UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Teoria de oscilações para EDOs generalizadas e aplicações a outros tipos de equações

Marielle Aparecida Silva

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Marielle Aparecida Silva

Teoria de oscilações para EDOs generalizadas e aplicações a outros tipos de equações

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
Coorientador: Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

USP – São Carlos
Setembro de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A639t Ap. Silva, Marielle
Teoria de oscilações para EDOs generalizadas e aplicações a outros tipos de equações / Marielle Ap. Silva; orientador Márcia Federson; coorientador Marta Gadotti. -- São Carlos, 2021.
116 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Oscilação. 2. Equações diferenciais ordinárias generalizadas. 3. Soluções periódicas. 4. Espaços de Banach. 5. Integral de Kurzweil. I. Federson, Márcia , orient. II. Gadotti, Marta, coorient. III. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Marielle Aparecida Silva

Oscillation theory for generalized ODEs and applications to other types of equations

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
Co-advisor: Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

USP – São Carlos
September 2021

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Geraldo e Zulmira, que nunca mediram esforços para que eu realizasse meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Ponha Deus no início e Ele cuidará de tudo.

Obrigada Senhor por tudo que me concedeu até aqui. Agradeço por nunca ter me desamparado nesses anos longe de casa. Sabemos que a vida longe daqueles que amamos não é nada fácil e, o Senhor, nunca me faltou. Agradeço por ter tranquilizado o meu coração em dias difíceis. Agradeço por ter me dado força todos os dias para levantar e seguir firme minha jornada. Agradeço por ter ouvido os meus inúmeros pedidos, ainda quando menina, de me tornar uma professora em Matemática e, depois, doutora em Matemática. Obrigada por sempre me conceder o melhor. Sou muito grata por tudo que recebo de ti.

Em dias difíceis sempre me lembrava dos meus pais.

Quando a pós-graduação me exigia muito e eu me sentia no limite, lembrava-me dos meus pais e de tudo que fizeram por mim para que eu chegasse até aqui. Lembro-me, como se fosse hoje, o dia em que juntos vimos o meu nome na lista de aprovados no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Lavras. Eles vibraram e choraram comigo e, também, deixaram, por inúmeras vezes, de fazerem suas coisas para priorizar as minhas, sendo sempre muito atenciosos e compreensivos em todas as minhas ausências. Todos os domingos, meu pai, Geraldo, dizia o quanto sentia a minha falta nos almoços. Para confortá-lo eu respondia: já já estarei aí, pai. Acredito que ele não imaginava que, na verdade, era eu quem mais sentia falta daqueles deliciosos e calorosos almoços em família aos domingos e que muitas vezes tudo o que eu mais queria era almoçar com eles. Segundo minha querida e amada mãe, Zulmira, o sonho dela era poder mandar aquele prato de comida via Correios ou algo assim, e eu repetia: fique tranquila mãe, já já estarei aí para saborear do seu tempero. Mal sabia ela, que em vários dias, era intensa a saudade daquela comidinha mineira, que por sinal é a melhor de todas. Segundo Ruth Manus, "*a vida de quem inventa de voar é paradoxal, todo dia. É o peito eternamente dividido. É chorar porque queria estar lá, sem deixar de querer estar aqui*". Pai, Mãe, eu não tenho palavras para agradecê-los por tudo que fizeram por mim nesses anos de estudos e pesquisas e por tudo que abriram mão por minha causa. Amor de pai e de mãe não tem explicação. Vocês são as melhores pessoas que conheço. A bondade e a hulmidade de vocês me ensinaram tudo que preciso para seguir minha vida, que nem mesmo uma graduação, um mestrado ou um doutorado são capazes de ensinar. Ensinaram-me a ser uma boa pessoa e este é o melhor presente que eu poderia receber. Dedico a vocês esta conquista. Muito obrigada por

me amarem incondicionalmente, por entenderem minhas faltas e por sempre acreditarem em mim. Amo vocês.

Que sorte a minha em ter você como irmão.

Desde bem pequenina, ouvia a seguinte frase "*Dias de luta, dias de glória*", que é destaque de uma canção. Meu irmão, Daniel, insistia em ouvir repetidas vezes esta música, em colocar este letreiro em todos os lugares possíveis e, principalmente, em viver esta frase. Ele nunca me deixou desistir. Meu irmão sempre chegou primeiro e sempre abriu todas as portas para mim. Quando uma porta se fechou, foi ele quem me ajudou a procurar uma janela. Com meu irmão por perto era certo que, mesmo na escuridão total, juntos, acharíamos uma luz ao final do túnel. Daniel sempre soube o que fazer para que eu me sentisse segura. Ajudou-me a perder o medo de voar e, mesmo quando esse medo chegou bem perto, foi ele quem me ajudou a jogá-lo para bem longe. Na graduação, moramos juntos e foi a primeira vez que eu pude entender realmente o sentido da frase tão amada por ele. Lutamos juntos por quase quatro anos e tivemos nossos dias gloriosos. Meu irmão se tornou um dos meus melhores amigos e meu segundo pai. Antes de ingressar no mestrado, não deixou que escapasse de mim sequer uma oportunidade. EL, você me ensinou tudo sobre *lutar, persistir e levantar*. Se não fosse por você, certamente esta caminhada teria sido mais longa e mais difícil. Obrigada meu irmão-pai, por tudo que sempre fez e ainda fará por mim. Tenho muito orgulho do homem que se tornou e de todas as suas conquistas. Com você eu aprendi uma lição valiosa: pessoas como nós, precisam lutar incansavelmente para ocupar seus espaços e os dias de glória chegarão. Te amo, EL. Esta conquista também é sua.

Dentre tudo que a Matemática me proporcionou, conhecer você, certamente, foi o melhor.

Acho que nunca passou pela minha cabeça, que neste Instituto encontraria o Victor. Na verdade, acho que nunca imaginei namorar um matemático. Sou eternamente grata, por ter te encontrado. Sou grata por toda a força que me deu durante a pós-graduação. Passamos por tantas situações difíceis juntos, que nem consigo acreditar que superamos todas elas. Muito obrigada por me ajudar, matematicamente e piscicologicamente, nas disciplinas que cursei durante o mestrado e doutorado. Você é incrível, sempre deixou de lado tudo que estivesse fazendo para me auxiliar. Sem você, com certeza, minha trajetória aqui no ICMC, teria sido bem mais difícil. Seus bilhetinhos pré-provas e suas cervejas pós-provas, deixaram minha vida mais alegre e menos complicada. Nem sei como te agradecer por tudo que fez por mim nesses anos. Obrigada por me suportar nos dias de tensão. Sei o quanto posso ser chata. Obrigada por me ajudar a resolver os problemas que surgiram. Sei que não foram poucos. Obrigada por acreditar em mim como pesquisadora matemática. Obrigada por voar junto comigo e nunca podar minhas asas. Obrigada por todos os conselhos e por todos os dias que me levou chocolates e balinhas de goma. Obrigada por cada mensagem de apoio. Obrigada por nunca hesitar em me ajudar. E, muito obrigada por toda sua contribuição nesta tese de doutorado. Senhor Barbosa, você é o matemático mais maravilhoso que tive a sorte de conhecer. Te amo infinito.

Tive a sorte e a honra de trabalhar com excelentes professores e pesquisadores.

Lembro-me como se fosse hoje, o dia em que conheci Márcia Federson. Foi incrível a maneira como ela me tratou. Dedicou a mim uma atenção sem igual, me mostrando livros sobre integração não-absoluta e sugestões de artigos. Se não bastasse seu verdadeiro entusiasmo em me orientar sem ao menos me conhecer ou ter informações sobre o meu cúrriculo, ainda mostrou interesse em submeter um pedido de bolsa FAPESP. Há aproximadamente seis anos, ela acreditou em uma menina, com um sotaque mineiro, recém chegada ao ICMC e que não apresentava nenhum conhecimento sobre integrais não-absolutas e equações diferenciais generalizadas. Essa é a Márcia Federson, aquela que sempre acreditará e confiará em seu potencial. Sou muito grata a ela por tudo e, principalmente, por sempre ter acredito em mim, até mesmo em momentos difíceis, como o de cancelamento de bolsa. Márcia, tive muita sorte em te ter como orientadora e amiga nesses anos entre mestrado e doutorado. Obrigada por me orientar, me aconselhar e por contribuir significativamente para eu me tornanasse uma pesquisadora matemática. Hoje, posso afirmar que me sinto preparada. Sinto-me preparada para lecionar em uma Universidade e mais ainda, para desenvolver pesquisas e orientar alunos. Obrigada por ser essa orientadora maravilhosa e por acreditar em meu potencial.

Da série mulheres sensacionais e ótimas pesquisadoras, além de Márcia Federson, temos a ícone Marta Gadotti. Martinha é uma pessoa maravilhosa, que vem contribuindo em nossos trabalhos desde o mestrado. Minha coorientadora de mestrado e coorientadora de doutorado, muito obrigada por toda sua ajuda e dedicação nesses anos de pesquisa matemática. Sei o quanto você se dedicou a este trabalho, como em outros que desenvolvemos juntas. Foram várias viagens de Rio Claro a São Carlos e de Piracicaba a São Carlos. É impossível te agradecer por todo seus esforços para estar presente nos seminários e discussões. Obrigada por me orientar, ouvir meus problemas e me aconselhar. Obrigada pelos almoços e cafés. Você, além de uma excelente professora e pesquisadora é uma mulher incrível. Serei eternamente grata por tudo que fez por mim e por esta tese.

Não poderia deixar de agradecer a um outro pesquisador brilhante, que tem grande contribuição neste trabalho: o incrível Everaldo Bonotto. Durante o desenvolvimento da pesquisa sobre oscilação de soluções de EDOs generalizadas em espaços de Banach, surgiu a ideia de trabalhar com sistemas dinâmicos e, depois, aplicar os resultados obtidos em equações generalizadas. Senti-me totalmente perdida, uma vez que sistemas não é minha área de pesquisa e poucos conhecimentos eu tinha sobre este tema. Everaldo não pensou duas vezes em aceitar meu convite para assistir aos seminários dedicados a este estudo. Em seguida, passamos a trabalhar juntos e desenvolvemos toda a seção dedicada à oscilação de soluções de EDOs generalizadas em espaços de Banach. Mais tarde, o capítulo sobre periodicidade de soluções.

Muito obrigada Everaldo, por toda sua contribuição neste trabalho e por sua disponibilidade em ajudar. Sou muito grata a você por todos os seminários e tempo dedicados à minha pesquisa de doutorado. Certamente, sem sua ajuda, não teríamos conseguido ir tão longe.

Agradeço também ao professor Rodolfo Collegari por sua grande contribuição no capítulo sobre soluções periódicas, por toda a ajuda nesta tese e nos trabalhos que desenvolvemos juntos.

Não me esquecerei de todos os professores que lecionaram disciplinas durante minha pós-graduação. Muito obrigada pela dedicação e ensinamentos. Um bom matemático, precisa, primeiramente, de uma bagagem grande e pesada de conhecimento matemático e, vocês, ajudaram a deixar minha bagagem ainda mais pesada. Obrigada pelos atendimentos, por sanarem minhas dúvidas e me receberem em suas salas (tenho consciência do quanto era rotineiro). Meus sinceros agradecimentos a Adalberto Bergamasco, Behrooz Mirzaii, Daniel Smania, Daniel Levcovitz, Denise de Mattos, Farid Tari e Paulo Dattori.

Tive a sorte de contar com os amigos.

Minha jornada aqui no Instituto teria sido bem complicada e triste, se não pudesse contar com os amigos. Primeiramente, queria agradecer minha grande e eterna amiga Sany, por ter tido a paciência de ouvir minhas reclamações e queixas da pós-graduação, nunca me deixando desistir e sempre me incentivando a continuar firme na luta. Obrigada gatinha, por ser tão maravilhosa e por ter me apoiado nesses anos todos de estudos.

Gostaria de agradecer os amigos que conquistei ao longo da minha caminhada aqui no ICMC. Obrigada pelos almoços às 11 horas em ponto no bandejão. Obrigada por não brigarem comigo por falar muito e, eventualmente, atrapalhar o bom funcionamento dos estudos na salinha. Obrigada pelos cafés, pelas risadas e pelas fofocas. Obrigada pela ajuda em disciplinas e presenças nos seminários da pós. Em especial, obrigada pelas cervejas e risadas, Ana Maria e Fernanda, vocês duas deixaram a jornada mais leve e mais divertida.

Também, não poderia deixar de agradecer as minhas colegas de república: Luciana, Camila, Joice e Thais, que dividiram a vida e os problemas comigo ao longo dos anos entre mestrado e doutorado. Meninas, obrigada por todos os momentos e por fazerem eu me sentir em casa na rep. do seu Zé. Em especial, agradeço a dona Luciana Camillo, por toda a amizade e carinho. Lu, você é uma pessoa maravilhosa.

Tive a sorte de fazer parte deste Instituto.

Quando criança, nunca passou pela minha cabeça que um dia seria mestre, muito menos doutora em Matemática. O plano era me tornar uma professora de Matemática e pronto. Mais que os títulos, nunca imaginei fazer parte de um Instituto tão conhecido e renomado como este. Sou grata ao ICMC por ter me recebido, por ter me concedido uma formação excelente e por fazer de mim, uma doutora em Matemática.

Obrigada a todos os funcionários do ICMC, por manterem a casa em ordem e bem estruturada para que eu pudesse estudar e desenvolver a minha pesquisa. Agradeço as faxineiras do bloco de Análise, por manterem a sala sempre limpa e organizada. Agradeço aos técnicos de informática, por me socorrem quando o computador apresentou problemas. Aos porteiros e a todos os outros trabalhadores deste Instituto. Em especial, quero agradecer a Lu, por sempre me receber com um sorriso lindo no rosto todas as manhãs antes de me entregar as chaves da salinha e, também, por sempre bater um papo legal comigo.

Tive a sorte de ser bolsista.

Por fim, sou grata a CAPES, pelo apoio financeiro. Diante dessa crise que vive nosso país, em que bolsas de mestrado e doutorado parecem estar cada vez mais próximas de um sonho utópico, tive a sorte de ser bolsista e ter condições de me manter em São Carlos. Espero que a situação atual mude e vários outros agradecimentos à CAPES possam ser feitos em dissertações e teses, porque um país que não valoriza a educação é um país sem esperança.

"Educação não transforma o mundo.
Educação muda as pessoas.
Pessoas mudam o mundo."
(Paulo Freire)

RESUMO

AP. SILVA, M. **Teoria de oscilações para EDOs generalizadas e aplicações a outros tipos de equações**. 2021. 116 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Este trabalho tem dois objetivos principais. O primeiro diz respeito à oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias generalizadas em que as funções envolvidas assumem valores em um espaço de Banach qualquer. Para este fim, introduzimos a definição de processos de evolução regrados. O segundo objetivo é tratar do comportamento periódico de soluções desta classe de equações generalizadas. Apresentamos resultados que garantem a existência e unicidade de soluções periódicas e provamos um teorema do tipo Floquet para EDOs generalizadas lineares.

O ganho de se obter resultados sobre oscilações e periodicidade para EDOs e outros tipos de equações a partir das EDOs generalizadas está no fato de que, para as últimas, as funções envolvidas podem ter muitas descontinuidades e/ou podem não ser de variação limitada, já que se trata de uma equação que envolve a integral não-absoluta de Kurzweil-Henstock. Um exemplo típico de uma função que pode estar envolvida em EDO tratada via EDOs generalizadas é a função de variação ilimitada $f(t) = \dot{F}(t)$, em que $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $F(t) = t^2 \mathrm{sen} \frac{1}{t^2}$, para $0 < t \leq 1$, e $F(0) = 0$. Esta é uma função que não é Riemann nem Lebesgue integrável, mas é Kurzweil-Henstock integrável.

Os resultados obtidos nesta tese deram origem a quatro artigos científicos, a saber

(i) Oscillation and nonoscillation criteria for impulsive delay differential equations with Perron integrable coefficientes. (Aceito para a publicação na revista *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*. Veja (AP. SILVA; FEDERSON; GADOTTI, 2021));

(ii) Oscillatory solutions of measure differential equations with several delays and generalized ODEs. (Submetido para a publicação. Veja (AP. SILVA; FEDERSON, 2021));

(iii) On periodic solutions of abstract generalized ODEs and applications to measure differential equations. (Submetido para a publicação. Veja (AP. SILVA *et al.*, 2021));

(iv) Oscillation theory for regulated linear semigroups and regulated linear processes with application to generalized ODEs. (Preprint, 2021. Veja (AP. SILVA; BONOTTO; FEDERSON, 2021));

e a um capítulo no livro Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces, Wiley, Hoboken, NJ, 2021. Veja (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

Palavras-chave: Oscilação, Equações diferenciais ordinárias generalizadas, Soluções periódicas, Espaços de Banach, Integral de Kurzweil.

ABSTRACT

AP. SILVA, M. **Oscillation theory for generalized ODEs and applications to other types of equations**. 2021. 116 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

This work has two main objectives. The first concerns the oscillation of solutions of generalized ordinary differential equations in which the functions involved assume values in an arbitrary Banach space. For this purpose, we introduce the definition of regulated evolution processes. The second objective is to deal with the periodic behavior of solutions in this class of generalized equations. We present results that guarantee the existence and uniqueness of periodic solutions and we prove a Floquet-type theorem for linear generalized ODEs.

The gain of getting results on oscillations and periodicity for ODEs and other types of equations from the generalized ODEs lies on the fact that, for the latter, the functions involved may have many discontinuities and/or may not be of bounded variation, since it is an equation involving the non-absolute integral of Kurzweil-Henstock. A typical example of a function which is neither Riemann nor Lebesgue integrable, but it is Kurzweil-Henstock integrable is the function of unbounded variation $f(t) = \dot{F}(t)$, where $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, with $F(t) = t^2 \sin \frac{1}{t^2}$, for $0 < t \leq 1$, and $F(0) = 0$.

The results obtained in this thesis gave rise to four scientific articles, namely

(i) Oscillation and nonoscillation criteria for impulsive delay differential equations with Perron integrable coefficientes. (Accepted for publication in the journal *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*. See (AP. SILVA; FEDERSON; GADOTTI, 2021));

(ii) Oscillatory solutions of measure differential equations with several delays and generalized ODEs. (Submitted for publication. See (AP. SILVA; FEDERSON, 2021));

(iii) On periodic solutions of abstract generalized ODEs and applications to measure differential equations. (Submitted for publication. See (AP. SILVA *et al.*, 2021));

(iv) Oscillation theory in generalized ODEs in Banach spaces. (Preprint, 2021. See (AP. SILVA; BONOTTO; FEDERSON, 2021));

and to a chapter in the book Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces, Wiley, Hoboken, NJ, 2021. See (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

Keywords: Oscillation, Generalized ordinary differential equations, Periodic solutions, Banach spaces, Kurzweil integral.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Em 1957, J. Kurzweil introduziu a noção de equações diferenciais ordinárias generalizadas para funções que tomam valores em espaços euclidianos e de Banach. Seu principal objetivo era generalizar certos resultados sobre dependência contínua de soluções de equações diferenciais ordinárias (EDOs) em relação aos dados iniciais. Estas equações generalizadas, receberam o nome de equações diferenciais ordinárias generalizadas. Escreveremos, abreviadamente, EDOs generalizadas. Veja (KURZWEIL, 1957; KURZWEIL, 2012; SCHWABIK, 1992). Este conceito provou ser útil para lidar com equações diferenciais em medida, equações com impulsos, equações em escalas temporais, equações integrais, entre outras.

Esta generalização do conceito de EDO necessita da noção de integral de Perron generalizada ou integral de Kurzweil, como é chamada hoje em dia. Esta integral é mais geral que as integrais de Riemann e de Lebesgue, por exemplo. Veja (SCHWABIK, 1992; BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

Uma série de trabalhos, tais como (AFONSO *et al.*, 2012; AFONSO *et al.*, 2013; AFONSO *et al.*, 2014; FEDERSON *et al.*, 2019b; FEDERSON; SCHWABIK, 2006; FEDERSON; SCHWABIK, 2009), evidenciaram a relação entre as EDOs generalizadas e outros tipos de equações, em especial, equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos, os quais podem ser considerados em tempo pré-fixado ou em tempo variável. Equações diferenciais funcionais do tipo neutro em medida também podem ser identificadas com EDOs generalizadas. Veja (FEDERSON *et al.*, 2019a). Em (FEDERSON *et al.*, 2019a) e em outros trabalhos, como por exemplo (FEDERSON *et al.*, 2019b; FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2013; FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012), são apresentados estudos qualitativos de EDOs generalizadas e, como aplicação, são obtidos resultados sobre propriedades qualitativas de equações diferenciais funcionais com retardamento em medida (EDFRs em medida).

Nosso interesse, neste trabalho, é propor teorias de oscilações e periodicidade para EDOs generalizadas, em que as funções envolvidas possam assumir valores em um espaço de

Banach. Como consequência, obtemos critérios de oscilação e não oscilação e resultados sobre a existência e unicidade de soluções periódicas para uma classe bem maior de funções do que aquelas usualmente consideradas nas teorias de equações diferenciais clássicas. Isto é possível porque trabalharemos com a integral de Kurzweil nas formas integrais das equações diferenciais que serão objetos de nossos estudos. Surpreendemente, no decorrer de nossas pesquisas, conseguimos propor não somente uma teoria, mas algumas teorias de oscilações e, também, não somente resultados para a classe de EDOs generalizadas, uma vez que estabelecemos critérios de oscilação e não oscilação para processos de evolução lineares regrados e semigrupos lineares regrados. Neste sentido, este trabalho apresenta uma elegante parceria entre as áreas de Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos com significativas contribuições na teoria de oscilação em espaços de Banach.

O segundo capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo da integral de Kurzweil e, como caso particular, tratamos, também, da integral de Perron-Stieltjes. Apresentamos propriedades e resultados importantes destas integrais. Também abordamos a teoria de equações diferenciais funcionais em medida, que serão fundamentais nas aplicações e exemplos.

No Capítulo 3, demonstramos critérios de oscilação e não oscilação de soluções de equações diferenciais com retardos e impulsos. Em (YAN, 2001), o autor estabelce critérios de oscilação e não oscilação para uma classe de equações diferenciais com argumento avançado, em que as funções envolvidas tomam valores em $\mathbb{R}$ e são contínuas por partes. Neste capítulo, propomos uma teoria de oscilação mais geral que a apresentada em (YAN, 2001) e tratamos da classe de equações diferenciais impulsivas com argumento retardado, em que as funções envolvidas assumem valores em $\mathbb{R}^n$. Os resultados apresentados neste capítulo são inéditos e podem ser encontrados em (AP. SILVA; FEDERSON; GADOTTI, 2021), para o caso unidimensional e, em (AP. SILVA; FEDERSON, 2021), para o caso n-dimensional.

A definição e propriedades básicas de EDOs generalizadas são apresentadas no Capítulo 4. Neste capítulo, trazemos, também, a teoria de equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares homogêneas e lineares não homogêneas. Alguns exemplos são dados para evidenciar o quanto estas classes de equações são mais gerais que as outras estudadas nas teorias clássicas.

O Capítulo 5 tem por objetivo definir conceitos distintos de oscilações para soluções de EDOs generalizadas, algo que ainda não tinha sido proposto na literatura. Neste capítulo, apresentamos critérios de oscilação para EDOs generalizadas lineares em que as funções envolvidas assumem valores em $\mathbb{R}^n$ e, também, em um espaço de Banach qualquer. Para obter resultados de oscilação, utilizamos a teoria de sistemas dinâmicos e propomos um novo conceito: processos de evolução regrados. Com esta nova definição, foi possível propor dois tipos de oscilações em espaços de Banach, a saber, oscilação do tipo pullback e oscilação forte. Também provamos critérios de oscilação e não oscilação com respeito a processos de evolução regrados e para pontos em espaços de Banach, utilizando estes novos conceitos de oscilação. Finalmente, através dos resultados obtidos para processos de evolução regrados e semigrupos regrados, conseguimos caracterizar as soluções de uma EDO generalizada linear no que diz respeito à oscilação (pullback e forte) de suas soluções. Todos os resultados apresentados neste capítulo estão incluídos no artigo (AP. SILVA; BONOTTO; FEDERSON, 2021).

O Capítulo 6 é dedicado ao estudo de soluções periódicas de EDOs generalizadas. Primeiramente, apresentamos resultados de periodicidade de soluções para EDOs generalizadas em que as funções envolvidas assumem valores em $\mathbb{R}^n$ e provamos uma generalização do teorema de Floquet, da teoria clássica de EDOs, para EDOs generalizadas. Em seguida, tratamos do caso em que as funções assumem valores em espaços de Banach quaisquer. Provamos um resultado que fornece condições necessárias e suficientes para a existência de soluções periódicas e construímos uma teoria de Floquet para a classe de EDOs generalizadas lineares em que as funções envolvidas tomam valores em um espaço de Banach. Aplicamos os resultados obtidos às equações integrais do tipo Volterra-Stieltjes e, como consequência, provamos um teorema do tipo Floquet para esta classe de equações. Todos os resultados apresentados neste capítulo são inéditos e encontram-se no artigo (AP. SILVA *et al.*, 2021) e no livro (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Na primeira parte deste capítulo, apresentamos a teoria básica sobre a integral de Kurzweil. Como casos particulares da integral de Kurzweil, mencionamos resultados para as integrais de Perron e de Perron-Stieltjes. A segunda seção é dedicada às equações diferenciais funcionais em medida e algumas de suas propriedades. O conteúdo deste capítulo se baseia, principalmente, nas referências (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021) e (SCHWABIK, 1992).

2.1 As integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes

Definida em 1854, a integral devida a Bernhard Riemann é uma ferramenta clássica utilizada até hoje em muitos problemas. É de nosso conhecimento que funções ilimitadas em intervalos compactos não são Riemann integráveis. Além disso, em se tratando do Teorema Fundamental do Cálculo, é necessário exigir a continuidade das funções para que suas derivadas sejam Riemann integráveis. Estas são algumas desvantagens que aparecem quando trabalhamos com a integral de Riemann.

Em 1902, Henri Lebesgue apresentou um conceito de integral que possibilitou resultados envolvendo limites, os tão conhecidos Teoremas de Convergências e o Lema de Fatou. A teoria de integração no sentido de Lebesgue generalizou o conceito da integral de Riemann, mas ainda exigiu certa continuidade das funções, uma vez que no Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue, a derivada de uma função f será Lebesgue integrável, se f for absolutamente contínua. Neste cenário, uma pergunta natural surge:

Seria possível construir uma integral em que toda derivada de uma função seja integrável?

As primeiras respostas à esta pergunta vieram nos anos 1912 e 1914 por Arnaud Denjoy e Oscar Perron respectivamente. Denjoy estava interessado em um conceito que seria capaz de integrar funções como por exemplo $f(x) = x^{-1}\,\text{sen}(x^{-3})$, se $x \in (0,1]$ e $f(0) = 0$, que não é uma função Lebesgue integrável em $[0,1]$. Mais tarde, percebeu-se que as teorias de integração propostas por Denjoy e Perron eram equivalentes.

Em 1957, Jaroslav Kurzweil, em seus artigos (KURZWEIL, 1957; KURZWEIL, 1958a; KURZWEIL, 1958b; KURZWEIL, 1959), construiu uma integral a partir de dificuldades presentes na teoria das equações diferenciais ordinárias. Este novo conceito de integral foi capaz de englobar funções descontínuas e ainda de variação ilimitada, ou seja, funções altamente oscilatórias. Um exemplo clássico de função Kurzweil integrável e altamente oscilatória é a função f definida no intervalo $[0,1]$ a valores reais tal que $f(t) = \dot{F}(t)$ (derivada de F), em que $F(t) = t^2\text{sen}(t^{-2})$ em $(0,1]$ e $F(0) = 0$.

De forma independente, em 1961, Ralph Henstock, introduziu o mesmo conceito de integral para funções de uma variável. Por isso, esta integral, em muitos trabalhos, é referida como a integral de Kurzweil-Henstock. As funções que são integráveis no sentido de Kurzweil-Henstock não são necessariamente absolutamente integráveis. Mas qualquer função absolutamente integrável, também é Kurzweil-Henstock integrável. Para mais detalhes, o leitor pode consultar os trabalhos (GORDON, 1994; KURTZ; SWARTZ, 2011; LEE, 2011).

No que segue, passamos a descrever a teoria de integração de Kurzweil.

Sejam X e Y espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respectivamente. Por $L(X,Y)$, denotamos o conjunto de todas as transformações lineares limitadas de X em Y. No caso particular em que $X = Y$, escrevemos apenas $L(X)$ ao invés de $L(X,X)$. Por simplicidade, usaremos a notação $\|\cdot\|$ para representar a norma em um espaço de Banach qualquer.

Antes de apresentarmos a definição da integral de Kurzweil, precisaremos de alguns conceitos.

Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. Uma **partição marcada** (também chamada de divisão marcada) do intervalo $[a,b]$ é uma coleção finita de pares, $D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]), i = 1, \ldots, |D|\}$, tal que $a = t_0 < t_2 < \ldots < t_{|D|} = b$ e $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, |D|$, em que $|D|$ denota o número de subintervalos no qual a partição marcada é dividida. Os elementos τ_i são ditos **marcas** dos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, |D|$, de $[a,b]$.

Uma função positiva $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ é chamada de **calibre** de $[a,b]$. Sejam $[a,b]$ um intervalo e δ um calibre de $[a,b]$. Uma partição marcada

$$D = \{t_0, \tau_1, t_1, \ldots, t_{|D|-1}, \tau_{|D|}, t_{|D|}\}$$

será dita **δ-fina**, se tivermos

$$[t_{i-1}, t_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, |D|$.

O próximo exemplo, emprestado de (SOUTO, 2013), Exemplo 3.1.1, mostra que para um dado calibre δ e uma divisão de $[0,1]$, nem toda marca tornará a partição marcada δ-fina.

Exemplo 2.1.1. Considere a função calibre $\delta\colon [0,1] \to (0,\infty)$ dada por

$$\delta(t) = \begin{cases} t, & \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

e a seguinte partição $D = \left\{ \left[0,\frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2},1\right] \right\}$ de $[0,1]$. Note que nem toda partição marcada será δ-fina. De fato,

- a partição marcada $D_1 = \left\{ \left(0,\left[0,\frac{1}{3}\right]\right), \left(\frac{1}{2},\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\right), \left(1,\left[\frac{1}{2},1\right]\right) \right\}$ é δ-fina;
- a partição marcada $D_2 = \left\{ \left(\frac{1}{10},\left[0,\frac{1}{3}\right]\right), \left(\frac{1}{2},\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\right), \left(1,\left[\frac{1}{2},1\right]\right) \right\}$ não é δ-fina, pois
$$\left[0,\frac{1}{3}\right] \not\subseteq \left[\frac{1}{10} - \delta\left(\frac{1}{10}\right), \frac{1}{10} + \delta\left(\frac{1}{10}\right)\right] = \left[0,\frac{1}{5}\right].$$

O lema abaixo é de extrema importância na definição da integral de Kurzweil, pois garante a existência de uma partição marcada δ-fina para um dado calibre δ em $[a,b]$. Sua demonstração é análoga à prova do Lema 1.4 apresentado em (SCHWABIK, 1992).

Lema 2.1.2 (de Cousin). Dado um calibre δ de $[a,b]$, existe uma partição marcada δ-fina de $[a,b]$.

Agora, estamos em condições de apresentar a definição da integral de Kurzweil de uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$.

Definição 2.1.3. Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função. Diremos que U é **Kurzweil integrável** sobre $[a,b]$, se existir $I \in X$ com a seguinte propriedade: dado $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ de $[a,b]$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|D|} [U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,t_{i-1})] - I \right\| < \varepsilon$$

para toda partição marcada δ-fina de $[a,b]$, $D = \{(\tau_i,[t_{i-1},t_i]), i = 1,\ldots,|D|\}$. O elemento $I \in X$ será chamado de **integral de Kurzweil** de U sobre o intervalo $[a,b]$ e será denotado por $I = \int_a^b DU(\tau,t)$. Por $\mathscr{K}([a,b],X)$ denotaremos o espaço das funções de $[a,b] \times [a,b]$ em X que são Kurzweil integráveis.

Observação 2.1.4. O Lema de Cousin garante a boa definição da integral de Kurzweil. Além disso, é fácil verificar que a integral de Kurzweil, quando existir, será única.

Observação 2.1.5. Quando $\int_a^b DU(\tau,t)$ existir, definiremos

$$\int_b^a DU(\tau,t) = -\int_a^b DU(\tau,t)$$

e usaremos a convenção $\int_a^b DU(\tau,t) = 0$ quando $a = b$.

Exemplo 2.1.6. Sejam $f:[a,b]\to X$ e $U:[a,b]\times[a,b]\to X$ funções em que U é dada por $U(\tau,t)=f(\tau)t$. Neste caso particular, para uma partição $D=\{(\tau_i,[t_{i-1},t_i]), i=1,\dots,|D|\}$ de $[a,b]$, temos

$$\sum_{i=1}^{|D|}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})]=\sum_{i=1}^{|D|}f(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$$

e, quando existir, a integral de Kurzweil $\int_a^b DU(\tau,t)$ coincidirá com a **integral de Perron**, a qual denotamos simplesmente por

$$\int_a^b f(s)ds.$$

Mais geralmente, podemos considerar o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.7. Seja $U:[a,b]\times[a,b]\to X$ uma função dada por $U(\tau,t)=F(t)g(\tau)$ com $F:[a,b]\to L(X)$ e $g:[a,b]\to X$. Neste caso particular, para uma partição $D=\{(\tau_i,[t_{i-1},t_i]), i=1,\dots,|D|\}$ de $[a,b]$, temos

$$\sum_{i=1}^{|D|}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})]=\sum_{i=1}^{|D|}[F(t_i)-F(t_{i-1})]g(\tau_i)$$

e a integral de Kurzweil $\int_a^b DU(\tau,t)$, quando existir, coincidirá com a **integral de Perron-Stieltjes**, a qual denotamos por

$$\int_a^b d[F(s)]g(s).$$

Muitas vezes, precisamos que um certo ponto $c\in[a,b]$ seja uma marca específica de uma partição marcada δ-fina de $[a,b]$. Para isto, basta tomarmos δ tal que $c\notin(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))$ sempre que $\tau\neq c$ e, assim, é suficiente que tenhamos $\delta(\tau)\leq|\tau-c|$ se $\tau\neq c$. Nestas condições, diremos que δ é c**-especial** ou que c é especial em relação a δ.

Observação 2.1.8. Para estendermos a integral de Kurzweil a intervalos ilimitados, precisamos definir as δ-vizinhanças de $-\infty$ e ∞. Tomemos $\delta(-\infty), \delta(\infty)>0$ arbitrários e consideremos $\left[-\infty,-\frac{1}{\delta(-\infty)}\right)$ e $\left(\frac{1}{\delta(\infty)},\infty\right]$. Podemos afirmar que $-\infty$ e ∞ são especiais em relação a qualquer calibre definido em $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, a reta estendida. De fato, sejam δ um calibre definido em $[-\infty,\infty]$ e $D=\{(\tau_i,[t_{i-1},t_i]), i=1,\dots,n\}$ uma partição marcada δ-fina. Seja $[t_{n-1},\infty]$ o último intervalo de D. Assim, $\tau_n\in[t_{n-1},\infty]\subset\left(\frac{1}{\delta(\infty)},\infty\right]$, pois D é δ-fina. Se $\tau_n\neq\infty$, então $\tau_n+\delta(\tau_n)<\infty$, o que contradiz a sentença anterior. Portanto $\tau_n=\infty$, ou seja, δ é ∞-especial. Analogamente, demonstra-se que δ é $(-\infty)$-especial. Para mais detalhes, o leitor pode consultar (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

Apresentaremos, agora, algumas propriedades da integral de Kurzweil de $U:[a,b]\times[a,b]\to X$, cujas demonstrações podem ser encontradas em (SCHWABIK, 1992), para o caso em que X possui dimensão finita. No caso de X possuir dimensão infinita, as demonstrações, seguem de modo análogo. Caso contrário, incluímos a demonstração ou damos referência de onde encontrá-la.

Teorema 2.1.9. Sejam $U,V \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e $c_1,c_1 \in \mathbb{R}$. Então $c_1U + c_2V \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e teremos

$$\int_a^b D[c_1U(\tau,t)+c_2V(\tau,t)] = c_1\int_a^b DU(\tau,t)+c_2\int_a^b DV(\tau,t).$$

Teorema 2.1.10. Se $c \in (a,b)$ e $U : [a,b]\times[a,b] \to X$ for tal que $U \in \mathscr{K}([a,c],X)$ e $U \in \mathscr{K}([c,b],X)$, então $U \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e valerá a igualdade

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^c DU(\tau,t)+\int_c^b DU(\tau,t).$$

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Hake para a integral de Kurzweil.

Teorema 2.1.11. Seja $U : [a,b]\times[a,b] \to X$ uma função tal que $U \in \mathscr{K}([a,c],X)$ para todo $c \in [a,b)$ e suponha que o limite

$$\lim_{c\to b^-}\left[\int_a^c DU(\tau,t) - U(b,c)+U(b,b)\right] = I$$

exista. Então $U \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e valerá a igualdade

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I.$$

Observação 2.1.12. Vale um resultado análogo ao teorema acima para o caso em que $U \in \mathscr{K}([c,b],X)$ para todo $c \in (a,b]$. Assim, fica claro que as integrais de Kurzweil "impróprias" também são integrais de Kurzweil, ou seja, a integral de Kurzweil é invariante por extensões de Cauchy. (Veja (SCHWABIK, 1992)).

Observação 2.1.13. A integral de Kurzweil também é linear e aditiva em intervalos subjacentes.

As provas dos próximos resultados para o caso em que X é um espaço de Banach de dimensão finita podem ser encontradas em (SCHWABIK, 1992) no Lema 1.13 e no Teorema 1.16 respectivamente. As provas correspondentes para X com dimensão infinita são análogas.

Lema 2.1.14 (Saks-Henstock). Seja $U : [a,b]\times[a,b] \to X$ uma função tal que $U \in \mathscr{K}([a,b],X)$. Dado $\varepsilon > 0$, suponha que exista um calibre δ de $[a,b]$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{|D|}[U(\tau_i,t_i)-U(\tau_i,t_{i-1})] - \int_a^b DU(\tau,t)\right\| < \varepsilon$$

para toda partição marcada δ-fina $D = \{(\tau_i,[t_{i-1},t_i]), i = 1,\ldots,|D|\}$ de $[a,b]$. Se

$$a \le \beta_1 \le \xi_1 \le \gamma_1 \le \beta_2 \le \xi_2 \le \gamma_2 \le \ldots \le \beta_m \le \xi_m \le \gamma_m \le b$$

for tal que $[\beta_i,\gamma_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$, para $i = 1,2,\ldots,m$, então

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\left\{[U(\xi_i,\gamma_i)-U(\xi_i,\beta_i)] - \int_{\beta_i}^{\gamma_i} DU(\tau,t)\right\}\right\| < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.15. Sejam $U : [a,b] \times [a,b] \to X$uma função tal que $U \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e $c \in [a,b]$. Então

$$\lim_{s\to c}\left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\right] = \int_a^c DU(\tau,t)$$

e

$$\lim_{s\to c}\left[\int_s^b DU(\tau,t) + U(c,s) - U(c,c)\right] = \int_c^b DU(\tau,t).$$

Observação 2.1.16. O Teorema 2.1.15 nos mostra que a função

$$s \in [a,b] \mapsto \int_a^s DU(\tau,t),$$

isto é, a integral indefinida de U, não é necessáriamente contínua. Tal integral indefinida será contínua em $c \in [a,b]$ se, e somente se, a função $U(c,\cdot) : [a,b] \to X$ for contínua em c. Em particular, a integral indefinida de Perron-Stieltjes não é necessariamente contínua.

Uma classe de funções importante e que nos será muito útil é a classe de funções regradas que passamos a descrever. Uma função $f : [a,b] \to X$ será dita **regrada**, se os limites laterais $\lim_{s\to t^-} f(s) = f(t^-) \in X$, para $t \in (a,b]$ e $\lim_{s\to t^+} f(s) = f(t^+) \in X$, para $t \in [a,b)$ existirem. Neste caso, escreveremos $f \in G([a,b],X)$. Se f for regrada e contínua à esquerda, escreveremos $f \in G^-([a,b],X)$. Funções regradas definidas em intervalos ilimitados também podem ser consideradas. Em particular, o espaço de todas as funções regradas $f : J \to X$, com J um intervalo qualquer da reta real, é denotado por $G(J,X)$. Chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: $G(J,X) \cap B(J,X)$, em que $B(J,X)$ denota o espaço de todas as funções limitadas de J em X, é um espaço de Banach com a norma do supremo,

$$||f||_\infty = \sup_{t\in J} ||f(t)||.$$

Também podemos considerar o subespaço $G_0(J,X)$ de $G(J,X)$ de todas as funções $f\colon J \to X$ tais que

$$\sup_{s\in J} e^{-(s-t_0)}||f(s)|| < \infty.$$

Assim, $G_0(J,X)$ equipado com a norma

$$||f||_J = \sup_{s\in J} e^{-(s-t_0)}||f(s)||,\ f \in G_0(J,X),$$

é um espaço de Banach. Veja (SLAVÍK, 2013) para mais detalhes.

Diremos que f é de **variação limitada** no intervalo $[a,b]$, se

$$\mathrm{var}_a^b f = \sup_{d\in\mathscr{D}[a,b]} \sum_{i=1}^{|D|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| < \infty,$$

em que $\mathscr{D}[a,b]$ denota o conjunto de todas as partições de $[a,b]$ e $|D|$ é o número de subintervalos da forma $[t_{i-1},t_i]$ de uma partição D de $[a,b]$. Representaremos o espaço de todas funções

$f : [a,b] \to X$ de variação limitada por $BV([a,b],X)$. É sabido que $BV([a,b],X)$, munido com a norma da variação,

$$\|f\|_{BV} = \|f(a)\| + \text{var}_a^b f,$$

é um espaço de Banach.

Observação 2.1.17. São bem conhecidos os seguintes resultados sobre funções regradas:

(i) $G([a,b],X)$, munido com a norma usual do supremo, $\|\cdot\|_\infty$, definida por $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$, para $f \in G([a,b],X)$, é um espaço de Banach;

(ii) $G([a,b],X) \supset BV([a,b],X)$ *e* $G([a,b],X) \supset C([a,b],X)$ em que $C([a,b],X)$ denota o espaço das funções de $[a,b]$ em X que são contínuas;

(iii) Se $f \in G([a,b],X)$, então para todo $\varepsilon > 0$, os conjuntos

$$\{t \in [a,b), \|f(t^+) - f(t)\| \geq \varepsilon\} \quad \text{e} \quad \{t \in (a,b], \|f(t) - f(t^-)\| \geq \varepsilon\}$$

serão finitos.

As provas das afirmações acima podem ser encontradas em (HÖNIG, 1980).

O resultado a seguir fornece condições que garantem a existência da integral de Perron-Stieltjes em espaços de Banach. Para uma demonstração, o leitor pode consultar (SCHWABIK, 1996), Proposição 15.

Teorema 2.1.18. Se $g : [a,b] \to X$ for uma função regrada e $F : [a,b] \to L(X)$ for uma função de variação limitada em $[a,b]$, então a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b d[F(s)]g(s)$ existirá.

Apresentaremos, agora, uma versão do Teorema de Integração por Partes para funções Perron-Stieltjes integráveis e uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para funções Perron integráveis. Suas demonstrações podem ser encontradas em (FEDERSON, 2002b), Teorema 6 e Corolário 5 respectivamente.

Teorema 2.1.19 (Integração por Partes). Se $f \in BV([a,b],L(X,Y))$ e $g : [a,b] \to X$ for Perron integrável, então $f \cdot g : [a,b] \to Y$ será Perron integrável e as igualdades

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b f(t)d\widetilde{g}(t) \tag{2.1}$$

$$\int_a^b f(t)d\widetilde{g}(t) = \widetilde{f}(b)g(b) - \widetilde{f}(a)g(a) - \int_a^b df(t)\widetilde{g}(t) \tag{2.2}$$

serão válidas, em que

$$\widetilde{g}(t) = \int_a^t g(s)ds \quad \text{e} \quad \widetilde{f}(t) = \int_a^t f(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

A seguir, apresentamos um resultado que satisfaz um dos objetivos da criação da integral de Kurzweil-Henstock: o de construir uma teoria de integração que possibilite a reconstrução de uma função por meio de suas derivadas.

Teorema 2.1.20 (Fundamental do Cálculo). Se $F:[a,b]\to X$ for contínua e existir sua derivada, $\dot{F}(t)=f(t)$, para todo $t\in[a,b]$, então $f:[a,b]\to X$ será Perron integrável e teremos

$$\int_a^t f(s)ds = F(t)-F(a), \quad t\in[a,b].$$

O próximo teorema, conhecido como Teorema de Mudança de Variável, pode ser encontrado em (SCHWABIK, 1992) para o caso n-dimensional e em (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021) para espaços de Banach.

Teorema 2.1.21 (Mudança de Variável). Seja X um espaço de Banach. Assuma que $-\infty < c < d < \infty$ e que $\phi:[c,d]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua estritamente monótona em $[c,d]$. Seja $U:[\phi(c),\phi(d)]\times[\phi(c),\phi(d)]\to X$ uma função dada. Se uma das integrais

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau,t), \qquad \int_c^d DU(\phi(\sigma),\phi(s))$$

existir, então a outra integral também existirá e valerá a igualdade

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau,t) = \int_c^d DU(\phi(\sigma),\phi(s)).$$

Agora, apresentamos um **Teorema da Convergência Dominada** para a integral de Perron. Para uma prova deste resultado, o leitor pode consultar (SCHWABIK, 1992), Corolário 1.31.

Teorema 2.1.22 (Convergência Dominada). Sejam $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Perron integráveis de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições:

(i) $f_n\to f$ quase sempre (no sentido da medida de Lebesgue, neste caso escrevemos simplesmente $q.s.$);

(ii) existe uma função Perron integrável não negativa $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $|f_n|\le g$ $q.s.$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Então f será Perron integrável e

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Apresentamos a seguir, a condição forte de Lusin. Para mais detalhes, o leitor pode consultar (FEDERSON, 1999) e (ENE, 1993).

Diremos que uma função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ satisfaz a **condição forte de Lusin** se para cada $\varepsilon > 0$ e cada conjunto $E \subset [a,b]$ de medida de Lebesgue nula, isto é, tal que $m(E) = 0$, existir um calibre δ de E tal que, para toda partição parcial marcada δ-fina $D = (\tau_j, J_j)$ de $[a,b]$, com $\tau_j \in E$ e $j = 1, 2, \ldots, |D|$, tenhamos

$$\sum_{j=1}^{|D|} ||F(t_j) - F(t_{j-1})|| < \varepsilon.$$

Neste caso, escreveremos $F \in SL([a,b],\mathbb{R}^n)$. Note que qualquer função absolutamente contínua satisfaz a condição forte de Lusin que, por sua vez, é contínua. A prova do próximo resultado pode ser encontrada em (FEDERSON, 1999).

Teorema 2.1.23. Dada uma função $g \in SL([a,b],\mathbb{R})$, para $f_1 \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e $f_2 : [a,b] \to X$ com $f_1 = f_2$ *q.s.*, temos $f_2 \in \mathscr{K}([a,b],X)$ e

$$\int_a^b f_2(t)dg(t) = \int_a^b f_1(t)dg(t).$$

Definiremos, agora, um espaço de classes de equivalência de funções Perron-Stieltjes integráveis para que possamos considerar soluções que satisfazem algumas propriedades, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula. As considerações que seguem, serão úteis no próximo capítulo.

Dada $g \in SL([a,b],\mathbb{R})$, para $f \in \mathscr{K}([a,b],\mathbb{R})$ definimos

$$\widetilde{f}_g(t) = \int_a^t f(s)dg(s),$$

em que $t \in [a,b]$. Em $\mathscr{K}([a,b],\mathbb{R})$, consideramos a relação de equivalência $\widetilde{f_1}_g = \widetilde{f_2}_g$, sempre que $f_1 = f_2$ *q.s.*, assim como em (FEDERSON, 1999). Então, denotamos por $K_g([a,b],X)$ o espaço de todas as classes de equivalência sob tal relação de equivalência. Além disso, dotamos o espaço $K_g([a,b],X)$ com a **norma de Alexiewicz** (veja (ALEXIEWICZ, 1948) e (FEDERSON, 1999)) dada por

$$||f||_{A,g} = \sup_{a \leq t \leq b} \left\| \int_a^t f(s)dg(s) \right\| = ||\widetilde{f}_g||_\infty.$$

Para o caso em que g é a função identidade, o leitor pode consultar a referência (HÖNIG, 1989).

No que segue, apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo para funções que satisfazem a condição forte de Lusin. A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em (FEDERSON, 1999).

Teorema 2.1.24. Sejam $g, F \in SL([a,b],\mathbb{R})$, ambas diferenciáveis *q.s.* em $[a,b]$ e $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\dot{F}(t) = f(t)\dot{g}(t)$ para quase todo $t \in [a,b]$. Então f é Perron-Stieltjes integrável sobre $[a,b]$ e

$$F(t) = \int_a^t f(s)dg(s), \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Reciprocamente, se $g \in SL([a,b],\mathbb{R})$ for diferenciável $q.s.$ em $[a,b]$ e f for Perron-Stieltjes integrável e limitada, então $F(t) = \int_a^t f(s)dg(s) \in SL([a,b],\mathbb{R})$ e existirá

$$\dot{F}(t) = f(t)\dot{g}(t), \quad \text{para quase todo } t \in [a,b].$$

Denotemos por $\mathscr{L}([a,b],\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que são Lebesgue integráveis com integral finita. Encerramos esta seção, apresentando exemplos que mostram que a integral de Kurzweil é mais geral que a integral de Lebesgue.

Exemplo 2.1.25. Seja $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \begin{cases} t^2 \operatorname{sen}(t^{-2}), & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

e seja $f = \dot{F}$ (derivada de F). Como f é uma função Riemann imprópria integrável, $f \in \mathscr{K}([a,b],\mathbb{R})$, visto que a integral de Kurzweil contém suas integrais impróprias (veja (LEE, 1989), Extensão de Cauchy). Entretanto $f \notin \mathscr{L}([a,b],\mathbb{R})$, uma vez que f não é absolutamente integrável (veja (DEPREE; SWARTZ, 1988)). Note que tanto f quanto F não são de variação limitada.

Exemplo 2.1.26. Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n,n+1]}(x),$$

em que χ_E representa a **função característica** de um conjunto Lebesgue mensurável E. Note que

$$f(x) = -1\,\chi_{(1,2]}(x) + \frac{1}{2}\chi_{(2,3]}(x) - \frac{1}{3}\chi_{(3,4]}(x) + \cdots$$

e

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(x)\,dx = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = -\ln 2.$$

Como existe a integral de Riemann imprópria de f, $f \in \mathscr{K}([0,\infty),\mathbb{R})$. Entretanto,

$$\int_{[0,\infty)} |f| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty.$$

Logo f não é Lebesgue integrável (com integral finita).

A próxima seção é dedicada às equações diferenciais funcionais em medida e algumas de suas propriedades fundamentais. Faz-se necessário tal estudo, pois, no Capítulo 3, trabalharemos com esta classe de equações.

2.2 Equações diferenciais funcionais em medida

O estudo de **equações diferenciais em medida** (escreveremos, simplesmente, EDMs) se iniciou na década de 1960 com os trabalhos de W. Schmaedeke (SCHMAEDEKE, 1965) na teoria de controle e de P. Das e R. R. Sharma (veja (DAS; SHARMA, 1971; DAS; SHARMA, 1972)). O objetivo principal do conceito de EDMs é a descrição de sistemas expondo soluções descontínuas causadas pelo comportamento impulsivo do sistema diferencial. Uma solução de uma EDM é, em geral, uma função descontínua de variação limitada. Tal solução apresenta propriedades similares às soluções das equações diferenciais ordinárias generalizadas, cuja teoria será apresentada mais adiante, no Capítulo 4.

Em 2012, os autores de (FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012) introduziram uma nova classe de equações diferenciais chamadas equações diferenciais funcionais em medida para a qual usaremos a forma abreviada EDFMs. Esta classe de equações engloba outros tipos de equações tais como: equações diferenciais funcionais impulsivas e equações dinâmicas funcionais em escalas temporais.

No que segue, passamos a decrever alguns aspectos básicos da teoria de EDFMs.

Sejam $r,\sigma > 0$ números dados, $t_0 \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \times [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ uma função, com $\Omega \subset G([-r,0],\mathbb{R}^n)$, Ω um conjunto aberto e $u\colon [t_0,t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$. Consideramos equações da forma

$$Dx = f(x_t,t)Du, \tag{2.3}$$

em que Dx e Du representam as derivadas distribucionais no sentido de L. Schwartz das funções x e u respectivamente. A **função memória** $x_t\colon [-r,0] \to \mathbb{R}^n$ dada por $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r,0]$ descreve a história de eventos no lapso de tempo entre causa e efeito. Equações do tipo (2.3) são conhecidas como **equações diferenciais funcionais em medida**.

Como nosso foco não é o estudo da teoria de distribuições pois, apesar delas aparecerem na equação (2.3), não trabalharemos diretamente com elas, o leitor interessado pode encontrar todas as propriedades e resultados importantes de derivação de distribuições em (HÖRMANDER, 2007). Em geral, a função u em (2.3) não será de variação limitada. Então, na maior parte dos casos, usaremos a forma integral da equação diferencial em medida e de todas as equações diferenciais que lidaremos neste trabalho.

Assim, sob determinadas condições, veremos que a EDFM dada por

$$\begin{cases} Dx &= f(x_t,t)Du \\ x_{t_0} &= \phi, \end{cases} \tag{2.4}$$

terá a seguinte forma integral

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s,s)du(s) \\ x_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{2.5}$$

quando a integral existir em algum sentido.

Diremos que uma função $f\colon \Omega\times[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}^n$ é regrada, se

$$t\mapsto f(x_t,t) \quad \text{for uma função regrada para cada } x_t\in\mathbb{R}^n.$$

O teorema a seguir, cuja prova pode ser encontrada nas referências (FEDERSON; MESQUITA; TOON, 2015; DAS; SHARMA, 1972), estabelece uma relação entre (2.4) e (2.5).

Teorema 2.2.1. Suponha que $f(x_t,t)$ seja uma função regrada e $u:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}$ contínua à esquerda e de variação limitada. Então, a função $x:[t_0-r,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}^n$ será uma solução de (2.4) (i.e., x satisfaz a equação (2.4) $q.s.$) se, e somente se, $x:[t_0-r,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}^n$ satisfizer a equação integral (2.5) em $[t_0-r,t_0+\sigma]$.

Observação 2.2.2. O teorema anterior continuará sendo verdadeiro, se supusermos $u\colon[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ contínua à esquerda e localmente de variação limitada em $[t_0,\infty)$ e $f\colon G([t_0,\infty),\mathbb{R}^n)\times[t_0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ uma função regrada. Veja (MONTEIRO; SATCO, 2017).

Agora, suponhamos que $f:G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)\times[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}^n$ seja uma função tal que, para cada $y\in G^-([t_0-r,t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$, a aplicação $t\mapsto f(y_t,t)$ seja Kurzweil integrável com respeito a uma função não decrescente $u:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}$. Além disso, assumimos as seguintes condições:

(A) Existe uma função Lebesgue-Stieltjes integrável $M:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}$ tal que para todo x e quaisquer $u_1,u_2\in[t_0,t_0+\sigma]$,
$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x_s,s)du(s)\right|\leq\int_{u_1}^{u_2} M(s)du(s);$$

(B) Existe uma função Lebesgue-Stieltjes integrável $L:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}$ tal que para todo x,y e quaisquer $u_1,u_2\in[t_0,t_0+\sigma]$,
$$\left|\int_{u_1}^{u_2}[f(x_s,s)-f(y_s,s)]du(s)\right|\leq\int_{u_1}^{u_2} L(s)||x_s-y_s||du(s).$$

Com as condições (A) e (B) é possível provar o seguinte resultado (veja (FEDERSON; MESQUITA; TOON, 2015)).

Teorema 2.2.3. Considere o problema (2.5) e suponha que as condições (A) e (B) sejam satisfeitas. Então, existe um $\Delta>0$ tal que no intervalo $[t_0,t_0+\Delta]$ existe uma única solução $x:[t_0-r,t_0+\Delta]\to\mathbb{R}^n$ do problema (2.5).

Recentemente, os autores de (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021) mostraram que as condições (A) e (B) podem ser enfraquecidas. Podemos assumir a existência de funções $M\colon[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ e $L\colon[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ localmente Perron-Stieltjes integráveis no lugar de Lebesgue-Stieltjes integráveis. Além disso, note que o Teorema 2.2.3 garante a existência e unicidade local de soluções do problema (2.5). Na maioria dos resultados demonstrados no Capítulo 3, assumiremos a existência global de soluções.

CAPÍTULO

3

OSCILAÇÃO DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDOS E IMPULSOS

Neste capítulo, apresentamos os conceitos de oscilação e não oscilação de soluções de equações diferenciais com retardos e impulsos, em que as funções envolvidas têm como conjunto imagem um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Obtivemos critérios de oscilação e não oscilação para esta classe de equações.

A teoria contida neste capítulo é inédita e generaliza os resultados apresentados em (AP. SILVA, 2017) e (AP. SILVA; FEDERSON; GADOTTI, 2021). Nestas referências, propomos critérios de oscilação e não oscilação para a mesma classe de equações que trataremos aqui, entretanto para o caso particular em que as funções envolvidas nas equações diferenciais assumem valores em $\mathbb{R}$. Os principais resultados apresentados neste capítulo foram incluídos no artigo (AP. SILVA; FEDERSON, 2021), que encontra-se submetido para a publicação.

3.1 Motivação

Assim como no capítulo anterior, consideramos quase sempre (abreviadamente, $q.s.$) no sentido da medida de Lebesgue.

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que uma função $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ é positiva $q.s.$ no futuro, se existir $T \geq t_0$ tal que $f(t) > 0$ para quase todo $t \geq T$. Analogamente, diremos que $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ é negativa $q.s.$ no futuro, se existir $T \geq t_0$ tal que $f(t) < 0$ para quase todo $t \geq T$. Uma função $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ será dita não oscilatória se for positiva ou negativa $q.s.$ no futuro. Caso contrário, f será dita **oscilatória**. Veja (AP. SILVA, 2017; AP. SILVA; FEDERSON; GADOTTI, 2021; AP. SILVA; FEDERSON, 2021).

Geralmente, todos os tipos de oscilação que estudamos estão relacionadas a funções cujo contradomínio é um subconjunto da reta. Surge, então, uma pergunta natural:

O que seria oscilar em $\mathbb{R}^n$?

Para respondermos a esta pergunta, vamos analisar algumas situações.

Sabemos que as funções $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ são funções oscilatórias. Considere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t)). \end{aligned}$$

O que esperar de f?

A trajetória de f é dada por

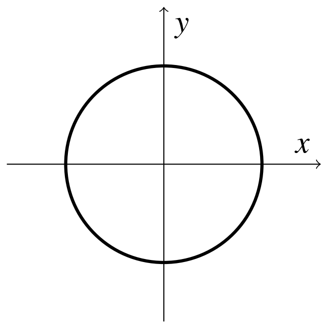


Figura 1 – Trajetória de f.

Uma análise semelhante pode ser feita para

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, t^2). \end{aligned}$$

Observe que as funções coordenadas $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$ são não oscilatórias.

O que esperar de g?

Abaixo, segue a trajetória de g.

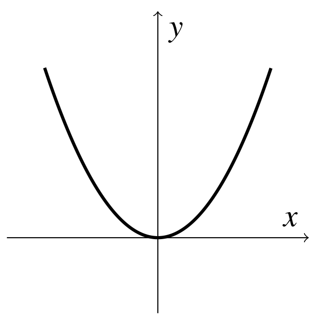


Figura 2 – Trajetória de g.

Outra situação é a seguinte. Consideremos a função

$$\begin{aligned} h:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ t &\mapsto (t^2, \operatorname{sen}(t)). \end{aligned}$$

A função coordenada $x(t) = t^2$ é não oscilatória, enquanto que $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ é oscilatória.

O que esperar de h?

Observe a trajetória de h a seguir.

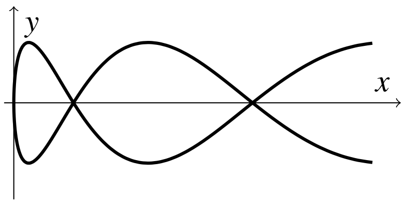


Figura 3 – Trajetória de h.

Existem aplicações em Física seguindo esta linha de raciocínio. Por exemplo, a **curva de Lissajous** (também chamada figura de Lissajous ou curva de Lissajous-Bowditch) é o gráfico produzido por um sistema de equações paramétricas

$$x(t) = A\cdot\operatorname{sen}(a\cdot t+\delta), \quad y(t) = B\cdot\operatorname{sen}(b\cdot t),$$

em que A, B são constantes e a, b, δ são constantes positivas. Essa família de curvas foi estudada por Nathaniel Bowditch em 1815 e, mais tarde, por Jules Antoine Lissajous, em 1857.

A aparência do gráfico é altamente sensível à razão a/b. Quando a razão é 1, o gráfico produzido é uma elipse, podendo também formar círculos quando $A = B, \delta = \pi/2$ radianos, e retas, quando $a = b$ e $\delta = 0$. Outro gráfico simples de Lissajous é uma parábola, quando $a/b = 2$ e $\delta = \pi/2$. Outras razões produzem gráficos mais complicados. Os gráficos de Lissajous são estáticos (ou seja, se fecham numa figura visível), quando a razão a/b é um número racional. Antes dos computadores modernos, as curvas de Lissajous eram tipicamente geradas por um osciloscópio (veja Figura 4). O osciloscópio é um aparelho que recebe sinais de ondas de diversos tipos e os representa graficamente.

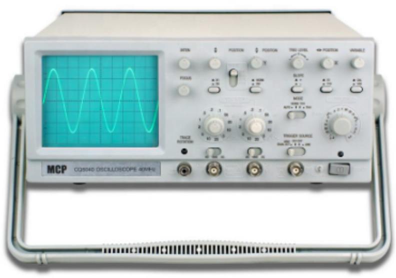
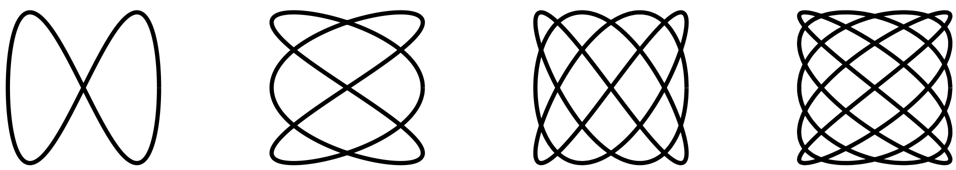


Figura 4 – Osciloscópio.

Seguem alguns exemplos de curvas de Lissajous

$$\begin{aligned}
&(i) \quad x(t) = \operatorname{sen}(t+\pi/2), \quad y(t) = \operatorname{sen}(2t),\\
&(ii) \quad x(t) = \operatorname{sen}(3t+\pi/2), \ y(t) = \operatorname{sen}(2t),\\
&(iii) \quad x(t) = \operatorname{sen}(3t+\pi/2), \ y(t) = \operatorname{sen}(4t),\\
&(iv) \quad x(t) = \operatorname{sen}(5t+\pi/2), \ y(t) = \operatorname{sen}(4t).
\end{aligned}$$



(i) (ii) (iii) (iv)

Figura 5 – Curvas de Lissajous.

Tudo isso nos mostra que faz sentido estudar oscilação de funções cujo contra domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A partir destas situações, somos levados à definir oscilação em $\mathbb{R}^n$ da forma seguinte.

Definição 3.1.1. Uma função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ será dita **oscilatória**, se pelo menos uma das suas funções componentes for oscilatória (i.e., não é positiva nem negativa *q.s.* no futuro). Caso contrário, x será dita não oscilatória.

3.2 Critério de oscilação

Em (YAN, 2001), o autor fornece critérios de oscilação e não oscilação para uma classe de equações diferenciais impulsivas com argumento avançado cujas funções envolvidas tomam valores em $\mathbb{R}$ e são contínuas por partes. Em (AP. SILVA; FEDERSON; GADOTTI, 2021), apresentamos critérios de oscilação e não oscilação para uma classe de equações diferenciais em medida com retardamento, em que as funções envolvidas, tomando valores em $\mathbb{R}$, podem ter muitas descontinuidades e ainda podem ser altamente oscilatórias, uma vez que usamos as integrais de Perron e Perron-Stieltjes para o tratamento destes problemas. Nosso objetivo, aqui, é propor critérios de oscilação e não oscilação para uma classe de equações diferenciais com vários retardos e impulsos, assumindo, agora, valores em $\mathbb{R}^n$. Os resultados que apresentaremos nesta seção também podem ser encontrados em (AP. SILVA; FEDERSON, 2021).

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$. Usaremos a notação $SL_{loc}([t_0,\infty),\mathbb{R})$ para representar o conjunto de todas as funções $f : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfazem a condição forte de Lusin em cada intervalo compacto de $[t_0,\infty)$. Notamos que se $f \in SL_{loc}([t_0,\infty),\mathbb{R})$, então f será uma função contínua em $[t_0,\infty)$.

Considere o sistema de **equações diferenciais com vários retardos discretos e impulsos em tempos pré-fixados** (abreviadamente, sistema de EDRIs)

$$\begin{cases} \dot{y}_j = -p_j(t)y_j(t-\tau_j)\dot{g}_j \quad t \neq t_k, \\ y_j(t_k^+) - y_j(t_k) = b_k y_j(t_k), \quad j = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $k \in \mathbb{N}$, $\tau_j > 0$ é uma constante, $p_j : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $g_j : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ são funções para cada $j = 1, \ldots n$, satisfazendo as seguintes condições:

(C1) $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ são elementos fixos de $\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$;

(C2) $b_k > -1$, $k \in \mathbb{N}$;

(C3) para cada $j = 1, \ldots, n$, $g_j \in SL_{loc}([t_0, \infty), \mathbb{R})$ e p_j é limitada;

(C4) para cada intervalo compacto $[a, b]$ de $[t_0, \infty)$ a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p_j(s) dg_j(s)$ existe, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Definição 3.2.1. Uma função $y\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ será uma solução de (3.1) em $[t_0, \infty)$, se $(y(t), t) \in G^-([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) \times [t_0, \infty)$ e, para cada $j = 1, \ldots, n$, a função componente y_j de y satisfizer

$$\dot{y}_j(t) = -p_j(t)y_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t),$$

para quase todo $t \in [t_0, \infty)$ e

$$y_j(t_k^+) - y_j(t_k) = b_k y_j(t_k), \quad \text{se } t_k \in [t_0, \infty).$$

Assim como em (YAN, 2001), junto com o sistema de EDRIs (3.1), consideramos o seguinte sistema auxiliar de equações diferenciais com vários retardos discretos e sem impulsos (abreviadamente, sistema de EDRs)

$$\dot{x}_j = -P_j(t)x_j(t-\tau_j)\dot{g}_j, \tag{3.2}$$

em que

$$P_j(t) = \prod_{t-\tau_j \le t_k < t} (1+b_k)^{-1} p_j(t), \; t \ge t_0 \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, n.$$

De acordo com a Definição 3.2.1, uma função $x\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ será uma solução de (3.2) em $[t_0, \infty)$, se $(x(t), t) \in G^-([t_0, \infty), \mathbb{R}^n) \times [t_0, \infty)$ e, para cada $j = 1, \ldots, n$, a função componente x_j de x satisfizer

$$\dot{x}_j(t) = -P_j(t)x_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t),$$

para quase todo $t \in [t_0, \infty)$.

Devido ao Teorema 2.1.24, temos a seguinte equivalência: uma função $x\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ será uma solução de (3.2) se, e somente se, a função componente $x_j\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ de x satisfizer a seguinte **equação integral com retardo distribuído**

$$x_j(t) - x_j(t') = -\int_{t'}^{t} P_j(s)x_j(s-\tau_j)dg_j(s), \quad j \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{e} \quad t' \in [t_0, \infty).$$

Os comentários que seguem dizem respeito à definição clássica de oscilação.

Observação 3.2.2. Consideremos a definição clássica de oscilação, isto é, uma função $f\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ será oscilatória, se f não for positiva nem negativa no futuro.

(i) Note que as soluções de (3.1) serão oscilatórias para $b_k < -1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, basta observarmos que, para cada $j = 1,\dots,n$, vale

$$y_j(t_k^+)y_j(t_k) = y_j(t_k)(1+b_k)y_j(t_k) = y_j(t_k)^2(1+b_k) \leq 0.$$

Logo, y_j é oscilatória para todo $j = 1,\dots,n$ e, portanto, y oscila.

(ii) Seja $j \in \{1,\dots,n\}$ fixo. Se $P_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ for uma função regrada e $g_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ for uma função contínua à esquerda e localmente de variação limitada em $[t_0,\infty)$, então a função $x_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ será uma solução da equação diferencial em medida (abreviadamente, EDM)

$$Dx_j = -P_j(t)x_j(t-\tau_j)Dg_j(t),$$

em que Dx_j e Dg_j representam as derivadas distribucionais das funções x_j e g_j se, e somente se, x_j satisfizer a seguinte equação integral com retardo distribuído

$$x_j(t) - x_j(t') = -\int_{t'}^{t} P_j(s)x_j(s-\tau_j)dg_j(s),$$

em que $t' \in [t_0,\infty)$. Veja o Teorema 2.2.1 e a Observação 2.2.2

(iii) Utilizando a definição clássica de oscilação, o problema impulsivo (3.1) poderia ser substituído pelo sistema de EDMs impulsivas

$$\begin{cases} Dy_j = -p_j(t)y_j(t-\tau_j)Dg_j & t \neq t_k, \\ y_j(t_k^+) - y_j(t_k) = b_k y_j(t_k), & j = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{3.3}$$

em que $k \in \mathbb{N}$, $\tau_j > 0$ é uma constante, $p_j : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $g_j : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ são funções para cada $j = 1,\dots n$, satisfazendo as seguintes condições:

- $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ são elementos fixos de $\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$;
- $b_k > -1$, $k \in \mathbb{N}$;
- p_j é uma função regrada e g_j é uma função contínua à esquerda e localmente de variação limitada em $[t_0,\infty)$, para todo $j = 1,\dots,n$.

O teorema a seguir nos fornece uma correspondência entre soluções oscilatórias no seguinte sentido: soluções oscilatórias do sistema de EDRIs também são soluções oscilatórias do sistema de EDRs não impulsivas e vice-versa. Assim, se nosso interesse é obter informações à respeito do comportamento oscilatório de soluções de (3.1), podemos trabalhar com o sistema (3.2) e levar as informações obtidas para o problema impulsivo.

Teorema 3.2.3. Assuma que as condições (C1) e (C2) sejam satisfeitas. O sistema de EDRIs (3.1) terá uma solução oscilatória se, e somente se, o sistema de EDRs sem impulsos (3.2) tiver uma solução oscilatória.

Demonstração. Seja $y\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma solução não oscilatória de (3.1). Então, todas as funções coordenadas y_j, $j = 1,\dots,n$, serão não oscilatórias. Assim, devemos ter coordenadas positivas $q.s.$ no futuro ou negativas $q.s.$ no futuro, isto é, existe $T_j \geq t_0$ tal que $y_j(t) > 0$ ou $y_j(t) < 0$ para quase todo $t \geq T_j$ e j fixado.

Defina, para cada $j = 1,\dots,n$, a função $x_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$x_j(t) = \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} y_j(t).$$

Logo, teremos $x_j(t) > 0$ para quase todo $t \geq T_j$, se y_j for positiva $q.s.$ no futuro e $x_j(t) < 0$ para quase todo $t \geq T_j$, se y_j for negativa $q.s.$ no futuro. Portanto, em qualquer caso, $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ será não oscilatória. Além disso, $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, definida como anteriormente, é solução do sistema (3.2). De fato,

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_j(t) + P_j(t)x_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\\
&= \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1}\dot{y}_j(t) + P_j(t) \prod_{T_j \leq t_k < t-\tau_j} (1+b_k)^{-1} y_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\\
&= \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} \left[\dot{y}_j(t) + p_j(t)y_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\right] = 0,
\end{aligned}$$

para quase todo $t \geq T_j + \tau_j$.

Reciprocamente, suponhamos que $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ seja uma solução não oscilatória de (3.2). Então todas as funções coordenadas x_j serão não oscilatórias. Daí, podemos ter coordenadas positivas $q.s.$ no futuro e negativas $q.s.$ no futuro.

Defina, para cada $j = 1,\dots,n$, a função $y_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$y_j(t) = \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k) x_j(t).$$

Se x_j for positiva $q.s.$ no futuro, y_j será positiva $q.s.$ no futuro. Se x_j for negativa $q.s.$ no futuro, y_j será negativa $q.s.$ no futuro. Logo, todas as funções coordenadas y_j de y serão não oscilatórias. Portanto, $y(t) = (y_1(t),\dots,y_n(t))$ será não oscilatória e, além disso, y será uma solução de (3.1). De fato,

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_j(t) + p_j(t)y_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\\
&= \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k)\dot{x}_j(t) + p_j(t) \prod_{T_j \leq t_k < t-\tau_j} (1+b_k) x_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\\
&= \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k) \left(\dot{x}_j(t) + \prod_{t-\tau_j \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} p_j(t)x_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\right)\\
&= \prod_{T_j \leq t_k < t} (1+b_k) \left(\dot{x}_j(t) + P_j(t)x_j(t-\tau_j)\dot{g}_j(t)\right) = 0,
\end{aligned}$$

para quase todo $t \geq T_j + \tau_j$. E, ainda, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$ fixado, temos

$$y_j(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} \prod_{T_j \leq t_i < t} (1+b_i)x_j(t) = \prod_{T_j \leq t_i \leq t_k} (1+b_i)x_j(t_k)$$
$$y_j(t_k) = \prod_{T_j \leq t_i < t_k} (1+b_i)x_j(t_k).$$

Assim, para $t_k \geq T_j + \tau_j$, $k \in \mathbb{N}$, temos $y_j(t_k^+) = (1+b_k)y_j(t_k)$. Portanto, y é solução do sistema impulsivo (3.1). $\square$

Como consequência da demonstração do teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.4. Assuma que condições (C1) e (C2) sejam satisfeitas.

(i) Se $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ for uma solução do sistema de EDRs sem impulsos (3.2) em $[\sigma,\infty)$, com $\sigma \geq t_0$, então
$$y(t) = \prod_{\sigma \leq t_k < t} (1+b_k)x(t)$$
será uma solução do sistema de EDRIs (3.1) em $[\sigma,\infty)$.

(ii) Se $y\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ for uma solução do sistema de EDRIs (3.1) em $[\sigma,\infty)$, com $\sigma \geq t_0$, então
$$x(t) = \prod_{\sigma \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1}y(t)$$
será uma solução do sistema de EDRs sem impulsos (3.2) em $[\sigma,\infty)$.

O próximo resultado assegura que, sob determinadas condições, todas as soluções da equação (3.1) serão oscilatórias. Lembramos que por $K_g([a,b],\mathbb{R})$ denotamos o espaço das classes de equivalência apresentado no Capítulo 2.

Teorema 3.2.5. Assuma que condições (C1) até (C4) sejam satisfeitas e que $p_j \in K_g([a,b],\mathbb{R})$, para cada subintervalo compacto $[a,b] \subset [t_0,\infty)$, para todo $j = 1,\ldots,n$. Se existir $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tal que

(i) $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau_{j_0}}^{t} \prod_{s-\tau_{j_0} \leq t_k < s} (1+b_k)^{-1} p_{j_0}(s)dg_{j_0}(s) > 1,$

(ii) $g_{j_0}\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja uma função não decrescente em $[t_0,\infty)$, e

(iii) $p_{j_0}(s) \geq 0,$

então todas as soluções de (3.1) serão oscilatórias.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $y\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ seja uma solução não oscilatória de (3.1). Logo, todas as funções coordenadas y_j de y serão não oscilatórias. Sem perda de generalidade, assuma $y_1\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ positiva *q.s.* no futuro. Então, existe $T_1 \geq t_0$ tal que $y_1(t) > 0$ para quase todo $t \geq T_1$.

Pelo Corolário 3.2.4, o sistema de equações (3.2) também terá uma solução x definida em $[T_1,\infty)$ em que a função coordenada x_1 é positiva *q.s.* no futuro. Assim, integrando a primeira entrada de (3.2) de $t-\tau_1$ a t, obtemos, para $t \geq T_1+\tau_1$,

$$x_1(t) - x_1(t-\tau_1) = -\int_{t-\tau_1}^{t} P_1(s)x_1(s-\tau_1)dg_1(s) \leq 0,$$

uma vez que $x_1(t-\tau_1) > 0$ para quase todo $t \geq T_1+\tau_1$. Portanto, $x_1(t) \leq x_1(t-\tau_1)$ para quase todo $t \geq T_1+\tau_1$. Então,

$$x_1(t-\tau_1)\int_{t-\tau_1}^{t} P_1(s)dg_1(s) \leq \int_{t-\tau_1}^{t} P_1(s)x_1(s-\tau_1)dg_1(s),$$

para quase todo $t \geq T_1+\tau_1$. Assim,

$$0 \geq x_1(t) + x_1(t-\tau_1)\left[\int_{t-\tau_1}^{t} P_1(s)dg_1(s) - 1\right],$$

para quase todo $t \geq T_1+\tau_1$, o que é um absurdo, pois, para quase todo $t \geq T_1+\tau_1$, temos $x_1(t) > 0$ e $x_1(t-\tau_1) > 0$ e, além disso, por hipótese, $\int_{t-\tau_{j_0}}^{t} P_{j_0}(s)dg_{j_0}(s) - 1 > 0$ para algum $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$ (podemos supor que este j_0 seja igual a 1, pois, caso contrário, repetiríamos esta demonstração para o índice j_0 para o qual a desigualdade é satisfeita).

Logo todas as soluções de (3.1) são oscilatórias. □

Finalizamos esta seção com algumas importantes observações.

Observação 3.2.6. Quando $p_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ for de variação limitada e $g_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ for uma função regrada para todo $j = 1,\ldots,n$, a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b p_j(s)dg_j(s)$ existirá. (Veja (SCHWABIK, 1996) e, também, (FEDERSON, 2002a), Teorema 4).

Observação 3.2.7. Vale ressaltar que as condições impostas sobre o sistema de EDMs impulsivas (3.3) podem ser substituídas por

- $p_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função localmente de variação limitada em $[t_0,\infty)$ e $g_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função regrada e contínua à esquerda, para cada $j = 1,\ldots,n$.

Em outras palavras, a suposição em g_j pode ser enfraquecida se exigirmos condições mais fortes sobre p_j, isto é, se p_j for uma função localmente de variação limitada. Para mais detalhes, o leitor pode consultar as referências (SCHWABIK, 1992) e (MONTEIRO; SATCO, 2017).

Observação 3.2.8. Em (TABOR, 2002), o autor considera $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma função oscilatória, quando todas as suas funções componentes forem oscilatórias. Observamos que os resultados apresentados nesta seção permanecem válidos (fazendo pequenas alterações), se utilizarmos tal definição. Porém, ao se trabalhar com a Definição 3.1.1, a classe de funções consideradas oscilatórias é maior e, por isso, optamos por exigir que apenas uma função coordenada seja oscilatória para a função ser considerada oscilatória. No Capítulo 5, ficará claro a importância desta observação.

Até o momento, temos um bom critério de oscilação, isto é, já sabemos quando o sistema de EDRIs (3.1) possui soluções oscilatórias. O principal resultado da próxima seção, nos fornece um critério de não oscilação, ou seja, nos garante quando o problema impulsivo (3.1) possui pelo menos uma solução que não oscila.

3.3 Critério de não oscilação

Nesta seção, provamos um critério de não oscilação para um caso particular do sistema (3.1), em que $g_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é a função identidade, isto é, $g_j(s) = s$, para todo $s \in [t_0,\infty)$ e para todo $j = 1,\dots,n$. Um resultado similar foi provado por Yan Jurang em seu artigo (YAN, 2001) para equações diferenciais impulsivas com argumento avançado, em que as funções envolvidas tomam valores em $\mathbb{R}$ e são contínuas por partes. Para nós, as funções envolvidas não serão necessariamente contínuas ou contínuas por partes, ao contrário, poderão ter muitas descontinuidades e não ser de variação limitada.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e considere a equação diferencial com vários retardos discretos e impulsos em tempos pré-fixados (EDRIs)

$$\begin{cases} (\dot{y}_1(t),\dots,\dot{y}_n(t)) = -(p_1(t)y_1(t-\tau_1),\dots,p_n(t)y_n(t-\tau_n)), \quad t \neq t_k \\ y_j(t_k^+) - y_j(t_k) = b_k y_j(t_k), \quad j = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{3.4}$$

satisfazendo hipóteses análogas àquelas do sistema (3.1), quais sejam:

- $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ são pontos fixados, com $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$;
- para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_k > -1$ é constante e $\tau_j > 0$, $j = 1,\dots,n$;
- para cada subintervalo compacto $[a,b]$ de $[t_0,\infty)$ a integral de Perron $\int_a^b p_j(s)ds$ existe para cada $j = 1,\dots,n$.

Lema 3.3.1. Se $p_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ for uma função positiva $q.s.$ para todo $j = 1,\dots,n$, então as seguintes afirmações serão equivalentes:

(i) A equação (3.4) tem uma solução não oscilatória.

(ii) A equação integral

$$(u_1(t),\ldots,u_n(t)) = \left(P_1(t)\exp\left(\int_{t-\tau_1}^{t} u_1(s)ds\right),\ldots,P_n(t)\exp\left(\int_{t-\tau_n}^{t} u_n(s)ds\right)\right) \tag{3.5}$$

tem uma solução definida $q.s.$ em $[T,\infty)$, para algum $T \geq t_0$, em que suas funções coordenadas são não negativas e

$$P_j(t) = \prod_{t-\tau_j \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} p_j(t), \quad t \geq t_0.$$

(iii) As sequências $\{u_j^{(k)}(t)\}$ de funções Perron integráveis são convergentes $q.s.$ em $[\widetilde{T},\infty)$, para algum $\widetilde{T} \geq t_0$, em que

$$\begin{aligned} u_j^{(1)}(t) &= P_j(t) = \prod_{t-\tau_j \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} p_j(t), \text{ para quase todo } t \geq T_j, \\ u_j^{(k+1)}(t) &= P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} u_j^{(k)}(s)ds\right), \text{ para quase todo } t \geq T_j, \text{ e todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, provemos que (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $y\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma solução não oscilatória de (3.4). Pelo Teorema 3.2.3, a equação (3.2) também terá uma solução não oscilatória $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$. Assim, todas as funções coordenadas x_j de x serão não oscilatórias. Separemos em três casos.

Caso 1: Suponha que x_j seja positiva $q.s.$ no futuro para todo $j = 1,\ldots,n$. Então, para cada $j = 1,\ldots,n$, fixo, existe $T_j \geq t_0$ tal que $x_j(t) > 0$ para quase todo $t \geq T_j$. Defina

$$u_j(t) = -\frac{\dot{x}_j(t)}{x_j(t)}, \; q.s. \text{ em } [T_j,\infty), \tag{3.6}$$

isto é, u_j está definida nos pontos em que ambas $\dot{x}_j(t)$ e $x_j(t)$ existem.

Afirmamos que $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_n(t))$ é uma solução de (3.5) em $[T,\infty)$, com $T = \max_{1\leq j\leq n} T_j$. De fato, fixando $j \in \{1,\ldots,n\}$ e integrando (3.6) de $t-\tau_j$ a t, obtemos

$$\int_{t-\tau_j}^{t} u_j(s)ds = \int_{t-\tau_j}^{t} -\frac{\dot{x}_j(s)}{x_j(s)}ds = -\ln(x_j(t)) + \ln(x_j(t-\tau_j)) = \ln\left(\frac{x_j(t-\tau_j)}{x_j(t)}\right)$$

e, portanto,

$$\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} u_j(s)ds\right) = \frac{x_j(t-\tau_j)}{x_j(t)}, \text{ para todo } t \in [T,\infty).$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.2) pelo inverso de $-x_j(t)$ (quando $x_j(t) > 0$), obtemos

$$-\frac{\dot{x}_j(t)}{x_j(t)} = -P_j(t)\frac{x_j(t-\tau_j)}{-x_j(t)}, \text{ para quase todo } t \in [T,\infty).$$

Logo,

$$u_j(t) = P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} u_j(s)ds\right) \; q.s. \text{ em } [T,\infty).$$

Caso 2: Seja x_j negativa $q.s.$ no futuro para todo $j = 1,\dots,n$. Então, fixado $j \in \{1,\dots,n\}$ existe $T_j \geq t_0$ tal que $x_j(t) < 0$, para quase todo $t \geq T_j$. Defina

$$u_j(t) = -\frac{\dot{x}_j(t)}{x_j(t)},\ q.s. \text{ em } [T_j,\infty),$$

e repita a demonstração anterior. Note que, tanto no **Caso 1**, quanto no **Caso 2**, u_j é não negativa $q.s.$ em $[T,\infty)$, para todo $j = 1,\dots,n$.

Caso 3: Se tivermos algumas funções coordenadas positivas $q.s.$ no futuro e outras negativas $q.s.$ no futuro, a demonstração também será a mesma. Basta definirmos u_j como anteriormente.

Mostremos, agora, que (ii) $\Rightarrow$ (i). Seja $u(t) = (u_1(t),\dots,u_n(t))$ uma solução de (3.5) em $[T,\infty)$, com cada entrada não negativa $q.s.$. Defina, para cada $j = 1,\dots,n$,

$$x_j(t) = -\exp\left(-\int_T^t u_j(s)ds\right),$$

para $t \geq T$. Note que $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ é uma solução de (3.2) em $[T,\infty)$, pois

$$\dot{x}_j(t) + P_j(t)x(t-\tau_j) = -\exp\left(-\int_T^t u_j(s)ds\right)\cdot(-u_j(t)) + P_j(t)x(t-\tau_j).$$

Como, por hipótese, $u_j(t) = P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^t u_j(s)ds\right)$, temos, para todo $j = 1,\dots,n$,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j(t) + P_j(t)x(t-\tau_j) &= -\exp\left(-\int_T^t u_j(s)ds\right)\cdot\left(-P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^t u_j(s)ds\right)\right)\\
&- P_j(t)\exp\left(-\int_T^{t-\tau_j} u_j(s)ds\right)\\
&= P_j(t)\exp\left(-\int_T^{t-\tau_j} u_j(s)ds\right) - P_j(t)\exp\left(-\int_T^{t-\tau_j} u_j(s)ds\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [T,\infty)$. Além disso, cada x_j é não negativa $q.s.$ em $[T,\infty)$. Assim, x é não oscilatória. Logo, pelo Corolário 3.2.4, $y(t) = \prod_{T \leq t_k < t}(1+b_k)x(t)$ é uma solução não oscilatória de (3.4) em $[T,\infty)$, provando, assim, (i).

Mostremos a implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii). Seja u uma solução de (3.5) definida em $[T,\infty)$, em que suas funções coordenadas são não negativas $q.s.$. Então, para quase todo $t \geq T \geq t_0$ e cada $j = 1,\dots,n$, temos

$$u_j^{(1)}(t) = P_j(t) \leq P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^t u_j^{(1)}(s)ds\right) = u_j^{(2)}(t) \leq u_j(t).$$

Por indução, para todo $j = 1,\dots,n$, pode-se provar que

$$u_j^{(k)}(t) \leq u_j^{(k+1)}(t) \leq u_j(t), \text{ para quase todo } t \geq T \text{ e todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, as sequências $\{u_j^{(k)}(t)\}$ possuem limites pontuais $q.s.$ em $[T,\infty)$, digamos $\widetilde{u_j}(t)$, ou seja, para cada $j = 1,\dots,n$ fixado, vale

$$\lim_{k\to\infty} u_j^{(k)}(t) = \widetilde{u_j}(t) \leq u_j(t), \text{ para quase todo } t \geq T,$$

o que prova (iii).

Finalmente, mostremos que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Para cada $j = 1,\dots,n$ fixado, seja

$$u_j(t) = \lim_{k\to\infty} u_j^{(k)}(t), \quad \text{para quase todo } t \geq T, \text{ para algum } T \geq t_0.$$

Sabemos que $u_j^{(k)}(t) \leq u_j(t)$ $q.s.$ em $[T,\infty)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1,\dots,n$. Assim, $u_j^{(k)}$ são limitadas $q.s.$ por uma função não negativa em $[t-\tau,t]$, para quase todo $t \geq T$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada para funções Perron integráveis (Teorema 2.1.22), obtemos (3.5). □

O próximo resultado nos fornece condições sob as quais a equação (3.4) tem pelo menos uma solução não oscilatória.

Teorema 3.3.2. Suponha que $p_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja uma função positiva $q.s.$ para todo $j = 1,\dots,n$. Se existir $T \geq t_0$ tal que, para quase todo $t \geq T$ e todo $j = 1,\dots,n$, a desigualdade

$$\int_{t-\tau_j}^{t} \prod_{s-\tau_j \leq t_k < s} (1+b_k)^{-1} p_j(s)ds \leq \frac{1}{e}, \tag{3.7}$$

for satisfeita, então a equação (3.4) terá uma solução não oscilatória.

Demonstração. Provaremos que (3.7) implica que a afirmação (iii) do Lema 3.3.1 é satisfeita. De (3.7), para quase todo $t \geq T$ e todo $j = 1,\dots,n$ fixado, temos

$$\int_{t-\tau_j}^{t} u_j^{(1)}(s)ds = \int_{t-\tau_j}^{t} P_j(s)ds \leq \frac{1}{e}.$$

Para quase todo $t \geq T$ e para todo $j = 1,\dots,n$ fixado, temos

$$\begin{aligned}
u_j^{(2)}(t) &= P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} u_j^{(1)}(s)ds\right) \leq P_j(t)e^{\frac{1}{e}} \leq P_j(t)\,e. \\
u_j^{(3)}(t) &= P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} u_j^{(2)}(s)ds\right) \leq P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} P_j(s)\,e\,ds\right) \\
&= P_j(t)\exp\left(e\int_{t-\tau_j}^{t} P_j(s)ds\right) \\
&\leq P_j(t)\,e.
\end{aligned}$$

Assim, para quase todo $t \geq T$, todo $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1,\dots,n$ fixado, obtemos, por indução,

$$\begin{aligned}
u_j^{(k)}(t) &\leq u_j^{(k+1)}(t) = P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} u_j^{(k)}(s)ds\right) \\
&\leq P_j(t)\exp\left(\int_{t-\tau_j}^{t} P_j(s)\,e\,ds\right) \\
&\leq P_j(t)\,e.
\end{aligned}$$

Logo,

$$u_j^{(k)}(t) \le u_j^{(k+1)}(t) \le P_j(t)e, \quad \text{para quase todo } t \ge T,$$

o que implica que as sequências $\{u_j^{(k)}(t)\}$ são convergentes $q.s.$ em $[T,\infty)$ e, pelo Lema 3.3.1, a equação (3.4) terá uma solução não oscilatória. $\square$

Veremos, agora, alguns exemplos que ilustram os resultados apresentados.

Exemplo 3.3.3. Seja $k \in \mathbb{N}$ e consideremos o seguinte sistema de EDRIs

$$\begin{cases} (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t)) = -(\frac{1}{t^4}\chi_{[4,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t)y_1(t-2)\dot{g}_1(t), t\, y_2(t-2)\dot{g}_2(t)), & t \neq t_k \\ y_j(t_k^+) - y_j(t_k) = \dfrac{1}{2}y(t_k), \quad j = 1,2, \end{cases} \tag{3.8}$$

em que $t \in [4,\infty)$, $g_1(t) = g_2(t) = t^6$ e $b_k = \frac{1}{2}$. Suponha que exista no máximo um ponto de efeito impulsivo em cada intervalo $[t-2,t)$. Assim, se $t_k \in [t-2,t)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1,2$, vale

$$\int_{t-2}^{t} \prod_{s-2 \le t_k < s} (1+b_k)^{-1} p_j(s) dg_j(s) = (1+b_k)^{-1} \int_{t-2}^{t} p_j(s) dg_j(s),$$

e, se $t_k \notin [t-2,t)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\int_{t-2}^{t} \prod_{s-2 \le t_k < s} (1+b_k)^{-1} p_j(s) dg_j(s) = \int_{t-2}^{t} p_j(s) dg_j(s).$$

O sistema de EDRs sem impulsos relacionado ao sistema (3.8) é

$$(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = -(P_1(t)x_1(t-2)\dot{g}_1(t), P_2(t)x_2(t-2)\dot{g}_2(t)), \tag{3.9}$$

em que

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \prod_{t-2 \le t_k < t} (1+b_k)^{-1} p_1(t) = \frac{2}{3t^4}\chi_{[4,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t), \\ P_2(t) &= \prod_{t-2 \le t_k < t} (1+b_k)^{-1} p_2(t) = \frac{2}{3}t. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.3, o problema impulsivo (3.8) terá solução oscilatória se, e somente se, (3.9) tiver solução oscilatória.

Note que $p_1(t) = \frac{1}{t^4}\chi_{[4,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t)$ é limitada e não negativa em $[4,\infty)$ e, como g_1 é absolutamente contínua e diferenciável, temos $\dot{g}_1(t) = 6t^5$ e $g_1 \in SL_{loc}([4,\infty),\mathbb{R})$.

Seja $[a,b] \subset [4,\infty)$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b p_1(s) dg_1(s) &= \int_a^b \frac{1}{s^4}\chi_{[4,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(s) dg_1(s) = \int_a^b \frac{1}{s^4}\chi_{[4,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(s)\dot{g}(s) ds \\ &= \int_a^b 6s ds = 3\left(b^2 - a^2\right). \end{aligned}$$

Logo a integral de Lebesgue $\int_a^b p_1(s)dg_1(s)$ existe e, portanto, existe a integral de Perron-Stieltjes em cada subintervalo $[a,b]$ de $[4,\infty)$. Além disso, vale

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-2}^{t}\prod_{s-2\leq t_k<s}(1+b_k)^{-1}p_1(s)dg_1(s)>1.$$

Portanto, pelo Teorema 3.2.5, todas as soluções de (3.8) e (3.9) serão oscilatórias.

Exemplo 3.3.4. Considere a equação diferencial

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{t^2}\chi_{[3,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t)x(t-1), \qquad t\in[3,\infty). \tag{3.10}$$

Note que $p(t)=\frac{1}{t^2}\chi_{[3,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t)\geq 0$ não é uma função Riemann integrável, mas é Lebesgue imprópria integrável e, portanto, Perron integrável em $[3,\infty)$. De fato,

$$\begin{aligned}\int_3^\infty p(s)ds &= \int_3^\infty \frac{1}{s^2}\chi_{[3,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(s)ds=\int_3^\infty\frac{1}{s^2}ds\\ &= \lim_{A\to\infty}\int_3^A\frac{1}{s^2}ds=\lim_{A\to\infty}\left[-\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Além disso, para $t\geq 3$, vale

$$\int_{t-1}^{t}p(s)ds=\frac{1}{t(t-1)}<\frac{1}{e}.$$

Dessa forma, a equação (3.10) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.2 e, portanto, possui uma solução não oscilatória.

CAPÍTULO

4

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS GENERALIZADAS

Neste capítulo, apresentamos a teoria básica sobre equações diferenciais ordinárias generalizadas (escrevemos EDOs generalizadas), evidenciando algumas de suas propriedades e resultados sobre a existência e unicidade de soluções. Em seguida, restringimos nosso estudo às EDOs generalizadas lineares homogêneas e lineares não homogêneas. As principais referências para este capítulo são (COLLEGARI, 2014; GARCIA, 2008; KURZWEIL, 1957; SCHWABIK, 1992; BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

4.1 Motivação

Nesta seção, apresentamos, brevemente, o que motivou o professor Jaroslav Kurzweil, no ano de 1957, a introduzir o novo conceito de integral e, consequentemente, a teoria de EDOs generalizadas.

Seja X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ um conjunto aberto e $f\colon \Omega \times [a,b] \to X$ uma função qualquer. Sabemos que o problema de encontrar uma solução no sentido de Carathéodory da EDO

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{4.1}$$

com condição inicial $x(s_0) = x_0,\ s_0 \in [a,b]$, é o mesmo problema de encontrar uma solução da equação integral

$$x(t) - x_0 = \int_{s_0}^{t} f(x(s),s)ds \tag{4.2}$$

em que a igualdade vale quase sempre em $[a,b]$ e a integral que aparece no lado direito da equação (4.2) é no sentido da integral de Lebesgue.

Suponhamos que exista uma solução $x\colon [a,b] \to X$ de (4.1) e consideremos a aplicação $F\colon \Omega \times [a,b] \to X$ definida por

$$F(x,t) = \int_{s_0}^{t} f(x(s),s)ds.$$

Assim, se x for uma solução no sentido de Carathéodory da EDO (4.1), com condição inicial $x(s_0) = x_0$, em $[s_0,t] \subset [a,b]$, então x será absolutamente contínua em $[s_0,t]$ e, portanto, existirá uma sequência de funções escadas $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para x. Desta forma, se para cada $k \in \mathbb{N}$ tivermos uma divisão marcada $D_k = \{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]), i = 1,\ldots,|D_k|\}$, poderemos tomar a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, em que $x_k(\tau) = x(\tau_i)$, com $\tau \in [\alpha_{i-1},\alpha_i]$ e, construindo divisões marcadas δ-finas, poderemos concluir que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para x.

Assumindo que f é contínua na primeira variável, obtemos, para $s \in [s_0,t]$,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k(s),s) = f(x(s),s)$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada para integrais de Lebesgue segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{s_0}^{t} f(x_k(s),s)ds = \int_{s_0}^{t} f(x(s),s)ds.$$

Fixando $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{t} f(x_k(s),s)ds &= \sum_{i=1}^{|D_k|} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x(\tau_i),s)ds \\ &= \sum_{i=1}^{|D_k|} [F(x(\tau_i),\alpha_i) - F(x(\tau_i),\alpha_{i-1})].\end{aligned}$$

Como x é solução da EDO (4.1), por (4.2), podemos escrever

$$x \simeq x_0 + \sum_{i=1}^{|D_k|} [F(x(\tau_i),\alpha_i) - F(x(\tau_i),\alpha_{i-1})].$$

Notamos que as somas que aparecem na aproximação de x acima são as somas de Riemann usadas na definição da integral de Kurzweil (veja Definição 2.1.3). Assim, se tomarmos de forma conveniente as divisões marcadas, poderemos concluir que uma solução da equação (4.1) também será uma solução da equação integral

$$x(t) - x_0 = \int_{s_0}^{t} DF(x(\tau),t),$$

a qual fornece, exatamente, a definição de uma solução de uma EDO generalizada. Para mais detalhes, o leitor pode consultar (KURZWEIL, 1957).

4.2 Soluções de EDOs generalizadas

Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $O \subset X$ um conjunto aberto. Considere $\Omega = O \times J$, em que $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e seja $F : \Omega \to X$.

Definição 4.2.1 ((SCHWABIK, 1992), Definition 3.1)**.** Uma função $x : J \to O$ será dita uma **solução** da equação diferencial ordinária generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{4.3}$$

no intervalo $J \subset \mathbb{R}$, se $(x(t),t) \in \Omega$ para todo $t \in J$ e se

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t)$$

estiver satisfeita para quaisquer $s_1, s_2 \in J$ em que a integral do lado direito da equação acima é no sentido da integral de Kurzweil (Definição 2.1.3).

Note que a existência de uma solução da EDO generalizada (4.3) não implica na existência de uma solução de Carathéodory da EDO (4.1), pois a integral de Kurzweil é mais geral do que a integral de Lebesgue. Note, ainda que o símbolo $\frac{dx}{d\tau}$ não significa que a solução de (4.3) tenha derivada, como mostra o exemplo a seguir, emprestado de (SCHWABIK, 1992).

Exemplo 4.2.2. Seja $r : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que não possui derivada em qualquer ponto do intervalo $[0,1]$. Defina uma função $F : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ por $F(x(\tau),t) = r(t)$. Neste caso, pela definição de integral, temos

$$\int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t) = \int_{s_1}^{s_2} Dr(t) = r(s_2) - r(s_1), \quad s_1, s_2 \in [0,1],$$

o que significa que a função $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $x(s) = r(s)$ para $s \in [0,1]$, é uma solução da equação

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) = Dr(t),$$

porém x não possui derivada em qualquer ponto do intervalo $[0,1]$.

A fim de obter informações à respeito de uma solução $x : J \to O$ da EDO generalizada (4.3), apresentaremos uma classe especial de funções $F : \Omega \to X$.

Definição 4.2.3. Diremos que uma função $F : \Omega \to X$ pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, se existir uma função não decrescente $h : J \to \mathbb{R}$ e uma função contínua e crescente $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, com $\omega(0) = 0$, tal que as seguintes condições valem:

(i) $\|F(x,t_2) - F(x,t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$, para quaisquer (x,t_2), $(x,t_1) \in \Omega$;

(ii) $\|F(x,t_2) - F(x,t_1) - F(y,t_2) + F(y,t_1)\| \leq \omega(\|x-y\|)|h(t_2) - h(t_1)|$, para quaisquer (x,t_2), (x,t_1), (y,t_2), $(y,t_1) \in \Omega$.

Em particular, se $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ for a função identidade, escrevemos $\mathscr{F}(\Omega,h)$ no lugar de $\mathscr{F}(\Omega,h,\omega)$.

A classe $\mathscr{F}(\Omega,h)$, definida acima, permite obter várias propriedades qualitativas das soluções de uma EDO generalizada. Uma dessas propriedades é a existência local e unicidade de soluções. As demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em (SCHWABIK, 1992) para o caso n-dimensional e em (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021) para um espaço de Banach qualquer.

Teorema 4.2.4. Suponha que $F : \Omega \to X$ pertença à classe $\mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h\colon J \to \mathbb{R}$ seja uma função não decrescente e contínua à esquerda. Assuma que, para cada $(\widetilde{x},t_0) \in \Omega$, tem-se $(\widetilde{x}_+,t_0) \in \Omega$, em que $\tilde{x}_+ = \widetilde{x} + F(\widetilde{x},t_0^+) - F(\widetilde{x},t_0)$. Então existirão $\Delta > 0$ e uma única solução $x : [t_0,t_0+\Delta] \to X$ da EDO generalizada (4.3) no intervalo $[t_0,t_0+\Delta]$ satisfazendo $x(t_0) = \widetilde{x}$.

Ressaltamos que a continuidade à esquerda da função h no Teorema 4.2.4 garante que as soluções da EDO generalizada (4.3) também sejam contínuas à esquerda.

Outro resultado importante é o seguinte.

Lema 4.2.5. Se $x : J \to X$ for uma solução da EDO generalizada (4.3) e $F \in \mathscr{F}(\Omega,h)$, então x será uma função de variação limitada e, portanto, regrada.

Apresentaremos, mais adiante, um resultado que trata da existência e da unicidade de uma solução maximal para a EDO generalizada (4.3). Antes de enunciarmos tal resultado, vejamos alguns conceitos.

Definição 4.2.6. Sejam $t_0 \in [a,b]$, $\Delta > 0$ e $x : [t_0,t_0+\Delta] \to X$ uma solução da EDO generalizada (4.3) com $x(t_0) = \widetilde{x}$.

(i) Uma solução $y : [t_0,t_0+\sigma] \to X$, $\sigma > 0$, de (4.3) será dita **prolongamento** de x, se $[t_0,t_0+\Delta] \subset [t_0,t_0+\sigma] \subset [a,b]$ e $x(t) = y(t)$ para $t \in [t_0,t_0+\Delta]$.

(ii) A solução x de (4.3), com $x(t_0) = \widetilde{x}$, definida para todo $t \geq t_0$ será dita **maximal**, se existir um valor $b(\widetilde{x},t_0) > t_0$ tal que x existe sobre $[t_0,b(\widetilde{x},t_0))$ e não pode ser prolongada para um intervalo maior do que $[t_0,\beta]$, em que $\beta \geq b(\widetilde{x},t_0)$. Equivalentemente, não existe um prolongamento da solução $x : [t_0,b(\widetilde{x},t_0)) \to X$ de (4.3).

No corolário seguinte, exibimos condições suficientes para que a EDO generalizada (4.3) admita uma única solução maximal. Tal resultado é necessário e de extrema importância nos Capítulos 5 e 6. Veja (ACUÑA, 2016), Corolário 4.13.

Corolário 4.2.7. Suponha que $F : \Omega \to X$ pertença à classe $\mathscr{F}(\Omega,h)$, em que $h\colon J \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e contínua à esquerda. Então, para todo $(\widetilde{x},t_0) \in \Omega$, existirá uma única solução maximal definida em $[t_0,\infty)$ de (4.3) satisfazendo $x(t_0) = \widetilde{x}$.

4.3 EDOs generalizadas lineares homogêneas

Nesta seção, estamos interessados em estudar EDOs generalizadas para o caso particular em que a função $F : X \times J \to X$ é dada por $F(x,t) = A(t)x$, em que $A : J \to L(X)$ é um operador localmente de variação limitada em J e $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (limitado ou ilimitado). Neste caso, a equação

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x] \tag{4.4}$$

é conhecida como **EDO generalizada linear homogênea**.

De acordo com a Definição 4.2.1, uma solução de (4.4) no intervalo $[a,b] \subset J$ é uma função $x : [a,b] \to X$ que satisfaz a igualdade

$$x(s_2) = x(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} D[A(t)x(\tau)],$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a,b]$.

Note que a integral de Kurzweil da expressão acima é aproximada por somas da forma

$$\sum_j [A(t_j) - A(t_{j-1})]x(\tau_j).$$

Assim, podemos denotar a integral $\int_a^b D[A(t)x(\tau)]$ pela forma convencional $\int_a^b d[A(s)]x(s)$ para a integral de Perron-Stieltjes como já mencionamos no Exemplo 2.1.7. Portanto x será solução de (4.4) no intervalo $[a,b]$, se tivermos

$$x(s_2) = x(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]x(s),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [a,b]$.

No caso de um problema de valor inicial (PVI), dados $t_0 \in [a,b]$ e $\widetilde{x} \in X$, diremos que uma função $x : [a,b] \to X$ é uma solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} & = & D[A(t)x], \\ x(t_0) & = & \widetilde{x}, \end{cases} \tag{4.5}$$

no intervalo $[a,b] \subset J$, sempre que

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s),$$

para qualquer $t \in [a,b]$.

Para obtermos propriedades de existência e unicidade de solução global para o PVI (4.5), assumiremos que o operador $A : J \to L(X)$ satisfaça as seguintes condições:

(H1) $A \in BV([a,b], L(X))$ para todo subintervalo compacto $[a,b] \subset J$, isto é, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$;

(H2) Para todo $t \in J$, valem as igualdades

$$(I - [A(t) - A(t^-)])^{-1} = [I - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X)$$

e

$$(I + [A(t^+) - A(t)])^{-1} = [I + \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X),$$

em que I denota o operador identidade em $L(X)$.

Observação 4.3.1. Como $A \in BV([a,b],L(X)) \subset G([a,b],L(X))$, os limites laterais

$$A(t^+) = \lim_{r \to t^+} A(r) \in L(X), \quad t \in [a,b),$$

$$A(t^-) = \lim_{r \to t^-} A(r) \in L(X), \quad t \in (a,b],$$

existem. Dado $\varepsilon > 0$, segue da Observação 2.1.17, item (iii), que os conjuntos

$$\{t \in [a,b), \|A(t^+) - A(t)\| \geq \varepsilon\} \quad \text{e} \quad \{t \in (a,b], \|A(t) - A(t^-)\| \geq \varepsilon\}$$

são finitos. Desta forma, tomando $\varepsilon = 1$, existe um conjunto finito $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset [a,b]$ tal que $\|A(t^+) - A(t)\| < 1$ para todo $t \in [a,b)$, com $t \neq t_i$, $i = 1, \ldots, m$, e $\|A(t) - A(t^-)\| < 1$ para todo $t \in (a,b]$, com $t \neq t_i$, $i = 1, \ldots, m$. Então

$$I + \Delta^+ A(t) \in L(X) \quad t \in [a,b), \quad t \neq t_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$I - \Delta^- A(t) \in L(X) \quad t \in (a,b], \quad t \neq t_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Assim, se $A : [a,b] \to L(X)$ for um operador linear de variação limitada em $[a,b]$, então a condição (H2) será válida, exceto por uma quantidade finita de pontos em $[a,b]$. Seja $B = \{t_1, \ldots t_m\}$ e considere $\widetilde{A}(t) = A(t)\chi_B(t)$ em que $\chi_B : [a,b] \to X$ é definida por

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Então $\widetilde{A} \in BV([a,b],L(X))$ e a hipótese (H2) será válida para todo $t \in [a,b]$.

O próximo resultado trata da existência global e unicidade de solução para o PVI (4.5). Esse resultado é consequência das Proposições 6.3 e 6.4 em (SCHWABIK, 1992).

Teorema 4.3.2. Assuma que o operador $A : J \to L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então o PVI (4.5) possui uma única solução definida no intervalo $[a,b] \subset J$.

Observação 4.3.3. Pelo Teorema 4.3.2, temos assegurada a existência global e unicidade de soluções de EDOs generalizadas lineares em intervalos ilimitados.

O teorema a seguir garante a existência de um operador que será bastante utilizado no Capítulo 5. Tal operador é conhecido como **operador fundamental** da EDO generalizada linear homogênea (4.4). A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (SCHWABIK, 1992), Teorema 6.13, para o caso em que X possui dimensão finita, e em (COLLEGARI, 2014), Teorema 2.15, para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 4.3.4. Suponha que o operador $A : J \to L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então existe um único operador $U : J \times J \to L(X)$ tal que

$$U(s,t) = I + \int_s^t d[A(r)]U(r,s) \tag{4.6}$$

para quaisquer $t,s \in J$. Além disso, para cada $s \in J$ fixado, $U(\cdot,s)$ será um operador de variação limitada. Este operador é chamado operador fundamental da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x].$$

O próximo resultado relaciona soluções de EDOs generalizadas lineares homogêneas com o seu operador fundamental. Este resultado será utilizado no próximo capítulo. Sua demonstração pode ser encontrada em (SCHWABIK, 1992), Teorema 6.14, para o caso em que X possui dimensão finita, e em (COLLEGARI, 2014), Teorema 2.15, para o caso em que X possui dimensão infinita.

Teorema 4.3.5. Suponha que o operador $A : J \to L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então para todo $s \in [a,b] \subset J$, a única solução $x : [a,b] \to X$ em $[a,b] \subset J$ do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} & = & D[A(t)x], \\ x(s) & = & \widetilde{x}, \end{cases}$$

será dada pela relação

$$x(t) = U(t,s)\tilde{x}, \quad t \in [a,b], \tag{4.7}$$

em que $U : J \times J \to L(X)$ é dado por (4.6).

Além disso, o operador fundamental satisfaz as propriedades seguintes. Veja (COLLEGARI, 2014).

Teorema 4.3.6. Suponha que $A : J \to L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Então $U : J \times J \to L(X)$, que é unicamente determinado por (4.6), satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $U(t,t) = I$, para $t \in J$;

(b) Para todo intervalo compacto $[a,b] \subset J$, existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|U(t,s)\| &\leq M, \quad \text{para quaisquer } t,s \in [a,b], \\ \operatorname{var}_a^b U(t,\cdot) &\leq M, \quad \text{para qualquer } t \in [a,b], \\ \operatorname{var}_a^b U(\cdot,s) &\leq M, \quad \text{para qualquer } s \in [a,b]; \end{aligned}$$

(c) Para $r,s,t \in J$, vale
$$U(t,s) = U(t,r)U(r,s);$$

(d) $U(t,s) \in L(X)$ é invertível para quaisquer $t,s \in J$;

(e) Para $t,s \in J$, temos
$$\begin{aligned} U(t^+,s) &= [I+\Delta^+ A(t)]U(t,s), \\ U(t^-,s) &= [I-\Delta^- A(t)]U(t,s), \\ U(t,s^+) &= U(t,s)[I+\Delta^+ A(t)]^{-1}, \\ U(t,s^-) &= U(t,s)[I-\Delta^- A(t)]^{-1}, \end{aligned}$$
sempre que os limitem envolvidos fizerem sentido;

(f) Para $t,s \in J$, vale
$$[U(t,s)]^{-1} = U(s,t).$$

A próxima observação foi extraída de (FEDERSON; SCHWABIK, 2006).

Observação 4.3.7. Consideremos uma equação diferencial ordinária da forma
$$\dot{x} = f(x,t) \tag{4.8}$$
em que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $f : B \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uma função. Sabemos que uma solução de (4.8), com condição inicial $x(t_0) = x_0$, poderá ser escrita na forma
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau, \quad t,t_0 \in [a,b],\ t \geq t_0, \tag{4.9}$$
se a integral existir em algum sentido. Se a integral em (4.9) for considerada no sentido de Riemann, Lebesgue ou Perron, por exemplo, poderemos aproximá-la por uma soma da forma
$$\sum_{i=1}^{m} f(x(\tau_i),\tau_i)(s_i - s_{i-1}),$$
em que $t_0 = s_1 \leq s_2 \leq s_m = t$ é uma partição suficientemente fina do intervalo $[t_0,t]$ e $\tau_i \in [s_{i-1},s_i]$, para cada $i = 1,2,\ldots,m$. Defina
$$F(x,s) = \int_{s_0}^{s} f(x,\sigma)d\sigma, \quad (x,s) \in B \times \mathbb{R}.$$
Então, pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 2.1.14), a integral em (4.9) pode ser aproximada por
$$\sum_{i=1}^{m} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(x(\tau_i),\sigma)d\sigma = \sum_{i=1}^{m} [F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1})]. \tag{4.10}$$
Neste caso, o lado direito da igualdade (4.10) aproxima a integral de Kurzweil (Definição 2.1.3) a qual, quando considerada em (4.9), dá origem a uma EDO generalizada da forma
$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t) \tag{4.11}$$

como na Definição 4.2.1. Logo, se $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ for uma solução para a EDO generalizada (4.11), com condição inicial $y(t_0) = x_0$, teremos

$$x(t) - x_0 \overset{(4.9)}{=} \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)d\tau \overset{(4.10)}{=} \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau),t) = y(t) - x_0.$$

Portanto a solução da EDO (4.8) pode ser identificada como uma solução da EDO generalizada (4.11).

As considerações que seguem também podem ser encontradas em (SCHWABIK, 1992).

Observação 4.3.8. Consideremos

$$\dot{x} = F(t)x, \tag{4.12}$$

em que $F : J \subset \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^n)$ é localmente Lebesgue ou Perron integrável em J. Dado $a \in J$, defina

$$A(t) = \int_{a}^{t} F(s)ds, \quad t \in J. \tag{4.13}$$

Como consequência do Lema de Saks-Henstock (Lema 2.1.14), a função A, dada em (4.13), é contínua. Então

$$I + \Delta^{+}A(t) = I \quad \text{e} \quad I - \Delta^{-}A(t) = I \quad \text{para todo } t \in J.$$

Portanto A satisfaz (H2). Agora, consideremos a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{4.14}$$

e seu operador fundamental $U : J \times J \to L(X)$ dado por (4.6). Se $s,t,\tau \in J$, então

$$U(t,s) = U(\tau,s) + \int_{\tau}^{t} d[A(r)]U(r,s) = U(\tau,s) + \int_{\tau}^{t} F(r)U(r,s)dr, \tag{4.15}$$

ou seja,

$$U(t,s) = \Phi(t,\tau)U(\tau,s), \tag{4.16}$$

em que $\Phi : J \times J \to L(\mathbb{R}^n)$ é a matriz fundamental da EDO linear (4.12) e a segunda igualdade da equação (4.15) segue do Teorema 2.1.20, já que U é regrada (Teorema 4.3.4) e A é contínua e, portanto, regrada. Além disso, multiplicando (4.16) por $U(s,t)$ e usando as propriedades do operador fundamental U, dadas no Teorema 4.3.6, obtemos

$$U(t,\tau) = \Phi(t,\tau), \quad \text{para quaisquer } t,\tau \in J.$$

Assim, a matriz fundamental de uma EDO linear do tipo (4.12) pode ser relacionada com o operador fundamental de uma EDO generalizada como em (4.14) pela igualdade (4.16).

4.4 EDOs generalizadas lineares não homogêneas

Sejam $A : J \to L(X)$ um operador localmente de variação limitada em J, $g : J \to X$ uma função Perron integrável e consideremos $F : X \times J \to L(X)$ definida por $F(x,t) = A(t)x + g(t)$. Neste caso, dizemos que uma EDO generalizada do tipo

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)]$$

é uma **EDO generalizada linear não homogênea**.

Dados $t_0 \in [a,b] \subset J$ e $\widetilde{x} \in X$, diremos que a função $x : [a,b] \to X$ é uma solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} & = & D[A(t)x + g(t)], \\ x(t_0) & = & \widetilde{x}, \end{cases} \tag{4.17}$$

no intervalo $[a,b] \subset J$, se tivermos

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} D[A(s)x(\tau) + g(s)] = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} (D[A(s)x(\tau)] + D[g(s)]),$$

para todo $t \in [a,b]$.

Como já foi observado anteriormente, podemos escrever

$$\int_{t_0}^{t} D[A(s)x(\tau)] = \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^{t} D[g(s)] = g(t) - g(t_0).$$

Portanto $x : [a,b] \to X$ será solução do PVI (4.17) em $[a,b]$ se, e somente se, tivermos

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} d[A(s)]x(s) + g(t) - g(t_0), \quad t \in [a,b]. \tag{4.18}$$

O seguinte resultado diz respeito à existência e unicidade de solução global para EDOs generalizadas lineares não homogêneas e é uma consequência de (SCHWABIK, 1999, Proposition 2.8).

Teorema 4.4.1. Seja $A \in BV_{loc}(J, L(X))$, $g \in BV_{loc}(J,X)$ e assuma que condição (H2) seja satisfeita. Então, para $s_0 \in J$ e $x_0 \in X$, o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)], \\ x(s_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.19}$$

terá uma única solução $x \colon J \cap [s_0, \infty) \to X$ em $J \cap [s_0, \infty)$.

O próximo resultado é conhecido como Fórmula da Variação das Constantes para EDOs generalizadas lineares e sua prova pode ser encontrada em (COLLEGARI, 2014), Teorema 2.22 ou em (COLLEGARI; FEDERSON; FRASSON, 2018).

Teorema 4.4.2 (Fórmula da Variação das Constantes). Suponha que $A : J \to L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2) e $G : X \times J$ seja uma função tal que, para cada $x \in G([a,b],X)$, a integral de Kurzweil $\int_a^b DG(x(\tau),t)$ exista, para todo $[a,b] \subset J$. Se $t_0 \in [a,b]$ e x for uma solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + G(x,t)], \\ x(t_0) &= \widetilde{x}, \end{cases}$$

então x poderá ser escrita como

$$x(t) = U(t,t_0)\tilde{x} + \int_{t_0}^{t} DG(x(\tau),s) - \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma)] \left(\int_{t_0}^{\sigma} DG(x(\tau)s) \right), \quad t \in [a,b],$$

em que $U : J \times J \to L(X)$ é o operador fundamental dado por (4.6).

Note que, no caso particular em que $G(x(\tau),t) = g(t)$, com $g : J \to X$ uma função, temos

$$\int_{t_0}^{t} D[G(x(\tau),s)] = \int_{t_0}^{t} D[g(s)] = g(t) - g(t_0)$$

para quaisquer $t, t_0 \in [a,b] \subset J$ e $x \in G([a,b],X)$. Dessa forma, o resultado a seguir é consequência imediata dos Teoremas 4.4.2 e 2.1.18.

Corolário 4.4.3. Sejam $A \colon J \to L(X)$ satisfazendo as condições (H1) e (H2) e $g : J \to X$ uma função Perron integrável. Então a única solução $x : [a,b] \to X$ de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} &= D[A(t)x + g(t)], \\ x(t_0) &= \widetilde{x}, \end{cases}$$

em $[a,b] \subset J$, será dada por

$$x(t) = U(t,t_0)\widetilde{x} + (g(t) - g(t_0)) - \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma](g(\sigma) - g(t_0)), \quad t \in [a,b]. \tag{4.20}$$

Observação 4.4.4. Seja $\psi(t) = g(t) - g(t_0)$, com $g : J \subset \mathbb{R} \to X$ uma função Perron integrável e $t_0 \in J$. Pelo Teorema de Integração por Partes para a integral de Perron-Stieltjes (Teorema 2.1.19), temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} d_\sigma[U(t,\sigma)](\psi(\sigma)) &\overset{(2.2)}{=} U(t,t)(\psi(t)) - \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma)d\widetilde{\psi}(t) \\ &\overset{(2.1)}{=} U(t,t)(\psi(t)) - \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \\ &= g(t) - g(t_0) - \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma)(g(\sigma) - g(t_0))d\sigma. \end{aligned}$$

Então, usando as igualdades acima, podemos reescrever (4.20) como

$$x(t) = U(t,t_0)\widetilde{x} + \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma)(g(\sigma) - g(t_0))d\sigma, \quad t \in [a,b].$$

CAPÍTULO

5

OSCILAÇÃO DE SOLUÇÕES DE EDOS GENERALIZADAS

Neste capítulo, apresentamos resultados inéditos a respeito de oscilação de soluções de EDOs generalizadas que assumem valores em $\mathbb{R}^n$ e em um espaço de Banach qualquer. Para este fim, propomos definições de oscilações de funções em espaços abstratos e utilizamos a teoria de processos de evolução em EDOs generalizadas para obter critérios de oscilação e não oscilação. Vale ressaltar que não existem na literatura muitos trabalhos sobre oscilação de soluções de equações diferenciais em espaços de Banach. Em particular, para a classe de EDOs generalizadas, nem mesmo a definição de soluções oscilatórias existia até o momento. Neste capítulo, provamos resultados de oscilação para pontos em espaços de Banach com respeito a um processo de evolução linear regrado. Para provar tais resultados, propomos as definições de oscilação forte e oscilação pullback. Neste sentido, os teoremas demonstrados neste capítulo são gerais e de extrema importância, já que podem ser aplicados a qualquer classe de equações diferenciais que gere um processo de evolução. As principais referências para este capítulo são (FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012), (SLAVÍK, 2013) e (TABOR, 2002). Todos os resultados que serão apresentados foram incluídos nos artigos (AP. SILVA; BONOTTO; FEDERSON, 2021) e (AP. SILVA; FEDERSON, 2021).

5.1 EDOs generalizadas $\times$ equações integrais com retardamento

Nesta seção, tratamos da correspondência entre equações integrais com retardamento e EDOs generalizadas. Os resultados que apresentaremos podem ser encontrados em (FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012) para intervalos compactos e (SLAVÍK, 2013) para intervalos quaisquer.

Sejam $\tau, r > 0$ números dados e $t_0 \in \mathbb{R}$. Uma **equação diferencial funcional com retardamento** é, usualmente, dada da forma

$$\dot{y}(t) = f(y_t, t), \quad t \in [t_0, \infty),$$

em que $f : P \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, $P \subset G([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e y_t é dado por $y_t(\theta) = y(t+\theta), \theta \in [-r,0]$, para cada $t \in [t_0, \infty)$. A forma integral da EDF retardada acima é dada por

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)ds, \quad t \in [t_0, \infty),$$

em que a integral pode ser considerada, por exemplo, no sentido de Riemann, Lebesgue ou Kuzweil-Henstock. Aqui, trabalharemos com a forma

$$Dy = f(y_t, t)Dg, \tag{5.1}$$

em que Dy e Dg denotam as derivadas distribucionais das funções y e g no sentido de L. Schwartz. Como comentado no Capítulo 2, em geral, a função g não é uma função de variação limitada. Então, usaremos a forma integral da equação (5.1), em que g é uma função regrada. Assim, y será dita uma solução de (5.1) se satisfizer a seguinte equação integral

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)dg(s), \quad t \in [t_0, \infty),$$

em que a integral no lado direito é a integral de Perron-Stieltjes com respeito à função regrada g. Esta equação integral será chamada de **equação integral com retardamento**.

Sejam $O \subset G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ e $P = \{y_t, y \in O, t \in [t_0, \infty)\} \subset G([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Considere uma função não decrescente $g : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ e uma função $f : P \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$.

Em (SLAVÍK, 2013) (ver também (FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012) para intervalos compactos), o autor mostra que sob certas suposições uma equação integral com retardamento da forma

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)dg(s), \quad t \in [t_0, \infty) \tag{5.2}$$

pode ser convertida em uma EDO generalizada da forma

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{5.3}$$

em que x assume valores em O. Em outras palavras, é possível transformar uma equação integral com retardamento, cuja solução assume valores em $\mathbb{R}^n$, em uma EDO generalizada, cuja solução assume valores em um espaço de Banach infinito dimensional. O lado direito de F desta equação generalizada (equação (5.3)) é dado por

$$F(x,t)(v) = \begin{cases} 0, & t_0 - r \le v \le t_0 \\ \int_{t_0}^{v} f(x_s, s)dg(s), & t_0 \le v \le t \le \infty \\ \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s), & t \le v \le \infty \end{cases} \tag{5.4}$$

para cada $x \in O$ e $t \in [t_0, \infty)$. Ainda em (SLAVÍK, 2013), é provado que a relação entre a solução x da EDO generalizada (5.3) e a solução y da equação integral com retardamento (5.2) é descrita por

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in [t_0 - r, t] \\ y(t), & v \in [t, \infty), \end{cases}$$

em que $t \in [t_0, \infty)$. Para a prova de tal resultado, utiliza-se as seguintes propriedades abaixo, que reescrevemos do Capítulo 2.

(I) A função $f\colon P \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ é localmente Perron-Stieltjes integrável com respeito a função $g\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ para cada $x \in O$.

(II) Existe uma função localmente Perron-Stieltjes integrável $M : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ com respeito a g tal que para todo $x \in O$ e quaisquer $u_1, u_2 \in [t_0, \infty)$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s) dg(s) \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s) dg(s).$$

(III) Existe uma função localmente Perron-Stieltjes integrável $L : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ com respeito a g tal que para todo $x, y \in O$ e quaisquer $u_1, u_2 \in [t_0, \infty)$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(x_s, s) - f(y_s, s)] dg(s) \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) ||x_s - y_s|| dg(s).$$

No que segue, apresentamos a propriedade de pronlogamento.

Definição 5.1.1. Seja O um subconjunto de $G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$. Diremos que O tem a **propriedade de prolongamento**, se para cada $y \in O$ e cada $\bar{t} \in [t_0 - r, \infty)$, a função $\bar{y}$ dada por

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 - r \leq t \leq \bar{t} \\ y(\bar{t}), & \bar{t} < t \leq \infty \end{cases}$$

também for um elemento de O.

Os próximos teoremas garantem a conversão de uma equação integral com retardamento em uma EDO generalizada e vice-versa. Para uma prova, o leitor pode consultar as referências (FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012) e (SLAVÍK, 2013).

Teorema 5.1.2. Assuma que $O \subset G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ tem a propriedade de prolongamento. Para cada $t \geq t_0$, considere o conjunto $P = \{y_t, y \in O, t \in [t_0, \infty)\}$ e $\phi \in P$. Tome $g : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente, $f : P \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições (I), (II), (III) e $F : O \times [t_0, \infty) \to G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ dada por (5.4). Se $y \in O$ é uma solução da equação integral com retardamento

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s) dg(s), \quad t \in [t_0, \infty),$$

com $y_{t_0} = \phi$, então $x\colon [t_0,\infty) \to O$ dada por

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in [t_0 - r, t] \\ y(t), & v \in [t,\infty) \end{cases}$$

é uma solução da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \quad t \in [t_0,\infty).$$

Ainda em (SLAVÍK, 2013), temos a seguinte recíproca.

Teorema 5.1.3. Sob as condições do Teorema 5.1.2, se $x : [t_0,\infty) \to O$ for uma solução da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t),$$

com condição inicial

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \phi(v - t_0), & t_0 - r \leq v \leq t_0 \\ x(t_0)(t_0), & t_0 \leq v \leq \infty, \end{cases}$$

então a função $y \in O$ definida por

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v), & t_0 - r \leq v \leq t_0 \\ x(v)(v), & t_0 \leq v \leq \infty \end{cases}$$

será uma solução da equação integral com retardamento

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)dg(s), \quad t \in [t_0,\infty),$$

com $y_{t_0} = \phi$.

As considerações que seguem foram adaptadas de (HARTUNG *et al.*, 2006), página 437.

Observação 5.1.4. Consideremos a seguinte equação integral com retardo distribuído

$$y(t) - y(t') = \int_{t'}^{t} r(s)y(s-\tau)dg(s), \tag{5.5}$$

em que $r\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é uma função e $\tau > 0$.

A equação integral (5.5) pode ser escrita na forma mais geral

$$y(t) - y(t') = \int_{t'}^{t} f(y_s, s)dg(s). \tag{5.6}$$

Aqui, $f : U \times [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é definida em um conjunto $U = \{\phi, \phi\colon [-\tau,0] \to \mathbb{R}^n\}$. A função memória $y_t : [-\tau,0] \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$y_t(s) = y(t+s), \quad -\tau \leq s \leq 0.$$

Em outras palavras, uma equação integral com retardo distribuído do tipo (5.5) pode ser transformada em uma equação integral com retardamento da forma (5.6). De fato, podemos considerar a transformação

$$f(\phi,t) = r(t)\phi(-\tau).$$

Na próxima seção, utilizaremos os Teoremas 5.1.2 e 5.1.3 para provar que soluções oscilatórias de uma equação integral com retardamento também são soluções oscilatórias da EDO generalizada correspondente. E, mostraremos ainda que soluções oscilatórias de uma EDO generalizada também são soluções oscilatórias da equação integral com retardamento correspondente. Estes resultados são inéditos e de extrema importância pois, no Capítulo 3, apresentamos uma teoria de oscilação para equações integrais com retardo distribuído e podemos utilizar os resultados obtidos em tal capítulo, para concluir quando a EDO generalizada correspondente àquela equação integral com retardo distribuído possui ou não soluções oscilatórias. Isto é possível devido à Observação 5.1.4. Os resultados que serão demonstrados na próxima seção podem ser encontrados em (AP. SILVA; FEDERSON, 2021).

5.2 Oscilação em $G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$

Nosso interesse é construir uma teoria de oscilação para EDOs generalizadas em que as funções envolvidas nestas equações assumam valores em um espaço de Banach qualquer. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que não existem resultados na literatura à respeito de soluções oscilatórias para EDOs generalizadas, nem mesmo o conceito de oscilação.

No Capítulo 3, apresentamos critérios de oscilação e não oscilação para equações diferenciais com vários retardos e impulsos. Uma possibilidade é utilizar as conversões entre equações integrais com retardamento e EDOs generalizadas, apresentadas na seção anterior, para obter resultados de oscilação de soluções para as equações generalizadas. Assim, precisaremos introduzir a noção de oscilação para EDOs generalizadas. Primeiramente, trabalharemos com funções regradas que assumem valores em $\mathbb{R}^n$.

Toda a teoria apresentada nesta seção é inédita e nos fornece uma equivalência entre uma equação integral com retardamento e uma EDO generalizada no que diz respeito à oscilação de suas soluções. Propomos uma definição para oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias generalizadas, algo que até o momento não tinha sido estudado. Os resultados que apresentaremos aqui foram inseridos no artigo (AP. SILVA; FEDERSON, 2021).

Consideremos a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{5.7}$$

em que $F\colon G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n) \times [t_0, \infty) \to G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ é dada por (5.4), com $t_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Seja $J = [t_0 - r, \infty)$. Chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: como uma função $f\colon J \to \mathbb{R}^n$ é regrada se cada função componente de f for regrada, o espaço $G(J, \mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com o espaço $G(J, \mathbb{R}) \times G(J, \mathbb{R}) \times \ldots \times G(J, \mathbb{R})$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} F\colon G(J,\mathbb{R}^n) \times [t_0,\infty) & \to & G(J,\mathbb{R}^n) \\ (z,t) & \mapsto & F(z,t) : J \;\to\; \mathbb{R}^n \\ & & \qquad\qquad v \;\mapsto\; F(z,t)(v) = ([F(z,t)]_1(v), \ldots, [F(z,t)]_n(v)), \end{array}$$

em que cada $F(z,t)_j$, $j = 1,\ldots,n$, é uma função regrada de J para $\mathbb{R}$.

Definição 5.2.1. Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x : [t_0,\infty) \to G([t_0 - r,\infty),\mathbb{R}^n)$ uma solução da EDO generalizada (5.7). Diremos que $x(s)_j$ é positiva $q.s.$ no futuro, se existir $T_j \geq t_0$ tal que $(x(s))_j(v) > 0$, para $s,v \geq T_j$, para cada $j = 1,\ldots,n$ fixado.

Analogamente, definimos:

Definição 5.2.2. Seja $x : [t_0,\infty) \to G([t_0 - r,\infty),\mathbb{R}^n)$ solução da EDO generalizada (5.7), $x(s)_j$ será dita negativa $q.s.$ no futuro, se existir $T_j \geq t_0$ tal que $(x(s))_j(v) < 0$, para $s,v \geq T_j$, para cada $j = 1,\ldots n$ fixado.

Com as definições anteriores, somos capazes de definir oscilação de soluções para EDOs generalizadas da forma (5.7) no espaço das funções regradas.

Definição 5.2.3. Diremos que uma solução $x : [t_0,\infty) \to G([t_0 - r,\infty),\mathbb{R}^n)$ de (5.7) é não oscilatória se todas as funções componentes de $x(s)$ forem não oscilatórias, isto é, positivas ou negativas $q.s.$ no futuro. Caso contrário, diremos que x é **oscilatória**.

Teorema 5.2.4. Suponha que $O \subset G([t_0 - r,\infty),\mathbb{R}^n)$ tem a propriedade de pronlogamento. Assuma que as hipóteses dos Teoremas 5.1.2 e 5.1.3 sejam satisfeitas. Se $x : [t_0,\infty) \to O$ for uma solução oscilatória da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{5.8}$$

então a solução da equação integral com retardamento correspondente possuirá uma solução oscilatória. Reciprocamente, se $y\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ for uma solução oscilatória da equação integral com retardamento

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s,s)dg(s), \quad t \in [t_0,\infty), \tag{5.9}$$

então a EDO generalizada correspondente admitirá uma solução oscilatória.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que y seja uma solução não oscilatória da equação (5.9). Então todas as funções componentes de y são não oscilatórias. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $T \geq t_0$ tal que $y_j(v) > 0$ para quase todo $v \geq T$ e todo $j = 1,\ldots,n$ fixado. Pelo Teorema 5.1.2, para cada $t \in [t_0 - r,\infty)$

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in [t_0 - r, t] \\ y(t), & v \in [t,\infty) \end{cases}$$

é uma solução da EDO generalizada (5.8). Assim, tomando $t = T$, obtemos

$$x(T)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in [t_0 - r, T] \\ y(T), & v \in [T,\infty). \end{cases}$$

Por hipótese, para quase todo $v \geq T, y_j(v) > 0$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Assim,

$$[x(T)]_j(v) = y_j(T) > 0, \quad \text{para quase todo } v \geq T.$$

Então, para quase todo $s \geq T$ e todo $j = 1, \ldots, n$ fixado, temos

$$[x(s)]_j(v) = y_j(s) > 0, \quad \text{para quase todo } v \geq T.$$

Logo, x será uma solução não oscilatória da EDO generalizada (5.8).

Reciprocamente, suponhamos que $x\colon [t_0, \infty) \to O$ seja uma solução não oscilatória da equação (5.8). Podemos assumir, sem perda de generalidade que existe $T \geq t_0$ tal que $(x(s))_j(v) > 0$ para quase todos $s, v \geq T$ e $j = 1, \ldots, n$ fixado. Pelo Teorema 5.1.3,

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v), & t_0 - r \leq v \leq t_0 \\ x(v)(v), & t_0 \leq v < \infty \end{cases}$$

é uma solução da equação integral com retardamento (5.9). Fazendo $s = v = t \geq T$, obtemos $y(v) = x(v)(v)$. Logo, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixado, vale

$$y_j(t) = (x(t))_j(t) > 0, \quad \text{para quase todo } t \geq T,$$

e, então, y será uma solução não oscilatória da equação integral com retardamento (5.9). □

É claro que nesse momento surge uma pergunta natural:

Dada uma EDO generalizada qualquer, quando suas soluções serão oscilatórias?

Se $f(y_t, t)$ for linear, da forma

$$f(y_t, t) = -(P_1(t) y_1(t - \tau_1), \ldots, P_n(t) y_n(t - \tau_n)),$$

em que $P_j = \prod_{t - \tau_j \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_j(t), t \geq t_0$, então devido ao Teorema 5.2.4, podemos aplicar toda a teoria desenvolvida no Capítulo 3 para obtermos critérios de oscilação e não oscilação para as EDOs generalizadas correspondentes. Basta considerarmos a EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t),$$

com $F\colon O \times [t_0, \infty) \to G([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ dada por

$$[F(x,t)]_j(v) = \begin{cases} 0, & t_0 - r \leq v \leq t_0 \\ -\int_{t_0}^{v} P_j(s) x_j(s - \tau_j) dg(s), & t_0 \leq v \leq t \leq \infty \\ -\int_{t_0}^{t} P_j(s) x_j(s - \tau_j) dg(s), & t_0 \leq t \leq v < \infty, \end{cases}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

Porém, se a equação integral com retardamento correspondente à EDO generalizada dada não for do tipo que estudamos no Capítulo 3, não saberíamos dizer quando suas soluções oscilam. Por isso, faz-se necessário um estudo mais completo de oscilação para EDOs generalizadas quaisquer, que não dependam de sua equação integral com retardamento correspondente. Primeiramente, provaremos um critério de oscilação para EDOs generalizadas assumindo valores em $L(\mathbb{R}^n)$. Para provar tal critério, usaremos uma definição de oscilação mais geral que a apresentada em Definição 5.2.3.

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ e consideremos a seguinte EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{5.10}$$

em que $A\colon [t_0,\infty) \to L(\mathbb{R}^n)$ e $A(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, para todo $t \in [t_0,\infty)$. Como evidenciado no Capítulo 4, uma função $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (5.10), se

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} D[A(s)x(s)] = \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]x(s),$$

para cada $s_1, s_2 \in [t_0,\infty)$.

Uma função $f\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ será dita não crescente $q.s.$ no futuro, se existir $T \geq t_0$ tal que f é não crescente para quase todo $t \geq T$. Similarmente, diremos que $f\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é não decrescente $q.s.$ no futuro se existir $T \geq t_0$ tal que f é não decrescente para quase todo $t \geq T$. Uma função $f\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ será dita não oscilatória se ela for não crescente $q.s.$ ou não decrescente $q.s.$ no futuro. Caso contrário, f será dita oscilatória. Além disso, diremos que $f\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é não nula $q.s.$ no futuro se existir $T \geq t_0$ tal que $f(t) \neq 0$ para quase todo $t \geq T$.

Inpirados por estas definições, propomos os seguintes conceitos.

Definição 5.2.5. Diremos que $A\colon [t_0,\infty) \to L(\mathbb{R}^n)$ é um **operador oscilatório**, se existir $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que a função componente $A_j(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for oscilatória para $t \in [t_0,\infty)$, isto é, $A_j(t)$ não é nem não crescente $q.s.$ nem não decrescente $q.s.$ no futuro. Uma solução não trivial $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ da EDO generalizada linear (5.10) será dita **oscilatória**, se existir $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que a função componente $x_j\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ for oscilatória, isto é, x_j não é nem não crescente $q.s.$ nem não decrescente $q.s.$ no futuro.

Exemplo 5.2.6. As funções

- $g(t) = (\mathrm{sen}(t), \cos(t))$;
- $h(t) = (t^2, \mathrm{sen}(t))$;
- $i(t) = e^{\cos(t)}$;
- $j(t) = (1 - \cos(t)/2, t + \cos(t)/2)$;
- $k(t) = (t, |\cos(t)|)$;

- $l(t) = (\ln(\cos(t)), t, t^2)$,

definidas em $[t_0, \infty)$ são funções oscilatórias no sentido da Definição 5.2.5. Veja alguns exemplos destas trajetórias à seguir.

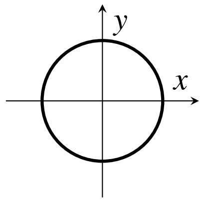


Figura 6 – Trajetória de g.

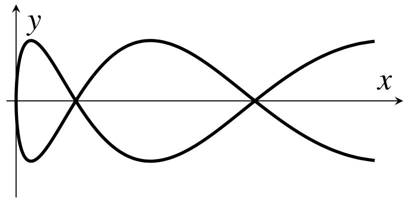


Figura 7 – Trajetória de h.

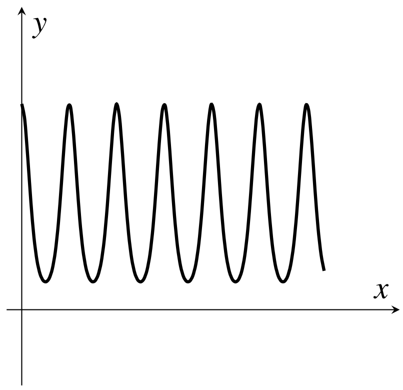


Figura 8 – Trajetória de i.

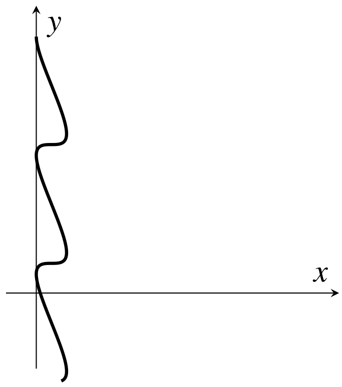


Figura 9 – Trajetória de j.

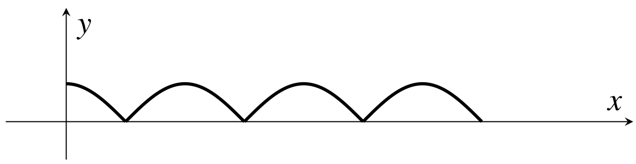


Figura 10 – Trajetória de k.

O próximo teorema fornece condições para oscilação de soluções de EDOs generalizadas lineares.

Teorema 5.2.7. Seja $x\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDO generalizada linear (5.10) tal que x é não nula $q.s.$ no futuro. Se $A\colon [t_0, \infty) \to L(\mathbb{R}^n)$ for um operador oscilatório, então x será oscilatória no sentido da Definição 5.2.5.

Demonstração. Assuma, sem perda de generalidade, que A_1 é uma função oscilatória e que x_1 é não decrescente $q.s.$ no futuro, ou seja, que existe $T \geq t_0$ tal que para quase todo $t \geq T$, x_1 é não decrescente $q.s.$. Como A_1 é oscilatória, existe um intervalo da forma $[a - \eta, a + \eta]$, $\eta > 0$, tal que

(i) $A_1(a+\eta)-A_1(a)\geq 0$ e,

(ii) $A_1(a)-A_1(a-\eta)\leq 0$.

Uma vez que A é Kurzweil integrável em cada subintervalo compacto de $[t_0,\infty)$, pelo Lema de Saks-Henstock (Lema 2.1.14), dado $\varepsilon>0$, existe um calibre δ de $[a-\eta,a+\eta]$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|[A(a+\eta)-A(a)]x(a)-\int_a^{a+\eta}d[A(t)]x(t)\right\| &< \varepsilon,\\ \left\|[A(a)-A(a-\eta)]x(a)-\int_{a-\eta}^{a}d[A(t)]x(t)\right\| &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Note que $D_1=(a,[a,a+\eta])$ e $D_2=(a,[a-\eta,a])$ são divisões δ-finas de $[a,a+\eta]$ e $[a-\eta,a]$, respectivamente.

Como x é uma solução da EDO generalizada linear (5.10), temos

$$\begin{aligned}x_1(a+\eta)-x_1(a) &= \int_a^{a+\eta}d[A_1(t)]x_1(t)\\ x_1(a)-x_1(a-\eta) &= \int_{a-\eta}^{a}d[A_1(t)]x_1(t).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&|x_1(a+\eta)-x_1(a)-[A_1(a+\eta)-A_1(a)]x_1(a)|\\ &=\left|\int_a^{a+\eta}d[A_1(t)]x_1(t)\ -[A_1(a+\eta)-A_1(a)]x_1(a)\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}&|x_1(a)-x_1(a-\eta)-[A_1(a)-A_1(a-\eta)]x_1(a)|\\ &=\left|\int_{a-\eta}^{a}d[A_1(t)]x_1(t)\ -[A_1(a)-A_1(a-\eta)]x_1(a)\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

e, então, valem

$$-\varepsilon+[A_1(a+\eta)-A_1(a)]x_1(a)<x_1(a+\eta)-x_1(a)<\varepsilon+[A_1(a+\eta)-A_1(a)]x_1(a)$$

e,

$$-\varepsilon+[A_1(a)-A_1(a-\eta)]x_1(a)<x_1(a)-x_1(a-\eta)<\varepsilon+[A_1(a)-A_1(a-\eta)]x_1(a).$$

Logo,

$$0\leq x_1(a+\eta)-x_1(a)<\varepsilon+[A_1(a+\eta)-A_1(a)]x_1(a),$$

e, por (i), segue que $x_1(a)\geq 0$. Além disso,

$$0\leq x_1(a)-x_1(a-\eta)<\varepsilon+[A_1(a)-A_1(a-\eta)]x_1(a),$$

e, utilizando (ii), temos $x_1(a)\leq 0$. Portanto, $x_1(a)=0$.

Repetindo este procedimento para todo subintervalo de $[t_0,\infty)$ em que A_1 não é nem não descrescente nem não crescente, concluímos que $x_1:[t_0,\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função nula $q.s.$ no futuro, o que é um absurdo. $\square$

Observação 5.2.8. Notamos que se $A\colon [t_0, \infty) \to L(\mathbb{R}^n)$ satisfaz condições (H1) e (H2) apresentadas no Capítulo 4, então existe uma única solução $x\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ da EDO generalizada linear (5.10) para o problema de valor inicial.

No que segue, apresentamos alguns exemplos que ilustram nosso critério de oscilação para EDOs generalizadas lineares tomando valores em $L(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 5.2.9. Considere a curva de Lissajous

$$A(t) = \left(\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}(2t)\right), \tag{5.11}$$

definida em $[0, \infty)$. Para cada $t \in [0, \infty)$, definimos o operador $A(t)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$A(t)x = \left(\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}(2t)\right)x = \left(\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)x_1(t), \operatorname{sen}(2t)x_2(t)\right),$$

para $x \in \mathbb{R}^2$. Então, pelo Teorema 5.2.7, cada solução da EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{5.12}$$

em que $A\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ é dado por (5.11), é oscilatória. De fato, a função $x\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$x(t) = (e^{\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2})}, e^{\operatorname{sen}(2t)}),$$

é uma solução oscilatória da equação (5.12), pois

$$\begin{aligned}
\int_0^t d[A(s)_1]x_1(s) &= \int_0^t d\left[\operatorname{sen}\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\right] e^{\operatorname{sen}(s+\frac{\pi}{2})} \\
&= \int_0^t \cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right) e^{\operatorname{sen}(s+\frac{\pi}{2})} ds \\
&= e^{\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2})} - e = x_1(t) - x_1(0).
\end{aligned}$$

A Figura 11 a seguir representa a trajetória da solução x da EDO generalizada linear (5.12).

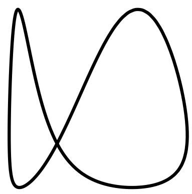


Figura 11 – Trajetória da solução x.

Exemplo 5.2.10. Considere a EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[(\chi_{[0,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t)\operatorname{sen}(t))x], \tag{5.13}$$

em que $\operatorname{sen}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Pelo Teorema 5.2.7, as soluções de (5.13) são oscilatórias. Note que a função $x\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) = e^{\operatorname{sen}(t)}$$

é uma solução oscilatória de (5.13), uma vez que

$$\begin{aligned}\int_0^t d[A(s)]x(s) &= \int_0^t d\left[\chi_{[0,\infty)\setminus\mathbb{Q}}(t)\text{sen}(t)\right] e^{\text{sen}(s)}\\ &= e^{\text{sen}(t)} - 1 = x(t) - x(0).\end{aligned}$$

Exemplo 5.2.11. Considere a equação generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[(|\cos(t)|, t, t^2, t^3)x] \tag{5.14}$$

definida em $[0,\infty)$. Como $|\cos(t)|$ é uma função oscilatória, pelo Teorema 5.2.7, cada solução de (5.14) é oscilatória.

Encerramos esta seção com uma importante observação.

Observação 5.2.12. Considere a EDO linear clássica

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \tag{5.15}$$

em que $a\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função Lebesgue integrável e $x\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ é diferenciável $q.s.$. Sabemos que todas as soluções da EDO clássica (5.15) podem ser representadas por

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Assim, de acordo com a definição clássica de oscilação, todas as soluções de (5.15) são não oscilatórias. Entretanto, ao se considerar a Definição 5.2.5 que propusemos, se $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ for oscilatória, então as soluções de (5.15) serão oscilatórias. De fato, considere por exemplo, a seguinte EDO linear clássica

$$\dot{x}(t) = \cos(t)x(t), \tag{5.16}$$

definida em $[0,\infty)$. Defina

$$A(t) = \int_0^t \cos(s)ds.$$

Como o operador A é oscilatório, segue que todas as soluções de (5.16) serão oscilatórias.

5.3 Oscilação em espaços de Banach

Estamos interessados em estudar oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias generalizadas, em que as funções envolvidas assumam valores em um espaço abstrato, por exemplo, um espaço de Banach.

Se X for um espaço de Banach qualquer, não poderemos utilizar as definições de oscilação e não oscilação apresentadas nas seções anteriores, uma vez que em alguns destes espaços não temos a noção de ordem ($\leq$ ou $\geq$).

O propósito desta seção é introduzir uma definição de oscilação sobre funções a valores abstratos e obter condições para oscilação e não oscilação de soluções de equações diferenciais ordinárias generalizadas, em que as funções envolvidas assumem valores em um espaço de Banach. Para isto, nos inspiraremos nas seguintes definições. Veja (TABOR, 2002).

Denotamos por $\mathbb{T}$ o parâmetro do tempo, isto é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, e denotamos $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{Z}_+$ por $\mathbb{T}_+$.

Definição 5.3.1. Diremos que a função $f : \mathbb{T}_+ \to \mathbb{R}$ oscila fortemente, se para cada $t \in \mathbb{T}_+$ tal que $f(t) \neq 0$, existir $s \in \mathbb{T}_+, s > t$, tal que $f(s)f(t) < 0$.

Definição 5.3.2. Uma função $f : \mathbb{T}_+ \to \mathbb{R}^n$ oscilará fortemente, se todas as suas funções componentes oscilarem fortemente.

Observação 5.3.3. Notamos que se na definição de oscilação apresentada no Capítulo 3, a oscilação ocorrer para todo $t \in [0,\infty)$, então a definição de oscilação forte, proposta nesta seção, é mais geral que a definição de oscilação apresentada no Capítulo 3. De fato, seja $X = \mathbb{R}^n$ e suponha que $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é não oscilatória. Então, todas as funções componentes de x são não oscilatórias. Sem perda de generalidade, suponhamos que x_1 seja positiva no futuro, isto é, existe $T \geq 0$ tal que $x_1(t) > 0$ para todo $t \in [T,\infty)$. Logo, para todo $t \in [T,\infty)$, temos $x_1(s)x_1(t) > 0$ para todo $s > t$. Logo, x não pode oscilar fortemente.

Agora, consideramos X um espaço de Banach real e $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Por X^* denotamos o espaço de todos os funcionais lineares em X.

Definição 5.3.4. Uma função $f : J \to X$ **oscilará fortemente**, se para cada $\zeta \in X^*$, a função $\zeta \circ f : J \to \mathbb{R}$ oscilar fortemente, ou seja, para cada $t \in J$ existir $s > t$ tal que

$$(\zeta \circ f)(s)(\zeta \circ f)(t) < 0.$$

Nosso interesse é estudar o comportamento oscilatório de soluções de EDOs generalizadas lineares, isto é, consideraremos $F(x,t) = A(t)x$, em que $A : J \to L(X)$ é localmente de variação limitada, ou seja, $A \in BV([a,b],L(X))$ para todo $[a,b] \subset J$ (hipótese (H1)). Além disso, A satisfaz a hipótese (H2), apresentada no Capítulo 4, a saber

$$(I + [A(t+) - A(t)])^{-1} \in L(X)$$
$$(I - [A(t) - A(t-)])^{-1} \in L(X),$$

em que $I \in L(X)$ é o operador identidade, $A(t+) = \lim_{s \to t+} A(s)$ and $A(t-) = \lim_{s \to t-} A(s)$.

Assuma que A satisfaça as condições (H1) e (H2). Os próximos resultados foram apresentados no Capítulo 4. Relembremo-os.

Teorema 5.3.5. Sejam $s \in J$ e $\widetilde{x} \in X$. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(s) = \widetilde{x}, \end{cases} \tag{5.17}$$

admite uma solução única definida em J.

Teorema 5.3.6. Existe um único operador $U: J \times J \to L(X)$ tal que

$$U(t,s) = I + \int_s^t d[A(r)]U(r,s) \tag{5.18}$$

para todo $t,s \in J$. Além disso, para cada $s \in J$ fixo, o operador $U(\cdot,s)$ é de variação limitada em J. O operador $U(t,s)$ é chamado o operador fundamental da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x].$$

Também valem as seguintes propriedades. Para cada $s \in J$, a única solução $x: J \to X$ do problema de valor inicial (5.17) é representada por $x(t) = U(t,s)\widetilde{x}$, em que $U: J \times J \to L(X)$ é o operador fundamental, o qual satisfaz:

- $U(t,t) = I$, para todo $t \in J$;
- $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$, para todo $t,r,s \in J$.

5.3.1 Processo de evolução linear regrado

Sejam X um espaço de Banach e $C(X)$ o espaço das transformações contínuas de X em X. Um **sistema dinâmico** em X é uma família $\{S(t,s), t \geq s\} \subset C(X)$ satisfazendo

(i) $S(t,t)x = x$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;

(ii) $S(t,\sigma) \circ S(\sigma,s) = S(t,s)$, para $t \geq \sigma \geq s$;

(iii) $\{(t,s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X, t \geq s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Por exemplo, considere o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(s) = x_s \in \mathbb{R}^n, \tag{5.19}$$

em que $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e diferenciável e, aqui, x_s representa a condição inicial do problema (5.19). Denote por $x(t,s,x_s)$ a única solução de (5.19). Defina $S(t,s): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geq s$ por $S(t,s)x_s = x(t,s,x_s), x_s \in \mathbb{R}^n$. É possível provar que $\{S(t,s), t \geq s\}$ é um sistema dinâmico com $X = \mathbb{R}^n$. Veja (CARVALHO, 2012).

No que segue, concentraremos nossa atenção no estudo de oscilação para processo de evolução linear regrado que definiremos abaixo. Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer, $\mathscr{P} = \{(t,s) \in J \times J, t \geq s\}$ e $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach. Motivados pela definição e exemplo anteriores, definimos (veja (AP. SILVA; BONOTTO; FEDERSON, 2021))

Definição 5.3.7. Um **processo de evolução linear regrado** em X é uma família de operadores $\{S(t,s), (t,s) \in \mathscr{P}\} \subset L(X)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $S(t,t)x = x$, para quaisquer $t \in J$ e $x \in X$;

(ii) $S(t,\sigma) \circ S(\sigma,s) = S(t,s)$, para todo $t \geq \sigma \geq s$;

(iii) $S(\cdot,t) \in G(J \cap [t,\infty), L(X))$ e $S(t,\cdot) \in G((-\infty,t] \cap J, L(X))$, para cada $t \in J$.

Observação 5.3.8. Note que a terceira condição da definição acima permite saltos nos parâmetros t ou s. Sendo assim, $S(t,s)x$ pode ser, por exemplo, descontínua (regrada) nas variáveis t e s, como mostra o Exemplo 5.3.9 abaixo. Caso $S(t,s)x$ seja contínua em t,s e x, teremos um sistema dinâmico usual.

Exemplo 5.3.9. Sejam $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função descontínua e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Perron-Stieltjes integrável com respeito a u. Então, o mapa $t \mapsto \int_s^t f(r)du(r)$ está em $G(\mathbb{R},\mathbb{R})$ para todo $s \in \mathbb{R}$ (veja (FEDERSON, 2002b), Teorema 1). Assim, a família $\{S(t,s),(t,s) \in \mathscr{P}\}$, dada por

$$S(t,s)x = xe^{-\int_s^t f(r)du(r)},$$

define um processo de evolução linear regrado em $\mathbb{R}$.

Definição 5.3.10. A **órbita pullback** de um subconjunto $B \subset X$ no tempo $t \in \mathbb{R}_+$, é representada por

$$\gamma_p(B,t) = \bigcup_{s \leq t} S(t,s)B.$$

Os processos de evolução lineares regrados autônomos são aqueles que satisfazem $S(t,s) = S(t-s,0)$, para todo $t \geq s$. Neste caso, se definirmos $T(t) = S(t,0) \in L(X)$, teremos

(i) $T(0)x = x$, para cada $x \in X$;

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$, para quaisquer $t,s \in [0,\infty)$;

(iii) $T \in G(\mathbb{R}_+, L(X))$.

Uma família $\{T(t),\, t \geq 0\}$ com as propriedades acima será dita um **semigrupo linear regrado**. Vale ressaltar que, através de um semigrupo linear regrado $\{T(t),\, t \geq 0\}$, podemos definir um processo de evolução linear regrado $\{S(t,s),(t,s) \in \mathscr{P}\}$ fazendo $S(t,s) = T(t-s)$, com $t \geq s$.

Definição 5.3.11. A **órbita positiva** de um ponto $x \in X$ de um semigrupo regrado $\{T(t),\, t \geq 0\} \subset L(X)$ é representada por

$$O_T(x) = \{T(t)x,\, t \geq 0\} = \bigcup_{t \geq 0} T(t)x.$$

Assuma que o operador $A\colon J \to L(X)$ satisfaça as condições (H1) e (H2). Para cada $(x,s) \in \Omega = X \times J$, denotamos por $x_s = x(t,s,x_s)$ a única solução da EDO generalizada linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \\ x(s) = x_s, \end{cases} \tag{5.20}$$

em que $t \in J$. Defina

$$S(t,s) : X \to X, \text{ por } S(t,s)x_s = x(t,s,x_s), \tag{5.21}$$

em que $x(s) = x_s$.

A prova do próximo resultado é consequência do Teorema 5.3.6.

Teorema 5.3.12. A família $\{S(t,s), (t,s) \in \mathscr{P}\}$ dada por (5.21), em que A satisfaz as condições (H1) e (H2) gera um processo de evolução linear regrado.

Demonstração. A família $\{U(t,s), (t,s) \in \mathscr{P}\}$ gera um processo de evolução linear regrado. □

5.3.2 Teoria de oscilação para processo de evolução linear regrado

Nesta subseção, estabelecemos uma caracterização de oscilação forte para semigrupos regrados e introduzimos a noção de oscilação no sentido pullback para processos de evolução regrados. Para provar os resultados, precisaremos do conceito de *wedge* (em português, *cunha*) e de algumas ideias apresentadas em (TABOR, 2002).

Definição 5.3.13. Um **wedge** W em X é um subconjunto convexo fechado de X tal que $\alpha W = W$ para todo número real $\alpha > 0$. Dado um conjunto $A \subset X$, por wedge(A) denotamos a interseção de todos wedges contendo A, isto é,

$$\text{wedge}(A) := \overline{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}_+, a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}}.$$

Como caso particular, um wedge W será dito um **cone**, sempre que $W \cap (-W) = \{0\}$.

A prova do lema a seguir pode ser encontrada em (TABOR, 2002).

Lema 5.3.14. Sejam W um wedge em X e $y \in X \setminus W$. Então existe $\zeta \in X^*$ tal que $\zeta(W) \subset \mathbb{R}_+$ e $\zeta(y) < 0$.

O próximo lema, cuja prova é omitida em (TABOR, 2002), será utilizado mais adiante, na demonstração do Teorema 5.3.17.

Lema 5.3.15. Sejam X, Y espaços de Banach e $S \subset X$. Considere $A : X \to Y$ um operador limitado. Então

$$A(\text{wedge}(S)) \subset \text{wedge}(A(S)).$$

Demonstração. Sejam $y \in \text{wedge}(S)$ e $z = A(y)$. Existem sequências $\{\alpha_i^m\}$ e $\{a_i^m\}$ em S tais que $\sum \alpha_i^m a_i^m \to y$ quando $m \to +\infty$. Então

$$\sum \alpha_i^m A(a_i^m) \to A(y) = z.$$

Assim, $z \in \text{wedge}(A(S))$. □

Agora, introduzimos a noção de oscilação pullback para processos de evolução lineares regrados. Veja (AP. SILVA; BONOTTO; FEDERSON, 2021).

Definição 5.3.16. Diremos que um ponto $x \in X$ **oscila pullback no tempo** $t \in J$ com respeito ao processo $\{S(t,s),(t,s) \in \mathscr{P}\}$, se para cada $\zeta \in X^*$ a seguinte condição for satisfeita: para cada $r \leq t$ podemos encontrar $s_1 < s_2 < r$ tal que

$$\zeta(S(t,s_1)x)\zeta(S(t,s_2)x) < 0.$$

O próximo resultado fornece condições suficientes para um ponto em X ser oscilatório no sentido pullback.

Teorema 5.3.17. Seja $x \in X$ tal que $x \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Se existir uma sequência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\tau_n \to -\infty$, quando $n \to \infty$ e $-x \in \text{wedge}(S(t+\tau_n,\tau_n)x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então x oscilará pullback no tempo t.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que x não oscila pullback no tempo t. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $\zeta \in X^*$ e $T_0 \leq t$ tal que

$$\zeta(S(t,r)x) > 0, \quad \text{para todo } \; r \leq T_0.$$

Seja $\tau_{n_0} < T_0 - t$. Como $-x \in \text{wedge}(S(t+\tau_{n_0},\tau_{n_0})x))$, obtemos

$$S(t,t+\tau_{n_0})(-x) \in S(t,t+\tau_{n_0})(\text{wedge}(S(t+\tau_{n_0},\tau_{n_0})x)).$$

Pelo Lema 5.3.15, temos

$$S(t,t+\tau_{n_0})(\text{wedge}(S(t+\tau_{n_0},\tau_{n_0})x))) \subset \text{wegde}(S(t,t+\tau_{n_0})S(t+\tau_{n_0},\tau_{n_0})x).$$

Consequentemente,

$$S(t,t+\tau_{n_0})(-x) \in \text{wedge}(S(t,\tau_{n_0})x).$$

Aplicando o Lema 5.3.15 novamente, concluímos que

$$0 > -\zeta(S(t,t+\tau_{n_0})x) \geq \inf\{\zeta(\text{wedge}(S(t,\tau_{n_0})x))\} \geq \inf\{\text{wedge}\{\zeta(S(t,\tau_{n_0})x))\}\} \geq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, x oscilará pullback no tempo t. □

Uma condição necessária para que $x \in X$ seja oscilatória no sentido pullback é apresentada no próximo teorema.

Teorema 5.3.18. Seja $x \in X$ tal que $x \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Se x oscilar pullback no tempo t, então $-x \in \text{wedge}(\gamma_p(x,t))$.

Demonstração. Assuma que x oscile pullback no tempo t e que $-x \notin \text{wedge}(\gamma_p(x,t))$. Pelo Lema 5.3.14, existe $\zeta \in X^*$ tal que $\zeta(-x) < 0$ e $\zeta(\text{wedge}(S(t,s)x) \subset \mathbb{R}_+$ para cada $s \leq t$, contradizendo o fato de x oscilar pullback no tempo t. □

Corolário 5.3.19. Seja V um cone em X. Assuma que $x \in V \setminus \{0\}$ oscila pullback no tempo t. Então existe $s \leq t$ tal que $S(t,s)x \notin V$.

Demonstração. Suponhamos que $S(t,s)x \in V$ para todo $s \leq t$. Pelo Teorema 5.3.17, temos

$$-x \in \text{wedge}(S(t,s)x),$$

para algum $t \geq s$. Como $\text{wedge}(S(t,s)x) \subset V$, segue que $-x \in V$. Assim, $x \in V \cap (-V) = \{0\}$, o que é um absurdo. □

No que segue, passamos a estudar o conceito de oscilação forte para semigrupos lineares regrados.

Definição 5.3.20. Diremos que um ponto $x \in X$ **oscilará fortemente** com respeito ao semigrupo linear regrado $\{T(t),\, t \geq 0\} \subset L(X)$, se para cada $\zeta \in X^*$ não nulo for satisfeita a seguinte afirmação: para cada $t \in [0,\infty)$ tal que $\zeta(T(t)x) \neq 0$, existe $s > t$ tal que

$$\zeta(T(s)x)\zeta(T(t)x) < 0.$$

A prova do próximo resultado segue como em (TABOR, 2002), Theorem 2.1, com adaptações óbvias.

Teorema 5.3.21. Um ponto $x \in X$ tal que $x \neq 0$ oscila fortemente com respeito ao semigrupo linear regrado $\{T(t),\, t \geq 0\} \subset L(X)$ se, e somente se, $-x \in \text{wedge}(O_T(x))$.

Como aplicação do Teorema 5.3.17, temos o seguinte resultado.

Corolário 5.3.22. Seja $x \in X$ tal que $x \neq 0$. Se existir $-x \in \text{wedge}(T(t_0)x)$ para algum $t_0 > 0$, então x oscilará fortemente com respeito ao semigrupo regrado $\{T(t),\, t \geq 0\} \subset L(X)$.

Demonstração. Defina a família de processo de evolução linear regrado $\{S(t,s), (t,s) \in \mathscr{P}\} \subset L(X)$ por

$$S(t,s)x = T(t-s)x.$$

Note que, se $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ for uma sequência tal que $\tau_n \to -\infty$, quando $n \to \infty$, então

$$-x \in \text{wedge}(T(t_0)x) = \text{wedge}(S(t_0+\tau_n, \tau_n)x)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 5.3.17, x oscilará pullback no tempo t_0. Assim, se $r \geq t_0$, existem $s_1 < s_2 < -r < t_0$ tais que

$$\zeta(S(t_0,s_1)x)\zeta(S(t_0,s_2)x) < 0,$$

ou seja,

$$\zeta(T(t_0-s_1)x)\zeta(T(t_0-s_2)x) < 0,$$

com $t_0 - s_1 > t - s_2 > r$. Portanto, x oscila fortemente com respeito ao semigrupo regrado $\{T(t),\, t \geq 0\}$. □

Finalmente, devido ao Teorema 5.3.12, podemos depreender que uma EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{5.22}$$

satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2), gera um processo de evolução linear regrado. Utilizando a definição a seguir e os Teoremas 5.3.17 e 5.3.18, obtemos critérios de oscilação para EDOs generalizadas lineares que assumem valores em espaços de Banach.

Definição 5.3.23. Diremos que uma solução $x\colon \mathbb{R} \to X$ da EDO generalizada linear (5.22) oscilará pullback no tempo $t \in \mathbb{R}$ com respeito ao processo $\{U(t,s),\ (t,s) \in \mathscr{P}\}$, se para cada $\zeta \in X^*$, a seguinte condição for satisfeita: para cada $s \leq t$ podemos encontrar $s_1 < s_2 \leq s$ tal que

$$\zeta(U(t,s_1)x(0))\zeta(U(t,s_2)x(0)) < 0,$$

em que $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to L(X)$ é o operador fundamental de (5.22).

Teorema 5.3.24. Seja $x\colon \mathbb{R} \to X$ uma solução não nula da EDO generalizada linear (5.22) e $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to L(X)$ o operador fundamental associado à equação (5.22).

(i) Se $x\colon \mathbb{R} \to X$ oscilar pullback no tempo t, então $-x(0) \in \mathrm{wedge}(\gamma_p(x(0),t))$;

(ii) Se existir uma sequência $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\tau_n \to -\infty$, quando $n \to \infty$, e

$$-x(0) \in \mathrm{wedge}(U(t+\tau_n,\tau_n)x(0))$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, então $x\colon \mathbb{R} \to X$ oscilará pulback no tempo t.

Encerramos este capítulo com algumas importantes observações.

Observação 5.3.25. Notemos que na teoria clássica de oscilação, em que as funções tomam valores em $\mathbb{R}$, a definição de oscilação está bem estabelecida, uma vez que neste caso, como se trata do espaço euclidiano $\mathbb{R}$, temos a noção de ordem do espaço. As definições de oscilações propostas neste trabalho, foram inspiradas na definição de oscilação forte apresentada em (TABOR, 2002), em que o autor utiliza a composição com funcionais lineares. Isso propicia que a imagem seja um espaço ordenado. Além disso, os conceitos apresentados aqui generalizam as definições clássicas de oscilação e, ainda, aumentam o conjunto de funções consideradas oscilatórias, uma vez que propomos a definição de oscilação pullback e a definição de oscilação $q.s.$, utilizando as definições de não crescente $q.s.$ no futuro e não decrescente $q.s.$ no futuro. Os resultados apresentados neste texto podem ser aplicados a qualquer classe de equações diferenciais, desde que suas soluções gerem um processo de evolução linear regrado.

CAPÍTULO

6

PERIODICIDADE DE SOLUÇÕES DE EDOS GENERALIZADAS

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar periodicidade de soluções de uma EDO generalizada, assumindo valores em um espaço de Banach qualquer. Começamos nosso estudo, analisando, primeiramente, periodicidade de soluções que assumem valores em $\mathbb{R}^n$ e, para este espaço, provamos uma generalização do teorema de Floquet bem conhecido em EDOs, agora para EDOs generalizadas. Em se tratando de soluções periódicas em espaços de Banach, apresentamos uma definição de periodicidade, utilizando composição com funcionais lineares. Os resultados contidos neste capítulo são inéditos e podem ser encontrados no artigo (AP. SILVA *et al.*, 2021) e no livro (BONOTTO; FEDERSON; MESQUITA, 2021).

Introduzimos, agora, uma condição que será utilizada frequentemente neste capítulo.

(EU) Seja X um espaço de Banach e J um intervalo. Diremos que uma função $F: X \times J \to X$ satisfaz a condição (EU), se para cada $(x_0, t_0) \in X \times J$, o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiver uma única solução global $x\colon J \to X$.

6.1 Soluções periódicas em $\mathbb{R}^n$

É sabido que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será T-periódica, se existir um número real positivo T tal que

$$f(t+T) = f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como estamos interessados em estudar periodicidade de soluções que assumem valores em $\mathbb{R}^n$, usaremos a definição seguinte.

Definição 6.1.1. Diremos que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ é **T-periódica**, se existir um número real positivo T tal que todas as funções componentes de f sejam T-periódicas, isto é,

$$f_i(t+T)=f_i(t),$$

para todo $i=1,\ldots,n$ e para todo $t\in\mathbb{R}$.

Neste momento, surge uma pergunta natural:

Por que exigir que todas as funções componentes sejam T-periódicas e não apenas uma?

A resposta à esta questão será dada adiante, na próxima seção.

Denotamos por $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as matrizes com componentes reais e assumimos que $A:[0,\infty)\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma matriz $n\times n$ de funções definidas no intervalo $[0,\infty)$. O operador A é T-periódico se $A(t)=A(t+T)$, para todo $t\in[0,\infty)$.

Inicialmente, trabalharemos com o caso linear, isto é, estamos interessados em estudar periodicidade de soluções da seguinte EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau}=D[A(t)x]. \tag{6.1}$$

Para provar os resultados desta seção, precisaremos do Teorema de Mudança de Variável (Teorema 2.1.21), que também pode ser encontrado em (SCHWABIK, 1992). Notamos que, pelo Teorema 2.1.21, a igualdade abaixo é verdadeira para quaisquer $s_1,s_2,T>0$

$$\int_{s_1+T}^{s_2+T}DF(x(\tau),t)=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau+T),t+T).$$

De fato, basta tomarmos $\phi(s)=s+T$ no Teorema 2.1.21.

O resultado a seguir fornece condições necessária e suficiente para que uma solução de (6.1) seja periódica.

Teorema 6.1.2. Seja $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ uma solução da EDO generalizada linear (6.1), em que $A:[0,\infty)\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é um operador T-periódico e satisfaz a condição (EU). Então x é T-periódica se, e somente se, $x(0)=x(T)$.

Demonstração. Suponhamos que $x\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ seja uma solução T-periódica de (6.1). Então $x(t+T)=x(t)$, para todo $t\in[0,\infty)$. Em particular, em $t=0$, vale

$$x(T)=x(0+T)=x(0).$$

Agora, suponhamos que $x\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ seja uma solução de (6.1) e satisfaça

$$x(0)=x(T). \tag{6.2}$$

Como, por hipótese, $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (6.1), temos

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} D[A(t)]x(\tau),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [0,\infty)$. Se $y(t) = x(t+T)$, para todo $t \in [0,\infty)$, então

$$\begin{aligned} y(s_2) - y(s_1) = x(s_2+T) - x(s_1+T) &= \int_{s_1+T}^{s_2+T} D[A(t)]x(\tau) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} D[A(t+T)]x(\tau+T) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} D[A(t)]y(\tau), \end{aligned}$$

pois, por hipótese, A é T-periódico. Assim, $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ será uma solução de (6.1) tal que

$$y(0) = x(0+T) = x(T) = x(0),$$

em que a última igualdade é devido a (6.2). Finalmente, pela unicidade do problema de valor inicial para EDOs generalizadas lineares (condição (EU)), $x(t) = y(t) = x(t+T)$ e, portanto, x é T-periódica. □

Observação 6.1.3. Notamos que se o operador $A : [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ satisfizer as condições (H1) e (H2) apresentadas no Capítulo 4, então A satisfará a condição (EU).

O teorema anterior nos fornece um bom critério de periodicidade de soluções de EDOs generalizadas lineares. No que segue, apresentamos generalizações do Teorema 6.1.2.

Seja $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma função dada e considere a seguinte EDO generalizada linear não homogênea

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)]. \tag{6.3}$$

A prova do próximo resultado, segue os mesmos passos da apresentada no Teorema 6.1.2.

Teorema 6.1.4. Seja $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDO generalizada linear não homogênea (6.3), em que $A\colon [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ e $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ são funções T-periódicas. Suponha que (6.3) satisfaça a condição (EU) e que g seja localmente Perron integrável. Então x é T-periódica se, e somente se, $x(0) = x(T)$.

Demonstração. De fato, basta observar que se $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ for uma solução de (6.3), então

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} D[A(t)]x(\tau) + g(s_2) - g(s_1),$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [0,\infty)$. Fazendo $y(t) = x(t+T)$, para todo $t \in [0,\infty)$ e usando o fato de A e g serem T-periódicas, concluímos que $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (6.3) em $[0,\infty)$, com $y(0) = x(0)$. Portanto, pela condição (EU), segue que x é T-periódica. □

Agora, consideramos o caso mais geral,

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{6.4}$$

em que $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, com $\Omega = \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.

Definição 6.1.5. Diremos que $F : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é **uniformemente T-periódica**, se para todo $z \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \in [0,\infty)$, tivermos

$$F(z,t+T) = F(z,t).$$

Teorema 6.1.6. Seja $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDO generalizada (6.4), em que $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente T-periódica e satisfaz a condição (EU). Então x será T-periódica se, e somente se, $x(0) = x(T)$.

Demonstração. Suponhamos que $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ seja uma solução de (6.4) e que satisfaça $x(0) = x(T)$. Se $y(t) = x(t+T)$, para todo $t \in [0,\infty)$, então para quaisquer $s_1, s_2 \in [0,\infty)$, teremos

$$\begin{aligned} y(s_2) - y(s_1) = x(s_2+T) - x(s_1+T) &= \int_{s_1+T}^{s_2+T} DF(x(\tau),t) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau+T),t+T) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau),t+T) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} DF(y(\tau),t). \end{aligned}$$

Logo, $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ será solução de (6.4). Além disso, $y(0) = x(T) = x(0)$. Pela condição (EU), temos

$$y(t) = x(t) = x(t+T),$$

e, portanto, x é T-periódica. A recíproca é imediata. □

Observação 6.1.7. Note que se $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, em que $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função não descrescente e contínua à esquerda, então existe uma única solução maximal $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$. (Veja Corolário 4.2.7). Neste caso, condição (EU) é satisfeita.

Devido ao teorema anterior, temos um excelente critério para concluir quando soluções de uma EDO generalizada qualquer são periódicas. Se estamos interessados em saber quando uma solução de uma EDO generalizada é T-periódica, desde que a função envolvida nesta equação seja uniformemente T-periódica, basta verificarmos se tal solução aplicada em zero, coincide com o valor obtido em $t = T$. Entretanto, não é um trabalho fácil encontrar soluções e, por isso, se faz necessário provar resultados de existência e unicidade de soluções periódicas. Tais resultados serão apresentados mais adiante.

Encerramos a seção, chamando a atenção do leitor para um importante fato. Todos os resultados desta seção, continuam sendo válidos para soluções T-periódicas $q.s.$ em $(0,T)\cup(T,\infty)$ e definidas em 0 e em nT, para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, poderíamos trocar a definição de T-periodicidade para T-periodicidade $q.s.$. Por comodidade, optamos em trabalhar com periodicidade em todo o intervalo $[0,\infty)$.

6.1.1 Um teorema do tipo Floquet

Nesta subseção, demonstramos um teorema do tipo Floquet, cuja versão para EDOs clássicas é bem conhecida (veja, por exemplo, (CHICONE, 2006)), agora para EDOs generalizadas lineares. Tal teorema caracteriza a matriz fundamental de um sistema linear periódico. Para este fim, precisamos do seguinte resultado, que pode ser encontrado em (SCHWABIK, 1992).

Teorema 6.1.8. Seja $J\subset\mathbb{R}$ um intervalo. Assuma que $A:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é localmente de variação limitada em J e satisfaz a condição (H2). Se $t_0\in J$, então para cada matriz $\tilde{X}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, existirá uma matriz unicamente determinada $X:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$X(t)=\tilde{X}+\int_{t_0}^{t}d[A(s)]X(s)$$

para $t\in J$.

Introduzimos agora, algumas notações análogas ao caso clássico de EDOs lineares. As definições e resultados que apresentamos na sequência podem ser encontrados em (SCHWABIK, 1992).

Seja $A:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo as condições (H1) e (H2). Uma função matricial $X:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ será dita uma **solução da equação matricial**

$$\frac{dX}{d\tau}=D[A(t)X] \tag{6.5}$$

se, para quaisquer, $s_1,s_2\in J$ valer a identidade

$$X(s_2)-X(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}d[A(s)]X(s).$$

Uma função matricial $X:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ será dita uma **matriz fundamental** da equação

$$\frac{dx}{d\tau}=D[A(t)x]$$

se X for uma solução da equação matricial (6.5) e se a matriz $X(t)$ for **regular** (i.e., uma matriz invertível) para pelo menos um valor $t\in J$.

Teorema 6.1.9. Assuma que $A:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é localmente de variação limitada em J e que satisfaz a condição (H2). Então cada matriz fundamental $X:J\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ da equação

$$\frac{dx}{d\tau}=D[A(t)x]$$

é regular para todo $t\in J$.

Consideremos a EDO generalizada linear homogênea

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{6.6}$$

em que $A : [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as condições (H1) e (H2) e é T-periódica, isto é, existe $T > 0$ tal que $A(t+T) = A(t)$, para todo $t \in [0,\infty)$.

Antes de provarmos o teorema do tipo Floquet para EDOs generalizadas lineares homogêneas do tipo (6.6), precisamos do seguinte resultado. Veja (CHICONE, 2006).

Lema 6.1.10. Se C for uma matriz $n \times n$ com $\det C \neq 0$, então existirá uma matriz B tal que $e^B = C$.

Teorema 6.1.11 (de Floquet em $\mathbb{R}^n$). Assuma que $A : [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ seja T-periódica e satisfaça as condições (H1) e (H2). Então toda matriz fundamental $X : [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ da EDO generalizada linear (6.6) terá a forma

$$X(t) = P(t)\, e^{Bt},$$

em que $P(t)$ e B são matrizes $n \times n$, com $P(t+T) = P(t)$, para todo $t \in [0,\infty)$.

Demonstração. Seja $X\colon [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ uma matriz fundamental de (6.6). Então, para quaisquer $s_1, s_2 \in [0,\infty)$, temos

$$X(s_2) - X(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]X(s).$$

Assim,

$$\begin{aligned} X(s_2+T) - X(s_1+T) &= \int_{s_1+T}^{s_2+T} d[A(s)]X(s) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} d[A(s+T)]X(s+T) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} d[A(s)]X(s+T), \end{aligned}$$

já que, por hipótese, A é T-periódica. Então $X(t+T)$ é uma matriz fundamental de (6.6). Logo, existe uma matriz não singular C, tal que $X(t+T) = X(t)C$. Pelo Lema 6.1.10, existe uma matriz B tal que $e^{BT} = C$. Defina $P(t) = X(t)\, e^{-Bt}$. Assim,

$$P(t+T) = X(t+T)\, e^{-B(t+T)} = X(t)\, C C^{-1}\, e^{-Bt} = X(t)\, e^{-Bt} = P(t),$$

e completamos a prova. $\square$

Finalizamos esta seção, chamando a atenção do leitor para a seguinte e importante observação.

Observação 6.1.12. Notemos que a prova do Teorema 6.1.11, no caso clássico (veja, por exemplo, (CHICONE, 2006)), envolve fortemente derivadas e regras de derivação das funções envolvidas na equação diferencial ordinária. Mesmo não tendo asseguradas as diferenciabilidades de A e de X, ainda conseguimos provar o Teorema de Floquet para EDOs generalizadas, utilizando somente propriedades da integral de Kurzweil.

6.1.2 Existência de soluções periódicas

A representação do tipo Floquet $X(t) = P(t)e^{Bt}$, em que $t \in [0,\infty)$, apresentada na seção anterior, será utilizada para estudar soluções periódicas de EDOs generalizadas lineares da forma (6.6).

Para cada $t \in [0,\infty)$, considere uma solução matriz fundamental $X(t)$ para a equação (6.6), em que $A : [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma função matricial T-periódica, e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. O vetor solução da EDO generalizada linear (6.6), começando em $t = t_0$, com condição inicial $x(t_0) = v$, é dado por

$$t \mapsto X(t)X^{-1}(t_0)v.$$

Se o vetor solução for adiantado em um período T do sistema, então obteremos novamente, um vetor em $\mathbb{R}^n$, dado por $X(T+t)X^{-1}(t_0)v$. Neste caso, o operador

$$t \mapsto X(T+t)X^{-1}(t_0)v$$

será dito um **operador de monodromia**.

Os autovalores de um operador de monodromia serão ditos **multiplicadores característicos** do sistema homogêneo T-periódico (6.6) correspondente.

Omitiremos a prova do resultado a seguir, pois segue os mesmos passos da prova apresentada em (CHICONE, 2006), com adaptações óbvias.

Proposição 6.1.13. As seguintes afirmações são válidas para EDOs generalizadas lineares periódicas do tipo (6.6).

(i) Cada operador de monodromia é invertível, ou, equivalentemente, cada multiplicador característico é não nulo.

(ii) Todos os operadores de monodromia têm os mesmos autovalores. Em particular, existem exatamente n multiplicadores característicos, contando as multiplicidades.

Consideremos a EDO generalizada linear não homogênea

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x + g(t)], \tag{6.7}$$

em que $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é T-periódica e $A : [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ é T-periódica satisfazendo as condições (H1) e (H2).

Estamos interessados em garantir a existência de soluções T-periódicas da EDO generalizada linear não homogênea (6.7). Para este fim, precisaremos da Fórmula da Variação das Constantes para EDOs generalizadas, apresentada no Capítulo 4. Relembremos tal resultado.

Corolário 6.1.14. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $A : J \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ for localmente de variação limitada em J, satisfazendo (H2), $t_0 \in J$, $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $g : J \to \mathbb{R}^n$ for localmente de variação limitada em J e $X : J \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ for uma matriz fundamental arbitrária da equação (6.6), então a única solução do problema (6.7), com condição inicial $x(t_0) = \widetilde{x}$, poderá ser representada na forma

$$x(t) = g(t) - g(t_0) + X(t)\left(X^{-1}(t_0)\widetilde{x} - \int_{t_0}^{t} d_s[X^{-1}(s)](g(s) - g(t_0))\right). \tag{6.8}$$

O próximo resultado assegura a existência de pelo menos uma solução T-periódica da EDO generalizada linear não homogênea (6.7).

Teorema 6.1.15. Assuma que $A\colon [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ seja T-periódica. Se o número 1 não for um multiplicador característico da EDO generalizada linear homogênea (6.6), então a EDO generalizada linear não homogênea (6.7) terá pelo menos uma solução T-periódica.

Demonstração. Pelo Teorema 6.1.4, sabemos que uma solução $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ de (6.7) será T-periódica se, e somente se, $x(0) = x(T)$. Seja $X\colon [0,\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ uma matriz fundamental da EDO generalizada linear (6.6). Então, pela Fórmula da Variação das Constantes para EDOs generalizadas (Corolário 6.1.14), temos

$$x(T) = g(T) - g(0) + X(T)\left(X^{-1}(0)x(0) - \int_0^T d_s[X^{-1}(s)](g(s) - g(0))\right).$$

Como, por hipótese, g é T-periódica, obtemos

$$x(T) = X(T)X^{-1}(0)x(0) - X(T)\int_0^T d_s[X^{-1}(s)](g(s) - g(0)).$$

Portanto, teremos $x(T) = x(0)$ se, e somente se,

$$(X(T)X^{-1}(0) - I)x(0) = X(T)\int_0^T d_s[X^{-1}(s)](g(s) - g(0)).$$

Esta última equação terá uma solução sempre que o número 1 não for um autovalor de $X(T)$. Pelo Teorema de Floquet generalizado (Teorema 6.1.11), existirá uma matriz B tal que a matriz de monodromia é dada por

$$X(T) = e^{BT}.$$

Em outras palavras, teremos $x(0) = x(T)$, se o número 1 não for um autovalor de $X(T)$. □

Corolário 6.1.16. Se $A(t) = A$ para todo $t \in [0,\infty)$, ou seja, se A for uma matriz constante tal que A não tem autovalores no eixo imaginário, então a EDO generalizada não homogênea (6.7) terá pelo menos uma solução T-periódica.

Demonstração. A matriz de monodromia, e^{TA}, não tem 1 como um autovalor. □

Nosso objetivo, agora, é demonstrar resultados de periodicidade de soluções de EDOs generalizadas em espaços de Banach. Os resultados que apresentamos na próxima seção podem ser encontrados em (AP. SILVA *et al.*, 2021).

6.2 Soluções periódicas em espaços de Banach

Nesta seção, temos o interesse em estudar o comportamento periódico de soluções de EDOs generalizadas que assumem valores em espaços de Banach. De maneira análoga à definição proposta no Capítulo 5 para oscilação de soluções, podemos pensar em periodicidade de funções em espaços de Banach compondo a função com um funcional e, assim, obtendo novamente uma função a valores em $\mathbb{R}$.

Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer e X um espaço de Banach. Por X^* denotamos o espaço de todos os funcionais lineares em X.

Definição 6.2.1. Uma função $f : J \to X$ será dita **fortemente T-periódica**, se existir um número real positivo T tal que para cada $\zeta \in X^*$, a função $\zeta \circ f : J \to \mathbb{R}$ for T-periódica, isto é,

$$(\zeta \circ f)(t+T) = (\zeta \circ f)(t),$$

para todo $t \in J$ e para todo funcional $\zeta \in X^*$.

Ao fazermos a composição utilizando o funcional linear ζ, é possível visualizar geometricamente a periodicidade da função, já que $\zeta \circ f$ assume valores em $\mathbb{R}$. Observe que a função $f(t+T)$ poderia ser, por exemplo, um elemento do espaço das funções regradas e, assim, para cada t, teríamos uma função diferente.

Como visualizar, geometricamente, a definição de periodicidade neste caso?

Um argumento que pode convencer o leitor a aceitar a definição de periodicidade proposta nesta seção é o seguinte. Sabemos que toda função periódica é, em particular, uma função oscilatória. Se o leitor voltar ao capítulo anterior, dedicado à oscilação de soluções em espaços de Banach, ficará feliz em ver que a composição utilizando o funcional linear ζ, funciona bem por lá também (i.e., uma função f oscilará fortemente, se para todo funcional $\zeta \in X^*$, $\zeta \circ f$ oscilar).

Suponha que $x\colon J \to X$ seja uma solução fortemente T-periódica de uma EDO generalizada e $X = \mathbb{R}^n$. Então,

$$(\zeta \circ x)(t+T) = (\zeta \circ x)(t),$$

para todo $t \in J$ e para todo $\zeta \in X^*$. Se, na definição de periodicidade apresentada na seção anterior, exigíssemos que, para x ser periódica, bastasse apenas uma das funções componentes ser periódica, haveria um conflito na definição apresentada nesta seção. Por exemplo, considere $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ e defina

$$\zeta_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \zeta_1(x) = x_1$$
$$\zeta_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \zeta_2(x) = x_2.$$

Suponhamos que apenas x_1 seja T-periódica. Assim, segundo a definição de periodicidade apresentada nesta secão, x não poderia ser fortemente T-periódica, uma vez que $(\zeta_2 \circ x)(t) =$

$x_2(t)$, que não é T-periódica. Portanto, $x : J \to \mathbb{R}^n$ será T-periódica, se todas as suas funções componentes forem T-periódicas.

No decorrer do nosso estudo, nos deparamos com a seguinte situação: a ideia da Definição 6.2.1 poderia ser reduzida à definição clássica de periodicidade. Um dos resultados que nos leva a esta conclusão é o fato de que o funcional linear envolvido na composição é injetivo. Assim, seguirá que se uma função for periódica no sentido da Definição 6.2.1, então esta função será periódica no sentido clássico. Mais do que isso, provamos que tais definições de periodicidade são equivalentes. Explicamos este fato em detalhes a seguir.

Surpreendentemente, a equivalência dos dois conceitos de periodicidade, a saber, a definição com um funcional e a definição usual, segue de um dos resultados clássicos da teoria de Análise Funcional. Veja Corolário 1.3 em (BREZIS, 2010).

A demonstração do próximo resultado é omitida, uma vez que segue de forma imediata, tomando $x_0 = w - w'$ e aplicando o Corolário 1.3 da referência (BREZIS, 2010).

Proposição 6.2.2. Sejam $w, w' \in X$. Se $\zeta(w) = \zeta(w')$, para todo $\zeta \in X^*$, então $w = w'$.

O próximo resultado fornece a equivalência.

Teorema 6.2.3. Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer e $x : J \to X$ uma solução de uma EDO generalizada. Se x for fortemente T-periódica, então teremos

$$x(t+T) = x(t),$$

para todo $t \in J$, isto é, x será T-periódica no sentido clássico. Reciprocamente, se x for T-periódica no sentido clássico, então x será fortemente T-periódica, isto é, valerá

$$(\zeta \circ x)(t+T) = (\zeta \circ x)(t),$$

para todo $\zeta \in X^*$ e para todo $t \in J$.

Demonstração. Assuma que $x \colon J \to X$ seja uma função fortemente T-periódica. Então, pela Proposição 6.2.2, segue que $x(t+T) = x(t)$, para todo $t \in J$. Agora, suponhamos que x seja tal que

$$x(t+T) = x(t), \tag{6.9}$$

para todo $t \in J$ e tomemos $\zeta \in X^*$. Então, compondo com ζ ambos os lados da igualdade (6.9), obtemos

$$\zeta(x(t+T)) = \zeta(x(T)),$$

para todo $t \in J$. Logo, x é fortemente T-periódica. □

Devido ao Teorema 6.2.3, toda a ideia de composição com funcional se mostrou ineficaz. Assim, voltamos a considerar a definição clássica. Os resultados que demonstramos na sequência generalizam todos os apresentados na seção anterior e podem ser encontrados em (AP. SILVA *et al.*, 2021).

Seja X um espaço de Banach e $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $\sup J = \infty$. Consideremos a seguinte EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \tag{6.10}$$

em que $F: X \times J \to X$ é uma função.

Introduzimos, agora, formalmente a noção de periodicidade de soluções de (6.10) em espaços de Banach no sentido clássico e, também, a definição de periodicidade uniforme.

Definição 6.2.4. Uma solução $x\colon J \to X$ de (6.10) será dita periódica, se existir $T > 0$ tal que

$$x(t+T) = x(t), \quad \text{para todo } t \in J.$$

Então, x será dita **T-periódica**, com período T. Além disso, uma função $F: X \times J \to X$ será dita **uniformemente T-periódica** se, para cada $x \in X$, a função $F(x,\cdot)\colon J \to X$ for T-periódica.

No decorrer desta seção, utilizaremos constantemente a condição (EU) apresentada na introdução deste capítulo. Relembremos tal condição.

Definição 6.2.5. Dizemos que $F: X \times J \to X$ satisfaz a condição (EU) se, para cada $(x_0, s_0) \in X \times J$, o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t), \\ x(s_0) = x_0 \end{cases} \tag{6.11}$$

admitir uma única solução global $x\colon [s_0, \infty) \to X$.

Um questionamento plausível é se existem funções que satisfazem a condição imposta na definição anterior.

Observação 6.2.6. Assuma que $\Omega = X \times J$ e seja $s_0 \in J$. Se $F \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, em que $h\colon J \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e contínua à esquerda, então segue do Corolário 4.2.7 que existe uma única solução maximal $x\colon [s_0, \infty) \to X$ de (6.11). Neste caso, condição (EU) é satisfeita.

A próxima proposição é uma consequência imediata da definição de solução de uma EDO generalizada, apresentada no Capítulo 4 (veja Definição 4.2.1) e fornece condições necessária e suficiente para uma solução da equação (6.10) ser periódica. Isto segue da igualdade

$$x(t+T) - x(t) = \int_t^{t+T} DF(x(\tau), s), \quad t \in [s_0, \infty).$$

Proposição 6.2.7. Seja $s_0 \in J$ e $x\colon [s_0, \infty) \to X$ uma solução da EDO generalizada (6.10). Então, x é T-periódica se, e somente se, $\int_t^{t+T} DF(x(\tau), s) = 0$ para todo $t \in [s_0, \infty)$.

O próximo resultado é uma versão mais geral do apresentado em Teorema 6.1.6 e relaciona a periodicidade da função F com a periodicidade de uma solução da EDO generalizada (6.10).

Teorema 6.2.8. Seja $s_0 \in J$ e $x\colon [s_0,\infty) \to X$ uma solução da EDO generalizada (6.10). Se $F\colon X \times J \to X$ for uma função uniformemente T-periódica satisfazendo a condição (EU) e $x(s_0) = x(s_0+T)$, então x será T-periódica.

Demonstração. Seja $x_0 = x(s_0)$ e assuma que $x(s_0) = x(s_0+T)$. Defina $y\colon [s_0,\infty) \to X$ por $y(t) = x(t+T)$, para todo $t \in [s_0,\infty)$. Pelo Teorema 2.1.21, temos

$$\begin{aligned} y(t)-y(s_0) &= x(t+T)-x(s_0+T) = \int_{s_0+T}^{t+T} DF(x(\tau),s) \\ &= \int_{s_0}^{t} DF(x(\tau+T),s+T) = \int_{s_0}^{t} DF(y(\tau),s+T) = \int_{s_0}^{t} DF(y(\tau),s), \end{aligned}$$

isto é, x e y são ambas soluções de (6.10) com condição inicial $x(s_0) = x_0$. Como F satisfaz a condição (EU), concluímos que $x(t) = y(t) = x(t+T)$ para todo $t \in [s_0,\infty)$, isto é, x é uma solução T-periódica de (6.10). $\square$

O próximo resultado fornece condições para soluções de EDOs generalizadas lineares serem periódicas e é uma consequência direta do Teorema 6.2.8.

Corolário 6.2.9. Seja $s_0 \in J$ e $x\colon [s_0,\infty) \to X$ uma solução da EDO generalizada linear

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x],$$

em que $A\colon J \to L(X)$ é T-periódica. Se $x(s_0) = x(s_0+T)$ e a condição (EU) é satisfeita para a função $X \times J \ni (x,t) \mapsto A(t)x \in X$, então x é T-periódica.

Observação 6.2.10. Note que, pelo Teorema 4.3.2 e Observação 4.3.3, condição (EU) é satisfeita para a função $X \times J \ni (x,t) \mapsto A(t)x \in X$, sempre que $A\colon J \to L(X)$ satisfaz condições (H1) e (H2).

6.2.1 Teoria de Floquet

Nesta subseção, apresentamos condições suficientes para assegurar a existência e unicidade de soluções periódicas da seguinte EDO generalizada linear não homogênea

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x+g(t)], \tag{6.12}$$

em que $A \in BV_{loc}(J,L(X))$ e $g \in BV_{loc}(J,X)$ são funções T-periódicas, A satisfaz condição (H2) e $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo tal que $\sup J = \infty$. Além disso, provamos um teorema do tipo Floquet mais geral que o apresentado em Teorema 6.1.11.

Antes de provarmos os resultados, introduzimos, novamente, a seguinte notação. Dado um intervalo $J \subset \mathbb{R}$, denotamos

$$\mathscr{P} = \{(t,s) \in J \times J, t \geqslant s\}.$$

O próximo resultado, relaciona a periodicidade da função $A\colon J \to L(X)$ e a periodicidade do operador fundamental associado à EDO generalizada linear homogênea

$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x]. \tag{6.13}$$

Tal resultado é uma generalização do Teorema de Floquet clássico para o contexto de EDOs generalizadas.

Teorema 6.2.11 (de Floquet em espaços de Banach). Assuma que $A\colon J \to L(X)$ é um operador T-periódico e satisfaça condições (H1) e (H2). Seja $U\colon \mathscr{P} \to L(X)$ o operador fundamental associado a EDO generalizada linear (6.13). Então, para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$, temos

$$U(t+T, s+T) = U(t,s).$$

Demonstração. Defina o operador $W\colon \mathscr{P} \to L(X)$ por

$$W(t,s) = U(t+T, s+T) - U(t,s), \quad \text{para todo } (t,s) \in \mathscr{P}.$$

Usando o Teorema 2.1.21 e a T-periodicidade de A, obtemos

$$\begin{aligned}
&W(t,s) = U(t+T,s+T) - U(t,s) \\
&= \int_{s+T}^{t+T} d[A(r)]U(r,s+T) - \int_s^t d[A(r)]U(r,s) \\
&= \int_s^t d[A(r+T)]U(r+T,s+T) - \int_s^t d[A(r)]U(r,s) \\
&= \int_s^t d[A(r)]U(r+T,s+T) - \int_s^t d[A(r)]U(r,s) \\
&= \int_s^t d[A(r)](U(r+T,s+T) - U(r,s)) = \int_s^t d[A(r)]W(r,s).
\end{aligned}$$

Assim, para cada $s \in J$ fixado, $W(\cdot,s)\colon [s,\infty) \to L(X)$ é uma solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = D[A(t)X], \\ X(s) = 0. \end{cases} \tag{6.14}$$

Note que $X \equiv 0$ é também uma solução do PVI (6.14). Pela unicidade de solução, $W(t,s) = 0$ para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$, o que finaliza a prova. $\square$

Os resultados que seguem são consequências do Teorema de Floquet.

Corolário 6.2.12. Seja $s_0 \in J$, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$ um operador T-periódico satisfazendo condição (H2), $U\colon \mathscr{P} \to L(X)$ o operador fundamental associado a EDO generalizada linear (6.13) e assuma que $[U(t,s_0)]^{-1} \in L(X)$, para todo $t \in [s_0, \infty)$. Se $U(s+T,s) = U(s_0+T,s_0)$ para todo $s \geqslant s_0$, então existe um operador T-periódico $Q(\cdot,s)\colon [s,\infty) \to L(X)$ tal que $U(t,s) = Q(t,s)U(t,s_0)$ para todo $t \geqslant s \geqslant s_0$.

Demonstração. Seja $s_0 \in J$. Para $s \geqslant s_0$, defina $Q(\cdot,s)\colon [s,\infty) \to L(X)$ por

$$Q(t,s) = U(t,s)[U(t,s_0)]^{-1}.$$

Então, pelos Teoremas 4.3.6 e 6.2.11, temos

$$\begin{aligned} Q(t+T,s) =& U(t+T,s)[U(t+T,s_0)]^{-1} \\ =& U(t+T,s+T)U(s+T,s)[U(t+T,s_0+T)U(s_0+T,s_0)]^{-1} \\ =& U(t,s)U(s+T,s)U^{-1}(s_0+T,s_0)U^{-1}(t,s_0) \\ =& U(t,s)U^{-1}(t,s_0) = Q(t,s), \end{aligned}$$

para todo $t \in [s,\infty)$, como queríamos demonstrar. □

Agora, provamos que a EDO generalizada linear homogênea (6.13) é assintoticamente estável, isto é, cada solução $x\colon J \to X$ de (6.13) satisfaz $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Corolário 6.2.13. Seja $s_0 \in J$, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$ um operador T-periódico satisfazendo a condição (H2) e $U\colon \mathscr{P} \to L(X)$ o operador fundamental associado a EDO generalizada linear homogênea (6.13). Se $\|U(s_0+T,s_0)\| < 1$, então $\lim_{t\to\infty} \|U(t,s_0)\| = 0$, isto é, (6.13) será assintoticamente estável.

Demonstração. Para cada $t \geqslant s_0$, denotemos por $N_t = \max\{m \in \mathbb{N}, s_0 + mT \leqslant t\}$ e por $\bar{t} = t - N_tT$. Note que $\bar{t} \in [s_0, s_0+T)$, para todo $t \geqslant s_0$, e seja $M = \sup\{\|U(s,s_0)\|, s \in [s_0, s_0+T]\}$. Assim, pelo Teorema 6.2.11,

$$\begin{aligned} \|U(t,s_0)\| = \|U(\bar{t}+N_tT,s_0)\| &= \|U(\bar{t}+N_tT, s_0+N_tT)U(s_0+N_tT,s_0)\| \\ &= \|U(\bar{t},s_0)\|\, \|U(s_0+T,s_0)\|^{N_t} \leqslant M\|[U(s_0+T,s_0)]\|^{N_t}, \end{aligned}$$

para todo $t \geqslant s_0$. Como $\|U(s_0+T,s_0)\| < 1$ e $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$, temos $\lim_{t\to\infty}\|U(t,s_0)\| = 0$. Além disso, se $x\colon [s_0,\infty) \to X$ é uma solução de (6.13), então $x(t) = U(t,s_0)x(s_0)$, para todo $t \geqslant s_0$ e, assim, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, o que significa que (6.13) é assintoticamente estável. □

Corolário 6.2.14. Dado $s_0 \in J$, um número λ será um autovalor do operador $U(s_0+T,s_0)$ se, e somente se, a EDO generalizada linear homogênea (6.13) tiver uma solução não trivial $x\colon [s_0,\infty) \to X$ tal que $x(t+T) = \lambda x(t)$, para todo $t \in [s_0,\infty)$.

Demonstração. Primeiramente, note que, se $x\colon [s_0,\infty) \to X$ for uma solução de (6.13), então $x(t) = U(t,s_0)x_0$ para todo $t \in [s_0,\infty)$ e

$$\begin{aligned} x(t+T) &= U(t+T,s_0)x(s_0) = U(t+T,s_0+T)U(s_0+T,s_0)x(s_0) \\ &= U(t,s_0)U(s_0+T,s_0)x(s_0). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Assuma que λ seja um autovalor de $U(s_0+T,s_0)$, isto é, que exista $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, tal que $\lambda x_0 = U(s_0+T,s_0)x_0$ e seja $x\colon [s_0,\infty) \to X$ uma solução não trivial de (6.13) com $x(s_0) = x_0$. Assim, para todo $t \in [s_0,\infty)$, temos

$$x(t+T) = U(t,s_0)U(s_0+T,s_0)x_0 = U(t,s_0)\lambda x_0 = \lambda U(t,s_0)x_0 = \lambda x(t).$$

Reciprocamente, assuma que $x\colon [s_0,\infty) \to X$ seja uma solução não trivial de (6.13) satisfazendo $x(t+T) = \lambda x(t)$, para todo $t \in [s_0,\infty)$. Usando (6.15), obtemos

$$\lambda U(t,s_0)x(s_0) = \lambda x(t) = x(t+T) = U(t,s_0)U(s_0+T,s_0)x(s_0), \tag{6.16}$$

para todo $t \in [s_0,\infty)$. Então, tomando $t = s_0$ em (6.16), obtemos $\lambda x(s_0) = U(s_0+T,s_0)x(s_0)$ e como $x(s_0) \neq 0$, concluímos que λ é um autovalor de $U(s_0+T,s_0)$. □

Finalizamos esta seção, apresentando um resultado que garante a existência e unicidade de uma solução periódica da EDO generalizada linear não homogênea (6.12). O próximo teorema é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 6.2.15. Seja $s_0 \in J$, $A \in BV_{loc}(J,L(X))$ um operador T-periódico satisfazendo a condição (H2) e $U\colon \mathscr{P} \to L(X)$ o operador fundamental associado a EDO generalizada linear homogênea (6.13). As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) Para cada função T-periódica $g \in BV_{loc}(J,X)$, a EDO generalizada linear não homogênea (6.12) tem uma única solução T-periódica $x\colon [s_0,\infty) \to X$.

(ii) O operador $[U(s_0+T,s_0) - I]$ admite um inverso à esquerda.

Demonstração. Inicialmente, notamos que, se $x\colon [s_0,\infty) \to X$ é uma solução de (6.12) então, pelo Corolário 4.4.3, temos

$$x(s_0) = x(s_0+T) \Longleftrightarrow [U(s_0+T,s_0) - I]x(s_0) = \int_{s_0}^{s_0+T} d_r[U(s_0+T,r)](g(r) - g(s_0)). \tag{6.17}$$

Assuma, agora, que $[U(s_0+T,s_0) - I]$ admita um inverso à esquerda e considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[A(t)x(t) + g(t)], \\ x(s_0) = [U(s_0+T,s_0) - I]^{-1} \int_{s_0}^{s_0+T} d_r[U(s_0+T,r)](g(r) - g(s_0)), \end{cases} \tag{6.18}$$

em que $g \in BV_{loc}(J,X)$ é uma função T-periódica arbitrária. Então, o PVI (6.18) tem uma única solução $x\colon [s_0,\infty) \to X$ (veja Teorema 4.4.1) a qual, de acordo com (6.17), é uma solução T-periódica de (6.12) (veja Teorema 6.2.8).

Resta provarmos a unicidade da solução T-periódica. Suponha que $z\colon [s_0,\infty) \to X$ seja uma outra solução T-periódica de (6.12). Novamente, por (6.17), temos

$$z(s_0) = [U(s_0+T,s_0)-I]^{-1} \int_{s_0}^{s_0+T} d_r[U(s_0+T,r)](g(r)-g(s_0)) = x(s_0),$$

e, consequentemente, $x(t)-z(t) = U(t,s_0)(x(s_0)-z(s_0)) = 0$, para todo $t \geqslant s_0$.

Agora, suponhamos que, para cada função T-periódica $g \in BV_{loc}(J,X)$, a EDO generalizada linear não homogênea (6.12) admita uma única solução T-periódica em $[s_0,\infty)$, e suponhamos por absurdo, que $[U(s_0+T,s_0)-I]$ não admita um inverso à esquerda. Então, $Ker[U(s_0+T,s_0)-I] \neq \{0\}$, ou seja, existe $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, tal que $U(s_0+T,s_0)x_0 = x_0$. Pelo Teorema 6.2.11, a função $x\colon [s_0,\infty) \to X$ dada por $x(t) = U(t,s_0)x_0$, para todo $t \in [s_0,\infty)$, é T-periódica. Assim, $x \equiv 0$ e $x(t) = U(t,s_0)x_0$, $t \in [s_0,\infty)$, são soluções T-periódicas de (6.12) com $g \equiv 0$, o que contradiz (i). □

6.3 Aplicações

Nesta seção, apresentamos algumas aplicações em equações integrais do tipo Volterra-Stieltjes.

6.3.1 Soluções periódicas de equações integrais do tipo Volterra-Stieltjes

Seja X um espaço de Banach equipado com a norma $\|\cdot\|$, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo tal que $\sup J = \infty$ e $\Omega = X \times J$. Como antes, denotamos o conjunto $\mathscr{P}$ por $\mathscr{P} = \{(t,s) \in J\times J, t \geqslant s\}$. Dado um $t_0 \in J$, consideremos a **equação integral do tipo Volterra-Stieltjes** (abreviadamente, EIVS)

$$x(t)-x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s), \quad t \in J. \tag{6.19}$$

Nosso objetivo é estabelecer condições suficientes para a equação (6.19) admitir pelo menos uma solução periódica. Para isto, assumimos as seguintes condições gerais sobre as funções $f,g\colon \Omega \to X$ e $u\colon J \to \mathbb{R}$:

(A1) Para cada $x \in G(J,X)$, o mapa $s \mapsto f(x(s),s)$ é localmente Perron integrável em J;

(A2) $u(t+T) = u(t)+\beta$ para algum $\beta > 0$;

(A3) Para cada $x \in G(J,X)$, o mapa $s \mapsto g(x(s),s)$ é localmente Perron-Stieltjes integrável com respeito a u sobre J;

(A4) f e g são uniformemente T-periódicas em J;

(A5) $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(x,s)ds = \int_{t_0}^{t_0+T} g(x,s)du(s) = 0$ para todo $x \in X$;

(A6) Existe uma função localmente Perron integrável $m_1\colon J \to \mathbb{R}$ e uma função localmente Perron-Stieltjes integrável $m_2\colon J \to \mathbb{R}$ com respeito a u tais que, para cada $a,b \in J$, $a \leqslant b$,
$$\left\| \int_a^b f(x,s)ds \right\| \leqslant \int_a^b m_1(s)ds \quad \text{e} \quad \left\| \int_a^b g(x,s)du(s) \right\| \leqslant \int_a^b m_2(s)du(s),$$
para todo $(x,s) \in \Omega$;

(A7) Existem uma função localmente Perron integrável $\ell_1\colon J \to \mathbb{R}$, uma função localmente Perron-Stieltjes integrável $\ell_2\colon J \to \mathbb{R}$ com respeito a u e uma função contínua e crescente $\omega\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, com $\omega(0) = 0$, tal que, para cada $a,b \in J$, $a \leqslant b$,
$$\left\| \int_a^b [f(x,s) - f(y,s)]ds \right\| \leqslant \int_a^b \ell_1(s)\omega(\|x-y\|)ds$$
e
$$\left\| \int_a^b [g(x,s) - g(y,s)]du(s) \right\| \leqslant \int_a^b \ell_2(s)\omega(\|x-y\|)du(s),$$
para $(x,s),(y,s) \in \Omega$.

Agora, estabelecemos, uma EDO generalizada associada com a EIVS (6.19). Defina a função $H\colon \Omega \to X$ por
$$H(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{6.20}$$
e considere a EDO generalizada
$$\frac{dx}{d\tau} = DH(x,t). \tag{6.21}$$

Precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 6.3.1. A função $H\colon \Omega \to X$ dada por (6.20) pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega,h,\omega)$, em que ω é dada por (A7) e $h\colon J \to \mathbb{R}$ é dada por
$$h(t) = \int_{t_0}^{t} (m_1(s) + \ell_1(s))ds + \int_{t_0}^{t} (m_2(s) + \ell_2(s))du(s), \quad t \in J.$$

Demonstração. Pelas condições (A6)-(A7), temos $\int_a^b m_1(s)ds \geqslant 0$, $\int_a^b m_2(s)du(s) \geqslant 0$, $\int_a^b \ell_1(s)ds \geqslant 0$ e $\int_a^b \ell_2(s)du(s) \geqslant 0$ para quaisquer $a,b \in J$, $a \leqslant b$. Isto implica que h é não decrescente em J.

Sejam $t_1,t_2 \in J$, $t_1 \leqslant t_2$, e $x,y \in X$. Usando a condição (A6), obtemos
$$\begin{aligned} \|H(x,t_2) - H(x,t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(x,s)ds + \int_{t_1}^{t_2} g(x,s)du(s) \right\| \\ &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} m_1(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} m_2(s)du(s) \\ &\leqslant |h(t_2) - h(t_1)|, \end{aligned}$$

e, usando a condição (A7), temos

$$
\begin{aligned}
&\|H(x,t_2)-H(x,t_1)-[H(y,t_2)-H(y,t_1)]\|\\
&=\left\|\int_{t_1}^{t_2} f(x,s)ds+\int_{t_1}^{t_2} g(x,s)du(s)-\int_{t_1}^{t_2} f(y,s)ds-\int_{t_1}^{t_2} g(y,s)du(s)\right\|\\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \ell_1(s)\omega(\|x-y\|)ds+\int_{t_1}^{t_2} \ell_2(s)\omega(\|x-y\|)du(s)\\
&\leqslant \omega(\|x-y\|)|h(t_2)-h(t_1)|.
\end{aligned}
$$

Assim, $H\in\mathscr{F}(\Omega,h,\omega)$. □

No próximo resultado, mostramos a correspondência entre as soluções da EIVS (6.19) e as soluções da EDO generalizada (6.21).

Teorema 6.3.2. Seja $I\subset J$ um subintervalo. Uma função $x\colon I\to X$ será uma solução da EIVS (6.19) no intervalo I se, e somente se, x for uma solução da EDO generalizada (6.21) em I.

Demonstração. Seja $x\in G(I,X)$. Pelas condições (A1) e (A3), a integral de Perron $\int_a^b f(x(s),s)ds$ e a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b g(x(s),s)du(s)$ existem. Pelo Lema 6.3.1, temos que $H\in\mathscr{F}(\Omega,h,\omega)$, consequentemente, por (AFONSO *et al.*, 2011, Lemma 2.14), a integral $\int_a^b DH(x(\tau),s)$ também existe para todos $a,b\in I$. Afirmamos que

$$
\int_a^b f(x(s),s)ds+\int_a^b g(x(s),s)du(s)=\int_a^b DH(x(\tau),s) \tag{6.22}
$$

para todos $a,b\in I$. De fato, usando a definição da integral de Kurzweil e a continuidade de ω, dado $\varepsilon>0$, existe um calibre δ em $[a,b]\subset I$ tal que

$$
\left\|\int_a^b DH(x(\tau),s)-\sum_{i=1}^{|D|}[H(x(\tau_i),t_i)-H(x(\tau_i),t_{i-1})]\right\|<\frac{\varepsilon}{2},
$$

e

$$
\omega(\|x(\tau_i)-x(s)\|)\leqslant\frac{\varepsilon}{2(h(b)-h(a)+1)},\quad s\in[t_{i-1},t_i],
$$

para cada divisão marcada δ-fina $D=(\tau_i,[t_{i-1},t_i]),i=1,2,\dots,|D|$, de $[a,b]$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_a^b DH(x(\tau),s)-\int_a^b f(x(s),s)ds-\int_a^b g(x(s),s)du(s)\right\|\\
&\leqslant\left\|\int_a^b DH(x(\tau),s)-\sum_{i=1}^{|D|}[H(x(\tau_i),t_i)-H(x(\tau_i),t_{i-1})]\right\|\\
&\quad+\left\|\sum_{i=1}^{|D|}[H(x(\tau_i),t_i)-H(x(\tau_i),t_{i-1})]-\int_a^b f(x(s),s)ds-\int_a^b g(x(s),s)du(s)\right\|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\left\|\sum_{i=1}^{|D|}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x(\tau_i),s)ds-\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x(s),s)ds\right]\right\|\\
&\quad+\left\|\sum_{i=1}^{|D|}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x(\tau_i),s)du(s)-\int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x(s),s)du(s)\right]\right\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{|D|} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\|x(\tau_i) - x(s)\|)\ell_1(s)ds + \sum_{i=1}^{|D|} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\|x(\tau_i) - x(s)\|)\ell_2(s)du(s) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(h(b) - h(a) + 1)} \left(\int_a^b \ell_1(s)ds + \int_a^b \ell_2(s)du(s) \right) < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto, a igualdade (6.22) vale. Em conclusão, $x\colon I \to X$ será uma solução da EIVS (6.19) em I se, e somente se, x for uma solução da EDO generalizada (6.21) em I. □

O próximo resultado é uma consequência imediata do Corolário 4.2.7 e Teorema 6.3.2.

Corolário 6.3.3. Seja $s_0 \in J$. A EIVS (6.19) admite uma única solução $x\colon [s_0, \infty) \to X$ definida em $[s_0, \infty)$.

Agora, somos capazes de estabelecer um resultado de periodicidade para a EIVS (6.19).

Teorema 6.3.4. Sob as condições anteriores (A1)-(A7), as seguintes afirmações valem:

(i) A função $H\colon \Omega \to X$ dada por (6.20) é uniformemente T-periódica.

(ii) Para $s_0 \in J$, a EIVS (6.19) tem uma solução T-periódica $x\colon [s_0, \infty) \to X$ se, e somente se, $x(s_0) = x(s_0 + T)$.

Demonstração. (i) Seja $(x,t) \in \Omega$. Pelas condições (A2), (A4), (A5) e Teorema 2.1.21, obtemos

$$
\begin{aligned}
H(x, t+T) &= \int_{t_0}^{t+T} f(x,s)ds + \int_{t_0}^{t+T} g(x,s)du(s) \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} f(x,s)ds + \int_{t_0+T}^{t+T} f(x,s)ds + \int_{t_0}^{t_0+T} g(x,s)du(s) + \int_{t_0+T}^{t+T} g(x,s)du(s) \\
&= \int_{t_0}^{t} f(x,s+T)ds + \int_{t_0}^{t} g(x,s+T)du(s+T) = H(x,t).
\end{aligned}
$$

(ii) A condição necessária é trivial. Para a condição suficiente, usando Corolário 6.3.3, assuma que x seja uma solução de (6.19) definida em $[s_0, \infty)$ tal que $x(s_0) = x(s_0 + T)$. Pelo teorema de correspondência (Teorema 6.3.2), x também será uma solução de (6.21). Como H é uniformemente T-periódica e satisfaz a condição (EU), segue pelo Teorema 6.2.8 que x é T-periódica. □

6.3.2 Teoria de Floquet para equações integrais do tipo Volterra-Stieltjes

Nesta subseção, tratamos da teoria de Floquet para uma EIVS da forma

$$
x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)x(s)du(s), \quad t \in J, \tag{6.23}
$$

em que $t_0 \in J$ e as funções $\mathscr{F}, \mathscr{G}\colon J \to L(X)$ e $u\colon J \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(B1) $\mathscr{F}: J \to L(X)$ é uma função T-periódica e Perron integrável sobre J;

(B2) $u(t+T) = u(t) + \beta$ para algum $\beta > 0$;

(B3) $\mathscr{G}: J \to L(X)$ é uma função T-periódica e Perron-Stieltjes integrável com respeito à função u sobre J;

(B4) $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \mathscr{F}(s)ds = \int_{t_0}^{t_0+T} \mathscr{G}(s)du(s) = 0$;

(B5) Existe uma função $M_1: J \to \mathbb{R}$ localmente Perron integrável tal que para cada $a, b \in J$, $a \leqslant b$,
$$\left\| \int_a^b \mathscr{F}(s)ds \right\| \leqslant \int_a^b M_1(s)ds;$$

(B6) Existe uma função $M_2: J \to \mathbb{R}$ localmente Perron-Stieltjes integrável com respeito à função u tal que para cada $a, b \in J$, $a \leqslant b$, temos
$$\left\| \int_a^b \mathscr{G}(s)du(s) \right\| \leqslant \int_a^b M_2(s)du(s);$$

(B7) Para todo $t \in J$, existe $\xi = \xi(t) > 0$ tal que
$$\int_{t-\xi}^t M_2(s)du(s) < 1 \quad \text{e} \quad \int_t^{t+\xi} M_2(s)du(s) < 1.$$

Definindo o operador $A: J \to L(X)$ por
$$A(t) = \int_{t_0}^t \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^t \mathscr{G}(s)du(s), \tag{6.24}$$
para todo $t \in J$ e considerando a EDO generalizada linear
$$\frac{dx}{d\tau} = D[A(t)x], \tag{6.25}$$
temos o seguinte resultado de correspondência.

Teorema 6.3.5. Seja $I \subset J$ um subintervalo. Uma função $x: I \to X$ será uma solução da EIVS (6.23) se, e somente se, x for uma solução da EDO generalizada linear (6.25).

No próximo resultado, estabelecemos algumas propriedades do operador A definido em (6.24). Lembramos as notações $\Delta^- A(t) = A(t) - \lim_{s \to t^-} A(s)$ e $\Delta^+ A(t) = \lim_{s \to t^+} A(s) - A(t)$.

Proposição 6.3.6. Seja $A: J \to L(X)$ dado por (6.24). Então A é um operador T-periódico e A satisfaz as condições (H1) e (H2), isto é, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$ e $[I - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X)$, $[I + \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X)$ para todo $t \in J$.

Demonstração. Usando condições (B5) e (B6), obtemos

$$\|A(t_2)-A(t_1)\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} M_1(r)dr + \int_{t_1}^{t_2} M_2(r)du(r), \quad t_1,t_2 \in J.$$

Seja $[a,b] \subset J$ um intervalo compacto e $D = (\tau_j, [t_{j-1},t_j])$, $j = 1,2,\ldots,|D|$, uma divisão marcada de $[a,b]$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{|D|} \|A(t_i)-A(t_{i-1})\| &\leqslant \sum_{i=1}^{|D|} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} M_1(r)dr + \int_{t_{i-1}}^{t_i} M_2(r)du(r) \right) \\ &\leqslant \int_a^b M_1(r)dr + \int_a^b M_2(r)du(r) < \infty,\end{aligned}$$

isto é, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$.

Agora, seja $t \in J$. Pelas condições (B1)-(B4), temos

$$\begin{aligned}A(t+T) &= \int_{t_0}^{t+T} \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^{t+T} \mathscr{G}(s)du(s) \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0+T}^{t+T} \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+T} \mathscr{G}(s)du(s) + \int_{t_0+T}^{t+T} \mathscr{G}(s)du(s) \\ &= \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s+T)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s+T)du(s+T) \\ &= \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)du(s) = A(t)\end{aligned}$$

isto é, A é T-periódico.

Finalmente, pela condição (B7), dado $t \in J$, existe $\xi = \xi(t) > 0$ tal que $\|\Delta^- A(t)\| < 1$ e $\|\Delta^+ A(t)\| < 1$, o que implica que $[I - \Delta^- A(t)]^{-1} \in L(X)$, $[I - \Delta^+ A(t)]^{-1} \in L(X)$ para todo $t \in J$. □

Como uma consequência do Teorema 4.4.1, temos o resultado seguinte.

Corolário 6.3.7. Para cada $s_0 \in J$, a EIVS (6.23) admitirá uma única solução definida em $[s_0, \infty)$.

No Teorema 6.3.8 a seguir, exibimos o operador fundamental associado à EIVS (6.23). Sua prova segue como em (BONOTTO; FEDERSON; SANTOS, 2018, Theorem 5.4) com adaptações óbvias.

Teorema 6.3.8. Existe um único operador $V\colon \mathscr{P} \to L(X)$ tal que

$$V(t,s) = I + \int_s^t \mathscr{F}(r)V(r,s)dr + \int_s^t \mathscr{G}(r)V(r,s)du(r),$$

para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$. Além disso, para cada $s \in J$ fixado, $V(\cdot,s) \in BV_{loc}([s,\infty), L(X))$. Para $s_0 \in J$, a função $x\colon [s_0,\infty) \to X$ dada por $x(t) = V(t,s_0)\tilde{x}$ é a solução de (6.23) em $[s_0,\infty)$ satisfazendo a condição inicial $x(s_0) = \tilde{x}$, com $\tilde{x} \in X$. Este operador será chamado o **operador fundamental da EIVS** (6.23) .

No que segue, apresentamos uma versão do Teorema de Floquet para a EIVS (6.23). Antes disso, precisamos de um resultado auxiliar cuja prova é uma consequência da prova de (FEDERSON, 2002b, Theorem 12).

Lema 6.3.9. Sejam $Y: J \to L(X)$ e $v: J \to \mathbb{R}$ funções localmente de variação limitada e $f: J \to L(X)$ localmente Perron-Stieltjes integrável com respeito a v. Assuma que $\tilde{f}: J \to L(X)$, dada por $\tilde{f}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)dv(s), t, t_0 \in J$, também seja localmente de variação limitada. Então as integrais de Perron-Stieltjes $\int_a^b d\tilde{f}(r)Y(r)$ e $\int_a^b f(r)Y(r)dv(r)$ existem e temos

$$\int_a^b d\tilde{f}(r)Y(r) = \int_a^b f(r)Y(r)dv(r)$$

para todo $a, b \in J$, com $a < b$.

Na sequência, assumimos $u: J \to \mathbb{R}$ uma função localmente de variação limitada.

Teorema 6.3.10 (**de Floquet para EIVS**)**.** O operador fundamental associado a EIVS (6.23) satisfaz

$$V(t+T, s+T) = V(t,s)$$

para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$.

Demonstração. Considere a EDO generalizada associada (6.25). Pela Proposição 6.3.6, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$ é T-periódica e satisfaz $[I - \Delta^{-}A(t)]^{-1}, [I + \Delta^{-}A(t)]^{-1} \in L(X)$ para todo $t \in J$. Então, pelo Teorema 6.2.11, o operador fudamental $U: \mathscr{P} \to L(X)$ associado a EDO generalizada linear (6.25) satisfaz $U(t+T, s+T) = U(t,s)$ para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$. Por outro lado, note que

$$U(t,s) = I + \int_s^t d[A(r)]U(r,s) = I + \int_s^t \mathscr{F}(r)U(r,s)dr + \int_s^t \mathscr{G}(r)U(r,s)du(r),$$

$(t,s) \in \mathscr{P}$, em que a última das duas integrais são obtidas usando o Lema 6.3.9. A unicidade do operador fundamental da EIVS (6.23) implica que $U(t,s) = V(t,s)$, para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$. Assim,

$$V(t+T, s+T) = U(t+T, s+T) = U(t,s) = V(t,s),$$

para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$. □

Observação 6.3.11. Como $u: J \to \mathbb{R}$ é localmente de variação limitada (veja Lema 6.3.9), o Teorema 6.3.10 pode ser aplicado às equações diferenciais em medida e, portanto, como aplicação, temos um teorema do tipo Floquet para EDMs.

O Teorema 6.3.12, na sequência, é uma versão do Teorema 6.2.15 o qual assegura a existência e unicidade de uma solução periódica em $[s_0, \infty)$, $s_0 \in J$, da EIVS (6.26).

Teorema 6.3.12. Considere a EIVS

$$x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t}\mathscr{F}(s)x(s)ds+\int_{t_0}^{t}\mathscr{G}(s)x(s)du(s)+\int_{t_0}^{t}h(s)du(s), \quad t\in J, \tag{6.26}$$

em que $t_0\in J$, $h\colon J\to X$ é uma função localmente Perron-Stieltjes integrável. Assuma que exista uma função $M_3\colon J\to\mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a u tal que, para cada $a,b\in J$, $a\leqslant b$,

$$\left\|\int_a^b h(s)du(s)\right\|\leqslant\int_a^b M_3(s)du(s).$$

Seja $V\colon\mathscr{P}\to L(X)$ o operador fundamental associado a EIVS (6.23) e $s_0\in J$. As seguintes afirmações são equivalentes.

(i) Para cada função $h\colon J\to X$ tal que a integral de Perron-Stieltjes indefinida $\int_{t_0}^{t}h(s)du(s)$, $t\in J$, é T-periódica, a EIVS (6.26) tem uma única solução T-periódica $x\colon[s_0,\infty)\to X$.

(ii) O operador $[V(s_0+T,s_0)-I]$ admite um inverso à esquerda.

Demonstração. Note que $x\colon[s_0,\infty)\to X$ é uma solução da EIVS (6.26) se, e somente se, x é uma solução da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau}=D[A(t)x+g(t)], \tag{6.27}$$

em que A é dada por (6.24) e $g(t)=\int_{t_0}^{t}h(s)du(s)+g(t_0)$, $t\in J$. Pela Proposição 6.3.6, $A\in BV_{loc}(J,L(X))$ é T-periódica e satisfaz $[I-\Delta^{-}A(t)]^{-1},[I+\Delta^{+}A(t)]^{-1}\in L(X)$ para todo $t\in J$.

Afirmamos que $g\in BV_{loc}(J,X)$. De fato, sejam $a,b\in J$, $a\leqslant b$, e $D=(\tau_j,[t_{j-1},t_j])$, $j=1,2,\dots,|D|$, uma divisão marcada de $[a,b]$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{|D|}\|g(t_i)-g(t_{i-1})\| &\leqslant \sum_{i=1}^{|D|}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}h(r)du(r)\right\|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{|D|}\int_{t_{i-1}}^{t_i}M_3(s)du(s)=\int_a^b M_3(s)du(s)<\infty.\end{aligned}$$

Agora, de acordo com o Teorema 6.2.15, as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) Para cada função T-periódica $g\colon J\to X$, a equação (6.27) tem uma única solução T-periódica $x\colon[s_0,\infty)\to X$ definida em $[s_0,\infty)$.

(b) O operador $[U(s_0+T,s_0)-I]$ admite um inverso à esquerda.

Portanto, usando o fato de que $V(t,s)=U(t,s)$, $(t,s)\in\mathscr{P}$, e que $g\colon J\to X$ é T-periódica se, e somente se, $\int_{t_0}^{t}h(s)du(s)$ é T-periódica, concluímos a demonstração. □

Finalizamos este capítulo apresentando uma versão do Teorema de Floquet para EIVS quando $X = \mathbb{R}^n$. Definimos uma matriz fundamental $X\colon J \to L(\mathbb{R}^n)$ da EIVS (6.23) como sendo o operador que satisfaz a equação

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(s)X(s)ds + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(s)X(s)du(s), \tag{6.28}$$

para todo $t \in J$.

Teorema 6.3.13. Assuma que as condições (B1)-(B7) sejam satisfeitas e $X = \mathbb{R}^n$. Se $X\colon J \to L(\mathbb{R}^n)$ é uma matriz fundamental da EIVS (6.23), então existe uma função matricial T-periódica $P\colon J \to L(\mathbb{R}^n)$ e $B \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $X(t) = P(t)\,e^{Bt}$, para todo $t \in J$.

Demonstração. Seja $X\colon J \to L(\mathbb{R}^n)$ uma matriz fundamental da EIVS (6.23). Usando o Lema 6.3.9, obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \mathscr{F}(r)X(r)dr + \int_{t_0}^{t} \mathscr{G}(r)X(r)du(r) = \int_{t_0}^{t} d[A(r)]X(r),$$

$t \in J$. Assim, $X\colon J \to L(\mathbb{R}^n)$ satisfaz (6.28) se, e somente se,

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} d[A(r)]X(r), \quad t \in J,$$

em que $A\colon J \to L(X)$ é dada por (6.24). Pela Proposição 6.3.6, $A \in BV_{loc}(J, L(X))$, A é T-periódica e $[I - \Delta^{-}A(t)]^{-1}, [I + \Delta^{+}A(t)]^{-1} \in L(X)$ para todo $t \in J$. Consequentemente, pelos Teoremas 6.1.11 e 6.3.5, existem um operador T-periódico $P\colon J \to L(\mathbb{R}^n)$ e $B \in L(\mathbb{R}^n)$, tal que $X(t) = P(t)e^{Bt}$, para todo $t \in J$. □

CAPÍTULO

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho se insere no estudo qualitativo das soluções de equações diferenciais ordinárias generalizadas, apresentando grandes e significativas contribuições à teoria de oscilação e periodicidade de soluções para esta classe de equações.

Em se tratando de oscilação de soluções de EDOs generalizadas, nossa contribuição foi ainda maior, uma vez que não existiam, na literatura, resultados nesta direção e nem mesmo a definição de soluções oscilatórias para estas equações. É importante observarmos que a teoria de oscilação proposta neste trabalho vai além do ambiente de EDOs generalizadas, já que os resultados que obtivemos sobre oscilação de soluções são para processos de evolução regrados. Assim, qualquer equação diferencial que gere um processo de evolução regrado, pode ser abordada no teorema que garante a oscilação e não oscilação de soluções. Desta maneira, fornecemos um critério de oscilação para EDOs, por exemplo.

No que diz respeito à periodicidade de soluções, alguns estudos foram feitos (veja, por exemplo (MACENA, 2014)). Entretanto, em (MACENA, 2014), a autora utiliza a teoria do grau coincidente para obter resultados sobre a periodicidade de soluções. Neste texto, obtivemos resultados sobre a existência e unicidade de soluções periódicas de EDOs generalizadas e, ainda, construímos uma teoria de Floquet para esta classe de equações.

Finalizamos este trabalho, chamando a atenção do leitor para a importância de se obter resultados em EDOs generalizadas, já que, como bem sabemos, o contexto das EDOs generalizadas vem se mostrando um excelente ambiente para se tratar problemas de outras classes de equações, principalmente as equações em que as funções envolvidas apresentam muitas descontinuidades e/ou são de variação ilimitada. E, como se não bastasse, o ambiente das EDOs generalizadas é bastante amigável, sendo mais simples do que qualquer das equações estudadas usualmente.

REFERÊNCIAS

ACUÑA, R. G. **On qualitative properties of generalized ODEs**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 56.

AFONSO, S.; BONOTTO, E.; FEDERSON, M.; SCHWABIK, Š. Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to Lasalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 250, n. 7, p. 2969–3001, 2011. Citado na página 102.

AFONSO, S.; BONOTTO, E.; FEDERSON, M.; GIMENES, L. Boundedness of solutions of retarded functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations. **Mathematische Nachrichten**, Wiley Online Library, v. 285, n. 5-6, p. 545–561, 2012. Citado na página 21.

____. Stability of functional differential equations with variable impulsive perturbations via generalized ordinary differential equations. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, Elsevier, v. 137, n. 2, p. 189–214, 2013. Citado na página 21.

AFONSO, S.; BONOTTO, E.; FEDERSON, M. *et al.* On exponential stability of functional differential equations with variable impulse perturbations. **Differential and Integral Equations**, Khayyam Publishing, Inc., v. 27, n. 7/8, p. 721–742, 2014. Citado na página 21.

ALEXIEWICZ, A. Linear functionals on Denjoy-integrable functions. In: INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK. **Colloquium Mathematicum**. [S.l.], 1948. v. 1, p. 289–293. Citado na página 33.

AP. SILVA, M. **Teoria de oscilações para equações diferenciais em medida**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado na página 37.

AP. SILVA, M.; BONOTTO, E.; COLLEGARI, R.; FEDERSON, M.; GADOTTI, M. On periodic solutions of abstract generalized ODEs and applications to measure differential equations. **Artigo submetido**, 2021. Citado nas páginas 15, 17, 23, 85, 92 e 95.

AP. SILVA, M.; BONOTTO, E.; FEDERSON, M. Oscillation theory for regulated linear semigroups and regulated linear processes with application to generalized ODEs. **Preprint**, 2021. Citado nas páginas 15, 17, 23, 65, 78 e 81.

AP. SILVA, M.; FEDERSON, M. Oscillatory solutions of measure differential equations with several delays and generalized ODEs. **Artigo submetido**, 2021. Citado nas páginas 15, 17, 22, 37, 40, 65 e 69.

AP. SILVA, M.; FEDERSON, M.; GADOTTI, M. Oscillation and nonoscillation criteria for impulsive delay differential equations with Perron integrable coefficientes. **Artigo aceito para publicação**, 2021. Citado nas páginas 15, 17, 22, 37 e 40.

BONOTTO, E.; FEDERSON, M.; MESQUITA, J. **Generalized ordinary differential equations in abstract spaces**. [S.l.]: Wiley, 2021. Citado nas páginas 15, 17, 21, 23, 25, 28, 32, 36, 53, 56 e 85.

BONOTTO, E.; FEDERSON, M.; SANTOS, F. Dichotomies for generalized ordinary differential equations and applications. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 264, n. 5, p. 3131–3173, 2018. Citado na página 105.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 94.

CARVALHO, A. N. Sistemas dinâmicos não-lineares - notas de aula. 2012. Citado na página 78.

CHICONE, C. **Ordinary differential equations with applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 34. Citado nas páginas 89, 90 e 91.

COLLEGARI, R. **Equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares e aplicações às equações diferenciais funcionais lineares**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado nas páginas 53, 59 e 62.

COLLEGARI, R.; FEDERSON, M.; FRASSON, M. Linear FDEs in the frame of generalized ODEs: variation-of-constants formula. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Springer, v. 68, n. 4, p. 889–920, 2018. Citado na página 62.

DAS, P.; SHARMA, R. On optimal controls for measure delay-differential equations. **SIAM Journal on Control**, SIAM, v. 9, n. 1, p. 43–61, 1971. Citado na página 35.

DAS, P. C.; SHARMA, R. R. Existence and stability of measure differential equations. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 22, n. 1, p. 145–158, 1972. Citado nas páginas 35 e 36.

DEPREE, J.; SWARTZ, C. **Introduction to real analysis**. [S.l.]: Wiley, 1988. Citado na página 34.

ENE, V. CHARACTERIZATIONS OF $AC^{*}G\cap C, \underline{AC}^{*}G\cap C_i, AC$ AND $\underline{AC}$ FUNCTIONS. **Real Analysis Exchange, JSTOR**, v. 19, n. 2, p. 491–509, 1993. Citado na página 32.

FEDERSON, M. A constructive integral equivalent to the integral of Kurzweil. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 52, n. 2, p. 365–367, 2002. Citado na página 45.

____. Substitution formulas for the Kurzweil and Henstock vector integrals. **Mathematica Bohemica**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 127, n. 1, p. 15–26, 2002. Citado nas páginas 31, 79 e 106.

____. The Fundamental Theorem of Calculus for multidimensional Banach space-valued Henstock vector integrals. **Real Analysis Exchange**, v. 25, n. 1, p. 469–480, 1999. Citado nas páginas 32 e 33.

FEDERSON, M.; FRASSON, M.; MESQUITA, J. G.; TACURI, P. Measure neutral functional differential equations as generalized ODEs. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, Springer, v. 31, n. 1, p. 207–236, 2019. Citado na página 21.

FEDERSON, M.; GRAU, R.; MESQUITA, J.; TOON, E. Lyapunov stability for measure differential equations and dynamic equations on time scales. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 267, n. 7, p. 4192–4223, 2019. Citado na página 21.

FEDERSON, M.; MESQUITA, J.; TOON, E. Functional differential equations with impulses - notas de aula. 2015. Citado na página 36.

FEDERSON, M.; MESQUITA, J. G.; SLAVÍK, A. Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 252, n. 6, p. 3816–3847, 2012. Citado nas páginas 21, 35, 65, 66 e 67.

____. Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses. **Mathematische Nachrichten**, Wiley Online Library, v. 286, n. 2-3, p. 181–204, 2013. Citado na página 21.

FEDERSON, M.; SCHWABIK, Š. A new approach to impulsive retarded differential equations: stability results. **Functional Differential Equations**, Citeseer, v. 16, n. 4, p. 583–607, 2009. Citado na página 21.

____. Generalized ODE approach to impulsive retarded functional differential equations. **Differential and Integral Equations**, Khayyam Publishing, Inc., v. 19, n. 11, p. 1201–1234, 2006. Citado nas páginas 21 e 60.

GARCIA, L. **Estabilidade para equações diferenciais em medida**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Citado na página 53.

GORDON, A. **The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1994. Citado na página 26.

HARTUNG, F.; KRISZTIN, T.; WALTHER, H.-O.; WU, J. Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications. **Handbook of differential equations: ordinary differential equations**. [S.l.]: Elsevier, 2006. v. 3, p. 435–545. Citado na página 68.

HÖNIG, C. S. Volterra Stieltjes-integral equations. **Functional Differential Equations and Bifurcation**. [S.l.]: Springer, 1980. p. 173–216. Citado na página 31.

____. There is no natural Banach space norm on the space of Kurzweil-Henstock-Denjoy-Perron integrable functions. **Seminário Brasileiro de Análise**, v. 30, p. 387–397, 1989. Citado na página 33.

HÖRMANDER, L. **The analysis of linear partial differential operators III: Pseudo-differential operators**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado na página 35.

KURTZ, D. S.; SWARTZ, C. W. **Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2011. v. 13. Citado na página 26.

KURZWEIL, J. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 7, n. 3, p. 418–449, 1957. Citado nas páginas 21, 26, 53 e 54.

____. Generalized ordinary differential equations. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 8, n. 3, p. 360–388, 1958. Citado na página 26.

____. Unicity of solutions of generalized differential equations. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 8, n. 4, p. 502–509, 1958. Citado na página 26.

____. Addition to my paper “generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter”. **Czechoslovak Mathematical Journal**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 9, n. 4, p. 564–573, 1959. Citado na página 26.

____. **Generalized ordinary differential equations: not absolutely continuous solutions**. [S.l.]: World Scientific, 2012. v. 11. Citado na página 21.

LEE, P. Y. **Lanzhou lectures on Henstock integration**. [S.l.]: World Scientific, 1989. v. 2. Citado na página 34.

LEE, T. Y. **Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces**. [S.l.]: World Scientific, 2011. v. 12. Citado na página 26.

MACENA, M. C. S. M. **Teoria de bifurcação para equações diferenciais ordinárias generalizadas e aplicações às equações diferenciais ordinárias**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado na página 109.

MONTEIRO, G., SATCO, B. Distributional, differential and integral problems: equivalence and existence results. **Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations**, University of Szeged, Hungary, v. 2017, n. 7, p. 1–26, 2017. Citado nas páginas 36 e 45.

SCHMAEDEKE, W. Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control**, SIAM, v. 3, n. 2, p. 231–280, 1965. Citado na página 35.

SCHWABIK, Š. **Generalized ordinary differential equations**. [S.l.]: World Scientific, 1992. v. 5. Citado nas páginas 21, 25, 27, 28, 29, 32, 45, 53, 55, 56, 58, 59, 61, 86 e 89.

____. Abstract Perron-Stieltjes integral. **Mathematica Bohemica**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 121, n. 4, p. 425–447, 1996. Citado nas páginas 31 e 45.

____. Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces. **Mathematica Bohemica**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 124, n. 4, p. 433–457, 1999. Citado na página 62.

SLAVÍK, A. Measure functional differential equations with infinite delay. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 79, p. 140–155, 2013. Citado nas páginas 30, 65, 66, 67 e 68.

SOUTO, G. M. **Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias generalizadas**. Dissertação (Mestrado) — Univeridade Estadual de Maringál, 2013. Citado na página 27.

TABOR, J. Oscillation theory of linear systems. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 180, n. 1, p. 171–197, 2002. Citado nas páginas 46, 65, 77, 80, 82 e 83.

YAN, J. Oscillation of first-order impulsive differential equations with advanced argument. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 42, n. 10-11, p. 1353–1363, 2001. Citado nas páginas 22, 40, 41 e 46.

ÍNDICE

ICMC USP
SÃO CARLOS