos desses espaços via séries (parciais) de Fourier, que é uma ferramenta muito útil no estudo de equações diferenciais parciais, sobretudo no ambiente periódico. Os resultados deste capítulo estão contidos no Capítulo 2 de (VICTOR, 2021).

3.1 Espaços de ultradistribuições

Definição 3.1.1. Seja $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos. Definimos por $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ o espaço dos funcionais lineares contínuos $u : \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathbb{C}$. Se $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ dizemos que u é uma ultradistribuição.

O próximo resultado dá uma caracterização para os elementos de $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 3.1.2. Seja $u : \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:

(1) $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right), \ \forall \varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

(3) Se $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ converge para 0 em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, então $\langle u, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$.

Demonstração. **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)** : Por contrapositiva, suponha que **(2)** não é válido. Assim, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tais que

$$|\langle u, \varphi_n \rangle| > n \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi_n(x)| \cdot \varepsilon_0^{|\alpha|}}{m^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right).$$

Considere $\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{|\langle u, \varphi_n\rangle|}$. Então,

$$1 = |\langle u, \psi_n\rangle| > n \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \psi_n(x)| \cdot \varepsilon_0^{|\alpha|}}{m^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right)$$

Daí, para cada $x \in \mathbb{T}^N$ temos

$$|\partial^\alpha \psi_n(x)| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Logo, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M},1/\varepsilon_0}(\mathbb{T}^N)$ e

$$|\langle u, \psi_n\rangle| \geq n||\psi_n||_{\mathscr{M},1/\varepsilon_0}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $u|_{\mathscr{E}_{\mathscr{M},1/\varepsilon_0}(\mathbb{T}^N)}$ não é contínua. Segue do Teorema 2.4.7 que u não é contínua. Assim, $u \notin \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

(2) $\implies$ **(3)** : Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ uma sequência que converge para 0 em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Logo, pelo Teorema 2.4.6, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_p}(\mathbb{T}^N)$ e $||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_p} \to 0$.

Seja $\varepsilon = \dfrac{1}{h_p}$. Por ((2)), existe $C > 0$ tal que

$$|\langle u, \varphi_n\rangle| \leq C \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi_n(x)|}{(h_p)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right) \leq C \cdot ||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_p}.$$

Logo, $\langle u, \varphi_n\rangle \to 0$.

(3) $\implies$ **(1)** :Por contrapositiva, suponha que $u \notin \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Pelo Teorema 2.4.7, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $u|_{\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}}(\mathbb{T}^N)$ não é contínua. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_j \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$|\langle u, \varphi_j\rangle| > j \cdot ||\varphi_j||_{\mathscr{M},h_q}.$$

Seja $\psi_j = \dfrac{\varphi_j}{|\langle u, \varphi_j\rangle|}$. Então, $|\langle u, \psi_j\rangle| = 1$ e

$$||\psi_j||_{\mathscr{M},h_q} = \frac{||\varphi_j||_{\mathscr{M},h_q}}{|\langle u, \varphi_j\rangle|} < \frac{1}{j}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\psi_j \to 0$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, mas $\langle u, \psi_j\rangle \nrightarrow 0$. □

Na próxima seção, precisaremos da noção de convergência no espaço $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$:

Definição 3.1.3. Uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ converge para uma ultradistribuição u no espaço quando

$$\langle u_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Lema 3.1.4. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tal que, para cada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, $\{\langle u_n, \varphi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Então, existe uma ultradistribuição u de modo que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Como $\mathbb{C}$ é completo, para cada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ existe o limite da sequência $\{\langle u_n, \varphi\rangle\}$. Defina a função

$$\begin{aligned} u : \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \langle u, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle . \end{aligned}$$

Mostremos que $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Observe que u é linear e, portanto, basta verificarmos sua continuidade. Para isso, dada $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ que converge para 0, mostremos que $\langle u, \varphi_k\rangle \to 0$.

Pelo Teorema 2.4.6, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_k \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, como u_n é contínua, temos que a restrição $u_n|_{\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)}$ também é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dada $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$, por hipótese $\{\langle u_n, \psi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, limitada. Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $M > 0$ tal que

$$|\langle u_n, \psi\rangle| \leq M \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h_q}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N). \tag{3.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\psi_k = \dfrac{2M\varphi_k}{\varepsilon}$. Note que $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$ e $\psi_k \longrightarrow 0$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\psi_k||_{\mathscr{M},h_q} \leq 1, \ \forall k \geq k_0. \tag{3.2}$$

Decorre de (3.1) e (3.2) que

$$|\langle u_n, \varphi_k\rangle| = \frac{\varepsilon}{2M} \cdot |\langle u_n, \psi_k\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M \cdot ||\psi_k||_{\mathscr{M},h_q} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \geq k_0. \tag{3.3}$$

Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\langle u, \varphi_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi_k\rangle$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle u, \varphi_k\rangle - \langle u_{n_k}, \varphi_k\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Segue de (3.3) e (3.4) que

$$|\langle u, \varphi_k\rangle| \leq |\langle u, \varphi_k\rangle - \langle u_{n_k}, \varphi_k\rangle| + |\langle u_{n_k}, \varphi_k\rangle| \leq \varepsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

Logo, $\langle u, \varphi_k\rangle \longrightarrow 0$ e, portanto, $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. □

3.2 Série de Fourier

Definição 3.2.1. Para cada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\varphi) : \mathbb{Z}^N &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \widehat{\varphi}(\xi), \end{aligned}$$

em que $\widehat{\varphi}(\xi)$ é o coeficiente de Fourier de φ dado por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot \varphi(x) dx.$$

Teorema 3.2.2. Se $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem constantes $C, \delta > 0$ tais que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C \inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N. \tag{3.5}$$

Além disso, para cada $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\varphi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi},$$

com convergência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Mostremos a desigualdade (3.5). Primeiro, considere os casos em que $n = 0$ ou $\xi = 0$. Como

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot \varphi(x) dx \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\varphi(x)|,$$

basta tomarmos as constantes $C_1 = \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\varphi(x)|$ e $\delta_1 = 1$.

Agora, considere o caso em que $n \geq 1$ e $|\xi| \geq 1$. Fixado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, usando integração por partes $|\alpha|$-vezes temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(D^\alpha \varphi)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot D^\alpha \varphi(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (e^{-ix\xi}) \cdot \varphi(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} \xi^\alpha \cdot e^{-ix\xi} \cdot \varphi(x) dx \\
&= \xi^\alpha \cdot \mathscr{F}(\varphi)(\xi).
\end{aligned}$$

Assim, como $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem $C_2, h_2 > 0$ tais que

$$|\xi^\alpha| \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} |D^\alpha \varphi(x)| dx \leq C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.$$

Sabendo que

$$|\xi|^n \leq \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} \cdot |\xi^\alpha| \ \text{ e } \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} = N^n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

temos

$$\begin{aligned}
|\xi|^n \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| &\leq \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} \cdot |\xi^\alpha| \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| \\
&\leq \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} \cdot C_2 \cdot h_2^n \cdot m_n \cdot n! \\
&\leq C_2 \cdot h_2^n \cdot m_n \cdot n! \cdot \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} \\
&\leq C_2 \cdot (h_2 \cdot N)^n \cdot m_n \cdot n!.
\end{aligned}$$

Tomando $h_3 = 2 \cdot h_2 \cdot N$, obtemos

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^n \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |\xi|^j \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |\xi|^n \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| \\ &\leq 2^n \cdot |\xi|^n \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| \\ &\leq C_2 \cdot h_3^n \cdot m_n \cdot n!,\ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Definindo $C = \max\{C_1, C_2\}$ e $\delta = \min\left\{1, \dfrac{1}{h_3}\right\}$, segue que

$$(1+|\xi|)^n \cdot |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C \cdot \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n}\right),\ \forall n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Logo, vale (3.5).

Resta mostrarmos que $\varphi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi}$, $\forall x \in \mathbb{T}^N$, com convergência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Como $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, sabemos que a série converge para $\varphi(x)$ neste espaço. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere a soma parcial

$$S_k\varphi(x) = \sum_{|\xi| \leq k} \widehat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi}.$$

Como $S_k\varphi$ é uma função analítica, $S_k\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^N$, temos

$$D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x) = \sum_{|\xi| \geq k+1} \widehat{\varphi}(\xi) \cdot \xi^\alpha \cdot e^{ix\xi}.$$

Assim, usando a desigualdade (3.5),

$$\begin{aligned}|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| &\leq \sum_{|\xi| \geq k+1} |\widehat{\varphi}(\xi)| \cdot |\xi|^{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{|\xi| \geq k+1} |\widehat{\varphi}(\xi)| \cdot (1+|\xi|)^{|\alpha|+2N} \cdot (1+|\xi|)^{-2N} \\ &\leq C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\alpha|+2N} \cdot m_{|\alpha|+2N} \cdot (|\alpha|+2N)! \cdot \sum_{|\xi| \geq k+1} (1+|\xi|)^{-2N}.\end{aligned}$$

Usando a Observação 2.2.15, segue que

$$|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| \leq C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\alpha|+2N} \cdot (m_{|\alpha|} \cdot C_{\{2N\}}^{|\alpha|}) \cdot (|\alpha|! \cdot B_{\{2N\}}^{|\alpha|}) \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{-2N}$$

Tomando $C' = C \cdot \left(\dfrac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{|\xi| \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{-2N}$ e $h' = \dfrac{1}{\delta} \cdot C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}$, temos

$$|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| \leq C' \cdot h'^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,\ \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

Isso mostra que $(\varphi - S_k\varphi) \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h'}(\mathbb{T}^N)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h'}(\mathbb{T}^N)$, já que $\frac{1}{\delta} \leq h'$, temos

$$S_k\varphi = \varphi - (\varphi - S_k\varphi) \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h'}(\mathbb{T}^N), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| \leq \left(C\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \sum_{|\xi| \geq k+1} (1+|\xi|)^{-2N} \right) h'^{|\alpha|} m_{|\alpha|} |\alpha|!,\ \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$

Logo, $||\varphi - S_k\varphi||_{\mathscr{M},h'} \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$ e, portanto, $S_k\varphi \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

□

Reciprocamente, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3. Se $\{b_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^N}$ é uma sequência em $\mathbb{C}$ para a qual existem constantes $C, \delta > 0$ satisfazendo

$$|b_\xi| \leq C \inf_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right),\ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N, \tag{3.6}$$

então existe $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} b_\xi \cdot e^{ix\xi}$$

com convergência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\widehat{\psi}(\xi) = b_\xi$.

Demonstração. Pela teoria clássica de Série de Fourier, segue de (3.6) que a função dada por

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} b_\xi \cdot e^{ix\xi},\ \forall x \in \mathbb{T}^N$$

pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, com convergência no espaço.

Mostremos que, de fato, ψ é uma função ultradiferenciável e a série converge em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Primeiro, vamos estimar as derivadas de ψ. Se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, temos

$$\begin{aligned} |D^\alpha\psi(x)| &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \left| \xi^\alpha \cdot b_\xi \cdot e^{ix\xi} \right| \\ &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{|\alpha|} \cdot |b_\xi| \\ &\underset{(3.6)}{\leq} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} C \cdot \frac{m_{|\alpha|+2N} \cdot (|\alpha|+2N)!}{\delta^{|\alpha|+2N} \cdot (1+|\xi|)^{2N}} \end{aligned}$$

Usando as desigualdades da Observação 2.2.15 temos

$$\begin{aligned} |D^\alpha\psi(x)| &\underset{\substack{(2.13)\\(2.14)}}{\leq} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} C \cdot \frac{m_{|\alpha|} \cdot C_{\{2N\}}^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot B_{\{2N\}}^{|\alpha|}}{\delta^{|\alpha|+2N} \cdot (1+|\xi|)^{2N}} \\ &= \left(C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \right) \cdot \left(\frac{C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}}{\delta} \right)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!. \end{aligned}$$

Como o primeiro termo entre parênteses é constante, definindo $h = \dfrac{C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}}{\delta}$, concluímos que $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N) \subset \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Agora, defina

$$S_j\psi(x) = \sum_{|\xi| \leq j} b_\xi \cdot e^{ix\xi}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Estimando as derivadas de $\psi - S_j\psi$, temos

$$|D^\alpha(\psi - S_j\psi)(x)| \leq \left(C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{|\xi| \geq j+1} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \right) \cdot \left(\frac{C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}}{\delta}\right)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.$$

Portanto, $||\psi - S_j\psi||_{\mathscr{M},h} \longrightarrow 0$ quando $j \to \infty$ e, pelo Teorema 2.4.6, $S_j\psi \longrightarrow \psi$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Por fim,

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} b_\eta \cdot e^{ix\eta} dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \left[b_\eta \cdot \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix(\xi-\eta)} dx \right] = b_\xi.$$

□

Os Teoremas 3.2.2 e 3.2.3 descrevem a série de Fourier de uma função ultradiferenciável. Agora, o nosso objetivo é obter uma versão desses resultados para ultradistribuições.

Definição 3.2.4. Definimos o coeficiente de Fourier de uma ultradistribuição $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \left\langle u, e^{-ix\xi} \right\rangle, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Teorema 3.2.5. Se $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\xi \in \mathbb{Z}^N$. Como $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, segue do Teorema 3.1.2 que existe $C'_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C'_\varepsilon \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^N \\ \alpha \in \mathbb{Z}^N_+}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right), \ \forall \varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Disso decorre

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi)| &= \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \left| \left\langle u, e^{-ix\xi} \right\rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot C'_\varepsilon \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^N \\ \alpha \in \mathbb{Z}^N_+}} \left(\frac{|\partial^\alpha (e^{-ix\xi})| \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right) \\ &\leq \frac{C'_\varepsilon}{(2\pi)^N} \cdot \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^N_+} \left(\frac{(1+|\xi^\alpha|) \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right) \\ &\leq C_\varepsilon \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right), \end{aligned}$$

onde $C_\varepsilon = \dfrac{C'_\varepsilon}{(2\pi)^N}$. □

Observação 3.2.6. Seja $t > 0$ qualquer. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^n}{m_n \cdot n!} = 0,$$

existe um número finito de n's tais que $\dfrac{t^n}{m_n \cdot n!} \geq 1$. Por outro lado,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{t^n}{m_n \cdot n!} \right) \geq \frac{t^0}{m_0 \cdot 0!} = 1.$$

Logo, $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{t^n}{m_n \cdot n!} \right)$ é sempre atingido para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Analogamente, $\inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{m_n \cdot n!}{t^n} \right)$ também é sempre atingido para algum $n_1 \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{t^n}{m_n \cdot n!} \right) = \left[\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{m_n \cdot n!}{t^n} \right) \right]^{-1}.$$

Teorema 3.2.7. Seja $\{a_\xi\}_{\xi\in\mathbb{Z}^N}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ para a qual, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$|a_\xi| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Se $u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} a_\xi \cdot e^{ix\xi}$ é o funcional em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ dado por

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot e^{ix\xi} \cdot \varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N), \tag{3.7}$$

então $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\hat{u}(\xi) = a_\xi$.

Demonstração. Considere a soma parcial

$$S_j(x) = \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot e^{ix\xi}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mostremos que dada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, a sequência definida por

$$\langle S_j, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot e^{ix\xi} \cdot \varphi(x)dx = \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot \int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\xi} \cdot \varphi(x)dx, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

é de Cauchy em $\mathbb{C}$. Com efeito, se $m, k \in \mathbb{N}$, com $m > k$, temos

$$\begin{aligned} |\langle S_m - S_k, \varphi \rangle| &\leq \sum_{k+1\leq|\xi|\leq m} \left| a_\xi \cdot \int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\xi} \cdot \varphi(x)dx \right| \\ &\leq (2\pi)^N \sum_{k+1\leq|\xi|\leq m} |a_\xi| \cdot |\widehat{\varphi}(-\xi)|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por hipótese, para qualquer $\xi \in \mathbb{Z}^N$,

$$|a_\xi| \quad \leq \quad C_\varepsilon \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \underset{Obs\ 3.2.6}{\leq} C_\varepsilon \cdot \left(\frac{\varepsilon^{n_0} \cdot (1+|\xi|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!} \right),$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.2.2 existem constantes $C_1, \delta > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
|a_\xi| \cdot |\widehat{\varphi}(-\xi)| \quad &\leq \quad \left[C_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon^{n_0} \cdot (1+|\xi|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!} \right) \right] \cdot \left[C_1 \cdot \frac{m_{n_0+2N} \cdot (n_0+2N)!}{\delta^{n_0+2N} \cdot (1+|\xi|)^{n_0+2N}} \right] \\
&\leq \quad \left(\frac{C_\varepsilon \cdot C_1}{\delta^{2N}} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{n_0} \cdot \frac{m_{n_0+2N}}{m_{n_0}} \cdot \frac{(n_0+2N)!}{n_0!} \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\underset{Obs\ 2.2.15}{\leq} \left(\frac{C_\varepsilon \cdot C_1}{\delta^{2N}} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}}}{\delta} \right)^{n_0} \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{\delta}{B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}}}$ e $C_2 = \dfrac{C_\varepsilon \cdot C_1}{\delta^{2N}}$, obtemos

$$|a_\xi| \cdot |\widehat{\varphi}(-\xi)| \leq C_2 \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N. \tag{3.9}$$

Assim, por (3.8) e (3.9), temos

$$|\langle S_m - S_k, \varphi \rangle| \leq (2\pi)^N \cdot C_2 \cdot \sum_{k+1 \leq |\xi| \leq m} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Segue que $\lim\limits_{k \to \infty} |\langle S_m - S_k, \varphi \rangle| = 0$ e, portanto, para cada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ a série $\{\langle S_j, \varphi \rangle\}_{j \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo, pelo Lema 3.1.4, $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Finalmente,

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \left\langle u, e^{-ix\xi} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{|\eta| \leq j} a_\eta \cdot e^{ix(\eta - \xi)} dx = a_\xi.$$

□

Reciprocamente, como em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, podemos descrever a série de Fourier de uma ultradistribuição u.

Teorema 3.2.8. Se $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, então

$$u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) \cdot e^{ix\xi},$$

com convergência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Seja

$$\tilde{u} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) \cdot e^{ix\xi}.$$

O Teorema 3.2.5 garante que $\tilde{u}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.7 e, portanto, $\tilde{u} \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Mostremos que $\tilde{u}$ é, de fato, igual a u.

Dada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, considere as somas parciais

$$S_k\varphi(x) = \sum_{|\xi| \leq k} \widehat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como na demonstração do Teorema 3.2.2, obtemos $S_k\varphi \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Pela continuidade e linearidade da u, segue que

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u, S_k\varphi \rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\xi|\leq k} \left\langle u, \widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi} \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{\varphi}(\xi) \left\langle u, e^{ix\xi} \right\rangle.$$

Novamente pelo Teorema 3.2.7, para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$ temos $\hat{\tilde{u}}(\xi) = \hat{u}(\xi)$, isto é, pela Definição 3.2.4, $\left\langle \tilde{u}, e^{-ix\xi} \right\rangle = \left\langle u, e^{-ix\xi} \right\rangle$. Logo,

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\xi|\leq k} \widehat{\varphi}(\xi) \cdot \left\langle u, e^{ix\xi} \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\xi|\leq k} \left\langle \tilde{u}, \widehat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi} \right\rangle = \langle \tilde{u}, \varphi \rangle.$$

Portanto, $u = \tilde{u}$.

$\square$

Através dos Teoremas 3.2.3 e 3.2.8 obtemos uma condição para que uma ultradistribuição seja, de fato, uma função ultradiferenciável.

Corolário 3.2.9. Dada $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, suponha que existam $C, \delta > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N$$

Então, $u \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

3.3 Série Parcial de Fourier

Para o estudo de séries parciais de Fourier, vamos considerar $R, S \in \mathbb{N}$ tais que $R + S = N$ e denotaremos um elemento de $\mathbb{T}^N$ por (x, y), com $x \in \mathbb{T}^R$ e $y \in \mathbb{T}^S$.

Dada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para cada $x \in \mathbb{T}^R$ fixado, definimos

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{T}^S &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Observe que $\varphi_x \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$. Assim, pelo Teorema 3.2.2, para todo $y \in \mathbb{T}^S$ temos

$$\varphi(x, y) = \varphi_x(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \hat{\varphi}(x, \eta) \cdot e^{iy\eta}, \tag{3.10}$$

com convergência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$, onde o coeficiente de Fourier é dado por

$$\hat{\varphi}(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S}\int_{\mathbb{T}^S}\varphi_x(y)\cdot e^{-iy\eta}dy = \frac{1}{(2\pi)^S}\int_{\mathbb{T}^S}\varphi(x,y)\cdot e^{-iy\eta}dy.$$

Como $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, para cada $\eta \in \mathbb{N}$ temos $\hat{\varphi}(\cdot,\eta) \in C^\infty(\mathbb{T}^R)$. Além disso,

$$\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S}\int_{\mathbb{T}^S}\partial_x^\alpha\varphi(x,y)\cdot e^{-iy\eta}dy.$$

Segue que

$$|\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x,\eta)| \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^N}|\partial_x^\alpha\varphi(x,y)| \leq C\cdot h^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!,\ \forall x\in\mathbb{T}^R,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^R.$$

Logo, $\hat{\varphi}(\cdot,\eta) \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$.

Teorema 3.3.1. Dada $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem constantes $C_R, h_R, h_S > 0$ tais que

$$|\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x,\eta)| \leq C_R\cdot h_R^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\inf_{p\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right),\ \forall x\in\mathbb{T}^R,\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^R,\ \forall\eta\in\mathbb{Z}^S. \tag{3.11}$$

Demonstração. Considere primeiro o caso em que $\eta = 0$. Como $\hat{\varphi}(\cdot,0)$ é um elemento de $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, existe $h_R > 0$ tal que

$$|\partial_x^\alpha\hat{\varphi}(x,0)| \leq ||\hat{\varphi}(\cdot,0)||_{\mathscr{M},h_R}\cdot h_R^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!,\ \forall x\in\mathbb{T}^R,\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^R.$$

Assim, tomando $C_R = ||\hat{\varphi}(\cdot,0)||_{\mathscr{M},h_R}$ e $h_S = 1$, obtemos (3.11).

Agora, considere $\eta \neq 0$. Sejam $\alpha\in\mathbb{Z}_+^R$ e $\beta\in\mathbb{Z}_+^S$. Usando integração por partes $|\beta|$-vezes, temos

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha\widehat{D_y^\beta\varphi}(x,\eta) &= \frac{1}{(2\pi)^S}\int_{\mathbb{T}^S}\partial_x^\alpha D_y^\beta\varphi(x,y)\cdot e^{-iy\eta}dy\\ &= \eta^\beta\cdot\frac{1}{(2\pi)^S}\int_{\mathbb{T}^S}\partial_x^\alpha\varphi(x,y)\cdot e^{-iy\eta}dy\\ &= \eta^\beta\cdot\partial_x^\alpha\hat{\varphi}(x,\eta).\end{aligned}$$

Pela propriedade (**M.3**) da sequência $\mathscr{M}$ e pela desigualdade (2.5), temos

$$\begin{aligned}|\eta^\beta\cdot\partial_x^\alpha\hat{\varphi}(x,\eta)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^S}\int_{\mathbb{T}^S}|\partial_x^\alpha D_y^\beta\varphi(x,y)\cdot e^{-iy\eta}|dy\\ &\leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^N}|\partial_x^\alpha D_y^\beta\varphi(x,y)|\\ &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h}\cdot h^{|\alpha|+|\beta|}\cdot m_{|\alpha|+|\beta|}\cdot(|\alpha|+|\beta|)!\\ &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h}\cdot h^{|\alpha|+|\beta|}\cdot(H^{|\alpha|+|\beta|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot m_{|\beta|})\cdot(2^{|\alpha|+|\beta|}\cdot|\alpha|!|\beta|!)\\ &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h}\cdot\left[(2hH)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\right]\cdot\left[(2hH)^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\right].\end{aligned} \tag{3.12}$$

Escrevendo $\eta = (\eta_1, ..., \eta_S) \in \mathbb{Z}^S$, considere $p \in \{1, ..., S\}$ de modo que $|\eta_p| = \max\{|\eta_q|;\ 1 \leq q \leq S\}$. Tome $\beta = k \cdot e_p \in \mathbb{Z}^S_+$, onde $k \in \mathbb{Z}_+$ e e_p é o vetor da base canônica de $\mathbb{Z}^S$. Assim,

$$|\eta|^k = \left(\sum_{j=1}^{S} |\eta_j|\right)^k \leq N^k \cdot |\eta_p|^k \leq N^k \cdot |\eta^\beta|. \tag{3.13}$$

Unindo (3.12) e (3.13), temos

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x,\eta)| &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h} \cdot \left[(2hH)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!\right] \cdot \left[(2hH)^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|!\right] \cdot \frac{1}{|\eta^\beta|} \\ &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h} \cdot \left[(2hH)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!\right] \cdot \left[(2hH)^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|!\right] \cdot \frac{N^k}{|\eta|^k}.\end{aligned}$$

Disso decorre, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(1+|\eta|)^k \cdot |\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x,\eta)| &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h} \cdot \left[(2hH)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!\right] \cdot \left[(2hH)^{k} \cdot m_{k} \cdot k!\right] \cdot (2|\eta|)^k \cdot \frac{N^k}{|\eta|^k} \\ &\leq ||\varphi||_{\mathscr{M},h} \cdot \left[(2hH)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!\right] \cdot \left[(4hHN)^{k} \cdot m_{k} \cdot k!\right].\end{aligned}$$

Portanto, para obter (3.11) neste caso, basta tomar $C_R = ||\varphi||_{\mathscr{M},h}$, $h_R = 2hH$ e $h_S = \dfrac{1}{4hHN}$. □

Teorema 3.3.2. Para cada $\eta \in \mathbb{Z}^S$, considere $\varphi_\eta \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$ satisfazendo

$$|\partial_x^\alpha \varphi_\eta(x)| \leq C_R \cdot h_R^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right),\ \forall x \in \mathbb{T}^R,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^R_+,$$

com $C_R, h_R, h_s > 0$. Então a função

$$\begin{aligned}\varphi :\ & \mathbb{T}^N \to \mathbb{C} \\ & (x,y) \mapsto \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \varphi_\eta(x) \cdot e^{iy\eta}\end{aligned}$$

está bem definida, pertence a $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e vale a convergência neste espaço.

Demonstração. Observe que φ está bem definida, pois

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)| &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} |\varphi_\eta(x)| \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^0 \cdot m_0 \cdot 0! \cdot \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right) \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} C_R \cdot \frac{m_{2N} \cdot (2N)!}{h_S^{2N} \cdot (1+|\eta|)^{2N}} \\ &\leq \frac{C_R \cdot m_{2N} \cdot (2N)!}{h_S^{2N}} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}} < \infty.\end{aligned}$$

Mostremos que $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^R \times \mathbb{Z}^S$, temos

$$\begin{aligned}
|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x,y)| &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} |\partial_x^{\alpha_1}\varphi_\eta(x)| \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|} \\
&\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot m_{|\alpha_1|} \cdot |\alpha_1|! \cdot \inf_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|} \\
&\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot m_{|\alpha_1|} \cdot |\alpha_1|! \cdot \left(\frac{m_{|\alpha_2|+2N} \cdot (|\alpha_2|+2N)!}{h_S^{|\alpha_2|+2N} \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|+2N}} \right) \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|}.
\end{aligned}$$

Segue da Observação 2.2.15 e da Proposição 2.1.4 que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x,y)| &\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot m_{|\alpha_1|} \cdot |\alpha_1|! \cdot \left(\frac{m_{|\alpha_2|} \cdot |\alpha_2|! \cdot B_{\{2N\}}^{|\alpha_2|} \cdot C_{\{2N\}}^{|\alpha_2|}}{h_S^{|\alpha_2|+2N} \cdot (1+|\eta|)^{2N}} \right) \\
&\leq \frac{C_R}{h_S^{2N}} \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot \left(\frac{B_{\{2N\}} C_{\{2N\}}}{h_s} \right)^{|\alpha_2|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \dfrac{C_R}{h_S^{2N}} \displaystyle\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}$ e $h = \max\left\{ h_R, \dfrac{B_{\{2N\}} C_{\{2N\}}}{h_s} \right\}$, obtemos

$$|D^\alpha \varphi(x,y)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!$$

e, portanto, $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere a soma parcial

$$S_k\varphi(x,y) = \sum_{|\eta| \leq k} \varphi_\eta(x) \cdot e^{iy\eta}$$

e mostremos que $S_k\varphi \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Como visto anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}(S_k\varphi - \varphi)(x,y)| &\leq \sum_{|\eta| \geq k+1} |\partial_x^{\alpha_1}\varphi_\eta(x)| \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|} \\
&\leq \left[\frac{C_R}{h_S^{2N}} \cdot \sum_{|\eta| \geq k+1} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}} \cdot \right] \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.
\end{aligned}$$

Portanto, $S_k\varphi \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

$\square$

Agora, vamos estudar Série Parcial de Fourier para ultradistribuições.

Definição 3.3.3. Seja $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Para cada $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, definimos o funcional u_ψ por

$$\begin{aligned}
u_\psi : \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S) &\to \mathbb{C} \\
\varphi &\mapsto \langle u, \psi \otimes \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

com $\psi \otimes \varphi(x,y) = \psi(x) \cdot \varphi(y)$.

Lema 3.3.4. Se $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, então u_ψ dado na Definição 3.3.3 pertence a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$.

Demonstração. Note que u_ψ é linear. De fato, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$ e λ constante. Então, para cada $x \in \mathbb{T}^R$ e $y \in \mathbb{T}^S$,

$$\begin{aligned}\psi \otimes (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x,y) &= \psi(x) \cdot (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(y) \\ &= \psi(x) \cdot \varphi_1(y) + \psi(x) \cdot \lambda\varphi_2(y) \\ &= \psi \otimes \varphi_1(x,y) + \lambda\, \psi \otimes \varphi_2(x,y).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}u_\psi(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = \langle u, \psi \otimes (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)\rangle &= \langle u, \psi \otimes \varphi_1\rangle + \lambda\, \langle u, \psi \otimes \varphi_2\rangle \\ &= u_\psi(\varphi_1) + \lambda u_\psi(\varphi_2).\end{aligned}$$

Agora, mostremos que u_ψ é contínua. Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$ que converge para 0. Assim, pelo Teorema 2.4.6 existe $h_S > 0$ tal que

$$\varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_S}(\mathbb{T}^S),\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } ||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_S} \to 0.$$

Por outro lado, existe $h_R > 0$ tal que $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_R}(\mathbb{T}^R)$. Tomando $h = \max\{h_R, h_S\}$,

$$\begin{aligned}\sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^N} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta(\psi(x)\cdot\varphi(y))| &\leq \sup_{x\in\mathbb{T}^R} |\partial_x^\alpha \psi(x)| \cdot \sup_{y\in\mathbb{T}^S} |\partial_y^\beta \varphi(y)| \\ &\leq ||\psi||_{\mathscr{M},h_R} \cdot h_R^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot ||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_S} \cdot h_S^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|! \\ &\leq ||\psi||_{\mathscr{M},h_R} \cdot ||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_S} \cdot h^{|\alpha+\beta|} \cdot m_{|\alpha+\beta|} \cdot |\alpha+\beta|!\end{aligned}$$

Logo, $\psi \otimes \varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$||\psi \otimes \varphi_n||_{\mathscr{M},h} \leq ||\psi||_{\mathscr{M},h_R} \cdot ||\varphi_n||_{\mathscr{M},h_s} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

isto é, $\psi \otimes \varphi_n \longrightarrow 0$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Segue da continuidade de u que

$$u_\psi(\varphi_n) = \langle u, \psi \otimes \varphi_n\rangle \longrightarrow 0$$

e, portanto, $u_\psi \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$. □

Fixadas $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, vimos no Lema 3.3.4 que $u_\psi \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$. Logo, pelo Teorema 3.2.8 podemos concluir que

$$u_\psi(y) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} \widehat{u_\psi}(\eta) \cdot e^{iy\eta},$$

em que o coeficiente de Fourier de u_ψ é dado pela Definição 3.2.4, isto é,

$$\widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S} \cdot \left\langle u_\psi, e^{-iy\eta}\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^S} \cdot \left\langle u, \psi(x) \cdot e^{-iy\eta}\right\rangle,\ \forall \eta \in \mathbb{Z}^S.$$

Definição 3.3.5. Sejam $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^S$. Definimos o funcional u_η por

$$\langle u_\eta, \psi \rangle = \widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S} \cdot \langle u, \psi(x) \cdot e^{-iy\eta} \rangle, \ \forall \psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R).$$

Lema 3.3.6. Para cada $\eta \in \mathbb{Z}^S$, u_η dado na Definição 3.3.5 pertence a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$.

Demonstração. Como $e^{-iy\eta}$ é uma função analítica, pertence a $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$. Logo, o resultado segue diretamente do Lema 3.3.4. □

Teorema 3.3.7. Seja $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Então

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} u_\eta \cdot e^{iy\eta},$$

com convergência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Além disso, dados $\varepsilon, h > 0$, existe $C_{\varepsilon,h} > 0$ tal que

$$|\langle u_\eta, \psi \rangle| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right), \tag{3.14}$$

para quaisquer $\eta \in \mathbb{Z}^S$ e $\psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^R)$.

Demonstração. Se $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, pelo Teorema 3.3.1 existem $C_R, h_R, h_s > 0$ tais que para cada $\eta \in \mathbb{Z}^S$,

$$|\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x,\eta)| \leq C_R \cdot h_R^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right), \ \forall x \in \mathbb{T}^R, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^R.$$

Decorre do Teorema 3.3.2 que a série $\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \widehat{\varphi}(x,\eta) \cdot e^{iy\eta}$ tem convergência em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e, por (3.10), é igual a $\varphi(x,y)$.

Assim, como u é linear e contínua, temos

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= \lim_{k\to\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u, \widehat{\varphi}(x,\eta) \cdot e^{iy\eta} \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{|\eta| \leq k} (2\pi)^S \cdot \langle u_{-\eta}, \widehat{\varphi}(x,\eta) \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \left\langle u_\eta, \int_{\mathbb{T}^S} \varphi(x,y) \cdot e^{iy\eta} dy \right\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta, \langle e^{iy\eta}, \varphi \rangle \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta \cdot e^{iy\eta}, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Logo,

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} u_\eta \cdot e^{iy\eta},$$

com convergência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Agora, dados $\varepsilon, h > 0$, provemos a desigualdade (3.14). Como $u_\eta \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, segue do Teorema 3.1.2 que existe $C_\varepsilon > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} |\langle u_\eta, \psi\rangle| &= \frac{1}{(2\pi)^S} \cdot |\langle u, \psi(x) \cdot e^{-iy\eta}\rangle| \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{T}^N \\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (\psi(x) \cdot e^{-iy\eta})| \cdot \varepsilon^{|\alpha+\beta|}}{m_{|\alpha+\beta|} \cdot |\alpha+\beta|!} \right) \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{T}^N \\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{|\partial_x^\alpha \psi(x)| \cdot |\partial_y^\beta e^{-iy\eta}| \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot \varepsilon^{|\beta|}}{m_{|\alpha|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\alpha|! \cdot |\beta|!} \right) \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{T}^N \\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_+^N}} \left(\frac{h^{|\alpha|} \cdot (1+|\eta|)^{|\beta|} \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot \varepsilon^{|\beta|}}{m_{|\beta|} \cdot |\beta|!} \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Primeiro, suponha $\varepsilon \leq \frac{1}{h}$. Assim,

$$|\langle u_\eta, \psi\rangle| \leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{\beta\in\mathbb{Z}_+^S} \left(\frac{\varepsilon^{|\beta|} \cdot (1+|\eta|)^{|\beta|}}{m_{|\beta|} \cdot |\beta|!} \right)$$

e, portanto, vale (3.14) com $C_{\varepsilon,h} = \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S}$.

Agora, suponha $\varepsilon > \frac{1}{h}$. Como (3.15) vale para qualquer $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} |\langle u_\eta, \psi\rangle| &\leq \frac{C_{1/h}}{(2\pi)^S} \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{(1+|\eta|)^p}{h^p \cdot m_p \cdot p!} \right) \\ &\leq \frac{C_{1/h}}{(2\pi)^S} \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right). \end{aligned}$$

Logo, tomando $C_{h,\varepsilon} = \frac{C_{1/h}}{(2\pi)^S}$, obtemos a desigualdade desejada. □

O nosso próximo objetivo é mostrar uma recíproca do Teorema 3.3.7. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.3.8. (KOMATSU, 1973, Proposição 3.6) Se $\mathscr{M}$ é uma sequência de pesos, então

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\rho^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\rho^n \cdot (2H)^n}{m_n \cdot n!} \right), \ \forall \rho > 0,$$

onde H vem da propriedade (**M.3**), isto é, o crescimento moderado de $\mathscr{M}$.

Demonstração. Dada $\mathscr{M} = \{m_p\}$ uma sequência de pesos, defina $N_p = m_p \cdot p!$, para $p \geq 0$. Observe que $\{N_p\}$ ainda é uma sequência de pesos. De fato, temos:

1. $N_0 = m_0 \cdot 0! = 1$ e $N_1 = m_1 \cdot 1! = 1$;
2. $N_p^2 = m_p^2 \cdot (p!)^2 \leq m_{p-1} \cdot m_{p+1} \cdot (p-1)! \cdot (p+1)! \leq N_{p-1} \cdot N_{p+1}$;
3. $\sup_{j,k} \left(\frac{N_{j+k}}{N_j N_k} \right)^{1/(j+k)} = \sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k}(j+k)!}{m_j m_k j! k!} \right)^{1/(j+k)} \leq \sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k} \cdot 2^{j+k}}{m_j \cdot m_k} \right)^{1/(j+k)} \leq 2H.$

Defina em $(0,\infty)$ a função associada a sequência $\{N_p\}$ por $N(\rho) = \sup_p \ln \left(\frac{\rho^p N_0}{N_p} \right)$. Considere a sequência dada por $n_p = \frac{N_p}{N_{p-1}}$, para $p \geq 1$. Note que, pelo item 2 acima, $\{n_p\}$ é uma sequência crescente.

Denotamos por $n(\lambda)$ o número de termos $n_p \leq \lambda$. Na Seção 1 do Capítulo 2 de (ROUMIEU, 1960), mostra-se que

$$N(\rho) = \int_0^\rho \frac{n(\lambda)}{\lambda} d\lambda. \tag{3.16}$$

Defina $L_p = \min_{0 \leq q \leq p} N_q N_{p-q}$. Pela definição de n_p, temos

$$L_p = L_0 \min_{0 \leq q \leq p} n_1 \ldots n_q \cdot n_1 \ldots n_{p-q}.$$

Assim, a sequência $l_p = \frac{L_p}{L_{p-1}}$ é obtida rearranjando os termos $\{n_1, n_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots\}$ em ordem crescente. Portanto, $l(\lambda) = 2n(\lambda)$. Isto implica, por (3.16), que $L(\rho) = 2N(\rho)$, sendo $L(\rho)$ a função associada a sequência $\{L_p\}$. Logo,

$$2N(\rho) = L(\rho) = \sup_p \ln \left(\frac{\rho^p L_0}{L_p} \right) = \sup_p \ln \left(\frac{\rho^p N_0^2}{\min N_q N_{p-q}} \right) \underset{(3)}{\leq} \sup_p \ln \left(\frac{\rho^p (2H)^p}{N_p} \right).$$

Consequentemente,

$$\sup_p \left(\frac{\rho^p}{m_p \cdot p!} \right)^2 \leq \sup_p \left(\frac{\rho^p (2H)^p}{m_p \cdot p!} \right).$$

□

Teorema 3.3.9. Seja $\{u_\eta\}_{\eta \in \mathbb{Z}^S}$ uma sequência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$. Se para todo $\varepsilon, h > 0$, existe $C_{\varepsilon,h} > 0$ tal que

$$|\langle u_\eta, \psi \rangle| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot ||\psi||_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right), \ \forall \eta \in \mathbb{Z}^S, \ \forall \psi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^R), \tag{3.17}$$

então $u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} u_\eta \cdot e^{iy\eta}$ é um elemento de $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere a soma parcial

$$S_j = \sum_{|\eta| \leq j} u_\eta \cdot e^{iy\eta}.$$

Se $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existe $h > 0$ tal que $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$. Além disso,

$$\left\langle S_j, \varphi \right\rangle = \sum_{|\eta|\leq j} \left\langle u_\eta \cdot e^{iy\eta}, \varphi \right\rangle = \sum_{|\eta|\leq j} \left\langle u_\eta, \int_{\mathbb{T}^S} \varphi(x,y) \cdot e^{iy\eta} dy \right\rangle = \sum_{|\eta|\leq j} \left\langle u_\eta, (2\pi)^S \widehat{\varphi}(\cdot, -\eta) \right\rangle. \tag{3.18}$$

Seja h_R tal que $\widehat{\varphi}(\cdot,\eta) \in \mathscr{E}_{\mathscr{M},h_R}(\mathbb{T}^R)$ para cada $\eta \in \mathbb{T}^S$. Dados $\delta > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, associando (3.18) à hipótese (3.17) obtemos

$$\begin{aligned} |\left\langle S_{k+j} - S_j, \varphi \right\rangle| &\leq \sum_{j<|\eta|\leq j+k} (2\pi)^S \cdot C_{\delta,h_R} \cdot ||\widehat{\varphi}(\cdot,-\eta)||_{\mathscr{M},h_R} \cdot \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right) \\ &\leq \sum_{j<|\eta|\leq j+k} (2\pi)^S \cdot C_{\delta,h_R} \cdot C_R \cdot \inf_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \cdot \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde a última desigualdade decorre do Teorema 3.3.1.

Seja $H > 0$ da propriedade (**M.3**) da sequência de pesos $\mathscr{M}$. Tome $\delta = \dfrac{h_S}{2H}$. Pelo Lema 3.3.8 temos

$$\sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}{(2H)^p \cdot m_p \cdot p!} \right) \leq \left[\sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right) \right]^{1/2} = \left[\inf_{p\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \right]^{-1/2}. \tag{3.20}$$

Logo, por (3.19) e (3.20),

$$\begin{aligned} |\left\langle S_{k+j} - S_j, \varphi \right\rangle| &\leq \sum_{j<|\eta|\leq j+k} (2\pi)^S \cdot C_{\delta,h} \cdot C_R \cdot \left[\inf_{p\in\mathbb{N}} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \right]^{1/2} \\ &\leq C \cdot \sum_{j<|\eta|\leq j+k} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}, \end{aligned}$$

onde $C = (2\pi)^S \cdot C_{\delta,h} \cdot C_R \cdot \dfrac{(m_{4N} \cdot (4N)!)^{1/2}}{h_S^{2N}}$.

Isso mostra que $\{\left\langle S_j, \varphi \right\rangle\}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, segue do Lema 3.1.4 que $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

$\square$

CAPÍTULO

4

HIPOELITICIDADE GLOBAL

Neste capítulo vamos estudar a hipoeliticidade global (ou regularidade global) de campos vetoriais complexos no toro $\mathbb{T}^2$.

Seja

$$P_\alpha(D_1, D_2) = D_1 - \alpha D_2,\ \alpha \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

A hipoeliticidade global de P_α é caracterizada através de propriedades numéricas de α. Nos basearemos no Capítulo 3 de (VICTOR, 2021) para obter essa caracterização no contexto das classes de Denjoy-Carleman.

4.1 $\mathscr{M}$-Hipoeliticidade global de uma classe de operadores

Seja $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos e considere um operador

$$P_\alpha : \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$$

definido por (4.1). Dizemos que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se

$$u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2),\ f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2),\ P_\alpha u = f \implies u \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2).$$

Para estudar a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de P_α, considere $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ e $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ tais que $P_\alpha u = f$. Pelo Teorema 3.2.8, podemos escrever

$$u = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{u}(\xi,\eta) \cdot e^{i(x\xi + t\eta)}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.2.2,

$$f = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(\xi,\eta) \cdot e^{i(x\xi + t\eta)}.$$

Segue que

$$\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(\xi,\eta)\cdot e^{i(x\xi+t\eta)} = f = P_\alpha u = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} i(\xi-\alpha\eta)\cdot\hat{u}(\xi,\eta)\cdot e^{i(x\xi+t\eta)}.$$

Assim,

$$|\hat{f}(\xi,\eta)| = |\hat{u}(\xi,\eta)|\cdot|\xi-\alpha\eta|,\ \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2. \tag{4.2}$$

Considere primeiro o caso em que $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Podemos escrever $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, com $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ e $\alpha_2\neq 0$. Para $(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2$, temos

$$\xi-\alpha\eta=0 \iff \xi-\alpha_1\eta-i\alpha_2\eta=0 \iff \begin{cases}\alpha_2\eta=0\\ \xi-\alpha_1\eta=0\end{cases} \iff \xi=\eta=0.$$

Decorre de (4.2) que

$$|\hat{u}(\xi,\eta)| = \frac{|\hat{f}(\xi,\eta)|}{|\xi-\alpha\eta|},\ \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}. \tag{4.3}$$

Além disso, para $(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$, se $\eta\neq 0$,

$$|\xi-\alpha\eta|^2 = (\xi-\alpha_1\eta)^2+(\alpha_2\eta)^2 \geq (\alpha_2\eta)^2 \geq \alpha_2^2$$

e, se $\eta=0$,

$$|\xi-\alpha\eta| \geq |\xi| \geq 1.$$

Definindo $L=\min\{1,|\alpha_2|\}$, temos $|\xi-\alpha\eta|\geq L$, $\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Logo, segue de (4.3) e do Teorema 3.2.2 que existem constantes $C,\delta>0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi,\eta)| = \frac{|\hat{f}(\xi,\eta)|}{|\xi-\alpha\eta|} \leq \frac{C}{L}\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right),\ \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Então, pelo Corolário 3.2.9, $u\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Isso mostra que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico para todo $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Agora, vamos estudar a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de P_α no caso em que α é real.

Definição 4.1.1. Dado $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dizemos que α é $\mathscr{M}$-exponencial Liouville se existe $\varepsilon>0$ de modo que a desigualdade

$$|\xi-\alpha\eta| < \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|)^n}\right),\ (\xi,\eta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$$

possui infinitas soluções.

Teorema 4.1.2. Seja $\alpha\in\mathbb{R}$. O operador P_α definido em (4.1) será globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, α for irracional e não $\mathscr{M}$-exponencial Liouville.

Demonstração. Necessidade: Assuma que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

Suponha por absurdo que α é racional. Então podemos escrever $\alpha = \dfrac{p}{q}$, com $p,q \in \mathbb{Z}$. Considerando a sequência $\{\xi_j, \eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dada por $\xi_j = pj$ e $\eta_j = qj$, temos

$$\xi_j - \alpha\eta_j = 0,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Defina um funcional linear agindo em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ como em (3.7) por

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{i(x\xi_j,+t\eta_j)}. \tag{4.4}$$

Observe que, pelo Teorema 3.2.7, u é um elemento de $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Por outro lado,

$$P_\alpha u = \sum_{j\in\mathbb{N}} (i\xi_j - \alpha i\eta_j)e^{i(x\xi_j+t\eta_j)} = 0.$$

Portanto, segue da hipótese que $u \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Assim, pelo Teorema 3.2.2 existem constantes $C, \delta > 0$ tais que

$$1 = |\hat{u}(\xi_j,\eta_j)| \leq C \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\xi_j|+|\eta_j|)^n} \right) \leq C \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+j)^n} \right) \leq \frac{C}{\delta(1+j)}, \forall j \in \mathbb{N};$$

fazendo $j \to \infty$ obtemos um absurdo. Portanto, α é irracional.

Resta mostrar que α não é $\mathscr{M}$-exponencial Liouville. Suponha que exista uma sequência $\{\xi_j, \eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $|\xi_j| + |\eta_j| \geq j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$|\xi_j - \alpha\eta_j| < \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi_j|+|\eta_j|)^n} \right),\ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Tomando u como em (4.4) e $f = P_\alpha u$ temos

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} (i\xi_j - \alpha i\eta_j)e^{i(x\xi_j+t\eta_j)}.$$

Segue de (4.5) e do Teorema 3.2.3 que $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Por outro lado, como vimos anteriormente, $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$, contradizendo a hipótese inicial.

Portanto, não vale (4.5), isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\xi - \alpha\eta| \geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|+|\eta|)^n} \right),\ \text{para } |\xi|+|\eta| \geq R_\varepsilon. \tag{4.6}$$

Fixado $\delta > 0$, tome $\varepsilon = \dfrac{\delta}{(|\alpha|+3)}$. Caso $|\xi - \alpha\eta| \geq 1$, vale

$$|\xi - \alpha\eta| \geq 1 \geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\eta|)^n} \right).$$

Caso contrário, se $|\xi-\alpha\eta|\leq 1$ tem-se $|\xi|-|\alpha||\eta|\leq 1$, isto é, $|\xi|\leq|\alpha||\eta|+1$. Além disso, como estamos considerando $|\xi|+|\eta|\geq R_\varepsilon$, podemos supor $|\eta|\neq 0$. De fato, se $|\eta|=0$, então $|\xi|\geq R_\varepsilon>0$ e isso implica que $|\xi-\alpha\eta|=|\xi|\geq 1$, voltando ao caso anterior.

Assim, para $|\xi|+|\eta|\geq R_\varepsilon$ e supondo $|\eta|\geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|\xi-\alpha\eta| &\geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right)\\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\alpha||\eta|+1+|\eta|)^n}\right)\\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(|\alpha||\eta|+3|\eta|)^n}\right)\\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot|\eta|^n}\right)\\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\eta|)^n}\right).
\end{aligned}$$

Logo, α não é $\mathscr{M}$-exponencial Liouville.

Suficiência: Suponha que α seja irracional e não $\mathscr{M}$-exponencial Liouville. Assim, para todo $\varepsilon>0$, existe R_ε tal que

$$|\xi-\alpha\eta|\geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|)^n}\right),\ \text{para } |\xi|+|\eta|\geq R_\varepsilon.$$

e, portanto, vale a desigualdade (4.6).

Seja $u\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ tal que $P_\alpha u=f$, com $f\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Pelo Teorema 3.2.2, existem $C,\delta>0$ tais que

$$|\hat{f}(\xi,\eta)|\leq C\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right),\ \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2. \tag{4.7}$$

Tomando $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2H}$ e fixando $(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2$ tal que $|\xi|+|\eta|\geq R_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(\xi,\eta)| &\underset{(4.2)}{\leq} |\hat{f}(\xi,\eta)|\cdot|\xi-\alpha\eta|^{-1}\\
&\underset{\substack{(4.6)\\(4.7)}}{\leq} C\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right)\cdot\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\\
&\underset{\textit{Lema } 3.3.8}{\leq} C\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right)\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{1/2}\\
&\underset{\textit{Obs } 3.2.6}{=} C\left[\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1/2}\\
&\underset{\textit{Lema } 3.3.8}{\leq} C\left[\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale sempre que $|\xi|+|\eta| \geq R_\varepsilon$, podemos aumentar a constante C, se necessário, a fim de obter

$$|\hat{u}(\xi,\eta)| \leq C \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|+|\eta|)^n} \right), \ \forall (\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2.$$

Logo, u satisfaz as hipóteses do Corolário 3.2.9 e, portanto $u \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Isso mostra que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

□

Observação 4.1.3. Segue da demonstração do Teorema 4.1.2 que a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de P_α é equivalente a valer uma desigualdade como (4.6) e isso independe do fato de α ser real ou complexo.

Se um operador P_α dado em (4.1) for globalmente C^∞-hipoelítico, por (GREENFIELD; WALLACH, 1972) existem constantes $L,k,R>0$ tais que

$$|\xi - \alpha\eta| \geq \frac{L}{(1+|\xi|+|\eta|)^k}, \text{ para } |\xi|+|\eta| \geq R.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome k_0 o menor natural maior do que k e

$$R_\varepsilon = \max\left\{ R, \frac{m_{k_0+1}\cdot (k_0+1)!}{L\cdot \varepsilon^{k_0+1}} \right\}.$$

Assim, para $|\xi|+|\eta| \geq R_\varepsilon$, temos

$$|\xi-\alpha\eta| \geq \frac{L\cdot(1+|\xi|+|\eta|)}{(1+|\xi|+|\eta|)^{k_0+1}} \geq \frac{m_{k_0+1}\cdot(k_0+1)!}{(1+|\xi|+|\eta|)^{k_0+1}\cdot\varepsilon^{k_0+1}} \geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right).$$

Logo, o operador satisfaz (4.6) e pela Observação 4.1.3 podemos concluir que a hipoeliticidade global de P_α no sentido C^∞ implica na sua $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global.

4.2 Relação entre $\mathscr{M}$-hipoeliticidade e $\mathscr{L}$-hipoeliticidade

Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$ sequências de pesos tais que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}} \subset \mathscr{E}_{\mathscr{L}}$. Veremos que se um operador da forma (4.1) é globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico, então também é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico. Por outro lado, sob certas condições, é possível exibir $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que o operador P_α seja globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, mas não globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico.

Teorema 4.2.1. Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$ sequências de pesos, com $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$. Suponha que o operador P_α, para algum $\alpha\in\mathbb{C}$, seja globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico. Então, P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

Demonstração. Como $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$, segue da Definição 2.2.8 que existe $C>1$ de maneira que

$$m_n \leq C^n \cdot l_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Como P_α é globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico, existe uma constante $R_{\frac{\varepsilon}{C}} > 0$ tal que, para $|\xi|+|\eta| \geq R_{\frac{\varepsilon}{C}}$, temos

$$|\xi - \alpha\eta| \geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{C^n \cdot l_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|+|\eta|)^n} \right) \geq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|+|\eta|)^n} \right).$$

Isso implica, pela Observação 4.1.3, que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

$\square$

Consideremos a partir de agora uma nova relação entre $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$:

Definição 4.2.2. Sejam $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $\mathscr{L} = \{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ duas sequências de pesos. Definimos

$$\mathscr{M} \prec \mathscr{L} \iff \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m_n}{l_n} \right)^{1/n} = 0.$$

Observe que se $\mathscr{M} \prec \mathscr{L}$, então $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$ e $\mathscr{L} \npreceq \mathscr{M}$, sendo $\preceq$ dada na definição 2.2.8. Logo, pelo Teorema 2.2.11, $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \subsetneq \mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^2)$.

Dadas duas sequências $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$, com $\mathscr{M} \prec \mathscr{L}$, construiremos $\alpha \in \mathbb{R}$, como em (VICTOR, 2021, Teorema 3.13), para mostrar que a recíproca do Teorema 4.2.1 não é válida. Para isso, usaremos a teoria de frações contínuas, com base no Capítulo 10 de (HARDY; WRIGHT, 1979).

Definiremos, por recorrência, uma sequência adequada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{R}_+$ e tomaremos

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}.$$

Suponha definidos os a_n's. Defina as sequências $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ por

$$\begin{aligned} &p_0 = 0,\ \ p_1 = 1 \ \text{ e } \ p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, \ \text{ para } n \geq 2, \\ &q_0 = 1,\ \ q_1 = 0 \ \text{ e } \ q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}, \ \text{ para } n \geq 2, \\ &a'_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots], \ \text{ para } n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{4.8}$$

São válidos os seguintes resultados acerca dessas sequências:

Teorema 4.2.3. (HARDY; WRIGHT, 1979, Teo 155 e 156) Se $n > 3$, então $q_{n+1} \geq q_n \geq n$. Em particular, $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

Teorema 4.2.4. (HARDY; WRIGHT, 1979, Teo 168) Para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lfloor a'_n \rfloor = a_n$, em que $\lfloor x \rfloor \doteq \max\{m \in \mathbb{Z} |\ m \leq x\}$.

Teorema 4.2.5. (HARDY; WRIGHT, 1979, Teo 171) Dado $n \geq 1$, temos

$$|p_n - \alpha \cdot q_n| = \frac{1}{a'_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}$$

e a sequência $|p_n - \alpha \cdot q_n|$ é estritamente decrescente com limite igual a 0.

Teorema 4.2.6. (HARDY; WRIGHT, 1979, Teo 182) Sejam $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, tais que $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$ e $q_n \leq q < q_{n+1}$. Então

$$|p - q \cdot \alpha| \geq |p_n - q_n \cdot \alpha| > |p_{n+1} - q_{n+1} \cdot \alpha|.$$

Finalmente, estamos prontos para definir a sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Tome $a_0 = 0$ e suponha a_j definido para $0 \leq j \leq n-1$. Assim, temos p_j, q_j definidos por (4.8) para $j \leq n-1$. Agora defina

$$a_n = \begin{cases} \left\lfloor \sup\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{(q_{n-1}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) \cdot \dfrac{1}{q_{n-1}} \right\rfloor, & n \neq 2 \\ 1, & n = 2. \end{cases}$$

Observe que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ é um número irracional. Além disso, se mostrarmos que α é não $\mathscr{M}$-exponencial Liouville, teremos pelo Teorema 4.1.2 que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico. Sejam $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ tais que $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$. Pelo Teorema 4.2.3, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{k_0} \leq q < q_{k_0+1}$. Segue dos Teoremas 4.2.5 e 4.2.6 que

$$|p - q \cdot \alpha| \geq |p_{k_0} - q_{k_0} \cdot \alpha| = \frac{1}{a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1}}. \tag{4.9}$$

O Teorema 4.2.4 implica que $a'_{k_0+1} < a_{k_0+1} + 1$. Escolhendo $q \geq q_3$, temos

$$\begin{aligned} a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} &\leq \left\lfloor \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) \cdot \frac{1}{q_{k_0}} \right\rfloor \cdot q_{k_0} + q_{k_0} + q_{k_0-1} \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) + q_{k_0} + q_{k_0-1} \\ &\leq 3 \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) \leq 3 \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q+1)^r}{l_r \cdot r!} \right). \end{aligned}$$

Logo, por (4.9),

$$|p - q \cdot \alpha| \geq \left[3 \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \inf_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{l_r \cdot r!}{(q+1)^r} \right). \tag{4.10}$$

Dado $\delta > 0$, afirmamos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\inf\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{m_r \cdot r!}{\delta^r \cdot t^r} \right)}{\inf\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{l_r \cdot r!}{t^r} \right)} = 0. \tag{4.11}$$

Com efeito, seja H a constante de (**M.3**) e tome $j_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\dfrac{1}{H^{j_0}} \leq \delta$. Como $\mathscr{M} \prec \mathscr{L}$, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{l_j}{m_j} \right)^{1/j} \geq H^{j_0+1}, \; \forall j \geq j_1.$$

Para $t \geq l_{j_1} \cdot j_1!$ e $s < j_1$, temos

$$\frac{t^{j_1}}{l_{j_1} \cdot j_1!} \cdot \frac{l_s \cdot s!}{t^s} = t^{j_1 - s} \cdot \frac{l_s \cdot s!}{l_{j_1} \cdot j_1!} \geq [l_{j_1} \cdot j_1!]^{j_1 - s - 1} \cdot l_s \cdot s! > 1.$$

Logo,

$$\frac{t^{j_1}}{l_{j_1} \cdot j_1!} > \frac{t^s}{l_s \cdot s!}, \ \forall s < j_1.$$

Portanto, fazendo uso do Lema 3.3.8, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{t^r}{l_r \cdot r!} \right) &= \sup_{r \geq j_1} \left(\frac{t^r}{l_r \cdot r!} \right) \\
&\leq \sup_{r \geq j_1} \left(\frac{t^r}{(H^{j_0+1})^r \cdot m_r \cdot r!} \right) \\
&\leq \left[\sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{t^r}{(H^{j_0})^r \cdot m_r \cdot r!} \right) \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\delta^r \cdot t^r}{m_r \cdot r!} \right) \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{\sup\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{t^r}{l_r \cdot r!} \right)}{\sup\limits_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{\delta \cdot t^r}{l_r \cdot r!} \right)} \leq \left[\sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\delta^r \cdot t^r}{m_r \cdot r!} \right) \right]^{-1/2} \leq \frac{(m_2 \cdot 2)^{1/2}}{\delta \cdot t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

E isso implica em (4.11).

Decorre de (4.11) que existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_r \cdot r!}{\delta^r \cdot t^r} \right) \leq \frac{1}{3} \cdot \inf_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{l_r \cdot r!}{t^r} \right), \ \forall t \geq s_0. \tag{4.12}$$

Logo, de (4.10) e (4.12), existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p - q \cdot \alpha| \geq \inf_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_r \cdot r!}{\delta^r \cdot (1+q)^r} \right), \quad \forall q \geq s_1.$$

Isso mostra que α não é $\mathscr{M}$-exponencial Liouville.

Resta mostrarmos que P_α não é globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico. Pelo Teorema 4.2.4, temos $a'_{k_0+1} > a_{k_0+1}$. Novamente, para $q \geq q_3$, temos

$$\begin{aligned}
a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} &\geq \left\lfloor \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) \cdot \frac{1}{q_{k_0}} \right\rfloor \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} \\
&> \left[\sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) \cdot \frac{1}{q_{k_0}} - 1 \right] \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} \\
&\geq \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) - q_{k_0} + q_{k_0-1} \\
&> \sup_{r \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!} \right) - q_{k_0}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Observe que se $t \geq 4 \cdot l_2$ temos

$$\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{t^r}{l_r \cdot r!}\right) \geq \frac{t^2}{l_2 \cdot 2} \geq \frac{t \cdot 4 \cdot l_2}{l_2 \cdot 2} = 2t.$$

Tome $k_0 \geq \max\{3,\ 4 \cdot l_2\}$. Pelo Teorema 4.2.3, $q_{k_0} \geq k_0 \geq 4 \cdot l_2$ e, portanto,

$$\sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!}\right) \geq \sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{(q_{k_0})^r}{l_r \cdot r!}\right) \geq 2q_{k_0}.$$

Disso decorre

$$-q_{k_0} \geq -\frac{1}{2} \cdot \sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!}\right).$$

Logo, por (4.13)

$$a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} > \frac{1}{2} \cdot \sup_{r\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{l_r \cdot r!}\right). \tag{4.14}$$

Assim, usando (4.9) e (4.14), temos pelo Teorema 4.2.3 que existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_n - q_n \cdot \alpha| < 2 \cdot \inf_{r\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{l_r \cdot r!}{(q_n+1)^r}\right),\ \forall n \geq r_0.$$

Isso implica que α é $\mathscr{L}$-exponencial Liouville. Portanto, pelo Teorema 4.1.2, P_α não é globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico.

CAPÍTULO

5

RESOLUBILIDADE SEMIGLOBAL

Neste capítulo iremos tratar da resolubilidade de uma classe de campos vetoriais complexos no contexto das classes de Denjoy-Carleman. O nosso objetivo é estender os resultados da Seção 3 de (ARAUJO; BERGAMASCO; SILVA, in press) a respeito da resolubilidade no contexto Gevrey.

5.1 Sequência de pesos fortemente regular

Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de pesos, isto é, satisfazendo (**M.1**), (**M.2**) e (**M.3**). Para os nossos objetivos a partir de agora será necessário adicionar mais uma hipótese a $\mathscr{M}$. Vamos considerar a seguinte propriedade: Existe uma constante $A > 1$ tal que, para todo $p \geq 1$,

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{m_j}{m_{j+1}\cdot(j+1)} \leq A\frac{m_p\cdot p}{m_{p+1}\cdot(p+1)} \tag{\textbf{M.4}}$$

ou, equivalentemente, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{m_j}{m_{j+1}\cdot(j+1)} \leq C\frac{m_p}{m_{p+1}}.$$

Definição 5.1.1. Se $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequência de números reais positivos que satisfaz (**M.1**), (**M.2**), (**M.3**) e (**M.4**), dizemos que $\mathscr{M}$ é uma sequência de pesos fortemente regular.

Agora, é possível obter uma versão do Teorema de Borel para a classe $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}$. Esta será uma importante ferramenta no estudo da resolubilidade da classe de campos vetoriais que estudaremos adiante.

Teorema 5.1.2. (THILLIEZ, 2008, Teorema 4) Seja $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos fortemente regular. Considere $\{\alpha_J\}$ uma sequência em $\mathbb{C}$, onde $J = (j,k) \in \mathbb{Z}_+^2$, tal que

$$|\alpha_J| \leq B^{|J|+1}\cdot m_{|J|}\cdot J!, \tag{5.1}$$

para alguma constante $B > 0$. Então, existe $f \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{R}^2)$ de modo que $\partial^J f(0,0) = \alpha_J$.

A condição (**M.4**) é chamada de não-quase analiticidade forte e, de fato, se $\mathscr{M}$ satisfaz (**M.4**) o Teorema 2.3.9 implica que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é não quase analítica. Por outro lado, o próximo exemplo, mencionado em (THILLIEZ, 2008, Exemplo 2.1.1), mostra que a recíproca não é válida, isto é, existe uma sequência que não satisfaz (**M.4**), mas a sua classe associada ainda é não quase analítica.

Exemplo 5.1.3. Vimos no Exemplo 2.3.12 que a classe $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, em que $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é dada por $m_n = [\ln(n+e-1)]^{\sigma n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, é quase analítica para $0 < \sigma \leq 1$ e não-quase analítica para $\sigma > 1$. Logo, $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ não satisfaz (**M.4**) quando $0 < \sigma \leq 1$.

Agora, considerando $\sigma > 1$, suponha por absurdo que $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ seja fortemente não-quase analítica. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{j\geq k} \frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}} \leq C\frac{m_k}{m_{k+1}}, \ \forall k \geq 0.$$

Segue novamente por (2.25) que existe $k \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq k} \frac{m_j}{(j+1)m_{j+1}} &= \sum_{j\geq k} \frac{[\ln(j+e-1)]^{\sigma j}}{(j+1)[\ln(j+e)]^{\sigma(j+1)}} \geq \frac{1}{(2e)^\sigma} \sum_{j\geq k} \frac{1}{(j+1)[\ln(j+e)]^\sigma} \\
&\geq \frac{1}{(2e)^\sigma} \sum_{j\geq k} \frac{1}{(j+e)[\ln(j+e)]^\sigma} \geq \frac{1}{(2e)^\sigma} \int_k^{+\infty} \frac{1}{(x+e)[\ln(x+e)]^\sigma} dx \\
&= \frac{1}{(2e)^\sigma} \int_{\ln(k+e)}^{+\infty} \frac{1}{u^\sigma} du = \frac{1}{(2e)^\sigma} \frac{1}{(1-\sigma)u^{\sigma-1}}\Big|_{\ln(k+e)}^{+\infty} = \frac{1}{(2e)^\sigma(\sigma-1)[\ln(k+e)]^{\sigma-1}}.
\end{aligned}$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande,

$$\frac{1}{(2e)^\sigma(\sigma-1)[\ln(k+e)]^{\sigma-1}} \leq C\frac{m_k}{m_{k+1}} = C\left(\frac{\ln(k+e-1)}{\ln(k+e)}\right)^{\sigma k} \frac{1}{[\ln(k+e)]^\sigma} \leq C\frac{1}{[\ln(k+e)]^\sigma}$$

e, consequentemente,

$$\ln(k+e) \leq (2e)^\sigma(\sigma-1)C.$$

Como $\lim_{k\to\infty} \ln(k+e) = \infty$, temos um absurdo. Portanto, $\mathscr{M}$ também não satisfaz (**M.4**) para $\sigma > 1$.

□

Para estender o Teorema 3.4 de (ARAUJO; BERGAMASCO; SILVA, in press) das classes Gevrey para as classes $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}$ na seção seguinte, será necessário aplicar o Teorema de Borel para uma classe associada a uma sequência proveniente de $\mathscr{M}$ (através do Lema 5.2.3). Sendo assim, faremos uso do sequinte lema:

Lema 5.1.4. (THILLIEZ, 2003, Lema 1.3.4) Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de pesos fortemente regular. Então, para qualquer real $s > 0$, a sequência $\mathscr{M}^s = \{(m_n)^s\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ também é uma sequência de pesos fortemente regular.

Vejamos a seguir um exemplo desse tipo de sequência, mencionado em (THILLIEZ, 2016, Exemplo 1.2.1).

Exemplo 5.1.5. Dados $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, defina $\mathscr{M} = \{m_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ por $m_0 = m_1 = 1$ e

$$m_j = (j!)^\alpha \left[\ln(e+j)\right]^{\beta j}, \text{ para } j \geq 2.$$

A sequência $\mathscr{M}$ é uma sequência de pesos fortemente regular. De fato, as propriedades (**M.1**)-(**M.3**) seguem diretamente do fato de $\mathscr{M}$ ser produto de duas sequências de pesos (veja os exemplos 2.1.5 e 2.1.6). Além disso, para $p \geq 2$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=p}^{\infty} \frac{m_j}{m_{j+1}\cdot(j+1)} &= \sum_{j=p}^{\infty} \frac{(j!)^\alpha \left[\ln(e+j)\right]^{\beta j}}{(j+1)!^\alpha \left[\ln(e+j+1)\right]^{\beta(j+1)}} \\
&= \sum_{j=p}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{\alpha+1}\left[\ln(e+j+1)\right]^\beta} \cdot \left(\frac{\ln(e+j)}{\ln(e+j+1)}\right)^{\beta j} \\
&\leq \sum_{j=p}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{\alpha+1}\left[\ln(e+j+1)\right]^\beta} \\
&\leq \int_p^\infty \frac{1}{x^{\alpha+1}\left[\ln(e+x)\right]^\beta} dx \\
&= \left[-\frac{1}{\alpha x^\alpha \left[\ln(e+x)\right]^\beta}\right]_p^\infty - \int_p^\infty \frac{\beta\left[\ln(e+x)\right]^{-\beta-1}}{\alpha x^\alpha (e+x)} dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha p^\alpha \left[\ln(e+p)\right]^\beta} \\
&= \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{p+1}{p}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\ln(e+p+1)}{\ln(e+p)}\right)^{\beta(p+1)} \cdot \frac{p!^\alpha \left[\ln(e+p)\right]^{\beta p}}{(p+1)!^\alpha \left[\ln(e+p+1)\right]^{\beta(p+1)}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{\ln(e+p+1)}{\ln(e+p)}\right)^{(p+1)} \leq \left(\frac{e+p+1}{e+p}\right)^{(p+1)} = \left(1+\frac{1}{e+p}\right)^{(p+1)} \leq \left(1+\frac{1}{1+p}\right)^{(1+p)} \leq e,$$

temos

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{m_j}{m_{j+1}\cdot(j+1)} \leq \frac{1}{\alpha}\cdot 2^\alpha \cdot e^\beta \cdot \frac{m_p}{m_{p+1}}.$$

Logo, $\mathscr{M}$ também satisfaz (**M.4**).

Note que quando $\beta = 0$ a classe associada a $\mathscr{M}$ é a classe Gevrey de ordem $\alpha+1$.

5.2 Resolubilidade de classes de campos vetoriais

Seja $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos. Considere um campo vetorial complexo definido em $\Omega = \mathbb{R}\times S^1$ dado por

$$\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a(x,t)+ib(x,t))\frac{\partial}{\partial x},\ b \not\equiv 0, \tag{5.2}$$

onde a e b são funções ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$ a valores reais.

Suponha que

$$(a+ib)(x,t) = x(a_0(x,t)+ib_0(x,t)), \text{ em } \Omega_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)\times S^1, \tag{5.3}$$

onde a_0 e b_0 são funções a valores reais ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$ em Ω_ε, com $0<\varepsilon<1$ e, além disso,

$$\int_0^{2\pi} a_0(0,t)dt = 0 \text{ e } b_0(0,t)\neq 0, \text{ para todo } t\in S^1. \tag{5.4}$$

Seja

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_0(0,t)dt, \tag{5.5}$$

chamado número de Meziani, o qual é associado a um invariante de $\mathscr{L}$ (veja (MEZIANI, 2001)).

Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ sequências de pesos com $\mathscr{M}\preceq\mathscr{N}$. Observe que se $f\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\Omega)$ é uma função para a qual existe $u\in\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$, satisfazendo $\mathscr{L}u=f$ em uma vizinhança de Σ, então

$$f(0,t)=\mathscr{L}u(0,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) \implies \int_0^{2\pi} f(0,t)dt = \int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)dt = u(0,t)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

e, portanto, f deve satisfazer a condição de compatibilidade

$$\int_0^{2\pi} f(0,t)dt = 0. \tag{5.6}$$

Defina o conjunto

$$\mathscr{F}_{\mathscr{M}} = \{f\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}} \mid f \text{ satizfaz (5.6)}\}.$$

Definição 5.2.1. Dizemos que $\mathscr{L}$ é $(\mathscr{N},\mathscr{M})$-resolúvel em $\Sigma=\{0\}\times S^1$ se para qualquer $f\in\mathscr{F}_{\mathscr{M}}$ existe uma solução $u\in\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$ para a equação $\mathscr{L}u=f$ definida em uma vizinhança de Σ.

Seguindo os argumentos de (CORDARO; GONG, 2004, Proposição 3.2), temos o seguinte.

Proposição 5.2.2. Sejam $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos e $\mathscr{L}$ um campo vetorial complexo em Ω da forma (5.2). Suponha que os coeficientes de $\mathscr{L}$ estão em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\Omega)$ e satisfazem (5.3) e (5.4), com λ, dado por (5.5), irracional. Se $\mathscr{L}$ é $(\mathscr{N},\mathscr{M})$-resolúvel em Σ para alguma sequência de pesos $\mathscr{N}$ com $\mathscr{M}\preceq\mathscr{N}$, então $\mathscr{L}$ é equivalente, via $\{\mathscr{N}\}$-difeomorfismo, a um múltiplo não nulo de

$$L_\lambda = \frac{\partial}{\partial t} - i\lambda x\frac{\partial}{\partial x}. \tag{5.7}$$

Demonstração. Considere a função $Z(x,t)=x^{1/\lambda}e^{it}$ definida em Ω. Como para $x\neq 0$

$$L_\lambda Z = \frac{\partial}{\partial t}Z - i\lambda x\frac{\partial}{\partial x}Z = iZ - i\lambda x\frac{1}{\lambda x}Z = 0,$$

Z é uma integral primeira de L_λ em $\Omega\setminus\Sigma$.

Vamos encontrar um difeomorfismo

$$x \mapsto xX(x,t), \quad t \mapsto -t + T(x,t) \tag{5.8}$$

tal que

$$W(x,t) \doteq (xX)^{1/\lambda} e^{i(-t+T)}$$

satisfaz $\mathscr{L}W = 0$.

Pela hipótese (5.3), podemos escrever $\mathscr{L}$ próximo de $x = 0$ como

$$\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} + x(a_0(x,t) + ib_0(x,t))\frac{\partial}{\partial x}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\lambda^{-1}\ln x - it\} &= \frac{\partial\{\lambda^{-1}\ln x - it\}}{\partial t} + x(a_0(x,t) + ib_0(x,t))\frac{\partial\{\lambda^{-1}\ln x - it\}}{\partial x}\\ &= -i + x(a_0(x,t) + ib_0(x,t))\frac{1}{\lambda x} = -i + \lambda^{-1}(a_0 + ib_0)(x,t).\end{aligned}$$

Por outro lado, pela hipótese (5.4) e pela definição de λ, decorre que

$$\int_0^{2\pi} -i + \lambda^{-1}(a_0 + ib_0)(0,t)dt = -2\pi i + \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}(a_0 + ib_0)(0,t)dt = -2\pi i + 2\pi i = 0$$

isto é, a função

$$f = -i + \lambda^{-1}(a_0 + ib_0)(x,t)$$

satisfaz a condição (5.6). Além disso, como a_0 e b_0 são funções ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$, podemos concluir que f pertence a $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}$. Logo, da $(\mathscr{N}, \mathscr{M})$-resolubilidade de $\mathscr{L}$, existe $u \in \mathscr{E}_{\mathscr{N}}$ tal que

$$\mathscr{L}u = -(-i + \lambda^{-1}(a_0 + ib_0)(x,t)).$$

Assim, definindo

$$W(x,t) \doteq \exp\{\lambda^{-1}\ln x - it + u(x,t)\} = x^{1/\lambda}e^{-it+u(x,t)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}W &= \exp\{\lambda^{-1}\ln x - it + u(x,t)\}\left[\left(-i + \frac{\partial u}{\partial t}\right) + x(a_0(x,t) + ib_0(x,t))\left(\frac{1}{\lambda x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\\ &= x^{1/\lambda}e^{-it+u(x,t)}\left(\mathscr{L}u + \mathscr{L}\{\lambda^{-1}\ln x - it\}\right) = 0.\end{aligned}$$

Dessa forma, definimos as funções X e T por

$$X(x,t) \doteq \exp\{\lambda\Re u(x,t)\}, \quad T(x,t) \doteq \Im u(x,t)$$

e, de fato, temos

$$(xX)^{1/\lambda}e^{i(-t+T)} = (xe^{\lambda\Re u})^{1/\lambda}e^{i(-t+\Im u)} = x^{1/\lambda}e^{-it+u} = W(x,t).$$

Finalmente, defina em Ω

$$F(x,t) \doteq (xX(x,t), -t + T(x,t)).$$

Segue da definição das funções X e T e do fato de u pertencer a $\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$, que F está em $\mathscr{E}_{\mathscr{N}}$. Além disso, o determinante da matriz jacobiana de F em Σ é dado por

$$\begin{aligned}\det J(0,t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(xX)}{\partial x}(0,t) & \frac{\partial(xX)}{\partial t}(0,t) \\ \frac{\partial(-t+T)}{\partial x}(0,t) & \frac{\partial(-t+T)}{\partial t}(0,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(xe^{\lambda\Re u})}{\partial x}(0,t) & \frac{\partial(xe^{\lambda\Re u})}{\partial t}(0,t) \\ \frac{\partial(-t+\Im u)}{\partial x}(0,t) & \frac{\partial(-t+\Im u)}{\partial t}(0,t) \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda\Re u(0,t)}\left(-1+\Im\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)\right).\end{aligned}$$

Como $\mathscr{L}u = -(-i+\lambda^{-1}(a_0+ib_0)(x,t))$, então $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = -(-i+\lambda^{-1}(a_0+ib_0)(0,t))$ e

$$\Im\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 1-\lambda^{-1}b_0(0,t).$$

Logo,

$$\det J(0,t) = e^{\lambda\Re u(0,t)}\left(-1+(1-\lambda^{-1}b_0(0,t))\right) = -\lambda^{-1}e^{\lambda\Re u(0,t)}b_0(0,t) \neq 0,\ \forall t \in S^1.$$

Assim, pelo Teorema 2.2.16, F define um difeomorfismo local de classe $\{\mathscr{N}\}$ em $(0,t)$ para cada $t \in S^1$. Além disso, $F_{|_\Sigma}$ é injetor, pois

$$\frac{\partial(-t+\Im u)}{\partial t}(0,t) = -1+(1-\lambda^{-1}b_0(0,t)) > 0.$$

Mostremos que existe $V = (-\delta,\delta)\times S^1$ tal que $F_{|_V}$ é injetor. Suponha por absurdo que para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ existem $p_j, q_j \in V_j = \left(-\frac{1}{j},\frac{1}{j}\right)\times S^1$, com $p_j \neq q_j$ e $F(p_j) = F(q_j)$. Em particular, $\{p_j\},\{q_j\} \subset \overline{V_1} = [-1,1]\times S^1$. Consequentemente, existem subsequências $\{p_{j_k}\} \subset \{p_j\}$ e $\{q_{j_k}\} \subset \{q_j\}$ tais que $p_{j_k} \to (0,t')$ e $q_{j_k} \to (0,t'')$. Portanto,

$$F(0,t') = \lim F(p_{j_k}) = \lim F(q_{j_k}) = F(0,t'')$$

e, pela injetividade da F em Σ, $t' = t''$. Como F é um difeomorfismo local, existe U uma vizinhança de $(0,t')$ tal que $F_{|_U}$ é um difeomorfismo. Como $p_{j_k} \to (0,t')$ e $q_{j_k} \to (0,t')$, tomando k suficientemente grande, temos $p_{j_k}, q_{j_k} \in U$. Assim, $F(p_{j_k}) = F(q_{j_k})$ e isso implica que $p_{j_k} = q_{j_k}$, resultando numa contradição.

Disso segue que F é um difeomorfismo local de classe $\{\mathscr{N}\}$ em $(0,t)$ para o qual existe V uma vizinhança de Σ tal que $F_{|_V}$ é injetor. Logo, $F_{|_V} : V \to F(V)$ é, de fato, um difeomorfismo de classe $\{\mathscr{N}\}$.

□

Estendendo os resultados para classes Gevrey em (ARAUJO; BERGAMASCO; SILVA, in press), vamos estudar a $(\mathscr{N},\mathscr{M})$-resolubilidade de um campo L_λ dado em (5.7). Para isso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.2.3. Sejam $\mathscr{M} = \{m_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência de pesos fortemente regular e $a > 0$. Então existe uma sequência de pesos fortemente regular $\mathscr{N} = \{n_p\}_{p\in\mathbb{Z}_+}$ tal que para toda $F \in \mathscr{E}_{\mathscr{N}}((-\delta,\delta)\times\mathscr{W})$, F flat em $\{0\}\times\mathscr{W}$, com $\delta > 0$ e $\mathscr{W}$ aberto de $\mathbb{R}^N$, temos que $f(x,w) = F(x^a,w)$ define uma função em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}((-\delta^{\frac{1}{a}},\delta^{\frac{1}{a}})\times\mathscr{W})$.

Demonstração. Observe que f é uma função $C^\infty((-\delta^{\frac{1}{a}},\delta^{\frac{1}{a}})\times\mathscr{W})$. Além disso, podemos assumir sem perda de generalidade que $0 < a < 1$. Caso contrário podemos escolher $m \in \mathbb{Z}_+$ e $\tilde{a} \in (0,1)$ de modo que $a = m\tilde{a}$. Assim, dada F como no enunciado, basta considerarmos a função $\tilde{F}(y,w) = F(y^m,w)$ em $\mathscr{E}_{\mathscr{N}}((-\delta^{\frac{1}{m}},\delta^{\frac{1}{m}})\times\mathscr{W})$, que também é flat em $\{0\}\times\mathscr{W}$, e veja que f pode ser escrita como

$$f(x,w) = F(x^a,w) = \tilde{F}(x^{\tilde{a}},w).$$

Para estimar as derivadas de f, primeiro mostremos por indução em $j \geq 1$ que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$

$$\partial_x^j\partial_w^\alpha f(x,w) = \sum_{\ell=1}^{j} C_{j,\ell}\, x^{\ell a-j}\, (\partial_x^\ell\partial_w^\alpha F)(x^a,w), \quad x \neq 0,\ w \in \mathscr{W}, \tag{5.9}$$

onde as constantes $C_{j,\ell}$ satisfazem

$$C_{j+1,\ell} = (\ell a - j)C_{j,\ell} + aC_{j,\ell-1}, \quad \ell \in \{1,\ldots,j+2\},\ j \geq 1, \tag{5.10}$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} C_{1,1} = a, \\ C_{j,0} = 0 = C_{j,j+1}, \quad j \geq 1. \end{cases} \tag{5.11}$$

Observe que as constantes $C_{j,l}$ podem ser calculadas recursivamente por (5.10) e (5.11) e, portanto, são unicamente determinadas.

Caso $j = 1$, temos para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$

$$\partial_x^1\partial_w^\alpha f(x,w) = \partial_x^1\partial_w^\alpha\,[F(x^a,w)] = (\partial_x^1\partial_w^\alpha F)(x^a,w)\cdot ax^{a-1} = C_{1,1}x^{a-1}(\partial_x^\ell\partial_w^\alpha F)(x^a,w).$$

Agora, suponha (5.9) válido para $k \in \mathbb{Z}_+$. Segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned}
\partial_x^{k+1}\partial_w^\alpha f(x,w) &= \sum_{\ell=1}^{k} \partial_x\left[C_{k,\ell}\, x^{\ell a-k}(\partial_x^\ell\partial_w^\alpha F)(x^a,w)\right] \\
&= \sum_{\ell=1}^{k}\left[(\ell a-k)C_{k,\ell}\, x^{\ell a-k-1}(\partial_x^\ell\partial_w^\alpha F)(x^a,w) + C_{k,\ell}\, x^{\ell a-k}(\partial_x^{\ell+1}\partial_w^\alpha F)(x^a,w)ax^{a-1}\right] \\
&\underset{(5.11)}{=} \sum_{\ell=1}^{k+1}\left[(\ell a-k)C_{k,\ell} + aC_{k,\ell-1}\right]x^{\ell a-k-1}(\partial_x^\ell\partial_w^\alpha F)(x^a,w) \\
&\underset{(5.10)}{=} \sum_{\ell=1}^{k+1} C_{k+1,\ell}\, x^{\ell a-(k+1)}(\partial_x^\ell\partial_w^\alpha F)(x^a,w),
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

Reescrevendo (5.9) com $y = x^a \neq 0$, obtemos

$$\partial_x^j \partial_w^\alpha f(x,w) = \sum_{\ell=1}^{j} C_{j,\ell} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{j}{a}-\ell} (\partial_x^\ell \partial_w^\alpha F)(y,w). \tag{5.12}$$

Como F é flat em $\{0\} \times \mathscr{W}$, então $\partial_x^\ell \partial_w^\alpha F$ também é. Assim, para $y \neq 0$ próximo de 0, segue do Teorema de Taylor que para qualquer $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\left|\frac{1}{y}\right|^k |(\partial_x^\ell \partial_w^\alpha F)(y,w)| \leq \frac{1}{k!} \sup |\partial_x^{\ell+k} \partial_w^\alpha F| \leq \frac{1}{k!} C h^{\ell+k} h^{|\alpha|} (\ell+k)! \alpha!\, n_{\ell+k+|\alpha|}, \tag{5.13}$$

em que $C, h > 0$ são as constantes provenientes de $F \in \mathscr{E}_{\mathscr{N}}((-\delta,\delta) \times \mathscr{W})$ (onde $\mathscr{N}$ será determinado posteriormente) e o supremo é tomado em um conjunto compacto da forma $[-\delta', \delta'] \times K \subset (-\delta,\delta) \times \mathscr{W}$, para algum $\delta' > 0$ e $K \subset \mathscr{W}$ compacto.

Considere $q \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $q \geq \dfrac{1}{a} > 1$. Aplicando (5.13) para $k = qj - \ell$,

$$\left|\frac{1}{y}\right|^{qj-\ell} |(\partial_x^\ell \partial_w^\alpha F)(y,w)| \leq \frac{1}{(qj-\ell)!} C h^{qj} h^{|\alpha|} (qj)! \alpha!\, n_{qj+|\alpha|}.$$

Usando a estimativa acima em (5.12)

$$\begin{aligned}
|\partial_x^j \partial_w^\alpha f(x,w)| &\leq \sum_{\ell=1}^{j} |C_{j,\ell}| \left|\frac{1}{y}\right|^{j/a-\ell} |(\partial_x^\ell \partial_w^\alpha F)(y,w)| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{j} |C_{j,\ell}| \left|\frac{1}{y}\right|^{qj-\ell} |(\partial_x^\ell \partial_w^\alpha F)(y,w)| \\
&\leq C \sum_{\ell=1}^{j} |C_{j,\ell}| \frac{1}{(qj-\ell)!} h^{qj} h^{|\alpha|} (qj)! \alpha!\, n_{qj+|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{(qj)!}{(qj-\ell)!} = \frac{(qj)!}{(qj-\ell)!\ell!} \ell! \leq 2^{qj} \ell!,$$

podemos concluir que para $(x,w) \in [-\delta', \delta'] \times K$

$$|\partial_x^j \partial_w^\alpha f(x,w)| \leq C (2h)^{qj} h^{|\alpha|} j! \alpha!\, n_{qj+|\alpha|}\, \theta_j, \quad \forall j \geq 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \tag{5.14}$$

onde

$$\theta_j = \sum_{\ell=1}^{j} |C_{j,\ell}| \frac{\ell!}{j!}.$$

Agora, defina a sequência $\mathscr{N} = \{n_p\}_{p \in \mathbb{Z}_+}$ por $n_p = m_p^{1/q}$ para cada $p \in \mathbb{Z}_+$. Segue do Lema 5.1.4 que $\mathscr{N}$ também é uma sequência de pesos fortemente regular. Além disso, fixado $j \in \mathbb{Z}_+$, mostremos por indução em ℓ que

$$m_{\ell j} \leq H^{(2+3+\ldots+\ell)j} m_j^\ell,\ \forall \ell \in \mathbb{Z}_{>1}. \tag{5.15}$$

Se $\ell = 2$, segue de (**M.3**) que

$$m_{2j} = m_{j+j} \le H^{2j} m_j m_j = H^{2j} m_j^2.$$

Suponha que o resultado é válido para $\ell \le k$. Então, novamente por (**M.3**),

$$m_{(k+1)j} = m_{kj+j} \le H^{kj+j} m_{kj} m_j \le H^{kj+j}(H^{(2+\ldots+k)j} m_j^k) m_j = H^{(2+\ldots+k+k+1)} m_j^{k+1}.$$

Em particular, quando $\ell = q > 1$, segue de (5.15)

$$n_{qj} = m_{qj}^{1/q} \le H^{(2+3+\ldots+q)j/q} m_j,$$

para qualquer $j \in \mathbb{Z}_+$.

Usando a estimativa acima em (5.14) obtemos

$$\begin{aligned}
|\partial_x^j \partial_w^\alpha f(x,w)| &\le C\ (2h)^{qj}\ h^{|\alpha|}\ j!\ \alpha!\ n_{qj+|\alpha|}\ \theta_j \\
&\le C\ (2h)^{qj}\ h^{|\alpha|}\ j!\ \alpha!\ n_{q(j+|\alpha|)}\ \theta_j \\
&\le C\ (2h)^{qj}\ h^{|\alpha|}\ j!\ \alpha!\ \left[H^{(2+\ldots+q)(j+|\alpha|)/q}\ m_{j+|\alpha|}\right]\ \theta_j \\
&\le C\ \theta_j \left[(2h)^q H^{(2+\ldots+q)/q}\right]^{j+|\alpha|} j!\ \alpha!\ m_{j+|\alpha|}\ .
\end{aligned}$$

Portanto, se mostrarmos que a sequência $\{\theta_j\}$ é limitada, decorre da estimativa acima que f está em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}((-\delta^{\frac{1}{a}}, \delta^{\frac{1}{a}}) \times \mathscr{W})$. Como $\theta_1 = |C_{1,1}| = a$, basta verificarmos que a sequência é decrescente. Com efeito, para cada $j \ge 1$

$$\begin{aligned}
\theta_{j+1} &= \sum_{\ell=1}^{j+1} |C_{j+1,\ell}| \frac{\ell!}{(j+1)!} \\
&= \sum_{\ell=1}^{j+1} \left|(\ell a - j) C_{j,\ell} + a C_{j,\ell-1}\right| \frac{\ell!}{(j+1)!} \\
&\le \sum_{\ell=1}^{j+1} |\ell a - j| |C_{j,\ell}| \frac{\ell!}{(j+1)!} + a \sum_{\ell=1}^{j+1} |C_{j,\ell-1}| \frac{\ell!}{(j+1)!}.
\end{aligned}$$

Observe que para $\ell \le j$ temos $\ell a - j \le ja - j \le 0$. Como $C_{j,j+1} = 0$, podemos escrever

$$\sum_{\ell=1}^{j+1} |\ell a - j| |C_{j,\ell}| \frac{\ell!}{(j+1)!} = \sum_{\ell=1}^{j} (j - \ell a) |C_{j,\ell}| \frac{\ell!}{(j+1)!}.$$

Além disso, usando que $C_{j,0} = 0$, obtemos para o segundo termo

$$a \sum_{\ell=1}^{j+1} |C_{j,\ell-1}| \frac{\ell!}{(j+1)!} = a \sum_{\ell=0}^{j} |C_{j,\ell}| \frac{(\ell+1)!}{(j+1)!} = a \sum_{\ell=1}^{j} |C_{j,\ell}| \frac{(\ell+1)!}{(j+1)!}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\theta_{j+1} &\leq \sum_{\ell=1}^{j}(j-\ell a)|C_{j,\ell}|\frac{\ell!}{(j+1)!}+a\sum_{\ell=1}^{j}|C_{j,\ell}|\frac{(\ell+1)!}{(j+1)!}\\
&= j\sum_{\ell=1}^{j}|C_{j,\ell}|\frac{\ell!}{(j+1)!}+a\sum_{\ell=1}^{j}|C_{j,\ell}|\frac{\ell!}{(j+1)!}\\
&= \sum_{\ell=1}^{j}(j+a)|C_{j,\ell}|\frac{\ell!}{(j+1)!}\\
&< \sum_{\ell=1}^{j}(j+1)|C_{j,\ell}|\frac{\ell!}{(j+1)!}\\
&= \sum_{\ell=1}^{j}|C_{j,\ell}|\frac{\ell!}{j!}\\
&= \theta_j.
\end{aligned}$$

A demonstração está completa. □

Teorema 5.2.4. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ e $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos fortemente regular. Então existe uma função f em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}$ definida numa vizinhança de Σ satisfazendo (5.6) tal que $L_\lambda u = f$ não tem solução suave definida em qualquer vizinhança de Σ.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ denotamos os conjuntos $\Omega_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)\times S^1$, $\Omega_\varepsilon^+ = (0,\varepsilon)\times S^1$ e $\Omega_\varepsilon^- = (-\varepsilon,0)\times S^1$. Considere como na Proposiçao 5.2.2 a função $Z(x,t) = |x|^{1/\lambda}e^{it}$ contínua em $\Omega = \mathbb{R}\times S^1$ e real analítica fora de Σ. Em $\Omega\setminus\Sigma$ temos

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{\lambda x}Z \neq 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial Z}{\partial t} = iZ.$$

Então

$$L_\lambda Z = \frac{\partial}{\partial t}Z - i\lambda x\frac{\partial}{\partial x}Z = iZ - i\lambda x\frac{1}{\lambda x}Z = 0$$

e, assim, Z é uma integral primeira para L_λ em $\Omega\setminus\Sigma$. Note também que Z leva Σ em 0 e

- $\overline{\Omega_\varepsilon^+} = [0,\varepsilon]\times S^1$ em $\overline{D(0,\varepsilon^{1/\lambda})}$;
- $\overline{\Omega_\varepsilon^-} = [-\varepsilon,0]\times S^1$ em $\overline{D(0,\varepsilon^{1/\lambda})}$.

Além disso, $\overline{Z}(x,t) = |x|^{1/\lambda}e^{-it}$,

$$\frac{\partial\overline{Z}}{\partial x} = \frac{1}{\lambda x}\overline{Z}, \quad \frac{\partial\overline{Z}}{\partial t} = -i\overline{Z}$$

e, portanto, $L_\lambda\overline{Z} = -2i\overline{Z}$ em $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times S^1$.

Calculando o *pushforward* das equações

$$L_\lambda u = f \quad \text{em} \quad \Omega_\varepsilon^\pm$$

via o difeomorfismo real analítico $Z:\Omega_\varepsilon^\pm \to D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}$, obtemos

$$(L_\lambda u)\circ Z^{-1} = f\circ Z^{-1} \quad \text{em} \quad D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}. \tag{5.16}$$

Dado $z\in D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}$, considere a mudança de variável $\xi=\dfrac{z+\bar z}{2}$ e $\eta=\dfrac{z-\bar z}{2i}$, isto é, $z=\xi+i\eta$, em que

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)i.$$

Seja φ o difeomorfismo em $\Omega_\varepsilon^\pm$ tal que

$$\varphi(x,t)=(\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t))=\left(\frac{Z(x,t)+\overline{Z}(x,t)}{2},\frac{Z(x,t)-\overline{Z}(x,t)}{2i}\right)=(\xi,\eta).$$

Definindo $\phi=u\circ\varphi^{-1}$, temos $L_\lambda u=L_\lambda(\phi\circ\varphi)$. Decorre da regra da cadeia que

$$\begin{aligned}
L_\lambda(\phi\circ\varphi)(x,t) &= \left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(x,t)\right]+\\
&\quad -i\lambda x\left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,t)+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,t)\right]\\
&= \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x,t)-i\lambda x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,t)\right]\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))\\
&\quad +\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(x,t)-i\lambda x\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,t)\right]\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\\
&= (L_\lambda\varphi_1)(x,t)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))+(L_\lambda\varphi_2)(x,t)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\\
&= (L_\lambda\varphi_1)\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)(x,t)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))+(L_\lambda\varphi_2)\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)(x,t)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\\
&= ((L_\lambda\varphi_1)\circ\varphi^{-1})(\varphi(x,t))\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))+((L_\lambda\varphi_2)\circ\varphi^{-1})(\varphi(x,t))\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\\
&= ((L_\lambda\varphi_1)\circ\varphi^{-1})(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\varphi(x,t))+((L_\lambda\varphi_2)\circ\varphi^{-1})(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\varphi(x,t))\\
&= \left(((L_\lambda\varphi_1)\circ\varphi^{-1})(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+((L_\lambda\varphi_2)\circ\varphi^{-1})(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)\varphi(x,t).
\end{aligned}$$

Assim, considerando o operador

$$\widetilde{L}_\lambda=(L_\lambda\varphi_1)\circ\varphi^{-1}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}+(L_\lambda\varphi_2)\circ\varphi^{-1}(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial}{\partial\eta},$$

temos que

$$L_\lambda(\phi\circ\varphi)=(\widetilde{L}_\lambda\phi)\circ\varphi \ \text{ em } \ \Omega_\varepsilon^\pm, \quad \text{isto é,} \quad (L_\lambda u)\circ\varphi^{-1}=\widetilde{L}_\lambda(u\circ\varphi^{-1}) \ \text{ em } \ \varphi(\Omega_\varepsilon^\pm).$$

Ou, equivalentemente,

$$(L_\lambda u)\circ Z^{-1}=\widetilde{L}_\lambda(u\circ Z^{-1}), \ \text{ em } \ D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}, \tag{5.17}$$

para $Z:\Omega_\varepsilon^\pm \to D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}$ e $u\in C^\infty(\Omega_\varepsilon^\pm)$.

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_\lambda &= (L_\lambda\varphi_1)(\varphi^{-1}(\xi,\eta))\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}+(L_\lambda\varphi_2)(\varphi^{-1}(\xi,\eta))\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\\
&= (L_\lambda\varphi_1)(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}+(L_\lambda\varphi_2)(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\\
&= \left(L_\lambda\left(\frac{Z+\overline{Z}}{2}\right)\right)(x,t)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\right]+\left(L_\lambda\left(\frac{Z-\overline{Z}}{2i}\right)\right)(x,t)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\right]i\\
&= \frac{1}{2}(L_\lambda Z+L_\lambda\overline{Z})(x,t)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\right]+\frac{1}{2}(L_\lambda Z-L_\lambda\overline{Z})(x,t)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\right]\\
&= L_\lambda Z(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial z}+L_\lambda\overline{Z}(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial\bar z}\\
&= 0-2i\overline{Z}(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial\bar z}=-2i\bar z\cdot\frac{\partial}{\partial\bar z}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue de (5.16) e (5.17) que o *pushforward* de $L_\lambda u=f$ em $\Omega_\varepsilon^\pm$ é dado por

$$-2i\bar z\frac{\partial(u\circ Z^{-1})}{\partial\bar z}=f\circ Z^{-1}\quad\text{em}\quad D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}. \tag{5.18}$$

Agora, seja $\mathscr{N}=\{n_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ a sequência de pesos fortemente regular dada pelo Lema 5.2.3 em relação a sequência $\mathscr{M}$ com $a=\dfrac{1}{\lambda}>0$. Considere a série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j\cdot j!\cdot z^j,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{5.19}$$

Observe que (5.19) diverge em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Também podemos reescrever (5.19) na forma

$$\sum_{k\le j\in\mathbb{Z}_+}\alpha_{j-k,k}x^{j-k}y^k, \tag{5.20}$$

sendo

$$|\alpha_{j-k,k}|=\frac{j!}{(j-k)!k!}n_j j!,\quad \forall k\le j\in\mathbb{Z}_+.$$

Como

$$|\alpha_{j-k,k}|\le 2^j\cdot n_j\cdot j!,\quad \forall k\le j\in\mathbb{Z}_+,$$

segue do Teorema 5.1.2 que existe $g\in\mathscr{E}_\mathscr{N}(\mathbb{R}^2)$ cuja série de Taylor em $(0,0)$ é precisamente (5.20). Isto é, a série de Taylor de g em $z=0$ é, de fato, (5.19).

Em particular, como g pode ser escrita da forma

$$g(z)=\sum_{j=0}^{N} n_j\cdot j!\cdot z^j+R_{N+1}(z),\ \text{para qualquer } N\in\mathbb{N},$$

onde $R_{N+1}(z)$ possui ordem $N+1$, segue que $\dfrac{\partial g}{\partial\bar z}\in\mathscr{E}_\mathscr{N}(\mathbb{C})$ é flat em $z=0$.

Defina em Ω a função

$$f(x,t)=\begin{cases}-2ix^{1/\lambda}e^{-it}\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}(Z(x,t)), & \text{se } x>0\\ 0, & \text{se } x\leq 0\end{cases},$$

isto é,

$$f(x,t)=\begin{cases}-2i\bar{Z}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(Z), & \text{em } (0,\infty)\times S^1\\ 0, & \text{em } (-\infty,0]\times S^1\end{cases}.$$

Observe que f é flat em $\Sigma=\{0\}\times S^1=Z^{-1}(0)$ e, em particular, $f\in C^\infty(\Omega)$. Mostremos que de fato $f\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\Omega)$. Defina $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ por

$$F(y,w)=-2iy\bar{w}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(yw).$$

Então $F\in\mathscr{E}_{\mathscr{N}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ e é flat em $\{0\}\times\mathbb{R}^2$. Pelo Lema 5.2.3, a função $(x,w)\mapsto F(x^{1/\lambda},w)$ pertence a $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ e, além disso,

$$f(x,t)=F(x^{1/\lambda},e^{it}),\quad x\geq 0,\ t\in S^1.$$

Disso e do fato que f é flat em $\{0\}\times S^1$ decorre que $f\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\Omega)$.

Finalmente, mostremos que $L_\lambda u=f$ não admite nenhuma solução suave definida em uma vizinhança de Σ. De fato, caso contrário, calculando o *pushforward* das equações $L_\lambda u=f$ em $\Omega^\pm$ por $Z:\Omega^\pm_\varepsilon\to D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}$ teríamos, por (5.18), que para cada $z\in D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\}$

$$-2i\bar{z}\frac{\partial\tilde{u}^\star}{\partial\bar{z}}(z)=\tilde{f}^\star(z)=\begin{cases}-2i\bar{z}\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z), & \text{se } \star=+,\\ 0, & \text{se } \star=-,\end{cases}$$

onde para cada $\psi\in C^\infty(\Omega^\star_\varepsilon)$ denotamos $\tilde{\psi}^\star=\psi\circ Z^{-1}\in C^\infty(D(0,\varepsilon^{1/\lambda})\setminus\{0\})$. Portanto, existem funções holomorfas h^+,h^- em $D(0,\varepsilon^{1/\lambda})$ tais que $u_{|_{\Omega^+_\varepsilon}}\circ Z^{-1}=g+h^+$ e $u_{|_{\Omega^-_\varepsilon}}\circ Z^{-1}=h^-$. Logo,

$$u(x,t)=\begin{cases}g(Z(x,t))+h^+(Z(x,t)), & \text{para } x>0\\ h^-(Z(x,t)), & \text{para } x<0\end{cases}.$$

Assumindo que u é suave, a série de Taylor de $g+h^+$ e h^- em $z=0$ são iguais. Assim, as séries de Taylor de $h^- - h^+$ e de g em $z=0$ são iguais, mas isso contradiz o fato da série de g divergir. □

O Teorema 5.2.4 mostra que para qualquer sequência de pesos fortemente regular $\mathscr{M}$ o campo L_λ, com $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, não é $(\mathscr{N},\mathscr{M})$-resolúvel, para qualquer sequência de pesos $\mathscr{N}$, com $\mathscr{M}\preceq\mathscr{N}$. Logo, sob as hipóteses da Proposição 5.2.2, podemos concluir que $\mathscr{L}$ não é $(\mathscr{M},\mathscr{M})$-resolúvel, para qualquer sequência de pesos fortemente regular $\mathscr{M}$.

Um número $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ satisfaz a condição Diofantina (CD) se existe $C>0$ tal que

$$|k\lambda+j|\geq C^{j+1},\ \forall j\in\mathbb{Z}_{>0},\ k\in\mathbb{Z}. \tag{CD}$$

Lema 5.2.5. Um número $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ satisfaz (CD) se, e somente se, $\dfrac{1}{\lambda}$ também satisfaz (CD).

Demonstração. Suponha que λ não satisfaça (CD), isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $j_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $k_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$|j_n - k_n\lambda| < \left(\frac{1}{n}\right)^{j_n+1}. \tag{5.21}$$

Segue imediatamente da definição que $-\lambda$ também não satisfaz (CD). Dessa forma, caso o conjunto $\mathscr{I} \doteq \{n \in \mathbb{N};\ k_n > 0\}$ em (5.21) seja finito, podemos substituir λ por $-\lambda$ e considerá-lo infinito. Além disso, podemos supor $|\lambda| \geq 1$. Caso contrário, substituímos λ por $\dfrac{1}{\lambda}$ na demonstração.

Observe que $k_n|\lambda| \leq |k_n\lambda - j_n| + |j_n| < \left(\dfrac{1}{n}\right)^{j_n+1} + j_n \leq 1 + j_n,\ \forall n \in \mathscr{I}$. Logo,

$$\left|k_n - j_n\frac{1}{\lambda}\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{1}{n}\right)^{j_n+1} \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{1}{n}\right)^{k_n|\lambda|},\ \forall n \in \mathscr{I}.$$

Suponha que $\dfrac{1}{\lambda}$ satisfaça a condição (CD). Então, existe $C > 0$ tal que

$$C^{k_n} \leq C^{k_n+1} \leq \left|k_n - j_n\frac{1}{\lambda}\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{1}{n}\right)^{k_n|\lambda|} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{k_n},\ \forall n \in \mathscr{I}.$$

Isso implica que

$$C \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathscr{I}.$$

Tomando n suficientemente grande obtemos um absurdo e, portanto, $\dfrac{1}{\lambda}$ não satisfaz (CD). □

A condição (CD) é uma condição necessária e suficiente para a resolubilidade analítica de L_λ (ver (BERGAMASCO; MEZIANI, 2000)). A proposição abaixo mostra que quando (CD) não é satisfeita o melhor que podemos esperar é solução C^∞.

Proposição 5.2.6. Seja $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ tal que λ não satisfaz (CD). Então existe uma função f real analítica numa vizinhança de Σ satisfazendo (5.6) para a qual a equação $L_\lambda u = f$ não tem soluções em $\mathscr{E}_\mathscr{M}$, para qualquer sequência de pesos $\mathscr{M}$, em qualquer vizinhança de Σ.

Demonstração. Seja $a = \dfrac{1}{\lambda}$ e defina $T_a = aL_\lambda$. Como λ não satisfaz (CD), pelo Lema 5.2.5 a também não satisfaz. Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ existem $j_n, k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tais que

$$|j_n - ak_n| < n^{-(j_n+1)}. \tag{5.22}$$

Disso decorre que

$$\left|\frac{j_n}{k_n} - a\right| < \frac{1}{k_n n^{j_n+1}} < \frac{1}{n} \longrightarrow 0,\ \text{quando } n \longrightarrow \infty,$$

e, portanto, $(j_n/k_n) \longrightarrow a$. Observe que o conjunto $\{j_n/k_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ não pode ser finito, pois neste caso a seria racional, então se $\{j_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ fosse um conjunto finito, teríamos $\{k_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ infinito e $(j_n/k_n) \longrightarrow 0$. Logo, j_n pode ser tomado como uma sequência crescente tal que $j_n \nearrow \infty$. Além disso, como as sequências $\{j_n/k_n\}$ e $\{k_n/j_n\}$ são limitadas, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 j_n < k_n < c_2 j_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.23}$$

Defina a função

$$f(x,t) = \sum_{n \geq 0} x^{j_n} e^{ik_n t}.$$

Observe que f satisfaz a condição (5.6) e é contínua suficientemente perto de $\{0\} \times S^1$. De fato, para cada n, tomando $|x| < 1/2$, temos $|x^{j_n} e^{ik_n t}| = |x^{j_n}| < (1/2)^{j_n}$ e, como $j_n \nearrow \infty$ com $j_n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j_n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Logo, $\sum_{n \geq 0} x^{j_n} e^{ik_n t}$ é uniformemente convergente.

A condição (5.23) garante que f é real analítica. Com efeito, complexificando as variáveis x e t por $\hat{x} = x + ix'$, $\hat{t} = t + it'$, onde $|x'| < \varepsilon$, $|t'| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e estimando a série $\sum_{n \geq 0} \hat{x}^{j_n} e^{ik_n \hat{t}}$ obtemos

$$\left| \sum_{n \geq 0} \hat{x}^{j_n} e^{ik_n \hat{t}} \right| \leq \sum_{n \geq 0} \left| (x + ix')^{j_n} e^{ik_n t} e^{-k_n t'} \right| \leq \sum_{n \geq 0} |2\varepsilon|^{j_n} e^{\varepsilon k_n} \leq \sum_{n \geq 0} |2\varepsilon e^{\varepsilon c_2}|^{j_n}.$$

Tomando $\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{c_2}, \frac{1}{4e}\right\}$ temos que $|2\varepsilon e^{\varepsilon c_2}|^{j_n} < 1/2^{j_n}$ e, novamente, podemos concluir que a convergência da série é uniforme e, como cada termo é uma função holomorfa, a função $f(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{n \geq 0} \hat{x}^{j_n} e^{ik_n \hat{t}}$ é holomorfa.

Seja $\mathscr{M}$ uma sequência de pesos e u uma função C^∞ tal que $T_a u = f$ em uma vizinhança de $\{0\} \times S^1$. Escrevendo

$$u(x,t) = \sum_k \hat{u}_k(x) e^{ikt}$$

temos

$$\sum_k (aik\hat{u}_k - ix\hat{u}_k') e^{ikt} = T_a u = f.$$

Assim,

$$\begin{cases} ak\hat{u}_k - x\hat{u}_k' = 0, & \text{se } k \neq k_n, \\ ak\hat{u}_k - x\hat{u}_k' = -ix^{j_n}, & \text{se } k = k_n. \end{cases}$$

Resolvendo as equações acima usando o fato que $\hat{u}_k \in C^\infty$, obtemos que u é da forma:

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 0} \frac{i}{j_n - ak_n} x^{j_n} e^{ik_n t} + K,\ \text{para alguma constante } K \in \mathbb{C}.$$

Suponha por absurdo que $u \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}$. Pelo decaimento dos coeficientes parciais de Fourier (Teorema 3.3.1), existem constantes $C_R, h_S > 0$ tais que para todo x

$$\frac{|x|^{j_n}}{|j_n - ak_n|} = |\hat{u}(x,k_n)| < C_R \cdot \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+k_n)^p} \right), \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Segue de (5.22) que

$$n^{j_n+1}|x|^{j_n} < C_R \cdot \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+k_n)^p} \right).$$

Assim, para n suficientemente grande

$$\sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+k_n)^p}{m_p \cdot p!} \right) < n(n|x|)^{j_n} \cdot \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+k_n)^p}{m_p \cdot p!} \right) < C_R.$$

Como $j_n \nearrow \infty$ e $c_1 j_n < k_n$, tome $n \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $1 + k_n > \dfrac{1+C_R}{h_S}$. Dessa forma,

$$1 + C_R = h_S \cdot \left(\frac{1+C_R}{h_S} \right) < \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+k_n)^p}{m_p \cdot p!} \right) < C_R.$$

O que é um absurdo e, portanto, u não está em $\mathscr{E}_{\mathscr{M}}$ em qualquer vizinhança de $\{0\} \times S^1$.

$\square$

Portanto, se λ não satisfaz (CD) o campo L_λ não é $(\mathscr{M}, \mathscr{M})$-resolúvel para qualquer sequência de pesos $\mathscr{M}$. Assim, sob as hipóteses da Proposição 5.2.2, a condição (CD) é necessária para a $(\mathscr{M}, \mathscr{M})$-resolubilidade de $\mathscr{L}$, para qualquer sequência de pesos $\mathscr{M}$.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, G.; BERGAMASCO, A. P.; SILVA, P. L. D. da. Gevrey semiglobal solvability for a class of elliptic vector fields with degeneracies. **Mathematische Nachrichten**, in press. Citado nas páginas 18, 75, 76 e 80.

BERGAMASCO, A. P.; MEZIANI, A. Semiglobal solvability of a class of planar vector fields of infinite type. **Mat. Contemp.**, v. 18, p. 31–42, 2000. Citado na página 88.

BIERSTONE, E.; MILMAN, P. D. Resolution of singularities in denjoy-carleman classes. **Selecta Mathematica**, v. 10, n. 1, p. 1–28, 2004. Citado nas páginas 26 e 27.

CORDARO, P. D.; GONG, X. Normalization of complex-valued planar vector fields which degenerate along a real curve. **Advances in Mathematics**, v. 184, n. 1, p. 89–118, 2004. Citado na página 78.

GREENFIELD, S. J.; WALLACH, N. R. Global hypoellipticity and liouville numbers. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 31, n. 1, p. 112–114, 1972. Citado nas páginas 18 e 69.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. **An introduction to the theory of numbers**. [S.l.]: Oxford university press, 1979. Citado nas páginas 70 e 71.

KOMATSU, H. Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces. **J. Math. Soc. Japan**, v. 19, n. 4, p. 366–383, 1967. Citado nas páginas 43 e 46.

____. Ultradistributions i. structure theorems and a characterization. **Journal of the Faculty of Science, the Univerty of Tokyo. Section 1A**, v. 20, p. 25–105, 1973. Citado na página 62.

____. The implicit function theorem for ultradifferentiable mappings. **Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.**, v. 55, n. 3, p. 69–72, 1979. Citado nas páginas 31 e 32.

MEZIANI, A. On planar elliptic structures with infinite type degeneracy. **Journal of Functional Analysis**, v. 179, n. 2, p. 333–373, 2001. Citado na página 78.

RODINO, L. **Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces**. Singapore: World Scientific, 1993. Citado na página 17.

ROUMIEU, C. Sur quelques extensions de la notion de distribution. **Annales scientifiques de l'É.N.S**, v. 77, n. 1, p. 41–121, 1960. Citado na página 63.

RUDIN, W. Division in algebras of infinitely differentiable functions. **Journal of Mathematics and Mechanics**, v. 11, n. 5, p. 797–809, 1962. Citado na página 25.

____. **Real and Complex Analysis: International Student Edition**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1970. Citado nas páginas 18, 32, 33, 34 e 35.

THILLIEZ, V. Division by flat ultradifferentiable functions and sectorial extensions. **Results in Mathematics**, v. 44, p. 169–188, 2003. Citado na página 76.

____. On quasianalytic local rings. **Expositiones Mathematicae**, v. 26, n. 1, p. 1–23, 2008. Citado nas páginas 28, 75 e 76.

____. Estimates for weierstrass division in ultradifferentiable classes. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 440, n. 2, p. 421–436, 2016. Citado na página 76.

VICTOR, B. L. **Hipoeliticidade em classes de funções ultradiferenciáveis no toro**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021. Citado nas páginas 18, 47, 65 e 70.

ICMC USP
SÃO CARLOS