

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Fibração de Milnor para Composição de Germes de Aplicação
Analítica Real**

Iván Darío Santamaría Guarín

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Iván Darío Santamaría Guarín

Fibração de Milnor para Composição de Germes de Aplicação Analítica Real

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos

Coorientador: Prof. Dr. Maico Felipe Silva Ribeiro

USP – São Carlos
Maio de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S232f Santamaría Guarín, Iván Darío
Fibração de Milnor para Composição de Germes de
Aplicação Analítica Real / Iván Darío Santamaría
Guarín; orientador Raimundo Nonato Araújo dos
Santos; coorientador Maico Felipe Silva Ribeiro. --
São Carlos, 2024.
73 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Fibração de Milnor. 2. p-regularidade. 3.
Condição de Milnor (b). 4. Euler característica . 5.
Link. I. Araújo dos Santos, Raimundo Nonato ,
orient. II. Silva Ribeiro, Maico Felipe , coorient.
III. Título.

Iván Darío Santamaría Guarín

The Milnor Fibration for Composition of Real Analytic Map Germs

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos

Co-advisor: Prof. Dr. Maico Felipe Silva Ribeiro

USP – São Carlos

May 2024

Este trabajo está dedicado a mis queridos padres, Celina e Donaldo, por su inagotable amor y apoyo en todos los aspectos de mi vida.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quiero agradecer a toda mi familia, mis padres, Donaldo y Celina; a mis hermanos, Nelson, William y Óscar; a mi cuñada Carolina y mis sobrinos, Juan e Isabella, por todo el apoyo y la fuerza emocional que me dieron a lo largo de estos cuatro años de doctorado. Para mis amigos, Gabriel Esteban, Julian, Giovanny, Eder y Tito, un agradecimiento especial por cada momento que dejaron de hacer sus cosas para escuchar mis preguntas, sus conversaciones me ayudaron bastante para aclarar y encontrar otros puntos de vista.

Para o Professor Dr. Raimundo Nonato, meu mais sincero agradecimento por todo o suporte e apoio ao longo desses quatro anos de doutorado. Quero dar também um agradecimento especial ao Professor Dr. Maico Ribeiro por toda sua contribuição e seu inesgotável apoio, que sempre me ajudaram a refinar meus pensamentos.

Gostaria de expressar meu sincero agradecimento à Professora Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, ao Professor Dr. José Edson Sampaio, ao Professor Dr. Edivaldo Lopes dos Santos, à Professora Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira, à Professora Dra. Alice Kimie Miwa Libardi e ao Professor Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher por terem gentilmente aceitado participar como membros da comissão avaliadora desta tese. Suas valiosas contribuições e sugestões foram fundamentais para melhorar esse trabalho.

Quero expressar um agradecimento especial ao Professor Fernando Reis pelo suporte e apoio constante na primeira fase de meu doutorado. Gostaria de agradecer especialmente ao Professor José Seade por compartilhar seu vasto conhecimento comigo. Ao Professor Aurélio Menegon, meu sincero agradecimento pelo apoio e suporte nesta última fase do meu doutorado. Meu agradecimento ao Professor Leonardo Meireles Câmara, ao Professor Thiago da Silva e ao Professor Renato Fehlberg pelo apoio inestimável durante minha estadia em Espírito Santo.

I want to express my sincere gratitude to Professor Daniel Dreibelbis for generously allowing me the opportunity to collaborate with him.

Expresso minha gratidão a todos os meus colegas e amigos que, de alguma maneira, contribuíram para tornar este trabalho possível.

Agradeço ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC pela experiência e pela oportunidade de fazer parte da minha formação profissional. Expresso minha gratidão à Universidade Federal do Espírito Santo - UFES e a todo o corpo

docente do departamento de Matemática pelo suporte durante minha estadia em 2023.

Finalmente, agradeço ao programa de Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, sob o código financeiro 001 por todo seu apoio financeiro.

RESUMO

SANTAMARÍA GUARÍN, I.D. **Fibração de Milnor para Composição de Germes de Aplicação Analítica Real**. 2024. 73 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte, realizamos uma revisão do conceito de ρ -regularidade, sua conexão com a *condição de Milnor (b)* e a existência da *fibração de Milnor* para germes de aplicação analítica real. Na segunda parte, estudamos a existência da *fibração de Milnor* para a *composição de germes de aplicação analítica real*. Introduzimos uma nova condição de regularidade que caracteriza a *condição de Milnor (b)* para a *composição de germes de aplicação analítica real*. Utilizamos a existência da *fibração de Milnor* da *composição* para explorar diversas aplicações, entre elas, desenvolvemos diversas fórmulas da *característica de Euler* que envolvem as fibras de Milnor, os bordos das fibras de Milnor e os *links* associados à *composição de germes de aplicação analítica real*.

Palavras-chave: ρ -regularidade, *Condição de Milnor (b)*, *Fibração de Milnor*, *Composição de germes de aplicação analítica real*, *Característica de Euler*, *links*.

ABSTRACT

SANTAMARÍA GUARÍN, I.D. **The Milnor Fibration for Composition of Real Analytic Map Germs**. 2024. 73 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

This work is split into two parts. In the first part, we review the concept of ρ -regularity, its connection to the *Milnor condition (b)*, and the existence of the *Milnor fibration* for real analytic map germs. In the second part, we investigate the existence of the Milnor fibration for the *composition of real analytic function germs*. We introduce a new regularity condition that characterizes the Milnor condition (b) for the composition of real analytic map germs. We use the existence of the Milnor fibration of the composition to explore many applications, including several formulas for the *Euler characteristic* involving the Milnor fibers, the boundaries of the Milnor fibers, and the *links* associated with the composition of real analytic map germs.

Keywords: ρ -regularity, Milnor Condition (b), Milnor Fibration, Composition of real analytic map germs, Euler Characteristic, Links.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – $\text{Sing } F$ para uma aplicação que satisfaz a condição de Milnor (b) relativo a ρ	36
Figura 2 – Contraste entre o tubo da aplicação (3.1) e aplicação (3.8) para o germe de aplicação F no Exemplo 3.3.2.	39
Figura 3 – $M(F_a)$ para $F_a(x, y, z) = (xy, yz(ax^2 + y^2 + z^2))$ para $a = 3, 6, 9, 12, 15$. . .	44
Figura 4 – $M(H)$ no Exemplo 4.3.5. Em azul $\text{Sing } H$; em amarelo $\{w = 0, p(x, y, z) = 0\}$	49
Figura 5 – $F(M(H))$ e $M(G)$ no Exemplo 4.3.10. $F(M(H) \setminus \text{Sing } H)$ em azul; $M(G)$ em amarelo e vermelho.	52
Figura 6 – Homeomorfismo entre ∂F_{F_l} e $(\partial F_{F_{l+1}} \times [-1, 1]) \cup (F_{F_{l+1}} \times \{-1, 1\})$	64

LISTA DE SÍMBOLOS

M — Variedade suave.

$\dim M$ — Dimensão da variedade M .

∂M — Bordo de M .

$T_x M$ — Plano tangente a M em x .

$dF(x)$ — Diferencial de F no ponto x .

\pitchfork — Relação de transversalidade.

$\chi(M)$ — Característica de Euler de M .

\simeq — Relação de difeomorfismo.

∇g — Gradiente da função g .

V_F — Conjunto de zeros da aplicação F .

$\text{Sing } F$ — Conjunto singular da aplicação F .

$\text{Disc } F$ — Discriminante da aplicação F .

\overline{B}_ϵ^M — Bola fechada M -dimensional de raio $\epsilon > 0$ centrada na origem em \mathbb{R}^M .

S_η^{N-1} — Esfera $(N-1)$ -dimensional de raio $\eta > 0$ centrada na origem em \mathbb{R}^N .

F_F — Fibra de Milnor associado a aplicação F

ρ — Função analítica, não negativa que define a origem.

ρ_E — Função distância Euclidiana ao quadrado na origem $\|x\|^2$.

$M_\rho(F)$ — Conjunto de Milnor de F relativo a ρ .

$M(F)$ — Conjunto de Milnor relativo a ρ_E .

∂F_F — Bordo da fibra de Milnor associado a aplicação F .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PRELIMINARES	23
2.1	Topologia Diferencial	23
2.1.1	<i>Espaços Fibrados</i>	24
2.1.2	<i>Conjuntos Analíticos e Semianalíticos</i>	25
2.2	Teoria de Singularidade	27
3	REGULARIDADE DE APLICAÇÕES ANALÍTICAS REAIS	29
3.1	ρ -Regularidade	29
3.2	Conjunto de Milnor	32
3.3	Condição de Milnor (b) e ρ -Regularidade	34
4	CONDIÇÃO DE MILNOR (B) E A FIBRAÇÃO DE MILNOR PARA COM- POSIÇÃO DE APLICAÇÕES	41
4.1	Conjunto Singular da Composição de Aplicações	41
4.2	Conjunto de Milnor para Composição de Aplicações	42
4.3	Condição de Milnor (b) para Composição de Aplicações	46
5	TOPOLOGIA PARA A COMPOSIÇÃO DE APLICAÇÕES ANALÍTICAS REAIS	57
5.1	Topologia da Fibra de Milnor para a Composição	57
5.1.1	<i>O caso de Singularidade Isolada</i>	60
5.2	Topologia do Bordo da Fibra de Milnor para Singularidades Ana- líticas Reais	62
5.2.1	<i>As Fórmulas da Característica de Euler</i>	64
5.2.1.1	<i>A Característica de Euler do Link</i>	66
5.2.2	<i>Sobre o Bordo da Fibra de Milnor e o Link para cada $1 \leq I \leq N$</i>	68
	REFERÊNCIAS	71

INTRODUÇÃO

As contribuições notáveis de John Milnor em (MILNOR, 1968) têm sido fonte de inspiração para diversos estudos relacionados à existência local de estruturas fibradas associadas a germes de aplicação analítica real. De fato, desde os trabalhos de Milnor (MILNOR, 1968, Capítulo 11), torna-se evidente que um caminho promissor para demonstrar a existência dessas estruturas fibradas no caso real é utilizar o Teorema de Ehresmann, ou alguma extensão deste Teorema, como por exemplo, o primeiro Teorema de isotopia de Thom-Mather (HAMM, 1971; TRÁNG, 1977; MASSEY, 2010). No entanto, para que isso seja possível, é crucial garantir uma condição adequada de transversalidade entre as fibras do germe de uma aplicação e as curvas de níveis de uma *função própria que define a origem*. Essa condição é conhecida como ρ -regularidade da aplicação. A partir disso, várias técnicas e ferramentas tem sido desenvolvidas a fim de garantir a ρ -regularidade de uma aplicação, entre essas, a *condição de Milnor (b)*.

A primeira parte deste trabalho é dedicada a realizar uma revisão sobre o estudo da ρ -regularidade de um germe de aplicação analítica real, sua conexão com a condição de Milnor (b) e a existência da *fibração de Milnor* associada a este. Demonstraremos que essas duas condições são equivalentes no Teorema 3.3.5 e veremos que a condição de Milnor (b) junto com a hipótese de valor crítico isolado, são condições suficientes para garantir a existência da fibração de Milnor, conforme (MASSEY, 2010, Teorema 4.4, p.13), (SANTOS; RIBEIRO; TIBĂR, 2019, Teorema 6.5, p. 107) e (SANTOS; RIBEIRO; TIBĂR, 2020, Teorema 3.6, p. 949).

Após traçarmos um caminho para assegurar a existência da fibração de Milnor para um germe de aplicação analítica real, a segunda parte deste trabalho está dedicada a abordar dois temas: dados $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$ dois germes de aplicação analítica real, com $M \geq N \geq K \geq 2$, o primeiro tema trata de assegurar a existência da fibração de Milnor para a composição $H := F \circ G$; uma vez que os germes

F , G e H admitam fibração de Milnor, o segundo tema envolve a informação topológica que podemos abstrair dos germes de aplicação F , G e H , fazendo uso da estrutura da fibração de Milnor.

O primeiro tema é explorado no Capítulo 4, cujo objetivo é responder à seguinte pergunta: Quais condições devem ser satisfeitas por F e G para garantir que H satisfaça a condição de Milnor (b) e tenha valor crítico isolado?.

O segundo tema é abordado no Capítulo 5, o qual está dividido em duas partes. A primeira parte é dedicada a estudar a relação entre as fibras de Milnor de F , G e H . Na segunda parte, restringimos nossa atenção ao caso em que G é a projeção canônica $\Pi_I : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^I, 0)$, para algum $1 \leq I < N$, e H é definida como sendo a composição $F_I := \Pi_I \circ F$. Neste cenário, nos dedicamos ao estudo da topologia do bordo da fibra de Milnor de F , denotada por ∂F_F , em relação à topologia do bordo da fibra de Milnor da composição F_I , denotada por ∂F_{F_I} , para $1 \leq I < N$. Em ambas as partes, apresentamos fórmulas que envolvem as características de Euler das correspondentes fibras de Milnor, seus bordos de Milnor, os tubos de Milnor e os links associados a F , G e H , respectivamente.

Antes de entrar nesses dois temas, vamos introduzir no Capítulo 2 e no Capítulo 3 uma série de conceitos e notações que vão nos ajudar a compreender este texto. No Capítulo 2, revisitaremos alguns conceitos fundamentais de topologia diferencial, conjuntos analíticos e teoria clássica de singularidades. No Capítulo 3, introduzimos os conceitos de ρ -regularidade, *conjunto de Milnor relativo a ρ* , e a *condição de Milnor (b) relativa a ρ* , abordando brevemente algumas propriedades desses conceitos. Finalizamos o Capítulo apresentando a relação entre esses três últimos conceitos.

No Capítulo 4, estudamos o conjunto singular, o conjunto de Milnor relativo a ρ e a condição de Milnor (b) relativa a ρ para a composição de germes de aplicação analítica real. Na Seção 4.1, relacionamos o conjunto singular e o discriminante de F , G e H . Na Seção 4.2, exploramos relações importantes entre os conjuntos de Milnor relativos a ρ de F e H . Mostramos que o conjunto de Milnor relativo a ρ é invariante por \mathcal{L} -equivalência e é invariante por \mathcal{R} e \mathcal{A} -equivalência, considerando no espaço de origem o pullback da métrica ρ do espaço de chegada. Na Seção 4.3, abordamos o problema da condição de Milnor (b) para a composição. Demonstramos que, em geral, a condição de Milnor (b) para F e G não é suficiente para garantir a condição de Milnor (b) para H , sob a hipótese menos restritiva $\dim \text{Sing } G > 0$. No entanto, introduzimos uma nova condição de regularidade que caracteriza a condição de Milnor (b) para H no Teorema 4.3.7. Esse estudo também aborda uma condição suficiente que permite determinar quando H admite a condição de Milnor (b), sob a condição de que F e G satisfaçam a condição de Milnor (b), Proposição 4.3.15.

No Capítulo 5, exploramos diversas aplicações em torno da existência da fibração

de Milnor sobre o tubo, para a composição H . Na Seção 5.1, oferecemos na Proposição 5.1.1, uma prova alternativa a uma conjectura estabelecida por Milnor (MILNOR, 1968, p.100) e demonstramos fórmulas que envolvem as características de Euler das fibras de Milnor de F , G e H , e seus respectivos tubos de Milnor. Na Seção 5.2, exploramos a relação da topologia do bordo da fibra de Milnor de uma aplicação F com o bordo da fibra de Milnor da composição F_I . Na Subseção 5.2.1, apresentamos novas fórmulas que envolvem as características de Euler da fibra de Milnor de F , o bordo da fibra de Milnor de F_I e o link de F_I , para cada $1 \leq I \leq N$; e introduzimos a noção de *grau de degeneração sobre o bordo da fibra de Milnor de F* . Por fim, na Subseção 5.2.2, utilizamos essas fórmulas de Euler para obter uma compreensão sobre o comportamento topológico de um germe de aplicação analítica real definido sobre um espaço de dimensão ímpar.

PRELIMINARES

2.1 Topologia Diferencial

Seja M uma variedade suave¹ de dimensão $\dim M = m$. Se M possui bordo, denotamos esse bordo por ∂M . Para um ponto $x \in M$, representamos o *plano tangente de M em x* como $T_x M$. Neste trabalho, consideraremos todas as variedades mergulhadas em algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^K .

Seja N uma variedade suave e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave de M em N . Denotamos a diferencial de F no ponto $x \in M$ por $dF(x) : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$. Chamamos x de um *ponto singular de F* se $\text{rank } dF(x) < \min\{m, n\}$; caso contrário, x é um *ponto regular de F* .

Se $S \subseteq N$ é uma subvariedade suave de N , dizemos que F é *transversal a S* em $x \in M$, denotada por $F \pitchfork_x S$, se $F(x) \notin S$ ou se $F(x) \in S$ e a seguinte condição é satisfeita:

$$T_{F(x)} N = T_{F(x)} S + dF(x)(T_x M).$$

Se F é transversal a S em todos os pontos de M , dizemos que F é *transversal a S* e o denotamos por $F \pitchfork S$.

No caso em que $M, S \subseteq N$ são subvariedades de N , dizemos que M *intersecta transversalmente S* em $x \in M$, denotado por $M \pitchfork_x S$, se o mergulho $i : M \hookrightarrow N$ é transversal a S em x . Quando $x \in M \cap S$, essa condição é equivalente a $T_x N = T_x S + T_x M$.

Adicionalmente, se $G : M \rightarrow K$ é outra aplicação suave de M em uma variedade suave K , dizemos que F e G se *intersectam transversalmente em $x \in M$* , denotado por $F \pitchfork_x G$, se F e G são submersões e $F^{-1}(F(x)) \pitchfork_x G^{-1}(G(x))$.

¹ De classe C^∞ .

Toda variedade compacta M é homotopicamente equivalente a um *CW-Complex* (HATCHER, 2005, Corolário A.12, p. 529). Portanto, para todo $i > m$, o i -ésimo grupo de homologia singular $H_i(M)$ de M é nulo. Assim, a característica de Euler de uma variedade compacta M é dada por

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{rank } H_i(M),$$

Em geral, a característica de Euler de uma variedade suave (não necessariamente compacta) está bem definida e é dada pela soma alternada da dimensão dos grupos de cohomologia de De Rham.

A característica de Euler é um invariante homológico e, portanto, também é uma invariante homotópico.

Corolário 2.1.1. (HATCHER, 2005, Corolário 3.37 p.249) A característica de Euler de uma variedade fechada de dimensão ímpar é zero.

2.1.1 Espaços Fibrados

Um *fibrado suave localmente trivial* é uma quádrupla (E, p, M, F) , onde E, M, F são variedades suaves e $p : E \rightarrow M$ é uma aplicação suave sobrejetora que satisfaz a seguinte condição: para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U de x em M e um difeomorfismo $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, chamado de *trivialização local de E sobre U* , de tal forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

onde π é a projeção canônica. O espaço E é chamado de *espaço total do fibrado*, M o *espaço base*, F a *fibra* do fibrado e p a *projeção*. Se $x \in M$, então a subvariedade $p^{-1}(x)$ é difeomorfa a fibra F e é chamada *fibra de E sobre x* .

Um fibrado de E sobre M que admite uma trivialização local sobre o espaço base inteiro M (uma *trivialização global*), é chamado de *fibrado trivial*. Em particular, quando o espaço base M é contrátil, temos que (E, p, M, F) é um fibrado trivial.

O próximo Teorema, conhecido comumente como o *Teorema de Ehresmann* é um resultado muito importante que permite determinar quando podemos esperar que uma aplicação admita uma fibração localmente trivial. A versão clássica foi enunciada para variedades sem bordo, e o leitor pode consultar uma versão em (BRÖCKER; JÄNICH, 1982, Teorema 8.12, p.84). Aqui, vamos enunciar uma versão com bordo, veja por exemplo (TRÁNG, 2016, Lema 2.2, p.148) e (LAMOTKE, 1981, p. 23).

Teorema 2.1.2 (Teorema de Ehresmann). Seja M uma variedade suave com bordo ∂M e N uma variedade suave conexa. Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e própria. Se ambas as restrições $F|_{M \setminus \partial M} : M \setminus \partial M \rightarrow N$ e $F|_{\partial M} : \partial M \rightarrow N$ forem submersão, então F é a projeção de uma fibração localmente trivial.

O Teorema 2.1.3 a seguir, mostra que a estrutura de fibração estabelece uma conexão direta para determinar informações topológicas da quádrupla (E, p, M, F) . Existem versões mais gerais deste resultado, consulte por exemplo (SPANIER, 1966, Teorema 9.3.1, p. 481). Esse resultado será utilizado ao longo do Capítulo 5 para estabelecer fórmulas que envolvem a característica de Euler associada à fibra de Milnor da composição de germes de aplicação analítica real.

Teorema 2.1.3. Seja $p : E \rightarrow M$ uma fibração suave localmente trivial com fibra F . Assuma que E e M são compactas. Então, $\chi(E) = \chi(F)\chi(M)$.

Demonstração. Dado que M é compacto, podemos escolher uma cobertura finito de abertos $\{U_j\}_{j=1}^n$ de M tais que $M = \bigcup_{j=1}^n U_j$ e $p^{-1}(U_j) \simeq F \times U_j$, para todo $1 \leq j \leq n$. Por outro lado, temos que p é sobrejetora, logo $\{p^{-1}(U_j)\}_{j=1}^n$ é uma cobertura de E . Denote por $U := \bigcup_{j=1}^{n-1} p^{-1}(U_j)$ e $V := p^{-1}(U_n)$. Logo, pela propriedade aditiva da característica de Euler, temos que

$$\chi(E) = \chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Observe que $U \simeq \bigcup_{j=1}^{n-1} F \times U_j = F \times \bigcup_{j=1}^{n-1} U_j$ e $U \cap V \simeq \bigcup_{j=1}^{n-1} F \times U_j \cap U_n = F \times \bigcup_{j=1}^{n-1} (U_j \cap U_n)$. Consequentemente, pela propriedade Multiplicativa da característica de Euler, temos que $\chi(U) = \chi(F)\chi(\bigcup_{j=1}^{n-1} U_j)$, $\chi(V) = \chi(F)\chi(U_n)$ e $\chi(U \cap V) = \chi(F)\chi(\bigcup_{j=1}^{n-1} (U_j \cap U_n))$. Portanto,

$$\chi(E) = \chi(F) \left[\chi(\bigcup_{j=1}^{n-1} U_j) + \chi(U_n) - \chi(\bigcup_{j=1}^{n-1} (U_j \cap U_n)) \right] = \chi(F)\chi(\bigcup_{j=1}^n U_j) = \chi(F)\chi(M).$$

□

2.1.2 Conjuntos Analíticos e Semianalíticos

Sejam U um aberto de \mathbb{R}^M e $k \in \mathbb{N}$. Dadas $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, funções analíticas reais. Definimos o conjunto de zeros de F_1, \dots, F_k como sendo $V(F_1, \dots, F_k) := \{x \in U \mid F_1(x) = \dots = F_k(x) = 0\}$.

Dizemos que um conjunto X em \mathbb{R}^M é um conjunto analítico, se localmente pode ser visto como o conjunto de zeros de um número finito de funções analíticas reais, ou seja, se para cada $x \in X$, existe um aberto U em \mathbb{R}^M contendo o ponto x e funções analíticas F_1, \dots, F_k tais que

$$V(F_1, \dots, F_k) = U \cap X.$$

Similarmente, dizemos que um conjunto X em \mathbb{R}^M é *um conjunto semianalítico* se localmente pode ser visto como

$$V(F_1, \dots, F_k) \cup \{y \in U \mid G_i(y) > 0, 1 \leq i \leq l\} = U \cap X.$$

onde $F_1, \dots, F_k, G_1, \dots, G_l$ são funções analíticas reais.

Todo conjunto semianalítico $X \subseteq \mathbb{R}^M$ admite uma *estratificação semianalítica de Whitney*, a qual é uma decomposição de X em peças mais "simples" chamadas *estratos*. Cada estrato é uma subvariedade analítica² e um conjunto conexo semianalítico de \mathbb{R}^M .

Lembramos que existe uma versão do Teorema de Ehresmann para conjuntos estratificados, conhecida como *Primeiro teorema de isotopia de Thom-Mather* (MATHER, 2012, Proposição 11.1 p. 499).

No que segue, enunciamos o Lema de seleção da curva.

Lema 2.1.4 (Lema seleção da curva). Seja X um conjunto semianalítico em \mathbb{R}^M . Dado $x \in \bar{X}$, existe uma curva analítica real $\alpha : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^M$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in (0, \delta)$.

Os dois seguintes resultados são uma aplicação direta do Lema 2.1.4.

Lema 2.1.5. (DUTERTRE; SANTOS, 2015, Lema 3.1) Sejam $Y \subset \mathbb{R}^M$ um conjunto analítico de dimensão d que contem a origem e $g : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica tal que $g(0) = 0$. Denote por Σ_Y o conjunto singular de Y . Então, em uma vizinhança da origem, o conjunto de pontos críticos de $g|_{Y \setminus \Sigma_Y}$ está contido em $\{g = 0\}$.

Corolário 2.1.6. Seja $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica, onde U é um aberto de \mathbb{R}^M com $0 \in U$ um ponto singular de g . Então g tem singularidade isolada na origem.

Demonstração. Se $0 \in U$ não for uma singularidade isolada de g , então pelo Lema 2.1.4, existe uma curva analítica $\alpha : [0, \delta) \rightarrow U$ tal que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha(t)$ é um ponto singular de g para todo $t \in (0, \delta)$. Derivando a composição $g \circ \alpha : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{dg \circ \alpha(t)}{dt} = \left\langle \nabla g(\alpha(t)), \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\rangle = 0,$$

para todo $t \in (0, \delta)$. Portanto, $g \circ \alpha(t) \equiv 0$ para todo $t \in [0, \delta)$. Consequentemente $\alpha(t) = 0$, o que é uma contradição. \square

² Uma subvariedade suave de \mathbb{R}^M , cujas cartas de transição são aplicações analíticas.

2.2 Teoria de Singularidade

Um germe de um objeto é uma classe de equivalência que, localmente, captura o mesmo tipo de comportamento desse objeto em relação a outros objetos da mesma natureza. Aqui, os objetos que consideramos são subconjuntos de algum espaço topológico ou aplicações definidas sobre algum espaço topológico. A natureza desses objetos pode ser do tipo analítico, contínuo, suave, etc., dependendo do contexto.

Definição 2.2.1. Sejam X e Y dois espaços topológicos. Um germe de aplicação $F : X \rightarrow Y$ em um ponto $x \in X$ é uma classe de equivalência de aplicações da forma $\phi : U \rightarrow Y$ definidas em uma vizinhança U de x em X . Duas aplicações $\phi_1 : U_1 \rightarrow Y$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow Y$ são equivalentes se existir uma vizinhança V de x tal que ϕ_1 e ϕ_2 coincidem em V . Denotamos por $F : (X, x) \rightarrow (Y, F(x))$ o *germe de F em x* .

Ao longo deste trabalho, vamos concentrar nossa atenção em germes de aplicação analítica ou germes de aplicação suave.

Se A e B são dois subconjuntos de um espaço topológico X . Dizemos que A e B definem o mesmo *germe de conjunto em $x \in X$* se as inclusões $A \hookrightarrow X$ e $B \hookrightarrow X$ definem o mesmo germe de aplicação em x . Observe que isto é equivalente a dizer que existe uma vizinhança U de x tal que $A \cap U = B \cap U$. Neste caso, utilizaremos a mesma notação para referirmos a A como germe de conjunto no ponto x e como subconjunto de X , especificando quando o contexto não for evidente.

Dado que estamos considerando todos os nossos objetos mergulhados em algum espaço Euclidiano, após uma mudança de coordenadas, vamos considerar a partir de agora todos os germes de aplicação da forma $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$. Da mesma maneira, vamos considerar todos os germes de conjunto na origem.

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, com $F(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x))$ um representante do germe de aplicação $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$. Definimos os seguintes germes de conjuntos:

- $V_F := V(F_1, \dots, F_N) = F^{-1}(0)$ o *conjunto de zeros de F* ;
- $\text{Sing } F := \{x \in U \mid \text{rank } dF(x) < \min\{M, N\}\}$ o *conjunto singular de F* ;
- $\text{Disc } F := F(\text{Sing } F)$ o *discriminante de F* . No caso em que $\text{Sing } F \subseteq V_F$, dizemos que F tem *valor crítico isolado na origem*.

No que segue, vamos enunciar as ações dos grupos de Mather. Essas ações serão utilizadas na Seção 4.2 para estudar o comportamento do conjunto de Milnor e a condição de Milnor (b) para a composição de germes de aplicação.

Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ dois germes de aplicação suave. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ³, dizemos que:

- (1) F e G são $C^k - \mathcal{L}$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ de classe C^k tal que $F = H \circ G$.
- (2) F e G são $C^k - \mathcal{R}$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^M, 0)$ de classe C^k tal que $F = G \circ H$.
- (3) F e G são $C^k - \mathcal{A}$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismo $H_1 : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $H_2 : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^M, 0)$ de classe C^k tais que $F = H_1 \circ G \circ H_2$.

³ O conjunto \mathbb{N} representa os inteiros positivos.

REGULARIDADE DE APLICAÇÕES ANALÍTICAS REAIS

O estudo da existência local de estruturas fibradas associadas a germes de aplicações analíticas está fundamentado na compreensão do comportamento das fibras desse germe em relação às pequenas esferas. Esse estudo é denominado ρ -regularidade. Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para verificar ou garantir a ρ -regularidade de um germe de aplicação, entre elas a *condição de Milnor (b)*.

Neste capítulo, vamos apresentar a relação entre a ρ -regularidade e a condição de Milnor (b) relativa a uma função ρ , e demonstrar como essas duas condições permitem garantir a existência da estrutura de fibração conhecida como *fibração de Milnor*.

3.1 ρ -Regularidade

Definição 3.1.1. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 2$. Dizemos que F admite uma *fibração de Milnor no tubo* se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a restrição

$$F|_{\overline{B}_\epsilon^M \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\})} \rightarrow B_\eta^N \setminus \{0\} \quad (3.1)$$

na bola fechada \overline{B}_ϵ^M é uma fibração suave localmente trivial, cujo tipo de difeomorfismo não depende da escolha de ϵ e η . Neste caso, chamaremos o domínio da aplicação (3.1) de *tubo de Milnor de F* .

Da mesma forma, dizemos que F admite uma *fibração de Milnor no tubo vazio* se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a restrição da

aplicação

$$F|_{\overline{B}_\epsilon^M \cap F^{-1}(S_\eta^{N-1})} \rightarrow S_\eta^{N-1} \quad (3.2)$$

é uma fibração suave localmente trivial, cujo tipo de difeomorfismo não depende da escolha de ϵ e η . Neste caso, chamaremos o domínio da aplicação (3.2) de *tubo vazio de Milnor de F*.

Em ambos os casos, chamamos a fibra correspondente às restrições (3.1) e (3.2) de *fibra de Milnor de F* e a denotamos por F_F .

Neste trabalho, nos referiremos de forma abreviada às duas fibrações da Definição 3.1.1 simplesmente como *a fibração de Milnor*. Utilizaremos essa abreviação quando for apropriado, exceto quando houver possibilidade de ambiguidade no contexto.

No caso real, podemos afirmar que um teorema sobre a existência da fibração de Milnor para um germe de aplicação analítica real, em geral, se baseia na identificação de propriedades locais do germe de aplicação de tal forma que essas propriedades se encaixem nas hipóteses do Teorema 2.1.2 ou em alguma extensão desse teorema, como o primeiro Teorema ou o segundo Teorema de Isotopia de Thom-Mather. Nesse sentido, é necessário passar por um argumento adequado de transversalidade entre as fibras de F e as pequenas esferas. Veja por exemplo (MILNOR, 1968; MASSEY, 2010; SANTOS; CHEN; TIBĀR, 2013; TRÁNG, 2016) e (SANTOS; RIBEIRO; TIBĀR, 2019).

Permita-nos exemplificar essa situação. Por exemplo, para verificar que a aplicação (3.1) é a projeção de uma fibração localmente trivial usando o Teorema 2.1.2, é necessário garantir as seguintes condições:

- (1) A aplicação (3.1) seja própria;
- (2) A restrição da aplicação (3.1) no interior do tubo de Milnor $B_\epsilon^M \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\})$ seja uma submersão para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, com $0 < \eta \ll \epsilon$;
- (3) A restrição da aplicação (3.1) no bordo do tubo de Milnor $S_\epsilon^{M-1} \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\})$ seja uma submersão para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, com $0 < \eta \ll \epsilon$.

A condição (1) é satisfeita trivialmente; a condição (2) é satisfeita se $\text{Disc } F \subseteq \{0\}$; a condição (3) é satisfeita se pudermos assegurar que as fibras de F próximas à variedade V_F se intersectam transversalmente com as pequenas esferas. Essa última condição é conhecida como a ρ -regularidade de F ¹.

A mesma linha de raciocínio pode ser considerada para a aplicação (3.2). Assim, poderíamos afirmar, de maneira simplificada, que a ρ -regularidade é, essencialmente,

¹ Nesse caso estaremos considerando ρ como a norma Euclidiana $\|x\|^2$.

um tipo de condição local que permite determinar se as fibras de uma aplicação se intersectam de forma transversal sobre o bordo do domínio de definição desta aplicação. No caso das aplicações (3.1) e (3.2), o bordo está determinado pelas curvas de nível da função distância Euclidiana ao quadrado $\|x\|^2$. Assim, a relação de transversalidade entre as fibras da aplicação (3.1) (ou a aplicação (3.2)) e o bordo do domínio depende meramente da forma como as fibras de F se intersectam com as curvas de nível de $\|x\|^2$.

No que segue, vamos introduzir algumas noções e definições para introduzir o conceito de ρ -regularidade, em um sentido mais geral.

Definição 3.1.2. Dado U um conjunto aberto não vazio de \mathbb{R}^M e $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função analítica real não negativa, dizemos que a função ρ define o ponto x em U se $\rho^{-1}(0) = \{x\}$.

Seja U um conjunto aberto de \mathbb{R}^M contendo a origem $0 \in \mathbb{R}^M$. A partir desse momento, vamos considerar $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como sendo uma função própria que define a origem em U . Ainda mais, em virtude do Corolário 2.1.6, assumiremos também que ρ tem uma única singularidade na origem em U .

Um exemplo simples desse tipo de função é a distância Euclidiana ao quadrado, que a partir de agora será denotada como $\rho_E(x) := \|x\|^2$.

Definição 3.1.3. Dada $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U e $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 1$, um germe de aplicação analítica não constante. Dizemos que F é ρ -regular, se existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe um vizinhança N_ϵ de $\rho^{-1}(\epsilon) \cap V_F$ em $\rho^{-1}(\epsilon)$ tal que para todo $x \in N_\epsilon \setminus V_F$, temos que $\rho^{-1}(\epsilon) \pitchfork_x F^{-1}(F(x))$.

Teorema 3.1.4. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 1$, um germe de aplicação analítica não constante com valor crítico isolado na origem. Se F é ρ_E -regular, então F admite uma fibração de Milnor (3.1) e (3.2).

Diversos mecanismos têm sido desenvolvidos para determinar a ρ -regularidade de uma aplicação, incluindo a condição de regularidade a_F -Thom e a condição de Milnor (b). Estas duas condições não são equivalentes. Enquanto a condição a_F -Thom regular é apenas uma condição suficiente para garantir a ρ -regularidade da aplicação (TRÁNG, 1977); a condição de Milnor (b) é equivalente à ρ -regularidade da aplicação, conforme estabelecido no Teorema 3.3.5.

A condição a_F -Thom regular para uma aplicação está fundamentada em demonstrar a existência de uma boa estratificação², comumente chamada de estratificação a_F -Thom. Para funções holomorfas e aplicações analíticas (reais ou complexas) com

² Good stratifications.

singularidade isolada na origem, a condição a_F -Thom regular é satisfeita, garantindo assim a existência da fibração de Milnor. Consulte por exemplo (RIBEIRO; SANTAMARIA; SILVA, 2023, Teorema 3.11 e Teorema 3.13). Existem exemplos de aplicações que não satisfazem a condição a_F -Thom regular e ainda assim admitem uma fibração de Milnor, como mostrado em (SANTOS; CHEN; TIBĂR, 2013, Seção 5.3) e em trabalhos subsequentes, como (PARAMESWARAN; TIBĂR, 2018; RIBEIRO, 2020).

Por outro lado, a condição de Milnor (b), que será discutida na Seção 3.3, é uma condição que "repele" os pontos do conjunto de Milnor que estão fora da variedade V_F . O interesse na condição de Milnor (b) reside no fato de que, além de ser equivalente à ρ -regularidade, é uma condição relativamente mais maleável para ser computada.

3.2 Conjunto de Milnor

Definição 3.2.1. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 1$ um germe de aplicação analítica. Denotamos por

$$M_\rho(F) := \{x \in U \mid \rho \nmid_x F\}$$

o conjunto de pontos em uma vizinhança U da origem onde as fibras de F e as fibras de ρ não se intersectam transversalmente. O conjunto $M_\rho(F)$ é chamado de *conjunto de Milnor de F relativo a ρ* , ou *conjunto de pontos ρ -não regulares de F* , ou *conjunto polar de F relativo a ρ* .

Neste texto, sempre nos referiremos ao conjunto $M_\rho(F)$ como o conjunto de Milnor relativo a ρ . No caso em que ρ é a função distância Euclidiana ao quadrado na origem ρ_E , denotaremos o conjunto de Milnor relativo a ρ_E como $M(F) := M_{\rho_E}(F)$ e nos referiremos a ele simplesmente como *o conjunto de Milnor de F* .

Em seguida, vamos apresentar uma série de resultados que envolvem o conjunto de Milnor relativo a ρ .

Lema 3.2.2. Sejam $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U e $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 1$. Considere $y \in \mathbb{R}^N$ de tal forma que a fibra $F^{-1}(y)$ de F seja não vazia. Se $F^{-1}(y) \setminus \text{Sing } F$ é não vazio, então os pontos críticos da função

$$\rho|_{F^{-1}(y) \setminus \text{Sing } F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{3.3}$$

são precisamente os pontos de $M_\rho(F) \cap (F^{-1}(y) \setminus \text{Sing } F)$.

Demonstração. Um ponto x em $F^{-1}(y) \setminus \text{Sing } F$ é um ponto regular da aplicação (3.3) se, e somente se, existe $v \in T_x F^{-1}(y)$ tal que $\langle \nabla \rho(x), v \rangle \neq 0$. De forma equivalente, $T_x F^{-1}(y) \not\subseteq T_x \rho^{-1}(\rho(x))$, o seja, $T_x F^{-1}(y) \not\cap_x \rho^{-1}(\rho(x))$. Portanto, $x \in (F^{-1}(y) \setminus \text{Sing } F) \setminus M_\rho(F)$. \square

Lema 3.2.3. Sejam $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U e $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 1$. Se $\epsilon > 0$ é um valor regular de ρ tal que $\rho^{-1}(\epsilon) \setminus \text{Sing } F$ não seja vazio, então os pontos críticos da aplicação

$$F|_{\rho^{-1}(\epsilon) \setminus \text{Sing } F} \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (3.4)$$

são exatamente os pontos de $M_\rho(F) \cap (\rho^{-1}(\epsilon) \setminus \text{Sing } F)$.

Demonstração. Dado $x \in \rho^{-1}(\epsilon) \setminus \text{Sing } F$ um ponto regular da aplicação (3.4), então $\dim T_x F|_{\rho^{-1}(\epsilon)}(F(x)) = \dim T_x(\rho^{-1}(\epsilon) \cap F^{-1}(F(x))) = \dim \ker dF|_x(x) = (M-1) - (M-N) = N-1$. Além disso, dado que $x \notin \text{Sing } F$, temos que x também é um ponto regular de F . Logo,

$$\begin{aligned} \dim(T_x \rho^{-1}(\epsilon) + T_x F^{-1}(F(x))) &= \dim T_x \rho^{-1}(\epsilon) + \dim T_x F|_{\rho^{-1}(\epsilon)}(F(x)) - \dim T_x(\rho^{-1}(\epsilon) \cap F^{-1}(F(x))) \\ &= (M-1) + (M-N) - (N-1) \\ &= M. \end{aligned}$$

Portanto, $x \notin M_\rho(F) \cap (\rho^{-1}(\epsilon) \setminus \text{Sing } F)$.

Reciprocamente, se $x \in (\rho^{-1}(\epsilon) \setminus \text{Sing } F) \setminus M_\rho(F)$, raciocinando de forma semelhante, concluímos que x é um ponto regular da aplicação (3.4). \square

A seguinte proposição apresenta um método para calcular o conjunto de Milnor relativo ρ . Veja também (HANSEN, 2014, Proposição 1.4.6, p. 8).

Proposição 3.2.4. Sejam $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U e $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 1$. Então $M_\rho(F) = \text{Sing}(F, \rho)$, onde $(F, \rho) : U \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$. Em particular, $\text{Sing } F \subseteq M_\rho(F)$.

Demonstração. Suponha que $x \notin M_\rho(F)$. Por definição temos F e ρ são submersões no ponto x , e $\rho^{-1}(\rho(x)) \not\cap_x F^{-1}(F(x))$. Observe que $T_x \mathbb{R}^M$ pode ser decomposto nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} T_x \mathbb{R}^M &= T_x \rho^{-1}(\rho(x)) + T_x F^{-1}(F(x)); \\ T_x \mathbb{R}^M &= \langle \nabla F_1(x), \dots, \nabla F_N(x) \rangle \oplus T_x F^{-1}(F(x)); \\ T_x \mathbb{R}^M &= \langle \nabla \rho(x) \rangle \oplus T_x \rho^{-1}(\rho(x)). \end{aligned}$$

A primeira igualdade decorre da transversalidade das fibras $\rho^{-1}(\rho(x))$ e $F^{-1}(F(x))$ no ponto x . As segunda e terceira igualdades resultam do fato de que os espaços gerados

pelos gradientes $\{\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_N(x)\}$ e pelo gradiente $\nabla \rho(x)$ correspondem ao espaços normais dos espaços $T_x F^{-1}(F(x))$ e $T_x \rho^{-1}(\rho(x))$, respectivamente.

Dado que $\dim T_x \rho^{-1}(\rho(x)) = M - 1$, concluímos que $\nabla \rho(x) \in T_x F^{-1}(F(x))$. Portanto $\text{rank } d(F, \rho)(x)$ é maximal.

Reciprocamente, se $\text{rank } d(F, \rho)(x)$ é maximal, temo que F e ρ são submersões no ponto x e $T_x F^{-1}(F(x)) = \ker dF(x) \not\subset \ker \nabla \rho(x) = T_x \rho^{-1}(\rho(x))$, logo $\rho^{-1}(\rho(x)) \not\cap_x F^{-1}(F(x))$. Consequentemente, $x \notin M_\rho(F)$.

□

EXEMPLO 3.2.5. Considere $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ o germe de aplicação analítica definido por $F(x, y, z, w) = (xw, z^2 + y^3)$ e $\rho : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\rho(x, y, z, w) = 3x^2 + y^2 + z^2 + w^4$. Pela Proposição 3.2.4, concluímos que

$$M_\rho(F) = \text{Sing}(F, \rho) = \{y = z = 0\} \cup \{y = 0, 2w^4 - 3x^2 = 0\} \cup \{w = x = 0, 2w^4 - 3x^2 = 0\}.$$

3.3 Condição de Milnor (b) e ρ -Regularidade

A condição de Milnor (b)³, originalmente introduzida por Massey em (MASSEY, 2010), desempenha um papel crucial na existência da fibração de Milnor, veja Teorema 3.3.7. Essa mesma condição foi generalizada e aplicada em contextos mais gerais, com o objetivo de demonstrar a existência de estruturas fibradas que generalizam a fibração de Milnor, como é o caso da *fibrção de Milnor-Hamm* e o caso da *fibrção singular de Milnor* (caso estratificado). Para leitores interessados nessas generalizações, recomendamos consultar as seguintes referências: (SANTOS; RIBEIRO; TIBĂR, 2019; SANTOS; RIBEIRO; TIBĂR, 2020; SILVA, 2018).

Definição 3.3.1. Seja $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U . Dado um germe de aplicação analítica $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, dizemos que F satisfaz a *condição de Milnor (b) na origem relativa a ρ* (ou *condição de Milnor (b) relativa a ρ*) se a seguinte inclusão como germe de conjuntos for atendida:

$$\overline{M_\rho(F) \setminus V_F} \cap V_F \subseteq \{0\}. \quad (3.5)$$

No caso em que ρ seja a função distância Euclidiana ao quadrado na origem ρ_E , diremos simplesmente que F *satisfaz a condição de Milnor (b)*.

Enfatizamos que a condição (3.5) depende diretamente da função ρ . De fato, dado um germe de aplicação analítica real F fixo, ele pode satisfazer a condição de

³ Também conhecida pela expressão em inglês *tame condition*.

Milnor (b) com respeito a uma função ρ_1 e não satisfazer a condição de Milnor (b) com respeito a outra função ρ_2 . Como será mostrado no seguinte exemplo:

EXEMPLO 3.3.2. Seja $F : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ o germe de aplicação analítica definido por $F(x, y, z) = (xy, yz(9x^2 + y^2 + z^2))$. Considere as funções $\rho_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $\rho_E(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $\rho(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + z^2$. Logo,

$$\begin{aligned} V_F &= \{y = 0\} \cup \{x = z = 0\}; \\ M(F) &= M_{\rho_E}(F) = \{y = 0\} \cup \{9x^4 - 8x^2y^2 - 6x^2z^2 - y^4 + z^4 = 0\}; \\ M_\rho(F) &= \{y = 0\} \cup \{9x^2 - y^2 + z^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Inicialmente, observe que F satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a $\rho(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + z^2$ pois $\overline{M_\rho(F)} \setminus \overline{V_F} \cap V_F = \{9x^2 - y^2 + z^2 = 0\} \cap \{y = 0\} = \{0\}$.

Por outro lado, note que $\{3x^2 - z^2 = 0, y = 0\} \subseteq M(F) \cap V_F$. Assim, considere a sequencia de pontos $(x(m, n), \frac{1}{m}, \frac{1}{n})$, com $n, m \in \mathbb{N}$ e $x(m, n)$ definida pela equação

$$x(m, n) := \frac{\frac{2\sqrt{2}}{m} + \sqrt{\frac{8}{m^2} + \frac{12}{n^2}}}{6}.$$

Um cálculo direto mostra que $(x(m, n), \frac{1}{m}, \frac{1}{n}) \in M(F) \setminus V_F$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Ainda mais, temos que $(x(m, n), \frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ converge a $(\frac{1}{\sqrt{3n}}, 0, \frac{1}{n})$ quando $m \rightarrow \infty$. Concluimos que $(\frac{1}{\sqrt{3n}}, 0, \frac{1}{n}) \in \overline{M(F)} \setminus \overline{V_F} \cap V_F$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, F não satisfaz a condição de Milnor (b).

OBSERVAÇÃO 3.3.3. Note que podemos decompor a variedade V_F como a união de duas variedades semi-analíticas disjuntas: $V_F \setminus \text{Sing } F$ e $\text{Sing } F \cap V_F$. Se $V_F \setminus \text{Sing } F$ for não vazia, o Lema 2.1.5 demonstra que, em uma vizinhança suficientemente pequena U da origem, o conjunto singular da função ρ restrita a $V_F \setminus \text{Sing } F$ está contido em $\{0\}$. Consequentemente, pelo Lema 3.2.2 temos que $M_\rho(F) \cap (V_F \setminus \text{Sing } F) = \emptyset$. Assim, temos as seguintes igualdades:

$$\overline{M_\rho(F)} \setminus \overline{V_F} \cap V_F = \overline{M_\rho(F)} \setminus \overline{V_F} \cap (\text{Sing } F \cap V_F) = \overline{M_\rho(F)} \setminus (\overline{\text{Sing } F \cap V_F}) \cap (\text{Sing } F \cap V_F).$$

Veja (CHEN; TIBĂR, 2023; DUTERTRE; SANTOS, 2015) e (LOOIJENGA, 1984).

A seguinte Proposição descreve o comportamento do conjunto singular de uma aplicação F sob a hipóteses da condição de Milnor (b) relativa a ρ . Veja também (SANTOS; CHEN; TIBĂR, 2013, comentários após Teorema 1.3, p. 819).

Proposição 3.3.4. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 1$. Suponha que F satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a uma função $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ própria que define a origem em U . Então, em uma vizinhança da origem $0 \in \mathbb{R}^M$, suficientemente pequena, ocorre alguma das seguintes situações:

- (1) ou F tem valor crítico isolado;
- (2) ou $\text{Sing } F \cap V_F \subseteq \{0\}$;
- (3) ou $V_F \cap \text{Sing } F \neq \emptyset$, $\overline{\text{Sing } F \setminus V_F} \neq \emptyset$ e $(V_F \cap \text{Sing } F) \cap \overline{\text{Sing } F \setminus V_F} \subseteq \{0\}$.

Demonstração. Note que $\text{Sing } F = (V_F \cap \text{Sing } F) \cup \overline{\text{Sing } F \setminus V_F}$. Por outro lado, pela Proposição 3.2.4 temos que $\text{Sing } F \subseteq M_\rho(F)$. Assim, se F satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a ρ , pela observação 3.3.3 concluímos que $(V_F \cap \text{Sing } F) \cap \overline{\text{Sing } F \setminus V_F} \subseteq \{0\}$. Portanto, segue o resultado. \square

Conforme a Proposição 3.3.4, o conjunto singular de uma aplicação que satisfaz a condição de Milnor (b) em relação a ρ pode assumir três possíveis formas. Em qualquer caso, podemos decompor o conjunto singular em dois conjuntos, como ilustrado na Figura 1. A área vermelha destaca $\overline{\text{Sing } F \setminus V_F}$, enquanto a área verde destaca $V_F \cap \text{Sing } F$. Se a área vermelha for vazia, então F é como no item (1). Se a área verde for vazia, então F é descrito como no item (2). Por último, se ambas as áreas não forem vazias, então F é como no item (3).

Note que se uma aplicação F é como no item (2), automaticamente satisfaz a condição de Milnor (b), pela Observação 3.3.3.

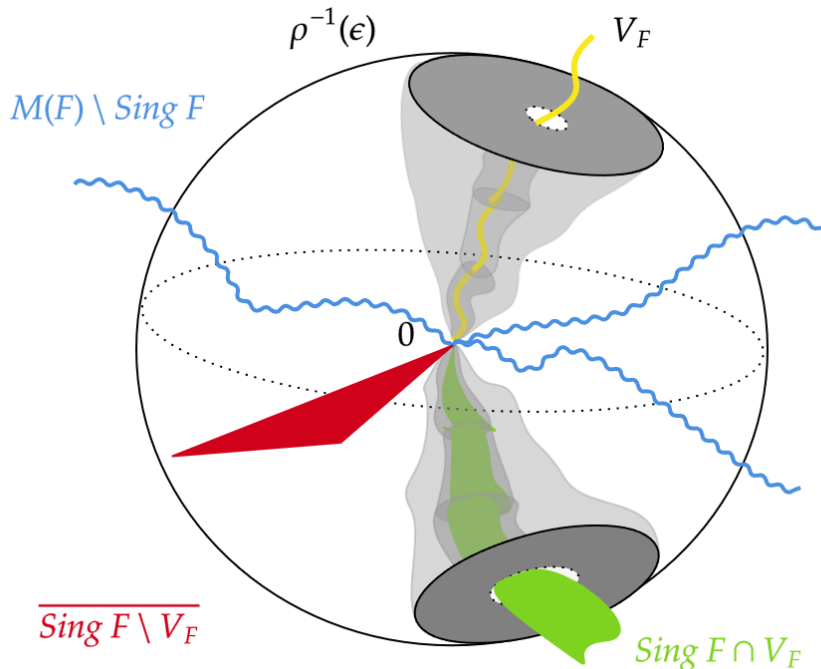


Figura 1 – $\text{Sing } F$ para uma aplicação que satisfaz a condição de Milnor (b) relativo a ρ .

O próximo Teorema mostra que, para um germe de aplicação analítica dado, a condição de Milnor (b) relativa a uma função ρ é equivalente à ρ -regularidade da

aplicação. Veja também (MASSEY, 2010, Lema 4.3, p.13), (SILVA, 2018, Teorema 4.1.4, p.86) e (RIBEIRO; SANTAMARIA; SILVA, 2023, Lema 6.10, p. 23).

Teorema 3.3.5. Sejam $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U e $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 1$. Então, a aplicação F satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a ρ se, e somente se, existe ϵ_0 tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$ tal que a restrição da aplicação

$$F|_1 : \rho^{-1}(\epsilon) \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\}) \rightarrow B_\eta^N \setminus \{0\} \quad (3.6)$$

é uma submersão suave.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.3 concluímos que os pontos críticos da aplicação restrição (3.6) são pontos de $M_\rho(F) \setminus V_F$.

Assim, se F satisfaz a condição de Milnor (b) com respeito a ρ , então existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe uma vizinhança N_ϵ de $\rho^{-1}(\epsilon) \cap V_F$ em $\rho^{-1}(\epsilon)$ tal que $(M_\rho(F) \setminus V_F) \cap (N_\epsilon \setminus V_F) = \emptyset$. O que implica que a aplicação (3.6) é uma submersão, para algum $0 < \eta \ll \epsilon$.

Reciprocamente, se existe $\epsilon_0 > 0$, tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$ tal que a aplicação (3.6) é uma submersão. Então, temos que $N_\epsilon := \rho^{-1}(\epsilon) \cap F^{-1}(B_\eta^N)$ é uma vizinhança de $\rho^{-1}(\epsilon) \cap V_F$ em $\rho^{-1}(\epsilon)$ tal que $(M_\rho(F) \setminus V_F) \cap (N_\epsilon \setminus V_F) = \emptyset$. Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, temos provado a existência de uma vizinhança $T(F)$ de $V_F \setminus \{0\}$, de tal forma que $(T(F) \setminus (V_F \setminus \{0\})) \cap (M_\rho(F) \setminus V_F) = \emptyset$. Portanto, F satisfaz a condição de Milnor (b) com respeito a ρ . \square

Da prova do Teorema 3.3.5, vemos que a condição (3.5) é equivalente à existência de uma vizinhança em torno de $V_F \setminus \{0\}$ onde não existem pontos do conjunto de Milnor relativo a ρ , exceto aqueles que estão contidos na variedade V_F .

Além disso, observe que a aplicação (3.6) é própria. Portanto, pelo Teorema 2.1.2 podemos afirmar que a condição de Milnor (b) relativa a ρ é equivalente a dizer que a aplicação (3.6) é a projeção de uma fibração localmente trivial, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $\eta > 0$ suficientemente pequenos, com $0 < \eta \ll \epsilon$.

Definição 3.3.6. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica, com $M \geq N \geq 2$. Dizemos que F admite uma *fibração de Milnor na tampa do tubo de Milnor* se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a restrição da aplicação

$$F|_1 : S_\epsilon^{M-1} \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\}) \rightarrow B_\eta^N \setminus \{0\} \quad (3.7)$$

é uma fibração suave localmente trivial, cujo tipo de difeomorfismo não depende da escolha de ϵ e η . Neste caso, chamaremos o domínio da aplicação (3.7) a *tampa do tubo*

de Milnor de F e sua corresponde fibra de bordo da fibra de Milnor de F , a qual denotamos por ∂F_F .

O Teorema a seguir, é um resultado clássico sobre a existência da Fibração de Milnor. Existem outras generalizações deste resultado quando $\dim \text{Disc } F > 0$, como é o caso da fibração de Milnor-Hamm e o caso da fibração singular de Milnor. Veja por exemplo (SANTOS; RIBEIRO; TIBĂR, 2019) e (SANTOS; RIBEIRO; TIBĂR, 2020).

Teorema 3.3.7. (MASSEY, 2010, Teorema 4.4, p.13) Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 2$, um germe de aplicação analítica com valor crítico isolado e satisfazendo a condição de Milnor (b). Então F admite uma fibração de Milnor no tubo (3.1).

Corolário 3.3.8. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 2$ um germe de aplicação analítica real com valor crítico isolado e satisfazendo a condição de Milnor (b). Então, F admite uma fibração de Milnor no tubo vazio (3.2).

OBSERVAÇÃO 3.3.9. Dado $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 2$, um germe de aplicação analítica real, podemos considerar também a restrição $F|_1 : \overline{B}_\epsilon^M \cap F^{-1}(\overline{B}_\eta^N \setminus \{0\}) \rightarrow \overline{B}_\eta^N \setminus \{0\}$ e com as mesmas hipóteses do Teorema 3.3.7 provar que é a projeção de uma fibração suave localmente trivial para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $0 < \eta \ll \epsilon$. Com a diferença que, nesse caso o bordo do tubo de Milnor desta restrição está composto pela tampa do tubo de Milnor e o tubo vazio de Milnor. Essa fibração também será chamada de fibração de Milnor.

Finalizamos esse Capítulo propondo uma versão do Teorema 3.3.7 para o caso em que a aplicação satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a uma função ρ .

Proposição 3.3.10. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, com $M \geq N \geq 2$ um germe de aplicação analítica com valor crítico isolado. Suponha que existe $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função própria que define a origem em U tal que F satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a ρ . Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a restrição

$$F|_1 : \rho^{-1}([0, \epsilon]) \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\}) \rightarrow B_\eta^N \setminus \{0\} \quad (3.8)$$

é a projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Demonstração. Dado que F satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a ρ , temos pelo Teorema 3.3.5 que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a restrição da aplicação (3.8) no bordo $\rho^{-1}(\epsilon) \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\})$ é uma submersão. Mais ainda, a restrição da aplicação (3.8) no interior $\rho^{-1}([0, \epsilon]) \cap F^{-1}(B_\eta^N \setminus \{0\})$ também é uma submersão, pois F tem valor crítico isolado e $\rho^{-1}([0, \epsilon])$ é um aberto de \mathbb{R}^M . Por outro lado, dado que ρ é própria, concluímos que aplicação (3.8) também é própria. Logo, pelo Teorema 2.1.2 a aplicação (3.8) é uma fibração suave localmente trivial. \square

No Exemplo 3.3.2, o germe de aplicação analítica F satisfaz as hipóteses da Proposição 3.3.10 quando consideramos a função $\rho(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + z^2$. Portanto, F admite uma fibração do tipo (3.8), mas não admite fibração de Milnor (3.1). Além disso, para esse mesmo caso, podemos contrastar o formato dos tubos das restrições (3.1) e (3.8) na Figura 2.

Na Figura 2, a região à direita, em azul, representa o conjunto $\rho^{-1}([0, \epsilon])$, enquanto à esquerda, a região azul representa $\rho_E^{-1}([0, \epsilon])$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. A área amarela simboliza $F^{-1}(B_\eta^2 \setminus \{0\})$, com $0 < \eta \ll \epsilon$. A interseção entre a região azul e a região amarela representa os tubos correspondentes às restrições (3.1) (à direita na Figura) e (3.8) (à esquerda na Figura). Em marrom, destacamos o conjunto singular de F .

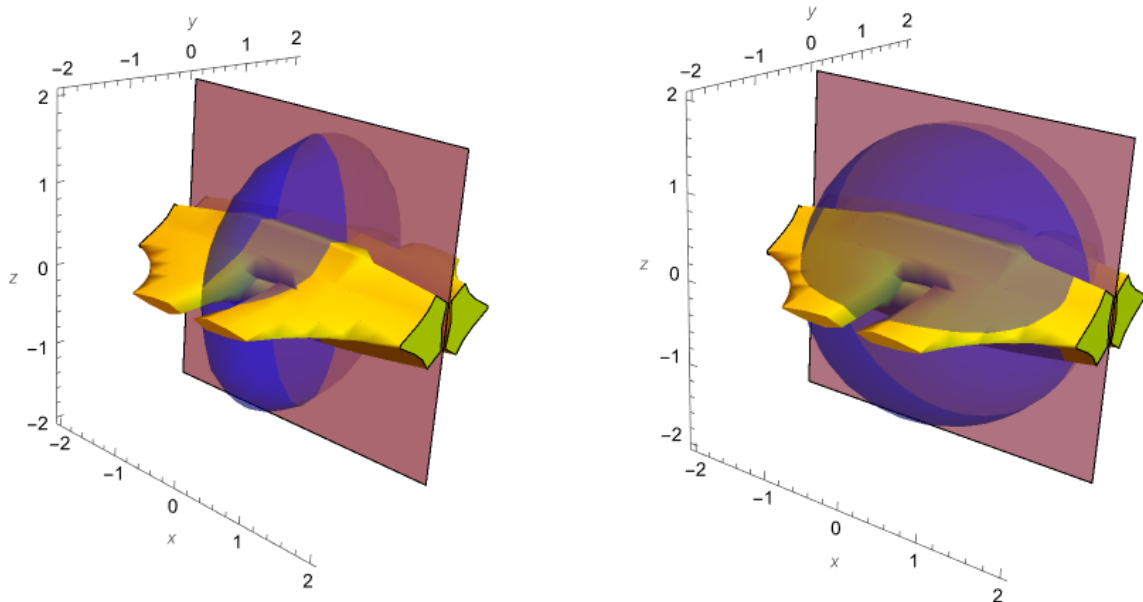


Figura 2 – Contraste entre o tubo da aplicação (3.1) e aplicação (3.8) para o germe de aplicação F no Exemplo 3.3.2.

OBSERVAÇÃO 3.3.11. No caso em que ρ seja a função distância ao quadrado $\rho_E(x) = \|x\|^2$, a fibração (3.8) se reduz a fibração (3.1). Além disso, alertamos ao leitor que a partir da Seção 4.3 focaremos nossa atenção no caso em que a função ρ é a função distância Euclidiana ao quadrado.

CONDIÇÃO DE MILNOR (B) E A FIBRAÇÃO DE MILNOR PARA COMPOSIÇÃO DE APLICAÇÕES

Neste capítulo, abordaremos o problema de determinar as condições sob as quais a composição de dois germes de aplicação analítica real $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$, admite uma fibração de Milnor do tipo (3.1). Para esse propósito, utilizaremos o Teorema 3.3.7 sobre a existência da fibração de Milnor, como ponto de partida. Assim, procuramos identificar condições sobre F e G , que permitam garantir que sua composição $H := G \circ F$ satisfaça a condição de Milnor (b) e tenha valor crítico isolado.

4.1 Conjunto Singular da Composição de Aplicações

Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$ com $M \geq N \geq K \geq 2$, dois germes de aplicação analítica real, e $H : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$ o germe da composição $H = G \circ F$. Consequentemente, temos que $V_H := H^{-1}(0) = F^{-1}(V_G)$ e $dH(x) = dG(F(x)) \cdot dF(x)$, é a matriz Jacobiana de H .

Observe que, se $x \notin \text{Sing } F \cup F^{-1}(\text{Sing } G)$, então temos que $\text{rank } dH(x)$ é maximal. Logo, se segue a seguinte inclusão:

$$\text{Sing } H \subseteq \text{Sing } F \cup F^{-1}(\text{Sing } G). \quad (4.1)$$

Em geral, a inclusão (4.1) pode ser estrita como mostra o seguinte exemplo:

EXEMPLO 4.1.1. Considere $F(x, y, z, w) = (x, y, z(x^2 + y^2 + z^2 + w^2))$, $G(u, v, t) = (u, v)$ e $H(x, y, z, w) = G \circ F(x, y, z, w) = (x, y)$. Portanto, $\text{Sing } G = \emptyset \subset V_G$, $\text{Sing } F = \{0\} \subset \{x = y = z = 0\} = V_F$ e $\text{Sing } H = \emptyset$.

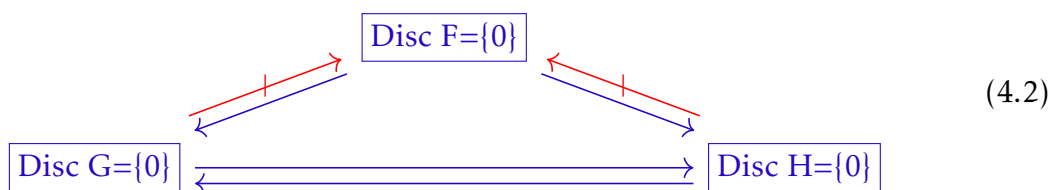
Lema 4.1.2. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicaço analítica real tais que $\text{Disc } F = \{0\}$ e $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$. Ento $\text{Sing } H = F^{-1}(\text{Sing } G)$.

Demonstrao. Segue diretamente da hipotes e da incluso (4.1) que $\text{Sing } H \subseteq F^{-1}(\text{Sing } G)$. Por outro lado, dado $x \in F^{-1}(\text{Sing } G)$, temos que $dG(F(x)) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$ no e sobrejetora, pois $F(x) \in \text{Sing } G$. Em particular, $dG(F(x))$ no e sobrejetora sobre o subespaço $dF(x)(\mathbb{R}^M) \subseteq \mathbb{R}^N$. Consequentemente, $x \in \text{Sing } H$. \square

OBSERVAO 4.1.3. A hipotes $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$ no Lema 4.1.2 no pode ser removivel. De fato, considere $F(x, y, z, w) = (x, y, z(x^2 + y^2 + z^2 + w^2))$ e $G(u, v, t) = (u, t)$. Ento $F^{-1}(\text{Sing } G) = \emptyset$ e $\text{Sing } H = \{0\}$.

Se assumirmos que $\text{Disc } F = \{0\}$ e $\text{Disc } G = \{0\}$, ento a incluso (4.1) garante que $\text{Disc } H = \{0\}$. Por outro lado, sob as hipoteses $\text{Disc } F = \{0\}$, $\text{Disc } H = \{0\}$ e $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$, o Lema 4.1.2 garante que $\text{Disc } G = \{0\}$. No entanto, no e verdade que $\text{Disc } G = \{0\}$ e $\text{Disc } H = \{0\}$ implique que $\text{Disc } F = \{0\}$. Um contraexemplo desse ultimo caso pode ser visto considerando F como um difeomorfismo e G qualquer aplicaço com valor critico isolado.

O diagrama (4.2) ilustra as relaoes entre os discriminantes para as aplicaço F, G e H . Mais explicitamente, seguindo as direcoes das setas, cada duas casas implicam na terceira. As setas na cor vermelha significam que a implicao no e satisfeita. Por exemplo, $\text{Disc } G = \{0\}$ e $\text{Disc } H = \{0\}$ no implicam que $\text{Disc } F = \{0\}$.



4.2 Conjunto de Milnor para Composiço de Aplicaço

Nessa seço, vamos provar uma serie de resultados importantes concernentes ao conjunto de Milnor relativo a ρ para a composiço de aplicaço.

Lema 4.2.1. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicaço analítica real. Ento

$$\text{Sing } H \subset M_\rho(H) \subseteq M_\rho(F) \cup \text{Sing } H. \tag{4.3}$$

Em particular, se $\text{Disc } F = \{0\}$ e $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$ temos que $M_\rho(H) \setminus \text{Sing } H \subseteq M_\rho(F) \setminus V_F$.

Demonstração. Seja $x \in M_\rho(H) \setminus \text{Sing } H$ e considere a matriz

$$A(x) = \begin{bmatrix} dH(x) \\ \nabla\rho(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG(F(x)) \cdot dF(x) \\ \nabla\rho(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla G_1(F(x)) \cdot dF(x) \\ \vdots \\ \nabla G_k(F(x)) \cdot dF(x) \\ \nabla\rho(x) \end{bmatrix}.$$

Dado que $x \in M_\rho(H) \setminus \text{Sing } H$, segue da Proposição 3.2.4 que o $\text{rank}(A(x))$ não é maximal. Por outro lado, como $x \notin \text{Sing } H$, temos que para cada $j = 1, \dots, k$, a linha $\nabla G_j(F(x)) \cdot dF(x)$ é uma combinação linear dos gradientes $\nabla F_i(x)$, com $i = 1, \dots, n$, e coeficientes nas derivadas parciais de G_j . Portanto, $x \in M_\rho(F)$. Além disso, se $\text{Disc } F = \{0\}$ e $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$, então $V_F \subset F^{-1}(\text{Sing } G) = \text{Sing } H$ e $M_\rho(H) \setminus \text{Sing } H \subseteq M_\rho(F) \setminus V_F$. \square

O Lema 4.2.1 nos revela que em geral não podemos esperar que $M_\rho(H) \subseteq M_\rho(F)$. Como exemplo dessa situação, considere $F(x, y, z, w) = (x, y, z)$ e $G(u, v, t) = (u, v(u^2 + v^2 + t^2))$, logo $M(F) = \{w = 0\}$ e $M(H) = \{x = y = z = 0\} \cup \{z = w = 0\}$.

O seguinte resultado é uma consequência direta do Lema 4.2.1.

Proposição 4.2.2. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica. Se G é uma submersão, então

- (1) $M_\rho(H) \subseteq M_\rho(F)$;
- (2) Além disso, se $N = K$, temos $M_\rho(H) = M_\rho(F)$.

Demonstração. O item (1) é uma aplicação direta do Lema 4.2.1.

Para o item (2) é suficiente provar que a inclusão $M_\rho(F) \subset M_\rho(H)$ é verdadeira. Para isso, considere $x \in M_\rho(F)$ e $\lambda(x) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla\rho(x) = \lambda(x) \cdot dF(x)$. Se $N = K$, então G é um difeomorfismo local em uma vizinhança da origem e portanto $dG(F(x)) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um isomorfismo para todo x suficientemente próximo da origem. Logo, existe um único $\beta(x) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\beta(x) \cdot dG(F(x)) = \lambda(x)$. Consequentemente, $\nabla\rho(x) = \beta(x) \cdot dG(F(x)) \cdot dF(x) = \beta(x) \cdot d(G \circ F)(x) = \beta(x) \cdot dH(x)$. Portanto, $x \in M_\rho(H)$ e $M_\rho(H) = M_\rho(F)$. \square

OBSERVAÇÃO 4.2.3. Note que as demonstrações do Lema 4.1.2 e a Proposição 4.2.2 não dependem da estrutura analítica dos conjuntos ou das aplicações envolvidas, mas apenas do fato do conjunto de Milnor de uma aplicação F ser simplesmente o conjunto singular do par (F, ρ) . Com isso podemos enunciar os próximos resultados desta seção de uma forma um pouco mais geral.

Corolário 4.2.4. Sejam $F_1, F_2 : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ dois germes de aplicação analítica real $C^k - \mathcal{L}$ -equivalente para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Então $M_\rho(F_1) = M_\rho(F_2)$. Mais ainda, F_1

satisfaz a condiço de Milnor (b) relativo a ρ se, e somente se, F_2 satisfaz a condiço de Milnor (b) relativo a ρ .

Demonstraço. Por hipótese existe um germe de difeomorfismo $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ de classe C^k tal que $F_1 = G \circ F_2$. Logo, o resultado segue diretamente do item (2) da Proposiço 4.2.2. \square

No corolário anterior vimos que a estrutura topológica do conjunto de Milnor é preservada por \mathcal{L} -equivalência em relaço a uma funço própria que define a origem específica. No entanto, isto não acontece para \mathcal{R} -equivalência e, conseqüentemente, também não acontece para \mathcal{A} -equivalência. Para ilustrar esse fenômeno, vamos considerar como exemplo a família de aplicaço $F_a(x, y, z) = (xy, yz(ax^2 + y^2 + z^2))$, com $a \geq 1$.

Claramente, todas as aplicaço dessa família são \mathcal{A} -equivalentes. Mais ainda, na Figura 3, da esquerda para a direita, podemos observar o conjunto de Milnor $M(F_a)$ para os casos em que $a = 3, 6, 9, 12, 15$. Notamos como $M(F_a)$ passa da uniço de um plano (Sing F_a) e um cone quando $a < 6$, para a uniço de um plano e um cone duplo quando $a > 9$. Como conseqüência, não podemos esperar que a condiço de Milnor (b) relativa a uma funço ρ fixa seja preservada por \mathcal{R} -equivalência ou \mathcal{A} -equivalência. No entanto, a seguinte proposiço afirma que as aplicaço desta família vão satisfazer a condiço de Milnor (b) com respeito alguma outra funço, própria que define a origem.

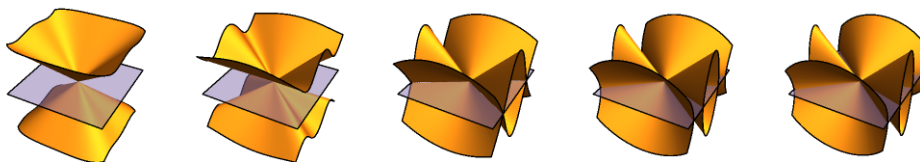


Figura 3 – $M(F_a)$ para $F_a(x, y, z) = (xy, yz(ax^2 + y^2 + z^2))$ para $a = 3, 6, 9, 12, 15$.

Proposiço 4.2.5. Sejam $G_1, G_2 : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ dois germes de aplicaço analítica real que são C^k – \mathcal{A} -equivalentes para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se G_1 satisfaz a condiço de Milnor (b) relativo a uma funço própria ρ_1 que define a origem, então existe uma funço ρ_2 de classe C^k , própria e com singularidade isolada na origem, tal que G_2 satisfaz a condiço de Milnor (b) relativo a ρ_2 .

Demonstraço. Pelo Corolário 4.2.4 é suficiente provar o resultado para \mathcal{R} -equivalência. Portanto, assuma que existe um germe de difeomorfismo $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^M, 0)$ de classe C^k tal que $G_1 \circ F = G_2$. Defina $\rho_2 = \rho_1 \circ F$. Dado que ρ_1 é uma funço própria que define a origem e F é um difeomorfismo de classe C^k que fixa a origem, temos que ρ_2 é uma funço de classe C^k , própria e com singularidade isolada na origem.

Por outro lado, dado que $\rho_2 = \rho_1 \circ F$, temos $\nabla \rho_2 = \nabla \rho_1(F(x)) \cdot dF(x)$. Assim, obtemos que $M_{\rho_2}(G_2) = \text{Sing}(G_2, \rho_2) = F^{-1}(\text{Sing}(G_1, \rho_1)) = F^{-1}(M_{\rho_1}(G_1))$. Mais ainda, temos que $V_{G_2} = F^{-1}(V_{G_1})$. Consequentemente,

$$\overline{M_{\rho_2}(G_2) \setminus V_{G_2}} \cap V_{G_2} = F^{-1}(\overline{M_{\rho_1}(G_1) \setminus V_{G_1}} \cap V_{G_1})$$

e portanto a condição de Milnor (b) de G_1 relativa a ρ_1 implica na condição de Milnor (b) de G_2 relativa a ρ_2 . \square

EXEMPLO 4.2.6. Sejam $F_1 : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e $F_2 : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dois germes de aplicação analítica dados por $F_1(x, y, z) = (xy, yz(x^2 + y^2 + z^2))$ e $F_2(x, y, z) = (xy, yz(9x^2 + y^2 + z^2))$, respetivamente. Logo temos que $G_2 \circ F_1 \circ G_1 = F_2$, onde $G_1(x, y, z) = (3x, y, z)$ e $G_2(u, v) = (\frac{u}{3}, v)$. Por outro lado, um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} V_{F_1} &= \{y = 0\} \cup \{x = z = 0\}; \\ \text{Sing}(F_1) &= \{y = 0\}; \\ M(F_1) &= \{y = 0\} \cup \{x^2 - y^2 + z^2 = 0\} \cup \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Nesse caso, temos que F_1 satisfaz a condição de Milnor (b) e do Exemplo 3.3.2, sabemos que F_2 não satisfaz a condição de Milnor (b). Segundo a Proposição 4.2.5, concluímos que F_2 satisfaz a condição de Milnor (b) com respeito a $\rho_E \circ G_1(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + z^2$. Compare com o Exemplo 3.3.2.

OBSERVAÇÃO 4.2.7. Recapitulando:

- (1) A condição de Milnor (b) relativa a uma função própria que define a origem ρ específica é \mathcal{L} -invariante (Corolário 4.2.4).
- (2) A condição de Milnor (b) relativa a alguma função própria que define a origem ρ é \mathcal{A} -invariante (Proposição 4.2.5).

O seguinte resultado pode ser provado por uma simples adaptação da demonstração da Proposição 4.2.5.

Corolário 4.2.8. Seja $G : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de aplicação analítica real e $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^M, 0)$ um germe de um difeomorfismo de classe C^k para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se G satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a ρ , então o germe do pullback F^*G também satisfaz a condição de Milnor (b) relativa ao pullback $F^*\rho$.

4.3 Condição de Milnor (b) para Composição de Aplicações

Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica e denote por $H = G \circ F$ a composição de F e G .

Nosso objetivo é determinar sob quais condições a composição H admite uma fibração de Milnor no tubo, por uma questão puramente didática, vamos concentrar nossa atenção no caso em que a função ρ é a função distância Euclidiana ao quadrado ρ_E . Enfatizamos que todos os resultados nessa seção são válidos para qualquer função $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ própria que define a origem.

Até o momento, observamos que se tanto F quanto G têm valor crítico isolado, então H também terá valor crítico isolado. Para estabelecer uma fibração de Milnor no tubo para H , precisamos responder à seguinte pergunta natural:

PERGUNTA 4.3.1. Quais condições sob F e G asseguram que a composição $H = G \circ F$ satisfaça a condição de Milnor (b)?

Na literatura, podemos encontrar algumas respostas parciais para a Pergunta 4.3.1.

Em (CHEN; TIBĂR, 2023, Teorema 3.2), os autores provaram que H satisfaz a condição de Milnor (b), desde que F tenha valor crítico isolado e satisfaça a condição de Milnor (b) e G tenha singularidade isolada na origem, i.e., $\text{Sing } G = \{0\}$.

Por outro lado, encontramos o caso particular em que G é a projeção canônica $\Pi_K : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$ e F possui singularidade isolada na origem. Nesse caso, Y. Iomdin, (IOMDIN, 1973), faz uso da estrutura de fibração induzida pela aplicação $\Pi_K \circ F$ para resolver uma conjectura estabelecida por John Milnor (MILNOR, 1968, p.100). Cabe mencionar que esse mesmo caso foi abordado de forma independente em (SANTOS; DREIBELBIS; DUTERTRE, 2012), no qual os autores utilizaram técnicas e abordagens completamente distintas das apresentadas por Iomdin, obtendo fórmulas para a característica de Euler da fibra de Milnor de F .

O caso em que F tem valor crítico isolado, e satisfaz a condição de Milnor (b) e G é a projeção canônica $\Pi_{N-1} : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{N-1}, 0)$, foi tratado em (DUTERTRE; SANTOS, 2015), onde os autores concluíram também que a composição $\Pi_{N-1} \circ F$ satisfaz a condição de Milnor (b).

A mesma conclusão pode ser obtida com as mesmas hipóteses sob F e G sendo qualquer submersão.

Proposição 4.3.2. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica real. Assuma que F tem valor crítico isolado e satisfaz a

condição de Milnor (b), e G é uma submersão, então a composição $H = G \circ F$ satisfaz a condição de Milnor (b).

Demonstração. A prova decorre da seguinte sequência de inclusões:

$$\overline{M(H) \setminus V_H} \cap V_H \subseteq \overline{M(H) \setminus V_H} \cap \text{Sing } H \subseteq \overline{M(F) \setminus V_F} \cap \text{Sing } F \subseteq \overline{M(F) \setminus V_F} \cap V_F \subseteq \{0\}.$$

A primeira destas inclusões decorre da Observação 3.3.3; a segunda segue do item (i) da Proposição 4.2.2 e a condição (4.1); a terceira e quarta são consequências das hipóteses sobre F . Portanto, concluímos que H satisfaz a condição de Milnor (b). □

Corolário 4.3.3. (DUTERTRE; SANTOS, 2015, Lema 4.1) Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 3$ um germe de aplicação analítica real não constante tal que F satisfaz a condição de Milnor (b) e $\text{Disc } F = \{0\}$. Se $\Pi : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{N-1}, 0)$ é a projeção canônica, então a composição $\Pi \circ F$ satisfaz a condição de Milnor (b) e $\text{Disc } (\Pi \circ F) \subseteq \{0\}$. Portanto, existe a fibração de Milnor para F e $\Pi \circ F$.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 4.3.2 □

O Exemplo 4.3.4 a seguir, mostra que a hipótese $\text{Disc } F = \{0\}$ na proposição 4.3.2 é necessária. Além disso, podemos afirmar que não é suficiente que as aplicações F e G satisfaçam apenas a condição de Milnor (b) para garantir que sua composição H também satisfaça a condição de Milnor (b).

EXEMPLO 4.3.4. Seja $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ o germe de aplicação analítica real definido por $F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, w(x^2 + y^2), z^2 + w^2)$. Considere a projeção $\Pi(u, v, t) = (u, v)$. Logo, $H := \Pi \circ F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, (x^2 + y^2)w)$;

$$\begin{aligned} V_F &= \{0\}; & \text{Sing } F &= \{x = y = 0\} \cup \{z = 0\}; & M(F) &= \mathbb{R}^3; \\ V_H &= \{x = y = 0\}; & \text{Sing } H &= \{x = y = 0\}; & M(H) &= \{x = y = 0\} \cup \{z = 0\}. \end{aligned}$$

Claramente, F satisfaz a condição de Milnor (b) mas não tem valor crítico isolado. Mais ainda, H não satisfaz a condição de Milnor (b).

Pelo que vimos acima, sob a hipóteses $\text{Disc } F = \{0\}$ e Milnor (b) para F , a pergunta 4.3.1, foi respondida para o caso onde $\text{Sing } G \subseteq \{0\}$.

Finalmente, se considerarmos o caso em que a dimensão do conjunto singular de G é positiva, em geral, não é verdade que sua composição H satisfaz a condição de Milnor (b), mesmo que F e G atendam às condições de valor crítico isolado e Milnor (b), como será demonstrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4.3.5. Sejam $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dois germes de aplicação analítica real, tais que $F(x, y, z, w) = (x, y, z(x^2 + y^2 + z^4))$ e $G(u, v, t) = (uv, vt)$. Consequentemente $H(x, y, z, w) = (xy, yz(x^2 + y^2 + z^4))$. Um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} V_F &= \{x = y = z = 0\}; & M(F) &= \{w = 0\} \cup \{x = y = z = 0\}; \\ V_G &= \{v = 0\} \cup \{t = u = 0\}; & M(G) &= \{v = 0\} \cup \{v^2 = t^2 + u^2\}; \\ V_H &= \{y = 0\} \cup \{z = x = 0\}; & M(H) &= \{y = 0\} \cup \{w = 0, p(x, y, z) = 0\}; \\ \text{Sing } F &= \{x = y = z = 0\}; \\ \text{Sing } G &= \{v = 0\}; \\ \text{Sing } H &= \{y = 0\}. \end{aligned}$$

$$\text{Onde } p(x, y, z) = x^4 + 5x^2z^4 - x^2z^2 - y^4 - 5y^2z^4 + 3y^2z^2 + z^6.$$

Logo, temos que F, G e H têm valor crítico isolado, e F e G satisfazem a condição de Milnor (b).

Vamos provar que H não satisfaz a condição de Milnor (b).

Para começar, denote por $b(y, z) := z^2(5z^2 - 1)$ e $c(y, z) := -y^4 + (3 - 5z^2)z^2y^2 + z^6$, logo

$$p(x, y, z) = x^4 + b(y, z)x^2 + c(y, z) = 0.$$

Desta forma, podemos ver $p(x, y, z)$ como um polinômio na variável x^2 com coeficientes 1, $b(y, z)$ e $c(y, z)$. Logo, o discriminante de $p(x, y, z)$ está dado por

$$\begin{aligned} b(y, z)^2 - 4c(y, z) &= z^4(5z^2 - 1)^2 - 4[-y^4 + (3 - 5z^2)z^2y^2 + z^6] \\ &= z^4[(5z^2 - 1)^2 - 4z^2] + 4y^2[y^2 - (3 - 5z^2)z^2]. \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que $(5z^2 - 1)^2 - 4z^2 = (5z^2 - 2z - 1)(5z^2 + 2z - 1) = 25(z - \frac{1+\sqrt{6}}{5})(z - \frac{1-\sqrt{6}}{5})(z - \frac{-1+\sqrt{6}}{5})(z + \frac{1+\sqrt{6}}{5}) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$, $\frac{1-\sqrt{6}}{5} \leq z \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$. Em particular, concluímos que $b(y, z)^2 - 4c(y, z) \geq 0$, para todo $(y, z) \in U$, onde U é a região em \mathbb{R}^2 definida por

$$U = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (3 - 5z^2)z^2 \leq y^2, 0 \leq z \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{5}, 0 < y \right\}.$$

Por outro lado, dado que $b(y, z) \leq 0$, para todo $z \in \mathbb{R}$, com $|z| \leq \sqrt{\frac{1}{5}}$, concluímos que o ramo

$$x(y, z) = \sqrt{\frac{-b(y, z) + \sqrt{b(y, z)^2 - 4c(y, z)}}{2}}$$

está bem definido para todo $(y, z) \in U$.

Por construção, o ramo $\phi(y, z) := (x(y, z), y, z, 0) \subset M(H) \setminus \text{Sing } H$ para todo $(y, z) \in U$. Portanto, $\phi(0, z) \in \overline{M(H) \setminus \text{Sing } H} \cap \text{Sing } H$, para todo $z \in \mathbb{R}$, $0 \leq z \leq \frac{-1 + \sqrt{6}}{5}$. Assim, concluímos que H não satisfaz a condição de Milnor (b). Veja a Figura 4 para uma ilustração de $M(H)$.

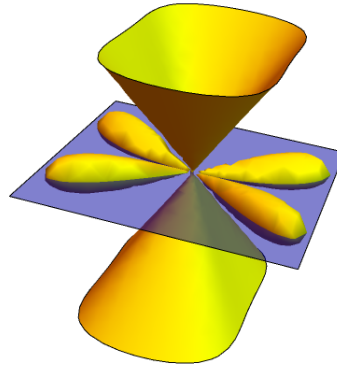


Figura 4 – $M(H)$ no Exemplo 4.3.5. Em azul $\text{Sing } H$; em amarelo $\{w = 0, p(x, y, z) = 0\}$.

OBSERVAÇÃO 4.3.6. Enfatizamos que, a aplicação H no Exemplo 4.3.5 satisfaz a condição de Milnor (b) relativa a outra função própria que define a origem ρ , como por exemplo, $\rho(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^4 + w^2$, pois nesse caso, temos que $M_\rho(H) = \{y = 0\} \cup \{w = 0, x^2 - y^2 + 2z^4 = 0\}$.

Embora as condições de valor crítico isolado e Milnor (b) para F e G não sejam suficientes para garantir que sua composição H satisfaça a condição de Milnor (b), o Teorema a seguir nos fornece uma nova condição, especificamente a condição (4.4), que caracteriza a condição de Milnor (b) para a composição H . Portanto, podemos fornecer uma resposta concreta à Pergunta 4.3.1.

Teorema 4.3.7. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$, dois germes de aplicação analítica real. Assuma que $\text{Disc } F = \{0\}$ e F satisfaz a condição de Milnor (b). Então, a composição $H = G \circ F$ satisfaz a condição de Milnor (b) se, e somente se, a condição

$$\overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } H)} \cap \text{Sing } G \subseteq \{0\}. \quad (4.4)$$

é satisfeita como germe de conjunto.

Antes de apresentar a prova do Teorema 4.3.7, precisamos pontuar algumas considerações:

OBSERVAÇÕES 4.3.8.

- (1) Dado que F satisfaz a condição de Milnor (b) e $\text{Disc } F = \{0\}$, temos que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação (3.1) é uma submersão e, portanto, é uma aplicação aberta. Logo, a imagem da aplicação F contém um aberto da origem e está bem definida como um germe de conjunto. Portanto, $F(\overline{M(H)} \setminus \text{Sing } H)$ está bem definido como um germe de conjunto. Além disso, a aplicação (3.1) também é própria e está definida sobre um espaço de Hausdorff, logo é fechada. Assim, se assumirmos que $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$, concluímos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a seguinte sequência de igualdades como germes de conjuntos é satisfeita:

$$F(\overline{M(H)} \setminus \text{Sing } H) = \overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } H)} = \overline{F(M(H))} \setminus \text{Sing } G. \quad (4.5)$$

As aplicações que satisfazem a condição de Milnor (b), fazem parte de uma classe de aplicações conhecidas como *nice maps germs* (CHEN; TIBĂR, 2023, Teorema 2.9, p.13).

- (2) Observar que, quando G é um germe de submersão, o Teorema 4.3.7 é automaticamente verdadeiro. Deixamos os detalhes para o leitor.

Demonstração Teorema 4.3.7. Em virtude do item (2) das Observações 4.3.8, podemos assumir que $\{0\} \subseteq \text{Sing } G$.

Inicialmente assuma que H satisfaz a condição de Milnor (b). Vamos provar que a condição (4.4) é satisfeita.

Seja (y_n) uma sequência em $\overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } H)} \cap \text{Sing } G$ tal que $y_n \rightarrow 0$. Do item (1) das Observações 4.3.8 e a primeira equação em (4.5), segue que existe um sequência $(x_n) \subset \overline{M(H)} \setminus \text{Sing } H$ tal que $F(x_n) = y_n$.

Dado que $(y_n) \subseteq \text{Sing } G$, segue pelo Lema 4.1.2 que $(x_n) \subset \overline{M(H)} \setminus \text{Sing } H \cap \text{Sing } H$. Por outro lado, temos que H satisfaz a condição de Milnor (b), logo deve existir $n_0 > 0$ suficientemente grande tal que para todo $n \geq n_0$, temos que $x_n = 0$. Portanto, $y_n = F(x_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$ e conseqüentemente a condição (4.4) é válida.

Agora, vamos provar a implicação contrária. Assuma que a condição (4.4) é válida.

Seja (x_n) uma sequência em $\overline{M(H)} \setminus \text{Sing } H \cap \text{Sing } H$ tal que $x_n \rightarrow 0$. Logo, a sequência $(F(x_n))$ está contida em $\overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } H)} \cap \text{Sing } G$. Aplicando a condição (4.4) temos que existe $n_0 > 0$ suficientemente grande tal que para todo $n \geq n_0$, $F(x_n) = 0$. Logo $x_n \in V_F$.

Concluímos que $(x_n) \subseteq \overline{M(H)} \setminus \text{Sing } H \cap V_F \subseteq \overline{M(F)} \setminus V_F \cap V_F \subseteq \{0\}$, onde a primeira inclusão segue do Lema 4.2.1 e a segunda inclusão segue da condição de Milnor

(b) para F . Portanto, para n suficientemente grande, temos que $x_n = 0$. Logo H satisfaz a condição de Milnor (b). □

Corolário 4.3.9. (CHEN; TIBĂR, 2023, Teorema 3.2) Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica real tais que $\text{Disc } F = \{0\}$, F satisfaz as condições de Milnor (b) e G tem singularidade isolada na origem. Então $H = G \circ F$ satisfaz a condição de Milnor (b) e admite fibração de Milnor (3.1).

Demonstração. Dado que $\text{Sing } G \subseteq \{0\}$, a condição (4.4) é trivialmente satisfeita. Logo, pelo Teorema 4.3.7 concluímos que H satisfaz a condição de Milnor (b). □

A seguir, apresentamos um exemplo onde $\dim \text{Sing } G > 0$ e as hipóteses do Teorema 4.3.7 são cumpridas.

EXEMPLO 4.3.10. Considere os germes de aplicação $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados por $F(x, y, z, w) = (x, y, z(x^2 + y^2 + z^2 + w^2))$ e $G(u, v, t) = (ut, vt)$. Logo temos que $H(x, y, z, w) = (xz(x^2 + y^2 + z^2 + w^2), yz(x^2 + y^2 + z^2 + w^2))$;

$$\begin{aligned} V_F &= \{x = y = z = 0\}; & M(F) &= \{w = 0\}; \\ V_G &= \{t = 0\}; & M(G) &= \{t = 0\} \cup \{t^2 = u^2 + v^2\}; \\ V_H &= \{z = 0\} \cup \{x = y = 0\}; & M(H) &= \{z = 0\} \cup \{w = 0, z^2 = x^2 + y^2\}; \\ \text{Sing } F &= \{0\}; \\ \text{Sing } G &= \{t = 0\}; \\ \text{Sing } H &= \{z = 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que F, G e H tem valor crítico isolado, e F e G satisfazem a condição de Milnor (b). Mais ainda, $\overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } H)} = \{t^2 = 4(u^2 + v^2)^3\}$ e portanto, temos que

$$\overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } H)} \cap \text{Sing } G \subseteq \{0\}.$$

Pelo teorema 4.3.7 concluímos que H satisfaz a condição de Milnor (b). Veja Figura 5.

A seguir, serão apresentados uma série de exemplos que descrevem as diferentes possibilidades que podem acontecer quando a condição de Milnor (b) é satisfeita por algum dos germes de aplicação F, G ou H . Especial menção damos no Exemplo 4.3.11 que, junto com Exemplo 4.3.4, demonstram a necessidade das condições $\text{Disc } F = \{0\}$ e Milnor (b) para F no Teorema 4.3.7, tornando a condição (4.4) *sharp*, ou seja, a melhor possível. Além disso, os Exemplos 4.3.12, 4.3.13 e 4.3.14 provam que H pode satisfazer a condição de Milnor (b), mesmo que F e/ou G não a satisfaçam.

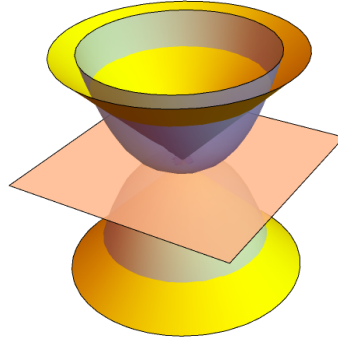


Figura 5 – $F(M(H))$ e $M(G)$ no Exemplo 4.3.10. $F(M(H) \setminus \text{Sing } H)$ em azul; $M(G)$ em amarelo e vermelho.

EXEMPLO 4.3.11. Sejam $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ germes de aplicação analítica dados por $F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, z(x^2 + y^2), w(x^2 + y^2))$ e $G(u, v, t) = (u(u^2 + v^2 + t^2), v)$. Consequentemente $H = ((x^2 + y^2)^3(w^2 + z^2 + 1), z(x^2 + y^2))$;

$$V_F = \{x = y = 0\}; \quad \text{Sing } F = \{x = y = 0\};$$

$$V_G = \{u = v = 0\}; \quad \text{Sing } G = \{u = v = t = 0\};$$

$$V_H = \{x = y = 0\}; \quad \text{Sing } H = \{x = y = 0\}.$$

Nesse caso, observamos que as fibras $F^{-1}(-\delta, 0, 0)$ são vazias para qualquer $\delta > 0$, portanto não existe o tubo de Milnor para F e, conseqüentemente, F não satisfaz a condição de Milnor (b). O mesmo argumento prova que H não satisfaz a condição de Milnor (b). Por outro lado, temos que a condição (4.4) é satisfeita.

EXEMPLO 4.3.12. Considere os seguintes germes de aplicação $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, $F(x, y, z, w) = (\frac{1}{3}xw, yw, zw)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $G(u, v, t) = (ut, vt(9u^2 + v^2 + t^2))$. Nesse caso temos que $H(x, y, z, w) = (\frac{1}{3}w^2xz, w^4yz(x^2 + y^2 + z^2))$. Novamente, é possível mostrar através de um cálculo direto que

$$V_F = \{w = 0\};$$

$$M(F) = \{w = 0\} \cup \{w^2 = x^2 + y^2 + z^2\};$$

$$V_G = \{t = 0\} \cup \{u = v = 0\};$$

$$M(G) = \{t = 0\} \cup \{t^4 + 8t^2u^2 - 9u^4 + 6u^2v^2 - v^4 = 0\};$$

$$V_H = \{x = y = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{w = 0\}; \quad M(H) = \{z = 0\} \cup \{w = 0\} \cup \{z^2 = x^2 + y^2, w^2 = 2z^2\};$$

$$\text{Sing } F = \{w = 0\};$$

$$\text{Sing } G = \{t = 0\};$$

$$\text{Sing } H = \{z = 0\} \cup \{w = 0\}.$$

Portanto, temos que F, G e H têm valor crítico isolado, F, H satisfazem a condição de Milnor (b) e G não satisfaz a condição de Milnor (b) pois $\overline{M(G)} \setminus \text{Sing } G \cap \text{Sing } G = \{t = 0, v^2 = 3u^2\}$.

EXEMPLO 4.3.13. Sejam $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dois germes de aplicação analítica definido por $F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, z(x^2 + y^2), w(x^2 + y^2))$ e $G(u, v, t) = (ut, vt)$. Logo, $H(x, y, z, w) = (z(x^2 + y^2), w(x^2 + y^2))$. Dos exemplos 4.3.11 e 4.3.10, inferimos que F, G e H têm valor crítico isolado, G satisfaz a condição de Milnor (b) e F não satisfaz a condição de Milnor (b). Mais ainda, temos que

$$\begin{aligned} V_H &= \{x = y\} \cup \{z = w\}; \\ \text{Sing } H &= \{x = y = 0\}; \\ M(H) &= \{x = y = 0\} \cup \{4w^2 - x^2 - y^2 + 4z^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que H satisfaz a condição de Milnor (b).

EXEMPLO 4.3.14. Sejam $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ germes de aplicação analítica definido por $F(x, y, z, w) = (\frac{1}{3}xw, yw, zw, w)$ e $G(u, v, t, s) = (ut, vt(9u^2 + v^2 + t^2))$. Logo, $H(x, y, z, w) = (\frac{1}{3}w^2xz, w^4yz(x^2 + y^2 + z^2))$;

$$V_F = \{w = 0\}; \quad \text{Sing } F = \{w = 0\}; \quad M(F) = \mathbb{R}^4.$$

Logo, $\text{Disc } F = \{0\}$ e F não satisfaz a condição de Milnor (b). Pelo Exemplo 4.3.12, sabemos que G tem valor crítico isolado mas não satisfaz a condição de Milnor (b), e $\text{Disc } H = \{0\}$ e H satisfaz a condição de Milnor (b).

Para finalizar essa seção, introduzimos um condição suficiente para garantir que H satisfaz a condição de Milnor (b) sobre a hipóteses que F e G satisfaçam a condição de Milnor (b).

Proposição 4.3.15. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$ dois germes de aplicação analítica com F satisfazendo a condição de Milnor (b) e $\text{Disc } F = \{0\}$. Assuma que $F(M(H)) \subseteq M(G)$ como germe de conjunto na origem. Se G satisfaz a condição de Milnor (b), então a composição $H = G \circ F$ também satisfaz a condição de Milnor (b).

Demonstração. Pela inclusão $F(M(H)) \subseteq M(G)$, se segue que

$$\overline{F(M(H)) \setminus \text{Sing } G} \subseteq \overline{M(G) \setminus \text{Sing } G}.$$

Agora, aplicando o item (1) das Observações (4.3.8) obtemos a seguinte sequencia de inclusões:

$$\begin{aligned} \overline{F(M(H) \setminus \text{Sing } G)} \cap \text{Sing } G &\subseteq \overline{F(M(H)) \setminus \text{Sing } G} \cap \text{Sing } G \\ &\subseteq \overline{M(G) \setminus \text{Sing } G} \cap \text{Sing } G \\ &\subseteq \{0\} \end{aligned}$$

onde a ultima incluso utiliza a condio de Milnor (b) para G . Consequentemente, obtemos a incluso $\overline{F(M(H)) \setminus \text{Sing } H} \cap \text{Sing } G \subseteq \{0\}$ e pelo Teorema 4.3.7 H satisfaz a condio de Milnor (b).

□

EXEMPLO 4.3.16. Sejam $F : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dois germes de aplicao analitica dados por $F(x, y, z, w) = (xw, yw, zw)$ e $G(u, v, t) = (u, v(u^2 + v^2))$. Consequentemente, $H(x, y, z, w) = (wx, yw^3(x^2 + y^2))$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} V_F &= \{w = 0\}; & M(F) &= \{w = 0\} \cup \{w^2 = x^2 + y^2 + z^2\}; \\ V_G &= \{u = v = 0\}; & M(G) &= \{t = 0\} \cup \{u = v = 0\}; \\ V_H &= \{w = 0\} \cup \{x = y = 0\}; & M(H) &= \{w = 0\} \cup \{x = y = 0\} \cup \{z = 0, w^2 = x^2 + y^2\}; \\ \text{Sing } F &= \{w = 0\}; \\ \text{Sing } G &= \{u = v = 0\}; \\ \text{Sing } H &= \{w = 0\} \cup \{x = y = 0\}. \end{aligned}$$

Novamente, F, G e H tm valor critico isolado, F e G satisfazem a condio de Milnor (b). Dado que $F(M(H)) \subseteq M(G)$, pela Proposio 4.3.15 concluimos que H satisfaz a condio de Milnor (b).

Podemos estender a Proposio 4.3.15 substituindo a incluso por uma igualdade.

Corolrio 4.3.17. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$ dois germes de aplicao analitica com F satisfazendo a condio de Milnor (b) e $\text{Disc } F = \{0\}$. Assuma que $F(M(H)) = M(G)$ como germe de conjunto na origem. Entao, G satisfaz a condio de Milnor (b) se, e somente se, a composio $H = G \circ F$ satisfaz a condio de Milnor (b).

Demonstrao. Pela proposio 4.3.15 e suficiente mostrar que se $M(G) \subseteq F(M(H))$, entao H satisfaz a condio de Milnor (b). Por hipotese temos que

$$\overline{M(G) \setminus \text{Sing } G} \cap \text{Sing } G \subseteq \overline{F(M(H)) \setminus \text{Sing } G} \cap \text{Sing } G \subseteq \{0\},$$

onde a ultima incluso segue da condio de Milnor (b) sobre H .

□

OBSERVAO 4.3.18. A seguir, um sumrio das relaes entre a condio de Milnor (b) para F, G e H .

- (1) Exemplo 4.3.4 e Exemplo 4.3.5 mostram que F e G satisfazendo a condio de Milnor (b) $\Rightarrow H$ satisfaz a condio de Milnor (b). Proposio 4.3.15 fornece uma condio suficiente para que a implicao seja verdadeira.

- (2) Exemplo 4.3.12 mostra que F e H satisfazendo a condição de Milnor (b) \Rightarrow G satisfaz a condição de Milnor (b). Corolário 4.3.17 fornece uma condição suficiente para que a implicação seja verdadeira.
- (3) Exemplo 4.3.13 mostra que G e H satisfazendo a condição de Milnor (b) \Rightarrow F satisfaz a condição de Milnor (b).

TOPOLOGIA PARA A COMPOSIÇÃO DE APLICAÇÕES ANALÍTICAS REAIS

Uma vez assegurada a existência da fibração de Milnor para a composição de dois germes de aplicação analítica real, procuramos identificar conexões que nos permitam relacionar a informação topológica associada a cada germe de aplicação. Neste capítulo, passaremos por diversas aplicações associadas à existência da fibração de Milnor para a composição de germes de aplicação analítica real. Vamos estudar as conexões topológicas entre as correspondentes fibras de Milnor, os bordos das fibras de Milnor, os tubos de Milnor e os respectivos links de cada aplicação.

5.1 Topologia da Fibra de Milnor para a Composição

Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica real com valor crítico isolado e satisfazendo a condição de Milnor (b). Denote por $H = G \circ F$ a composição de F e G .

Nesta seção, exploraremos como a existência das fibrações de Milnor para F e G oferece um mecanismo direto para relacionar as fibras de Milnor F_F e F_G com as fibras da composição H . Isso nos permitirá apresentar uma prova alternativa para uma conjectura estabelecida por John Milnor (Corolário 5.1.2) e também descrever uma série de fórmulas que envolvem as correspondentes características de Euler associadas às fibras de Milnor e aos tubos de Milnor de F , G e H , respectivamente.

Continuando, pelo Teorema 3.3.7 existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ existem $\eta > 0$ e $\tau > 0$ com $0 < \eta \ll \tau \ll \epsilon$ tais que a restrição das

aplicações

$$F| : \overline{B}_\epsilon^M \cap F^{-1}(\overline{B}_\tau^N \setminus \{0\}) \rightarrow \overline{B}_\tau^N \setminus \{0\} \quad (5.1)$$

e

$$G| : \overline{B}_\tau^N \cap G^{-1}(\overline{B}_\eta^K \setminus \{0\}) \rightarrow \overline{B}_\eta^K \setminus \{0\} \quad (5.2)$$

definem fibrações de Milnor sobre o tubo.

Dado que F, G e H têm valor crítico isolado, podemos escolher qualquer $z \in \overline{B}_\eta^K \setminus \{0\}$ de tal forma que a fibra $\widehat{F}_H := F^{-1}(G^{-1}(z))$ é regular e a fibra $G^{-1}(z)$ é difeomorfa a F_G . Como resultado, podemos restringir a fibração (5.1) a seguinte sequência de aplicações

$$F_F \hookrightarrow \widehat{F}_H \xrightarrow{F|} F_G \quad (5.3)$$

para obter uma nova fibração suave, localmente trivial, cuja fibra é F_F .

A existência da fibração (5.3) nos permite enunciar e provar alguns resultados.

Proposição 5.1.1. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica tais que F satisfaz as condições Milnor (b), $\text{Disc } F = \{0\}$ e G é uma submersão. Denote por $H := G \circ F$ a composição entre F e G . Então, a fibra de Milnor F_H é homeomorfa a $F_F \times [-1, 1]^{N-K}$.

Demonstração. Claramente, G admite uma fibração de Milnor (5.2). Além disso, segue das hipóteses a existência da fibração (5.1) e, conseqüentemente, a existência da fibração (5.3). Mais ainda, da condição (4.1) e o Teorema 4.3.7 implicam na existência da fibra de Milnor F_H e além disso, $\widehat{F}_H \simeq F_H$.

Uma aplicação do Teorema da forma local das submersões para germes de aplicação, mostra que a fibra de Milnor F_G é difeomorfa a um disco fechado D^{N-K} de dimensão $N - K$. Como resultado, temos que a fibração (5.3) é uma fibração trivial. Portanto, $F_H \simeq F_F \times F_G \simeq F_F \times D^{N-K} \simeq F_F \times [-1, 1]^{N-K}$. \square

Como conseqüência direta da Proposição anterior, derivamos uma prova alternativa para uma conjectura estabelecida por John Milnor (MILNOR, 1968, Conjectura de Milnor, p.100), que enunciamos a seguir.

Corolário 5.1.2. (MILNOR, 1968, Conjectura de Milnor, p.100) Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ um germe de aplicação analítica com singularidade isolada na origem e $\Pi : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{N-1}, 0)$ a projeção canônica. Então, a fibra de Milnor $F_{\Pi \circ F}$ é homeomorfa a $F_F \times [-1, 1]$.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 5.1.1. □

A conjectura no Corolário 5.1.2 foi abordada e provada por Iomdim em (IOMDIN, 1973). A mesma conjectura foi estendida e tratada por outros autores em casos mais gerais, demonstrando igualmente sua validade. Pode-se consultar, por exemplo, (DUTERTRE; SANTOS, 2015, Teorema 6.3, p.4860) e (CHEN; TIBĂR, 2023, Corolário 3.3, p. 16) para outras demonstrações.

Outra consequência da existência da fibração (5.3) é a dedução de uma fórmula multiplicativa que relaciona as características de Euler das fibras de Milnor F_F , F_G e \widehat{F}_H . Aplicando o Teorema 2.1.3 para a fibração (5.3), obtemos a seguinte expressão:

$$\chi(\widehat{F}_H) = \chi(F_F)\chi(F_G) \quad (5.4)$$

Podemos estender ainda mais esse estudo utilizando a fórmula (5.4) para determinar uma relação entre a característica de Euler do tubo de Milnor da aplicação H e as características de Euler das fibras de Milnor F_F e F_G .

A partir de agora, assuma que H satisfaz a condição de Milnor (b). Logo, pelo Teorema 3.3.7 existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ existem $\eta > 0$ com $0 < \eta \ll \tau \ll \epsilon$ tais que a restrição da aplicação

$$H|_1: \overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\}) \rightarrow \overline{B}_\eta^K \setminus \{0\} \quad (5.5)$$

é uma fibração suave localmente trivial.

Agora considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\}) & \xrightarrow{H|_1} & \overline{B}_\eta^K \setminus \{0\} \\ & \searrow \rho_K \circ H|_1 & \downarrow \rho_K(z) := \|z\|^2 \\ & & (0, \eta^2] \end{array} \quad (5.6)$$

Pelo Lema 2.1.5, se consideramos $\eta > 0$ suficientemente pequeno temos que $\rho_K \circ H|_1$ é uma submersão suave, própria e sobrejetora e consequentemente é uma fibração trivial. Portanto, temos o seguinte difeomorfismo:

$$\overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\}) \simeq (\rho_K \circ H|_1)^{-1}(\eta^2) \times (0, \eta^2] = \overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(S_\eta^{K-1}) \times (0, \eta^2]. \quad (5.7)$$

Mais ainda, temos que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\simeq} & \overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(S_\eta^{k-1}) \times (0, \eta^2] \\
 \downarrow H| & & \downarrow \Psi \\
 \overline{B}_\eta^K - \{0\} & \xrightarrow{\simeq} & S_\eta^{K-1} \times (0, \eta^2]
 \end{array} \tag{5.8}$$

onde $\Psi = (H|, \text{Id})$.

Do diagrama (5.8) segue que, a menos de homotopia, podemos restringir a fibração (5.5) à aplicação

$$F_H \hookrightarrow \overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(S_\eta^{k-1}) \xrightarrow{H|} S_\eta^{K-1}$$

a qual também é uma fibração suave localmente trivial. Novamente, pelo Teorema 2.1.3 temos que

$$\chi(\overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\})) = \chi(\overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(S_\eta^{k-1})) = \chi(S_\eta^{K-1})\chi(F_H). \tag{5.9}$$

Portanto, das equações (5.4) e (5.9) garantimos que:

$$\begin{aligned}
 \chi(\overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\})) &= \chi(S_\eta^{K-1})\chi(F_H) = \underbrace{\chi(S_\eta^{K-1})\chi(F_G)}_{=\chi(\overline{B}_\tau^N \cap G^{-1}(\overline{B}_\eta^K \setminus \{0\}))} \chi(F_F).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Assim, podemos resumir toda essa discussão no seguinte resultado:

Proposição 5.1.3. Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação analítica real que têm valor crítico isolado e satisfazem a condição de Milnor (b). Denote por $H := G \circ F$ a composição de F e G . Então

- (1) Para cada $z \in \overline{B}_\eta^K \setminus \{0\}$, temos que $\chi(\widehat{F}_H) = \chi(F_F)\chi(F_G)$. No caso em que H satisfaz a condição de Milnor (b), temos que $\chi(F_H) = \chi(F_F)\chi(F_G)$.
- (2) Se H satisfaz a condição de Milnor (b), então $\chi(\overline{B}_\epsilon^M \cap H^{-1}(\overline{B}_\eta^k \setminus \{0\})) = \chi(S_\eta^{K-1})\chi(F_G)\chi(F_F)$.

5.1.1 O caso de Singularidade Isolada

Sejam $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M \geq N \geq K \geq 2$ dois germes de aplicação polinomial e $H = G \circ F$ a composição de F e G . Assuma que F , G e H têm singularidade isolada na origem.

O próximo resultado vai nos permitir expressar a equação (5.4) em termos do grau topológico das aplicações F e G .

Teorema 5.1.4. (SANTOS; DREIBELBIS; DUTERTRE, 2012) Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial com singularidade isolada na origem. Considere $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x))$, uma representação arbitrária do germe F e denote por $\deg_0(\nabla F_i(x))$, para $i = 1, \dots, N$ o grau topológico da aplicação $\epsilon \frac{\nabla F_i}{\|\nabla F_i\|} : S_\epsilon^{M-1} \rightarrow S_\epsilon^{M-1}$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então

(1) Se M é par, então $\chi(F_F) = 1 - \deg_0 \nabla F_1$. Mais ainda, temos que

$$\deg_0 \nabla F_1 = \deg_0 \nabla F_2 = \dots = \deg_0 \nabla F_N.$$

(2) Se M é ímpar, então $\chi(F_F) = 1$. Mais ainda, temos que $\deg_0 \nabla F_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$.

As fórmulas no Teorema 5.1.4 podem ser condensadas na seguinte expressão:

$$\chi(F_F) = 1 - \frac{1}{2} \chi(S^M) \deg_0 \nabla F_1, \quad (5.11)$$

onde S^M é a esfera unitária de dimensão M .

Corolário 5.1.5. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ e $G : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^K, 0)$, $M > N > K \geq 2$, dois germes de aplicação polinomial com $\text{Sing } F = \{0\}$ e $\text{Sing } G = \{0\}$. Denote suas respectivas representações por $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x))$ e $G(x) = (G_1(x), G_2(x), \dots, G_K(x))$. Além disso, considere o germe da composição $H = G \circ F$. Então, suas respectivas fibras de Milnor estão relacionadas pela seguinte fórmula

$$\chi(F_H) = 1 - \frac{1}{2} \chi(S^M) \deg_0 \nabla F_1 - \frac{1}{2} \chi(S^N) \deg_0 \nabla G_1 + \frac{1}{4} \chi(S^M) \chi(S^N) \deg_0 \nabla F_1 \deg_0 \nabla G_1.$$

Em particular, a fórmula anterior nos diz que se $\chi(F_H) \neq 0$, então nenhuma das aplicações $\epsilon \frac{\nabla F_1}{\|\nabla F_1\|} : S_\epsilon^{M-1} \rightarrow S_\epsilon^{M-1}$ e $\epsilon \frac{\nabla G_1}{\|\nabla G_1\|} : S_\epsilon^{N-1} \rightarrow S_\epsilon^{N-1}$ pode ser homotópica à aplicação identidade.

Demonstração. A prova segue da seguinte sequência de igualdades :

$$\chi(F_H) = \chi(F_F) \chi(F_G) = \left(1 - \frac{1}{2} \chi(S^M) \deg_0 \nabla F_1\right) \left(1 - \frac{1}{2} \chi(S^N) \deg_0 \nabla G_1\right). \quad (5.12)$$

A primeira igualdade é derivada da equação (5.4), enquanto a segunda igualdade é deduzida a partir da equação (5.11).

Pelo Teorema de Hopf sabemos que uma aplicação suave $\Phi : S^\alpha \rightarrow S^\alpha$ é homotópica à identidade se, e somente se, o grau topológico de Brouwer de Φ é igual a 1.

Veja por exemplo (OUTERELO; RUIZ, 2009, Teorema 2.1, p.191). Assim, pelo item (2) do Teorema 5.1.4, a aplicação $\epsilon \frac{\nabla F_1}{\|\nabla F_1\|} : S_\epsilon^{M-1} \rightarrow S_\epsilon^{M-1}$ (respectivamente, $\epsilon \frac{\nabla G_1}{\|\nabla G_1\|} : S_\epsilon^{N-1} \rightarrow S_\epsilon^{N-1}$) só pode ser homotopicamente equivalente à identidade quando M for par (respectivamente, N par).

Portanto, da equação (5.12) vemos que $\chi(F_H) \neq 0$ se, e somente se, $\deg_0 \nabla F_1 \neq 1$ e $\deg_0 \nabla G_1 \neq 1$. Consequentemente, ambas as aplicações $\epsilon \frac{\nabla F_1}{\|\nabla F_1\|}$ e $\epsilon \frac{\nabla G_1}{\|\nabla G_1\|}$ não podem ser homotópicas à identidade.

□

5.2 Topologia do Bordo da Fibra de Milnor para Singularidades Analíticas Reais

Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M \geq N \geq 2$, um germe de aplicação analítica. Dado $1 \leq I \leq N$, considere as projeções $\Pi_I : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^I, 0)$ e $\Pi_{N-I} : (\mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{N-I}, 0)$ dadas por $\Pi_I(y_1, \dots, y_N) = (y_1, \dots, y_I)$ e $\Pi_{N-I}(y_1, \dots, y_N) = (y_{I+1}, \dots, y_N)$. Denote por $F_I = \Pi_I \circ F$ e $F_{N-I} = \Pi_{N-I} \circ F$ a composição de F com Π_I e Π_{N-I} , respetivamente. Por convenção, para o caso em que $I = N$, assumiremos que $F_{N-I} := F_0 \equiv 0$ e $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & (\mathbb{R}^M, 0) & \\
 & \downarrow F & \\
 & (\mathbb{R}^N, 0) & \\
 \begin{array}{c} \swarrow F_I \\ \downarrow \Pi_I \end{array} & & \begin{array}{c} \searrow F_{N-I} \\ \downarrow \Pi_{N-I} \end{array} \\
 (\mathbb{R}^I, 0) & & (\mathbb{R}^{N-I}, 0)
 \end{array} \tag{5.13}$$

Nesta seção, estabeleceremos novas fórmulas para as características de Euler que conectam o bordo das fibras de Milnor ∂F_F e ∂F_{F_I} com os respectivos links \mathcal{L}_F e \mathcal{L}_{F_I} das aplicações F e F_I , para cada $1 \leq I \leq N$. Essas fórmulas nos permitirão distinguir o tipo de homotopia entre o bordo da fibra de Milnor e o link de F_I , para cada $1 \leq I \leq N$, quando a dimensão M é ímpar.

A partir de agora, assuma que F tem valor crítico isolado e satisfaz a condição de Milnor (b). Logo, pelo Teorema 4.3.7 e a inclusão (4.1) temos que F_I e F_{N-I} satisfazem a condição de Milnor (b), $\text{Disc } F_I \subseteq \{0\}$ e $\text{Disc } F_{N-I} \subseteq \{0\}$.

Portanto, existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno tal que para todo $0 < \epsilon \ll \epsilon_0$, existem $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$ e $\eta_3 > 0$, com $0 < \eta_2, \eta_3 \ll \eta_1 \ll \epsilon$ tais que as aplicações F, F_I e

F_{N-I} admitem uma fibração de Milnor

$$F| : \overline{B}_\epsilon^M \cap F^{-1}(B_{\eta_1}^N \setminus \{0\}) \rightarrow B_{\eta_1}^N \setminus \{0\}; \quad (5.14)$$

$$F_{I|} : \overline{B}_\epsilon^M \cap F_I^{-1}(B_{\eta_2}^I \setminus \{0\}) \rightarrow B_{\eta_2}^I \setminus \{0\}; \quad (5.15)$$

$$F_{N-I|} : \overline{B}_\epsilon^M \cap F_{N-I}^{-1}(B_{\eta_3}^{N-I} \setminus \{0\}) \rightarrow B_{\eta_3}^{N-I} \setminus \{0\}. \quad (5.16)$$

Mais ainda, a condição de Milnor (b) garante que a restrição das aplicações F , F_I e F_{N-I} sob o bordo da bola fechada $S_\epsilon^{M-1} := \partial B_\epsilon^M$ induzem as seguintes fibrações:

$$F| : S_\epsilon^{M-1} \cap F^{-1}(B_{\eta_1}^N \setminus \{0\}) \rightarrow B_{\eta_1}^N \setminus \{0\}; \quad (5.17)$$

$$F_{I|} : S_\epsilon^{M-1} \cap F_I^{-1}(B_{\eta_2}^I \setminus \{0\}) \rightarrow B_{\eta_2}^I \setminus \{0\}; \quad (5.18)$$

$$F_{N-I|} : S_\epsilon^{M-1} \cap F_{N-I}^{-1}(B_{\eta_3}^{N-I} \setminus \{0\}) \rightarrow B_{\eta_3}^{N-I} \setminus \{0\}. \quad (5.19)$$

Da prova da Proposição 5.1.1, obtemos o seguinte homeomorfismo, que se torna um difeomorfismo após suavizar as quinas, $F_{F_I} \simeq F_F \times D^{N-I}$, onde D^{N-I} é um disco fechado de dimensão $N - I$. Assim, sobre o bordo da fibra de Milnor temos o seguinte difeomorfismo:

$$\partial F_{F_I} \simeq (\partial F_F \times D^{N-I}) \cup (F_F \times S^{N-I-1}) \quad (5.20)$$

A seguinte Proposição está na mesma linha que (CISNEROS-MOLINA; SEADE; SNOUSSI, 2009, Corolário 4).

Proposição 5.2.1. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação analítica com valor crítico isolado satisfazendo a condição de Milnor (b). Para cada $1 \leq I < N$, considere a composição $F_I = \Pi_I \circ F$. Então, o bordo ∂F_{F_I} da fibra de Milnor F_{F_I} é obtido (a menos de homeomorfismo) colando duas copias disjuntas da fibra de Milnor $F_{F_{I+1}}$ ao longo do bordo comum $\partial F_{F_{I+1}}$.

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^M, 0) & \xrightarrow{F_{I+1}} & (\mathbb{R}^{I+1}, 0) \\ & \searrow & \downarrow \widehat{\Pi}_I \\ & & (\mathbb{R}^I, 0) \\ & \swarrow F_I = \widehat{\Pi}_I \circ F_{I+1} & \end{array}$$

onde $\widehat{\Pi}_I(y_1, \dots, y_I, y_{I+1}) = (y_1, \dots, y_I)$. Pelo Teorema 4.3.7 segue que F_I e F_{I+1} satisfazem a condição de Milnor (b) e pela condição (4.1) temos que $\text{Disc } F_I \subseteq \{0\}$ e $\text{Disc } F_{I+1} \subseteq \{0\}$. Portanto, ambas as aplicações admitem fibração de Milnor. Pela Proposição 5.1.1, temos que $F_{F_I} \simeq F_{F_{I+1}} \times [-1, 1]$ e consequentemente, temos que

$$\partial F_{F_I} \simeq (\partial F_{F_{I+1}} \times [-1, 1]) \cup (F_{F_{I+1}} \times \{-1, 1\}). \quad (5.21)$$

Agora podemos ver que a variedade ∂F_{F_I} é homeomorfa à colagem duas cópias de $F_{F_{I+1}}$ dadas por $F_{F_{I+1}} \times \{-1\}$ e $F_{F_{I+1}} \times \{1\}$ ao longo do bordo do cilindro $\partial F_{F_{I+1}} \times [-1, 1]$. Veja Figura 6. \square

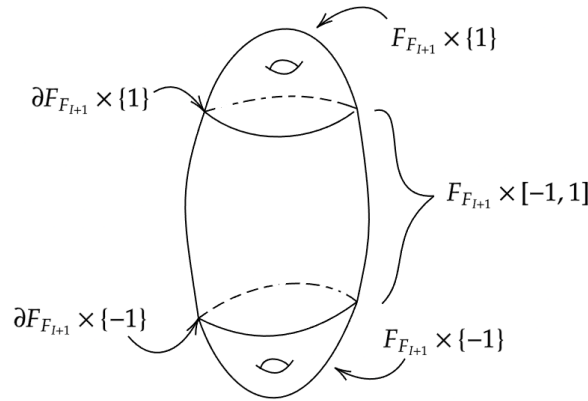


Figura 6 – Homeomorfismo entre ∂F_{F_I} e $(\partial F_{F_{I+1}} \times [-1, 1]) \cup (F_{F_{I+1}} \times \{-1, 1\})$.

5.2.1 As Fórmulas da Característica de Euler

Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação analítica. Assuma que $\text{Disc } F = \{0\}$ e F satisfaz a condição de Milnor (b). Assim, $\dim F_F = M - N$ e $\dim \partial F_F = M - N - 1$.

Denote por $\widehat{F}_F = F_F \cup_{\partial F_F} F_F$ a variedade fechada construída ao colar duas cópias de F_F ao longo do bordo ∂F_F utilizando o difeomorfismo identidade sobre ∂F_F . Pela propriedade aditiva da característica de Euler temos que $\chi(\widehat{F}_F) = 2\chi(F_F) - \chi(\partial F_F)$. Mais ainda, aplicando o Corolário 2.1.1 deduzimos que:

$$\chi(\partial F_F) = \begin{cases} 0 & \text{se } M - N \text{ é par.} \\ 2\chi(F_F) & \text{se } M - N \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (5.22)$$

Aplicando novamente a aditividade da característica de Euler no difeomorfismo (5.20) obtemos que

$$\begin{aligned}\chi(\partial F_{F_I}) &= \chi(\partial F_F \times D^{K-I}) + \chi(F_F \times S^{N-I-1}) - \chi(\partial F_F \times S^{N-I-1}) \\ &= \chi(\partial F_F) + \chi(F_F)\chi(S^{N-I-1}) - \chi(\partial F_F)\chi(S^{N-I-1}).\end{aligned}$$

Agora, utilizando (5.22) podemos reduzir a última fórmula a

$$\chi(\partial F_I) = \begin{cases} \chi(F_F)\chi(S^{N-I-1}) & \text{se } M - N \text{ é par.} \\ \chi(F_F)\chi(S^{N-I}) & \text{se } M - N \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (5.23)$$

Podemos estabelecer a convenção $\chi(S^{-1}) = \chi(\emptyset) = 0$, e considerar o fato de que, para a esfera 0-dimensional $S^0 = \{-1, 1\}$, temos que $\chi(S^0) = 2$. Portanto, toda a discussão anterior, incluindo os casos especiais $N - I = 1$ e $I = N$, pode ser resumida no Teorema seguinte. Por convenção, para $I = N$ denotamos $F_{F_N} := F_F$.

Teorema 5.2.2. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação analítica tal que $\text{Disc } F = \{0\}$ e F satisfaz a condição de Milnor (b). Então:

- (1) $\chi(\partial F_{F_I}) = \chi(F_F)\chi(S^{M-I-1})$ para todo $I, 1 \leq I \leq N$.
- (2) **Fórmula do tipo Lê-Greuel:** $\chi(\partial F_{F_{I+1}}) - \chi(\partial F_{F_I}) = 2(-1)^{M-I}\chi(F_F)$, para todo $I, 1 \leq I < N$.
- (3) $\chi(\partial F_{F_I}) = \chi(\partial F_{F_{I+2}})$ para todo $I, 1 \leq I < N - 1$.

Demonstração. O item (1) decorre da comparação da paridade de $M - I - 1$ com as identidades em (5.23); o item (2) segue de aplicar o item (1) na seguinte diferença:

$$\chi(\partial F_{F_{I+1}}) - \chi(\partial F_{F_I}) = \chi(F_F) \left[\chi(S^{M-(I+1)-1}) - \chi(S^{M-I-1}) \right] = 2(-1)^{M-I}\chi(F_F);$$

o item (3) segue do item (2) aplicado a seguinte diferença:

$$\begin{aligned}\chi(\partial F_{F_{I+2}}) - \chi(\partial F_{F_I}) &= \chi(\partial F_{F_{I+2}}) - \chi(\partial F_{F_{I+1}}) + \chi(\partial F_{F_{I+1}}) - \chi(\partial F_{F_I}) \\ &= 2(-1)^{M-(I+1)}\chi(F_F) + 2(-1)^{M-I}\chi(F_F) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

OBSERVAÇÕES 5.2.3.

- (1) Observe que a fibra de Milnor F_{F_1} está bem definida. A prova do caso especial $I = 1$ pode ser encontrada na demonstração do Teorema 6.3 em (DUTERTRE; SANTOS,

2015). A ideia geral, consiste em considerar um par $\Phi := (f, g) : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com valor crítico isolado na origem satisfazendo a condição de Milnor (b) na origem. Com isso, sabemos que para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe um $0 < \eta \ll \epsilon$ tal que $\Phi|_{\bar{B}_\epsilon^M} : \bar{B}_\epsilon^M \cap \Phi^{-1}(B_\eta^2 \setminus \{0\}) \rightarrow B_\eta^2 \setminus \{0\}$ é uma fibração suave localmente trivial. Consequentemente, as fibras $f^{-1}(\delta)$ e $g^{-1}(\delta)$ para todo $0 < \delta < \eta$ dentro da bola \bar{B}_ϵ^M não podem ser vazias; de fato, são variedades com bordo. Portanto, podemos considerar a função restrição $g|_{f^{-1}(\delta)} : f^{-1}(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e ajustando δ se for necessário, podemos assumir que 0 é um valor regular de $g|_{f^{-1}(\delta)}$. Com isso, podemos encontrar um valor $\eta_1 > 0$, suficientemente pequeno, tal que todo $\gamma \in [-\eta_1, \eta_1]$ também é valor regular de $g|_{f^{-1}(\delta)}$. Agora utilizando as condições de Milnor (b) e diminuindo ϵ e η , se necessário, obtemos que $f^{-1}(\delta)$ é difeomorfa a $F_\Phi \times [-\eta_1, \eta_1]$.

- (2) Enfatizamos que a fórmula do tipo Lê-Greuel no item (2) do Teorema 5.2.2 é de certa forma semelhante à fórmula obtida em (CISNEROS-MOLINA; SEADE; GRULHA JR., 2014, Teorema 1, p.3), com a diferença de que os autores trabalham com o número de Euler da fibra de Milnor, e não com o seu bordo.

5.2.1.1 A Característica de Euler do Link

Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, com $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial que satisfaz a condição de Milnor (b) e $\text{Disc } F = \{0\}$. Logo, temos que para cada $I, 1 < I \leq N$ a aplicação $F_I : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^I, 0)$ admite uma fibração de Milnor (5.15). Como consequência, sua restrição também induz as seguintes fibrações: $F_I : \bar{B}_\epsilon^M \cap F_I^{-1}(S_\eta^{I-1}) \rightarrow S_\eta^{I-1}$ e $F_I : S_\epsilon^{M-1} \cap F_I^{-1}(S_\eta^{I-1}) \rightarrow S_\eta^{I-1}$, cujas correspondentes fibras de Milnor são F_{F_I} e ∂F_{F_I} , respectivamente.

Denote por $\mathcal{L}_{F_I} := F_I^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{M-1}$ o link da aplicação F_I .

Podemos tomar η suficientemente pequeno de tal forma que a esfera S_ϵ^{M-1} seja homeomorfa à colagem $\bar{B}_\epsilon^M \cap F_I^{-1}(S_\eta^{I-1}) \cup_{S_\epsilon^{M-1} \cap F_I^{-1}(S_\eta^{I-1})} N_{\epsilon, \eta}(F_I)$, onde $N_{\epsilon, \eta}(F_I) := S_\epsilon^{M-1} \cap F^{-1}(B_\eta^I)$ é uma vizinhança semi-algébrica do link \mathcal{L}_{F_I} , a qual pode ser retraída ao link \mathcal{L}_{F_I} , como foi demonstrado por A. Duerfee em (DURFEE, 1983).

Assim,

$$\begin{aligned} \chi(S_\epsilon^{M-1}) &= \chi(\bar{B}_\epsilon^M \cap F_I^{-1}(S_\eta^{I-1})) + \chi(N_{\epsilon, \eta}(F_I)) - \chi(S_\epsilon^{M-1} \cap F_I^{-1}(S_\eta^{I-1})) \\ &= \chi(F_{F_I})\chi(S^{I-1}) + \chi(\mathcal{L}_{F_I}) - \chi(\partial F_{F_I})\chi(S^{I-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\chi(\mathcal{L}_{F_I}) = \chi(S^{M-1}) - \chi(F_F)\chi(S^{I-1}) + \chi(\partial F_{F_I})\chi(S^{I-1}). \quad (5.24)$$

Lema 5.2.4. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial tal que $\text{Disc } F = \{0\}$ e F satisfaz a condição de Milnor (b). Então para cada $I, 1 < I \leq N$ temos que

$$\chi(\mathcal{L}_{F_I}) = \chi(S^{M-1}) + (-1)^{M-I-1} \chi(F_F) \chi(S^{I-1}).$$

Demonstração. Segue da equação (5.24) e do Teorema 5.2.2. □

O seguinte resultado proporciona em particular uma segunda demonstração de (DUTERTRE; SANTOS, 2015, Proposição 7.1, p.4861).

Proposição 5.2.5. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial tal que $\text{Disc } F = \{0\}$ e F satisfaz a condição de Milnor (b). Então:

$$(1) \quad \chi(\mathcal{L}_{F_{I+1}}) - \chi(\mathcal{L}_{F_I}) = 2(-1)^{M-I} \chi(F_F), \text{ para cada } I, 1 \leq I \leq N.$$

$$(2) \quad \chi(\mathcal{L}_{F_{I+2}}) = \chi(\mathcal{L}_{F_I}), \text{ para cada } I, 1 \leq I < N - 1.$$

Demonstração. O item (1) segue após aplicar o Lema 5.2.4 na seguinte diferença:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}_{F_{I+1}}) - \chi(\mathcal{L}_{F_I}) &= (-1)^{M-(I+1)-1} \chi(F_F) \chi(S^{(I+1)-1}) - (-1)^{M-I-1} \chi(F_F) \chi(S^{I-1}) \\ &= (-1)^{M-I} \chi(F_F) [\chi(S^I) + \chi(S^{I-1})] \\ &= 2(-1)^{M-I} \chi(F_F). \end{aligned}$$

O item (2) é consequência direta do item (1). □

Em vista do Teorema 5.2.2 e da Proposição 5.2.5, podemos observar que $\chi(\partial F_{F_{I+1}}) - \chi(\partial F_{F_I}) = \chi(\mathcal{L}_{F_{I+1}}) - \chi(\mathcal{L}_{F_I})$ para todo $I, 1 \leq I < N$. Assim, obtemos que $\chi(\partial F_{F_{I+1}}) - \chi(\mathcal{L}_{F_{I+1}}) = \chi(\partial F_I) - \chi(\mathcal{L}_{F_I}) = \cdots = \chi(\partial F_{F_2}) - \chi(\mathcal{L}_{F_2}) = \chi(\partial F_{F_1}) - \chi(\mathcal{L}_{F_1})$. Esta última sequência de igualdades sugere a seguinte definição.

Definição 5.2.6. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial tal que $\text{Disc } F = \{0\}$ e F satisfaz a condição de Milnor (b). O grau de degeneração sobre o bordo da fibra de Milnor de F é definido como sendo o número

$$DB(F) := \chi(\partial F_{F_1}) - \chi(\mathcal{L}_{F_1}).$$

Claramente, se F tem singularidade isolada na origem temos que $DB(F) = 0$.

5.2.2 Sobre o Bordo da Fibra de Milnor e o Link para cada $1 \leq I \leq N$

Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, com $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial com valor crítico isolado e satisfazendo a condição de Milnor (b). Em geral, não podemos esperar estabelecer teoremas que relacionem o grau de conexidade da fibra de Milnor com seu bordo e os respectivo links das aplicações F_I , com $I, 1 \leq I \leq N$.

No entanto, quando a dimensão M é par, podemos utilizar o item (1) do Teorema 5.2.2 para escrever $\chi(\partial F_{F_I}) = \chi(S^{I-1})\chi(F_F)$, para cada $I, 1 \leq I \leq N$. Aplicando posteriormente o Lema 5.2.4, podemos concluir que $\chi(\partial F_{F_I}) = \chi(\mathcal{L}_{F_I})$ e assim obter que $DB(F) = 0$.

Quando a dimensão M é ímpar, surgem algumas relações interessantes entre o bordo da fibra de Milnor F_F , os links das singularidades e as fibras de Milnor associadas às aplicações F_I , para cada $I, 1 \leq I \leq N$. Isso, nos proporciona uma forma de distinguir o tipo de homotopia entre os bordos da fibra de Milnor e o link de singularidades de F_I para cada $I, 1 \leq I \leq N$, como será descrito a seguir.

Para começar, observe que para dimensão ímpar $M \geq 2$, a equação (5.24) se reduz a:

$$\chi(\mathcal{L}_{F_I}) = 2 - \chi(F_F)\chi(S^{I-1}) + \chi(\partial F_{F_I})\chi(S^{I-1}) \quad (5.25)$$

Lema 5.2.7. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação polinomial tal que F satisfaz a condição de Milnor (b) e $\text{Disc } F = \{0\}$. Se M é ímpar, então para cada $I, 1 \leq I \leq N$, as seguintes condições são satisfeitas para os links \mathcal{L}_{F_I} e os bordos ∂F_{F_I} das fibras de Milnor F_{F_I} :

- (1) Se I é par, então $\chi(\mathcal{L}_{F_I}) = 2$. Mais ainda, dado que $\dim F_{F_I} = M - I$ é ímpar, então $\chi(\partial F_{F_I}) = 2\chi(F_{F_I}) = 2\chi(F_F)$.
- (2) Se I é ímpar, então $\chi(\mathcal{L}_{F_I}) = 2 - 2\chi(F_F)$. Mais ainda, dado que $\dim \partial F_{F_I} = M - I - 1$ é ímpar, então $\chi(\partial F_{F_I}) = 0$.

Demonstração. Basta aplicar a equação (5.25) em cada item. □

Teorema 5.2.8. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação analítica tal que $\text{Disc } F = \{0\}$, satisfazendo a condição de Milnor (b) e M ímpar. Então $\chi(F_F) = 1$ se, e somente se, $DB(F) = 0$.

Demonstração. Assuma que $\chi(F_F) = 1$. Pelo Lema 5.2.7, concluímos que, em qualquer caso, $\chi(\partial F_{F_I}) = \chi(\mathcal{L}_{F_I})$. Além disso, a última igualdade para algum I claramente implica na igualdade para todo $I, 1 \leq I \leq N < M$. Portanto, $DB(F) = 0$.

Agora, assumamos que $DB(F) = 0$. Logo $\chi(\partial F_{F_I}) = \chi(\mathcal{L}_{F_I})$ para todo $I, 1 \leq I \leq N$. Independentemente da paridade de I , pelo Lema 5.2.7, podemos concluir que $2\chi(F_F) = 2$. Portanto, $\chi(F_F) = 1$.

□

Corolário 5.2.9. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$, um germe de aplicação analítica tal que $\text{Disc } F = \{0\}$, F satisfazendo a condição de Milnor (b) e M ímpar. Se $\chi(F_F) \neq 1$, então para todo $I, 1 \leq I \leq N$, o bordo da fibra de Milnor ∂F_{F_I} e seu respectivo link \mathcal{L}_{F_I} de F_I não podem ser homotopicamente equivalentes.

Demonstração. Segue diretamente de aplicar o Teorema 5.2.8.

□

O seguinte resultado fornece uma classe de germes de aplicação em que uma das duas condições no Teorema 5.2.8 é satisfeita. Além disso, fornece outra demonstração de (SANTOS; DREIBELBIS; DUTERTRE, 2012, Proposição 3, item (ii), p. 71).

Corolário 5.2.10. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, $M > N \geq 2$ um germe de aplicação analítica com singularidade isolada na origem e M ímpar. Então, para cada $I, 1 \leq I \leq N < M$, temos que $\chi(F_{F_I}) = 1$.

Demonstração. Dado que F tem singularidade isolada na origem, pela inclusão (4.1) temos que $\text{Sing } F_I \subseteq \{0\}$, para cada $I, 1 \leq I \leq N < M$. É suficiente considerar o caso $\text{Sing } F_I = \{0\}$, pois no caso em que $\text{Sing } F_I = \emptyset$ temos que F_{F_I} é contráctil e, portanto, $\chi(F_{F_I}) = 1$.

Dado que M é ímpar, temos que o link \mathcal{L}_{F_I} é não vazio, para cada $I, 1 \leq I \leq N$. De fato \mathcal{L}_{F_I} é difeomorfo a ∂F_{F_I} , para cada $I, 1 \leq I \leq N < M$. Consequentemente, $\chi(\mathcal{L}_{F_I}) = \chi(\partial F_{F_I})$, para todo $I, 1 \leq I \leq N < M$. Portanto, $DB(F_I) = 0$ e pelo Teorema 5.2.8 concluímos que $\chi(F_{F_I}) = 1$ para cada $I, 1 \leq I \leq N < M$.

□

O seguinte exemplo mostra que para dimensão M ímpar é fácil construir uma família de germes de aplicação cuja característica de Euler da Fibra de Milnor não é igual que 1.

EXEMPLO 5.2.11. Seja $F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de aplicação analítica com $\text{Sing } F = \{0\}$ e M ímpar. Identificando \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 , considere $G : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ o germe de aplicação recobridora definido por $G(z) = z^t$, $z \in \mathbb{C}$ e $t \geq 2$. Além disso, G é localmente um difeomorfismo e $\text{Sing } G = \{0\}$. Consequentemente, para cada $z \in \mathbb{C}$, $0 < \|z\| \ll 1$, a fibra $G^{-1}(z)$ consiste de um número finito de pontos $t := |G^{-1}(z)|$. Por outro lado, da inclusão (4.1) e o Teorema 4.3.7, concluímos que a composição $H = G \circ F : (\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tem valor crítico isolado e satisfaz a condição de Milnor (b). Consequentemente, a aplicação

H admite uma fibração no tubo de Milnor com fibra $F_H = \sqcup_{i=1}^t F_F$ (t cópias disjuntas de F_F). Logo, temos que $\chi(F_H) = t\chi(F_F) = t \geq 2$. Pelo Corolário 5.2.10, concluímos $\chi(F_H) = t \geq 2$.

OBSERVAÇÃO 5.2.12. Para a existência de germes de aplicação $(\mathbb{R}^M, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, com $M > N \geq 2$, M ímpar e singularidade isolada na origem o leitor pode consultar (SANTOS *et al.*, 2016, Seção 5.2, p. 101).

REFERÊNCIAS

- BRÖCKER, T.; JÄNICH, K. **Introduction to differential topology**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982. vii+160 p. Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas. ISBN 0-521-24135-9. Citado na página 24.
- CHEN, Y.; TIBĂR, M. On singular maps with local fibration. **Rev. Roumaine Math. Pures Appl.**, v. 68, n. 1-2, p. 9–17, 2023. ISSN 0035-3965. Disponível em: <<https://doi.org/10.59277/rrmpa.2023.9.17>>. Citado nas páginas 35, 46, 50, 51 e 59.
- CISNEROS-MOLINA, J. L.; SEADE, J.; GRULHA JR., N. G. On the topology of real analytic maps. **Internat. J. Math.**, v. 25, n. 7, p. 1450069, 30, 2014. ISSN 0129-167X,1793-6519. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0129167X14500694>>. Citado na página 66.
- CISNEROS-MOLINA, J. L.; SEADE, J.; SNOUSSI, J. Refinements of Milnor’s fibration theorem for complex singularities. **Adv. Math.**, v. 222, n. 3, p. 937–970, 2009. ISSN 0001-8708,1090-2082. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.05.010>>. Citado na página 63.
- DURFEE, A. H. Neighborhoods of algebraic sets. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 276, n. 2, p. 517–530, 1983. ISSN 0002-9947,1088-6850. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1999065>>. Citado na página 66.
- DUTERTRE, N.; SANTOS, R. N. A. d. Topology of Real Milnor Fibrations for Non-Isolated Singularities. **International Mathematics Research Notices**, v. 2016, n. 16, p. 4849–4866, 10 2015. ISSN 1073-7928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/imrn/rnv286>>. Citado nas páginas 26, 35, 46, 47, 59, 66 e 67.
- HAMM, H. Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. **Math. Ann.**, v. 191, p. 235–252, 1971. ISSN 0025-5831,1432-1807. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01578709>>. Citado na página 19.
- HANSEN, N. B. **Milnor’s Fibration Theorem for Real Singularities**. Dissertação (Mestrado) — Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Oslo, 2014. Citado na página 33.
- HATCHER, A. **Algebraic topology**. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 24.
- IOMDIN, I. Some properties of isolated singularities of real polynomial mappings. **Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR**, Springer, v. 13, p. 342–345, 1973. Citado nas páginas 46 e 59.
- LAMOTKE, K. The topology of complex projective varieties after s. lefschetz. **Topology**, v. 20, n. 1, p. 15–51, 1981. ISSN 0040-9383. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0040938381900136>>. Citado na página 24.

- LOOIJENGA, E. J. N. **Isolated singular points on complete intersections**. Cambridge University Press, Cambridge, 1984. v. 77. xi+200 p. (London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 77). ISBN 0-521-28674-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511662720>>. Citado na página 35.
- MASSEY, D. B. Real analytic Milnor fibrations and a strong Łojasiewicz inequality. In: **Real and complex singularities**. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, (London Math. Soc. Lecture Note Ser., v. 380). p. 268–292. ISBN 978-0-521-16969-1. Citado nas páginas 19, 30, 34, 37 e 38.
- MATHER, J. Notes on topological stability. **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, v. 49, n. 4, p. 475–506, 2012. ISSN 0273-0979,1088-9485. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-2012-01383-6>>. Citado na página 26.
- MILNOR, J. **Singular points of complex hypersurfaces**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. No. 61. iii+122 p. (Annals of Mathematics Studies, No. 61). Citado nas páginas 19, 21, 30, 46 e 58.
- OUTERELO, E.; RUIZ, M. J. **Mapping degree theory**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 108. Citado na página 62.
- PARAMESWARAN, A. J.; TIBĂR, M. Thom irregularity and Milnor tube fibrations. **Bull. Sci. Math.**, v. 143, p. 58–72, 2018. ISSN 0007-4497. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2017.12.001>>. Citado na página 32.
- RIBEIRO, M.; SANTAMARIA, I.; SILVA, T. da. **Some remarks about ρ -regularity for real analytic maps**. 2023. Citado nas páginas 32 e 37.
- RIBEIRO, M. F. New classes of mixed functions without Thom regularity. **Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)**, v. 51, n. 1, p. 317–332, 2020. ISSN 1678-7544,1678-7714. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00574-019-00154-z>>. Citado na página 32.
- SANTOS, R. A. D.; HOHLENWERGER, M. A. B.; SAEKI, O.; SOUZA, T. O. New examples of Neuwirth–Stallings pairs and non-trivial real Milnor fibrations. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 66, n. 1, p. 83–104, 2016. ISSN 0373-0956,1777-5310. Disponível em: <http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2016__66_1_83_0>. Citado na página 70.
- SANTOS, R. Araújo dos; DREIBELBIS, D.; DUTERTRE, N. Topology of the real Milnor fiber for isolated singularities. In: **Real and complex singularities**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, (Contemp. Math., v. 569). p. 67–75. ISBN 978-0-8218-5359-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/conm/569/11242>>. Citado nas páginas 46, 61 e 69.
- SANTOS, R. N. A. dos; RIBEIRO, M. F.; TIBĂR, M. Milnor–hamm sphere fibrations and the equivalence problem. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 72, n. 3, p. 945–957, 2020. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1574154014>>. Citado nas páginas 19, 34 e 38.
- SANTOS, R. N. Araújo dos; CHEN, Y.; TIBĂR, M. Singular open book structures from real mappings. **Cent. Eur. J. Math.**, v. 11, n. 5, p. 817–828, 2013. ISSN 1895-1074,1644-3616. Disponível em: <<https://doi.org/10.2478/s11533-013-0212-1>>. Citado nas páginas 30, 32 e 35.

SANTOS, R. N. Araújo dos; RIBEIRO, M. F.; TIBĂR, M. Fibrations of highly singular map germs. **Bull. Sci. Math.**, v. 155, p. 92–111, 2019. ISSN 0007-4497. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2019.05.001>>. Citado nas páginas 19, 30, 34 e 38.

SILVA, M. F. R. **Singular Milnor Fibrations**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/T.55.2018.tde-06072018-115031>>. Citado nas páginas 34 e 37.

SPANIER, E. H. **Algebraic topology**. Springer New York, NY, 1966. ISBN 978-0-387-94426-5. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9322-1>>. Citado na página 25.

TRÁNG, L. D. Some remarks on relative monodromy. In: **Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)**. [S.l.]: Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977. p. 397–403. ISBN 90-286-0097-3. Citado nas páginas 19 e 31.

_____. Notes on non-isolated singularities. In: **School on real and complex singularities in São Carlos, 2012**. Math. Soc. Japan, [Tokyo], 2016, (Adv. Stud. Pure Math., v. 68). p. 143–170. ISBN 978-4-86497-030-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.2969/aspm/06810143>>. Citado nas páginas 24 e 30.

