O Número de Nielsen Relativo

CLAUDEMIR ANIZ

Orientador: PROF. DR. OZIRIDE MANZOLI NETO

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos

Maio de 1998

Ao meu pai Antonio Ismael Aniz (in memorian).

Agradecimentos

Aos professores Oziride Manzoli Neto e Lucília Daruiz Borsari, que foram meus orientadores e meus amigos.

À minha mãe Aparecida de Abreu Aniz, meus irmãos José Antonio, Reginaldo e Ismael, pelo incentivo que em muitos momentos tornou-se indispensável.

A todos os meus professores, em particular para a professora Ires Dias pelo apoio e atenção.

Aos meus amigos André, Carlos e Alexandra, que foram colegas de estudo.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é introduzir o número de Nielsen relativo $N(f;X,A)$, para aplicações $f:(X,A)\to(X,A)$ entre pares de espaços, com propriedades semelhantes aos do número de Nielsen, como invariância homotópica e invariância por tipo de homotopia. De $N(f;X,A)\geq N(f)=N(f;X,\emptyset)$, o número de Nielsen relativo é no caso $A\neq\emptyset$ um limitante inferior melhor do que $N(f)$ para o número mínimo $\mu(f;X,A)$ de pontos fixos na classe de homotopia de f, onde as homotopias são aplicações da forma $H:(X\times I,A\times I)\to(X,A)$. Condições para um par (X,A) de poliedros finitos são dadas para assegurar que o número de Nielsen relativo é de fato o melhor limitante inferior, isto é, $N(f;X,A)=\mu(f;X,A)$.

Abstract

The purpose of this work is to introduce the relative Nielsen number $N(f;X,A)$ for maps of pairs of spaces $f:(X,A)\to(X,A)$, with similar properties to the usual Nielsen number as homotopy invariance and homotopy type invariance. From $N(f;X,A)\geq N(f)=N(f;X,\emptyset)$, the relative Nielsen number is in the case $A\neq\emptyset$ a better lower bound than $N(f)$ for the minimum number $\mu(f;X,A)$ of fixed points in the homotopy class of f, here homotopy means maps of pairs of the form $H:(X\times I, A\times I)\to(X,A)$. In the case (X,A) is a finite polyhedral pair, conditions are given to guarantee that the relative Nielsen number is in fact the best lower bound, that is, $N(f;X,A)=\mu(f;X,A)$.

Índice

Introdução

A teoria de ponto fixo de Nielsen preocupa-se com a determinação do número mínimo $\mu(f)$ de pontos fixos na classe de homotopia de uma dada aplicação $f : X \to X$ (isto é, uma função contínua). Para este propósito o número de Nielsen $N(f)$ é introduzido, que é sempre um limitante inferior para $\mu(f)$ e em muitos casos o melhor limitante inferior. No entanto, se $f : (X, A) \to (X, A)$ é uma auto aplicação de pares de espaço e as homotopias são aplicações da forma $H : (X \times I, A \times I) \to (X, A)$, percebemos que $N(f)$ é um mau limitante inferior para o número mínimo $\mu(f; X, A)$ de pontos fixos na classe de homotopia de $f : (X, A) \to (X, A)$. Para ver isto, considere o caso onde $X = B^2$ é um disco e $A = S^1$ o círculo que o borda. Se $f : (B^2, S^1) \to (B^2, S^1)$ é uma aplicação onde $f|_{S^1}$ tem grau d, então todas as aplicações homotópicas à $f : (B^2, S^1) \to (B^2, S^1)$ tem pelo menos $|d - 1|$ pontos fixos sobre S^1 (ver exemplo 1.2.1). Portanto $|d - 1| \leq \mu(f; X, A)$, mas $N(f) = 1$. Daí a necessidade de introduzir um número de Nielsen "relativo"para aplicações de pares de espaços, que faz o mesmo papel de $N(f)$ e é um melhor limitante inferior para $\mu(f; X, A)$.

O capítulo um, usa como referências [8], [5], [6] e [3]. Neste capítulo apresentamos de forma resumida a teoria de ponto fixo de Nielsen. Definimos índice para poliedros finitos conexos, listamos suas principais propriedades e calculamos índice de pontos fixos isolados de funções reais. A definição do número de Nielsen e as demonstrações de suas propriedades básicas é feita na secção 1.2.

Na secção 1.3 descrevemos o problema de determinar o número mínimo de pontos fixos, enunciamos o Teorema de Minimização 1.3.1 e apresentamos alguns resultados técnicos indispensáveis para o desenvolvimento do capítulo 2.

O propósito do capítulo dois, que é baseado em Schirmer [1] é introduzir o número de Nielsen relativo $N(f;X,A)$. A definição de $N(f;X,A)$ na secção 2.1 usa a definição existente de classe de pontos fixos para uma aplicação $f : X \to X$. Mais precisamente, $N(f;X,A)$ é obtido adicionando ao número $N(f)$ de classes de ponto fixos essenciais de $f : X \to X$, isto é, a aplicação f considerada como uma auto aplicação de X somente, o número $N(\overline{f})$ de classes de ponto fixo essenciais da restrição $\overline{f} : A \to A$ de f para A, e então subtraindo o número $N(f,\overline{f})$ de classes essenciais "comuns"de f e $\overline{f}$, onde uma classe comum de f e $\overline{f}$ é definida como uma classe de ponto fixo de f que intercepta uma classe de ponto fixo essencial de $\overline{f}$. A definição de $N(f;X,A)$ produz um inteiro positivo que tem as propriedades básicas usuais do número de Nielsen $N(f)$. Este é invariante por homotopia, invariante por tipo de homotopia, e um limitante inferior de $\mu(f;X,A)$.

Na secção 2.2 consideramos a questão de quando $N(f;X,A)$ é de fato o melhor limitante inferior para $\mu(f;X,A)$, isto é, quando existe uma aplicação $g : (X,A) \to (X,A)$ homotópica a aplicação $f : (X,A) \to (X,A)$ que tem precisamente $N(f;X,A)$ pontos fixos. O Teorema de Minimização Relativo 2.2.4 mostra que este é o caso quando supomos (X,A) satisfazendo propriedades bastante gerais. A construção de uma aplicação com um conjunto de pontos fixos mínimo se dá, como usual, em dois passos. Primeiro deformamos f a uma aplicação que tem apenas um número finito de pontos fixos e tomamos o cuidado de assegurar que esta aplicação tem somente $N(\overline{f})$ pontos fixos sobre A (teorema 2.2.2). Depois unimos pontos fixos em $\overline{X-A}$ quando possível.

As hipóteses do Teorema de Minimização Relativo devem por necessidade incluir aquelas que são necessárias se $A=\emptyset$ ou $A=X$, mas isto não é suficiente. A nova hipótese que surge em nossa situação é que A pode ser "by-passed"em X, isto é, todo caminho em X com pontos finais em $X-A$ pode ser deformado a um longe de A. O problema de determinar $\mu(f;X,A)$ quando não temos como hipótese A "by-passed"foi estudado por Zhao [4], onde um novo tipo de número de Nielsen $m(f;X,A)$ é definido, e $N(f;X,A)\leq m(f;X,A)$.

Para demonstrar o Teorema de Minimização Relativo usamos o lema 2.2.6 desenvolvido por Boju Jiang [2] que tem como hipótese, $X=|K|$ um poliedro finito conexo sem ponto de corte local. No teorema original de Shirmer tinhamos apenas $X-A$ sem ponto de corte local, e foi preciso substitui-la, para que o lema pudesse ser aplicado.

O apêndice usa como referência [2] e contém técnicas para obter arcos PL-normais além da demonstração do lema 2.2.6.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria de Índice para Poliedros

Seja X um espaço topológico. Um **ponto fixo** de uma aplicação $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

O conjunto dos pontos fixos de uma aplicação f será denotado por $\mathrm{Fix}(f)$.

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $g : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que $\mathrm{Fix}(g)$ é compacto. Considere a composta

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \xrightarrow{(j_{1*})^{-1}} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{j_{2*}} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathrm{Fix}(g))$$

$$\xrightarrow{(exc)^{-1}} H_n(V, V - \mathrm{Fix}(g)) \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0),$$

onde j_1 e j_2 são inclusões, $(i-g)$ é a aplicação $(i-g)(x) = x - g(x)$ e D uma bola fechada em torno da origem contendo $\mathrm{Fix}(g)$. Como $(j_1)_*$ é isomorfismo, a composta está bem definida.

O fato de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$ diz que a composta acima é um endomorfismo de $\mathbb{Z}$. Logo tem a forma

$$(i-g)_* \circ (exc)^{-1} \circ (j_{2*}) \circ (j_{1*})^{-1}(x) = I(\mathbb{R}^n, g, V).x$$

onde $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ é o único inteiro que determina o endomorfismo dada pela composta.

Definição 1.1.1 *Usando as hipóteses acima, $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ é chamado o índice dos pontos fixos de g.*

Veremos agora como se calcula o índice de um ponto fixo isolado de uma função real.

Exemplo 1.1.1 Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\text{Fix}(g) \cap V = \{0\}$, onde $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$. O índice $I(\mathbb{R}, g, V)$ é obtido da composta

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \xrightarrow{(j_{1*})^{-1}} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \overline{V}) \xrightarrow{j_{2*}} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0)$$

$$\xrightarrow{(exc)^{-1}} H_1(V, V - 0) \xrightarrow{(i-g)_*} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0)$$

Como neste caso $j_{2*} \circ (j_{1*})^{-1} = id$, temos somente que calcular a composta

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \xrightarrow{(exc)^{-1}} H_1(V, V - 0) \xrightarrow{(i-g)_*} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0)$$

Como o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \arrow[r, "(exc)^{-1}"] \arrow[d, "\partial"] & H_1(V, V - 0) \arrow[r, "(i-g)_*"] \arrow[d, "\partial"] & H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \arrow[d, "\partial"] \\
H_0(\mathbb{R} - 0) \arrow[r, "(exc)^{-1}"] & H_0(V - 0) \arrow[r, "(i-g)_*"] & H_0(\mathbb{R} - 0)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, temos que

$$\partial \circ (i - g)_* \circ (exc)^{-1} = (i - g)_* \circ (exc)^{-1} \circ \partial$$

Seja $a \in H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \cong \mathbb{Z}$ e $b, c \in H_0(\mathbb{R} - 0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ geradores.

Sem perda de generalidade podemos supor que $\partial(a) = b - c$ (caso contrário $\partial(a) = c - b$).

Para determinar a composta é suficiente analisar o comportamento de

$(i-g)|_{(V-0)}$ e observar que as ∂'s são injetoras.

Temos três casos:

Caso 1: $\mathrm{Im}(i-g)$ está contida em uma componente de $\mathbb{R}-0$.

Caso 2: $\mathrm{Im}(i-g)$ preserva as componentes.

Caso 3: $\mathrm{Im}(i-g)$ reverte as componentes.

Em homologia temos:

Caso 1: A imagem de $\partial(a)$ é levada em zero, pois;

$$\partial \circ (i-g)_* \circ (exc)^{-1}(a) = (i-g)_* \circ (exc)^{-1} \circ \partial(a) = 0,$$

portanto $(i-g)_* \circ (exc)^{-1}(a) = 0$ e o índice é zero.

Caso 2: A imagem de $\partial(a)$ é levada nele próprio, pois;

$$\partial \circ (i-g)_* \circ (exc)^{-1}(a) = (i-g)_* \circ (exc)^{-1} \circ \partial(a) = b - c,$$

e temos $(i-g)_* \circ (exc)^{-1}(a) = a$, logo o índice é 1.

Caso 3: A imagem de $\partial(a)$ é levada em $-b+c$, pois;

$$\partial \circ (i-g)_* \circ (exc)^{-1}(a) = (i-g)_* \circ (exc)^{-1} \circ \partial(a) = -b + c,$$

segue que $(i-g)_* \circ (exc)^{-1}(a) = -a$, logo o índice é -1.

O gráfico de g em cada caso é:

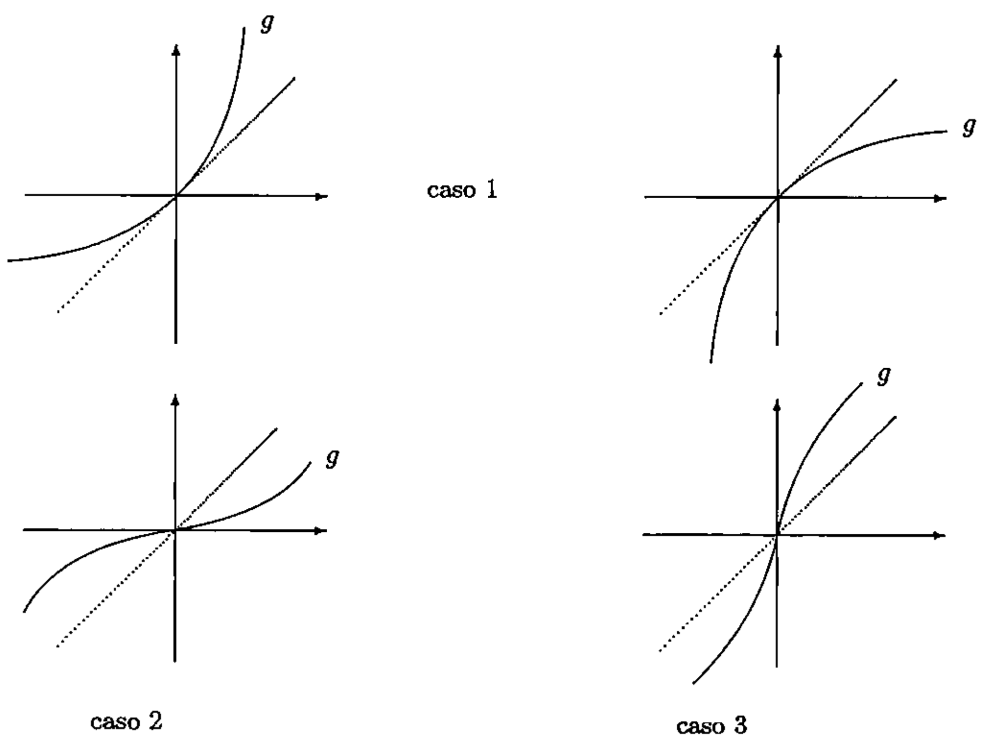

Figura 1.1:

Note que os gráficos de g satisfazem:

Caso 1: $-\varepsilon < g(-\varepsilon)$ e $\varepsilon < g(\varepsilon)$

$-\varepsilon > g(-\varepsilon)$ e $\varepsilon > g(\varepsilon)$

Caso 2: $-\varepsilon < g(-\varepsilon)$ e $\varepsilon > g(\varepsilon)$

Caso 3: $-\varepsilon > g(-\varepsilon)$ e $\varepsilon < g(\varepsilon)$

Este exemplo pode ser generalizado para qualquer ponto fixo isolado.

Suponha que x_0 é um ponto fixo isolado de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i.é, existe um número positivo ε tal que f tem somente o ponto fixo x_0 sobre o intervalo fechado $\overline{V} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Existem exatamente 4 casos:

Caso 1: $x_0 - \varepsilon < f(x_0 - \varepsilon)$ e $x_0 + \varepsilon > f(x_0 + \varepsilon)$

Caso 2: $x_0 - \varepsilon > f(x_0 - \varepsilon)$ e $x_0 + \varepsilon < f(x_0 + \varepsilon)$

Caso 3: $x_0 - \varepsilon < f(x_0 - \varepsilon)$ e $x_0 + \varepsilon < f(x_0 + \varepsilon)$

Caso 4: $x_0 - \varepsilon > f(x_0 - \varepsilon)$ e $x_0 + \varepsilon > f(x_0 + \varepsilon)$

Daí

$$I(\mathbb{R}, f, V) = \begin{cases} 1 & \text{caso 1} \\ -1 & \text{caso 2} \\ 0 & \text{caso 3 e 4} \end{cases}$$

O resultado a seguir será importante para a extensão do conceito de índice para uma classe mais geral do que os espaços Euclidianos, a saber o conjunto dos poliedros finitos conexos.

Teorema 1.1.1 *(Comutatividade) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $U' \subset \mathbb{R}^{n'}$ dois abertos e $f : U \to \mathbb{R}^{n'}$, $g : U' \to \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas. Considere $g \circ f : V = f^{-1}(U') \to \mathbb{R}^n$ e $f \circ g : V' = g^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{n'}$. Então $\mathrm{Fix}(f \circ g)$ é homeomorfo à $\mathrm{Fix}(g \circ f)$ e caso estes conjuntos forem compactos temos,*

$$I(\mathbb{R}^n, g \circ f, V) = I(\mathbb{R}^{n'}, f \circ g, V')$$

Prova: Veja [8], pág 34. ∎

Vamos agora estender o conceito de índice para a categoria dos poliedros finitos conexos, que denotaremos por C_P.

Definição 1.1.2 *Uma terna (X, f, U) é dita $C_P -$ admissível se $X \in C_P$, $f : X \to X$ é uma aplicação, $U \subseteq X$ é um aberto de X e f não tem ponto fixo no bordo de U.*

O símbolo C'_P será usado para denotar a coleção de todas as ternas C_P-admissíveis.

Dado $(X, f, U) \in C'_P$, existe para algum n um retrato de vizinhança $Y \subset \mathbb{R}^n$, homeomorfo a U. Observe que podemos decompor $f : U \to X$ na forma

$$U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{f \circ r} X,$$

onde i é o homeomorfismo entre U e Y com $Y \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$, V aberto e r a retração de V em U, isto é; $r \circ i = id$. Então colocando-se $\alpha = i$ e $\beta = f \circ r$ tem-se $f = \beta \circ \alpha$.

Como $\mathrm{Fix}(\alpha \circ \beta)$ é homeomorfo à $\mathrm{Fix}(\beta \circ \alpha) = \mathrm{Fix}(f|_U)$ e f não tem pontos fixos sobre o bordo de U, temos $\mathrm{Fix}(f_{|U})$ compacto e $I(\mathbb{R}^n, \alpha \circ \beta, \beta^{-1}(U))$ pode ser definido.

Definição 1.1.3 *Para cada terna $(X, f, U) \in C'_P$ podemos associar um inteiro $i(X, f, U)$ chamado índice dos pontos fixos de f em U pela fórmula*

$$i(X, f, U) = I(\mathbb{R}^n, \alpha \circ \beta, \beta^{-1}(U))$$

Note que $i(X, f, U)$ está bem definido, pois caso $f : U \to X$ pudesse ser fatorado como

$$U \xrightarrow{\gamma} V' \xrightarrow{\lambda} X,$$

onde V' é um aberto de $\mathbb{R}^{n'}$, considerando as aplicações

$$\gamma \circ r : V \to V' \subset \mathbb{R}^{n'},\ i \circ \lambda : \lambda^{-1}(U) \to V \subset \mathbb{R}^n,$$

obteremos, pela comutatividade, aplicações

$$\begin{aligned} (\gamma \circ r) \circ (i \circ \lambda) &= \gamma \circ (r \circ i) \circ \lambda &= \gamma \circ \lambda \\ (i \circ \lambda) \circ (\gamma \circ r) &= i \circ (\lambda \circ \gamma) \circ r &= i \circ f \circ r \end{aligned}$$

com mesmo índice, isto é, $I(\mathbb{R}^{n'}, \gamma \circ \lambda, \lambda^{-1}(U)) = I(\mathbb{R}^n, i \circ f \circ r, (f \circ r)^{-1}(U))$, como o lado direito não depende da fatoração de f, tem-se que $i(X, f, U)$ é independente da fatoração de f.

Exemplo 1.1.2 Vemos que para $X = S^1$ e z_0 é um ponto fixo isolado de uma auto aplicação f, isto é, existe $U \subset S^1$ aberto tal que $\mathrm{Fix}(f) \cap U = \{z_0\}$, é fácil calcular $i(X, f, U)$. Existe um homeomorfismo $i : U \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ que leva z_0 em 0, sendo assim f pode ser decomposta na forma

$$U \xrightarrow{i} (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{i^{-1}} U \xrightarrow{f} S^1$$

colocando-se $\beta = f \circ i^{-1}$, tem-se por definição

$$i(S^1, f, U) = I(\mathbb{R}, i \circ \beta, \beta^{-1}(U)).$$

Como $i \circ \beta : \beta^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ tem como único ponto fixo $x = 0$, recaímos no problema de calcular índice de ponto fixo isolado de uma função real. Considerando $f_n : S^1 \to S^1$, onde $f(z) = z^n$; temos que se $n > 1$ o índice de cada ponto fixo é -1 e se $n < 1$ o índice é +1.

O índice de pontos fixos satisfaz as seguintes propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas em [5], Cap.IV.

1. **Localização**

Se $(X, f, U) \in C'_P$ e $g : X \to X$ é uma aplicação tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{U}$ (fecho de U) então

$$i(X, f, U) = i(X, g, U)$$

2. **Invariância Homotópica**

Para $X \in C_P$ e $H : X \times I \to X$ uma homotopia, defina $f_t : X \to X$ por $f_t(x) = H(t, x)$. Se $(X, f_t, U) \in C'_P$ para todo $t \in I$, então

$$i(X, f_0, U) = i(X, f_1, U)$$

3. **Aditividade**

Se $(X, f, U) \in C'_P$ e $U_1, ..., U_s$ é um conjunto de subconjuntos abertos mutuamente disjuntos de U tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \left[U - \bigcup_{j=1}^{s} U_j\right]$, então

$$i(X, f, U) = \sum_{j=1}^{s} i(X, f, U_j)$$

4. **Normalização**

Se $X \in C_P$ e $f : X \to X$ é uma aplicação, então

$$i(X, f, X) = \text{o número de Lefschetz } L(f) \text{ de } f,$$

$$L(f) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \mathrm{tr}(f_q),$$

onde $\mathrm{tr}(f_q)$ é o traço do homomorfismo $f_q : H_q(X, \mathbb{Q}) \to H_q(X, \mathbb{Q})$ induzido pela f nos grupos de homologia de X com coeficientes racionais.

5. **Comutatividade**

Se $X, Y \in C_P$ e $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ são aplicações tal que $(X, g \circ f, U) \in C'_P$, então

$$i(X, g \circ f, U) = i(Y, f \circ g, g^{-1}(U))$$

1.2 O Número de Nielsen

Um caminho α em um espaço X é uma aplicação contínua $\alpha : I \to X$, onde I denota o intervalo [0,1]. Dado um caminho α em X, defina o caminho $\alpha^{-1} : I \to X$ por $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ para todo $t \in I$.

Para caminhos $\alpha, \beta : I \to X$ com $\alpha(1) = \beta(0)$, podemos formar um novo caminho $\alpha\beta$ por

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dois caminhos $\alpha, \beta : I \to X$ são ditos homotópicos com pontos extremos fixos se existe uma aplicação contínua $\psi : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{array}{rclcll}
\psi(s,0) & = & \alpha(0) & = & \beta(0) & \text{para todo} \quad s \in I \\
\psi(s,1) & = & \alpha(1) & = & \beta(1) & \text{para todo} \quad s \in I \\
\psi(0,t) & = & \alpha(t) & & & \text{para todo} \quad t \in I \\
\psi(1,t) & = & \beta(t) & & & \text{para todo} \quad t \in I
\end{array}$$

Notação: $\alpha \simeq \beta \operatorname{rel}\{0,1\}$.

Seja X um poliedro finito e $f : X \to X$ uma aplicação; dizemos que pontos fixos x_0 e x_1 de f são **f-equivalentes** se existe um caminho $\alpha : I \to X$ com $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$, tal que $f \circ \alpha \simeq \alpha \operatorname{rel}\{0,1\}$. É fácil ver que a relação de f-equivalência é uma relação de equivalência sobre $\operatorname{Fix}(f)$. As classes de equivalência são chamadas **classes de ponto fixo** de f.

Teorema 1.2.1 *Em um poliedro finito X com métrica d, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se*

$$W = \{(x,y) \in X \times X | d(x,y) < \delta\}$$

então existe uma aplicação $\gamma : W \times I \to X$ tal que

$$\gamma(x,y,0) = x, \ \gamma(x,y,1) = y$$

$$\gamma(x,x,t) = x \text{ para todo } t \in I$$

$$\operatorname{diam}(\gamma((x,y) \times I)) < \varepsilon \text{ para todo } (x,y) \in W$$

Prova: Veja [5], pág 39. ∎

Duas aplicações $f, g : X \to X$ são ditas ε-homotópicas, para $\varepsilon > 0$, se existe uma aplicação $H : X \times I \to X$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \text{ para todo } x \in X$$

$$H(x,1) = g(x) \text{ para todo } x \in X$$

$$\operatorname{diam}(H(x \times I)) < \varepsilon \text{ para qualquer } x \in X$$

Corolário 1.2.1 *Seja X um poliedro finito e $\varepsilon > 0$ dado. Existe $\delta > 0$ tal que se $f, g : X \to X$são aplicações e $d(f(x), g(x)) < \delta$, para todo $x \in X$, então f e g são $\varepsilon -$ homotópicas.*

Prova: Basta colocar $H(x,t) = \gamma(f(x), g(x), t)$ ∎

Teorema 1.2.2 *Uma aplicação $f : X \to X$ sobre um poliedro finito tem um número finito de classes de ponto fixo.*

Prova: Pelo teorema 1.2.1 existe $\delta > 0$ tal que, se $W_1 = \{(x,y) \in X \times X | d(x,y) < \delta\}$, então existe uma aplicação $\gamma_1 : W_1 \times I \to X$ tal que $\gamma_1(x,y,0) = x$, $\gamma_1(x,y,1) = y$, e $\gamma_1(x,x,t) = x$ para todo $t \in I$. Pela continuidade uniforme de f, dado $\delta > 0$, existe $\zeta > 0$, $\zeta < \delta/2$, tal que se $x, z \in X$ e $d(x,z) < \zeta$, então $d(f(x), f(z)) < \delta/2$. Pelo teorema 1.2.1, existe $\eta > 0$ tal que se $W_0 = \{(x,y) \in X \times X | d(x,y) < \eta\}$, então existe uma aplicação $\gamma_0 : W_0 \times I \to X$ com as propriedades: $\gamma_0(x,y,0) = x$, $\gamma_0(x,y,1) = y$, $\gamma_0(x,x,t) = x$, e $\operatorname{diam}(\gamma_0((x,y) \times I)) < \zeta$. Agora suponha $x, y \in \operatorname{Fix}(f)$ e $d(x,y) < \eta$; então $\alpha(t) = \gamma_0(x,y,t)$ é um caminho de x para y tal que $\operatorname{diam}(\alpha(I)) < \zeta < \delta/2$ e daí $\operatorname{diam}(f \circ \alpha(I)) < \delta/2$. Portanto, para $t \in I$, $d(\alpha(t), f \circ \alpha(t)) < \delta$ e nós temos uma aplicação $H : I \times I \to X$ dada por $H(s,t) = \gamma_1(\alpha(s), f \circ \alpha(s), t)$ que mostra que x, y são f-equivalentes. Nós então provamos que cada classe de ponto fixo é aberto em $\operatorname{Fix}(f)$. Como $\operatorname{Fix}(f)$ é compacto (pois é fechado dentro de um compacto), temos um número finito de classes de ponto fixos. ∎

Seja X um poliedro finito conexo e $f : X \to X$ uma aplicação. Para cada classe de ponto fixo F da aplicação f existe pelo teorema acima um aberto

U em X tal que $F \subseteq U$ e $\overline{U} \cap \text{Fix}(f) = F$. Note que $(X, f, U) \in C'_P$. Defina o índice $i(F)$ da classe de ponto fixo F por $i(F) = i(X, f, U)$.

Teorema 1.2.3 *A definição de $i(F)$ é independente da escolha do conjunto aberto $U \subseteq X$ tal que $F \subseteq U$ e $\overline{U} \cap \text{Fix}(f) = F$.*

Prova: Seja U e V subconjuntos abertos de X satisfazendo as hipóteses do teorema. Se $x \in U - (U \cap V)$ então x não pertence a nenhuma outra classe de ponto fixo de f. Como $x \notin V$, temos que $x \notin F$, daí $x \notin \text{Fix}(f)$. Pela aditividade $i(X, f, U) = i(X, f, U \cap V)$. Usando o mesmo argumento temos que $i(X, f, V) = i(X, f, U \cap V)$. Portanto $i(X, f, U) = i(X, f, V)$. ∎

Para X um poliedro finito conexo e $f : X \to X$ uma aplicação, uma classe de ponto fixo F de f é dita **essencial** se $i(F) \neq 0$ e **inessencial** se $i(F) = 0$. O **número de Nielsen** $N(f)$ da aplicação f é definido sendo o número de classes de ponto fixo de f que são essenciais.

Exemplo 1.2.1 Se uma auto aplicação $f : S^1 \to S^1$ tem grau n. Então $N(f) = |1 - n|$ (ver [3], pág 33).

Exemplo 1.2.2 Seja $T^n = S^1 \times ... \times S^1$ e $f : T^n \to T^n$ uma auto aplicação. Se a induzida, f_{1_*} de f é dada pela matriz A. Então $N(f) = |\det(E - A)|$, onde E é a matriz identidade (ver [3], pág 33).

Teorema 1.2.4 *Uma aplicação $f : X \to X$ sobre um poliedro finito conexo tem pelo menos $N(f)$ pontos fixos.*

Sejam X e Y poliedros finitos, $H : X \times I \to Y$ uma aplicação contínua e α um caminho em X. Nós podemos formar um novo caminho $\langle H, \alpha \rangle : I \to Y$ definindo $\langle H, \alpha \rangle(t) = H(t)(\alpha(t))$, onde $H(t)(x) = H(x, t)$.

Teorema 1.2.5 *Seja $H : X \times I \to X$ uma homotopia de f para g. Seja $x_0 \in \mathrm{Fix}(f)$ contido em uma classe de ponto fixo F de f e $x_1 \in \mathrm{Fix}(g)$ contido em uma classe de ponto fixo G de g. Se existe um caminho α em X de x_0 para x_1 tal que $\langle H, \alpha \rangle \simeq \alpha \,\mathrm{rel}\{0,1\}$, então existe uma caminho β em X de x_0' para x_1' tal que $\langle H, \beta \rangle \simeq \beta \,\mathrm{rel}\{0,1\}$ para quaisquer $x_0' \in F$ e $x_1' \in G$.*

Prova: Veja [5], pág 90. ∎

Sejam $f, g : X \to X$ aplicações sobre um poliedro finito e H uma homotopia de f para g. Para uma classe de ponto fixo F de f e uma classe de ponto fixo G de g, dizemos que F e G estão **H-relacionadas**, se existe $x_0 \in F$, $x_1 \in G$ e um caminho $\alpha : I \to X$ com $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ tal que $\langle H, \alpha \rangle \simeq \alpha$ rel$\{0,1\}$. Escrevemos $F\mathbf{H}G$ neste caso. O teorema 1.2.5 mostra que a definição é independente da escolha de x_0 e x_1.

Teorema 1.2.6 *Seja H uma homotopia de f para g. Seja F, F' classes de ponto fixo de f e G, G' classes de ponto fixo de g. Se $F\mathbf{H}G$ e $F\mathbf{H}G'$ então $G = G'$, e se $F\mathbf{H}G$ e $F'\mathbf{H}G$ então $F = F'$.*

Prova: Veja [5], pág 92. ∎

Teorema 1.2.7 *Seja H uma homotopia entre $f, g : X \to X$, onde X é um poliedro finito conexo. Seja F uma classe de ponto fixo de f. Se F é H-relacionada com alguma classe de ponto fixo G de g, então $i(F) = i(G)$; e se F não é H-relacionada com qualquer classe de g, então $i(F) = 0$.*

Prova: Veja [5], pág 94. ∎

Os teoremas 1.2.6 e 1.2.7 estabelecem uma correspondência injetiva entre as classes essenciais de f e as classes essenciais de g.

Teorema 1.2.8 *(Invariância homotópica do número de Nielsen) Seja X um poliedro finito conexo e $f, g : X \to X$ aplicações homotópicas; então $N(f) = N(g)$.*

Prova: Seja H uma homotopia entre f e g. Pelos teoremas 1.2.6 e 1.2.7 H induz uma correspondência injetiva entre as classes essenciais de f e as classes essenciais de g, onde a correspondência é dada pela H-relação. Daí $N(f) \leq N(g)$. Considerando agora a homotopia H^{-1} entre g e f, pelo mesmo raciocínio obtemos $N(g) \leq N(f)$. Portanto $N(f) = N(g)$. ∎

Lema 1.2.1 *Sejam X e Y espaços. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são aplicações, então f e g são homeomorfismos mutuamente inversos entre os conjuntos de pontos fixos* $\mathrm{Fix}(g \circ f)(\subseteq X)$ *e* $\mathrm{Fix}(f \circ g)(\subseteq Y)$.

Lema 1.2.2 *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são aplicações entre poliedros finitos e x_0 e x_1 são dois pontos fixos de $g \circ f$, então x_0, x_1 pertencem a mesma classe de ponto fixo de $g \circ f$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $f(x_1)$ pertence a mesma classe de ponto fixo de $f \circ g$.*

Prova: Se existe uma caminho α de x_0 para x_1 tal que $g \circ f \circ \alpha \simeq \alpha \operatorname{rel}\{0,1\}$, então para o caminho $f \circ \alpha$ de $f(x_0)$ para $f(x_1)$ nós temos $f \circ \alpha \simeq f \circ (g \circ f \circ \alpha) \operatorname{rel}\{0,1\} = (f \circ g) \circ (f \circ \alpha) \operatorname{rel}\{0,1\}$. Reciprocamente se existe um caminho β de $f(x_0)$ para $f(x_1)$ tal que $f \circ g \circ \beta \simeq \beta \operatorname{rel}\{0,1\}$, temos que $g \circ \beta$ é um caminho de x_0 para x_1 e $g \circ (f \circ g \circ \beta) = (g \circ f) \circ (g \circ \beta) \simeq g \circ \beta \operatorname{rel}\{0,1\}$. ∎

Teorema 1.2.9 *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são aplicações entre poliedros finitos conexos, então a f-imagem de uma classe de ponto fixo de $g \circ f : X \to X$ é uma classe de ponto fixo de $f \circ g : Y \to Y$, e assim f estabelece uma correspondência bijetora entre as classes de ponto fixo de*

$g \circ f$ e as classes de ponto fixo de $f \circ g$. Mais ainda, os índices das classes correspondentes são iguais.

Prova: Seja F uma classe de ponto fixo de $g \circ f$. Dos lemas 1.2.1 e 1.2.2, $f(F)$ é uma classe de ponto fixo F' de $f \circ g$, e $f : F \to F'$, $g : F' \to F$ são homeomorfismos mutuamente inverso. Resta apenas mostrar que $i(F) = i(F')$. Sabemos que existe um aberto U de X tal que $F \subseteq U$ e $\overline{U} \cap \mathrm{Fix}(g \circ f) = F$. Como $g(F') = F$, temos $F' \subseteq g^{-1}(U)$. Resta mostrar que $g^{-1}(U) \cap \mathrm{Fix}(f \circ g) = F'$. De fato, seja $y \in g^{-1}(U)$ um ponto fixo de $f \circ g$, então $g(y) \in U$ é um ponto fixo de $g \circ f$, isto é; $g(y) \in U \cap \mathrm{Fix}(g \circ f) = F$, e daí $y = f \circ g(y) \in f(F) = F'$. Como $i(F) = i(X, g \circ f, U)$ e $i(F') = i(Y, f \circ g, g^{-1}(U))$. Pela comutatividade nós temos $i(F) = i(X, g \circ f, U) = i(Y, f \circ g, g^{-1}(U)) = i(F')$. ∎

Teorema 1.2.10 *(Comutatividade do número de Nielsen) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são aplicações entre poliedros finitos e conexos, então f estabelece uma correspondência bijetiva entre as classes de ponto fixo essenciais de $g \circ f$ e as classes de ponto fixo essenciais de $f \circ g$, consequentemente*

$$N(g \circ f) = N(f \circ g).$$

1.3 Teorema de Minimização

O objetivo central desta secção é descrever o problema de determinar o número mínimo de pontos fixos e apresentar alguns resultados que serão utilizados no próximo capítulo.

Inicialmente vamos estabelecer uma notação para alguns elementos usuais:

- se K é um complexo simplicial denotamos por $|K|$ sua realização geométrica, para um simplexo $s \in K$, $|s|$ será seu interior em $|K|$.

- para $x \in |K|$, $\sigma(x)$ denota o único simplexo de K tal que $x \in |\sigma(x)|$.

- para $x \in |K|$, $V(x)$ será a união de todos $|t|$ com $t \in K$ e $\overline{|t|} \cap \overline{\sigma(x)} \neq \emptyset$.

- $[x, y]$ será o segmento de reta ligando x à y.

- para um simplexo $s \in K$, defina $St(s)$ como a união de todos os simplexos de K que contém s, daí

$$|St(s)| = \bigcup_{s \subseteq t} |t|$$

é aberto em $|K|$. $St(s)$ é chamado estrela de s.

- seja A um subconjunto de $|K|$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$U(A, \varepsilon) = \{x \in |K| | d(x, A) < \varepsilon\}$$

onde d é uma métrica em $|K|$. $\overline{U}(A, \varepsilon)$ denotará o fecho de $U(A, \varepsilon)$.

Seja X um poliedro finito conexo. Dada uma aplicação $f : X \to X$, denotemos por $[f]$ a classe de homotopia de f e $\#\text{Fix}(f)$ a cardinalidade de $\text{Fix}(f)$. Consideremos o problema de determinar

$$\mu(f) = \inf \{\#\text{Fix}(g) | g \in [f]\}$$

Em vista da invariância homotópica podemos concluir que $\mu(f) \geq N(f)$, isto é, o número de Nielsen é um limitante inferior para o número de pontos fixos de todas as funções homotópicas a f.

O próximo teorema a ser enunciado nos diz que se o poliedro X satisfazer certas condições, então o número de Nielsen é de fato o melhor limitante inferior.

Um poliedro finito conexo $|K|$ é do tipo S se a dimensão de K é pelo menos três e para cada vértice v de K, bordo de $|St(v)|$ é conexo. Um poliedro X é do tipo S se é homeomorfo a algum $|K|$ do tipo S.

Teorema 1.3.1 *(Teorema de Minimização) Se X é um poliedro finito conexo do tipo S e $f : X \to X$ é uma aplicação, então existe uma aplicação $g : X \to X$ homotópica a f tal que g tem exatamente $N(f)$ pontos fixos.*

Prova: Veja [5], pág 140. ∎

A demonstração deste teorema faz uso dos resultados que passaremos a expor. Estes, por sua vez, também nos serão úteis no próximo capítulo.

Seja K um complexo simplicial. Um simplexo $s \in K$ é dito ser maximal se não existe simplexo de K que contém s propriamente.

Teorema 1.3.2 *Seja X um poliedro finito conexo de dimensão ≥ 1, e $f : X \to X$uma aplicação. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $g : X \to X$ tal que:*

1) g tem somente um número finito de pontos fixos;

2) existe uma triangulação (K, τ) de X tal que cada ponto fixo de g esta em um conjunto $\tau|s|$ para algum simplexo maximal $s \in K$;

3) $d(f, g) < \varepsilon$.

Prova: Veja [5], pág 118. ∎

Concluímos do corolário 1.2.1, que dado $\eta > 0$ e $f : X \to X$ nas condições do teorema acima, existe $g : X \to X$ tal que f e g são η-homotópicas e g tem um número finito de pontos fixos que estão em simplexos maximais.

Teorema 1.3.3 *Seja $|K|$ um poliedro finito conexo, s um simplexo maximal de K, $f : |K| \to |K|$ uma aplicação, $x \in |s|$ um ponto fixo isolado de f, e $U \subseteq |s|$ uma vizinhança de x tal que* $\mathrm{Fix}(f) \cap \overline{U} = x$. *Se $i(|K|, f, U) = 0$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $g : |K| \to |K|$ com as propriedades:*

1) $f(y) = g(y)$ *para todo* $y \in |K| - U$;

2) $d(f, g) < \varepsilon$;

3) $\mathrm{Fix}(g) \cap \overline{U} = \emptyset$.

Prova: Veja [5], pág 123. ∎

Este teorema diz resumidamente que pontos fixos com índice zero podem ser eliminados.

Definição 1.3.1 *Para $A \subseteq |K|$, dizemos que uma aplicação $f : |K| \to |K|$ é próxima em A se $f(x) \in V(x)$ para todo $x \in A$.*

Suponha que $f, g : |K| \to |K|$ são aplicações e que $A \subseteq |K|$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Se existe uma aplicação $H : |K| \times I \to |K|$ com as propriedades $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in |K|$ e $H(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, $t \in I$, então dizemos que f e g são homotópicas relativas ao conjunto A. Notação: $f \simeq g$ rel$A$.

Teorema 1.3.4 *Dado um poliedro finito conexo $|K|$, $x \in |K|$ com $\sigma(x)$ maximal, uma aplicação $f : |K| \to |K|$ e um número real $\eta > 0$ tal que $U(x, \eta) \subseteq |\sigma(x)|$,* $\mathrm{Fix}(f) \cap \mathrm{Bd}U(x, \eta) = \emptyset$ *e f é próxima em $\overline{U}(x, \eta)$, então existe uma aplicação $g : |K| \to |K|$ tal que:*

1) $g \simeq f$ rel$|K| - U(x, \eta)$;

2) $\mathrm{Fix}(g) \cap \overline{U}(x, \eta) = x$;

3) g é próxima em $\overline{U}(x, \eta)$.

Prova: Veja [5], pág 126. ∎

Em outras palavras, se as hipóteses do teorema acima forem satisfeitas e se f eventualmente tiver ponto fixo em $U(x,\eta)$, estes pontos fixos podem ser unidos em um único ponto.

Observação 1.3.1 *Na demonstração do teorema 1.3.4 fica claro que* $g(y) \in |\sigma(y)| \cup |\sigma(f(y))| \cup |\sigma(y) \cap \sigma(f(y))|$, *para todo* $y \in |K|$. *Este fato será usada na demonstração do lema 2.2.4.*

Teorema 1.3.5 *Considere um poliedro finito conexo* $|K|$, $s_1, s_2 \in K$ *simplexos de dimensão maior do que um tal que* $s_1 \cap s_2$ *tem dimensão maior do que zero. Se* $a \in |s_1|$, $b \in |s_1 \cap s_2|$, *e se* $f : |K| \to |K|$ *é uma aplicação tal que:*
1) a *é um ponto fixo isolado de* f, $i(|K|, f, a) \neq 0$ *e* $\mathrm{Fix}(f) \cap [a,b] = a$;
2) f *é uma aplicação próxima em* $[a,b]$.
Então existe $\varepsilon > 0$ *e uma aplicação* $g : |K| \to |K|$ *com as propriedades:*
3) $g \simeq f \ \mathrm{rel}|K| - U([a,b],\varepsilon)$;
4) $\mathrm{Fix}(g) \cap \overline{U}([a,b],\varepsilon) = c$ *para algum* $c \in U(b,\varepsilon) \cap |s_2|$;
5) g *é próxima em* $\overline{U}([a,b],\varepsilon)$.

Prova: Veja [5], pág 128. ∎

O teorema 1.3.5 afirma que podemos mover o ponto fixo a ao longo do segmento $[a,b]$ para o ponto fixo c do simplexo $|s_2|$ sem criar novos pontos fixos.

Capítulo 2

O Número de Nielsen Relativo

O objetivo desta secção é introduzir o número de Nielsen relativo e obter algumas consequências imediatas da definição.

2.1 Definição e Propriedades

Trabalharemos na categoria de pares de espaços topológicos (X, A), $A \subset X$ e aplicações entre estes pares $f : (X, A) \to (X, A)$, isto é, função contínua $f : X \to X$ com $f(A) \subset A$. As homotopias entre tais aplicações são aplicações contínuas da forma $H : (X \times I, X \times A) \to (X, A)$. O símbolo $\overline{f} : A \to A$ representa a restrição de f para A. A menos que se fale o contrário X será um poliedro finito conexo e A um subpoliedro. Denotaremos por d a métrica baricêntrica.

Definição 2.1.1 *Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ uma aplicação. Uma classe de ponto fixo F de $f : X \to X$ é uma* **classe comum** *de f e $\overline{f}$ se esta contém uma classe de ponto fixo essencial de $\overline{f} : A \to A$.*

Lema 2.1.1 *Sejam $f : (X, A) \to (X, A)$ uma aplicação, F uma classe de ponto fixo de $f : X \to X$ e $\overline{F}$ uma classe de ponto fixo de $\overline{f} : A \to A$. Se*

$F \cap \overline{F} \neq \emptyset$, *então* $\overline{F} \subset F$.

Prova: Dois pontos fixos x_0, x_1 pertencem a F se existe um caminho α em X de x_0 para x_1 tal que $f \circ \alpha \simeq \alpha$ rel$\{0,1\}$. Daí se $a_0 \in F \cap \overline{F}$ e $a_1 \in \overline{F}$, então existe um caminho β em A de a_0 para a_1 tal que $\overline{f} \circ \beta \simeq \beta$ rel$\{0,1\}$ em A. Como $A \subset X$ isto implica $a_1 \in F$. ∎

Definição 2.1.2 *Uma* **classe comum essencial** *de f e $\overline{f}$ é uma classe de ponto fixo essencial de f que é uma classe comum de f e $\overline{f}$.*

Escrevemos $N(f,\overline{f})$ para o número de classes comuns essenciais de f e $\overline{f}$. Note que $N(f,\overline{f})$ é finito, pois $0 \leq N(f,\overline{f}) \leq N(f)$.

Definição 2.1.3 *Seja (X, A) um par de espaços. Se $f : (X,A) \to (X,A)$ é uma aplicação, então o* **número de Nielsen relativo** *$N(f; X, A)$ é definido por*

$$N(f; X, A) = N(\overline{f}) + N(f) - N(f, \overline{f}).$$

Os resultados a seguir são consequências imediatas da definição e de alguns fatos citados na capítulo anterior.

Lema 2.1.2 *Seja (X, A) um par de espaços e $f : (X,A) \to (X,A)$ uma aplicação. Temos que:*
1) Se $N(f) = 0$, então $N(f; X, A) = N(\overline{f})$,
2) Se $N(\overline{f}) = 0$, então $N(f; X, A) = N(f)$.

Teorema 2.1.1 *Toda aplicação $f : (X,A) \to (X,A)$ tem pelo menos $N(f; X, A)$ pontos fixos.*

Prova: Suponhamos que $\overline{f} : A \to A$ tenha m classes de pontos fixos essenciais $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_m$, e $f : X \to X$ tenha r classes de pontos fixos essenciais $F_1, F_2, ..., F_n, F_{n+1}, ..., F_r$ onde $F_{n+1}, F_{n+2}, ..., F_r$ são as classes comuns de f e $\overline{f}$. Então

$$N(f; X, A) = m + r - (r - n) = m + n.$$

Cada classe de ponto fixo $\overline{F}_i$ contém pelo menos um ponto fixo a_i de $\overline{f}$, e cada classe de ponto fixo F_j contém pelo menos um ponto fixo x_j de f. Em virtude do lema 2.1.1 $\overline{F}_i \cap F_j = \emptyset$ para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Portanto o conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_m, x_1, x_2, ..., x_n\}$ consiste de $m + n$ pontos fixos distintos da aplicação $f : (X, A) \to (X, A)$. ∎

Teorema 2.1.2 : *Se (X, A) é um par de espaços e $f : (X, A) \to (X, A)$ é uma aplicação, então $N(f; X, A) \geq N(f)$ e $N(f; X, A) \geq N(\overline{f})$.*

Prova: Como $N(f, \overline{f})$ conta o número de classes de pontos fixos essenciais de f que contém pelo menos uma classe de ponto fixo essencial de $\overline{f}$, temos $N(f, \overline{f}) \leq N(\overline{f})$, daí $N(f; X, A) = N(f) + [N(\overline{f}) - N(f, \overline{f})] \geq N(f)$. Já tinhamos que $N(f, \overline{f}) \leq N(f)$, portanto $N(f; X, A) \geq N(\overline{f})$. ∎

Teorema 2.1.3 *(Invariância homotópica do número de Nielsen relativo) Se as aplicações $f_0, f_1 : (X, A) \to (X, A)$ são homotópicas, então $N(f_0; X, A) = N(f_1; X, A)$.*

Prova: Seja $H : (X \times I, A \times I) \to (X, I)$ uma homotopia entre f_0 e f_1. Como já sabemos $N(f_0) = N(f_1)$ e $N(\overline{f}_0) = N(\overline{f}_1)$, é suficiente mostrar que $N(f, \overline{f})$ é um invariante homotópico. Seja F_0 uma classe comum essencial de f_0 e $\overline{f}_0$. Então F_0 contém uma classe de ponto fixo essencial $\overline{F}_0$ de $\overline{f}_0$, que pelo teorema 1.2.7 está $\overline{H}$-relacionada com alguma classe de ponto fixo essencial $\overline{F}_1$ de $\overline{f}_1$, onde $\overline{H}$ é a restrição de H para $A \times I$. Isto significa que, para todo $a_0 \in \overline{F}_0$ e $a_1 \in \overline{F}_1$, existe um caminho α em A de a_0 para x_1 tal que $\langle \overline{H}, \alpha \rangle = \alpha \operatorname{rel}\{0, 1\}$ em A. Agora seja F_1 a classe de ponto fixo de f_1 que contém a_1. Como α é um caminho em X de a_0 para a_1 e como $\langle \overline{H}, \alpha \rangle = \langle H, \alpha \rangle$, a classe de ponto fixo F_0 de f_0 e F_1 de f_1 estão H-relacionadas. Segue do teorema 1.2.7 que F_1 é uma classe de ponto fixo essencial de f_1, e como $F_1 \cap \overline{F}_1 \neq \emptyset$, esta é uma classe comum essencial de f_1 e $\overline{f}_1$. Assim H relaciona classes comuns essenciais de f_0 e $\overline{f}_0$ com classes comuns essenciais de f_1 e $\overline{f}_1$, e portanto temos $N(f_0, \overline{f}_0) = N(f_1, \overline{f}_1)$. ∎

Corolário 2.1.1 *Seja (X, A) um par de espaços e $f : (X, A) \to (X, A)$ uma aplicação. Se X é simplesmente conexo ou f é homotópica a aplicação identidade $id : (X, A) \to (X, A)$, então*

$$N(f; X, A) = \begin{cases} N(f) & se\ N(\overline{f}) = 0, \\ N(\overline{f}) & se\ N(\overline{f}) \neq 0 \end{cases}$$

Prova: Temos que considerar somente o caso onde $N(f) \neq 0$ e $N(\overline{f}) \neq 0$. Se X é simplesmente conexo, então $f : X \to X$ tem uma única classe de ponto fixo essencial F, e $\overline{f} : A \to A$ tem pelo menos uma classe de ponto fixo essencial $\overline{F}$. Mas se $x \in F$ e $a \in \overline{F}$, então a também é ponto fixo de $f : X \to X$ e esta na mesma classe de ponto fixo de x, portanto $N(f, \overline{f}) = 1$. Se f é homotópica a identidade, como estamos supondo $N(f) \neq 0$, temos que $N(f) = N(id) = 1$. Pela teorema anterior $N(f, \overline{f}) = N(id, \overline{id}) = 1$. Segue que $N(f; X, A) = N(\overline{f}) + 1 - 1 = N(\overline{f})$. ∎

Teorema 2.1.4 *(Comutatividade do número de Nielsen relativo) Sejam (X, A) e (Y, B) dois pares de espaços. Se $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (X, A)$ são aplicações, então $N(g \circ f, \overline{g} \circ \overline{f}) = N(f \circ g, \overline{f} \circ \overline{g})$ e daí*

$$N(g \circ f; X, A) = N(f \circ g; Y, B).$$

Prova: Seja F_0 uma classe comum essencial de $g \circ f$ e $\overline{g} \circ \overline{f}$. Então F_0 contém uma classe de ponto fixo essencial $\overline{F}_0$ de $\overline{g} \circ \overline{f}$, pelo teorema 1.2.9,

$f(F_0)$ é uma classe de ponto fixo essencial de $f \circ g$ e $f(\overline{F}_0)$ é uma classe de ponto fixo essencial de $\overline{f} \circ \overline{g}$. Como $f(\overline{F}_0) \subset f(F_0)$, $f(F_0)$ é uma classe comum essencial de $f \circ g$ e $\overline{f} \circ \overline{g}$. Portanto f estabelece uma correspondência bijetiva entre as classes comuns essenciais de $g \circ f$ e $\overline{g} \circ \overline{f}$ e as classes comuns essenciais de $f \circ g$ e $\overline{f} \circ \overline{g}$. Temos então $N(g \circ f, \overline{g} \circ \overline{f}) = N(f \circ g, \overline{f} \circ \overline{g})$. Como já temos $N(f \circ g) = N(g \circ f)$ e $N(\overline{f} \circ \overline{g}) = N(\overline{g} \circ \overline{f})$, segue que $N(g \circ f; X, A) = N(f \circ g; Y, B)$. ∎

Uma aplicação $h : (X, A) \to (Y, B)$ é uma **equivalência de homotopia** quando existe $k : (Y, B) \to (X, A)$ tal que $k \circ h$ é homotópica à $id : (X, A) \to (X, A)$ e $h \circ k$ é homotópica à $id : (Y, B) \to (Y, B)$.

Definição 2.1.4 *Duas aplicações de pares de espaços $f : (X, A) \to (X, A)$ e $g : (Y, B) \to (Y, B)$ são ditas* **aplicações de mesmo tipo de homotopia** *se existe uma equivalência de homotopia $h : (X, A) \to (Y, B)$ tal que as aplicações de pares de espaço $h \circ f$, $g \circ h : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas.*

Teorema 2.1.5 *Seja (X, A) e (Y, B) dois pares de espaços. Se $f : (X, A) \to (X, A)$ e $g : (Y, B) \to (Y, B)$ são aplicações de mesmo tipo de homotopia, então $N(f; X, A) = N(g; Y, B)$.*

Prova: Usando a mesma notação acima, da invariância homotópica e comutatividade; do número de Nielsen e do número de Nielsen relativo respectivamente, temos que:
$N(f) = N((k \circ h) \circ f) = N(k \circ (h \circ f)) = N((h \circ f) \circ k) = N(g)$,
$N(\overline{f}) = N((\overline{k} \circ \overline{h}) \circ \overline{f}) = N(\overline{k} \circ (\overline{h} \circ \overline{f})) = N((\overline{h} \circ \overline{f}) \circ \overline{k}) = N(\overline{g})$,
$N(f, \overline{f}) = N((k \circ h) \circ f, (\overline{k} \circ \overline{h}) \circ \overline{f}) = N((h \circ f) \circ k, (\overline{h} \circ \overline{f}) \circ \overline{k}) = N(g, \overline{g})$,
pois f é homotópica à $(k \circ h) \circ f$ e $(h \circ f) \circ k$ é homotópica à g. Asssim temos $N(f; X, A) = N(g; Y, B)$. ∎

Vamos agora para alguns exemplos calcular $N(f;X,A)$.

Exemplo 2.1.1 Seja $X = B^n$, onde $n \geq 2$, a bola fechada n-dimensional e A consiste do bordo de B^n (a esfera $(n-1)$-dimensional) junto com k pontos do interior de B^n. Se $id : (X,A) \to (X,A)$ é a aplicação identidade, então $\overline{id} : A \to A$ tem $k+1$ classes de ponto fixo, que são os k pontos mais toda a esfera S^{n-1}. Todas as classes que contém apenas um ponto são essenciais, pois neste caso temos uma aplicação constante. Resta sabermos se S^{n-1} é essencial. Pelo propriedade de normalização sabemos que o índice

$$i(S^{n-1}) = i(S^{n-1}, id, S^{n-1}) = L(id) = \begin{cases} 0 & \text{se } n-1 \text{ é impar} \\ 2 & \text{se } n-1 \text{ é par} \end{cases}$$

Daí

$$N(\overline{id}) = \begin{cases} k & \text{se n é par} \\ k+1 & \text{se n é impar} \end{cases}$$

e segue do corolário 2.1.1 que

$$N(id;X,A) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ k & \text{se } k \geq 1 \text{ e n é par} \\ k+1 & \text{se } k \geq 1 \text{ e n é impar} \end{cases}$$

Suponha que $i : A \to X$ é a inclusão do subespaço A de X. Se existe uma retração $r : X \to A$ tal que $i \circ r$ é homotópica à identidade, dizemos que A é um **retrato por deformação** de X.

Exemplo 2.1.2 Seja $X = T_s^2$ o toro sólido em $\mathbb{R}^3$ que é obtido pela rotação de um disco de raio 1 e centro (2,0,0) do plano xz em torno do eixo z, e seja $A = T^2$. Se considerarmos $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{C}$ é o plano complexo, podemos rotular os pontos de X como $(re^{i\theta}, t)$, onde $re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ e $t \in \mathbb{R}$, com $1 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $-1 \leq t \leq 1$. Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ a aplicação dada por $f(re^{i\theta}, t) = (re^{id\theta}, -t)$, onde $d \neq 1$ é um inteiro. Como o círculo $S = (2e^{i\theta}, 0)$, $0 \leq \theta < 2\pi$ é um retrato por deformação de X, temos que a inclusão $i : S \to X$ é uma equivalência de homotopia. Portanto a aplicação f e a restrição $\widetilde{f} : S \to S$ de f para S tem o mesmo tipo de homotopia. Pelo teorema 2.1.5 temos $N(f) = N(\widetilde{f})$, e o exemplo 1.2.1 nos diz que $N(\widetilde{f}) = |d - 1|$. Considere os geradores $[\xi], [\eta]$ de $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, onde $\xi = \{(2e^{i\theta}, 1) | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ e $\eta = \{(re^{i0}, t) | (r-2)^2 + t^2 = 1\}$, temos que $\overline{f}_{1*}[\xi] = d[\xi]$ e $\overline{f}_{1*}[\eta] = -[\eta]$. Pelo exemplo 1.2.2 $N(\overline{f}) = 2|d - 1|$, que é o valor absoluto do determinante :

$$\begin{vmatrix} 1-d & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Como a equação $e^{i\theta} = e^{di\theta}$ tem $|d - 1|$ soluções distintas, os pontos fixos de f consistem de $|d - 1|$ segmentos de reta, pois eles só podem ocorrer em $t = 0$. Cada segmento de reta forma uma classe de ponto fixo essencial de f e contém duas classes de ponto fixo essenciais de $\overline{f}$ sobre seu bordo. Portanto $N(f, \overline{f}) = N(f)$ e $N(f; X, A) = N(\overline{f}) = 2|d - 1|$.

Exemplo 2.1.3 Seja X um disco com dois buracos, A seu bordo e f a reflexão em torno do eixo l. Considerando X como a união $U \cup V$, onde U é o lado direito de l e V o lado esquerdo (ver figura 2.1); construímos a sequência de Mayer Vietoris. Como U e V tem o mesmo tipo de homotopia que S^1 e $U \cap V$ é contrátil, temos que: $H_0(X) = \mathbb{Z}$, $H_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_q(X) = 0$ para todo $q \neq 0, 1$. O fato de f ter apenas a classe de ponto fixo $U \cap V$, nos diz que seu índice é igual ao número de Lefschetz, $L(f)$, de f. Sejam $[\gamma]$ e $[\zeta]$ os geradores de $H_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, onde γ e ζ são indicados na figura (2.1). Temos então $f_{1*}[\gamma] = -[\zeta]$, $f_{1*}[\zeta] = -[\gamma]$ e a matriz de f_{1*} nesta base é:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Portanto $L(f) = 1$ e consequentemente $N(f) = 1$. Claramente $N(\overline{f}) = 2$ e $N(f, \overline{f}) = 1$, pois cada extremo de $U \cap V$ constitui uma classe de ponto fixo de $\overline{f}$ e seus índices valem 1, pelo exemplo 1.1. Assim $N(f; X, A) = 2$.

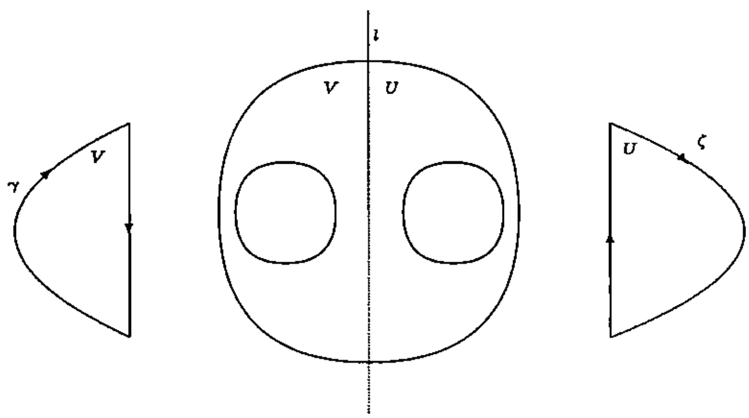

Figura 2.1:

2.2 Teorema de Minimização Relativo

Definição 2.2.1 *Seja X um espaço topológico e A um subespaço. Uma homotopia $H : A \times I \to X$ é* **especial** *se as aplicações $\phi_t(x) = H(x, t)$ tem os mesmos pontos fixos para todo $t \in I$. Duas aplicações $f_0, f_1 : A \to X$ tendo os mesmos pontos fixos são especialmente homotópicas se podem ser ligadas por uma homotopia especial.*

Lema 2.2.1 *Seja X um poliedro e $A \subset X$ um subpoliedro. Então existe uma retração $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$.*

Prova: Veja [7], pág 117. ∎

Teorema 2.2.1 *Considere X um poliedro e $A \subset X$ um subpoliedro. Seja $f_0 : X \to X$ uma auto aplicação, $H : A \times I \to X$ uma homotopia especial tal que $H(x,0) = f_0(x)$. Então H pode ser estendida para uma homotopia especial $G : X \times I \to X$ tal que $G(x,0) = f_0(x)$.*

Prova: Defina uma aplicação ϕ do subespaço $(X \times 0) \cup (A \times I) \subset X \times I$ em X por

$$\phi(x,t) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se } t = 0 \\ H(x,t) & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

De acordo com o lema 2.2.1, existe uma retração $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$. Coloque $\Phi = \phi \circ r : X \times I \to X$. O conjunto $C = \{x | x \in \Phi(x \times I)\}$ é fechado em X, (pois caso $x_0 \notin C$, isto é, $x_0 \notin \Phi(x_0 \times I)$; como $\Phi(x_0 \times I)$ é compacto, temos $\varepsilon = d(x_0, \Phi(x_0 \times I) > 0$ e consequentemente $U(x_0, \varepsilon/4)$ é disjunto de $B = \bigcup_{x \in \Phi(x_0 \times I)} U(x, \varepsilon/4) \supset \Phi(x_0 \times I)$, por continuidade $\Phi^{-1}(B)$ é aberto contendo $x_0 \times I$, mas I é compacto e portanto existe aberto $V \ni x_0$ de X tal que $V \times I \subset \Phi^{-1}(B)$. Portanto $V \cap U(x_0, \varepsilon/4) \subset X - C$). Note que C é a união de todos os pontos fixos das funções $\Phi_t(x) = \Phi(x,t)$ com t variando em I. Defina $G : X \times I \to X$ por

$$G(x,t) = \begin{cases} \Phi(x,0) = f_0(x) & \text{se } d(x,A) \geq d(x,C) \\ \Phi(x, t - td(x,A)/d(x,C)) & \text{se } d(x,A) \leq d(x,C) > 0. \end{cases}$$

G está bem definida. Se $d(x,A) = d(x,C) = 0$, como A e C são fechados $x \in A \cap C$, isto é, x é um ponto fixo de f_0 em A. Seja $V \ni x$ um aberto de X, $\Phi^{-1}(V)$ é aberto de $X \times I$ que contém $x \times I$, pois $\Phi|_{A \times I} = H$. O fato de I ser compacto implica a existência de um aberto $W \ni x$ em X tal que $W \times I \subset \Phi^{-1}(V)$, daí $G(W \times I) \subset V$. Isto mostra que G é contínua em todo ponto (x,t) com $d(x,A) = d(x,C) = 0$. A continuidade de G em outros pontos é óbvia. Assim G é uma homotopia e uma extensão de H para $X \times I$. Note que G é especial, pois os pontos fixos de $g_t(x) = G(x,t)$ devem estar em C e $G(x,t) = f_0(x)$ para todo $t \in I$ e $x \in C$. ∎

Definição 2.2.2 *Seja $i : A \to X$ a inclusão. O subespaço A é um* **retrato por deformação forte** *de X se existe uma retração $r : X \to A$ tal que $i \circ r \simeq id$ rel$A$.*

Lema 2.2.2 *Se X é um poliedro e $A \subset X$ um subpoliedro, então A é um retrato por deformação forte de alguma vizinhança de A em X.*

Prova: Veja [7], pág 124. ∎

Definição 2.2.3 *Seja (X, A) um par de espaços e Y um espaço . (X, A) é dito ter* **propriedade de extensão de homotopia com respeito a** Y *se, dado aplicações $g : X \to Y$ e $G : A \times I \to Y$ tal que $g(x) = G(x,0)$ para $x \in A$, existe uma aplicação $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x,0) = g(x)$ para $x \in X$ e $F|_{A\times I} = G$.*

Lema 2.2.3 *Se X é um poliedro e $A \subset X$ um subpoliedro, então (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia com respeito a qualquer espaço.*

Prova: Veja [7], pág 118. ∎

Definição 2.2.4 *Um poliedro finito X é dito ser um* **espaço de Nielsen** *se toda aplicação $f : X \to X$ é homotópica a alguma aplicação $g : X \to X$ que tem $N(f)$ pontos fixos, e estes pontos fixos podem localizar-se em qualquer ponto de X.*

Seja Y espaço topológico e $X \subset Y$ um subconjunto; escrevemos $\overline{X}$, int$X$, BdX para o fecho, interior e bordo de X em Y.

Teorema 2.2.2 *Seja X um poliedro finito conexo, $A \neq X$ um subpoliedro onde cada componente conexa é um espaço de Nielsen. Então toda aplicação $f : (X, A) \to (X, A)$ é homotópica a alguma aplicação $g : (X, A) \to (X, A)$ satisfazendo:*

1) $\overline{g}$ tem $N(\overline{f})$ pontos fixos no bordo de A,

2) g tem um número finito de pontos fixos,

3) todos os pontos fixos de g em $X - A$ estão em simplexos maximais.

Prova: A demonstração será dada em dois passos.

Passso 1: Mostremos que $f : (X, A) \to (X, A)$ é homotópica a uma aplicação, $h : (X, A) \to (X, A)$ que tem as seguintes propriedades:

(a) $\overline{h}$ tem $N(\overline{f})$ pontos fixos sobre o bordo de A.

(b) existe um poliedro finito B em X de tal forma que $A \subset X - B$ e h não tem pontos fixos sobre $\overline{(X - B)} - A$.

Para construir h, usamos o fato que cada componente conexa de A é um espaço de Nielsen para deformar $\overline{f} : A \to A$ para uma auto aplicação de A que tem $N(\overline{f})$ pontos fixos sobre o bordo de A. Seja $\overline{h} : A \to A$ a aplicação resultante e $\overline{F} : A \times I \to A$ uma homotopia de $\overline{f}$ para $\overline{h}$. Pelo lema 2.2.2 o subpoliedro A é um retrato por deformação forte de alguma vizinhança V de A em X. Usando uma cobertura estrela (coleção formada pelas estrelas de cada vértice em A) de A com respeito a alguma subdivisão da triangulação de X, podemos achar um poliedro finito A_1 com $A \subset \text{int}A_1 \subset V$ e tal que $B = X - \text{int}A_1$ é um subpoliedro em X. Seja $R : A_1 \times I \to V$ a restrição para A_1 do retrato por deformação forte de V sobre A e seja $r : A_1 \to A$ a retração dada por $r(x) = R(x, 1)$. Então podemos definir uma homotopia $F_1 : A_1 \times I \to X$ por

$$F_1(x,t) = \begin{cases} f \circ R(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \overline{F}(r(x), 2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e usamos a propriedade de extensão de homotopia lema 2.2.3 para extender F_1 para uma homotopia $F : (X \times I, A \times I) \to (X, A)$ de f. Se definirmos $h : (X, A) \to (X, A)$ por $h(x) = F(x, 1)$, então h não tem pontos fixos sobre $\overline{(X - B)} - A \subset A_1 - A$, pois $h(A_1 - A) \subset A$.

Passo 2: Agora mostramos que $h : (X, A) \to (X, A)$ é homotópica a uma aplicação $g : (X, A) \to (X, A)$ que satisfaz as condições do teorema.

Seja $U = X - B$. Como h não tem pontos fixos sobre $\overline{U} - A$, existe um $\delta > 0$ tal que $d(x, h(x)) > \delta$ para todo x no bordo de U. Com a ajuda do teorema 1.3.2 e corolário 1.2.1 deformamos a restrição $h_B : B \to X$ de h para uma aplicação $g_B : B \to X$ que tem um número finito de pontos fixos contidos em simplexos maximais e que é δ-homotópica à h_B. Seja $G_B : B \times I \to X$ uma tal δ-homotopia de h_B para g_B. Então $G_B(x, t) \neq x$ para todo x pertencente ao bordo de U, pois $\operatorname{diam}(G_B(x \times I)) < \delta$ para todo $x \in B$. Se $G' : ((\overline{U} \times 0) \cup (\mathrm{Bd}U \times I) \cup (A \times I), A \times I) \to (X, A)$ é dada por

$$G'(x,t) = \begin{cases} h(x) & \text{se } (x,t) \in (\overline{U} \times 0) \cup (A \times I), \\ G_B(x,t) & \text{se } (x,t) \in (\mathrm{Bd}U) \times I \end{cases}$$

então a restrição de G' para $(\mathrm{Bd}U \cup A) \times I$ é uma homotopia especial e daí extende-se para uma homotopia especial $G_U : (\overline{U} \times I, A \times I) \to (X, A)$. Definimos uma homotopia $G : (X \times I, A \times I) \to (X, A)$ por

$$G(x,t) = \begin{cases} G_U(x,t) & \text{se } (x,t) \in \overline{U} \times I \\ G_B(x,t) & \text{se } (x,t) \in B \times I \end{cases}$$

e a aplicação $g : (X, A) \to (X, A)$ por $g(x) = G(x, 1)$. Note que o fato de G_U ser especial, implica que $\overline{g} = g|_A$ tem os mesmos pontos fixos de $\overline{h}$ e $g|_{\overline{U}-A}$ não tem pontos fixos, por isto $\overline{g}$ tem $N(\overline{f})$ pontos fixos que estão no bordo de A e tem apenas um número finito de pontos fixos. Portanto g é a função procurada. ∎

Definição 2.2.5 *Um subespaço A de um espaço X pode ser* "**by-passed**" *se todo caminho em X com pontos finais em $X - A$ é homotópico a um caminho em $X - A$.*

Escrevemos $i_* : \pi_1(X - A) \rightarrow \pi_1(X)$ para o homomorfismo nos grupos fundamentais induzido pela inclusão.

Teorema 2.2.3 *Seja (X, A) um par de espaços e X conexo por caminhos. Então A pode ser by-passed em X se e somente se $X - A$ é conexo por caminhos e $i_* : \pi_1(X - A) \rightarrow \pi_1(X)$ é sobrejetiva.*

Prova: Suponhamos A pode ser by-passed. Dados dois pontos $a, b \in X - A$, existe um caminho em X de a para b homotópico à um caminho contido em $X - A$, segue que $X - A$ é conexo por caminhos.

Consideremos um ponto $y \in X - A$ como ponto base. Se α é um caminho em X com ponto inicial e final y, como A é can by passed existe um caminho β em $X - A$ que começa e termina em y homotópico à α, daí $i_*(\langle\beta\rangle) = \langle\alpha\rangle$ e i_* é sobrejetiva.

Reciprocamente, seja λ um caminho em X de a para b onde $a, b \in X - A$, como $X - A$ é conexo por caminhos existe um caminho α em $X - A$ de b para a. O caminho $\lambda\alpha$ começa e termina em a, o fato de i_* ser sobrejetiva implica a existência de um caminho β em $X - A$ homotópico à $\lambda\alpha$, daí $\beta\alpha^-1$ é um caminho em $X - A$ de a para b homotópico à λ. ∎

Definição 2.2.6 *Um caminho PL em $|K|$ é um caminho $p : I \rightarrow |K|$ que, para alguma subdivisão L de I, aplica cada simplexo de L linearmente em um simplexo de K. A imagem de cada vértice de L é chamado um canto de p. Um caminho PL é normal se:*

1) não passa por qualquer vértice de K, *2) não tem múltiplas auto interseções e não tem auto interseções em seus cantos,*

3) $p(s)$ está em simplexos maximais de K a menos de um número finito de valores de $s \in I$, e $p(s)$ vai de um simplexo maximal a outro quando s cruza qualquer destes valores.

Um arco PL $q : I \to |K|$ é um caminho PL com pontos finais diferentes e sem auto interseções.

Se A é um subpoliedro de $X = |K|$, dizemos que $Q = p(I)$ é um arco PL-normal em $(|K|, A)$ se Q é um arco PL-normal em $|K| - A$ ou se $Q \cap A = \{q(1)\}$ e Q é um arco PL-normal em $|K|$ à parte o fato de que $q(1)$ pode ser um ponto arbitrário do bordo de A.

Definição 2.2.7 *Um ponto x de um espaço topológico X é* **ponto de corte local** *se existe um conjunto aberto conexo $U \ni x$ tal que $U - x$ não é conexo.*

Um poliedro finito conexo X não tem ponto de corte local se para qualquer triangulação K de X, todo simplexo maximal de K é de dimensão maior ou igual à 2 e para todo vértice v de K o bordo de $|St(v)|$ é conexo.

Lema 2.2.4 *Seja $(X, A) = (|K|, |L|)$ um par de poliedros finito, onde X é conexo e $X - A$ não tem ponto de corte local e não é 2-variedade. Sejam x_0 e x_1 dois pontos fixos isolados de uma aplicação $f : (X, A) \to (X, A)$, e seja Q um arco PL-normal em $(|K|, A)$ de x_0 para x_1, com $\mathrm{Fix}(f) \cap Q = \{x_0, x_1\}$. Suponha que x_0 está em um simplexo maximal de $|K| - A$, e que x_1 está em um simplexo maximal de $|K| - A$ ou sobre o bordo de A. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $f|_Q$ é especialmente homotópica a uma aplicação $g : Q \to X$ com $d(x, g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in Q$, então f é homotópica a uma aplicação $f' : (X, A) \to (X, A)$ com $\mathrm{Fix}(f') = \mathrm{Fix}(f) - \{x_0\}$.*

Prova: Seja $Q = q(I)$, onde $q : I \to |K|$. Denote por $|s| \subset |K| - A$ o simplexo maximal tal que $x_1 \in \overline{|s|}$. Tome um ponto $x_2 \in Q$ de tal forma que $[x_2, x_1) \subset |s|$. Existe um número $\eta > 0$ tal que $U([x_2, x_1], \eta) \subseteq |St(\sigma(x_1))|$. Considere $\delta > 0$ o número de Lebesgue da cobertura de $|K|$ formada pela coleção das estrelas dos vértices de K. Se $\varepsilon = \min\{\delta, \eta\}$, temos que $d(x, g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in Q$, implica que $g : Q \to X$ é uma aplicação próxima e $g(x) \in |St(\sigma(x_1))|$ quando $x \in [x_2, x_1]$.

Por hipótese existe uma homotopia especial $G_Q : Q \times I \to X$ de $f|_Q$ para $g : Q \to X$. Estendemos G_Q para uma homotopia especial $G : \{(Q \cup A) \times I, A \times I\} \to (X, A)$ da forma

$$G(x,t) = \begin{cases} G_Q(x,t) & \text{se } (x,t) \in Q \times I \\ \overline{f}(x) & \text{se } (x,t) \in A \times I \end{cases}$$

e usando teorema 2.2.1 com $A \cup Q$ ao invés de A estendemos G para uma homotopia especial $H : (X \times I, A \times I) \to (X, A)$ que começa em $H(x, 0) = f(x)$. Se $f'' : (X, A) \to (X, A)$ é dado por $f''(x) = H(x, 1)$, então $f''(x) = g(x)$ para $x \in Q$.

Como $g : Q \to X$ é uma aplicação próxima, podemos usar sucessivamente os teoremas 1.3.4 e 1.3.5 para mover o ponto fixo x_0 de f'' ao longo de Q para o ponto x_2 de tal maneira que a restrição para Q da nova aplicação permanece próxima. Se $Q \subset X - A$, pelo teorema 1.3.4 podemos unir x_2 com x_1 e obter uma aplicação $f' : (X, A) \to (X, A)$ homotópica a f com $\mathrm{Fix}(f') = \mathrm{Fix}(f) - \{x_0\}$.

Temos ainda que unir os pontos x_2 e x_1 no caso $Q \cap A = \{x_1\}$. Seja $f_1 : (X, A) \to (X, A)$ a aplicação obtida de f'' que tem $x_2 \in |s|$ e $x_1 \in \overline{|s|} \cap A$ como pontos fixos isolados. Note que, da observação 1.3.1 e do modo como ε foi obtido, $f_1(x) \in |St(\sigma(x_1))|$ quando $x \in [x_2, x_1]$. Como $\mathrm{Fix}(f_1) \cap [x_2, x_1] = \{x_2, x_1\}$, existe uma vizinhança aberta U de $[x_2, x_1)$ em $|s|$ com $\mathrm{Bd}U \cap A =$

$\{x_1\}$, $\text{Fix}(f_1) \cap \text{Bd}U = \emptyset$, $\overline{U}$ convexo e $f_1(\overline{U}) \subseteq |St(\sigma(x_1))|$ (ver figura 2.2). Os pontos de $\overline{U} - \{x_1\}$ podem ser rótulados como $x = (b_x, t_x)$, onde $b_x \in \text{Bd}U$, $0 < t_x \leq 1$ e $x = t_x b_x + (1 - t_x)x_1$.

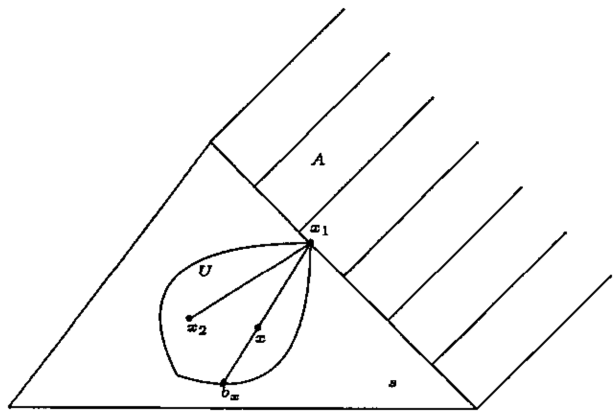

Figura 2.2:

Seja $f' : (X, A) \to (X, A)$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} x_1 & \text{se } x = x_1 \\ t_x f_1(b_x) + (1 - t_x)x_1 & \text{se } x = (b_x, t_x) \in \overline{U} - \{x_1\} \\ f_1(x) & \text{se } x \in X - \overline{U}. \end{cases}$$

A aplicação f' tem somente x_1 como ponto fixo sobre $\overline{U}$.

Considere a aplicação $H : I \times I \to X$ definida por

$$H(x, s) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in X - \overline{U} \\ x_1 & \text{se } x = x_1 \\ (1 - s + st_x)f_1(sb_x + (1 - s)x) + s(1 - t_x)x_1 & \text{se } x \in \overline{U} - x_1 \end{cases}$$

H é uma homotopia entre f_1 e f'. Portanto f' é homotópica à f e $\text{Fix}(f') = \text{Fix}(f) - \{x_0\}$. ∎

Definição 2.2.8 *Seja $q : I \to |K|$ um arco PL-normal e $Q = q(I)$. Dizemos que um caminho $p : I \to |K|$ é* **especial** *com respeito a q, se $p(0) = q(0)$, $p(1) = q(1)$ e $p(s) \neq q(s)$ para $0 < s < 1$. Dois caminhos $p_0, p_1 : I \to |K|$ são especialmente homotópicos se eles podem ser ligados por uma homotopia $H : I \times I \to |K|$ onde para cada t, $H_t(s) = H(s,t)$ é especial.*

Lema 2.2.5 *Se os dois pontos finais de q são os únicos pontos fixos sobre Q de $f : |K| \to |K|$, então o caminho $p : I \to |K|$ é especialmente homotópico à $f \circ q$ se, e somente se, a aplicação $\Phi = p \circ q^{-1} : Q \to |K|$ é especialmente homotópica a $f|_Q : Q \to |K|$ (no sentido da definição 2.2.1).*

Prova: Seja $H : I \times I \to |K|$ a homotopia que liga p à $f \circ q$, onde cada $H_t(s) = H(s,t)$ é especial com respeito a q. Então $G : Q \times I \to |K|$ definida por $G(x,t) = H(q^{-1}(x), t)$ satisfaz:

$$G(x,0) = H(q^{-1}(x), 0) = p \circ q^{-1}(x) \text{ e}$$
$$G(x,1) = H(q^{-1}(x), 1) = f \circ q \circ q^{-1}(x) = f(x).$$

Note que $G_t(x) = H_t(q^{-1}(x))$ só tem os pontos finais de Q como pontos fixos. Portanto G é uma homotopia especial entre $p \circ q^{-1}$ e f.

Reciprocamente se $G : Q \times I \to |K|$ for uma homotopia especial entre $p \circ q^{-1}$ e $f|_Q$. Definimos $H : I \times I \to |K|$ por $H(s,t) = G(q(s), t)$ temos:

$$H(s,0) = G(q(s),0) = p \circ q^{-1} \circ q(s) = p(s)$$
$$H(s,1) = G(q(s),1) = f \circ q(s)$$
$$H(0,t) = G(q(0),t) = q(0)$$
$$H(1,t) = G(q(1),t) = q(1)$$

e cada $H_t(s) = H(s,t)$ é especial com respeito a q. ∎

Lema 2.2.6 *Seja $|K|$ um poliedro finito conexo sem ponto de corte local. Considere $q : I \to |K|$ um arco PL-normal que satisfaz as seguintes condições:*

(α) Existe um simplexo τ, sendo um subconjunto aberto de $|K|$, e números $0 < s_1 < s_3 < s_2 < 1$, tal que $q(s) \in \mathrm{Bd}\tau$ se $s = s_1$ ou s_2, $q(s_3) \in \tau$ e q é linear sobre $[s_1, s_3]$ e $[s_3, s_2]$.

(β) $q(s_1)$ e $q(s_2)$ estão em um simplexo σ_1 de dimensão 1 que é face comum de pelo menos dois simplexos maximais e de pelo menos três 2-simplexos de K.

Se dois caminhos especiais com respeito à q, $p_0, p_1 : I \to |K|$ são homotópicos, então eles são especialmente homotópicos.

Prova: Veja apêndice, lema A.6. ∎

Teorema 2.2.4 *(Teorema de Minimização Relativo) Seja X um poliedro finito conexo sem pontos de corte local e A um subpoliedro, tal que:*

1) $X - A$ não é uma 2-variedade,

2) toda componente conexa de A é um espaço de Nielsen,

3) A pode ser by-passed.

Então qualquer aplicação $f : (X, A) \to (X, A)$ é homotópica a uma aplicação $g : (X, A) \to (X, A)$ com $N(f; X, A)$ pontos fixos.

Prova: Seja (K, L) uma triangulação de (X, A). Devido ao teorema 2.2.2 podemos supor que $\overline{f}$ tem $N(\overline{f})$ pontos fixos que estão sobre o bordo de A e que f tem apenas um número finito de pontos fixos sobre $X - A$ e que todos os pontos fixos de f sobre $X - A$ estão em simplexos maximais de $|K|$. Nós agora uniremos pontos fixos pertencentes a uma classe de ponto fixo F de $f : X \to X$. Para isto é suficiente mostrar:

(*)Suponha que F é uma classe comum de f e $\overline{f}$ e $x_0 \in F \cap (X - A)$ ou que F não é uma classe comum de f e $\overline{f}$ (isto é, $F \cap A = \emptyset$) e $x_0, x_1 \in F$. Então f é homotópica a uma aplicação $f' : (X, A) \to (X, A)$ com $\mathrm{Fix}(f') =$

$\mathrm{Fix}(f) - \{x_0\}$.

Repetindo (*) várias vezes e eliminando as classes de ponto fixo não comuns que consiste de pontos fixos de índice zero, através do teorema 1.3.3, chegamos a uma aplicação $g : (X, A) \to (X, A)$ com $N(f; X, A)$ pontos fixos.

Demonstremos (*): Seja F uma classe de ponto fixo de $f : X \to X$ e $x_0 \in F \cap (X - A)$. Se F é uma classe comum de f e $\overline{f}$, tome $x_1 \in F \cap \mathrm{Bd}A$, e se F não é uma classe comum de f e $\overline{f}$, tome $x_1 \in F - \{x_0\}$. Existe um caminho $q : I \to X$ de x_0 para x_1 que é homotópico à $f \circ q$, $\mathrm{Fix}(f) \cap Q = \{x_0, x_1\}$, tem a propriedade que $Q = q(I)$ é um arco PL-normal em $(|K|, A)$ com $Q \cap A = \emptyset$ se $x_1 \in X - A$ e $Q \cap A = \{x_1\}$ se $x_1 \in \mathrm{Bd}A$ e satisfaz as condições (α) e (β) do lema 2.2.6 (veja apêndice, lemas A.1 e A.2, observando que o fato de X não ter ponto de corte local implica que $X - A$ não tem ponto de corte local).

Escolhemos $\varepsilon > 0$ de tal forma que o lema 2.2.4 pode ser aplicado. Como q é uniformemente contínua, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $|h| \leq \delta$, implica $d(q(s+h), q(s)) < \varepsilon$, para todo $s \in I$. Considerando este delta, defina $p_\varepsilon : I \to X$ por $p_\varepsilon(s) = q(s + \delta \sin(s\pi))$, portanto $d(p_\varepsilon(s), q(s)) < \varepsilon$ para todo $s \in I$. A aplicação $H : I \times I \to X$ definida por $H(s,t) = q(s + t\delta \sin(s\pi))$ é uma homotopia ligando q à p_ε. O fato de $\mathrm{Fix}(f) \cap Q = \{x_0, x_1\}$, implica que $f \circ q$ é um caminho especial com respeito a Q, daí p_ε e $f \circ q$ são caminhos especiais e são homotópicos. Segue do lema 2.2.6 que p_ε e $f \circ q$ são especialmente homotópicos. Portanto as aplicações $f|_Q : Q \to X$ e $p_\varepsilon \circ q^{-1} : Q \to X$ são especialmente homotópicas e $d(x, p_\varepsilon \circ q^{-1}(x)) = d(q(s), p_\varepsilon(s)) < \varepsilon$ para todo $x \in Q$. Aplicando o lema 2.2.4 com $p_\varepsilon \circ q^{-1}$ no lugar de g, tem-se que (*) é verdade. ∎

Apêndice

Lema A.1 *Seja $X = |K|$ um poliedro finito conexo e A um subpoliedro tal que, $X - A$ não tem ponto de corte local e A pode ser "by-passed". Suponha que $f : (X, A) \to (X, A)$ tem apenas um número finito de pontos fixos sobre $X - A$ e todos estão em simplexos maximais de $|K|$. Seja p um caminho em $|K|$ de x_0 para x_1, onde $x_0 \in X - A$ e $x_0, x_1 \in \mathrm{Fix}(f)$.*
(a) Se $x_1 \neq x_0$ e $x_1 \in |K| - A$, então p é homotópico à q tal que $q(I)$ é arco PL-normal em $(|K|, A)$, $q(I) \cap A = \emptyset$ e $\mathrm{Fix}(f) \cap Q = \{x_0, x_1\}$.
(b) Se $x_1 \in \mathrm{Bd}A$, então p é homotópico à q tal que $q(I)$ é um arco PL-normal em $(|K|, A)$, $q(I) \cap A = \{x_1\}$ e $\mathrm{Fix}(f) \cap Q = \{x_0, x_1\}$.

Prova: (a) Como A pode ser by-passed existe um caminho p_1 em $X - A$ de x_0 para x_1 homotópico a p. Nós desejamos construir um caminho q de x_0 para x_1 que consiste de segmentos de reta cujo interior de cada segmento esta em simplexos maximais de $|K| - A$ e os pontos finais dos segmentos estão em simplexos de $|K| - A$ de dimensão pelo menos 1, $q(I) \cap \mathrm{Fix}(f) = \{x_0, x_1\}$, $q \simeq p_1 \ \mathrm{rel}\{0, 1\}$ e sem auto intersecção. Existe $t_1 > 0$ tal que $q_1 = \{p_1(t) | 0 \leq t \leq t_1\}$ está no fecho do simplexo maximal $|s_1| \subset |K| - A$, onde $x_0 \in |s_1|$ e $p_1(t_1) \in \mathrm{Bd}|s_1|$. Existe um segmento de reta $d_1(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, começando em x_0 tal que $\mathrm{Fix}(f) \cap d_1 = \{x_0\}$, $d_1(t) \in |s_1|$ para todo $0 \leq t < t_1$, $\sigma(d_1(t_1))$ é de dimensão pelo menos 1 e $p_1(t_1) \in \overline{|\sigma(d_1(t_1))|}$. Existe $t_2 > t_1$ e um simplexo maximal $|s_2| \subset |K| - A$ tal que

$$q_2 = \{p_1(t) | t_1 \leq t \leq t_2\} \subseteq \overline{|s_2|}$$

e $p_1(t_2) \in \text{Bd}|s_2|$. Se $d_1(t_1) \in \overline{|s_2|}$ então existe um segmento de reta $d_2(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, começando em $d_1(t_1)$, disjunto de Fix(f); e tal que $d_2(t) \in |s_2|$ para $t_1 < t < t_2$, onde $\sigma(d_2(t_2))$ é dimensão pelo menos 1, e $p_1(t_2) \in \overline{|\sigma(d_2(t_2))|}$. No entanto, se $\sigma(p_1(t_1))$ é um vértice de K, então não é necessariamente verdade que $d_1(t_1) \in \overline{|s_2|}$. Como $|K| - A$ não ponto de corte local, existem simplexos maximais $|s_2^1|, ..., |s_2^r|$ de $|K| - A$ em $|St(\sigma(p_1(t_1)))|$ com $d_1(t_1) \in \overline{|s_2^1|}$ e $s_2^i \cap s_2^{i+1}$ de dimensão pelo menos 1 para $i = 1, ..., r-1$ e $s_2^r = s_2$. Portanto podemos neste caso, achar um caminho $d_2(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, começando em $d_1(t_1)$; constituido de segmentos de reta de tal forma que, exceto os pontos finais de cada segmento, cada ponto esta em simplexos maximais de $|K| - A$, e os pontos finais dos segmentos estão em simplexos de dimensão pelo menos 1; $d_2 \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$, e $\overline{|\sigma(d_2(t_2))|}$ contém $p_1(t_2)$. Continuando desta maneira obtemos um caminho $q' = d_1 \cup d_2 \cup ... \cup d_k$ com $q' \simeq p_1$ rel$\{0,1\}$, pois cada d_i é homotópico a q_i pelas homotopias retas e estas homotopias são iguais nos pontos finais (ver figura 2.3).

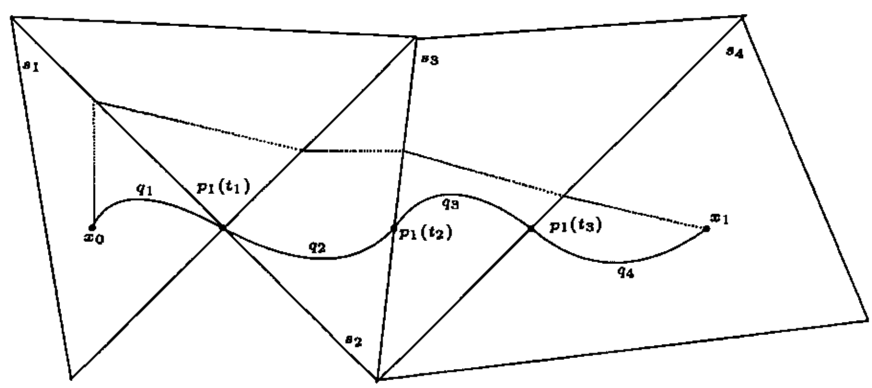

Figura 2.3:

Note que não podemos garantir que o caminho q' não tenha auto intersecção. Para eliminar as auto interseções procedemos da seguinte forma. Seja $q'(s') = q'(s)$, $s' < s$, o último ponto de auto intersecção de q'. Façamos a seguinte construção sobre $q'[s, 1]$: Seja $a_0 = q'(s), a_1, ..., a_n = q'(1)$ os cantos de $q'[s, 1]$. Para todo i, trace um segmento de reta l_i em $\sigma(a_i)$, de comprimento $\delta > 0$, centrado em a_i, tal que l_0 esteja ao longo de $q'(s' - \delta, s' + \delta)$ e l_n seja transversal à $[a_{n-1}, a_n]$. Se $i \neq 0, n$ e $\sigma(a_i)$ é maximal, tomamos l_i sobre a bissetriz do ângulo entre $[a_{i-1}, a_i]$ e $[a_i, a_{i+1}]$. Para todo i, considere os segmentos l_i' e l_i'' centrado no ponto médio b_i de $[a_i, a_{i+1}]$, paralelo e igual à l_i e l_{i+1} respectivamente. Seja P_i' o paralelogramo que tem l_i e l_i' como lados opostos, e P_i'' o paralelogramo que tem l_i'' e l_{i+1} como lados opostos. Seja T_i os dois triângulos ou um triângulo conectando P_i' e P_i'', de acordo com P_i' e P_i'' estão em planos diferentes ou no mesmo plano (ver figura 2.4). Coloque $P_i = P_i' \cup T_i \cup P_i''$ e $\sum_\delta = \bigcup_{i=0}^{n-1} P_i$.

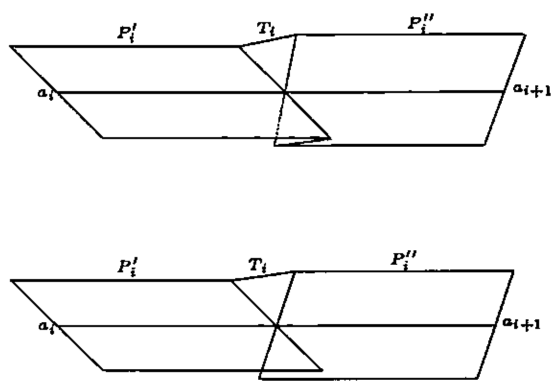

Figura 2.4:

Tome δ suficientemente pequeno de tal forma que $\sum_\delta$ encontre $q'[0, s]$ somente sobre l_0 e f só tenha x_1 como ponto fixo em $\sum_\delta$. Como existe um homeomorfismo $\eta : S \to \sum_\delta \subset |K| - A$, onde $S \subset \mathbb{R}^2$ è uma faixa retangular, que aplica o eixo de S (ver figura 2.5) no arco $q'[s, 1]$, podemos deformar o arco $l_0 = \eta[a, b]$ no arco $\eta[a, c, d, b]$ sobre a faixa $\sum_\delta = \eta(S)$ e substituindo l_0 por $\eta[a, b, d, b]$ movemos a auto intersecção para o ponto $q'(1)$; podemos além disso deformar este arco de tal forma que ele fique fora de $q'[0, 1]$, pois $q'(1)$ está em um simplexo maximal. Repetindo este processo várias vezes se necessário obtemos o arco PL-normal q desejado.

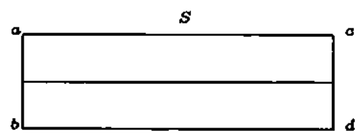

Figura 2.5:

(b) Se $x_1 \in \mathrm{Bd}A$, então escolhemos $y \in |K| - A$ próximo de x_1 de tal forma que existe um caminho $v : I \to |K|$ de x_1 para y com $v(I) \cap A = \{x_1\}$. Então o caminho justaposto pv de x_0 para y é homotópico a algum caminho p_1 em $|K| - A$. Aplicando a construção acima para o caminho $p_1 v^{-1}$ obtemos um caminho q homotópico à $p_1 v^{-1}$ e consequentemente homotópico a p que satisfaz as condições exigidas em (b) (ver figura 2.6). ∎

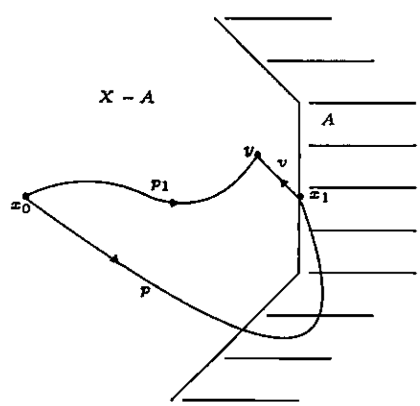

Figura 2.6:

Lema A.2 *Se adicionarmos ao lema A.1 a hipótese de $X - A$ não ser 2-variedade, podemos obter um arco Pl-normal p' que além de satisfazer (a) e (b) também satisfaz as condiçẽs (α) e (β) do lema 2.2.6.*

Prova: O fato de $X - A$ não ser 2-variedade, implica que para alguma triangulação K de X temos um 1-simplexo $|\sigma_1| \subset |K| - A$ sendo face de pelo menos três 2-simplexos $|\sigma|, |\sigma'|$ e $|\sigma''|$ de $|K| - A$. Podemos supor que $|\sigma_1|$ é face comum de pelo menos dois simplexos maximais em $|K| - A$, caso contrário usamos alguma subdivisão de K ao invés de K.

Considere o arco PL-normal q construído no lema A.1. Podemos ligar um ponto a_1 de $q[0,1]$ que não é canto, por segmentos de reta que não contém pontos fixos de f, para algum ponto c_1 de $|\sigma_1|$ tal que; este segmento intercepta $q[0,1]$ somente em a_1. Repetimos este processo com pontos $b_1 \in q[0,1]$ e $d_1 \in |\sigma_1|$ (ver figura 2.7). Tome um pequeno simplexo $|\tau|$ em $|\sigma|$ de mesma dimensão de tal forma que uma de suas faces esteja contida em $|\sigma_1|$ e contenha $[c_1, d_1]$. Desenhe um ponto e em $|\tau|$. O caminho p' desejado será o arco PL-normal que vai de x_0 para a_1 ao longo de q, então ao longo de $[a_1, ..., c_1, e, d_1, ..., b_1]$, e então de b_1 para x_1 ao longo de q. ∎

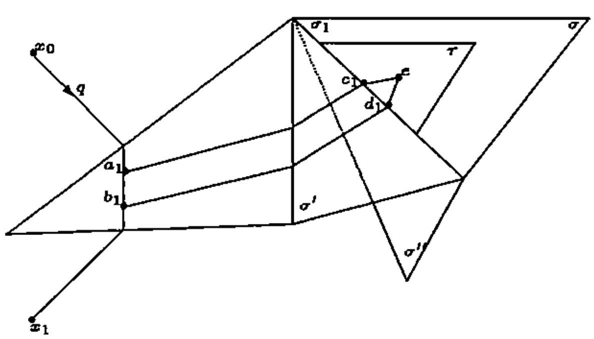

Figura 2.7:

Lema A.3 *Seja $|K|$ um poliedro finito conexo sem ponto de corte local. Todo caminho especial $p : I \to |K|$ é especialmente homotópico a algum caminho PL-normal p'.*

Prova: Seja q o caminho em relação o qual p é especial e $q(0) = p(0) = a$, $q(1) = p(1) = b$. Eles são dois pontos diferentes e não são vértices de K, pois q é por hipótese normal. Tome $\varepsilon > 0$ tal que q é linear sobre $[0, \varepsilon]$ e $[1-\varepsilon, 1]$, $p[0, \varepsilon] \subset |St(\sigma(a))|$ e $p[1-\varepsilon, 1] \subset |St(\sigma(b))|$. Construa uma homotopia $h : I \times I \to X$ da seguinte forma. Defina h sobre $[0, \varepsilon] \times I$ por

$$h(s,t) = \begin{cases} (1 - \frac{s}{\varepsilon t})a + \frac{s}{\varepsilon t} p(\varepsilon t) & \text{se } s \leq \varepsilon t \text{ e } t > 0, \\ p(s) & \text{se } s \geq \varepsilon t. \end{cases}$$

Temos $h(s,t) \neq q(s)$ para $0 < s \leq \varepsilon$, pois como q é linear sobre $[0, \varepsilon]$ tem-se

$$q(s) = \left(1 - \frac{s}{\varepsilon t}\right)a + \frac{s}{\varepsilon t} q(\varepsilon t).$$

Defina h sobre $[1-\varepsilon, 1] \times I$ de maneira similar, isto é,

$$h(s,t) = \begin{cases} (1 + \frac{s-1}{\varepsilon t})b + (\frac{-s+1}{\varepsilon t}) p(1 - \varepsilon t) & \text{se } s \geq 1 - \varepsilon t \text{ e } t > 0, \\ p(s) & \text{se } s \leq 1 - t\varepsilon. \end{cases}$$

Agora

$$\eta = \inf\{d(p(s), q(s)) | s \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\} > 0.$$

Como $|K|$ não tem ponto de corte local, por uma construção semelhante a feita no lema A.1 parte (a), podemos obter um caminho PL-normal que é η-homotópico à $p[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Seja $h : [\varepsilon, 1-\varepsilon] \times I \to |K|$ a η-homotopia, então

$h(\varepsilon, t) = p(\varepsilon)$, $h(1-\varepsilon, t) = p(1-\varepsilon)$, $h(s, 0) = p(s)$, $h(s,t) \neq q(s)$ para todo $s \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ e $t \in I$, pois $\text{diam}\{h(s,t); 0 \leq t \leq 1\} < \eta$. Colando as três partes, nós chegamos a uma homotopia especial $h : I \times I \rightarrow X$, com h_1 um caminho PL. Mudando os cantos de h_1 se necessário, chegamos ao caminho PL-normal desejado p'. ∎

Lema A.4 *Considere $|K|$ um poliedro finito conexo sem ponto de corte local e q um arco PL-normal satisfazendo a condição (α) do lema 2.2.6. Então, qualquer caminho especial $p : I \rightarrow |K|$ é especialmente homotópico a um caminho $p' : I \rightarrow |K|$ com $p'[0,1] \cap (q(0,1) \cup \tau) = \emptyset$.*

Prova: Podemos supor que p é um caminho PL-normal pelo lema A.3. Mudando os cantos se necessário, podemos supor que os cantos de p não estão em Q, e consequentemente as intersecções de p e Q é um número finito.

Eliminaremos as intersecções do seguinte modo. Seja $p(s') = q(s)$ uma intersecção. Se $s' < s$, fazemos a construção do lema A.1 parte (a) sobre o arco $q[s, 1]$ com l_0 ao longo de $p(s' - \delta, s' + \delta)$, podemos deformar especialmente uma pequena parte de p em torno de s' de tal forma que a intersecção move-se ao longo de Q para $q(1)$ e fora de $q(0,1)$. O caso $s' > s$ pode ser tratado de forma similar, mas a construção é feita sobre $q[0, s]$. Portanto repetindo este processo várias vezes se necessário obtemos um caminho PL-normal p_1, especialmente homotópico a p, tal que $p_1[0,1] \cap q(0,1) = \emptyset$.

Empurre $p_1(I) \cap \tau$ para o bordo de τ pela projeção radial de $q(s_3) \in \tau$. A condição (α) é necessária para evitar a intersecção com Q durante o empurrão. Assim p' é o caminho desejado. ∎

Lema A.5 *Suponha que o arco PL-normal q satisfaça (α) do lema 2.2.6. Seja $p_0, p_1 : I \to |K|$ dois caminhos especiais tal que as imagens $p_0(I)$ e $p_1(I)$ não interceptam $q(0,1) \cup \tau$. Se p_0 e p_1 são homotópicos em $|K| - \tau$, então eles são especialmente homotópicos em $|K|$.*

Prova: Seja $\lambda : I \to I$ definido da forma

$$\lambda(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq s_1, \\ \frac{s-s_1}{s_2-s_1}, & \text{se } s_1 \leq s \leq s_2, \\ 1, & \text{se } s_2 \leq s \leq s_1. \end{cases}$$

Os caminhos p_0 e $p_0 \circ \lambda$ são ligados pela homotopia $h : I \times I \to |K|$ definida por

$$h(t,s) = p_0((1-t)s + t\lambda(s)),$$

que é fácil ver ser especial. Similarmente p_1 e $p_1 \circ \lambda$ são especialmente homotópicas. Seja $p : I \times I \to |K| - \tau$ uma homotopia ligando p_0 e p_1. Então $\{p_t \circ \lambda\}_{t \in I}$ é uma homotopia ligando $p_0 \circ \lambda$ e $p_1 \circ \lambda$. Esta é especial, pois $p_t \circ \lambda(s) = q(0) \neq q(s)$ sobre $(0, s_1]$, $p_t \circ \lambda(s) = q(1) \neq q(s)$ sobre $[s_2, 1)$, e sobre (s_1, s_2) nós temos $p_t \circ \lambda(s) \in |K| - \tau$ mas $q(s) \in \tau$. ∎

Lema A.6 *Seja $|K|$ um poliedro finito conexo sem ponto de corte local e q um arco PL-normal que satisfaz as condições (α) e (β) do lema 2.2.6. Se dois caminhos especiais $p_0, p_1 : I \to |K|$ são homotópicos, então eles são especialmente homotópicos.*

Prova: Em vista do lema A.4, podemos supor que $p_0[0,1]$ e $p_1[0,1]$ são disjuntos de $q(0,1) \cap \tau$. Escolha o ponto $a = q(0)$ como ponto base de $|K|$ e $|K| - \tau$. $p_0 \simeq p_1$ rel$\{0,1\}$ implica que $p_1 p_0^{-1} \simeq 1$ rel$\{0,1\}$ em $|K|$ (onde 1 representa o caminho constante).

Caso 1: dim$\tau \geq 3$. A inclusão $i : |K| - \tau \subset |K|$ induz um isomorfismo $i_* : \pi_1(|K| - \tau) \to \pi_1(|K|)$. Agora $p_0 \simeq p_1$ rel$\{0,1\}$ em $|K|$ se e somente se $p_0 \simeq p_1$ rel$\{0,1\}$ em $|K| - \tau$, e pelo lema A.5, p_0 e p_1 são especialmente homotópicos.

Caso 2: dim$\tau = 2$. Tome um ponto c sobre Bdτ que não é vértice de K e é diferente de $q(s_1)$ e $q(s_2)$, seja u o laço sobre Bdτ, com ponto base em c e que dá uma volta em torno de Bdτ. Pelo Teorema de Van Kampen $\pi_1(|K|)$ é isomorfo ao grupo quociente de $\pi_1(|K|-\tau)$ módulo o subgrupo normal gerado por u. Como uma consequência de $p_1p_0^{-1} \simeq 1$ rel$\{0,1\}$ em $|K|$, $p_1p_0^{-1}$ é homotópico em $|K| - \tau$ a um laço da forma $(v_1u^{k_1}v_1^{-1})(v_2u^{k_2}v_2^{-1})...(v_mu^{k_m}v_m^{-1})$, onde $k_1, ..., k_m$ são inteiros, $v_1, ..., v_m$ são caminhos em $|K| - \tau$ de a para c.

Para todo $j = 1, ..., m$ podemos achar um caminho PL v'_j, tendo somente um número finito de intersecções com Q, tal que $v'_j \simeq v_j$ rel$\{0,1\}$ em $|K| - \tau$. Então eliminamos as intersecções de v'_j com $q(0,1)$ exatamente como no lema A.4. Assim obtemos um caminho w_j em $|K| - (q(0,1) \cup \tau)$ tal que $w_j \simeq v_j$ rel$\{0,1\}$ em $|K| - \tau$.

Tome uma vizinhança W de a tal que $\overline{W} \cap \overline{\tau} = \emptyset$. A condição (β) torna possível modificar u em um laço μ em $|K| - (q(0,1) \cup \tau)$, com ponto base em c e tal que $\mu \simeq u$ rel$\{0,1\}$ em $|K| - \tau - W$. A figura 2.8 mostra como isto é feito.

Seja $p'_0 = (w_1\mu^{k_1}w_1^{-1})...(w_m\mu^{k_m}w_m^{-1})p_0$. Agora p_1 e p'_0 estão em $|K| - (q(0,1) \cup \tau)$, e eles são homotópicos em $|K| - \tau$. Pelo lema A.5 p_1 e p'_0 são especialmente homotópicos. Resta mostrar que p_0 e p'_0 são especialmente homotópicos.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $q[0, \varepsilon]$ está contida na vizinhança W de a escolhida acima. Em vista das técnicas de reparametrização usada na demonstração

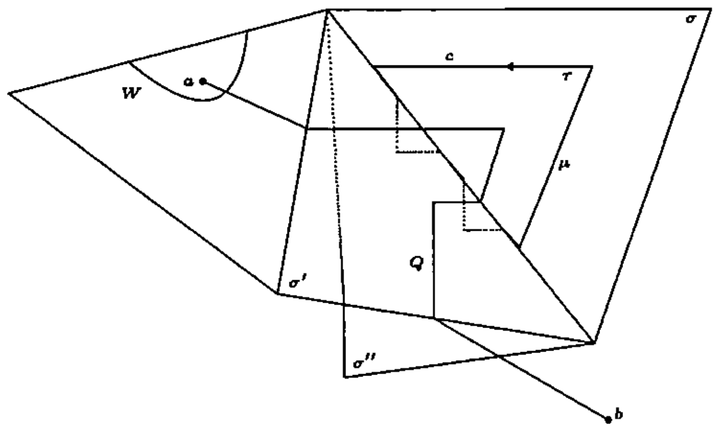

Figura 2.8:

do lema A.5, podemos supor que p_0 é constante sobre $[0,\varepsilon]$, e que p_0' é igual $(w_1\mu^{k_1}w_1^{-1})...(w_m\mu^{k_m}w_m^{-1})$ sobre $[0,\varepsilon]$ e igual à p_0 sobre $[\varepsilon,1]$. Como $\mu \simeq u$ rel$\{0,1\}$ em $|K|-\tau-W$ mas $u \simeq 1$ rel$\{0,1\}$ em $\overline{\tau} \subset |K|-W$, $\mu \simeq 1$ rel$\{0,1\}$ em $|K|-W \subset |K|-q(0,\varepsilon]$. Agora w_j está em $|K|-q(0,1) \subset |K|-q(0,\varepsilon]$, deste modo $(w_j\mu^{k_j}w_j^{-1}) \simeq w_jw_j^{-1}$ rel$\{0,1\}$ e $w_jw_j^{-1} \simeq 1$ rel$\{0,1\}$ em $|K|-q(0,\varepsilon]$. Daí , a parte de p_0' sobre $[0,\varepsilon]$ pode ser deformada a uma constante sem tocar $q(0,\varepsilon]$. Assim p_0 e p_0' são especialmente homotópicas. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Helga Schirmer, *A relative Nielsen number*, Pacific J. Math., 122 No.2 (1986), 459-473.

[2] Boju Jiang, *On the least number of fixed points*, Amer. J. Math., 102 No.4 (1980), 749-763.

[3] Boju Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Contemporary Mathematics v.14, Amer. Math. Society, Providence, Rhode Island, 1983.

[4] Xuezhi Zhao, *On minimal fixed point numbers of relative maps*, preprint, Department of Mathematics, Peking University, China.

[5] Robert F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Il., 1971.

[6] Kiang Tsai-han, *The Theory of Fixed Point Classes*, Springer-Verlag, 1989.

[7] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[8] D. L. Gonçalves e J. C. de Souza Kiihl, *Teoria do Índice*, 14° Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Poços de Caldas, 1983.