

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 26/05/2010

Assinatura: _____

Sobre 3-variedades suportando certas ações de \mathbb{R}^2 e uma Conjectura de Morse ¹

Walter Teófilo Huaraca Vargas

Orientador: *Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Maio de 2010

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

***A Urbano...** gracias papá,
por cuidarme siempre, por ser
mi guía, mi horizonte, mi
límite ante los excesos, mi
amigo y mi mejor consejero.*

***A Felicinda...** la mujer de
los ojos de agua y el corazón
de oro, en la Lima de mis tem-
blores.*

***A Ruth Mery,** a que con-
vive com meu humor (o bom
e o ruim), com minha dis-
tracção, com "minhas ações".
A ela, por sua paciência,
porque às vezes me faz perder
a minha, pela sua ternura, sua
bronca, sua sabedoria inata,
por sua habilidade na cozinha,
em tudo; por seu coração,
seus olhos, seu sorriso, enfim
... pela sua própria existên-
cia. Não sei que teria feito sem
você!!!*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me permitido crescer diante das dificuldades, pela felicidade de poder compartilhar com todas as pessoas que amo a conquista de esta etapa da minha vida.

Agradeço aos que mais amo, minha família. Aos meus pais, Felicinda e Urbano; a minha esposa Ruth Mery e meus irmãos Homer, Wilfredo, América e Wilber. Esta conquista é mais de vocês que minha.

Agradeço ao Professor Carlos Alberto Maquera Apaza por sua amizade, orientação, conhecimentos ensinados e a força que me passou nas horas difíceis do doutorado.

Agradeço ao Professor Carlos Teobaldo Gutierrez (in memoriam) por ter iniciado este meu caminho, pela sua gargalhada contagiante; inconfundível e sua simplicidade para ensinar e acolher os alunos.

A Vanessa e Wesley por se tornarem o mais perto de uma família no Brasil, obrigado a vocês por ter feito esta caminhada de nosso lado.

A os professores do ICMC, de forma muito especial a os professores Ali, Biasi, Daniel Smania, Regilene e Marcelo Saia.

A meus amigos que me incentivaram e me ajudaram a transpor os obstáculos. Em especial agradeço a Catiana, Jean, Luiz, Marcio, Michelle, Napoleón, Norbil, Patty e Renato, pela amizade, companheirismo e por fazer mais fácil a minha estada em São Carlos.

A os funcionários do ICMC pela sua disposição constante para me ajudar.

A Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Muito Obrigado!!

Resumo

Primeiramente consideramos uma família de C^2 -ações de \mathbb{R}^2 sobre uma 3-variedade fechada. Uma das condições que esta família satisfaz é que admite apenas um número finito de órbitas singulares, sendo todas estas difeomorfas ao círculo. Para esta família, daremos uma descrição da estrutura das órbitas assim como das 3-variedades que as suportam. Isto generaliza resultados de classificação de ações localmente livres (isto é, sem singularidades) de \mathbb{R}^2 sobre 3-variedades fechadas obtidos por Chatelet-Rosenberg-Roussarie-Weil em [12], [30] e [31].

Finalmente, consideramos uma ação ϕ de \mathbb{R}^2 sobre uma 3-variedade fechada N topologicamente transitiva (isto é, tem uma órbita densa em N). Diremos que ϕ é *metricamente transitiva* se dado qualquer conjunto compacto e ϕ -invariante K , então ou K ou seu complementar tem medida nula com respeito a medida de Lebesgue. É conhecido que toda ação ϕ metricamente transitiva é topologicamente transitiva e que, em geral, a recíproca não é certa. No entanto, Morse [27] em 1946 propôs a seguinte conjectura: *Qualquer sistema dinâmico topologicamente transitivo, com algum grau de regularidade, é metricamente transitivo*. A frase "algum grau de regularidade", pode significar, por exemplo, que o sistema dinâmico é analítico real, suave, tem um número finito de singularidades, etc.

Na segunda parte da tese, mostramos a conjectura de Morse para o sistema dinâmico definido por uma \mathbb{R}^2 -ação sobre uma 3-variedade fechada, cujo conjunto singular é uma união finita de órbitas círculo. Isto generaliza um resultado análogo obtido por Ding [18] para fluxos sobre superfícies fechadas.

Abstract

First we consider a family of C^2 actions of \mathbb{R}^2 on a closed 3-manifold. One of the conditions of this family is that it admits only a finite number of singular orbits, which are all diffeomorphic to circle. For this family we will give a description of the structure of the orbits as well the 3-manifolds supporting this actions. This generalizes results of classification for locally free actions (i. e. without singularities) of \mathbb{R}^2 on closed 3-manifolds obtained by Chatelet-Rosenberg-Roussarie-Weil in [12], [30] and [31].

Finally, we consider an action ϕ of \mathbb{R}^2 on a closed 3-manifold N which is topologically transitive (i.e. has a dense orbit in N). We will say that ϕ is *metrically transitive* if, given any ϕ -invariant compact set K , then, either K or its complement has zero measure with respect to Lebesgue measure. It is known that every action ϕ topologically transitive is metrically transitive and that, in general, the reciprocal is not true. However, Morse [27] in 1946 proposed the following conjecture: *any topologically transitive dynamical system with any degree of regularity is metrically transitive*. The phrase "some degree of regularity" may mean, for example, that the dynamical system is real analytic, smooth, have a finite number of singularities, etc.

In the second part of the thesis, we show the conjecture to the Morse for an dynamical system defined by a \mathbb{R}^2 -action on a closed 3-manifold whose singular set is a finite union of orbits circle. This is a generalization of a similar result obtained by Ding in [18] for flows on closed surfaces.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Preliminares | 5 |
| 2.1 | Setores de campos vetoriais planares | 5 |
| 2.2 | Fins de variedades | 8 |
| 2.3 | Folheações | 9 |
| 2.4 | Posição geral | 12 |
| 2.5 | Ações de grupos | 14 |
| 2.6 | Suspensão de campos de vetores | 18 |
| 3 | 3-variedades que suportam ações de \mathbb{R}^2 | 21 |
| 3.1 | A estrutura das órbitas em torno das órbitas círculo | 22 |
| 3.2 | Construindo as seções Σ_i | 25 |
| 3.2.1 | Caso I: Não existem separatrizes homoclínicas. | 28 |
| 3.2.2 | Caso II: Existem separatrizes homoclínicas. | 32 |
| 4 | A Conjectura de Morse para \mathbb{R}^2-ações | 35 |
| 4.1 | A Conjectura de Morse para ações localmente livres | 36 |
| 4.2 | A Conjectura de Morse para ações singulares | 41 |
| 4.2.1 | Um exemplo | 41 |
| 4.2.2 | A Conjectura de Morse para ações singulares I. | 43 |
| 4.2.3 | A Conjectura de Morse para ações singulares II. | 48 |
| 5 | Conclusões e comentários | 53 |
| | Bibliografia | 57 |

Introdução

A Teoria clássica dos sistemas dinâmicos compreende o estudo qualitativo das órbitas de uma aplicação ou de um campo de vetores definido sobre uma variedade fechada diferenciável N . Se as aplicações consideradas são invertíveis ou o campo considerado é C^1 , podemos interpretar estes sistemas como ações dos grupos $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$, respectivamente. Naturalmente podemos tentar entender sistemas dinâmicos, mais gerais dos que os clássicos, definidos por ações de grupos de Lie. Em particular, quando o grupo é \mathbb{R}^k , com $k > 1$.

Na tese consideramos sistemas dinâmicos definidos por ações de \mathbb{R}^2 de classe C^2 sobre uma 3-variedade fechada N de classe C^∞ e obtemos resultados em duas linhas, as quais descrevemos na sequência.

Estrutura de órbitas de certas ações com singularidades. Primeiramente consideramos uma família de C^2 -ações de \mathbb{R}^2 com singularidades sobre uma 3-variedade fechada. A órbita \mathcal{O}_p de um ponto $p \in M$ pela ação ϕ é *singular* se $\dim(\mathcal{O}_p) < 2$. Caso contrário, chamaremos \mathcal{O}_p de *órbita regular*; denotaremos o conjunto das órbitas singulares da ação ϕ por $Sing(\phi)$.

Quando a ação é localmente livre (isto é, sem singularidades) Rosenberg-Roussarie-Weil ([12], [30] e [31]) dão uma descrição e classificação completa destas ações, assim como das variedades que as suportam. Este estudo é pouco compreendido quando a ação ϕ possui singularidades, mais ainda quando é considerada uma folheação com singularidades. Entre os trabalhos existentes que podemos citar se encontram, [6], [9], [1] e [5]. Em [6] Brito e Maquera descrevem a estrutura das órbitas de uma \mathbb{R}^2 -ação sobre o toro sólido $D^2 \times \mathbb{S}^1$ de modo que as únicas órbitas compactas desta ação são $\partial D^2 \times \mathbb{S}^1$ e $\{0\} \times \mathbb{S}^1$,

com $0 \in D^2$.

Por outro lado, para folheações com um número finito de singularidades, Camacho e Scardua em [9] mostraram que \mathbb{S}^3 é a única 3-variedade orientável, fechada e conexa que suporta uma folheação singular, com pontos singulares do tipo Morse, tendo mais centros que selas e sem ligações de selas. Porém estas folheações não são definidas por \mathbb{R}^2 -ações. Também, em [1] os autores estudam folheações singulares cujo conjunto singular é união finita de pontos; no entanto, os autores impõem a condição que as folhas sejam fechadas. Neste contexto, o nosso primeiro resultado obtido na tese, no Capítulo 3, é:

Teorema A. *Sejam N uma 3-variedade C^∞ , orientável, conexa e fechada, e ϕ uma C^2 ação de \mathbb{R}^2 sobre N tal que $\text{Sing}(\phi) = S_1 \cup \dots \cup S_k$, onde S_i é uma órbita difeomorfa ao círculo \mathbb{S}^1 . Suponhamos que todas as separatrizes de cada S_i são órbitas homoclínicas isoladas (vide Definição 3.1). Então, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ existem uma superfície com bordo de gênero zero Σ_i transversa à ação e uma subvariedade compacta com bordo N_i que é uma vizinhança de S_i e homeomorfa à suspensão de Σ_i tais que:*

- (i) *cada componente conexa do bordo de N_i é um 2-toro T que é ou tangente ou transverso à ação. Além disso, se T é transverso a folheação sobre T induzida pela ação ϕ é topologicamente equivalente à folheação definida por um fluxo linear no toro \mathbb{T}^2 .*
- (ii) *cada componente conexa de $N \setminus (\cup_i^k N_i)$ é difeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$.*

O Teorema A descreve completamente a estrutura das órbitas das ações que satisfazem as hipóteses do Teorema A, pois a descrição das órbitas em cada componente de $N \setminus (\bigcup_i^k N_i)$ cuja fronteira é tangente a ϕ é dada pelos trabalhos de Rosenberg-Roussarie-Chatelet-Weil ([12], [15], [30] e [31]). Além disso, se uma componente conexa T da fronteira de N_i é transversal à ação ϕ então o item (i) do Teorema A implica que as órbitas de ϕ no saturado de T são todas cilindros ou todas planos densos. Mas ainda, na prova do Teorema A a descrição das órbitas em N_i aparece naturalmente uma vez que a estrutura das intersecções das órbitas da ação com Σ_i é descrita (ver Proposição 3.4).

Uma conjectura de Morse para ações. A seguir, consideramos uma ação ϕ de \mathbb{R}^2 de classe C^2 sobre uma 3-variedade fechada N de classe C^∞ topologicamente transitiva (isto é, tem uma órbita densa em N). Diremos que ϕ é *metricamente transitiva* se dado qualquer conjunto compacto e ϕ -invariante K , então ou K ou seu complementar tem medida nula com respeito a medida de Lebesgue. É conhecido que toda ação ϕ metricamente transitiva

é topologicamente transitiva e que, em geral, a recíproca não é certa. No entanto, Morse [27] em 1946 propôs a seguinte conjectura: “*Qualquer sistema dinâmico topologicamente transitivo, com algum grau de regularidade, é metricamente transitivo*”. A frase “algum grau de regularidade”, pode significar, por exemplo, que o sistema dinâmico é analítico real, suave, tem um número finito de singularidades, etc.

Quando ϕ é uma ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{S}^1 , existem resultados positivos da Conjectura de Morse. Neste caso, a ação é definida por um difeomorfismo f . H. Poincaré (Teorema de Classificação de Poincaré, [22]) mostra que se uma ação de classe C^0 de \mathbb{Z} sobre \mathbb{S}^1 que seja topologicamente transitiva, tal que f possui número de rotação irracional, então a ação é minimal (em particular, metricamente transitiva). Também existe o clássico resultado devido a Denjoy [16], que em nossa linguagem diz que se ϕ é uma ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{S}^1 de classe C^2 que preserva orientação e f possui número de rotação irracional, então toda órbita de f é densa. Em particular, a ação é metricamente transitiva.

Quando ϕ é uma ação de \mathbb{R} (um fluxo) vários resultados são conhecidos, entre eles, podemos citar os trabalhos de T. Ding: Em [17], mostrou que se ϕ é analítica real e topologicamente transitiva sobre o toro 2-dimensional \mathbb{T}^2 , então ela é metricamente transitiva. Em [18], mostrou que a hipótese do sistema ser analítico pode ser substituída por ser de classe C^1 , entretanto o número de singularidades tem que ser finito. Devemos observar que o segundo resultado é válido para qualquer superfície. Também em [3], Aranson e Zhuzhoma mostraram que se ϕ é uma ação analítica real de \mathbb{R} sobre uma superfície qualquer, então a conjectura de Morse é válida.

O segundo resultado principal da tese estabelece a Conjectura de Morse para um sistema dinâmico definido por uma \mathbb{R}^2 -ação com singularidades. Mais precisamente mostramos que:

Teorema B. *Sejam N uma 3-variedade orientável de classe C^∞ , conexa e fechada, e ϕ uma C^2 ação de \mathbb{R}^2 sobre N tal que seu conjunto singular é uma união finita de órbitas círculo S_1, \dots, S_k . Se ϕ é topologicamente transitiva, então ϕ é metricamente transitiva.*

Como consequência dos trabalhos de Chatelet-Rosenberg-Roussarie e Weil, em [12], [30] e [31]; segue que no caso da ação ser localmente livre (sem singularidades) toda ação topologicamente transitiva é metricamente transitiva (vide Teorema 4.1).

Usando um exemplo devido a Ding apresentado em [18], podemos construir um exemplo de uma ação ϕ de classe C^∞ de \mathbb{R}^2 sobre $M = N \times \mathbb{S}^1$ topologicamente transitiva, porém não metricamente transitiva sobre M (Proposição 4.4). Esta ação ϕ possui uma infinidade de órbitas círculo não enumerável.

No caso que o fluxo possui um número enumerável de singularidades Marzougui, em [25], provou a Conjectura de Morse. Resta em aberto o análogo para ações de \mathbb{R}^2 .

A tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, lembraremos alguns fatos básicos que usaremos no decorrer de nosso trabalho e também alguns resultados preliminares sobre transitividade topológica e transitividade métrica para ações de \mathbb{R}^2 sobre uma 3-variedade N .

No Capítulo 3, demonstraremos o Teorema A. Iniciaremos o capítulo estudando a estrutura de órbitas da ação sobre uma vizinhança das singularidades. Na Seção 3.2 estenderemos esta construção para um conjunto K compacto, periódico e transversal a um fluxo da ação. Isto permitirá construir uma superfície Σ contendo K ainda transversal a esse fluxo. A ação ϕ induzirá um campo de vetores em Σ o qual dará informações da estrutura das órbitas de ϕ em torno de K . Finalmente, apresentaremos a prova do Teorema A.

O objetivo do Capítulo 4 é mostrar o Teorema B. Na primeira seção, estudaremos a Conjectura de Morse quando $Sing(\phi) = \emptyset$, usando trabalhos de Rosenberg e seus colaboradores; e algumas generalizações naturais dos fluxos topologicamente transitivos para \mathbb{R}^2 -ações, conseguimos responder afirmativamente a Conjectura de Morse.

A seguir, na Seção 4.2 estudaremos a Conjectura de Morse quando o conjunto singular da ação ϕ for uma união finita de órbitas círculo. Na Subseção 4.2.1 mostraremos que se N é uma variedade fechada, compacta e conexa e ϕ é uma ação de classe C^∞ sobre N , então para ter alguma chance de que a conjectura de Morse seja verdadeira, devemos impor alguma condição sobre o conjunto $Sing(\phi)$; de fato nesta subseção mostramos que existem ações de classe C^∞ , cujo conjunto singular é infinito não enumerável, topologicamente transitivas mas, não metricamente transitivas (Proposição 4.4).

Para apresentar a prova do Teorema B precisamos distinguir duas situações. Assim na Subseção 4.2.2 mostramos a Conjectura de Morse com a presença de uma órbita cilíndrica densa, para isso reduziremos o problema ao caso de um fluxo numa superfície, aqui é fundamental o Teorema 4.2. Na Subseção 4.2.3 estudaremos a Conjectura quando a folha densa tem o tipo topológico de um plano e neste caso, é usado um resultado de folheações por planos numa variedade obtida por Biasi e Maquera em [5].

Finalmente, no Capítulo 5, apresentaremos problemas e algumas considerações finais a respeito dos resultados obtidos no presente trabalho.

Preliminares

Neste capítulo introduziremos a linguagem necessária para os capítulos posteriores e também alguns resultados preliminares sobre transitividade topológica e transitividade métrica para ações de \mathbb{R}^2 sobre uma 3-variedade N .

2.1 Setores de campos vetoriais planares

Sejam U um subconjunto aberto do plano euclidiano \mathbb{R}^2 e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$. Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial ordinária

$$x' = X(x). \quad (2.1)$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\gamma : I \rightarrow U$ (I intervalo de \mathbb{R}) tais que $\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$ para todo $t \in I$, são chamadas de curvas integrais do campo X .

Dados $p \in U$ e uma curva integral $\gamma : I \rightarrow U$ de X , diremos que γ passa pelo ponto $p \in U$, se $0 \in I$ e $\gamma(0) = p$; neste caso, diremos que γ é uma solução passando por p ou que γ é parte da órbita de p .

No que segue assumiremos que $0 \in U$ é um ponto singular isolado do campo X , isto é, existe uma vizinhança $V \subset U$ de 0 tal que $X(0) = 0$ e $X(q) \neq 0$ para $q \in V \setminus \{0\}$.

Diremos que 0 é um *ponto de rotação do campo de vetores* X , se qualquer vizinhança dele contém uma curva integral simples e fechada cujo interior contenha o ponto 0 (vide Figura 2.1).

Uma solução $\gamma(t)$ do campo X passando pelo ponto p , a qual não é identicamente nula e definida sobre $I \supseteq [0, +\infty)$ (resp. $I \supseteq (-\infty, 0]$) é chamada de *solução positivamente nula*

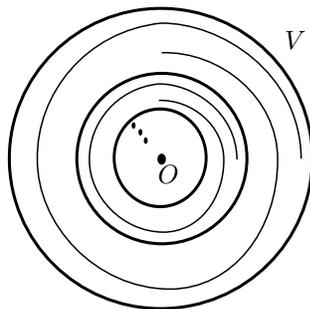


Figura 2.1: Ponto de Rotação

(resp. *negativamente nula*) se o omega limite $\omega(p) = \{0\}$ (resp.o alfa limite $\alpha(p) = \{0\}$). Como é conhecido, $\omega(p)$ denotará o conjunto de pontos $q \in U$ de modo que existe $t_n \in [0, +\infty)$, com $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\gamma(t_n) \rightarrow q$ quando $n \rightarrow \infty$. (Analogamente, o conjunto $\alpha(p)$ é o conjunto de pontos $q \in U$ de modo que existe $t_n \in (-\infty, 0]$, com $t_n \rightarrow -\infty$ tal que $\gamma(t_n) \rightarrow q$ quando $n \rightarrow \infty$).

A seguinte proposição pode ser encontrada em [21].

Proposição 2.1. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores como acima, definido sobre o aberto U . Suponhamos que $0 \in U$ não é um ponto de rotação. Então existe pelo menos uma solução positivamente nula (ou negativamente nula).*

No que segue, assumiremos que 0 não é um ponto de rotação para o campo X e definiremos a noção de setores do campo.

Sejam $D \subset U$ um disco aberto contendo 0 e $C = \partial D$ uma curva de Jordan positivamente orientada. Uma solução $\gamma(t)$ de X é chamada de *solução base positiva para a curva C* (resp. *solução base negativa para a curva C*) se $I \supseteq [0, \infty)$ (resp. $I \supseteq (-\infty, 0]$), $\gamma(0) \in C$, $\gamma(t) \in D$ para $t \neq 0$ e se $\gamma(t)$ é uma solução nula positivamente (resp. negativamente).

Sejam $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ duas soluções base para C . Consideremos o conjunto aberto S de D com bordo consistindo de 0 , os arcos $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ e o subarco fechado orientado de C , $C_{1,2}$ que liga $\gamma_1(0)$ com $\gamma_2(0)$, será chamado de *setor* determinado pelo par $\gamma_1(0)$ e $\gamma_2(0)$.

Consideremos o caso em que exista uma solução $\gamma = \gamma_0(t)$, com $t \in (-\infty, \infty)$ interior ou tangente à C para todo t e $\gamma_0(t + t_1) = \gamma_1(t)$ para $t \geq 0$, $\gamma_0(t + t_2) = \gamma_2(t)$ para $t \leq 0$ e $t_1 \geq t_2$ fixos; onde γ_1 é uma solução base positiva e γ_2 é uma solução base negativa. O ponto 0 e o arco $\gamma = \gamma_0(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ formam uma curva fechada simples J com interior I . Se S contém I , então ele é chamado de *setor elíptico* (vide Figura 2.2.).

Um setor S com as propriedades: que não é um setor elíptico e que $S \cup C_{1,2}$ não contém soluções base é chamado de *setor hiperbólico*. As soluções base $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ de um setor

hiperbólico são positiva e negativa ou viceversa.

Um setor S com a propriedade que ambos arcos do bordo $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ são positivos, (respectivamente, negativos) e o fecho de S não contém soluções base negativas (respectivamente, positivas) é chamado de *setor parabólico positivo* (respectivamente *parabólico negativo*); vide a Figura 2.3.

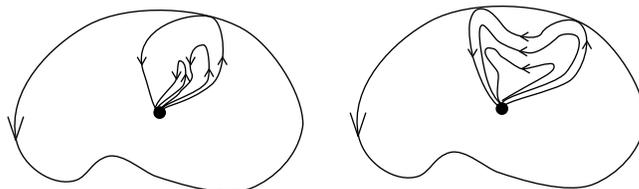


Figura 2.2: setor elíptico.

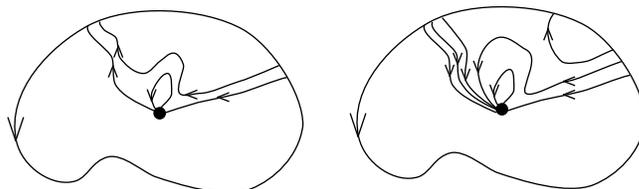


Figura 2.3: Setor hiperbólico e parabólico.

✠ **Observação 2.1.** Considerando um campo de vetores $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $0 \in U$ singularidade isolada, então:

- (i) qualquer tipo de setor pode conter soluções $\gamma(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, tal que $\gamma(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$.
- (ii) setores hiperbólicos e parabólicos podem conter arcos abertos de soluções $\gamma = \gamma(t)$ tendo ambos extremos em $C_{1,2}$.

Uma noção que usaremos muito no desenvolvimento de nosso trabalho é a seguinte:

Definição 2.1. Uma solução base positiva ou negativa é chamada de *separatriz do campo* X se ela é uma componente da fronteira de dois setores diferentes.

Os seguintes resultados podem ser encontrado em [21].

Teorema 2.1. *Se $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de vetores de classe C^1 definido num aberto e simplesmente conexo U que contém 0 , tal que 0 é uma singularidade isolada. Sejam D e C disco e curva como acima. Então existe no máximo um número finito de setores elípticos e hiperbólicos em D .*

Teorema 2.2. *Seja X como no teorema anterior. Se o fecho de todos os setores elípticos e hiperbólicos é retirado do interior de D , então o conjunto restante é vazio, ou o interior de D ou a união de um número finito de setores parabólicos dois a dois disjuntos.*

2.2 Fins de variedades

Seja N um variedade conexa e não compacta. Diremos que um subconjunto de N é *ilimitado* se seu fecho em N não é compacto. Denotemos por $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ a família de todos os subconjuntos compactos de N . Usaremos *cadeias descendentes*

$$U_{\alpha_1} \supsetneq U_{\alpha_2} \supsetneq \dots \supsetneq U_{\alpha_n} \supsetneq \dots$$

onde cada U_{α_i} é uma componente conexa ilimitada de $L \setminus K_{\alpha_i}$ e

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Sejam $\mathcal{U} = \{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ e $\mathcal{V} = \{V_{\beta_i}\}_{i=1}^{\infty}$ dois de tais cadeias descendentes. Diremos que elas são *equivalentes* ($\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$) se, para cada $i \geq 1$, existe $n > i$ tal que $U_{\alpha_i} \supset V_{\beta_n}$ e $V_{\beta_i} \supset U_{\alpha_n}$. Claramente, \sim é uma relação de equivalência.

Definição 2.2. Se $\mathcal{U} = \{U_{\alpha_1} \supsetneq U_{\alpha_2} \supsetneq \dots \supsetneq U_{\alpha_n} \supsetneq \dots\}$ é uma cadeia descendente como acima, então a classe de equivalência por \sim é chamado de *fim de N* , denotado por e . Diremos que $\mathcal{U} \in e$ é um *sistema fundamental de vizinhanças de e em N* . O conjunto de todos os fins de N é denotado por $\mathcal{E}(N)$. Se um conjunto aberto $U \subset N$ contém algum elemento de um sistema fundamental de vizinhanças de um fim e de N , então U é chamado de *vizinhança de e em N* .

Precisamos dar uma topologia ao conjunto $N \cup \mathcal{E}(N)$ para obter uma compactificação de N . Para isso devemos saber como convergem as sequências neste conjunto. Uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de pontos de N *converge a um ponto $e \in \mathcal{E}(N)$* se qualquer vizinhança U de e em N contém todos, excepto um número finito, dos x_i . Uma sequência $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de fins converge para o fim e se qualquer vizinhança U de e em N é uma vizinhança de todos, excepto um número finito, dos fins e_i .

Exemplo 2.1. Consideremos a superfície da Figura 2.4. Existem infinitos fins. A sequência bi-infinita $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ consiste de fins isolados; além disso, cada fim e_i possui uma vizinhança (o correspondente tubo vertical) que não é vizinhança de qualquer outro fim. Por outro lado, qualquer vizinhança de e_∞ é uma vizinhança de e_k com $k \geq N$ e qualquer vizinhança de $e_{-\infty}$ é uma vizinhança de e_k com $k \leq -N$, para N suficientemente grande. Isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e_k &= e_\infty \\ \lim_{k \rightarrow -\infty} e_k &= e_{-\infty}. \end{aligned}$$

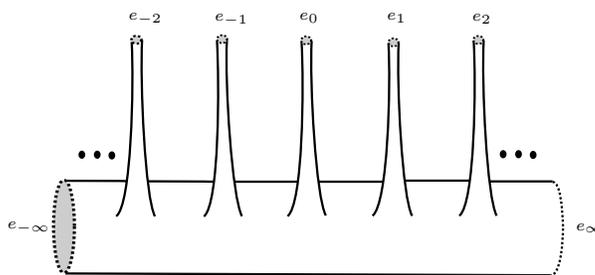


Figura 2.4: Fins isolados próximos de dois fins limite.

Agora podemos definir uma topologia em $N^* = N \cup \mathcal{E}(N)$. Todo conjunto aberto $U \subset N$ é aberto em N^* . Se um aberto U de N é conexo e ilimitado, com fronteira compacta, então ele pertence a um sistema de vizinhanças de pelo menos um fim e . Se $U^* \subset N^*$ denota a união de U e todos os fins dos quais U é uma vizinhança, então U^* também é um subconjunto aberto de N^* . A topologia de N^* é a menor contendo todos os abertos anteriores.

A seguinte proposição pode ser encontrada em [10].

Proposição 2.2. O espaço N^* é compacto, conexo e segundo contável (isto é, tem uma base enumerável). O conjunto dos fins $\mathcal{E}(N) \subset N^*$ é um subespaço compacto, totalmente desconexo, separável e metrizável e $N \subset N^*$ é um subconjunto aberto com sua topologia usual.

2.3 Folheações

Definiremos o conceito de folheação seguindo o livro de P. Molino [26], também apresentaremos definições alternativas (equivalentes no caso de folheações regulares) que usaremos ao longo do trabalho. No que segue, $\mathfrak{X}^r(N)$ denotará o conjunto dos campos de vetores de classe C^r sobre a variedade N .

Definição 2.3. *Uma folheação de classe C^r ($r \geq 1$) de uma variedade N é uma partição \mathcal{F} de N por subvariedades imersas e conexas de classe C^r , chamadas *folhas*, tal que o módulo $\mathfrak{X}^r(\mathcal{F})$, dos campos de vetores C^r definidos em N e tangentes às folhas de \mathcal{F} é transitivo, isto é, dados $p \in N$ e $v \in T_p L$, onde L é a folha de \mathcal{F} passando por p , existe um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(N)$ tal que $X(p) = v$.*

✂ **Observação 2.2.** *Seja \mathcal{F} uma folheação em N .*

- (i) *Podem existir folhas de diferentes dimensões, a maior dimensão destas folhas (k) é a dimensão da folheação \mathcal{F} .*
- (ii) *Se L é uma folha de \mathcal{F} tal que $\dim(L) < k$, então L é chamada de folha singular de \mathcal{F} , e toda folha de dimensão k é chamada de folha regular de \mathcal{F} .*
- (iii) *Dizemos que \mathcal{F} é uma folheação regular se todas suas folhas tem dimensão k . Neste caso, a definição anterior é equivalente a seguinte definição.*

Definição 2.4. *Uma folheação regular de classe C^r e de dimensão k de N^n é um atlas máximo \mathcal{F} de classe C^r de N tal que:*

- (i) *se $(U, \phi) \in \mathcal{F}$, então $\phi(U) = U_1 \times U_2$ onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{n-k} , respectivamente;*
- (ii) *se $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\phi \circ (\psi)^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ é de classe C^r e tem a forma*

$$\phi \circ (\psi)^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(y)).$$

Dada uma carta local $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ tal que $\phi(U) = U_1 \times U_2$, as placas de \mathcal{F} são os conjuntos da forma $(\phi)^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$, as quais são subvariedades conexas de dimensão k de classe C^r de N . Um caminho de placas de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, s-1\}$. As folhas de \mathcal{F} são as classes da relação de equivalência definida sobre N da seguinte maneira: " $p \sim q$ se, e somente se, existe um caminho de placas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_s$ ". Toda folha L de \mathcal{F} possui uma estrutura de variedade C^r naturalmente induzida pelas cartas de \mathcal{F} (veja por exemplo [8, Página 28]).

Observemos que toda folheação singular \mathcal{F} de classe C^r e de dimensão k de N induz de modo natural uma folheação regular de classe C^r e dimensão k de $N - \text{Sing}(\mathcal{F})$, onde $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é o conjunto de pontos de N que pertencem às folhas singulares.

Definição 2.5. Seja \mathcal{F} uma folheação em N , diremos que um subconjunto A de N é saturado por \mathcal{F} ou que é \mathcal{F} -invariante se A é união de folhas de \mathcal{F} .

✂ **Observação 2.3.** Denotaremos por $\text{int}(A)$, \overline{A} e $\text{Front}(A)$, o interior, o fecho e a fronteira de A em N . Se A é saturado por \mathcal{F} então estes conjuntos também são saturados.

Definição 2.6. Sejam \mathcal{F} uma folheação de N e F uma folha não compacta de \mathcal{F} , o conjunto limite de F é definido como o conjunto

$$\lim(F) = \bigcap_{\alpha \in \Omega} \overline{F \setminus K_\alpha},$$

onde $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ é a família de todos os subconjuntos compactos de F (o fecho é tomado em N).

✂ **Observação 2.4.** Desde que $\overline{F} = F \cup \lim(F)$, segue que $\lim(F)$ é \mathcal{F} -invariante e, se N é compacto, então $\lim(F)$ é não-vazio e compacto.

Agora lembraremos a noção de holonomia de uma folha regular F de uma folheação \mathcal{F} de codimensão s e de classe C^r de N .

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ e Σ uma seção transversal a F em p . Consideremos uma sequência de cartas locais $(U_i)_{i=0}^l$ e uma partição $0 = t_0 < \dots < t_{l+1} = 1$ de $[0, 1]$ tais que, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido numa carta local de \mathcal{F} e $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo $0 \leq i \leq l$. Fixando seções transversais a \mathcal{F} , $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$, homeomorfos a um disco de dimensão s passando por $\gamma(t_i)$ para cada $0 \leq i \leq l+1$ com $D(t_0) = D(t_{l+1}) = \Sigma$, então para cada $x \in D(t_i)$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$, a placa de U_i que passa por x intercepta $D(t_{i+1})$ num único ponto $f_i(x)$. A aplicação de holonomia associada a γ é dada pela composição

$$f_\gamma = f_l \circ f_{l-1} \circ \dots \circ f_0$$

e não depende dos discos $D(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, l$, e da sequência de cartas locais.

Sejam $G(\Sigma, p)$ o grupo de germes de difeomorfismos C^r de Σ que deixam fixo p , e φ_γ o germe da aplicação de holonomia f_γ em p . Então a transformação $\gamma \rightarrow \varphi_{\gamma^{-1}}$ induz um difeomorfismo

$$\Phi : \pi_1(F, p) \rightarrow G(\Sigma, p)$$

dado por $\Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}}$. O grupo de holonomia de F em p é o subconjunto de $G(\Sigma, p)$ definido por $\text{Hol}(F, p) = \Phi(\pi_1(F, p))$, o qual não depende do ponto p , podemos assim falar

no grupo de holonomia de F . Como é usual, confundiremos um elemento $[\gamma]$ da holonomia com um dos seus representantes γ .

2.4 Posição geral

Definição 2.7. Sejam N^n e M^m variedades de classe C^∞ tal que $n < m$ e \mathcal{F} uma C^r -folheação em M , $r \geq 1$. Diremos que $g : N \rightarrow M$ é transversal a \mathcal{F} quando g é transversal a todas as folhas de \mathcal{F} , ou seja, se para todo ponto $p \in N$ tem-se

$$Dg(p)T_pN + T_q\mathcal{F} = T_qM,$$

onde $q = g(p)$, e $T_q\mathcal{F}$ denota o subespaço de T_qM tangente em q à folha de \mathcal{F} que passa por q . Quando $N \subset M$ dizemos que N é transversal a \mathcal{F} se a inclusão $j : N \rightarrow M$ for transversal a \mathcal{F} .

Definição 2.8. Se existe um subconjunto discreto $\Gamma \subset \text{int}(N)$ tal que a restrição de g a $N \setminus \Gamma$ é transversal a \mathcal{F} , então dizemos que g está em posição geral com relação a \mathcal{F} . Mais ainda, se $p \in \Gamma$ é tal que $Dg(p)T_pN \subset T_q\mathcal{F}$, onde $q = g(p)$, diremos que p é um ponto de tangência de g com \mathcal{F} .

Teorema 2.3. ([8, Página 32]) Sejam \mathcal{F} uma C^r -folheação regular em M ($r \geq 1$) de codimensão s e $g : N \rightarrow M$ uma aplicação de classe C^r . Então g é transversal a \mathcal{F} se, e somente se, para toda aplicação distinguida (U, π) de \mathcal{F} , a composição $\pi \circ g : g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^s$ é uma submersão.

Segue do teorema anterior que se \mathcal{F} é uma folheação de codimensão um, então p é um ponto de tangência de $g : N \rightarrow M$ com \mathcal{F} se, e somente se, existem uma vizinhança trivializada U de \mathcal{F} com $g(p) \in U$ e uma aplicação distinguida $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\pi \circ g)'(p) = 0$, ou seja, p é um ponto crítico de $\pi \circ g$. Perturbando g na C^2 -topologia se necessário, podemos supor que cada ponto singular $p \in N$ de $h = \pi \circ g$ é não degenerado. Se $\dim(N) = 2$, pelo Lema de Morse, existe uma vizinhança de um ponto singular não degenerado p de h tal que h é localmente equivalente a uma das seguintes funções:

- (i) $(x, y) \mapsto h(p) + x^2 + y^2$;
- (ii) $(x, y) \mapsto h(p) - x^2 - y^2$;
- (iii) $(x, y) \mapsto h(p) - x^2 + y^2$.

Se g está em posição geral com relação a \mathcal{F} e $p \in N$ é um ponto de tangência de g com \mathcal{F} , sendo um ponto crítico não degenerado de h , esboçamos na Figura 2.5 a imagem de g , onde as folhas de \mathcal{F} próximas a $g(p)$ são representadas por planos horizontais. Esboçamos também as curvas de nível de $h = cte.$ em uma vizinhança do ponto p . A figura 2.5(a) corresponde aos casos (i) e (ii) acima. Neste caso, dizemos que p é um centro de h (ou de g). Na figura relativa ao caso (iii), p é um ponto de sela de h (ou de g).

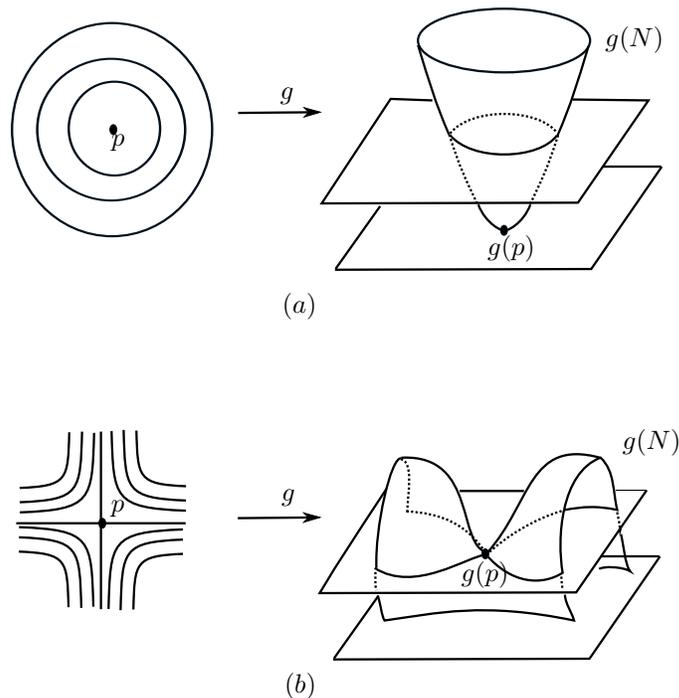


Figura 2.5: Singularidades do tipo Morse.

Consideremos o seguinte teorema:

Teorema 2.4. ([8, Página 32]) *Sejam \mathcal{F} uma folheação regular de M de classe C^r e codimensão s e $g : N \rightarrow M$ de classe C^r , transversal a \mathcal{F} . Então existe uma única folheação $g^*(\mathcal{F})$ em N de classe C^r e codimensão s , cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $g^{-1}(F)$, onde F é folha de \mathcal{F} .*

Portanto, se $g : N \rightarrow M$ está em posição geral com relação a \mathcal{F} , então existe uma única folheação singular $g^*(\mathcal{F})$ em N , cujas folhas regulares são as componentes conexas dos conjuntos $g^{-1}(F)$, F folha de \mathcal{F} . Note que se (U, π) é uma aplicação distinguida de \mathcal{F} , então $(g^{-1}(U), \pi \circ g)$ é uma aplicação distinguida de $g^*(\mathcal{F})$.

✘ **Observação 2.5.** *Sejam \mathcal{F} uma folheação regular de M de classe C^r e N uma subvariedade de M tal que $Id : N \rightarrow M$ está em posição geral. Se c_1 e c_2 são duas*

singularidades do tipo centro e s uma singularidade do tipo sela em N , então Rosenberg, em [30, página 137], apresentou um método para eliminar um centro junto com a sela s .

2.5 Ações de grupos

Uma ação de classe C^r de um grupo de Lie G sobre uma variedade N é uma aplicação de classe C^r , $\phi : G \times N \rightarrow N$, tal que satisfaz:

- (i) $\phi(e, x) = x$ para todo $x \in N$, onde e é a identidade de G ;
- (ii) $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 \cdot g_2, x)$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in N$.

A órbita de um ponto $p \in N$ pela ação ϕ é o conjunto:

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p(\phi) = \{\phi(g, p) : g \in G\}.$$

A ação ϕ é *localmente livre* se para todo $p \in N$ o espaço tangente a órbita de ϕ , passando pelo ponto p , tem dimensão igual a dimensão de G .

O grupo de isotropia de $p \in N$ pela ação ϕ é o subgrupo fechado em G definido por:

$$G_p = G_p(\phi) = \{g \in G; \phi(g, p) = p\}.$$

✂ **Observação 2.6.** Se G é comutativo e $q \in \mathcal{O}_p$, então $G_p = G_q$ e assim podemos falar no grupo de isotropia da órbita \mathcal{O}_p .

O seguinte teorema pode ser encontrado em [8].

Teorema 2.5. Sejam $\phi : G \times N \rightarrow N$ uma ação de classe C^r , $r \geq 1$ e $x \in N$. Existe uma única imersão biunívoca de classe C^r , $\bar{\phi}_x : G/G_x \rightarrow \mathcal{O}_x$ tal que $\bar{\phi}_x \circ \pi = \phi_x$.

✂ **Observação 2.7.** Se $G = \mathbb{R}^2$ então, como todo subgrupo fechado de \mathbb{R}^2 é isomorfo a um dos grupos $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^l$ onde k e l são inteiros satisfazendo $0 \leq k + l \leq 2$ (vide [8, página 169]). Logo, pela proposição anterior, as órbitas de ϕ são imersões injetoras de alguma das seguintes variedades:

- (i) ponto, S^1 , \mathbb{R} , chamadas de folhas singulares. O conjunto de folhas singulares será denotado por $Sing(\phi)$ ou $Sing(\mathcal{F}_\phi)$.
- (ii) $S^1 \times S^1$, $S^1 \times \mathbb{R}$ e \mathbb{R}^2 ; chamadas de folhas regulares.

Para cada $v \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ uma ação $\phi : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$ de classe C^r ($r \geq 1$) induz um fluxo $(\phi^{tv})_{t \in \mathbb{R}}$ de classe C^r definido por $\phi^{tv}(p) = \phi(tv, p)$ para cada $p \in N$ e, conseqüentemente, um campo X_v de classe C^{r-1} definido por $X_v(p) = D_1\phi(0, p) \cdot v$.

Fixada uma base $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de \mathbb{R}^k os campos associados $X_{v_1}, X_{v_2}, \dots, X_{v_k}$, chamados de *geradores infinitesimais de ϕ* , comutam dois a dois e determinam completamente a ação ϕ uma vez que

$$\phi\left(\sum_{i=1}^k t_i v_i, p\right) = \phi^{t_1 v_1} \circ \phi^{t_2 v_2} \circ \dots \circ \phi^{t_k v_k}.$$

Reciprocamente, temos:

Proposição 2.3. (*[8, página 213]*) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_k campos de vetores de classe C^r ($r \geq 1$) definidos em N . Suponhamos que para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, o fluxo de X_i está definido em $\mathbb{R} \times N$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *os campos X_1, X_2, \dots, X_n são geradores de uma ação de classe C^r , $\phi : \mathbb{R}^n \times N \rightarrow N$;*
- (ii) *para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ e $s, t \in \mathbb{R}$, temos $\phi^{tv_i} \circ \phi^{sv_j} = \phi^{sv_j} \circ \phi^{tv_i}$;*
- (iii) *para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ temos $[X_i, X_j] = 0$, onde $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Lie.*

No restante da tese, usaremos as notações de X_u^t e ϕ^{tu} para o fluxo induzido pelo vetor u . O conjunto de todas as ações do grupo de Lie \mathbb{R}^k sobre a variedade N cujo conjunto de geradores infinitesimais são de classe C^r será denotada por $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^k, N)$.

Proposição 2.4. *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$ uma ação de classe C^r , $r \geq 2$. Então as órbitas de ϕ definem uma folheação de N de dimensão menor ou igual a k e de classe C^{r-1} .*

Demonstração: Seja \mathcal{F}_ϕ a partição de N pelas órbitas de ϕ . Como as órbitas da ação ϕ são subvariedades imersas e conexas de N de dimensão menor ou igual a k e de classe C^{r-1} , resta mostrar que o módulo dos campos de vetores de classe C^{r-1} tangentes às órbitas de ϕ é transitivo.

De fato, dados $p \in N$ e $v \in T_p \mathcal{O}_p$, devemos obter $X \in \mathfrak{X}^{r-1}(\mathcal{F}_\phi)$ tal que $X(p) = v$. Assim, sejam $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}^{r-1}(\mathcal{F}_\phi)$ geradores infinitesimais da ação ϕ , então existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tal que $v = \alpha_1 X_1(p) + \alpha_2 X_2(p) + \dots + \alpha_k X_k(p)$; logo, basta tomar $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$. ■

Agora apresentaremos as definições e resultados básicos sobre o conceito de transitividade topológica e de transitividade métrica de uma ação do grupo de Lie \mathbb{R}^k , sobre uma variedade Riemanniana fechada N .

A estrutura Riemanniana de N induz uma correspondente medida de Lebesgue ρ com uma função densidade suave (em particular, ρ é positivo sobre conjuntos abertos de N).

Definição 2.9. Uma ação $\phi : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$ é chamada *metricamente transitiva* se, dado qualquer conjunto E compacto e ϕ -invariante então, ou E ou seu complementar tem medida 0 com respeito a ρ .

Definição 2.10. Uma ação $\phi : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$ é chamada *topologicamente transitiva* se existe $p \in N$ tal que $\overline{\mathcal{O}_p} = N$.

Exemplo 2.2. Consideremos o toro \mathbb{T}^3 , escrevendo $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, podemos ver que dois campos constantes e linearmente independentes em \mathbb{R}^3 induzem uma \mathbb{R}^2 -ação sobre \mathbb{T}^3 chamada de ação linear.

Sejam α, β números reais independentes sobre \mathbb{Z} , então:

- (i) sejam os campos definidos por $X = (1, 0, 0)$ e $Y = (0, 1, 0)$. As órbitas da ação definida por estes campos são todas compactas e homeomorfas a \mathbb{T}^2 ; em particular, não existe uma órbita densa;
- (ii) sejam os campos definidos por $X = (1, 0, 0)$ e $Y = (0, 1, \beta)$. As órbitas da ação definida por estes campos são todos cilindros densos em \mathbb{T}^3 e ela é uma ação metricamente transitiva;
- (iii) sejam os campos definidos por $X = (1, 0, \alpha)$ e $Y = (0, 1, \beta)$. As órbitas da ação definida por estes campos são todos planos densos em \mathbb{T}^3 que também é metricamente transitiva.

Como no caso dos sistemas dinâmicos clássicos temos a seguinte caracterização do conceito de transitividade topológica:

Proposição 2.5. Se $\phi \in \mathcal{A}^r(\mathbb{R}^k, N)$, com $r \geq 0$, são equivalentes:

- (i) $\phi : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$ é topologicamente transitiva;
- (ii) se E é um subconjunto de N fechado e ϕ -invariante então, $E = N$ ou $\text{int}(E) = \emptyset$;
- (iii) dados U, V abertos de N não vazios então, existe $u \in \mathbb{R}^k$ tal que $\phi^u(U) \cap V \neq \emptyset$.

Demonstração:

(i) \implies (ii) Seja $p \in N$ tal que $\overline{\mathcal{O}_p} = N$ e seja E um subconjunto de N fechado, ϕ -invariante, e tal que E não é nunca denso; então, existe $U \subset E$ aberto não vazio, por (i), existe $u \in \mathbb{R}^k$ tal que $\phi(p, u) \in U$, desde que E é ϕ -invariante e fechado temos que $N = \overline{\mathcal{O}_p} \subseteq E \subseteq N$; logo, $N = E$.

(ii) \implies (iii) Sejam U, V abertos de N não vazios, por (ii), $\bigcup_{u \in \mathbb{R}^k} \phi^u(U)$ é denso e ϕ -invariante, logo existe $u \in \mathbb{R}^k$ tal que $\phi^u(U) \cap V \neq \emptyset$.

(iii) \implies (i) Seja $\{U_n\}_{n \geq 1}$ uma base enumerável para a topologia de N , podemos supor que $\overline{U_n}$ é compacta, para todo $n \geq 1$.

Por (iii), existe $u_1 \in \mathbb{R}^k$ tal que $\phi^{u_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$; seja V_1 aberto tal que $\overline{V_1} \subset U_1 \cap \phi^{-u_1}(U_2)$, obviamente V_1 é compacto.

Existe $u_2 \in \mathbb{R}^k$ tal que $\phi^{u_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$, novamente, existe um aberto V_2 tal que $\overline{V_2} \subset V_1 \cap \phi^{-u_2}(U_3)$.

Por indução, existe uma sequência de conjunto abertos $\{V_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$$

e

$$\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap \phi^{-u_{n+1}}(U_{n+2}).$$

O conjunto $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$ é não vazio, pois $\overline{V_n}$ é compacto para todo $n \geq 1$; se $p \in V$ então, $\phi^{u_{n-1}}(p) \in U_n$ para todo $n \geq 1$, portanto, \mathcal{O}_p é denso em N . ■

Proposição 2.6. *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times N \rightarrow N$ uma ação metricamente transitiva então, ela é topologicamente transitiva.*

Demonstração: Suponhamos que ϕ não é topologicamente transitiva; então, existem U e V abertos não vazios de N , tal que para todo $u \in \mathbb{R}^k$ temos:

$$\phi^u(U) \cap V = \emptyset. \tag{2.2}$$

Tomando $E = \overline{\{\phi^u(U) : u \in \mathbb{R}^k\}}$, vemos que E é fechado e ϕ -invariante. Desde que $\rho(A) > 0$ para todo aberto A , pela Equação 2.2, temos:

$$0 < \rho(E) < 1,$$

o que contradiz a o fato da ação ser metricamente transitiva. ■

Proposição 2.7. *Sejam $\phi \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^2, N)$ topologicamente transitiva e \mathcal{F}_ϕ a folheação em N induzida por ϕ , se a folha densa de \mathcal{F}_ϕ é um cilindro, então qualquer folha de dimensão*

2 é um toro ou um cilindro.

Demonstração: Seja $p \in N$ tal que $\overline{\mathcal{O}_p} = N$ e $\mathcal{O}_p \cong S^1 \times \mathbb{R}$, logo $G_p \cong \mathbb{Z}$. Por outro lado, sejam $\{u, v\}$ uma base de \mathbb{R}^2 tal que v gera G_p , isto é, $\phi^v(p) = p$; consideremos os campos de vetores X_u e Y_v em N , com fluxos associados definidos por $\phi^{tu}(\cdot) = \phi(tu, \cdot)$ e $\phi^{tv} = \phi(tv, \cdot)$, respectivamente. Como X_u e Y_v comutam temos que para qualquer $p' \in \mathcal{O}_p$ existem $t, s \in \mathbb{R}$ tal que $p' = \phi^{tv}(\phi^{su}(p))$, logo $\phi^v(p') = \phi^v(\phi^{tv}(\phi^{su}(p))) = \phi^{tv}(\phi^{su}(\phi^v(p))) = \phi^{tv}(\phi^{su}(p)) = p'$. Assim, $\phi^v(p') = p'$ para todo $p' \in \mathcal{O}_p$.

Por outro lado, seja $q \in N$ qualquer, como \mathcal{O}_p é densa em N , existem $p_n \in \mathcal{O}_p$ tal que $p_n \rightarrow q$ quando $n \rightarrow \infty$, assim

$$p_n = \phi^v(p_n) \rightarrow \phi^v(q), \text{ logo } \phi^v(q) = q, \text{ isto é, } \mathbb{Z}u \subset G_q \text{ para todo } q \in N. \quad \blacksquare$$

Proposição 2.8. *Suponhamos que \mathcal{O}_p acumula-se em \mathcal{O}_q , então $G_p \subset G_q$. Portanto, qualquer duas órbitas densas possuem subgrupos de isotropia iguais, em particular, elas são homeomorfas.*

Demonstração: Seja $w \in G_p$, então $\phi(w, \phi(u, p)) = \phi(u, p)$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, como \mathcal{O}_p acumula-se em \mathcal{O}_q , existem $p_n \in \mathcal{O}_p$ tal que $p_n \rightarrow q$, logo

$$\phi(w, q) = \lim \phi(w, p_n) = p_n$$

e $p_n \rightarrow q$, isto é, $w \in G_q$.

Por outro lado, sejam $p, q \in N$ tal que $\overline{\mathcal{O}_p} = N = \overline{\mathcal{O}_q}$, pela primeira parte, temos que $G_p = G_q$, então as órbitas \mathcal{O}_p e \mathcal{O}_q são homeomorfas. ■

2.6 Suspensão de campos de vetores

Seja S uma superfície suave compacta. Seja $X \in \mathfrak{X}^r(S)$ com um número finito de singularidades, todas contidas no interior de S se $\partial S \neq \emptyset$. Suponha que $f : S \rightarrow S$ seja um difeomorfismo de classe C^r (o que denotaremos por $f \in \text{Diff}^r(S)$) que preserva as órbitas de X . Seja N a variedade obtida de $\mathbb{R} \times S$ identificando (z, p) com $(z - 1, f(p))$. A suspensão de f define uma folheação $\mathcal{F}(X, f)$ de classe C^r de N , a qual é a imagem da folheação em $\mathbb{R} \times S$, cujas folhas são $\mathbb{R} \times \mathcal{O}_p(X)$ pela aplicação quociente. A folheação $\mathcal{F}(X, f)$ é chamada de *suspensão de X por f* .

A seguir, apresentaremos dois exemplos que serão recorrentes em nosso trabalho.

Exemplo 2.3. *Seja X o campo de vetores em \mathbb{T}^2 definido pelo fluxo irracional. Fixemos pontos diferentes $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ em \mathbb{T}^2 e seja $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que $g(p_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$ e $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.*

Seja \mathcal{F}_0 a folheação unidimensional em $\mathbb{T}^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ a qual é definida pelo campo gX . Assim, tomando $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ como a identidade de \mathbb{T}^2 , obtemos uma folheação de \mathbb{T}^3 tal que todas as folhas regulares são cilindros, as únicas folhas singulares são $\{p_i\} \times \mathbb{S}^1$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

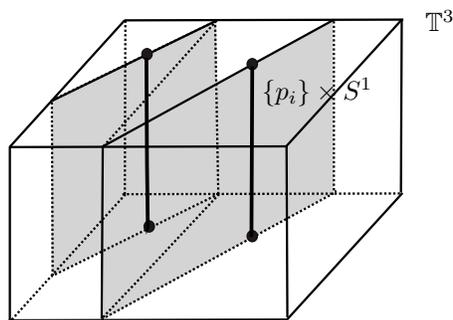


Figura 2.6: Suspensão do Fluxo Irracional.

Exemplo 2.4. *Consideremos a folheação singular de \mathbb{S}^2 cujas folhas regulares são os meridianos e cujas singularidades são os pólos P_1 e P_2 , e formemos o produto $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$. A seguir, identifiquemos cada $(x, 1)$ com $(\psi(x), 0)$, onde $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma rotação, que fixa os pólos, de ângulo α de modo que α e 2π são linearmente independentes em \mathbb{Q} .*

Desta forma, obtemos uma folheação de $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ com conjunto singular formado por $P_i \times \mathbb{S}^1$, $i = 1, 2$ e todas as outras folhas são planos densos em N .

3-variedades que suportam ações de \mathbb{R}^2

Neste capítulo, estudaremos a topologia das 3-variedades que suportam certas ações de \mathbb{R}^2 (com singularidades) e descreveremos a estrutura das órbitas destas ações.

Quando a ação é localmente livre podemos mencionar os trabalhos realizados por Chatelet, Rosenberg, Roussarie e Weil ([12], [30] e [31]). Nestes trabalhos os autores classificam as 3-variedades que suportam estas ações e descrevem a estrutura de suas órbitas. De fato eles mostram o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Se ϕ é uma \mathbb{R}^2 -ação, de classe C^2 e localmente livre sobre uma 3-variedade N , então N é um fibrado por toros sobre o círculo. Além disso*

- (i) *se todas as órbitas são planos, então N é difeomorfa a \mathbb{T}^3 e a folheação em N induzida por ϕ é equivalente a uma ação linear (vide Exemplo 2.2);*
- (ii) *se ϕ não tem órbitas compactas e nem todas as órbitas são planos, então todas as folhas são cilindros e ϕ é equivalente à suspensão de uma ação não singular de \mathbb{S}^1 sobre \mathbb{T}^2 ;*
- (iii) *se ϕ tem uma órbita compacta T , então:*
 - *a variedade obtida cortando N ao longo da órbita compacta T é difeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times I$;*
 - *todas as órbitas compactas de ϕ são isotópicas em N e se T_1 e T_2 são órbitas compactas de ϕ que bordam uma subvariedade M de N de modo que não existam órbitas compactas no seu interior, então M é difeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times I$ e as folhas no interior de M são todas cilindros ou todas planos.*

Consideraremos o problema de descrever e classificar certas ações que admitem singularidades. Mais precisamente, o objetivo deste capítulo é mostrar o seguinte resultado:

Teorema A *Sejam N uma 3-variedade orientável conexa e fechada, e ϕ uma C^2 ação de \mathbb{R}^2 sobre N tal que o conjunto singular $Sing(\phi) = S_1 \cup \dots \cup S_k$ onde S_i é uma órbita difeomorfa ao círculo \mathbb{S}^1 . Suponhamos que todas as separatrizes de cada S_i são órbitas homoclínicas isoladas (vide Definição 3.1). Então, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ existem uma superfície Σ_i com bordo, de gênero zero, transversal à ação e uma subvariedade compacta com bordo N_i que é uma vizinhança de S_i e homeomorfa à suspensão de Σ_i tais que:*

(i) *cada componente conexa do bordo de N_i é um 2-toro T que é ou tangente ou transversal à ação. Além disso, se T é transverso, então a folheação sobre T induzida pela ação ϕ é topologicamente equivalente à folheação definida por um fluxo linear no toro \mathbb{T}^2 ;*

(ii) *cada componente conexa de $N \setminus (\cup_i^k N_i)$ é difeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$.*

✂ **Observação 3.1.** *Desde que ϕ é localmente livre em cada componente conexa de $N \setminus (\cup_i^k N_i)$, a estrutura de órbitas nestas componentes é descrita pelo item (iii) do Teorema 3.1.*

Seja N uma 3-variedade orientável conexa e fechada. No presente capítulo denotaremos por \mathcal{A} o conjunto de \mathbb{R}^2 -ações de classe C^2 sobre N tal que o conjunto singular de ϕ , $Sing(\phi)$, é uma união finita de órbitas círculo, onde cada uma delas só admite separatrizes homoclínicas isoladas.

Na Seção 3.1. apresentaremos a estrutura das órbitas de uma ação $\phi \in \mathcal{A}$ em torno de uma órbita singular S_i . Na Seção 3.2. construiremos as subvariedades N_i do Teorema A, para isto encontraremos a superfície Σ_i transversal a ϕ , em seguida, estudaremos a dinâmica de um campo de vetores sobre Σ_i induzido por ϕ . Este campo descreve muitas propriedades dinâmicas e topológicas das órbitas de ϕ .

3.1 A estrutura das órbitas em torno das órbitas círculo

Nesta Seção estudaremos a estrutura de órbitas de $\phi \in \mathcal{A}$ sobre vizinhanças das órbitas compactas singulares S_j , com $j = 1, \dots, k$. Para evitar o excessivo uso de índices, sejam S uma órbita singular em $Sing(\phi)$ qualquer, $G_0 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ o grupo de isotropia da órbita S e G_0^0 a componente conexa de G_0 que contém a origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

As provas dos seguintes resultados fazem uso do conceito de "cartas adaptadas para a órbita compacta S ", que introduziremos agora.

Sejam $\phi \in \mathcal{A}$ e H um subespaço unidimensional de \mathbb{R}^2 tal que $\mathbb{R}^2 = H \oplus G_0^0$. Seja $\{w_1, w_2\}$ uma base de \mathbb{R}^2 tal que w_1 e w_2 geram os subgrupos $G_0 \cap H$ e G_0^0 , respectivamente.

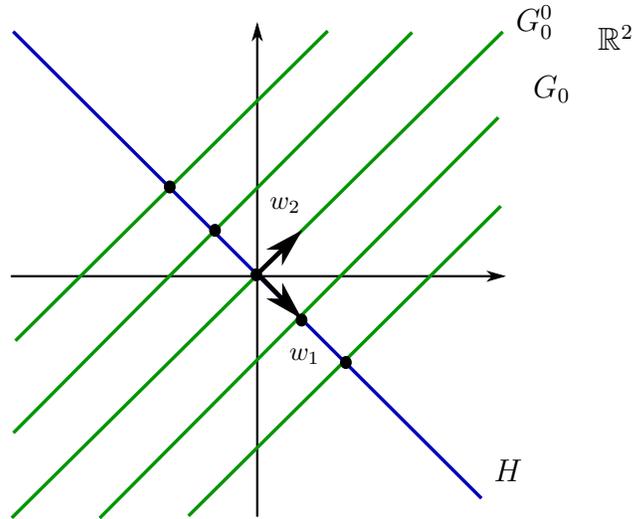


Figura 3.1: Os subespaços G_0^0 e H .

Notemos que $\{X_1 = X_{w_1}, X_2 = X_{w_2}\}$ é um conjunto de geradores infinitesimais de ϕ tal que S é uma órbita periódica de X_1 de período um e $X_2(q) = 0$ para todo $q \in S$. Diremos que $\{X_1, X_2\}$ é um conjunto de *geradores infinitesimais adaptados a ϕ em S* .

Carta adaptada. Pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe uma vizinhança V de S em N e um difeomorfismo $h : V \rightarrow D^2 \times \mathbb{S}^1$ tal que h leva trajetórias do campo X_1 em trajetórias do campo de vetores constante $(0, 0, 1)$ sobre $D^2 \times \mathbb{S}^1$, onde $D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \|(x_1, x_2)\| < 1\}$ e $D^2 \times \mathbb{S}^1$ é parametrizado por (x_1, x_2, θ) com $\theta \in [0, 1]$.

Seja $q_0 \in S$, podemos supor que $h(q_0) = (0, 0, \theta_0)$. Se tomarmos ε e δ suficientemente pequenos, e definirmos

$$D_\varepsilon^2 \times (-\delta, \delta) = \{(x_1, x_2, \theta) \in D^2 \times (-\delta, \delta); \|(x_1, x_2)\| < \varepsilon, \|\theta - \theta_0\| < \delta\},$$

então podemos considerar o sistema de coordenadas (W, h) que contém q_0 , onde $W = h^{-1}(D_\varepsilon^2 \times (-\delta, \delta))$. Então os campos de vetores X_1 e X_2 nesta carta podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_2(\theta, x_1, x_2) &= a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial \theta} + b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + c(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A carta acima é chamada *adaptada a S em q_0* . O campo de vetores

$$Y_2(x_1, x_2) = b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + c(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.2)$$

definido sobre $A_0(\varepsilon) = h^{-1}(D_\varepsilon \times \{0\})$ tem apenas q_0 como singularidade.

✂ **Observação 3.2.** *Notemos que $\{X_1, Y_2\}$ definem uma ação local de \mathbb{R}^2 , $\widehat{\phi}$, sobre W e*

$$\mathcal{O}_{(\theta, x)}(\widehat{\phi}) = \mathcal{O}_{(\theta, x)}(h \circ \phi \circ h^{-1}), \quad (\theta, x) \in W.$$

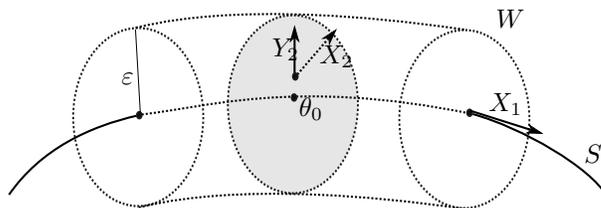


Figura 3.2: A ação local $\widehat{\phi}$ em $I^3(\varepsilon)$

Seja U_0 uma vizinhança de q_0 em $A_0(\varepsilon)$ tal que a aplicação de Poincaré associado ao campo de vetores X_1 em q_0 , $f_0 : U_0 \rightarrow A_0(\varepsilon)$, é bem definida. Observemos que f_0 é de classe C^2 . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja $\tau : A_0(\varepsilon) \rightarrow [0, 1 + \varepsilon)$ a aplicação tempo de primeiro retorno. Denotemos por W_0 o interior de $\cup_{q \in \text{cl}(A_0(\varepsilon))} \{X_1^t(q); 0 \leq t \leq \tau(q)\}$, onde $\text{cl}(B)$ denota o fecho em N de um conjunto B e $X_1^t(q)$ denota o fluxo do campo X_1 por q no tempo t .

Como uma consequência imediata, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança W_0 de S tal que f_0 preserva as órbitas de Y_2 e $\mathcal{F}_\phi|_{W_0}$ é topologicamente equivalente à suspensão de Y_2 por f_0 .*

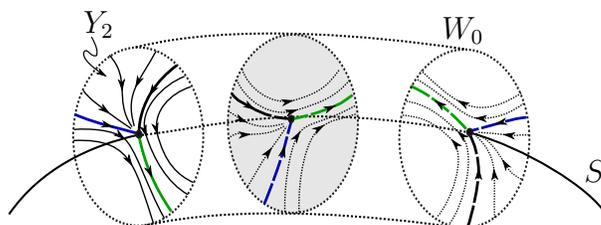


Figura 3.3: A suspensão de Y_2 por f_0 .

Sejam Y_2 e $A_0(\varepsilon)$ como na construção acima, então pelas Proposições 2.1 e 2.2 do Capítulo 2 temos a seguinte observação importante.

✂ **Observação 3.3.** *Seja Y_2 o campo de vetores definido sobre $A_0(\varepsilon)$. Se q_0 tem separatrizes, então as órbitas que as contém são cilíndricas. De fato, sejam $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ as separatrizes do campo Y_2 em $A_0(\varepsilon)$. Pela Proposição 3.1 os setores do campo Y_2 sobre $A_0(\varepsilon)$ são f_0 -invariantes, isto é, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_0^{k_0}(\ell_i) = \ell_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$ (vide Figura 3.3). Logo, $X_1^{k_0}(\ell_i) = \ell_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ e portanto $\mathcal{O}_\ell \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

Um dos conceitos importantes de nosso trabalho está relacionado com as separatrizes dos setores do campo Y_2 sobre o disco $A_0(\varepsilon)$. Lembremos que q_0 é a única singularidade de Y_2 em $A_0(\varepsilon)$, então Y_2 pode ou não ter separatrizes.

Como a existência ou não de separatrizes do campo Y_2 independe da carta escolhida, a seguinte noção é bem definida.

Definição 3.1. *Seja ℓ uma separatriz de Y_2 em $A_0(\varepsilon)$.*

- (i) Diremos que \mathcal{O}_ℓ é uma separatriz da ação ϕ se $\lim(\mathcal{O}_\ell) = S_i \cup S_j$.
- (ii) Diremos que S só admite *separatrizes homoclínicas isoladas* se Y_2 não tem separatrizes ou se ℓ é uma separatriz de Y_2 em $A_0(\varepsilon)$, então $\lim \mathcal{O}_\ell = S$ e numa vizinhança de ℓ não existem outras órbitas tais que o seu conjunto limite é S .

Onde \mathcal{O}_ℓ denota a órbita de ϕ que passa por algum ponto de ℓ .

3.2 Construindo as seções Σ_i

Na construção das superfícies Σ_i do Teorema A, vamos considerar dois casos: Quando não existem separatrizes homoclínicas, na Subseção 3.2.1, e quando há separatrizes homoclínicas, na Subseção 3.2.2.

Para $\phi \in \mathcal{A}$, fixemos uma órbita singular S_i a qual por simplicidade denotaremos por S . Fixado $q_0 \in S$, sejam $A_0(\varepsilon)$, X_1 , X_2 e Y_2 como na Seção 3.1. A construção da seção Σ está relacionada à existência ou não de separatrizes em $A_0(\varepsilon)$ do campo Y_2 . Se o campo Y_2 tiver separatrizes, esta construção (que será feita na Subseção 3.2.2.) depende da existência de um conjunto $K = \bigcup_{i=1}^s \gamma_i$ tal que:

- (i) γ_i é um laço simples e fechado contendo q_0 ;
- (ii) $\gamma_i \setminus \{q_0\}$ é suave e está contida numa órbita homoclínica \mathcal{O}_{γ_i} ;
- (iii) $\mathcal{O}_{\gamma_1}, \mathcal{O}_{\gamma_2}, \dots, \mathcal{O}_{\gamma_s}$ são as únicas separatrizes homoclínicas da órbita S ;
- (iv) o campo de vetores X_1 é transversal a K .

Proposição 3.2. *Existe um conjunto K satisfazendo as propriedades acima.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_s$ as separatrizes homoclínicas da órbita S ; então cada \mathcal{O}_i contém um número par de separatrizes do campo Y_2 em $A_0(\varepsilon)$.

Consideremos os grupos de isotrofia, G_i , das órbitas \mathcal{O}_i e $u_i \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ um gerador de G_i . Sejam ℓ e ℓ' separatrizes em $A_0(\varepsilon)$ do campo Y_2 contidas em \mathcal{O}_i tal que:

$$X_1^{u_i}(\ell) = \ell \text{ e } X_1^{u_i}(\ell') = \ell'.$$

Tomando $p \in \ell$ e $q \in \ell'$ tal que $q \neq X_1^{tu_i}(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sabemos que existe $v_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $\phi(v_i, p) = q$. Como $q \neq X_1^{tu_i}(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\{v_i, u_i\}$ são linearmente independentes, o que significa que os campos X_{u_i} e X_{v_i} são transversais.

Agora, sejam ℓ_0 o fecho do intervalo sobre ℓ com extremos q_0 e p e ℓ'_0 o fecho do intervalo sobre ℓ' com extremos q_0 e q ; assim, podemos tomar γ_i como:

$$\gamma_i = \ell_0 \cup \ell'_0 \cup \{\phi(tv_i, p); t \in [0, 1]\}.$$

Por construção, o conjunto $K = \bigcup_{i=1}^s \gamma_i$ satisfaz os itens (i) à (iv) anteriores. ■

A seguinte figura descreve a construção do conjunto K .

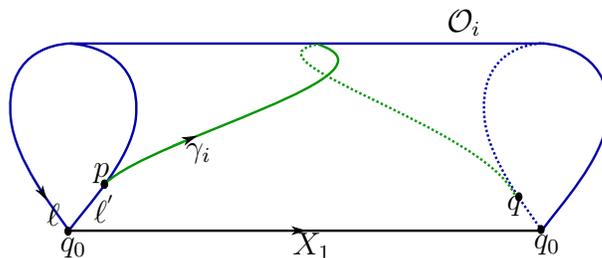


Figura 3.4: Existência do conjunto K .

Observemos que K é transversal ao campo de vetores X_1 , logo existe um colar $V(K)$ de K tal que X_1 é ainda transversal a $V(K)$.

Além disso, como $\mathcal{O}_{\gamma_i} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $\lim(\mathcal{O}_{\gamma_i}) = S$, o grupo de isotrofia de pontos de γ está contido no grupo de isotrofia de S ($G_{\gamma_i} \subset G_S$), para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Logo, existe $t_0 > 0$ de modo que $X_1^{t_0}(K) = K$ e $X_1^t(K) = K$ para $0 < t < t_0$.

Pela continuidade do fluxo associado ao campo X_1 , X_1^t , para todo $q \in V(K)$ próximo de $p \in K$, a trajetória $X_1^t(q)$ permanece próxima a trajetória $X_1^t(p)$ quando t varia em um intervalo de tempo compacto. Definamos $P(q)$ como o primeiro ponto onde a órbita de

$X_1^t(q)$ intersepta $V(K)$. Se $V_0(K)$ denota o domínio de P , então naturalmente $p \in V_0(K)$ e $P(p) \in K$ para todo $p \in K$.

Usando o Teorema do Fluxo Tubular podemos mostrar que $P : V_0(K) \rightarrow V(K)$ é um difeomorfismo de classe C^2 sobre sua imagem.

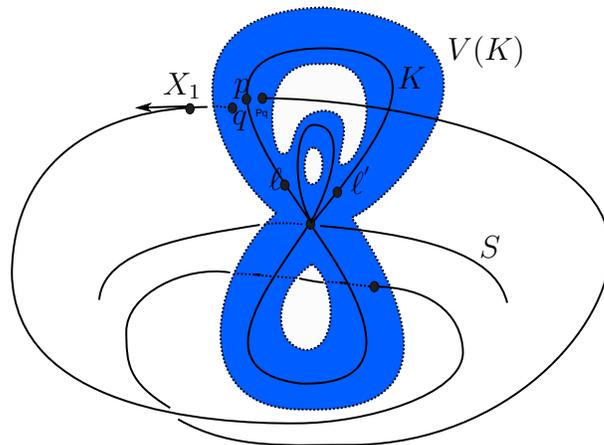


Figura 3.5: Existência do campo de vetores \hat{X}_2 .

Sejam $D(K)$ o disco unitário em \mathbb{R}^2 menos k discos no seu interior (onde k é o número de curvas γ que formam K) tal que $0 \in D(K)$ e $\delta > 0$, $I(\delta) = (-\delta, \delta)$. Consideremos a aplicação $h : D(K) \times I(\delta) \rightarrow N$ de classe C^2 definida por $h(x_1, x_2, t) = X_1^t(x_1, x_2)$. Então existe $\delta > 0$ de modo que h seja um difeomorfismo sobre sua imagem W .

Logo, nas coordenadas (h^{-1}, W) o conjunto de geradores infinitesimais da ação ϕ são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, t) &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2(x_1, x_2, t) &= a_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + c_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

O campo de vetores $Z_2(x_1, x_2) = a_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$ definido sobre D_K tem q_0 como única singularidade.

✂ **Observação 3.4.** *Sejam $D(K)$ e Z_2 o conjunto e o campo de vetores definidos acima, respectivamente. Então:*

(i) Z_2 é uma extensão do campo Y_2 definida em $A_0(\varepsilon)$ como na Subsecção 3.1;

(ii) $\{X_1, Z_2\}$ define uma \mathbb{R}^2 -ação local $\hat{\phi}$ sobre $D_K \times I(\delta)$ de modo que

$$\mathcal{O}_{(x_1, x_2, t)(\hat{\phi})} = \mathcal{O}_{(x_1, x_2, t)(h \circ \phi \circ h^{-1})}, \quad (x_1, x_2, t) \in D_K \times I(\delta).$$

Seja $V_0(K)$ uma vizinhança de K em $V(K)$ tal que o difeomorfismo de Poincaré f associado ao campo X_1 é bem definido. Note que f é de classe C^2 . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja $\tau : V_0(K) \rightarrow [0, 1 + \varepsilon)$ a aplicação do tempo de primeiro retorno. Seja

$$W_K = \text{int} \bigcup_{q \in \text{cl}(V_0(K))} \{X_1^t(q); 0 \leq t \leq \tau(q)\}.$$

Como consequência imediata obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.3. *Existe uma vizinhança W_0 de \mathcal{O}_K e uma função $f : V(K) \rightarrow V(K)$ que preserva as órbitas de Z_2 e $\mathcal{F}_\phi|_{W_0}$ é topologicamente equivalente a suspensão de Z_2 por f .*

3.2.1 Caso I: Não existem separatrizes homoclínicas.

Nesta subseção assumiremos que o campo de vetores Y_2 não possui separatrizes em $A_0(\varepsilon)$ (vide Seção 3.1.). Quando o campo Y_2 não possui separatrizes, podem acontecer duas situações:

- (i) $q_0 \in A_0(\varepsilon)$ é um ponto de rotação para o campo Y_2 . Neste caso, existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que todas as órbitas de Y_2 em $A_0(\varepsilon)$ são periódicas, ou
- (ii) $q_0 \in A_0(\varepsilon)$ é um atrator ou repulsor para o campo Y_2 .

De fato, suponhamos que q_0 não é ponto de rotação do campo Y_2 . Como o campo Y_2 não possui separatrizes, ele só possui um setor (hiperbólico, elíptico ou parabólico). Consequentemente só pode ser parabólico.

Inicialmente apresentaremos um resultado, embora fácil de mostrar, de fundamental importância para o restante do capítulo. Antes, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1 (Componente de Reeb Singular). *Consideremos a variedade $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ obtida colando dois toros sólidos TS_1 e TS_2 pelo homeomorfismo identidade*

$$Id : \partial TS_1 \rightarrow \partial TS_2.$$

Em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ identificamos o toro sólido $TS_2 = \mathbb{S}^1 \times D$ com o círculo $C = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$, com $0 \in D$. Sobre o toro sólido TS_1 tomemos uma folheação de Reeb ([10, Página 16]). Então obtemos uma folheação \mathcal{F} , de N chamada de componente de Reeb Singular, com uma folha singular círculo C . Sejam $q_0 \in C$ e D_0 um disco transversal a S pelo ponto q_0 ; as marcas que \mathcal{F} deixa sobre D_0 são como na Figura 3.6.

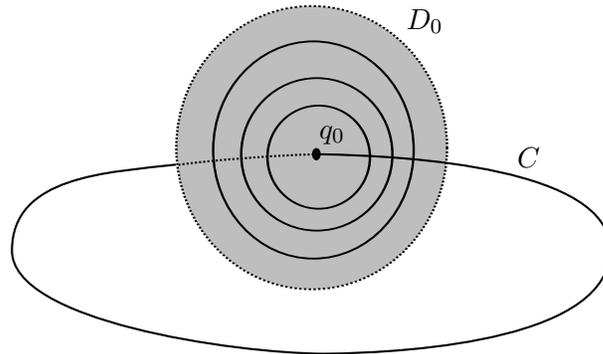


Figura 3.6: Folheação de Reeb Singular.

O lema a seguir garante que a folheação apresentada no Exemplo 3.1, não provém de uma ação de \mathbb{R}^2 .

Lema 3.1. *Consideremos os campos Y_2 e Z_2 como nas seções anteriores.*

(i) *Seja $p \in A_0(\varepsilon)$ tal que $\mathcal{O}_p(Y_2)$ está contida em $A_0(\varepsilon)$ e é homeomorfa à \mathbb{S}^1 , ou*

(ii) *seja $p \in A_i$, $i = 1, \dots, k$ tal que $\mathcal{O}_p(Z_2)$ é homeomorfa à \mathbb{S}^1 .*

Então \mathcal{O}_p é homeomorfa a \mathbb{T}^2 ou homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Consequentemente, não existe componente de Reeb singular.

Demonstração: Consideremos os seguintes casos:

(i) Seja $p \in A_0(\varepsilon)$ tal que $\mathcal{O}_p(Y_2)$ está contida em $A_0(\varepsilon)$ e é homeomorfa à \mathbb{S}^1 . Se \mathcal{O}_p é homeomorfa a um plano, consideremos a curva $C = \mathcal{O}_p(Y_2) \simeq \mathbb{S}^1 \subset \mathcal{O}_p$. Pelo Teorema da Curva de Jordan, existe um disco $D \subset \mathcal{O}_p$ tal que $\partial D = C$.

Observemos que o campo X_1 é transversal a C , (vide o Gráfico 3.7) logo pelo Teorema de Poincaré-Bendixon, existe $p_0 \in D$ tal que $X_1(p_0) = 0$, o que contradiz a Proposição 3.1.

(ii) A prova é análoga se considerarmos $p \in A_i$, $i = 1, \dots, k$ tal que $\mathcal{O}_p(Z_2)$ é homeomorfa à \mathbb{S}^1 .

■

Lembremos que se q_0 é um ponto de rotação, então Y_2 possui uma infinidade de órbitas fechadas em $A_0(\varepsilon)$ se aproximando de q_0 .

Proposição 3.4. *Sejam $q_0 \in A_0(\varepsilon)$, W_0 como na Seção 3.1., e Y_2 o campo de vetores definido em $A_0(\varepsilon)$. Temos as seguintes propriedades:*

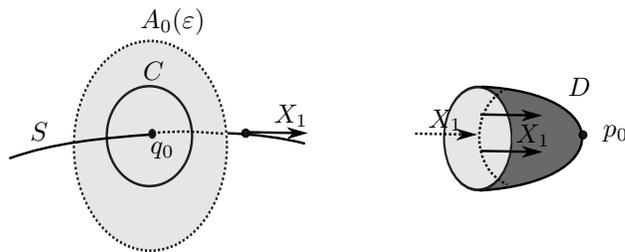


Figura 3.7: Não existe Componente de Reeb Singular.

- (i) se q_0 for um ponto de rotação para o campo Y_2 , então existe um toro $T \subset W_0$ tal que: ou T é uma órbita da ação ϕ ou T é transversal a ação ϕ ;
- (ii) se q_0 for um atrator (ou, repulsor) do campo Y_2 , então existe um toro $T \subset W_0$ transversal a ϕ .

Demonstração:

- (i) Suponhamos que q_0 é um ponto de rotação para o campo de vetores Y_2 em $A_0(\varepsilon)$, então existe $p \in A_0(\varepsilon)$ tal que \mathcal{O}_p é um cilindro ou um toro. Neste último caso é suficiente tomar $T = \mathcal{O}_p$.

Logo, podemos assumir que \mathcal{O}_p é um cilindro e que W_0 não contém nenhuma órbita homeomorfa à \mathbb{T}^2 . Consideremos as cartas adaptadas a órbita singular S , como na Seção 3.1.

Sejam $C = \mathcal{O}_p \cap A_0(\varepsilon), C_1 = f_0(C)$; onde $f_0 : A_0(\varepsilon) \rightarrow A_0(\varepsilon)$ é a aplicação de primeiro retorno definida na Seção 3.1. e A é o anel sobre $A_0(\varepsilon)$ tal que $\partial A = C \cup C_1$.

Se $\tau : A_0(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é o tempo de primeiro retorno do campo X_1 e M é o conjunto definido como

$$M = \{X_1^t(p); p \in A \text{ e } t \in [0, \tau(p)]\}.$$

Seja T' um toro contido em M que contém C_1 (vide Figura 3.8). Deformando T' por uma isotopia obtemos um toro T o qual esta em posição geral com relação à folheação \mathcal{F}_ϕ .

Mostraremos que a folheação induzida por ϕ em T não tem singularidades. Isto terminará a prova da proposição neste caso, pois T seria transversal a ϕ .

De fato, seja \mathcal{G} a folheação em T induzida pela ação ϕ . Se \mathcal{G} possui singularidades então, como $\chi(T) = 0$, ela possui pelo menos uma singularidade do tipo centro e uma singularidade do tipo sela. Usando argumentos de Rosenberg (ver Observação

2.5) podemos eliminar um centro e uma sela. Usando este argumento um número finito de vezes obtemos que em T , a menos de isotopia, \mathcal{G} não tem singularidades.

- (ii) Seja T' um toro que é bordo de uma vizinhança tubular da singularidade S contida em W_0 . Colocando ela em posição geral, novamente podemos mostrar que existe um toro T transversal a ϕ .

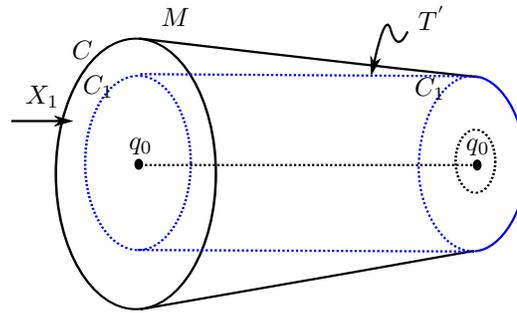


Figura 3.8: $M(\theta_0)$

Lema 3.2. *Se $q_0 \in A_0(\varepsilon)$ é ponto de rotação e não existem órbitas toro intersectando $A_0(\varepsilon)$, então existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que todas as órbitas de Y_2 em $A_0(\varepsilon) \setminus \{q_0\}$ são periódicas.*

Demonstração: Seja $q_0 \in A_0(\varepsilon)$ tal que \mathcal{O}_q é cilíndrica. Neste caso, $\mathcal{O}_q \cap A_0(\varepsilon)$ são órbitas periódicas de Y_2 . As aplicações de primeiro retorno dos campos X_1 e Y_2 induzem dois difeomorfismos comutativos f e g de um raio em $A_0(\varepsilon)$ transversal a Y_2 , respectivamente. Como f é uma contração (pois não há toros), pelo Lema de N. Kopell [23], segue que $g \equiv Id$. isto mostra o lema. ■

Conclusão: Seja $q_0 \in A_0(\varepsilon)$, pela Proposição anterior e pela Proposição 3.1, temos que:

- (i) se q_0 for um ponto de rotação, T é tangente ou transversal a ação ϕ . Além disso, pelo lema anterior, se T é transversal a ϕ , então a intersecção das órbitas de ϕ são definidos pelas órbitas do fluxo linear no toro \mathbb{T}^2 com inclinação racional;
- (ii) se q_0 for atrator (ou, repulsor) para o campo Y_2 , T é transversal a ação ϕ . Além disso, a intersecção das órbitas de ϕ com T são definidos pelas órbitas do fluxo linear no toro \mathbb{T}^2 .

Logo, podemos tomar Σ_i como sendo a componente de $A_0(\varepsilon) \setminus T$ que contém q_0 .

3.2.2 Caso II: Existem separatrizes homoclínicas.

Nesta subseção estudaremos a dinâmica do campo de vetores Z_2 sobre o conjunto $V(K)$. Tal estudo será feito em cada componente conexa do conjunto $V(K) \setminus K$ (Vide Figura 3.9).

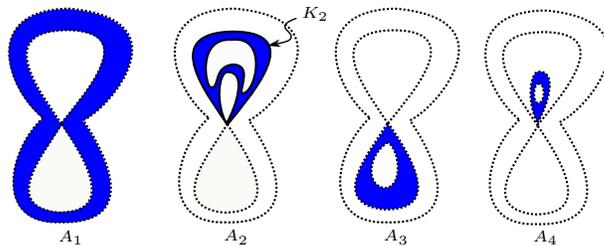


Figura 3.9: Componentes conexas de $V(K)$, quando $s = 3$.

Seja $V(K) \setminus K = \bigcup_{i=1}^r A_i$. Observemos que cada A_i é homeomorfa a um anel.

✘ **Observação 3.5.** Fixado $i \in \{1, \dots, r\}$, seja K_i a fronteira de A_i em $V(K)$. Como as únicas órbitas homoclínicas da ação ϕ são isoladas, então temos duas possibilidades:

(i) existem infinitas órbitas periódicas de Z_2 em A_i se aproximando de K_i , ou

(ii) K_i é um atrator ou um repulsor para o campo de vetores $Z_2|_{A_i}$.

Temos na Proposição 3.4 que o conjunto K é o ponto q_0 . O seguinte resultado generaliza ela para um conjunto K qualquer.

Proposição 3.5. Sejam K e Z_2 como na Seção 3.2 e A_i uma componente conexa de $V(K) \setminus K$ fixada. Temos as seguintes propriedades:

(i) se existem infinitas órbitas periódicas de Z_2 em A_i se aproximando de K_i , então existe um toro $T \subset W_K$, tal que: ou T é uma órbita da ação ϕ ou T é transversal a ação ϕ ;

(ii) se K_i é um atrator ou um repulsor para o campo de vetores $Z_2|_{A_i}$, então existe um toro $T \subset W_K$ transversal a ϕ .

Demonstração:

(i) Suponhamos que existem infinitas órbitas periódicas de Z_2 em A_i se aproximando de K_i . Então pelo Lema 3.1, existe $p \in A_i$ tal que \mathcal{O}_p é um cilindro ou um toro; neste último caso é suficiente tomar $T = \mathcal{O}_p$.

Logo, podemos assumir que \mathcal{O}_p é um cilindro e que W_K não contém nenhuma órbita homeomorfa à \mathbb{T}^2 .

Considerando as cartas adaptadas ao conjunto K , como na Seção 3.2. Sejam $C = \mathcal{O}_p \cap A_i$ e $C_1 = f_0(C)$, onde $f : A_i(\varepsilon) \rightarrow A_i$ é a aplicação de primeiro retorno definida na Seção 3.2., e A é o anel sobre A_i tal que $\partial A = C \cup C_1$.

Se $\tau : A_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ é o tempo de primeiro retorno do campo X_1 e M é o conjunto definido como

$$M = \{X_1^t(p); p \in A \text{ e } t \in [0, \tau(p)]\}.$$

Seja T' um toro contido em M que contém C_1 . Deformando T' por uma isotopia obtemos um toro T o qual está em posição geral com relação à folheação \mathcal{F}_ϕ .

Mostraremos que a folheação induzida por ϕ em T não tem singularidades. Isto terminará a prova da proposição neste caso, pois T seria transversal a ϕ .

De fato, seja \mathcal{G} a folheação em T induzida pela ação ϕ . Se \mathcal{G} possui singularidades então, como $\chi(T) = 0$, ela possui pelo menos uma singularidade do tipo centro e uma singularidade do tipo sela. Usando argumentos de Rosenberg, podemos eliminar um centro e uma sela. Usando este argumento um número finito de vezes obtemos que em T , a menos de isotopia, \mathcal{G} não tem singularidades. Isto mostra que T é transversal a ϕ .

- (ii) Como K_i é um atrator (ou um repulsor) para o campo de vetores $Z_2|_{A_i}$, podemos construir uma curva C em A_i transversal ao campo de vetores Z_2 .

Se $f(C) = C_1$, consideremos o toro T' formado pelo conjunto $\{X_1^t(p); p \in C \text{ e } t \in [0, \tau(p)]\}$ e o anel sobre A_i formado pelo conjunto C e C_1 , onde $\tau : A_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ é o tempo de primeiro retorno (vide Seção 3.2). Colocando T' em posição geral, novamente podemos mostrar que existe um toro T transversal a ϕ .

■

A Conjectura de Morse para \mathbb{R}^2 -ações

O objetivo deste capítulo é mostrar o Teorema B, que a seguir enunciamos.

Teorema B. *Sejam N uma 3-variedade de classe C^∞ orientável, conexa e fechada, e ϕ uma C^2 ação de \mathbb{R}^2 sobre N tal que o conjunto singular é uma união finita de órbitas círculo S_1, \dots, S_k . Se ϕ é topologicamente transitiva, então ϕ é metricamente transitiva.*

Este resultado generaliza um resultado análogo obtido por Ding em [18] para fluxos em superfícies com um número finito de singularidades.

Na primeira seção, estudaremos a Conjectura de Morse quando $Sing(\phi) = \emptyset$, usando trabalhos de Rosenberg e seus colaboradores e algumas generalizações naturais dos fluxos topologicamente transitivos para \mathbb{R}^2 -ações, conseguimos responder afirmativamente a Conjectura de Morse.

A seguir, na Seção 4.2, estudaremos a Conjectura de Morse quando o conjunto singular da ação ϕ for um uma união finita de órbitas círculo. Na Subseção 4.2.1 mostraremos que se N é uma variedade fechada, compacta e conexa e ϕ uma ação de classe C^∞ sobre N , então para ter alguma chance de que a conjectura de Morse seja verdadeira, devemos impor alguma condição sobre o conjunto $Sing(\phi)$, de fato nesta seção mostramos que existem ações de classe C^∞ cujo conjunto singular é infinito, topologicamente transitivas mas, não metricamente transitivas.

Para apresentar a prova do teorema B, precisamos distinguir duas situações. Assim, na Subseção 4.2.2 mostramos a Conjectura de Morse com a presença de uma órbita cilíndrica densa e na Subseção 4.2.3 estudaremos a Conjectura quando a folha densa tem o tipo topológico de um plano.

4.1 A Conjectura de Morse para ações localmente livres

Quando temos uma ação de \mathbb{R} localmente livre sobre uma superfície que seja topologicamente transitiva, necessariamente temos que a superfície é o toro \mathbb{T}^2 e o fluxo é topologicamente conjugado ao fluxo irracional. Neste caso a ação é minimal e consequentemente a Conjectura de Morse segue imediatamente.

Por outro lado, quando $\phi : \mathbb{R}^2 \times N^3 \rightarrow N^3$ é uma ação localmente livre, veremos que a Conjectura de Morse segue (Teorema 4.1), mas não de maneira tão direta como no caso de fluxos. É preciso usar resultados fortes como o Teorema de Sacksteder ([35]) e os resultados de Chatelet-Rosenberg-Roussarie-Weil ([12], [31] e [30]).

A prova que apresentamos usa fortemente o fato de que se existe uma órbita da ação ϕ a qual é densa e seu tipo topológico é a de um cilindro, então existe uma órbita topologicamente transitiva de um lado (vide Definição 4.1). Este resultado também será usado no estudo da Conjectura de Morse para ação singulares.

Se $p \in N$ é tal que $\mathcal{O}_p \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, então existe $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tal que o grupo de isotropia G_p é $\mathbb{Z}u$. Sejam H^+ e H^- os semiplanos definidos pela reta $\{tu \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}$ (vide Figura 4.1).

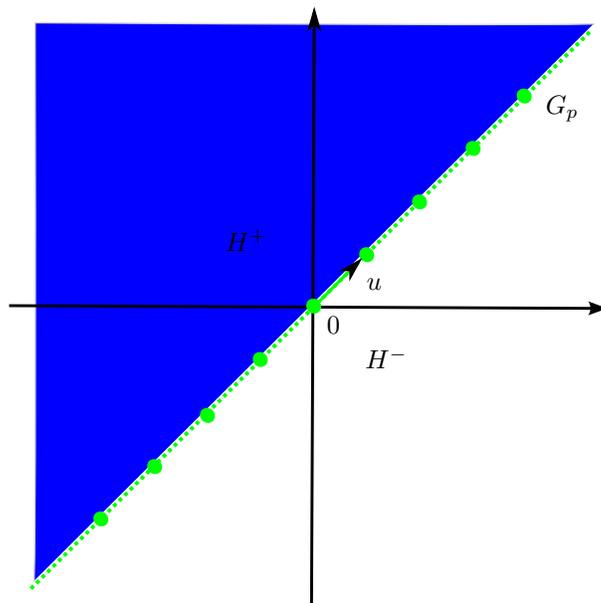


Figura 4.1: Definição do Semiplano H_1

Definição 4.1. Diremos que a ação ϕ é *topologicamente transitiva de um lado em N* , se existe $p \in N$ tal que:

(i) $\mathcal{O}_p \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e

(ii) $\overline{\mathcal{O}_p^+} = N$ ou $\overline{\mathcal{O}_p^-} = N$,

onde $\mathcal{O}_p^+ = \{\phi(v, p); v \in H^+\}$ e $\mathcal{O}_p^- = \{\phi(v, p); v \in H^-\}$.

Como no caso de fluxos e difeomorfismos temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \times N \rightarrow N$ uma ação, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) ϕ é topologicamente transitiva de um lado;

(ii) cada subconjunto fechado E de N é invariante por $\phi^v(\cdot) = \phi(v, \cdot)$ para todo $v \in H^+$; é igual a N ou tem interior vazio;

(iii) para cada par de aberto U e V em N não vazios, existe $v \in H^+$ tal que

$$\phi^v(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Demonstração:

(i) \implies (ii) Suponhamos que ϕ é topologicamente transitiva de um lado. Seja $E \subset N$ fechado e ϕ^v -invariante para todo $v \in H^+$; com interior não vazio. Mostraremos que $E = N$.

De fato, existe um aberto U não vazio tal que $U \subset E$. Como ϕ é topologicamente transitiva de um lado, existe $p \in N$ tal que $\mathcal{O}_p \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $\overline{\mathcal{O}_p^+} = N$. Logo existe $v_0 \in H^+$ tal que $\phi(v_0, p) \in U$. Já que E é ϕ^v -invariante para todo $v \in H^+$, temos que $\phi(v, p) \in E$ para todo $v \in H^+$. Logo, $N = \overline{\mathcal{O}_p^+} \subset E \subset N$. Assim, $E = N$.

(ii) \implies (iii) Sejam U, V dois abertos não vazios, então $\bigcup_{v \in H^+} \phi^{-v}(U)$ é um conjunto aberto não vazio e ϕ^v -invariante para todo $v \in H^+$; logo, por (ii) é denso, e daí existe $v_0 \in H^+$ tal que

$$\phi^{-v_0}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

(iii) \implies (i) Seja $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ uma base enumerável de N , isto é, para todo $p \in N$ e para todo aberto $U \subset N$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p \in U_i \subset U$. Por hipótese, existe $v_1 \in H^+$ tal que

$$\phi^{-v_1}(U_1) \cap U_1 \neq \emptyset.$$

Seja V_1 aberto tal que $\overline{V_1} \subset \phi^{-v_1}(U_1) \cap U_1$, com $\overline{V_1}$ compacto. Então, existe $v_2 \in H^+$ tal que

$$\phi^{-v_2}(U_2) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Novamente, tomemos um aberto V_2 tal que $\overline{V_2} \subset \phi^{-v_2}(U_2) \cap V_1$, com $\overline{V_2}$ compacto. Por indução, construímos uma sequência de conjuntos abertos $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ tal que $\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap \phi^{-v_{n+1}}(U_{n+1})$ para $n \geq 1$ e $\overline{V_1} \subset U_1 \cap \phi^{-v_1}(U_1)$.

Tomemos $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$, note que V é não vazio pois $\overline{V_n}$ é compacto para todo $n \geq 1$. Então, para $p \in V$, $\phi^{v_i}(p) \in U_i$. Assim, $\overline{\mathcal{O}_p^+} = N$. ■

Obviamente, se a ação ϕ for topologicamente transitiva de um lado então, ela é topologicamente transitiva. Como consequência da proposição anterior, temos a recíproca.

Proposição 4.2. *Seja ϕ uma ação de \mathbb{R}^2 sobre uma variedade N topologicamente transitiva com órbita densa cilíndrica. Então ϕ é topologicamente transitiva de um lado.*

Demonstração: Suponhamos que ϕ tem órbita densa $\mathcal{O}_p \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sejam U e V subconjuntos abertos de N não vazios. Pela Proposição 2.5, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\phi^v(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Observemos que podemos tomar $v \in H^+$, pois caso contrário não teríamos nada a mostrar. Tomemos $W = \phi^v(U) \cap V$, existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\phi^u(W) \cap W \neq \emptyset.$$

Novamente, podemos tomar $u \in H^+$. Logo, existem q e q_1 em W tal que $q = \phi(u, q_1)$; além disso, $q_1 \in V$ e $q_1 = \phi(v, q_2)$ para algum $q_2 \in U$. Portanto, $q = \phi(u, q_1) = \phi(u, \phi(v, q_2)) = \phi(u + v, q_2)$, assim $q_2 \in \phi^{-v-u}(V) \cap U$. Pela Proposição 4.1, temos que ϕ é topologicamente transitiva de um lado. ■

O seguinte resultado é uma ferramenta fundamental para a prova da Conjectura de Morse.

Proposição 4.3. *Seja ϕ uma ação de \mathbb{R}^2 sobre a 3-variedade N compacta e conexa. Suponhamos que ϕ é topologicamente transitiva com órbita cilíndrica densa \mathcal{O}_p . Então não existem órbitas compactas homeomorfas à \mathbb{T}^2 .*

Para mostrar este resultado, precisamos fazer algumas considerações. Sejam T uma órbita compacta e $p \in N$ tal que sua órbita Γ é cilíndrica e seu conjunto limite contém

T . Existe $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tal que $G_p = \mathbb{Z}u$ e, pela Proposição 2.7, segue que G_p está contido no subgrupo de isotrofia, G_T , da órbita T .

Tomemos $v \in \mathbb{R}^2$ de modo que $\{u, v\}$ formam uma base de \mathbb{R}^2 , e consideremos os geradores infinitesimais $X = X_u$ e $Y = X_v$ de ϕ . Notemos que, para todo $q \in \Gamma$, a órbita de X é periódica. Naturalmente o mesmo acontece com pontos de T .

Sejam $q \in T$ e γ a órbita de X passando pelo ponto q . Consideremos uma vizinhança $A(\varepsilon)$ de γ , transversal a T e homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, parametrizada por (θ, r) com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e de modo que $\gamma = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ (vide Figura 4.2). A seguir consideraremos uma carta adaptada a γ .

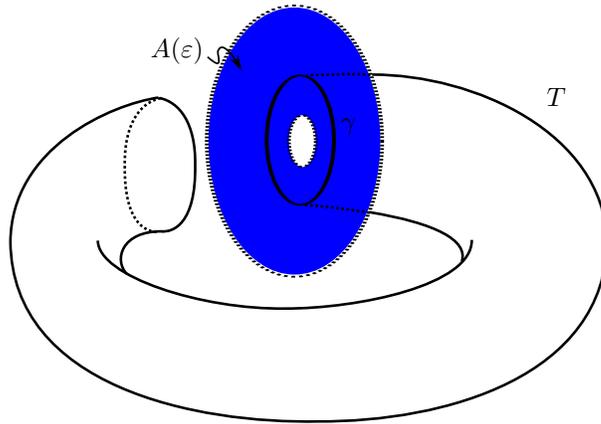


Figura 4.2: Construção da transversal $A(\varepsilon)$.

Para $\delta > 0$ consideremos a aplicação $h : A(\varepsilon) \times I(\delta) \rightarrow N$ definida por $h(\theta, r, t) = Y^t(\theta, r)$, onde $I(\delta) = (-\delta, \delta)$. Existe $\delta > 0$ tal que $h|_{A(\varepsilon) \times I(\delta)}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem V . Além disso, nas coordenadas (V, h^{-1}) os geradores infinitesimais de ϕ são da forma:

$$\begin{aligned} X(\theta, r, t) &= a(\theta, r) \frac{\partial}{\partial t} + b(\theta, r) \frac{\partial}{\partial \theta} + c(\theta, r) \frac{\partial}{\partial r}, \\ Y(\theta, r, t) &= \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

O campo de vetores $\widehat{X}(\theta, r) = b(\theta, r) \frac{\partial}{\partial \theta} + c(\theta, r) \frac{\partial}{\partial r}$ define um fluxo local sobre $A(\varepsilon)$. E mais, $\gamma \subset A(\varepsilon)$ é uma órbita periódica de \widehat{X} .

✂ **Observação 4.1.** *Observemos que para todo $q \in A(\varepsilon)$, a órbita de q pelo campo \widehat{X} é periódico (vide [4, Lema 4]).*

Agora estamos em condições de provar a Proposição 4.3.

Demonstração da Proposição 4.3: Como ϕ é topologicamente transitiva, podemos supor, pela Proposição 4.2, que existe Γ topologicamente transitiva de um lado. Sejam T , γ , $A(\varepsilon)$, X , \widehat{X} e Y como acima, então:

Dado $x \in T$, como $T \subset \text{lim}(\Gamma)$, existe $q_n = (\theta_n, r_n, t_n)$ em V , $n \geq 1$ tal que $q_n \rightarrow x$. Tomando $\tilde{q}_n = (\theta_n, r_n)$ em $A(\varepsilon)$, temos que a órbita C_n de \tilde{q}_n , pelo campo \widehat{X} é periódica para todo $n \geq 1$.

Consideremos os subconjuntos A_n de $A(\varepsilon)$ homeomorfos ao anel aberto $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$ tal que $\partial A_n = C_n \cup \gamma$. Observemos que, como Y é transversal a $A(\varepsilon)$, para quaisquer par de pontos p_1 e p_2 em A_n , $Y(p_1)$ e $Y(p_2)$ são paralelos e tem o mesmo sentido. (vide figura 4.3).

Mudando a direção do campo Y , se for necessário, temos que A_n está contida em uma das componentes de $A(\varepsilon) \setminus \gamma$, para todo $n \geq 1$, e $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \dots$.

Fixado $i_0 \in \mathbb{N}$, consideramos o toro topológico T_{i_0} que é a união dos seguintes conjuntos: o cilindro contido em Γ compreendido entre C_{i_0} e C_{i_0+1} e o anel $A_{i_0} \setminus A_{i_0+1}$. Os toros T e T_{i_0} bordam uma subvariedade aberta N' ϕ^v -invariante para todo $v \in H^+$ (aqui H^+ é o semiplano correspondente a órbita Γ). Esta contradição com o item (iii) da Proposição 4.1 conclui a demonstração. ■

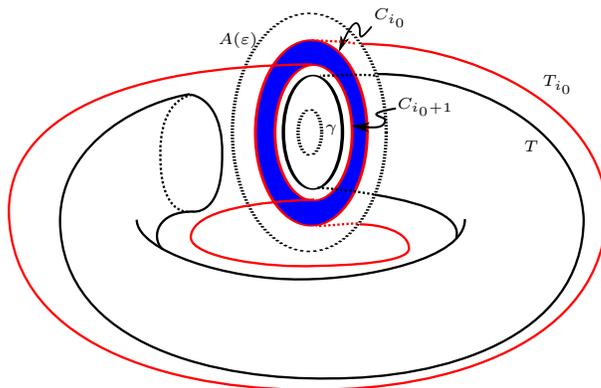


Figura 4.3: Construção da subvariedade N' .

Finalmente, estabeleceremos e provaremos a Conjectura de Morse para ações localmente livres.

Teorema 4.1. *Sejam N^3 uma 3-variedade fechada conexa e orientável e ϕ uma ação localmente livre, de classe C^2 e topologicamente transitiva. Então a ação ϕ é metricamente transitiva.*

Demonstração: Consideremos a folheação \mathcal{F}_ϕ definida em N induzida pela ação ϕ .

Como esta ação é localmente livre, as folhas de \mathcal{F}_ϕ são homeomorfas à planos, cilindros ou toros.

Se \mathcal{F}_ϕ não tem órbitas compactas, então pelo Teorema 3.1 e por um Teorema de Sacksteder ([35, Teorema 9]), todas as folhas são densas e tem o mesmo tipo topológico, em particular a ação é metricamente transitiva.

Suponhamos que \mathcal{F}_ϕ tem órbitas compactas. Como existe uma órbita densa, segue do item (iii) do Teorema 3.1, que existe uma única órbita compacta T .

Note que $\mathcal{F}_\phi \setminus T$ é uma folheação por planos. De fato, como todas as folhas diferentes de T tem o mesmo tipo topológico, então se $\mathcal{F}_\phi \setminus T$ não for uma folheação por planos, todas as folhas são cilindros. Em particular, a folha densa é homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 4.3, não existe órbita compacta; o que é uma contradição.

Assim, $N_1 = N \setminus T$ é uma 3 variedade aberta com uma folheação \mathcal{F}_ϕ por planos de classe C^2 , e tal que $\pi_1(N_1) = \mathbb{Z}^2$ (isto, pelo item (iii) do Teorema 3.1). Logo, por [5, Teorema 2] a folha de cada q em N_1 é densa em N_1 e daí em N , em particular, a ação é metricamente transitiva. ■

4.2 A Conjectura de Morse para ações singulares

Nesta seção demonstraremos o Teorema B. Na Subseção 4.2.1 exibiremos um exemplo, Proposição 4.4, que ilustra o porquê da necessidade de considerar ações com número finito de singularidades círculo.

A prova do Teorema B será dividida em duas partes. Na Subseção 4.2.2 assumiremos que a ação admite uma órbita densa do tipo cilindro. Finalmente, na Subseção 4.2.3., consideramos o caso que ϕ admite órbita densa plana.

4.2.1 Um exemplo

Agora mostraremos que é necessário impor algum tipo de restrição sobre o conjunto $Sing(\phi)$, onde ϕ é uma ação de \mathbb{R}^2 sobre uma variedade N .

Proposição 4.4. *Existe uma ação ϕ de classe C^∞ do grupo \mathbb{R}^2 sobre a variedade $N^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$, $n \geq 2$; topologicamente transitiva mas, não metricamente transitiva com conjunto singular infinito não enumerável.*

Demonstração: No toro \mathbb{T}^n , consideremos o campo de vetores constante X definido por:

$$X(x) = (1, \pi, \dots, \pi^{n-1}). \quad (4.2)$$

É conhecido que o campo de vetores definido como acima é minimal, isto é, todas as órbitas são densas. Seja Γ_0 a órbita da solução de (4.2) passando pelo ponto $(0, 0, \dots, 0)$; logo, $\overline{\Gamma_0} = \mathbb{T}^n$. Denotemos por ϕ^t o fluxo associado ao campo X .

Primeiro construiremos um fluxo sobre \mathbb{T}^n , topologicamente transitivo mas, não metricamente transitivo. Esta construção é devida a Ding ([18]).

Consideremos os conjuntos $S_1 = [\{(0, t_2, \dots, t_n), t_i \in \mathbb{R}\}]$, $S_2 = [\{(\frac{1}{2}, t_2, \dots, t_n), t_i \in \mathbb{R}\}]$, onde $[A]$ denota a imagem pela aplicação do recobrimento universal $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Notemos que $\phi^{\frac{1}{2}}(S_1) = S_2$. Seja $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a sequência dos pontos da órbita de Γ_0 que intersecta S_1 , isto é, $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \Gamma_0 \cap S_1$ e seja $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sum_{k \geq 0} \frac{2c}{1+k^2} < \frac{1}{2}$.

Denotemos por m a medida de Lebesgue em \mathbb{T}^n , por m^* a medida de Lebesgue em S_1 e sejam B_k bolas abertas em S_1 centradas em p_k tal que $m^*(B_k) = \frac{c}{1+k^2}$; logo, $0 < m^*(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_k) < \frac{1}{2}$.

Sejam $F_1 = S_1 \setminus B$, $F_2 = \{X^{\frac{1}{2}}(p); p \in F_1\}$ e $E = \{X^t(p); p \in F_1 \text{ e } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$ então $\frac{1}{4} < m(E) < 1$.

Como os conjuntos F_1 e F_2 são compactos, tomemos o compacto $F = F_1 \cup F_2$, então existe $\theta : \mathbb{T}^n \rightarrow [0, \infty)$ de classe C^∞ tal que $\theta^{-1}(0) = F$ e $\theta(x) > 0$ se $x \notin F$; consideremos um novo campo de vetores X_1 , definido por:

$$X_1(x) = \theta(x)X(x). \quad (4.3)$$

Observemos que $Sing(X_1) = F$, Γ_0 é ainda uma órbita densa em \mathbb{T}^n do campo de vetores X_1 e E é um conjunto fechado invariante e $\frac{1}{4} < m(E) < 1$.

Logo, temos que o fluxo associado ao campo de vetores X_1 , ϕ_1^t , é topologicamente transitivo mas, não metricamente transitivo.

Em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$, consideramos coordenadas (x, θ) tais que $x \in \mathbb{T}^n$ e $\theta \in \mathbb{S}^1$. Consideramos a ação $\phi : \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) \rightarrow (\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ de classe C^∞ , com conjunto de geradores infinitesimais $\{X_1, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$. Assim, existe $K = E \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$ compacto e ϕ -invariante tal que $0 < m(K) < 1$, onde m também denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1$; isto mostra a proposição. ■

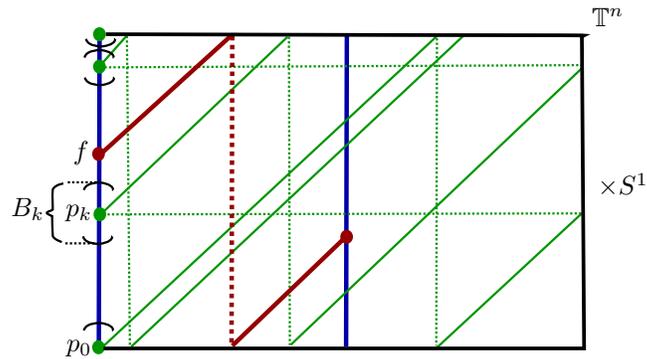


Figura 4.4: Uma ação topologicamente transitiva mas não metricamente transitiva.

✘ **Observação 4.2.** *Seja ϕ a ação de \mathbb{R}^2 sobre $\mathbb{T}^n \times S^1$ definida como acima, então:*

- (i) em [33] e [34] Russell e Thomas mostraram que qualquer n -variedade, com $n \geq 2$, admite um fluxo transitivo;
- (ii) em [18], Ding observou que dado um campo de vetores X sobre uma variedade N , topologicamente transitivo, podemos construir um campo X_1 sobre N (de forma similar ao da Proposição 4.4) que é topologicamente transitivo mas, não metricamente transitivo. Novamente, por construção, X_1 tem uma infinidade não enumerável de singularidades.

Pela observação anterior, temos.

Proposição 4.5. *Seja N uma n -variedade orientável conexa e fechada com $n \geq 2$. Então existe uma ação ϕ de classe C^∞ de \mathbb{R}^2 sobre $M = N \times S^1$ que é topologicamente transitiva mas, não metricamente transitiva sobre M . A ação ϕ tem uma infinidade não enumerável de singularidades e todas as folhas regulares do mesmo tipo topológico que $S^1 \times \mathbb{R}$.*

4.2.2 A Conjectura de Morse para ações singulares I.

Nesta subseção apresentaremos uma prova para a Conjectura de Morse quando a ação ϕ possui uma órbita densa do tipo topológico cilindro (Teorema 4.3). Iniciaremos apresentando um exemplo importante.

Exemplo 4.1. *Seja Σ uma superfície, em [33] Russell e Thomas mostraram que Σ admite um campo de vetores com um número finito de singularidades cujo fluxo associado é topologicamente transitivo, denotemos tal campo por X .*

Sejam p_1, p_2, \dots, p_s os pontos singulares deste campo em Σ , em $N^3 = \Sigma \times \mathbb{S}^1$ podemos definir o par de campos de vetores comutativos:

$$\begin{aligned} Y_1(p, \theta) &= X(p), \\ Y_2(p, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Portanto, estes campos definem uma \mathbb{R}^2 -ação ϕ sobre N topologicamente transitiva, com todas as órbitas de dimensão 2 do tipo cilindro e cujo conjunto singular é:

$$\text{Sing}(\phi) = \{\{p_1\} \times \mathbb{S}^1, \{p_2\} \times \mathbb{S}^1, \dots, \{p_s\} \times \mathbb{S}^1\}.$$

O seguinte resultado diz que, num certo sentido, que a ação ϕ é como no Exemplo 4.1. Mais precisamente:

Teorema 4.2. *Sejam N uma 3-variedade orientável, conexa e fechada, e ϕ uma C^2 ação de \mathbb{R}^2 sobre N tal que o conjunto singular, $\text{Sing}(\phi)$, é uma união finita de órbitas círculo S_1, \dots, S_k . Suponhamos que ϕ possui uma órbita cilíndrica densa. Então, se $N_0 = N \setminus \text{Sing}(\phi)$; existem um subgrupo $H \cong \mathbb{R}$, um subgrupo discreto H_0 de H , uma superfície aberta Σ_0 e um fibrado principal $\pi : N_0 \rightarrow \Sigma_0$ com fibras \mathbb{S}^1 tais que:*

- (i) $H_0 = \{v \in \mathbb{R}^2; \phi^v|_{N_0} = Id\}$;
- (ii) cada órbita de $\phi|_{H \times N_0}$ é uma fibra de $\pi : N_0 \rightarrow \Sigma_0$. Em particular, Σ_0 é o espaço das órbitas de $\phi|_{H \times N_0}$;
- (iii) para cada $v \notin H$, o fluxo ϕ^{tv} induz um fluxo em Σ_0 , sem singularidades e topologicamente transitivo.

Demonstração: Seja $p \in N$ tal que \mathcal{O}_p é um cilindro denso. Pela Proposição 2.7, todas as folhas de $\mathcal{F}_\phi|_{N_0}$ são homeomorfas à \mathbb{T}^2 ou à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Como a ação ϕ é topologicamente transitiva, então ela é topologicamente transitiva de um lado. Daí, pela Proposição 4.3, todas as órbitas regulares de ϕ são cilindros.

Como $\overline{\mathcal{O}_q} = N$, então $\mathcal{O}_q \subset \lim(\mathcal{O}_p)$ para todo $q \in N_0$. Consequentemente, pela Proposição 2.8, $G_p \subset G_q$ para cada $q \in N_0$. Daí, como todas as órbitas em N_0 são cilindros, então para $q \in N_0$ fixo e arbitrário, existem $u_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $G_q = \mathbb{Z}u_1$ e $G_p = \mathbb{Z}(\ell u_1)$. Seja $u_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\{u_1, u_2\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .

Afirmção: $G_q = G_p$, para todo $q \in N_0$. Esta afirmação prova (i), tomando $H_0 = G_p$. É suficiente mostrar que $\ell = 1$.

De fato, seja (U, ψ) uma carta da folheação $\mathcal{F}_\phi|_{N_0}$ tal que $q \in U$, $\phi(q) = 0$ e $\psi(U) = D_\varepsilon^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $D_\varepsilon^2 = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Claramente $\Sigma = \psi^{-1}(\{(0, 0)\} \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ é transversal a $\mathcal{F}_\phi|_{N_0}$ e contém q .

Consideremos $\gamma = \{\phi^{tu_1}; t \in [0, 1]\}$, o laço fechado na folha \mathcal{O}_q e $h_\gamma : (\Sigma, q) \rightarrow (\Sigma, q)$ o difeomorfismo de holonomia de $\mathcal{F}_\phi|_{N_0}$ associado a γ . Como $\overline{\mathcal{O}_q} = N$ podemos supor que $p \in \Sigma$. Daí, já que h_γ é igual a ϕ^{u_1} composto com a projecção de U sobre Σ a longo das placas, e como $\phi^{lu_1}(p) = p$; então, temos que $\phi^{u_1}(p) \in P_p = \psi^{-1}(D_\varepsilon^2 \times \{\psi(p)\})$. Consequentemente existem $0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon$ tal que:

$$\phi^{u_1} \circ \phi^{\varepsilon_1 u_1} \circ \phi^{\varepsilon_2 u_2}(p) = p,$$

isto é, $u_1 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 \in G_p$.

Como $\overline{\mathcal{O}_q} = N$, podemos supor que p está suficientemente próximo de q de maneira que $\|\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2\| \ll \frac{1}{2} \|u_1\|$. Como $G_p = \mathbb{Z}(\ell u_1)$ então $\ell \|u_1\| \leq \|u_1 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2\|$ mas, por outro lado $\|u_1 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2\| \leq \|u_1\| + \|\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2\| \leq \frac{3}{2} \|u_1\|$; isto significa que $0 \leq \ell \leq \frac{3}{2}$, assim $\ell = 1$.

Agora, consideremos $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}u$, pela afirmação acima, a ação $\widehat{\phi} : \mathbb{S}^1 \times N_0 \rightarrow N_0$ definida por $\widehat{\phi}([t], p) = \phi(t, p)$ é livre. Onde $[\cdot]$ denota a classe de equivalência no quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}u$. Consequentemente, o espaço de órbitas de $\widehat{\phi}$ é uma superfície Σ_0 e a projecção $\pi : N_0 \rightarrow \Sigma_0$ define um fibrado principal com fibras \mathbb{S}^1 . Além disso, as fibras são as órbitas de $\phi|_{H \times N_0}$, onde H é a reta contendo $H_0 = G_p$. Isto mostra o item (ii). Assim, o espaço de folhas de $\widehat{\phi}$ é uma superfície e N_0 é um fibrado por círculos sobre Σ_0 .

Só resta mostrar o item (iii). Sejam $v \in \mathbb{R}^2 \setminus H$ e $\widetilde{\phi}^t$ o fluxo em Σ_0 tal que $\pi(\phi^{tv}(x)) = \widetilde{\phi}^t(\pi(x))$ para cada $x \in N_0$. Afirmamos que $\widetilde{\phi}^t$ é topologicamente transitivo em Σ_0 .

Sejam U e V dois abertos não vazios de Σ_0 ; devemos mostrar que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\widetilde{\phi}^{t_0}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

De fato, $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ são abertos não vazios de N_0 , como $\phi|_{N_0}$ é topologicamente transitiva; então existem t_0 e t_1 números reais tal que:

$$\phi^{(t_1 u_1 + t_0 v)}(\pi^{-1}(U)) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Seja $q \in \phi^{(t_1 u_1 + t_0 v)}(\pi^{-1}(U)) \cap \pi^{-1}(V)$, então $\pi(q) \in V$ e existe $q_1 \in \pi^{-1}(U)$ tal que $q = \phi^{(t_1 u_1 + t_0 v)}(q_1)$. Logo, como q_1 e $\phi^{t_1 u_1}(q_1)$ pertencem a mesma fibra, então

$$\pi(q) = \pi(\phi^{(t_1 u_1 + t_0 v)}(\pi(q_1))) = \pi(\phi^{t_0 v}(\phi^{t_1 u_1}(\pi(q_1)))) = \pi(\phi^{t_0 v}(\pi(q_1))) = \widetilde{\phi}^{t_0}(\pi(q_1)).$$

Assim, $\pi(q) \in \tilde{\phi}^{t_0}(U) \cap V \neq \emptyset$; o que termina a prova. ■

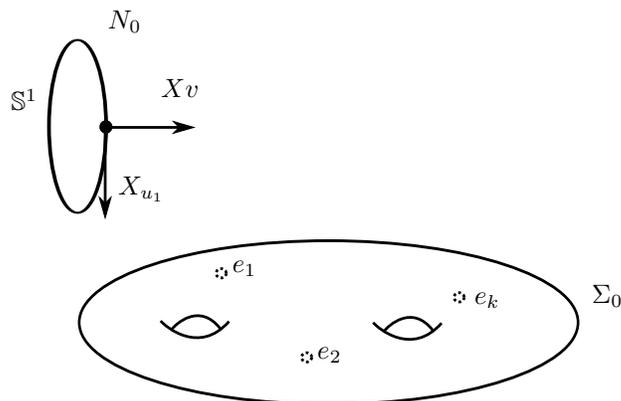


Figura 4.5: O fibrado sobre Σ_0 .

✂ **Observação 4.3.** Consideremos a superfície Σ_0 e o fluxo $\tilde{\phi}^t$ sobre Σ_0 como no teorema anterior.

(i) Σ_0 é uma superfície com k fins, $\mathcal{E}(\Sigma_0) = \{e_1, \dots, e_k\}$ e $\Sigma = \Sigma_0 \cap \mathcal{E}(\Sigma_0)$ é uma superfície compacta. De fato, dado $i \in \{1, \dots, k\}$ sejam S_i uma órbita singular qualquer de ϕ , q_i um ponto arbitrário de S_i , pela estrutura das órbitas em torno das órbitas círculo (vide Seção 3.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_0(\frac{1}{n})$ transversal a S_i em q_i . Assim, $\{\pi(A_0(\frac{1}{n}) \setminus \{q_i\})\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de e_i em Σ_0 . Logo, pela Proposição 2.2, temos que Σ é uma superfície compacta.

(ii) Na superfície Σ consideremos a extensão do fluxo $\tilde{\phi}^{t_0}$, que ainda denotaremos por $\tilde{\phi}^t$, definindo $\tilde{\phi}^t(e_i) = e_i$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O fluxo $\tilde{\phi}^t$ é de classe C^r fora dos fins e_i , pelo menos, contínuo nos fins e_i .

Antes de apresentar o seguinte resultado, precisamos de um conceito sobre fluxos.

Definição 4.2. Seja f^t um fluxo sobre uma superfície compacta S e assumamos que ela possui uma órbita recorrente não trivial (órbita recorrente diferente de ponto fixo e órbita periódica). Um conjunto $M \subset S$ é chamado de *conjunto quase-minimal do fluxo f^t* se ele é o fecho (topológico) de uma trajetória recorrente não trivial.

Proposição 4.6. O fluxo $\tilde{\phi}^t$ definido sobre Σ é metricamente transitivo.

Demonstração: Seja $x \in \Sigma$, afirmamos que $\omega(x)$ é um único ponto singular ou é toda a superfície Σ . De fato, primeiramente observemos que, como $\tilde{\phi}^t$ tem um número finito de singularidades e todas do tipo hiperbólica (pois $\tilde{\phi}^t$ é topologicamente transitivo) então, tem um número finito de separatrizes.

- (i) $\omega(x)$ não pode ser uma trajetória fechada. Suponhamos que $C \subset \Sigma$ seja uma órbita fechada de $\tilde{\phi}^t$, então, pelo Teorema 4.2, $\pi^{-1}(C)$ é um toro. Mas ϕ possui uma órbita densa cilíndrica, o que é uma contradição com a Proposição 4.3.
- (ii) Seja $x_0 \in \Sigma$ cuja órbita é densa em Σ . Como o fluxo $\tilde{\phi}^t$ é topologicamente transitivo, então $\omega(x)$ não pode ser um gráfico. De fato, suponhamos que $\omega(x)$ é um gráfico G , podemos assumir que G é uma curva fechada simples. Se G é homotópico a um ponto, então ela separa Σ em duas regiões abertas, o que contradiz a transitividade topológica. Assim G é não homotópica a uma constante.

Agora seja $p^* \in G$ um ponto regular de $\tilde{\phi}^t$, então existe um segmento pequeno L^* passando por p^* , que é transversal ao campo associado à $\tilde{\phi}^t$, também existe uma bola centrada em p^* , D , suficientemente pequena tal que qualquer órbita cruza L^* de esquerda a direita sempre que ele chegue a D , desde que $\tilde{\phi}^t(x_0)$ é denso, segue-se que ele intersecta L^* em infinitos pontos.

Sejam p_1 e p_2 dois de tais pontos tal que $p_1 = \tilde{\phi}^r(x_0)$ e $p_2 = \tilde{\phi}^s(x_0)$, sem perda de generalidade podemos supor que $s > r$, seja $I^* = \{z \in \mathbb{T}^2; z = f^t(p_0), r \leq t \leq s\}$, e tomando o intervalo $(p_1, p_2) \subset L^*$, formamos o a curva fechada simples

$$J = I^* \cup (p_1, p_2),$$

a qual é tal que $J \cap G = \emptyset$.

Pelo mesmo argumento anterior, a curva J não é homotópico a um ponto. Desde que J não é homotópico a um ponto, $\tilde{\phi}^t$ não intersecta G e $\tilde{\phi}^t$ pode intersectar J só no intervalo (p_1, p_2) ; temos que existe uma região $D \subset \Sigma$ aberta com fronteira formada por G e J de modo que $\tilde{\phi}^t(x_0)$ pode, eventualmente, entrar em D (ou em seu complementar) e fica lá sempre, o qual contradiz a densidade de $\tilde{\phi}^t$; assim o item (ii) está provado.

- (iii) Afirmamos que se $\omega(x)$ é um conjunto quase-minimal, então $\omega(x) = \Sigma$. Suponhamos o contrário, isto é, $\omega(p)$ é um conjunto quase-minimal que não é todo Σ . Como $\tilde{\phi}^t$ tem uma órbita positiva densa, então Σ é um conjunto quase-minimal. Como $\omega(x) = \Sigma \cap \omega(x)$, isto é, $\omega(x)$ é a intersecção de dois conjuntos quase-minimais,

então por [2, Teorema 4.1], $\omega(x)$ consiste de pontos fixos e separatrizes indo de pontos fixos para pontos fixos. Mas, isto contradiz o fato de que $\omega(x)$ é um conjunto quase-minimal. Logo, se $\omega(x)$ não é Σ , então $\omega(x)$ não é quase-minimal.

A mesma conclusão vale para o conjunto $\alpha(x)$.

(iv) Por outro lado, sabemos que $\omega(x)$ ($\alpha(x)$) é:

- um ponto fixo, ou
- uma trajetória fechada, ou
- um gráfico, ou
- um conjunto quase-minimal.

Logo, se $\omega(x) \neq \Sigma$, então pelo item (iii), $\omega(x)$ não é quase minimal, e pelos itens (i), (ii) e (iv) temos que $\omega(x)$ é um ponto fixo de $\tilde{\phi}^t$.

Finalmente, seja E um subconjunto próprio de Σ , compacto e $\tilde{\phi}^t$ -invariante. Seja $x \in E$ então os conjuntos $\omega(x)$, $\alpha(x)$ $\{\tilde{\phi}^t(x); t \in \mathbb{R}\}$ são subconjuntos próprios de Σ . Assim, $\omega(x) \neq \Sigma$ e $\alpha(x) \neq \Sigma$. Logo, $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são pontos fixos de $\tilde{\phi}^t$ (diferentes, pois não existem gráficos). Daí, $\{\tilde{\phi}^t(x); t \in \mathbb{R}\}$ é um ponto fixo ou uma separatriz. Segue que E consiste de um número finito de separatrizes e singularidades, assim $m^*(E) = 0$. Onde m^* denota a medida de Lebesgue em Σ . ■

Do Teorema 4.2, da observação anterior e do [18, Teorema 1] segue:

Teorema 4.3. *Sejam N uma 3-variedade orientável, conexa e fechada e ϕ uma C^2 ação de \mathbb{R}^2 sobre N tal que o conjunto singular é uma união finita de órbitas círculo S_1, \dots, S_k . Se existe $p \in N$ tal que $\overline{\mathcal{O}_p} = N$ e $\mathcal{O}_p \simeq S^1 \times \mathbb{R}$, então ϕ é metricamente transitiva.*

Isto prova o Teorema B quando a órbita densa é cilíndrica.

4.2.3 A Conjectura de Morse para ações singulares II.

Nesta seção provaremos o Teorema B quando a órbita densa é plano. Mas precisamente mostraremos:

Teorema 4.4. *Sejam N uma 3-variedade orientável, fechada e conexa; ϕ uma \mathbb{R}^2 ação sobre N topologicamente transitiva tal que $Sing(\phi)$ é uma união finita de órbitas círculo. Se o tipo topológico da órbita densa de ϕ é \mathbb{R}^2 então, ϕ é metricamente transitivo.*

Antes precisamos apresentar alguns resultados preliminares. Seja S uma órbita em $Sing(\phi)$, como na Seção 3.1, existe um ponto $q_0 \in S$, uma disco $A_0(\varepsilon)$ transversal a S em q_0 e um campo de vetores de classe C^2 , Y , sobre $A_0(\varepsilon)$.

Lema 4.1. *Sejam N uma 3-variedade orientável, fechada e conexa; ϕ uma \mathbb{R}^2 ação sobre N topologicamente transitiva tal que $S \in \text{Sing}(\phi)$. Se o tipo topológico da órbita densa de ϕ é \mathbb{R}^2 , então temos três possibilidades:*

- (i) q_0 é um atrator ou repulsor de Y ; ou
- (ii) o campo Y só possui setores hiperbólicos; ou
- (iii) q_0 é um ponto de rotação do campo Y .

Demonstração: Seja $p \in N$ tal que \mathcal{O}_p é um plano denso em N . Se q_0 não é um ponto de rotação nem um ponto atrator (repulsor) do campo Y então, Y possui separatrizes em $A_0(\varepsilon)$. Logo, existe um número finito de setores parabólicos, elípticos e hiperbólicos (vide Teorema 2.1 e Teorema 2.2).

- (A) Seja $E \subset A_0(\varepsilon)$ um setor elíptico. Como existem um número finito de setores elípticos e os setores são ϕ -invariantes, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_0^n(E) = E$, onde f_0 é a aplicação de Poincaré definida na Seção 3.1. Portanto, o saturado de E pela folheação $\mathcal{F}|_\phi$, $\mathcal{F}|_\phi(E)$, é um subconjunto aberto e próprio de N . isto contradiz a hipótese de transitividade topológica. Daí, não existem setores elípticos.
- (B) Suponhamos que Y possui um setor parabólico atrator P . Como \mathcal{O}_p é densa em N , podemos supor que existem $p, q \in \mathcal{O}_p$ tal que $q \neq f_0^n(p)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De outro lado, existe $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}u$ tal que $\phi^v(p) = q$. Daí, $q \in \mathcal{O}_Y^+(p)$. O que é uma contradição.

■

✂ **Observação 4.4.** *Observemos que para mostrar que não existem setores elípticos não precisamos da hipótese da ação possuir uma órbita densa com tipo topológico de um plano.*

S seguinte proposição mostra que se existe uma órbita cilíndrica então, o conjunto limite dela não pode conter um toro.

Proposição 4.7. *Sejam N uma 3-variedade orientável, fechada e conexa; ϕ uma \mathbb{R}^2 ação sobre N topologicamente transitiva tal que $\text{Sing}(\phi)$ é uma união finita de órbitas círculo. Além disso, o tipo topológico da órbita densa de ϕ é \mathbb{R}^2 . Se existe $q \in N$ tal que \mathcal{O}_q é um cilindro, então o conjunto $\lim(\mathcal{O}_q)$ contém alguma singularidade.*

Demonstração: Suponhamos que existam dois pontos p e q em N tal que:

- (i) \mathcal{O}_p seja densa em N e tenha o tipo topológico de \mathbb{R}^2 ;
- (ii) $\mathcal{O}_q \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ tal que $\lim(\mathcal{O}_q)$ não contem nenhuma singularidade.

Desde que \mathcal{O}_q não é densa em N (pois neste caso, pela Proposição 2.7, não existiriam folhas planares). Daí, pelo item (ii) acima, temos que existe uma folha compacta \mathcal{O} contida em $\lim(\mathcal{O}_q)$.

Sejam $A(\varepsilon)$ e \widehat{X} como na Proposição 4.3. Como a órbita do ponto p é densa, então podemos supor que $q \in A(\varepsilon)$, pois $\mathcal{O}_q \cap V \neq \emptyset$. Pela Observação 4.1, $\mathcal{O}_p(\widehat{X})$ é fechado. Mais isto contradiz a Proposição 3.1. ■

Demonstração do Teorema 4.3: Seja N_0 o complementar do fecho da união das órbitas cilíndricas. Como existe uma órbita planar densa, então N_0 é aberto, conexo e folheado por planos; com uma órbita densa. Consideraremos dois casos.

Caso I: Assumamos que nenhuma órbita $S \in \text{Sing}(\phi)$ possui separatrizes. Com as notações da Subseção 3.2.1, $q_0 \in A_0(\varepsilon)$ é um ponto atrator (ou, repulsor) para o campo Y e pela Proposição 3.4, existe um toro T em N_0 transverso à ação ϕ que é bordo de uma vizinhança tubular de S .

Como ϕ possui uma órbita plano densa em N_0 então, a folheação em T induzida pela ação ϕ é topologicamente equivalente à folheação definida pelo fluxo irracional no toro \mathbb{T}^2 . Consequentemente, o saturado, $V(T)$, de T pela ação ϕ é um aberto difeomorfo a $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ e ϕ -invariante cujas folhas são planos densos em N_0 (vide [5]). Daí, $V(T) \cup S$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times D^2$.

Afirmamos que ∂N_0 não contém órbitas não singulares. de fato, seja $q \in \partial N_0$ tal que \mathcal{O}_q é uma folha regular; observemos que \mathcal{O}_q não pode ser um cilindro, pois neste caso existiriam separatrizes; daí, \mathcal{O}_q é um toro.

Seja (U, ψ) uma carta da folheação \mathcal{F}_ϕ tal que $q \in U$. Como $V(T)$ tem folhas planos densos, então $V(T) \cup U = U \setminus P_q$, onde P_q é a placa de \mathcal{F}_ϕ em U que contem q . Assim $V(T) = N$, isto é ϕ não possui órbita singulares. Esta contradição mostra o teorema neste caso.

Caso II: Assumamos que exista uma órbita cilíndrica. Sejam $q \in N$ tal que sua órbita \mathcal{O}_q é cilíndrica e $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gerador do subgrupo de isotropia G_q . Seja L uma transversal a ϕ em q , então, como $\phi^u(q) = q$, para $q_0 \in \mathcal{O}_p \cap L$ suficientemente próximo de q , existe $u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de norma pequena, tal que $\phi^{u+u_0}(q_0) \in L$. Como $\overline{\mathcal{O}_p} = N$, para $q'_0 \in \mathcal{O}_p \cap L \setminus \{\phi^{u+u_0}(q_0)\}$, existe $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}u$ tal que $\phi^v(q_0) = q'_0$.

Sejam α_0 o segmento com extremos q_0 e $\phi^u(q_0)$ e β_0 o segmento com extremos q_0 e q'_0 . Consideremos os laços α e β definidos como:

$$\alpha = \alpha_0 \cup \{\phi^{tu+u_0}(q_0); t \in [0, 1]\} \quad \text{e} \quad \beta = \beta_0 \cup \{\phi^{tv}(q_0); t \in [0, 1]\}$$

por construção, estes laços representam elementos de $\pi_1(N_0)$ que comutam. Além disso, usando uma trivialização a longo de α_0 e β_0 do fluxo $\phi^{t(u+u_0)}$ e ϕ^{tv} , respectivamente, temos que α e β são isotópicas a laços transversais. Conseqüentemente, não são homotópicos a constantes.

Como α e β foram construídos usando dois fluxos que geram a ação em N_0 , então α e β representam classes $[\alpha]$ e $[\beta]$ independentes em $\pi_1(N_0)$. Logo $\langle [\alpha], [\beta] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Daí, por [5, Teorema 2]; $N_0 \simeq \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ e cada órbita de ϕ em N_0 é densa em N_0 . Como cada cilindro é isolado, temos que $N \setminus N_0$ é união finita de cilindros e círculos.

Finalmente, se E é um subconjunto de N , compacto e ϕ -invariante, então:

- Se $E \cap N_0 = \emptyset$ então $m(E) = 0$.
- Se $E \cap N_0 \neq \emptyset$, $m(E) = m(N)$.

onde m denota a medida de Lebesgue em N . Daí a ação ϕ é metricamente transitiva. ■

Conclusões e comentários

O objetivo deste capítulo é apresentar problemas e fazer algumas considerações finais ao respeito dos resultados obtidos no presente trabalho.

Topologia das variedades que suportam certas ações

Em [7] é definido o conceito de órbita singular hiperbólica para ações de \mathbb{R}^k sobre uma variedade N . Nesse caso, todos os setores do campo Y , definido na Seção 3.1, são hiperbólicas. Logo temos a seguinte questão:

Questão 1: Quais variedades suportam ações de \mathbb{R}^2 com um número finito de órbitas singulares círculo hiperbólicas?

Encontrar resultados análogos a os apresentados nos capítulos 3 para uma folheação \mathcal{F} singular qualquer resulta muito complicado, não entanto podemos destacar os seguintes resultados parciais.

Quando ϕ é uma ação de \mathbb{R}^{n-1} localmente livre sobre uma variedade N de dimensão n com $n \geq 3$, os autores, em [14], mostraram que N é um fibrado sobre um toro \mathbb{T}^l com fibra um toro \mathbb{T}^{n-l} .

Quando a folheação \mathcal{F} é uma folheação por planos fechados e a variedade N^n é aberta e simplesmente conexa, Palmeira em [29] mostrou que N é difeomorfa a \mathbb{R}^n . Se a folheação admite singularidades, Álvarez López J. A., Arraut J. L. e Biasi C. (ver [1]) mostraram que se N^n com $n \geq 3$ é uma variedade fechada e \mathcal{F} é uma folheação por planos fechados sobre $N \setminus K$ onde K é um conjunto finito de pontos, então K é unitário e N é homeomorfo a S^n .

Se as folhas plano não são fechadas Biasi e Maquera (ver [5]) mostraram, entre outras

coisas, que se N^3 é aberta, conexa, orientável e $\pi_1(N)$ é abeliano de posto maior do que um; então N é homeomorfo a $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Levando em conta este resultado, podemos fazer a seguinte conjectura.

Conjectura 1. *Seja N^n uma variedade aberta conexa e orientável e \mathcal{F} uma folheação em N por planos. Se $\pi_1(N)$ é isomorfo a \mathbb{Z}^2 , então N difeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$.*

Tendo em conta que os primeiros resultados sobre a Conjectura de Morse para \mathbb{R} -ações foram dados quando a ação é analítica real (vide [3] e [18]) é natural a seguinte questão:

Questão 2: *Seja ϕ uma ação analítica real de \mathbb{R}^2 sobre uma 3-variedade fechada N . Qual é o tipo topológico de N .?*

Sobre a Conjectura de Morse

O Teorema 4.2, pode ser generalizado para ações de \mathbb{R}^{k+l} sobre variedades N^n . Neste caso se a ação ϕ admite uma órbita densa homeomorfa a $\mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^k$, então existe uma variedade Σ^{n-l} e um fibrado principal $\pi : N \rightarrow \Sigma^{n-l}$ com fibra \mathbb{T}^l . Além disso ϕ induz uma ação $\tilde{\phi}$ sobre Σ^{n-l} com todas as suas órbitas planos. Como consequência disto, surgem varias perguntas relacionadas à Conjectura de Morse.

- (i) Numa variedade fechada, como são as folheações por planos com um numero finito de singularidades ponto?.
- (ii) Podem conviver folhas densas e fechadas?
- (iii) A conjectura de Morse é verdadeira nesta caso?

Por outro lado, se a questão 2 fosse respondida, é natural a seguinte:

Questão 3: *Seja ϕ uma ação analítica real de \mathbb{R}^2 sobre uma 3-variedade fechada. Se ϕ é topologicamente transitiva, então ϕ é metricamente transitiva?.*

Quando a dimensão do grupo é ≥ 3 , existem as naturais generalizações:

Questão 4. *Seja ϕ uma ação topologicamente transitiva de classe C^2 de \mathbb{R}^{n-1} sobre uma n -variedade fechada tal que o seu conjunto singular é uma união finita de toros $n - 2$ dimensionais. É ϕ metricamente transitiva?*

Observemos que as conjecturas e questões anteriores podem ser estabelecidas em termos da teoria de folheações, mais explicitamente podemos nos perguntar sobre a validade da conjectura de Morse para folheações, singulares ou não (ver [26]), de codimensão um

sobre 3-variedades. Desde que o tipo topológico das folhas pode ser muito diverso, a dificuldade do problema em sua generalidade fica evidente. Por outro lado existem alguns resultados parciais de classificação das variedades que suportam folheações (ver [30],[32], [5] e [35]), que passamos a expor.

Seja \mathfrak{F} uma folheação por planos de classe C^2 sobre uma 3-variedade fechada N , então por [30], todas as folhas são densas. Em particular, neste caso, a conjectura de Morse é verdadeira.

No caso de folheações singulares, usando [5], acreditamos ser verdadeira a seguinte conjectura:

Conjectura 2 *Seja \mathfrak{F} uma folheação por planos de classe C^2 sobre uma 3-variedade fechada N cujo conjunto singular é a união finita de círculos, então a conjectura de Morse é válida.*

Logo, se a Conjectura 2 for verdadeira, podemos propor a seguinte questão:

Questão 5. *Se \mathfrak{F} uma folheação por planos de classe C^2 sobre uma n -variedade fechada N cujo conjunto singular é a união finita de folhas de dimensão $n - 2$. O que podemos dizer sobre a validade da conjectura de Morse?*

Referências Bibliográficas

- [1] Álvarez, J.A.; Arraut J.L. and Biasi C. *Foliations by planes and Lie group actions*. Ann. Polon. Math., 82 (2003), 1, 61-69.
- [2] Aranson, S.; Belitsky, G. and Zhuzhoma, E. *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*. Translated from the Russian manuscript by H. H. McFaden. Translations of Mathematical Monographs, 153. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. xiv+325 pp.
- [3] Aranson S. and Zhuzhoma E. *Proof of the Morse conjecture for analytic flows on orientable surfaces* Preprint.
- [4] Arraut, J. and Maquera, C. *On the orbit structure of \mathbb{R}^n -actions on n -manifolds*. ual. Theory Dyn. Syst. 4 (2003), no. 2, 169–180 (2004).
- [5] Biasi C. and Maquera C. *A note on open 3-manifolds supporting foliations by planes*. Submetido para publicação.
- [6] Brito L. F.M. and Maquera C. *Orbit structure of certain \mathbb{R}^2 -actions on the solid torus*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 17 (2008), no. 3, 613–633.
- [7] Camacho, C. *On $R^k \times Z^1$ -actions*. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), pp. 23–70. Academic Press, New York, 1973.
- [8] Camacho, C. and Lins neto, A. *Geometric theory of foliations*. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. vi+205 pp.
- [9] Camacho, C. and Scárdua, B. *On codimension one foliations with Morse singularities on three-manifolds*. Topology Appl. 154 (2007), no. 6, 1032-1040.

- [10] Candel, A. and Conlon, L. *Foliations. I.* Graduate Studies in Mathematics, 23. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xiv+402 pp.
- [11] Candel, A. and Conlon, L. *Foliations. II.* Graduate Studies in Mathematics, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+545 pp.
- [12] Chatelet, G.; Rosenberg, H. and Weil, D. *A classification of the topological types of R^2 -actions on closed orientable 3-manifolds.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 21 (1971), no. 3, 95–106.
- [13] Chatelet, G. and Rosenberg H. *Un théorème de conjugaison des feuilletages* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 261–272.
- [14] Chatelet G. and Rosenberg H. *Manifolds which admit \mathbb{R}^n actions.* Publ. Math. IHES, **43**, 245–260, 1974.
- [15] Chatelet G.; Rosenberg H. and Weil D. *A classification of closed orientable manifolds of rank two.* Ann. of Math., 91, 449-464, 1970.
- [16] Denjoy, A. *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du Tore.* J. Math. Pures et Appl. 11, 333-275 (1932).
- [17] Ding, T. *On Morse conjecture of metric transitivity.* Sci. China Ser. A 34 (1991), no. 2, 138-146.
- [18] Ding, T. *An ergodic theorem for flows on closed surfaces.* Nonlinear Anal. 35 (1999), no. 6, Ser. A: Theory Methods, 669-676.
- [19] Duistermaat, J. J.; Kolk, J. A. C. *Lie groups.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000. viii+344 pp.
- [20] Godbillon, C. *Dynamical systems on surfaces.* Translated from the French by H. G. Helfenstein. Universitext. [University Textbook] Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. ii+201 pp.
- [21] Hartman, P. *Ordinary differential equations.* Corrected reprint of the second (1982) edition [Birkhäuser, Boston, MA; MR0658490 (83e:34002)]. With a foreword by Peter Bates. Classics in Applied Mathematics, 38. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. xx+612 pp.
- [22] Hasselblatt B. and Katok, A. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xviii+802 pp.

-
- [23] Kopell, N. *Commuting diffeomorphisms*. Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 165–184
- [24] Maquera C. and Tahzibi A. *Robustly transitive actions of \mathbb{R}^2 on compact three manifolds*. Bull. Braz. Math. Soc., 38 (2007), no. 2, 189–201.
- [25] Marzougui, H. *On Morse conjecture for flows on closed surfaces*. Math. Nachr. 241 (2002), 121–124.
- [26] Molino, P. *Riemannian foliations*. Translated from the French by Grant Cairns. With appendices by Cairns, Y. Carrière, É. Ghys, E. Salem and V. Sergiescu. Progress in Mathematics, 73. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988. xii+339 pp.
- [27] Morse, M. *George David Birkhoff and his mathematical work*. Bull. Amer. Math. Soc. 52, (1946). 357–391.
- [28] Palis, J. Jr. and de Melo, W. *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*. Translated from the Portuguese by A. K. Manning. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. xii+198 pp.
- [29] Palmeira, C. F. B. *Open manifolds foliated by planes*. Ann. Math., (2) 107 (1978), no. 1, 109–131.
- [30] Rosenberg, H. *Foliations by planes*. Topology, 7, 131–138, 1968.
- [31] Rosenberg, H.; Roussarie, R. and Weil, D. *A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 91, No. 3 (May, 1970), pp. 449–464.
- [32] Rosenberg H. and Roussarie R. *Topological equivalence of Reeb Foliations*. Topology, 9, 231–242, 1970.
- [33] Russell A. and Thomas, E. *Transitive flows on two-dimensional manifolds*. J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 3, 569–576.
- [34] Russell A. and Thomas, E. *Some examples of transitive smooth flows on differentiable manifolds*. J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 3, 552–568.
- [35] Sacksteder, R. *Foliations and pseudo-groups* Amer. J. Math. Soc. 87, (1965). 79–102.