
Tangências homoclínicas, entropia e medidas de SRB

Marcus Augusto Bronzi

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 23 de Fevereiro de 2010

Assinatura: _____

Tangências homoclínicas, entropia e medidas de SRB¹

Marcus Augusto Bronzi

Orientador: *Prof. Dr. Ali Tahzibi*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2010

¹Projeto financiado pela FAPESP

*À minha esposa
Elba e à minha
mãe Célia,
dedico.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por auxiliar-me a concluir mais essa etapa da vida, dando-me paciência, companhia e entusiasmo nos momentos difíceis que enfrentei neste período.

À minha esposa Elba pela compreensão, força, paciência, esperança, companheirismo, expectativa, fidelidade, apoio e muitas outras formas de amizade e amor que teve comigo neste período.

À minha família Célia, João, Carol, Fabiana e Danilo, incluindo também Sônia e Miro, Nathan e Régis que nesses quatro anos me apoiaram e motivaram incansavelmente. Ressalto aqui toda a força que minha mãe Célia me deu para cursar o doutorado numa conversa decisiva.

Ao Professor Doutor e Orientador Ali Tahzibi, por sua imensa experiência e entusiasmo, pela receptividade, encorajamento e pelas oportunidades e experiências acadêmicas que pude vivenciar durante estes importantes quatro anos.

A todos os professores do ICMC que de algum modo me ajudaram nesse trajeto. Em especial aos professores Daniel Smania, Carlos Maquera, Carlos Biasi, Marcelo Saia, Hidebrando e às professoras Cidinha (Maria Aparecida Ruas) e Marcia Federson.

Ao Professor Doutor Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon, *in memoriam*.

Aos irmãos acadêmicos Juliano Oler, Ubarana (Thiago Catalan), Fernando Micena e ao parceiro Kleyber Mota, pela amizade, convivência, brincadeiras, seminários e discussões no quadro desgastado do segundo andar do ICMC, em busca do entendimento da teoria de Sistemas Dinâmicos.

Aos meus contemporâneos da turma de doutorado, Miriam (também de mestrado!), Marcela, Tatiana, Daniela, Michele e Bernardo. Aos colegas da minha “salinha 4-230” Nazira, Andrea, Marcos, Everaldo, Wesley, Fernandão, Miriam, Daniela e aos novatos. À galera das salinhas 4-232 e 4-227, em particular Benito, Luizão, Edinho, Flank, Pimenta, John, Kleyber, Ubarana, Tatimi, Thais Muniz e Thais Jordão. Aos demais companheiros Walter, Márcio Fenille, Nivaldo, Enoch, Romero e àqueles de quem possa ter me esquecido.

Aos bons amigos da “República Churrasco” Ursão (Rodrigo Martins), Jamil, Juliano, Luizão, Leko, Yuri, Pimenta, Flank e Mário, pelas jogatinas, confraternizações, muita brincadeira e “trairagem”.

A todos os funcionários do ICMC, que direta e indiretamente me auxiliaram durante todo este período. Em particular, Seu Arli, Roberto, Dornelas e Camilo. Aos funcionários da biblioteca do ICMC, pelo auxílio na busca de textos e artigos.

A FAPESP e a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Estudamos o efeito de uma tangência homoclínica na variação da entropia topológica. Provamos que um difeomorfismo com uma tangência homoclínica associada a uma peça básica com máxima entropia é um ponto de variação da entropia na topologia C^∞ . Além disso, discutimos o problema variacional na topologia C^1 e apresentamos um exemplo de descontinuidade da entropia em dimensão três.

Um resultado devido a Newhouse afirma que um difeomorfismo genérico sobre uma superfície com um conjunto homoclínico que contém uma tangência correspondente a um ponto periódico dissipativo, não pode ter medidas de SRB suportadas no conjunto homoclínico. Generalizamos este resultado para dimensões maiores, no caso em que a tangência homoclínica está associada com uma sela seccionalmente dissipativa.

Abstract

We study the effect of a homoclinic tangency in the variation of the topological entropy. We prove that a diffeomorphism with a homoclinic tangency associated to a basic hyperbolic set with maximal entropy is a point of entropy variation in the C^∞ -topology. We also discuss variational problem in C^1 -topology and we show an example of discontinuity of the entropy in dimension three.

A result due to Newhouse states that a generic surface diffeomorphism with a homoclinic set containing a tangency associated to a dissipative periodic point, can not have SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) measures supported on the homoclinic set. We generalize this result to higher dimensions, in the case where the homoclinic tangency is associated to a sectionally dissipative saddle.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Conceitos Básicos e Definições	5
1.1.1 Hiperbolicidade Uniforme	5
1.1.2 Hiperbolicidade Não-Uniforme	9
1.1.3 Medidas Condicionais	13
1.1.4 Medida de SRB	13
1.1.5 Propriedades da Medida de SRB	14
1.2 Renormalização em Dimensões Altas	15
1.3 Desdobramento de Tangências Homoclínicas	16
1.3.1 Modelo de Desdobramento de Tangência Homoclínica	17
1.4 Entropia Topológica	21
1.4.1 Continuidade da Entropia Topológica	23
2 Resultados Novos	25
2.1 Variação de Entropia e Tangências Homoclínicas	26
2.1.1 Contextualização e Enunciados dos Teoremas	26
2.1.2 Principais Ingredientes	28
2.1.3 Prova dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.4	32
2.2 Relação com um Resultado de Yomdin	35
2.3 Exemplo de Descontinuidade da Entropia Topológica	41

3	Teorema de Newhouse em Dimensões Maiores	45
3.1	Ingredientes para a Prova do Teorema	45
3.2	Demonstração do Teorema 3.1	50
A	Renormalizações em Dimensões Altas - Construção	55
	Referências Bibliográficas	62

Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos hiperbólicos foi introduzida há cerca de quatro décadas, com a meta inicial de caracterizar os sistemas conhecidos como estruturalmente estáveis e provar que eles correspondem à maioria dos casos: um subconjunto aberto e denso. Parte desta meta já foi atingida para difeomorfismos de classe C^1 , com a demonstração da Conjectura da Estabilidade de Palis-Smale por Ricardo Mañé na década de oitenta, e depois por Hayashi para fluxos de classe C^1 . No início da década de sessenta conjecturou-se que a classe de sistemas dinâmicos hiperbólicos tinha caráter universal, porém logo depois mostrou-se que esta classe não era tão geral. Muitos sistemas importantes, incluindo a maioria daqueles que correspondem à modelagem de aplicações práticas, não são abrangidos por esta teoria. Estes sistemas apresentam frequentemente comportamento dinâmico muito complexo e sua descrição é feita não só em termos geométricos, como o ocorrido basicamente no caso hiperbólico, mas também em termos ergódicos ou probabilísticos. O estudo de certos modelos, tais como os atratores caóticos de Hénon e de Lorenz, bem como o desenvolvimento de ferramentas importantes, especialmente na teoria das bifurcações e na teoria de hiperbolicidade não-uniforme, conduziram já nos anos noventa a uma nova tentativa de formular uma abordagem global da dinâmica que conduzisse a uma descrição tão rica quanto possível do comportamento dinâmico, com grande generalidade.

Os trabalhos de Newhouse, Palis, Takens, Yoccoz e Moreira desenvolveram uma poderosa abordagem geométrica no estudo de tangências homoclínicas em superfícies. Em dimensões maiores do que dois há diversas dificuldades adicionais, principalmente ligadas ao fato de que folheações invariantes em geral deixam de ser diferenciáveis. Isto mantém em aberto algumas questões básicas sobre conjuntos hiperbólicos. Apesar disso, Moreira, Palis, Viana, Yoccoz [MY01], [PY01], [PV94] estenderam para dimensões arbitrárias a conexão entre dimensões fractais e a frequência de hiperbolicidade no desdobramento de tangências.

Recentemente, em 2000, Pujals e Sambarino [PS00a] resolveram um caso da conjectura de Palis que afirma que todo difeomorfismo de uma superfície pode ser C^1 aproximado por outro que é ou hiperbólico ou exibe uma tangência homoclínica. Uma consequência deste trabalho

foi a demonstração, também por Pujals e Sambarino [PS00b], de que a variação da entropia topológica ao longo de uma família de difeomorfismos sempre envolve o desdobramento de tangências homoclínicas.

Para dimensões maiores que dois, Palis conjecturou que todo difeomorfismo pode ser C^r aproximado por um hiperbólico, ou um exibindo uma tangência homoclínica ou um ciclo heteroclínico.

Nessa direção, alguns resultados parciais foram obtidos por [Wen04] and [Puj08]. Na última referência, Pujals exhibe um conjunto atrator topologicamente hiperbólico de um difeomorfismo Kupka-Smale numa variedade tridimensional suave e prova que, sob algumas hipóteses de dissipatividade, ou o conjunto é hiperbólico ou o difeomorfismo é C^1 -aproximado por outro que exhibe ou um ciclo heterodimensional ou uma tangência homoclínica. Outro resultado recente é um preprint de Sylvain Crovisier [Cro08], onde o autor prova que qualquer difeomorfismo de uma variedade compacta pode ser C^1 -aproximado por um difeomorfismo que exhibe uma bifurcação homoclínica ou por um difeomorfismo que é parcialmente hiperbólico.

A tese apresenta uma contribuição para a Teoria Ergódica no que diz respeito à variação de entropia topológica. Estudamos algumas relações da variação da entropia topológica com sistemas que apresentam tangência homoclínica. Nessa direção, como já mencionamos anteriormente, Pujals and Sambarino [PS00b] provaram que difeomorfismos em superfícies longe de tangências homoclínicas são pontos de constância da entropia topológica na topologia C^∞ . Estudamos a questão recíproca. Isto é, estamos interessados no efeito que uma tangência homoclínica de um difeomorfismo de uma superfície causa na entropia topológica. Consideramos uma classe de difeomorfismos na fronteira dos sistemas Axioma A que exibem uma tangência homoclínica correspondente a um ponto periódico de uma peça básica. Essa tangência fica fora do conjunto hiperbólico. Mostramos que a entropia topológica cresce depois de pequenas perturbações C^∞ . Para isso, o sistema deve atender uma condição imposta nas peças básicas: que a entropia do sistema restrito à peça básica associada à tangência homoclínica seja igual à entropia do sistema. Nesse caso denominamos tal peça básica de peça *responsável* pela entropia. Mostramos também que se a peça básica associada à tangência homoclínica não tem entropia igual à do sistema, então a entropia topológica pode permanecer constante numa vizinhança de um dado difeomorfismo que apresente uma tangência homoclínica ou pode até mesmo variar, dependendo da topologia considerada. Além disso, mostramos que existem exemplos de sistemas que possuem uma peça básica responsável pela entropia e são um ponto de variação da entropia na topologia C^1 .

A entropia topológica é geralmente muito difícil de ser computada e a sua dependência do sistema, suas propriedades de continuidade, são muito delicadas. A entropia é estável para sistemas uniformemente hiperbólicos, isto é, permanece a mesma por pequenas perturbações do sistema. Mas em geral, a entropia não é contínua para difeomorfismo de classe C^1 , veja [Mis71], [Pol93] e [HSX08] para exemplos. Por Yomdin [Yom87] e Katok [Pol93], a entropia varia continuamente na classe de difeomorfismos C^∞ definidos numa superfície compacta. Em outro contexto, Hua, Saghin e Xia [HSX08] mostram que para uma grande classe de

difeomorfismos C^∞ parcialmente hiperbólicos com folheações centrais bi-dimensionais (e com certas condições homológicas na variedade), a entropia topológica varia continuamente. Neste último trabalho, os autores afirmam que sem as condições sobre a homologia o resultado não é válido e eles apresentam exemplos em dimensões maiores ou iguais do que quatro onde o resultado falha sem tais hipóteses. A questão natural que surge é sobre a continuidade da entropia na topologia C^∞ para sistemas sobre variedades tri-dimensionais. Nesta tese, damos uma resposta para esta questão, isto é, apresentamos um contra-exemplo da continuidade da entropia em dimensão três. Porém ainda não se sabe se existe um tal exemplo no conjunto dos sistemas parcialmente hiperbólicos.

Na década de 70, Sinai, Ruelle e Bowen introduziram as chamadas medidas de SRB, as quais desempenham um papel importante na teoria de sistemas dinâmicos dissipativos com comportamento caótico. Seus trabalhos iniciais foram no contexto de atratores hiperbólicos [Bow08]. Depois, no contexto de sistemas não-uniformemente hiperbólicos, a teoria de medidas de SRB foi bastante desenvolvida por Pesin, Katok, Ledrappier, Young e por muitos outros matemáticos [LY85], [Pes76], [PS89]. Para contribuições na teoria de medidas de SRB em sistemas parcialmente hiperbólicos mencionamos os trabalhos Bonatti, Viana e Alves [BV00] e [ABV00]. Newhouse, além de seu trabalho conhecido como “o fenômeno de Newhouse” [New79],[New74] que garante a existência subconjuntos residuais (intersecção enumerável de conjuntos abertos e densos) de difeomorfismos de classe C^2 exibindo infinitos poços (ou fontes) e que tem como consequência a persistência de tangências homoclínicas, descobriu também um novo fenômeno associado às tangências homoclínicas: existe um subconjunto residual do conjunto dos difeomorfismos de classe C^r , $2 \leq r \leq \infty$, para os quais a presença de um ponto fixo de sela dissipativo e uma tangência homoclínica em sua classe homoclínica impede a existência de uma medida de SRB que dê peso total à esta classe homoclínica. O fenômeno de Newhouse inicialmente foi feito em dimensão dois, posteriormente Palis e Viana fizeram a generalização para dimensões maiores [PV94] de uma maneira mais geral do que Romero [Rom95]. Assim, o entendimento mais profundo das bifurcações homoclínicas é parte fundamental do estudo de sistemas dinâmicos.

Apresentamos aqui uma extensão natural de um resultado de Newhouse [New04]. Newhouse afirma que existe um subconjunto residual \mathcal{U} do conjunto dos difeomorfismos de classe C^r , $2 \leq r \leq \infty$, munido com a topologia uniforme tal que se $f \in \mathcal{U}$ e Λ é uma classe homoclínica de f contendo uma sela (ponto fixo) dissipativa p (isto é, o valor absoluto do produto dos autovalores da derivada de f em p é menor do que um) com uma tangência homoclínica, então Λ não carrega uma medida de SRB (veja Definição 1.4).

Nesta tese apresentamos uma generalização desse resultado para dimensões maiores no caso em que a tangência homoclínica está associada a uma sela seccionalmente dissipativa. A idéia da demonstração é semelhante àquela usada por Newhouse. Primeiramente mostramos que se Λ é uma classe homoclínica de uma sela p que carrega uma medida de SRB ν , então o suporte de ν é o fecho da variedade instável da órbita do ponto p para dimensões arbitrárias. Para provar esse fato utilizamos um resultado de Tsujii [Tsu91]. Depois, utilizando o artigo

de Palis-Viana [PV94], mostramos para dimensões finitas arbitrárias o seguinte fato: se f é um difeomorfismo que tem uma classe homoclínica com uma tangência associada à uma sela seccionalmente dissipativa p , então existe g arbitrariamente próxima de f , que tem um poço $q(g)$ tal que $W^s(q(g)) \cap W^u(p(g)) \neq \emptyset$. E concluímos a prova por uma contradição desses dois fatos, de modo semelhante ao feito por Newhouse.

No primeiro capítulo, listamos alguns resultados básicos da Teoria Hiperbólica e Teoria Ergódica necessários para uma boa compreensão de todo o texto. Além disso refazemos e modificamos ligeiramente algumas construções já conhecidas destas teorias. Nesta parte do texto, recordamos as definições e as principais propriedades e resultados sobre hiperbolicidade uniforme e não-uniforme e sobre medidas de SRB (Sinai-Ruelle-Bowen). Além disso, fazemos uma breve revisão das renormalizações em dimensões altas de Palis-Viana [PV94], destacando um ponto importante que será utilizado nesta tese. E fechamos o capítulo apresentando a construção de um modelo de desdobramento de uma tangência homoclínica como em Palis-Takens [PT93].

No segundo capítulo colocamos os resultados novos obtidos neste trabalho juntamente com algumas definições e resultados já conhecidos que foram deixados nas seções deste capítulo para um melhor entendimento dos argumentos utilizados nas demonstrações destes resultados. Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção, apresentamos resultados novos que relacionam a entropia topológica com sistemas que apresentam alguma tangência homoclínica. O primeiro resultado trata de sistemas cuja peça responsável pela entropia está ou não associada com a tangência homoclínica, sendo que no primeiro caso obtemos um ponto de variação da entropia e no segundo caso um ponto de constância da entropia. O segundo resultado apresenta um exemplo onde a peça responsável está associada com a tangência homoclínica, mas a entropia varia. O resultado subsequente é uma obstrução à uma possível generalização de um teorema de perturbação (do tipo “snake”) de Newhouse. Na seção seguinte, relacionamos a variação da entropia topológica com a fórmula de Yomdin [Yom87]. Na terceira seção apresentamos um exemplo de descontinuidade da entropia em dimensão três. É bem conhecido que a entropia é descontínua na topologia C^∞ , quando restrita à difeomorfismos cujos domínios são variedades de dimensões maiores ou iguais a três. Miziurewicz [Mis71] construiu uma família de exemplos de descontinuidade da entropia topológica onde a dimensão da variedade é maior ou igual a quatro.

No quarto capítulo enunciamos um dos teoremas principais deste texto, que é uma generalização do resultado dado por Newhouse em [New04].

Preliminares

1.1 Conceitos Básicos e Definições

Nesta seção veremos conceitos básicos e definições que serão utilizados no decorrer desta tese.

De um modo geral sempre consideramos como espaço ambiente uma variedade fechada (sem bordo e compacta) e suave M , isto é, de classe C^∞ . Em alguns momentos exigimos que além de variedade, M seja um espaço mensurável Boreleano. Consideremos $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r para $r \geq 1$. Denotamos o conjunto dos difeomorfismos de classe C^r sobre M por $\text{Diff}^r(M)$, $0 \leq r \leq \infty$.

Um ponto $x \in M$ é *não errante* se para todo conjunto aberto U contendo x existe um $N > 0$ tal que $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotamos o conjunto de todos pontos não-errantes de f por $\Omega(f)$ ou simplesmente Ω .

Um ponto $x \in M$ é *periódico* quando existe um inteiro $p > 0$ tal que $f^p(x) = x$, o menor $p > 0$ com tal propriedade é o *período* de x . Denotamos o conjunto de todos pontos periódico de f por $\text{Per}(f)$.

Note que sempre temos $\text{Per}(f) \subset \Omega(f)$.

1.1.1 Hiperbolicidade Uniforme

Seja M uma variedade suave, $U \subset M$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 sobre sua imagem. Considere d uma métrica sobre M .

Definição 1.1. Um conjunto compacto f -invariante $\Lambda \subset M$ é hiperbólico para f se existe uma decomposição Df -invariante $T_\Lambda = E^u \oplus E^s$ e constantes positivas C e $\lambda < 1$ tais que, para todo $x \in \Lambda$ e todo $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$\|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ para } v \in E_x^s, \text{ e}$$

$$\|Df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ para } v \in E_x^u.$$

Um difeomorfismo f é *Anosov* se M é um conjunto hiperbólico para f . Uma pergunta natural é quando podemos garantir que $\Omega(f) = M$, se Ω for hiperbólico. Para isso, basta exigirmos que o sistema f é conservativo e a conclusão segue do Teorema de Recorrência de Poincaré. Quando $\Omega(f)$ é hiperbólico e o conjunto dos pontos periódicos $\text{Per}(f)$ é denso em $\Omega(f)$, dizemos que f é ou satisfaz o *Axioma A*. Note que é sempre possível fazer uma mudança da métrica próximo do conjunto hiperbólico de modo que $C = 1$. Tal métrica é chamada *métrica adaptada*.

Para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente e $x \in \Lambda$ as *variedades estável e instável locais* de f no ponto x são, respectivamente,

$$W_\varepsilon^s(x, f) = \{y \in M \mid \text{para todo } n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\} \text{ e}$$

$$W_\varepsilon^u(x, f) = \{y \in M \mid \text{para todo } n \in \mathbb{N}, d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon\}.$$

As *variedades estável e instável* de f em x são respectivamente

$$W^s(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x), f)) \text{ e}$$

$$W^u(x, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\varepsilon^u(f^{-n}(x), f)).$$

Quando não houver perigo de ambiguidade omitiremos f nas notações de variedades estável e instável acima. Também denotamos as variedades estável e instável local em x por $W_{loc}^s(x)$ e $W_{loc}^u(x)$, respectivamente, quando não houver necessidade de expressar o seu tamanho. As principais propriedades das variedades estável e instável são dadas pelo seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Teorema da Variedade Estável). *Seja $f : U \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^k ($k \geq 1$) sobre sua imagem. Seja Λ um conjunto hiperbólico para f com constantes hiperbólicas $0 < \lambda < 1$ e $C \geq 1$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que para cada $p \in \Lambda$, existe um disco C^k -mergulhado $W_\varepsilon^s(p)$ que é tangente a E_p^s . Além disso, $W_\varepsilon^s(p)$ é o gráfico de uma aplicação $\varphi_p^s : E_p^s(\varepsilon) \rightarrow E_p^u(\varepsilon)$ de classe C^k , com $\varphi_p^s(0) = 0$ e $D(\varphi_p^s)(0) = 0$, a função φ_p^s e suas primeiras k derivadas variam continuamente com p e*

$$W_\varepsilon^s(p) = \{(\varphi_p^s(y), y) \mid y \in E_p^s(\varepsilon)\}.$$

Um teorema análogo se verifica para variedades instáveis. As consequências do Teorema da Variedade Estável são as seguintes: primeiro, se $W^s(x) \cap W^s(y) \neq \emptyset$ para algum $x, y \in M$,

onde $x \neq y$, então $W^s(x) = W^s(y)$. Além disso, a variedade estável é uma cópia imersa do subespaço linear E_p^s .

Para um difeomorfismo f de classe C^r de uma vizinhança V de \mathbb{R}^n tendo 0 como ponto fixo hiperbólico, o isomorfismo hiperbólico $A = Df(0)$ gera a seguinte decomposição invariante $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Pelo Teorema da Variedade Estável, $W_\varepsilon^s(0)$ é o gráfico de uma aplicação C^r , $\varphi_s : B^s(\varepsilon) \rightarrow E^s$ tal que $\varphi_s(0) = 0$ e $D\varphi_s(0) = 0$, onde $B^s(\varepsilon) \subset E^s$ denota a bola de centro 0 e raio $\varepsilon > 0$. De modo semelhante, a variedade instável local $W_\varepsilon^u(0)$ é o gráfico de uma aplicação C^r , $\varphi_u : B^u(\varepsilon) \rightarrow E^u$ tal que $\varphi_u(0) = 0$ e $D\varphi_u(0) = 0$. Desse modo, a aplicação

$$\varphi : B^s(\varepsilon) \times B^u(\varepsilon) \rightarrow E^s \times E^u, \quad \varphi(x_s, x_u) = (x_s - \varphi_u(x_u), x_u - \varphi_s(x_s))$$

é um difeomorfismo local de uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^n , uma vez que φ é de classe C^r e $D\varphi(0)$ é a identidade do \mathbb{R}^n . Consideremos o difeomorfismo $\tilde{f} = \varphi_* f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Então, \tilde{f} é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem com $\tilde{f}(0) = 0$ e $D\tilde{f}(0) = A$. Além disso, a variedade estável local de \tilde{f} é uma vizinhança da origem em E^s , enquanto que a variedade instável local é uma vizinhança da origem em E^u . Em outras palavras, podemos sempre supor que a variedade estável local (respectivamente, instável local) de um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo f é uma vizinhança do ponto fixo no subespaço estável (respectivamente, instável) da parte linear de f .

Como veremos na demonstração da Proposição A.1, podemos tomar uma métrica em \mathbb{R}^m tal que as restrições $A^s = A|_{E^s}$ e $A^u = A|_{E^u}$ satisfazem $\|A^s\| \leq a < 1$ e $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$. Assim, se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então a restrição f^s de f à $W_\varepsilon^s(0) \subset B^s(\varepsilon) \subset E^s$ é uma contração, uma vez que $Df^s(0) = A^s$ é uma contração. Logo, para toda bola aberta B^s de centro na origem contida em $B^s(\varepsilon)$ temos que o bordo $\partial B^s = \overline{B^s} \setminus B^s$ satisfaz $f(\partial B^s) \subset B^s$. O anel $\overline{B^s} \setminus f(\overline{B^s})$ é chamado um *domínio fundamental* da variedade estável de 0.

Sejam $B^s \subset E^s$ uma bola contida em $W_\varepsilon^s(0)$, $B^u \subset E^u$ uma bola contida em $W_\varepsilon^u(0)$ e $V = B^s \times B^u$. Considere um ponto $q \in W_\varepsilon^s(0)$ e um disco D^u de dimensão $u = \dim E^u$ transversal a $W_\varepsilon^s(0)$ em q . Um resultado muito útil a respeito de variedades estável e instável é o seguinte:

Teorema 1.2 (λ -Lema ou Lema da Inclinação). *Seja p um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo f de classe C^k . Sejam $\varepsilon > 0$, $V = B^s \times B^u$ e $q \in W^s(p) \setminus \{p\}$ como acima. Seja D^u um disco mergulhado da mesma dimensão que E^u e tal que D^u é transversal a $W_\varepsilon^s(p)$. Seja $D_1^u = f(D^u) \cap (E^u(\varepsilon) \times E^s(\varepsilon))$ e $D_{n+1}^u = f(D_n^u) \cap (E^u(\varepsilon) \times E^s(\varepsilon))$. Então, D_n^u converge para $W_\varepsilon^u(p)$ na topologia C^k .*

Denotemos a órbita de um ponto z pela aplicação f por $\mathcal{O}_f(z)$. Um ponto y é um ponto ω -limite de x se existe uma sequência $\{f^{n_j}(x)\}_{j=0}^\infty$ tal que n_j vai para infinito quando j vai para infinito e $\lim_{j \rightarrow \infty} d(f^{n_j}(x), y) = 0$. O conjunto ω -limite de x é denotado por $\omega(x, f)$ (ou apenas $\omega(x)$) e consiste de todos pontos ω -limite de x para f . O conjunto α -limite é definido de modo semelhante, com n_j convergindo para infinito negativo, e é denotado por $\alpha(x, f)$ (ou $\alpha(x)$).

Se Λ é um conjunto invariante de uma variedade M , a *variedade estável* de Λ , denotada por $W^s(\Lambda)$, é definida como o conjunto de todos os pontos $x \in M$ tais que $\omega(x) \subset \Lambda$. De maneira semelhante, a *variedade instável* de Λ , denotada por $W^u(\Lambda)$, é definida como o conjunto de todos os pontos $x \in M$ tais que $\alpha(x) \subset \Lambda$.

Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade suave M . Um conjunto hiperbólico Λ é *localmente maximal* (ou *isolado*) se existe uma vizinhança V de Λ em M tal que $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$.

Conjuntos localmente maximais tem as seguintes boas propriedades quando são hiperbólicos:

Proposição 1.1 ([KH95]). *Seja Λ um conjunto invariante hiperbólico localmente maximal. Então,*

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x) \quad e \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x).$$

Teorema 1.3 (Estabilidade Estrutural Forte para Conjuntos Hiperbólicos, [PT93]). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo $f : U \rightarrow M$. Então, para toda vizinhança aberta $V \subset U$ de Λ e todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que se $f' : U \rightarrow M$ e $d_{C^1}(f', f) < \varepsilon$, então existe um conjunto hiperbólico $\Lambda' = f'(\Lambda) \subset V$ para um homeomorfismo $h : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ com $d_{C_0}(Id, h) + d_{C^0}(Id, h^{-1}) < \delta$ tal que $h \circ f'|_{\Lambda'} = f|_{\Lambda} \circ h$. O conjunto $\Lambda' = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (f')^n(V)$. Mais ainda, h é única se δ for suficientemente pequeno.*

Uma consequência deste último teorema é que um conjunto hiperbólico ser localmente maximal é uma propriedade robusta, isto é, se mantém por pequenas perturbações no sistema. Para um conjunto hiperbólico Λ de um difeomorfismo f denotaremos a *continuação* de Λ para um difeomorfismo f' próximo de f por $\Lambda(f')$. De modo semelhante, para um ponto $p \in \Lambda$ a continuação será denotada por $p(f')$ e as continuações das variedades estável e instável de p por $W^s(p, f')$ e $W^u(p, f')$, respectivamente.

Uma outra propriedade dos conjuntos hiperbólicos localmente maximais é a seguinte:

Proposição 1.2 ([KH95]). *Se Λ é um conjunto hiperbólico localmente maximal de um difeomorfismo f , então $cl(\text{Per}(f|_{\Lambda})) = \Omega(f|_{\Lambda})$.*

Aqui $cl(X)$ denota o fecho do conjunto X .

Outro resultado fundamental em teoria hiperbólica é o Teorema de Decomposição Espectral em conjuntos hiperbólicos devida à Smale [Sma67]. Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é *topologicamente transitiva* sobre um conjunto invariante X se a órbita positiva de algum ponto p é densa em X .

Teorema 1.4 (Decomposição Espectral de Smale, [Sma67]). *Sejam M uma variedade diferenciável compacta e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 . Suponha que $cl(\text{Per}(f))$ é hiperbólico para f . Então, existem subconjuntos fechados disjuntos $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ tais que $cl(\text{Per}(f)) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$, cada Λ_i é fechado, f -invariante, os pontos periódicos são densos*

e f é topologicamente transitivo sobre Λ_i . Além disso, cada Λ_i tem estrutura de produto local. Em particular, se f é Axioma A, então o teorema é válido para $\Omega(f)$.

Os conjuntos Λ_i do teorema anterior são chamados de peças básicas. O que nos conduz à seguinte definição.

Definição 1.2. *Um conjunto f -invariante Λ é uma peça básica se é hiperbólico, topologicamente transitivo e localmente maximal.*

Vamos agora recordar os pontos e conjuntos homoclínicos definidos por Newhouse em [New04].

Definição 1.3. *Um ponto q é um ponto homoclínico para f se existe uma peça básica Λ e pontos $x, y \in \Lambda$ tais que*

$$q \in (W^u(x) \setminus \Lambda) \cap (W^s(y) \setminus \Lambda).$$

O ponto homoclínico q é chamado ponto homoclínico transversal se $W^u(x)$ e $W^s(y)$ são transversais, isto é, o espaço tangente a M no ponto q pode ser escrito como a soma direta $T_q M = T_q W^u(x) \oplus T_q W^s(y)$. Caso contrário, dizemos que q é uma tangência homoclínica.

Dadas duas peças básicas Λ_1 e Λ_2 , definimos a relação de equivalência “ \sim ” por $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ se $\Lambda_1 = \Lambda_2$ ou se existem pontos $x_1, y_1 \in \Lambda_1$ e $x_2, y_2 \in \Lambda_2$ tais que as intersecções $(W^u(x_1) \setminus \Lambda_1) \cap (W^s(x_2) \setminus \Lambda_2)$ e $(W^u(y_1) \setminus \Lambda_1) \cap (W^s(y_2) \setminus \Lambda_2)$ são transversais. Quando o fecho Λ de uma classe de equivalência \mathcal{C} gerada pela relação \sim tem mais do que uma órbita periódica, a chamamos de *conjunto homoclínico (da classe \mathcal{C})*. Um ponto periódico p cuja órbita está em \mathcal{C} é chamado *ponto associado* a Λ . Se um conjunto homoclínico Λ contém uma peça básica Λ_1 com uma tangência homoclínica, dizemos que Λ contém uma tangência homoclínica.

Devemos ressaltar que a relação “ \sim ” acima já é conhecida quando as peças básicas se reduzem a órbitas periódicas hiperbólicas [New80]. Nesse caso o fecho da classe de equivalência de um ponto periódico p é chamado de *classe homoclínica* de p e é denotada por $\overline{H(p, f)}$. O seguinte fato pode ser encontrado em [New80] ou em [New04] pág. 1727.

Proposição 1.3 ([New04]). *Todo conjunto homoclínico é um conjunto topologicamente transitivo e não-enumerável contendo um conjunto denso de pontos periódicos associados. Além disso, ele coincide com o fecho dos pontos homoclínicos transversais das órbitas de qualquer um de seus pontos periódicos associados.*

1.1.2 Hiperbolicidade Não-Uniforme

Consideremos $f : M \rightarrow M$ uma aplicação mensurável sobre uma variedade n -dimensional M e ν uma medida de probabilidade sobre M . Dizemos que a medida ν é *f -invariante* quando para todo conjunto mensurável A se verifica $\nu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$. A aplicação f é *ergódica* com relação à medida ν (ou a medida ν é ergódica com relação à f) se para todo conjunto mensurável

f -invariante A temos $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A) = 1$. Equivalentemente, ν é ergódica se toda função mensurável f -invariante φ (isto é, $\varphi \circ f = \varphi$ ν -qtp) é constante ν -qtp. Se além disso M é um espaço topológico munido com a σ -álgebra de Borel, isto é, a menor σ -álgebra de M que contém os abertos de M , definimos o suporte de ν como o conjunto

$$\text{supp}(\mu) := \{x \in M \mid U_x \text{ aberto, } x \in U_x \implies \mu(U_x) > 0\}.$$

Um ponto x de M é *regular* se existem números $\lambda_1(x) > \dots > \lambda_{s(x)}(x)$ e uma decomposição $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_{s(x)}(x)$ do espaço tangente, tais que para todo vetor $v \in E_i(x) \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n v\| = \lambda_i(x) \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |\det Df_x^n| = \sum_{i=1}^{s(x)} \lambda_i(x) \dim E_i(x).$$

Os números $\lambda_i(x)$ são chamados *expoentes de Lyapunov* de ν em x e $\dim E_i(x)$ é a dimensão $E_i(x)$, que significa a multiplicidade de $\lambda_i(x)$. As funções $x \mapsto \lambda_i(x)$, $x \mapsto s(x)$ e $x \mapsto \dim E_i(x)$ são mensuráveis e invariantes ao longo das órbitas, logo quando consideramos ν medida ergódica, estas funções são constantes ν -qtp. Nesse caso, denotamos $\lambda_i(x) = \lambda_i$, $s(x) = s$ e $\dim E_i(x) = \dim E_i$.

A decomposição acima $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_{s(x)}(x)$ é chamada decomposição de Oseledets. O seguinte teorema é uma resultado chave no estudo de trajetórias de sistemas dinâmicos (pode ser encontrado em [FHY83]) é conhecido como Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets. Ele mostra que a regularidade é “típica” do ponto de vista da teoria da medida.

Teorema 1.5 (Teorema de Oseledets, [FHY83]). *Se $f \in \text{Diff}^1(M)$ e M é uma variedade suave compacta, então o conjunto \mathcal{R} dos pontos regulares tem ν -medida total para toda medida de probabilidade boreliana f -invariante ν .*

Uma medida invariante ν é *hiperbólica* se todos expoentes de Lyapunov de ν são diferentes de zero. O Teorema de Oseledets nos conduz ao conceito de hiperbolicidade não-uniforme definida na seguinte seção.

Conjuntos Não-uniformemente Hiperbólicos

Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade riemanniana suave e compacta M e ν uma probabilidade f -invariante. Dizemos que um subconjunto \mathcal{R} de M , f -invariante, boreliano é *não-uniformemente hiperbólico* se $\nu(\mathcal{R}) = 1$ e se existem

- (a) números λ e μ tais que $0 < \lambda < 1 < \mu$;
- (b) um número $\varepsilon > 0$ e funções borelianas $C, \kappa : \mathcal{R} \rightarrow (0, \infty)$ e
- (c) subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ para cada x em \mathcal{R}

que satisfazem as seguintes condições

(NH1) os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam mensuravelmente com x e formam uma decomposição invariante do espaço tangente

- $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$
- $Df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ e $Df_x E^u(x) = E^u(f(x))$;

(NH2) o subespaço $E^s(x)$ é estável: para todo v em $E^s(x)$ e $n > 0$

$$\|Df_x^n v\| \leq C(x) \lambda^n e^{\varepsilon n} \|v\|;$$

(NH3) o subespaço $E^u(x)$ é instável: para todo v em $E^u(x)$ e $n > 0$

$$\|Df_x^{-n} v\| \leq C(x) \mu^{-n} e^{\varepsilon n} \|v\|;$$

(NH4) $\angle(E^s(x), E^u(x)) \leq \kappa(x)$;

(NH5) para todo n inteiro,

$$C(f^n(x)) \leq C(x) e^{\varepsilon|n|} \quad \text{e} \quad \kappa(f^n(x)) \geq \kappa(x) e^{-\varepsilon|n|}.$$

Agora consideremos que ν é ergódica e hiperbólica e fixemos

$$\lambda_s = \max\{\lambda_i < 0 \mid 1 \leq i \leq s\}, \quad \lambda_u = \min\{\lambda_i > 0 \mid 1 \leq i \leq s\},$$

$$E^s(x) = \bigoplus_{\lambda_i < 0} E_i(x), \quad E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_i > 0} E_i(x).$$

Então estes espaços são Df_x -invariantes e satisfazem $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$. Fixe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e escreva Λ_l ($l > 0$) ao conjunto dos pontos $x \in M$ satisfazendo as seguintes propriedades

(i) para $v \in E^s(x)$ e $n > 0$

$$\|Df_x^n v\| \leq e^{2\varepsilon l} e^{n(\lambda_s + \varepsilon)} \|v\|.$$

(ii) para $v \in E^u(x)$ e $n > 0$

$$\|Df_x^{-n} v\| \leq e^{2\varepsilon l} e^{n(-\lambda_u + \varepsilon)} \|v\|.$$

(iii) para $n \in \mathbb{Z}$

$$\sin [\angle(Df_x^n(E^s(x)), Df_x^n(E^u(x)))] \geq e^{-\varepsilon(l+|n|)}.$$

Então, Λ_l é fechado, $f(\Lambda_l) \subset \Lambda_{l+1}$ para $l > 0$, os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com $x \in \Lambda_l$ e o conjunto $\Lambda := \bigcup_{l=1}^{\infty} \Lambda_l$ é f -invariante.

Este conjunto Λ definido acima é chamado *conjunto de Pesin* com relação à ν , e os conjuntos Λ_l são chamados de *conjuntos regulares (de Pesin)* ou *blocos de Pesin*.

Nos próximos parágrafos discutiremos conjuntos conhecidos como as variedades estável e instável de Pesin. Utilizamos a mesma notação para variedades estável e instável utilizada no caso de conjuntos uniformemente hiperbólicos para que no decorrer desta tese não haja confusões.

Pode-se construir em cada ponto $x \in \Lambda$ uma variedade estável local $W_{loc}^s(f, x)$ tal que toda órbita $\{f^n(y)\}$ com $y \in W_{loc}^s(f, x)$ se aproxima de $\{f^n(x)\}$, quando $n \rightarrow \infty$, com uma razão exponencial que pode variar de órbita para órbita e que pode deteriorar ao longo da órbita. Uma descrição mais precisa é dada pelo seguinte teorema que é um resultado fundamental na teoria hiperbólica.

Teorema 1.6 (Pesin, [BP02]). *Seja f um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ de uma variedade compacta e riemanniana M . Então, para todo ponto regular $x \in \mathcal{R}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos existem conjuntos $W_{loc}^s(f, x)$ e $W_{loc}^u(f, x)$ (omitimos f na notação por simplicidade) tais que*

$$f^{-1}(W_{loc}^u(x)) \subset W_{loc}^u(x) \quad e \quad f(W_{loc}^s(x)) \subset W_{loc}^s(x),$$

para todo $y \in W_{loc}^u(x)$, $z \in W_{loc}^s(x)$ e $n \geq 0$

$$d^u(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C(x)e^{(-\lambda_u(x)+\varepsilon)n}d^u(x, y),$$

$$d^s(f^n(x), f^n(y)) \leq C(x)e^{(\lambda_s(x)+\varepsilon)n}d^s(x, y),$$

$T_x W_{loc}^u(x) = E^u(x)$ e $T_x W_{loc}^s(x) = E^s(x)$, onde d^σ denota a métrica riemanniana sobre $W_{loc}^\sigma(x)$, $\sigma = u, s$, e $C(x)$ satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log C(f^n(x)) = 0.$$

O conjunto $W_{loc}^u(x)$ e $W_{loc}^s(x)$ são chamados respectivamente *variedade instável* e *estável local* e definimos as *variedade instável* e *estável (globais)* por

$$W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^u(f^{-n}(x))) \quad e \quad W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{loc}^s(f^n(x))),$$

respectivamente. Estes conjuntos são subvariedades suaves (de classe $C^{r+\alpha}$ se f for de classe $C^{r+\alpha}$) invariantes por f e formam laminações denotadas, respectivamente, por \mathcal{W}^u e \mathcal{W}^s . Além disso, têm as seguintes propriedades: para todo $x, y \in \mathcal{R}$

1. $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$ se $y \notin W^s(x)$; $W^u(x) \cap W^u(y) = \emptyset$ se $y \notin W^u(x)$;
2. $W^s(x) = W^s(y)$ se $y \in W^s(x)$; $W^u(x) = W^u(y)$ se $y \in W^u(x)$;
3. para todo $y \in W^s(x)$ (ou $y \in W^u(x)$) temos que $\rho(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ (respectivamente, $n \rightarrow -\infty$) com razão exponencial.

1.1.3 Medidas Condicionais

Dados uma medida ν e uma partição ν -mensurável \mathcal{P} , isto é, cada átomo P de \mathcal{P} é ν -mensurável, considere a aplicação $\pi : M \rightarrow \mathcal{P}$ que associa cada x de M ao átomo $\pi(x) := P(x)$ de \mathcal{P} que contém x . Definimos que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ é mensurável se e somente se $\pi^{-1}(\mathcal{Q})$ é um conjunto ν -mensurável em M e colocamos

$$\hat{\nu}(\mathcal{Q}) := \nu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})).$$

Um *sistema de medidas condicionais de ν em relação à partição \mathcal{P}* é uma família de probabilidades $(\nu_P)_{P \in \mathcal{P}}$ sobre M tal que

1. $\nu_P(P) = 1$ para $\hat{\nu}$ -qtp $P \in \mathcal{P}$.
2. Para cada função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, a função $\mathcal{P} \ni P \rightarrow \int \varphi d\nu_P$ é $\hat{\nu}$ -mensurável e

$$\int \varphi d\nu = \int \left(\int \varphi d\nu_P \right) d\hat{\nu}(P).$$

Note que pelo Teorema de Convergência Monótona da Teoria da Medida, podemos trocar a aplicação contínua φ acima por uma apenas mensurável. No caso particular onde φ é a função característica de um dado conjunto mensurável E de M , obtemos que $P \rightarrow \nu_P(E)$ é $\hat{\nu}$ -mensurável e

$$\nu(E) = \int \nu_P(E) d\hat{\nu}(P).$$

Uma partição \mathcal{P} é uma *partição mensurável* se existe uma sequência enumerável de partições $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_2 \preceq \dots \preceq \mathcal{P}_i \preceq \dots$ tais que $\mathcal{P} = \bigvee_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i$. Recorde aqui que para duas partições \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_2$ significa que todo elemento de \mathcal{P}_2 é escrito como união de elementos de \mathcal{P}_1 , e

$$\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = \{P_1 \cap P_2 \mid P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2\}.$$

Teorema 1.7 (Rokhlin [Roh52]). *Se \mathcal{P} é uma partição mensurável, então existe um único (a menos de conjuntos de medida nula) sistema de medidas condicionais de ν em relação à \mathcal{P} .*

1.1.4 Medida de SRB

Assumimos que uma partição mensurável ξ^u de M é subordinada à laminação instável \mathcal{W}^u , isto é, que ξ^u satisfaz as seguintes condições para ν -qtp x :

1. $\xi^u(x) \subset W^u(x)$ e
2. $\xi^u(x)$ contém um conjunto aberto de $W^u(x)$.

Seja $\{\nu_x^u\}$ (ν -qtp x) um sistema de medidas condicionais de ν com relação à ξ^u e m_x^u a medida de Lebesgue em $W^u(x)$. Se μ_x^u é absolutamente contínua em relação à m_x^u para ν -qtp x então dizemos que ν *satisfaz a condição de SRB para f* .

Definição 1.4. *Uma medida de probabilidade f -invariante ν de um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é uma medida de SRB se é ergódica, tem suporte compacto e satisfaz a condição de SRB.*

Considere μ a medida de Lebesgue sobre M . Uma medida de probabilidade ν sobre M é uma medida física se existe um subconjunto de medida de Lebesgue μ positiva de pontos $x \in M$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\nu, \quad \text{para toda } \varphi \in C^0(M).$$

O conjunto dos pontos satisfazendo esta última igualdade é chamado de bacia da medida ν .

Para uma classe de sistemas dinâmicos que inclui os sistemas uniformemente hiperbólicos, as noções de medida física e medida de SRB coincidem (veja por exemplo [AT08]). Em particular, se uma medida é de SRB e seus expoentes de Lyapunov são todos não nulos, então a medida é física.

1.1.5 Propriedades da Medida de SRB

Vamos agora mostrar alguns fatos conhecidos sobre u -estados de Gibbs. Recorde que um u -estado de Gibbs é uma medida de probabilidade cuja desintegração ao longo das folhas da folheação instável forte gera medidas que são absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue das folhas. Mais precisamente, usamos a seguinte propriedade que é parte da definição proposta por [PS82].

Seja W a folha instável-forte por um ponto $x \in \Lambda$ arbitrário. Dado $r > 0$ e T um C^1 -disco aberto centrado em x e transversal à W , denotemos por $R(x, T, r)$ a união de todas u -bolas $\gamma(z, r)$ de raio r centradas nos pontos $z \in T \cap \Lambda$. Por definição, a restrição de μ à esta *caixa folheada* $R(x, T, r)$ tem desintegração $(\mu_z)_{z \in T \cap \Lambda}$ em relação à folheação $\{\gamma(z, r) : z \in T \cap \Lambda\}$, tal que toda μ_z é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue $m_{\gamma(z, r)}$ sobre $\gamma(z, r)$. Mais ainda,

$$d\mu_z(y) = \rho(y, z) dm_{\gamma(z, r)} \tag{1.1}$$

para alguma função positiva ρ que é limitada longe de zero e de infinito, em termos de r e de T . Denotaremos por $\hat{\mu}$ a medida quociente induzida pela medida μ no espaço das folhas $\gamma(z, r)$. Este espaço quociente pode ser naturalmente identificado com a intersecção de Λ com o disco W e é isso o que faremos. O seguinte resultado tem uma prova alternativa que pode ser encontrado no livro [BDV05].

Lema 1.1. *O suporte de qualquer u -estado de Gibbs μ de f sobre Λ é saturado por \mathcal{W}^u , isto é, consiste das folhas inteiras de \mathcal{W}^u .*

Demonstração. Suponha que isto não ocorre, isto é, que existe alguma folha estável forte W que intercepta $\text{supp}(\mu)$ e que não esteja inteiramente contida em $\text{supp}(\mu)$. Tome um ponto x no bordo de $\text{supp}(\mu) \cap W$ contido em W (recorde que W é uma subvariedade imersa de M e vamos muni-la com a métrica induzida pela imersão). Fixemos qualquer r e T e consideremos

a correspondente caixa folheada $R(x, T, r)$. Como escolhemos x na fronteira de $\text{supp}(\mu) \cap W$, existe algum $y_0 \in \gamma(x, r) \cap \text{supp}(\mu)^c$ e, então, existe alguma pequena vizinhança aberta V de y_0 em Λ , contida em $R(x, T, r)$, tal que $\mu(V) = 0$. Agora, pela propriedade de desintegração de μ e por 1.1, segue que

$$0 = \mu(V) = \int \mu_z(V \cap \gamma(z, r)) d\hat{\mu}(z) = \int \left(\int_{V \cap \gamma(z, r)} \rho(y, z) dm_{\gamma(z, r)}(y) \right) d\hat{\mu}(z).$$

Assim, como $\hat{\mu}$ é a medida quociente de μ no espaço das folhas $\gamma(z, r)$ e como ρ é estritamente positiva, então $\mu(V) = 0$ na expressão acima acarreta que existe alguma vizinhança de x em $\Lambda \cap T$ (que representa um subconjunto no espaço das folhas) com medida nula. Mais precisamente,

$$\hat{\mu}(T_0) = 0, \text{ onde } T_0 = \{z \in \Lambda \cap W : V \cap \gamma(z, r) \neq \emptyset\}.$$

Como uma consequência deste fato, obtemos que a vizinhança $R(x, T_0, r)$ de x em Λ tem μ -medida nula. Isto contradiz o fato de que x pertence ao suporte de μ . \square

1.2 Renormalização em Dimensões Altas

Nesta subseção apresentamos técnicas de renormalização em dimensões altas, que podem ser encontradas no texto de Palis-Viana [PV94] (pág. 237), as quais serão muito úteis na demonstração dos teoremas dos capítulos seguintes.

Considere M uma variedade m -dimensional compacta e $\varphi_0 : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^2 com uma tangência homoclínica associada a um ponto fixo p . Suponha que o ponto p é seccionalmente dissipativo, isto é, que quaisquer dois autovalores λ_1 e λ_2 da diferencial $D\varphi_0(p)$ satisfaz a condição

$$|\lambda_1| |\lambda_2| < 1.$$

Denotamos por σ o único autovalor de módulo maior do que um.

Palis-Viana [PV94] mostram que, sob algumas condições genéricas, o desdobramento de uma família a um parâmetro de difeomorfismo $\{\varphi_\mu\}_\mu$ (ver definição no Capítulo 1.3) contém o desdobramento de famílias de difeomorfismos quase-quadráticas. Mais especificamente, eles mostram que restrições de iterados de φ_μ a domínios apropriados, próximos do ponto de tangência, tem a forma:

$$F_{\nu, n} : (x, Y) \mapsto (x^2 + \nu, xA) + \varepsilon(\nu, x, Y),$$

para algum vetor $A \in \mathbb{R}^{m-1}$ e uma aplicação ε pequena na topologia \mathcal{C}^2 , quando escrita em coordenadas $(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ e parâmetro real ν convenientemente escolhidos. Deixamos um detalhamento desta construção para o Apêndice A.

Pela definição dessas mudanças de coordenadas (expressão (A.5)), um cilindro m -dimensional (ou m -cilindro) da forma $C = [r_1, r_2] \times B^{m-1}(0, r)$ contido em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-1}$ tem

como imagem também um m -cilindro, que denotamos por C_μ , com base (isto é, a imagem de $\{x\} \times B^{m-1}(0, r)$, $x \in [r_1, r_2]$) proporcional à σ_μ^{-n} e altura (imagem de $[r_1, r_2] \times \{Y\}$, $Y \in B^{m-1}(0, r)$) proporcional à σ_μ^{-2n} . Ou seja, o cilindro C_μ vai ficando cada vez mais estreito quando n cresce.

A seguinte proposição será útil na demonstração da Proposição 3.2. É importante ressaltar que o Apêndice A ajuda a ter um melhor entendimento dos argumentos utilizados.

Proposição 1.4. *Cada m -cilindro $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ como definido anteriormente, é levado por $F_{\nu, n}$ num cilindro curvado próximo do ponto de tangência Q_0 que fica cada vez mais estreito quando n cresce (veja a Figura 3.1).*

Demonstração. Para a prova desta proposição usaremos as expressões das renormalizações que estão no Apêndice A. Neste apêndice denotamos $F_{\nu, n} = \Psi_n^{-1} \circ \Phi^{n+N} \circ \Psi_n$. Inicialmente, note que na expressão (A.8) de \tilde{x}_1 , a variável \tilde{Y} aparece na forma $a_2 \sigma_\mu^n S_\mu^n (\tilde{Y} + V \sigma_\mu^n \mu)$, onde o termo $V \sigma_\mu^n \mu$ converge para $V \rho_0 / v$ (por A.10) e o coeficiente $a_2 \sigma_\mu^n S_\mu^n$ converge para zero (pelo Lema A.1) quando n vai para infinito. Assim, quando n é suficientemente grande, a variável \tilde{Y} perde cada vez mais sua influência na primeira coordenada da aplicação $\Psi_n^{-1} \circ \Phi^{n+N} \circ \Psi_n$, isto é, seu coeficiente fica cada vez mais próximo de zero. Desse modo, um m -cilindro $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ como definido acima, contido no domínio das coordenadas linearizantes, é levado por $\Psi_n^{-1} \circ \Phi^{n+N} \circ \Psi_n$ num cilindro curvado próximo do ponto de tangência Q_0 que fica bastante estreito quando maior é o n e, portanto, menor é o coeficiente $a_2 \sigma_\mu^n S_\mu^n$ que acompanha a variável \tilde{Y} (veja a Figura 3.1). \square

Esta proposição será muito importante para a demonstração da Proposição 3.2.

1.3 Desdobramento de Tangências Homoclínicas

Neste capítulo vamos recordar o conceito de tangência homoclínica, rever um modelo de ferradura com uma tangência homoclínica externa devido a Palis-Takens [PT93] e também o conceito de família de difeomorfismos que desdobra genericamente uma tangência homoclínica [NPT83].

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ sem bordo. Um *arco de difeomorfismos* $\varphi_\mu : M \rightarrow M$, $\mu \in \mathbb{R}$ é uma aplicação $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, \mu) = (\varphi_\mu(x), \mu)$ de classe C^∞ , onde a aplicação $x \mapsto \varphi_\mu(x)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ para cada parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. Tais arcos são também chamados de *famílias a um parâmetro de difeomorfismos* e são geralmente denotadas por $\{\varphi_\mu : M \rightarrow M\}$ ou apenas $\{\varphi_\mu\}$.

Dizemos que uma família a um parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_\mu\}$, $\mu \in \mathbb{R}$, de uma variedade M desdobra genericamente uma tangência homoclínica de codimensão $u \geq 1$ em $\mu = 0$ se φ_0 tem um ponto fixo (ou periódico) $p_0 \in M$ tal que suas variedades estável e instável, $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$ com $\dim W^u(p_0) = u$, tem uma órbita de tangência que, genericamente, assumimos ser parabólica (de contato quadrático) e para valores de $\mu \in (0, \varepsilon)$,

intersecções transversais são criadas entre as continuações analíticas, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$, das variedades estável e instável de p_0 , respectivamente. Mais ainda, estas variedades invariantes movem-se com relativa velocidade não-nula com a tangência quando o parâmetro varia. Em geral podemos assumir que o ponto fixo p_0 pertence a uma peça básica Λ_0 e genericamente $|\det(D\varphi_0)(p_0)| \neq 1$.

Observação 1.1. *Um definição um pouco mais técnica encontrada em [NPT83] é a seguinte: seja um arco de difeomorfismos $\{\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ tal que $\varphi_0(0) = 0$, $\frac{d}{dx}\varphi_0(0) = 1$, $\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(0) \neq 0$ e $\frac{d}{d\mu}\varphi_0(0) \neq 0$. Podemos assumir sem perder a generalidade que $\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(0) > 0$ e $\frac{d}{d\mu}\varphi_0(0) > 0$. Tais arcos são chamados de arcos sela-nó. Seja $\{\varphi_\mu\}$ um arco de difeomorfismos de uma variedade n -dimensional M com um ponto fixo sela-nó $(x_0, \mu_0) \in M \times \mathbb{R}$, isto é, sua derivada $D_{x_0}\varphi_{\mu_0}$ tem um autovalor igual a 1 e os outros com normas diferentes de 1 e existe uma curva φ_{μ_0} -invariante α passando por x_0 tal que $\varphi_{\mu_0}|_\alpha$ tem primeira mas não segunda ordem de contato com a identidade em x_0 . Seja $\Phi(x, \mu) = (\varphi_\mu(x), \mu)$. Dizemos que (x_0, μ_0) desdobra genericamente se para alguma (ou qualquer) variedade central W^c em (x_0, μ_0) temos que $\Phi|_{W^c}$ é um arco sela-nó.*

Definição 1.5. *Um par $(x, \mu) \in M \times \mathbb{R}$ é um ponto de bifurcação se x é um ponto de intersecção não-transversal (ou seja, uma tangência homoclínica) entre as variedades instável e estável de φ_μ .*

1.3.1 Modelo de Desdobramento de Tangência Homoclínica

Vamos agora apresentar um modelo de aplicação ferradura definida na esfera $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \cup \infty$ que pode ser encontrado em [PT93] e também em [Rob99]. Faremos a construção no \mathbb{R}^2 , mas ela se estende naturalmente para \mathbb{S}^2 . Considere a região R contida em \mathbb{R}^2 formada por um quadrado Q unido com dois semi-discos D_1 e D_2 , onde

$$\begin{aligned} Q &= [0, 1] \times [0, 1]; \\ D_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0 \right\}; \\ D_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Vamos agora dividir Q nas seguinte cinco regiões:

$$\begin{aligned} Q_1 &= [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{8}\right], \quad Q_2 = [0, 1] \times \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right], \quad Q_3 = [0, 1] \times \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right], \\ Q_4 &= [0, 1] \times \left[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right] \quad e \quad Q_5 = [0, 1] \times \left[\frac{7}{8}, 1\right]. \end{aligned}$$

Considere uma função real ϱ de classe C^∞ que leva o intervalo $[0, \frac{1}{8}]$ em $[-\frac{1}{36}, 0]$ de forma bijetiva, tal que $\varrho'(0) = 4$ e $\varrho'(\frac{1}{8}) = \frac{1}{6}$. Definimos $f : R \rightarrow R$ como segue:

$$\begin{aligned} f|_{Q_1}(x, y) &= \left(\frac{x+1}{6}, \varrho(y) \right); & f|_{Q_2}(x, y) &= \left(\frac{x+1}{6}, 4y - \frac{1}{2} \right); \\ f|_{Q_3}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{x+1}{6} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(8y-3)\right), 1 + \left(\frac{x+1}{6} \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(8y-3)\right) \right); \\ f|_{Q_4}(x, y) &= \left(\frac{5-x}{6}, \frac{7}{2} - 4y \right); & f|_{Q_5}(x, y) &= \left(\frac{5-x}{6}, \varrho(1-y) \right); \\ f|_{D_1}(x, y) &= \left(\frac{x+1}{6}, \frac{y}{6} - \frac{1}{36} \right); & f|_{D_2}(x, y) &= \left(\frac{5-x}{6}, \frac{1-y}{6} - \frac{1}{36} \right). \end{aligned}$$

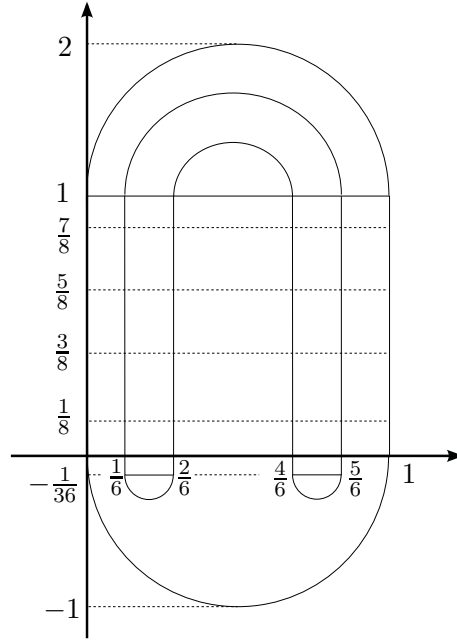


Figura 1.1: Aplicação ferradura.

Note que f envia os segmentos $\{0\} \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ e $\{1\} \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ nos arcos $\{(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos t, 1 + \frac{1}{6} \cos t) : 0 \leq t \leq \pi\}$ e $\{(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos t, 1 + \frac{1}{6} \cos t) : 0 \leq t \leq \pi\}$, respectivamente. Além disso, f envia as faixas horizontais $Q_2 = [0, 1] \times [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ e $Q_4 = [0, 1] \times [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ nas respectivas faixas verticais $[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}] \times [0, 1]$ e $[\frac{4}{6}, \frac{5}{6}] \times [0, 1]$. As regiões Q_1 e Q_5 tem imagens contidas em D_1 .

Temos que as derivadas são

$$\begin{aligned} D(f|_{Q_1})(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \varrho'(y) \end{pmatrix}, & D(f|_{Q_2})(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\ D(f|_{Q_3})(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos(\frac{\pi}{2}(8y-3)) & -4\pi(\frac{x+1}{6}) \sin(\frac{\pi}{2}(8y-3)) \\ \frac{1}{6} \sin(\frac{\pi}{2}(8y-3)) & 4\pi(\frac{x+1}{6}) \cos(\frac{\pi}{2}(8y-3)) \end{pmatrix}, \\ D(f|_{Q_4})(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & \text{e} & D(f|_{Q_5})(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\varrho'(1-y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que por nossa construção temos que $\left| \frac{\partial(f|_{Q_3})}{\partial x}(x, y) \right| = \frac{1}{6}$. Além disso, temos que $f(D_1) \subset D_1$ e $f(D_2) \subset D_1$, com

$$D(f|_{D_1})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad D(f|_{D_3})(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$(f|_{D_1})^n(x, y) = \left(\frac{1}{6^n}x + \sum_{i=1}^n \frac{1}{6^i}, \frac{1}{6^n}y - \frac{1}{36} \sum_{i=0}^n \frac{1}{6^i} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{30} \right).$$

Assim, como $f(Q_2) \subset D_2$, $f(D_2) \subset D_1$, obtemos que todo ponto em $R \setminus (Q_2 \cup Q_4)$ converge para o poço $p_0 = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{30})$ pertencente ao semi-disco D_1 . A aplicação f pode ser estendida para todo o \mathbb{R}^2 de modo que todos os pontos fora de R entrem em R por iterados positivos de f . E para estender para \mathbb{S}^2 , basta tomar o ponto no infinito p_∞ como sendo ponto fixo e que seja uma fonte para f . Por outro lado, obtemos que o conjunto $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$ é hiperbólico com constantes de hiperbolicidade $\lambda = \frac{1}{6}$ e $\sigma = 4$. Este conjunto Λ possui dois pontos fixos (hiperbólicos) em Q , um deles fica localizado na parte inferior da faixa $f(Q_2)$. As variedades estável e instável de p são como na Figura 1.3.

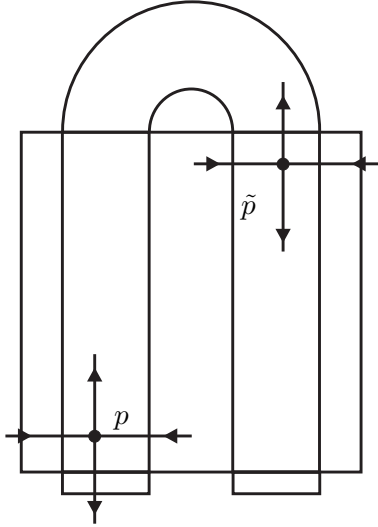


Figura 1.2: Pontos fixos.

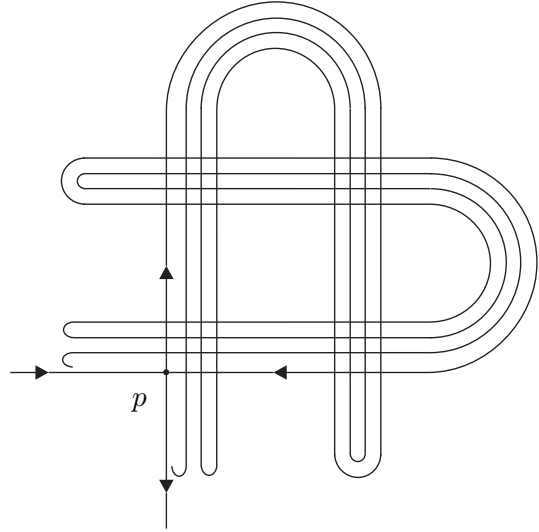


Figura 1.3: Variedades estável e instável.

Agora vamos construir uma tangência baseado neste modelo construído acima. Essa técnica pode ser encontrada em [PT93]. Seja c uma curva ligando os pontos $a_s \in W^s(p)$ e $a_u \in W^u(p)$ como na Figura 1.4. Considere uma vizinhança U desta curva c . Esta vizinhança pode ser tomada bem pequena de modo que $W^s(p) \cap U$ e $W^u(p) \cap U$ sejam domínios fundamentais em $W^s(p)$ e $W^u(p)$, respectivamente, isto é, $f(W^*(p) \cap U) \cap (W^*(p) \cap U) = \emptyset$ para $* = s, u$. Esta vizinhança contém as componentes $W^s(p) \cap U$ e $W^u(p) \cap U$ das variedades estável e instável de p , as quais dividem U em três regiões U_1 , U_2 e U_3 . Podemos ainda tomar U suficientemente pequena de modo que para todo ponto $x \in U_1 \cup U_2$ tenha órbita positiva

converging para o poço p_0 e todo ponto $x \in U_2 \cup U_3$ tenha órbita negativa convergindo para a fonte p_∞ . Note que para ponto $x \in U_3$ a órbita positiva $f^n(x)$ permanece próxima de $W^s(p)$, porém com duas possibilidades: ou converge para o poço p_0 ou permanecem próximos do conjunto Λ , mas de qualquer modo, usando o λ -Lema concluímos que existem pontos $x \in U_3$ tais que para algum $n > 0$ tem imagem $f^n(x) \in U_1$. De modo semelhante existem pontos x em U_1 que tem imagem inversa $f^{-n}(x) \in U_3$.

Modificamos a função f nesta vizinhança U de modo a obter a tangência homoclínica. Na verdade obtemos mais que isso, construímos um arco de difeomorfismo que desdobra esta tangência genericamente.

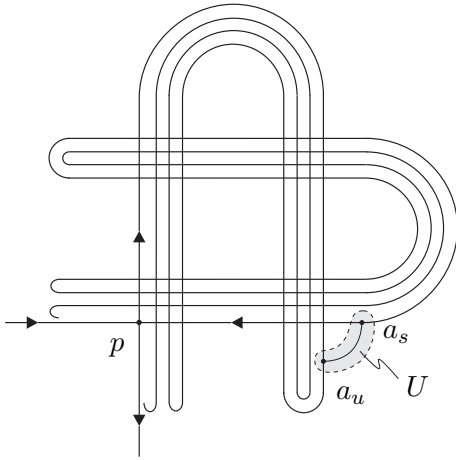


Figura 1.4: Região de perturbação.

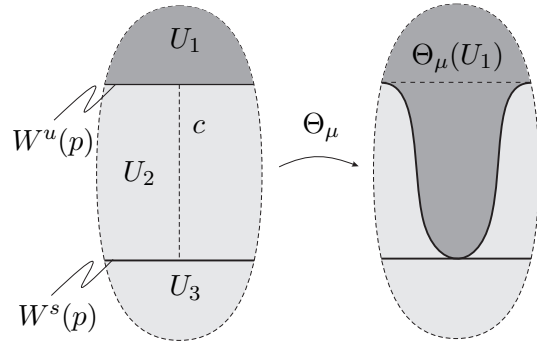


Figura 1.5: Perturbação em U , para $\mu = 0$.

Para isso, considere a seguinte família de aplicações definida em \mathbb{S}^2 . Seja Θ_μ uma família a um parâmetro de aplicações (veja Figura 1.5) que no complementar de U são iguais à identidade e que move os pontos de U do seguinte modo:

- para $\mu \leq -1$, Θ_μ é a identidade;
- para $\mu > -1$, Θ_μ empurra os pontos de U para baixo, na direção de U_1 , de modo que para $\mu < 0$, a região U_1 é ainda enviada em $U_1 \cup U_2$;
- para $\mu = 0$ existe uma tangência de $\Theta_0(W^u(p)) = \Theta_0(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)$ e $W^s(p) = \overline{U}_2 \cap \overline{U}_3$ que é quadrática e desdobra genericamente para $\mu > 0$ em duas intersecções transversais.

Agora definimos o arco de difeomorfismo $f_\mu = \Theta_\mu \circ f$. As variedades estáveis e instáveis de f_0 são como na Figura A.

Note que para $\mu < 0$ a dinâmica dos pontos de U para f_μ é a mesma que a de f neste conjunto. Deste modo, é no conjunto $\{\mu \mid \mu > 0\}$ que ocorre a mudança na dinâmica. Nesse caso, dizemos que a tangência homoclínica para $\mu = 0$ é uma primeira bifurcação (ver Definição 1.5).

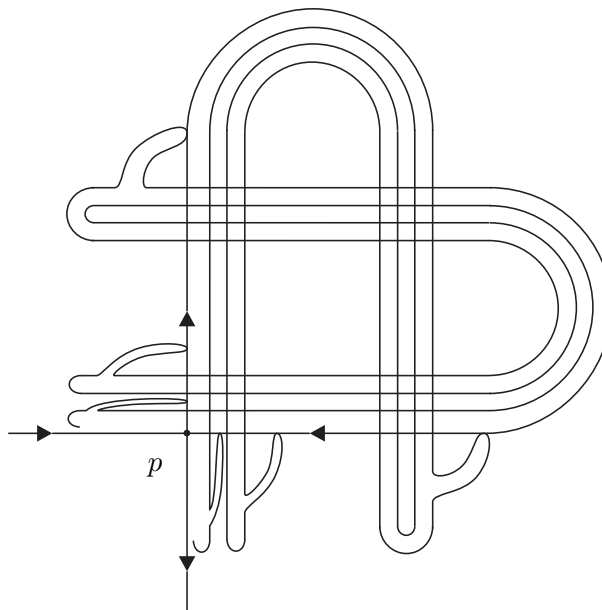


Figura 1.6: Variedades estáveis e instáveis com tangência homoclínica.

Observação 1.2. Baseado em nossa discussão da dinâmica dos pontos de U , observe que para $\mu = 0$ o conjunto não errante de f_0 é essencialmente o mesmo que o de f , porém a órbita de tangência também faz parte do conjunto não-errante de f_0 . Ou seja, denotando o ponto de tangência homoclínica por q , temos $\Omega(f_0) = \{p_0\} \cup \{p_\infty\} \cup \Lambda \cup \mathcal{O}(q)$. Denotamos Λ_μ a ferradura para f_μ , isto é, para $\mu \leq 0$ este conjunto é $\Omega(f_\mu) \cap Q$ e para $\mu > 0$ é a continuação de Λ_0 (veja Teorema 1.3).

1.4 Entropia Topológica

Uma maneira de caracterizar a complexidade ou caoticidade de um dado sistema dinâmico é analisando suas órbitas periódicas ou, mais geralmente, seu conjunto não-errante. Existe um número real que representa esta complexidade do sistema o qual denominamos por entropia topológica. Essencialmente este número determina quantas “órbitas distintas” existem para um dado sistema.

Intuitivamente, podemos introduzir este conceito do seguinte modo: imagine que você não consegue distinguir dois pontos que estão próximos numa dada resolução $\varepsilon > 0$. Assim, dadas duas órbitas de tamanho n , você só contabiliza duas se algum par de iterados delas distam mais do que ε . Num sistema f definido num espaço métrico compacto, sabe-se que o número $r(n, \varepsilon, f)$ de tais órbitas de tamanho n que são distinguíveis é finito. O sistema é considerado complexo quando este número cresce exponencialmente, quando n tende ao infinito, e é denotada por $h(\varepsilon, f)$. Fazendo nossa resolução ε extremamente precisa (isto é, $\varepsilon \rightarrow 0$) obtemos a entropia de f , denotada por $h(f)$. Em detalhes temos:

Definição 1.6. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua de um espaço métrico X com métrica d . Um conjunto $S \subset X$ é (n, ε) -separado para f , para um inteiro $n \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, se para todos $x \neq y$ em S existe algum inteiro k , $0 \leq k \leq n$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$. Denotamos a quantidade de tais pontos por*

$$r(n, \varepsilon, f) = \max\{\#(S) : S \subset X \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado para } f\},$$

onde $\#(S)$ é a cardinalidade de elementos de S . O crescimento exponencial do número $r(n, \varepsilon, f)$ quando $n \rightarrow \infty$ é definido por

$$h(\varepsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \varepsilon, f)).$$

Finalmente, definimos a entropia topológica de f como

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon, f).$$

Esta definição é devida à Bowen [Bow70], embora o conceito de entropia topológica tenha sido introduzido inicialmente por Adler, Konheim e McAndrew [AKM65] em 1965. Neste trabalho, os autores demonstram as seguintes propriedades da entropia topológica.

Proposição 1.5 ([AKM65]). *Sejam X e Y espaços métricos compactos, $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e $\psi : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Então,*

- (a) $h(\psi \circ f \circ \psi^{-1}) = h(f)$, ou seja, a entropia topológica é preservada por conjugação topológica;
- (b) $h(f^k) = kh(f)$, para $k \in \mathbb{N}$;
- (c) se $Y \subset X$ é um subconjunto f -invariante, então $h(f|_Y) \leq h(f)$;
- (d) se $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ é uma decomposição em subconjuntos disjuntos invariantes e fechados, então $h(f) = \max\{h(f|_{X_1}), \dots, h(f|_{X_n})\}$;

Note que no item (d) acima, a entropia do sistema é igual ao máximo da entropia nas restrições em cada um destes subconjuntos invariantes. Suponhamos que $h(f) = h(f|_{X_1})$, nesse caso dizemos que o conjunto X_1 é *responsável* pela entropia topológica do sistema.

Mas uma propriedade fundamental da entropia foi mostrada por Bowen em [Bow70] e diz que toda a entropia está contida no conjunto não-errante, isto é, órbitas fora do conjunto não-errante não contribuem para a entropia.

Teorema 1.8 ([Bow70]). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua sobre um espaço métrico compacto X . Então, $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$, onde $\Omega(f)$ é o conjunto dos pontos não-errantes de f .*

1.4.1 Continuidade da Entropia Topológica

Nesta seção recordamos o teorema sobre a continuidade da função entropia. Aproveitamos também para destacar algumas propriedades básicas sobre a entropia que serão utilizadas em seções posteriores.

Dada uma aplicação contínua $f : M \rightarrow M$, com M espaço métrico compacto, podemos associá-la com sua entropia topológica $h(f) \in \mathbb{R}^+$. Denotemos $\mathcal{C}^0(M)$ o espaço das aplicações contínuas sobre M . Podemos definir uma aplicação $h : \mathcal{C}^0(M) \rightarrow \mathbb{R}^+$ por $f \mapsto h(f)$. Surge a questão natural: o que acontece com $h(f)$ quando variamos f ? Uma resposta foi dada por Katok para o caso de difeomorfismos sobre uma superfície compacta.

Teorema 1.9 (Katok [Kat84]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ de uma superfície compacta tal que $h(f) > 0$. Então $h : \text{Diff}^{1+\alpha}(M) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é semi-contínua inferior.*

Aqui ressaltamos que a semi-continuidade inferior da entropia tende a falhar em dimensões maiores do que 2. Existem exemplos em dimensão 4, devidos a Miziurewicz [Mis71], onde a entropia deixa de ser semi-contínua.

Juntamente com um resultado sobre semi-continuidade superior da entropia devido à Yomdin (veja Teorema 2.7), temos o seguinte teorema.

Teorema 1.10 (Katok [Kat84], Yomdin [Yom87]). *Seja M uma superfície compacta, então a função entropia $h : \text{Diff}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua.*

No trabalho [HSX08] de Hua, Saghin e Xia é apresentado um exemplo de descontinuidade da entropia para sistemas definidos em variedades de dimensões maiores ou iguais que quatro.

Resultados Novos

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos e recordamos algumas das principais definições e teoremas utilizados que deixamos de apresentar no capítulo das preliminares por serem pequenos e facilitar o entendimento dos argumentos apresentados. Este capítulo está dividido da seguinte forma.

Na primeira seção apresentamos resultados novos que relacionam a entropia topológica com sistemas que apresentam alguma tangência homoclínica. O primeiro resultado trata de sistemas cuja peça responsável pela entropia está ou não associada com a tangência homoclínica, sendo que no primeiro caso obtemos um ponto de variação da entropia e no segundo caso um ponto de constância da entropia. O segundo resultado apresenta um exemplo onde a peça responsável está associada com a tangência homoclínica, mas a entropia varia. O próximo resultado é uma obstrução à uma possível generalização de um teorema de perturbação (do tipo “Snake like”) de Newhouse.

Na segunda seção, relacionamos a variação da entropia topológica com a fórmula de Yomdin [Yom87].

Na terceira seção apresentamos um exemplo de descontinuidade da entropia em dimensão três. É conhecido que a entropia é descontínua na topologia C^∞ , quando restrita à difeomorfismos cujos domínios são variedades de dimensões maiores ou iguais a três. Miziurewicz [Mis71] construiu uma família de exemplos de descontinuidade da entropia topológica onde a dimensão da variedade é maior ou igual a quatro.

2.1 Variação de Entropia e Tangências Homoclínicas

Nesta seção apresentamos resultados novos que relacionam a entropia topológica com sistemas que apresentam alguma tangência homoclínica. O primeiro deles afirma que, sob a condição de a peça básica associada à tangência homoclínica ser responsável (ver Definição 2.2), um sistema bidimensional com uma tangência quadrática genérica não possui vizinhança alguma (na topologia C^∞) na qual todos os sistemas tem a mesma entropia que o sistema inicial. Por outro lado, este mesmo teorema afirma também que se a peça básica não satisfaz tal condição, então a entropia permanece constante numa pequena vizinhança, para o caso em que a variedade em questão é S^2 . Depois podemos ver que esta condição não é necessária, ou seja, que existem sistemas cuja peça básica associada á tangência não é responsável mas ainda satisfazem a conclusão anterior. O outro teorema relaciona a variação da entropia topológica com a fórmula de Yomdin.

2.1.1 Contextualização e Enunciados dos Teoremas

Entropia topológica é um dos invariantes por conjugação topológica mais importante em sistemas dinâmicos. Pela Ω -estabilidade dos difeomorfismos Axioma A com a propriedade de não-ciclos, segue que a entropia é uma função C^1 -localmente constante de tais dinâmicas.

Definição 2.1. *Dizemos que um difeomorfismo f é um ponto de constância da entropia topológica na topologia C^k se existe uma C^k -vizinhança \mathcal{U} de f tal que para todo difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$, $h(g) = h(f)$. Além disso, chamamos um difeomorfismo de ponto de variação da entropia se ele não é um ponto de constância.*

Em [PS00b], Pujals e Sambarino provaram que difeomorfismos em superfícies longe de tangências homoclínicas são os pontos de constância da entropia topológica na topologia C^∞ . Estudamos a questão recíproca. Isto é, estamos interessados no efeito que uma tangência homoclínica de um difeomorfismo de uma superfície causa na entropia topológica. É claro que depois de desdobrar uma tangência homoclínica novos pontos periódicos surgem, mas não é claro se eles contribuem para a variação da entropia topológica. Mencionamos que Díaz-Rios estudaram o desdobramento de uma ferradura sela-nó crítica e, quando a ferradura sela-nó não é um atrator, eles provaram que a entropia cresce depois da bifurcação. Aqui, a tangência ocorre fora da peça básica.

Definição 2.2 (Peça Responsável). *Para difeomorfismos Axioma A, pela decomposição espectral de Smale (veja o Teorema 1.4 ou [Sma67]), temos que $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$, onde cada Λ_i é uma peça básica, isto é, um conjunto hiperbólico f -invariante isolado com uma órbita densa. Pela propriedade da entropia topológica dada na Proposição 1.5, temos*

$$h(f) = \max_{0 \leq i \leq k} h(f|_{\Lambda_i}).$$

Logo, concluímos que existe (pelo menos) um conjunto que é responsável pela entropia topológica de um Axioma A, isto é, existe algum $k_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $h(f) = h(f|_{\Lambda_{k_0}})$. Sem perda de generalidade assumimos que $k_0 = k$.

Consideramos uma classe de difeomorfismos na fronteira dos sistemas Axioma A que exibem uma tangência homoclínica correspondente a um ponto periódico de Λ_k . Mostramos que a entropia topológica cresce depois de pequenas perturbações C^∞ .

Mais precisamente, consideramos uma família parametrizada $f_\mu : M \rightarrow M$ de difeomorfismos de uma superfície fechada M desdobrando genericamente uma tangência homoclínica em $\mu = 0$, onde $\Omega(f_0) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ e cada Λ_i é um conjunto hiperbólico isolado e q é uma tangência homoclínica associada a um ponto fixo de sela p de algum Λ_i .

Teorema 2.1. *Seja f_μ uma família de difeomorfismos de classe C^2 de uma superfície como acima, então*

1. *Se Λ_i é responsável pela entropia, então f_0 é um ponto de variação da entropia topológica na topologia C^∞ .*
2. *Se Λ_i não for responsável pela entropia, então f_0 é ponto de constância da entropia topológica na topologia C^∞ , no caso em que $M = \mathbb{S}^2$.*

Observe que no primeiro item (o qual é a parte principal) do teorema acima, afirmamos que a variação da entropia é na topologia C^∞ . Este teorema nos diz que, na topologia C^∞ , se a tangência estiver no lugar correto (peça responsável), então a entropia varia e, se a tangência estiver no lugar errado, então a entropia permanece constante.

Teorema 2.2. *Existem exemplos onde Λ_i não é responsável pela entropia e f_0 é um ponto de variação da entropia na topologia C^1 .*

No teorema anterior damos um exemplo que mostra que ainda que a tangência corresponda a uma peça básica que não é responsável pela entropia, podemos aumentar a entropia depois de perturbações de classe C^1 . Este exemplo é facilmente obtido de uma ferradura e uma tangência homoclínica correspondente a um ponto fixo hiperbólico fora da ferradura.

Recordamos também um método de perturbar dinâmicas com alguma tangência homoclínica, devido a Newhouse, chamado perturbação “Snake like”. Embora depois de tais perturbações o conjunto não errante torna-se mais rico, a entropia topológica não necessariamente cresce. Veja o Teorema 2.3 para a relação entre uma estimativa da entropia depois da perturbação e os autovalores dos pontos periódicos correspondentes a tangência homoclínica.

Teorema 2.3 ([New78]). *Seja p um ponto periódico hiperbólico (conservativo) de um difeomorfismo f de classe C^1 , tal que $W^u(\mathcal{O}(p))$ é tangente a $W^s(\mathcal{O}(p))$ em algum ponto. Dado $\varepsilon > 0$, para toda vizinhança \mathcal{N} de f existe $g \in \mathcal{N}$ tal que*

$$h(g) > \frac{1}{\tau(p)} \log |\lambda(p)| - \varepsilon.$$

Como um corolário da continuidade da entropia topológica para difeomorfismos de classe C^∞ numa superfície, provamos que:

Teorema 2.4. *Não é possível substituir C^∞ por C^1 no teorema acima.*

Finalmente, vamos mencionar um resultado devido a Hua, Saghin and Xia [HSX08] onde eles provam que a entropia topológica é localmente constante para alguns difeomorfismos fibrado central unidimensional. Eles mostram que para uma grande classe de difeomorfismos C^∞ parcialmente hiperbólicos com folheações centrais bi-dimensionais (e com certas condições homológicas na variedade), a entropia topológica varia continuamente. Os autores afirmam ainda que sem as condições sobre a homologia o resultado não é válido e eles apresentam exemplos em dimensão maior ou igual que quatro onde o resultado falha sem tais hipóteses. A questão natural que surge é sobre a continuidade da entropia na topologia C^∞ para sistemas sobre variedades tri-dimensionais. No final desta seção, damos uma resposta para esta questão, isto é, apresentamos um contra-exemplo da continuidade da entropia em dimensão três.

2.1.2 Principais Ingredientes

Entropia Topológica e Subshift do Tipo Finito

Considere $\Sigma_N = \{1, \dots, N\}$ e o *shift* $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ dado por $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ onde $y_i = x_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Para uma 0–1-matriz quadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ de ordem N definimos $\Sigma_A = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para } i \in \mathbb{Z}\}$, isto é, a matriz A determina todas as possíveis transições entre os símbolos $1, 2, \dots, N$. A restrição $\sigma|_{\Sigma_A} =: \sigma_A$ é chamada *subshift do tipo finito*.

A seguinte proposição é um resultado bem conhecido que pode ser encontrado por exemplo em [Rob99].

Proposição 2.1 ([Rob99]). *Se $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ é um subshift do tipo finito, então*

$$h(\sigma_A) = \log(\lambda_{max}),$$

onde λ_{max} é o maior autovalor de A em módulo.

As principais propriedades da entropia topológica que utilizamos neste texto podem ser encontradas em [KH95]

Ω -Explosões Homoclínicas e Partições de Markov

Enunciamos o celebrado resultado devido a Bowen sobre construção de partições de Markov para sistemas hiperbólicos:

Teorema 2.5 ([Bow08]). *Seja Λ um conjunto invariante hiperbólico com estrutura de produto local para um difeomorfismo f . Então, existe uma partição de Markov de Λ para f com retângulos de diâmetros arbitrariamente pequenos.*

Em particular, para as peças básicas da decomposição espectral de um difeomorfismo Axioma A, existem partições de Markov com retângulos arbitrariamente pequenos.

Uma importante consequência desse resultado de Bowen é a existência de uma conjugação topológica entre os sistemas $f|_\Lambda$ e algum subshift do tipo finito $\sigma|_{\Sigma_A}$.

Para provar nosso teorema principal, focamos Ω -explosões como no modelo do resultado de Palis-Takens [PT93], claro, sem a hipótese de dimensão fractal.

Isto é, consideramos uma família a um parâmetro f_μ onde, para o parâmetro $\mu = 0$, o conjunto não errante $\Omega(f_0) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \tilde{\Lambda}_k$ tal que $\Lambda_i, i < k$, é uma peça básica e $\tilde{\Lambda}_k = \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$, onde Λ_k é uma peça básica e $\mathcal{O}(q)$ é a órbita de uma tangência homoclínica associada a um ponto fixo de sela $p \in \Lambda_k$.

Para $\mu > 0$ podemos considerar os peças básicas $\Lambda_i(\mu)$ como a continuação de Λ_i (veja Observação 1.2 ou Teorema 1.3). Assim, temos que $\Lambda_i(\mu)$ é hiperbólico e $f_\mu|_{\Lambda_i(\mu)}$ é conjugado com $f_0|_{\Lambda_i}$. Então, temos que

$$h(f_\mu|_{\Lambda_i(\mu)}) = h(f_0|_{\Lambda_i})$$

para todo $i = 1, \dots, k$ e todo μ positivo ou negativo.

No entanto, quando desdobramos a família $\{f_\mu\}_\mu$, novos pontos periódicos são criados e a entropia dos conjuntos não-errantes podem crescer para parâmetros μ positivos. Veremos que, de fato, a entropia cresce para parâmetros positivos pequenos. Isto pode ser mostrado construindo um subsistema de f_μ que não é topologicamente conjugado com $f_0|_{\Lambda_k}$. Estes fatos serão importantes para a demonstração do Teorema 2.1.

Para construir um sistema como o mencionado acima, encontramos um subconjunto de $\Omega(f_\mu)$ contendo $\Lambda_k(\mu)$ usando partições de Markov. Tome um parâmetro μ muito próximo de $\mu = 0$. Como $\{f_\mu\}$ desdobra genericamente, a aplicação f_μ tem intersecções homoclínicas transversais perto de $\mathcal{O}(q_0)$, a órbita de tangência de f_0 . Temos a situação representada na Figura 2.1 abaixo.

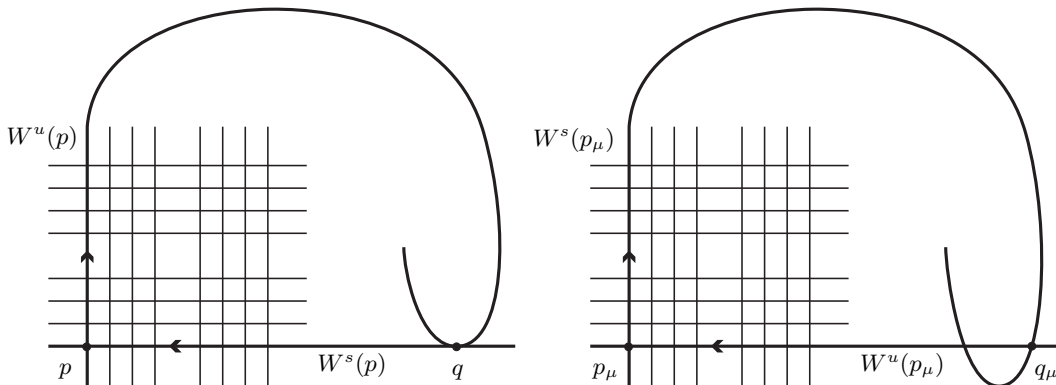


Figura 2.1: Desdobramento de uma tangência homoclínica perto de $\mu = 0$.

Seja q_μ um ponto de intersecção homoclínica transversal entre $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ perto de q_0 (a tangência para f_0). Como $\Lambda_k(\mu)$ é hiperbólico e conjunto invariante maximal para f_μ , digamos V_k . Suponha que $q_\mu \notin V_k$.

Agora, obtemos um conjunto contendo $\Lambda_k(\mu)$ cuja dinâmica é conjugada com um subshift do tipo finito. Provamos mais adiante que a entropia da dinâmica restrita a este conjunto é estritamente maior do que a entropia da restrição em $\Lambda_k(\mu)$, que é igual a $h(f_0)$.

Mais ainda, podemos usar a construção de partições de Markov devida a Bowen [Bow08]. Considere $\{R_1, \dots, R_s\}$ uma partição de Markov de $\Lambda_k(\mu)$ tal que

$$\Lambda_k(\mu) = \bigcup_{j=1}^s R_j \subset V_k.$$

Além disso, como $q_\mu \notin V_k$ temos que uma parte de $\mathcal{O}(q_\mu)$ permanece fora de V_k . Tome $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_\mu^{N_1}(q_\mu) \in R_s$, $f_\mu^{-N_2}(q_\mu) \in R_1$ e $f_\mu^j(q_\mu) \notin \bigcup_{j=1}^s R_j$ para $j = -N_2 + 1, \dots, 0, \dots, N_1 - 1$. Em outras palavras, R_s é o retângulo contendo o primeiro iterado positivo de q_μ que pertence a V_k , e R_1 é o retângulo contendo o primeiro iterado negativo de q_μ que pertence a V_k .

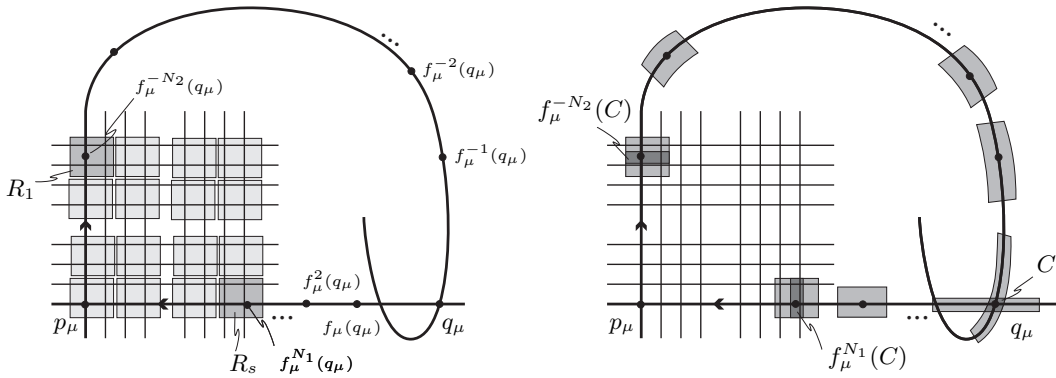


Figura 2.2: Construção da partição de Markov.

Dada a partição de Markov para $\Lambda_k(\mu)$, queremos estender esta partição para um conjunto maior que contenha $\Lambda_k(\mu) \cup \mathcal{O}(q_\mu)$. Para isto, construímos outros retângulos contendo $\{f_\mu^{-N_1}(q_\mu), \dots, q_\mu, \dots, f_\mu^{N_2}(q_\mu)\}$ da seguinte maneira: se iterarmos R_1 por $f_\mu^{N_2}$, obtemos uma faixa estreita em torno de $W^u(p_\mu)$ contendo q_μ . E se iterarmos R_s por $f_\mu^{-N_1}$, obtemos uma faixa estreita em torno de $W^s(p_\mu)$ contendo q_μ . Sabemos que $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ têm intersecção transversal em q_μ . Como podemos tomar o diâmetro da partição de Markov suficientemente pequena, segue que $f_\mu^{-N_1}(R_s)$ e $f_\mu^{N_2}(R_1)$ são transversais. Seja $C := f_\mu^{-N_1}(R_s) \cap f_\mu^{N_2}(R_1)$. É claro que C é disjunto de $\bigcup_{i=1}^s R_i$ e contém q_μ .

Note que $f_\mu^{N_1}(C)$ é uma faixa vertical de altura total contida em R_s e que $f_\mu^{-N_2}(C)$ é uma faixa horizontal de largura total contida em R_1 . Considere os conjuntos disjuntos S_i definidos por

$$S_j = f_\mu^{-N_2+j}(C)$$

para $j = 1, 2, \dots, N_2, N_2+1, \dots, N_1+N_2-1$. Note que $S_{N_2} = C$. Agora denote $\ell = N_1+N_2-1$ e considere $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_s, S_1, \dots, S_\ell\}$ e

$$R = \bigcup_{i=1}^s R_i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j$$

Logo, $\Lambda_R = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_\mu^n(R)$ é um conjunto hiperbólico tal que $\Lambda_k(\mu) \subset \Lambda_R \subset \Omega(f_\mu)$. O sistema desejado é a restrição $f_\mu : \Lambda_R \rightarrow \Lambda_R$.

Lema 2.1. \mathcal{P} é uma partição de Markov para Λ_R .

Demonstração. Já sabemos que todos os R_i 's satisfazem a definição de partição de Markov. Resta verificar se o mesmo vale para os S_j 's. Por construção, todos R_i 's e S_j 's são disjuntos dois a dois. Além disso, $f_\mu(S_j) = S_{j+1}$ para $j = 1, \dots, \ell - 1$. Em particular, temos que $f_\mu(S_\ell) \subset R_s$ é uma faixa vertical de altura total. Logo,

$$\begin{aligned} f_\mu(S_\ell) \cap R_s &\neq \emptyset, \\ f_\mu(S_\ell) \cap R_i &= \emptyset, \text{ for } i = 1, \dots, s \text{ e} \\ f_\mu(S_\ell) \cap S_j &= \emptyset, \text{ para } j = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Por outro lado, somente R_1 tem imagem por f_μ que intersecta algum S_j . Na verdade,

$$f_\mu(R_1) \cap S_1 \neq \emptyset \text{ e } f_\mu(R_s) = \emptyset, \text{ para } j = 2, \dots, \ell.$$

Note que como $f_\mu^{-1}(S_1) \subset R_1$ é uma faixa horizontal de largura total em R_1 , então $S_1 = f_\mu(f_\mu^{-1}(S_1)) \subset f_\mu(R_1)$. Logo, $f_\mu(R_1) \cap S_1 \neq \emptyset$ e, pela construção de S_1 , esta intersecção satisfaz as condições de partição de Markov. Portanto, \mathcal{P} é uma partição de Markov para Λ_R . \square

Podemos associar o sistema $f_\mu : \Lambda_R \rightarrow \Lambda_R$ a um subshift do tipo finito como segue. Consideramos a partição de Markov $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{s+\ell}\}$ como acima e definimos uma matriz de transição $A_\mu = (a_{ij})_{(s+\ell) \times (s+\ell)}$ para f_μ tomando

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } f_\mu(P_i) \cap P_j \neq \emptyset; \\ 0, & \text{if } f_\mu(P_i) \cap P_j = \emptyset \end{cases}$$

para $i, j \in \{1, \dots, s+\ell\}$. Deste modo obtemos uma conjugação topológica entre os sistemas $f_\mu : \Lambda_R \rightarrow \Lambda_R$ e o subshift do tipo finito $\sigma_{A_\mu} : \Sigma_{A_\mu} \rightarrow \Sigma_{A_\mu}$, onde $\Sigma_{A_\mu} \subset \Sigma_{s+\ell}$. A matriz de transição A_μ tem a seguinte forma

$$a_{ij} = \begin{cases} H_{ij}, & \text{if } 1 \leq i, j \leq s; \\ 1, & \text{if } i = 1, j = s+1 \text{ or } i = s+\ell, j = s; \\ 1, & \text{if } j = i+1 \text{ for } s+1 \leq i \leq s+\ell-1; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

onde $H_\mu = (H_{ij})_{s \times s}$ é a matriz de transição de $f_\mu : \Lambda_{A_\mu} \rightarrow \Lambda_{A_\mu}$ a qual é irredutível, uma vez que $f_\mu|_{\Lambda_\mu}$ é topologicamente transitivo (veja (2.1) na próxima seção).

2.1.3 Prova dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.4

Primeira Afirmação do Teorema 2.1

Seja f_μ a família a um parâmetro como no Teorema 2.1. Na seção anterior, construímos uma partição de Markov para $f_\mu|_{\Lambda_R}$, para $\mu \geq 0$. Por se tratar de uma partição de Markov, pode-se dar uma conjugação entre $f_\mu|_{\Lambda_R}$ e a dinâmica de um subshift do tipo finito.

Seja A_μ a matriz de transição de $f_\mu|_{\Lambda_R}$, para $\mu > 0$ suficientemente pequeno. Recordemos que $h(f_\mu)$ é igual a $\log \lambda_\mu$ onde λ_μ é o maior autovalor de A_μ (pelo Teorema 2.1). Pela construção da partição de Markov da seção anterior, concluímos que

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} & & & & \\ & H_\mu & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

A seguinte proposição afirma que o maior autovalor da matriz A_μ é estritamente maior do que o maior autovalor da matriz $A_0 = H_0$. Desta proposição podemos concluir que a entropia do sistema $f_\mu|_{\Lambda_k(\mu)}$ é maior do que a entropia de $f_0|_{\Lambda_k}$.

Proposição 2.2. *Seja A_μ como definido anteriormente. Se λ_μ é o maior autovalor de A_μ em módulo, então para todo $\mu > 0$ perto de zero, $\lambda_\mu > \lambda_0$.*

Para provar a proposição usamos propriedades matriciais dadas pelo seguinte teorema devido a Perron e Frobenius.

Teorema 2.6 ([Gan59]). *Toda matriz $s \times s$ A não-negativa tem um autovetor não-negativo, $AU = \lambda U$, com a propriedade que o autovalor λ associado é igual ao raio espectral $|\lambda|_{max}$. Se a matriz A é irredutível, então existe um único autovetor não-negativo a menos de multiplicação por uma constante positiva, e este autovetor é estritamente positivo. Além disso, o autovalor maximal λ' de todo menor principal (de ordem menor que s) de A satisfaz $\lambda' \leq \lambda$. Se A é irredutível, então $\lambda' \not\leq \lambda$.*

Para usar este teorema de forma conveniente, precisamos que a matriz A_μ seja irredutível, isto é, para todo par i, j existe alguma potência $n(i, j)$ de A_μ tal que $(A_\mu^{n(i, j)})_{(i, j)} > 0$. Pela definição da matriz de transição A_μ , obtemos uma caracterização da irredutibilidade usando partições de Markov.

Lema 2.2. *A matriz de transição A_μ para a partição de Markov $\mathcal{P} = \{P_i\}$ é irredutível se, e somente se, para cada par i, j existe $n = n(i, j)$ tal que $f^n(P_i) \cap P_j \neq \emptyset$.*

Demonstração. Segue diretamente da construção da matriz de transição. \square

Demonstração da Proposição 2.2. Considere a matriz A_μ como no enunciado. Note que as partições de Markov $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_s, S_1, \dots, S_\ell\}$ para os sistemas $f_\mu|_{\Lambda_R}$ ($\mu > 0$ pequeno) construídos na seção anterior satisfazem as condições do lema anterior. Logo, temos que A_μ é irredutível. De fato, estas condições são satisfeitas pelos retângulos R_i 's porque o sistema $f_\mu|_{\Lambda_\mu}$ é transitivo. Como para cada S_j , o iterado $f^j(S_j)$ intersecta R_s e o iterado $f^j(R_1)$ intersecta S_j , obtemos a propriedade desejada para todos os elementos de \mathcal{P} .

Agora podemos aplicar o Teorema de Perron-Frobenius para a submatriz $A_{\mu,1}$ da matriz de transição irredutível A_μ , obtida pela exclusão da última linha e da última coluna da matriz A_μ . Logo, obtemos que o maior autovalor λ_μ de A_μ é estritamente maior do que o maior autovalor $\lambda_{\mu,1}$ de $A_{\mu,1}$. Apesar de $A_{\mu,1}$ não ser necessariamente uma matriz irredutível, podemos usar novamente o Teorema de Perron-Frobenius para a submatriz $A_{\mu,2}$ (obtida de $A_{\mu,1}$ excluindo-se a última linha e última coluna) cujo maior autovalor é $\lambda_{\mu,2}$ e obtemos que $\lambda_{\mu,2} \leq \lambda_{\mu,1} \leq \lambda_\mu$. Repetimos este processo até obtermos a submatriz H_μ , cujo maior autovalor $\lambda_{\mu,\ell}$ é igual a λ_0 , uma vez que os sistemas $f_\mu|_{\Lambda_k(\mu)}$ e $f_0|_{\Lambda_k}$ são topologicamente conjugados. Portanto, obtemos que $\lambda_\mu \geq \lambda_0$. \square

Para concluir a prova do primeiro item do Teorema 2.1 observe que para toda C^2 -vizinhança \mathcal{V} de $f = f_0$ podemos tomar f_μ com μ muito perto de 0 tal que $f_\mu \in \mathcal{V}$ e a Proposição 2.2 verificam. Logo, como Λ_k é responsável pela entropia de f_0 , $h(f_\mu) \geq h(f_\mu|_{\Lambda_k(\mu)}) > h(f_0|_{\Lambda_k}) = h(f_0)$. Então, $h(f_\mu) \neq h(f_0)$ e portanto f_0 é um ponto de variação da entropia. \square

Segunda Afirmação do Teorema 2.1

A demonstração deste item é uma consequência do Teorema 2.8 que está na Seção 2.2. \square

Prova do Teorema 2.2

Para provar o segundo item do Teorema 2.1, construímos um sistema com uma ferradura e uma tangência correspondente a um ponto fixo hiperbólico fora da ferradura. Então perturbamos o sistema numa pequena vizinhança da tangência para criar intersecções transversais (usando perturbações de classe C^1 “Snake like” como em Newhouse [New78]) e obter um novo sistema com entropia topológica maior.

Considere o sistema f sobre a esfera \mathbb{S}^2 cujas órbitas percorrem os meridianos do ponto p_∞ (o polo Norte) para o ponto p_0 (o polo Sul). Suponha que o sistema tem uma ferradura e um laço homoclínico em duas regiões disjuntas. Estas regiões são delimitadas por meridianos. Veja a Figura 2.3.

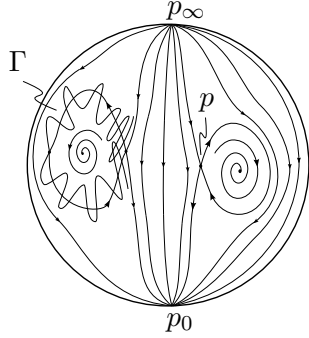


Figura 2.3: Sistema com uma ferradura e um laço homoclínico.

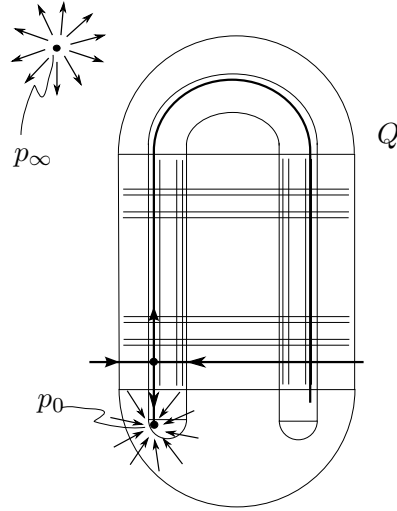


Figura 2.4: Região da ferradura Γ .

Suponhamos que este laço homoclínico está associado com um ponto fixo hiperbólico p que tem derivada com autovalores $\lambda(p) = 3$ e $\lambda(p)^{-1} = 3^{-1}$. A ferradura Γ na primeira região é uma ferradura-de-duas-pernas, p_∞ é uma fonte que envia as órbitas de um disco topológico Q cujo interior é uma vizinhança captadora para Γ . O poço desta ferradura coincide com p_0 . Veja a Figura 2.4.

Portanto, o conjunto não-errante $\Omega(f)$ consiste de três poços, uma fonte, uma ferradura (isolada) e um ponto hiperbólico sobre o laço homoclínico. Então, a entropia topológica de f é $h(f|_\Gamma) = 2$.

Agora, perturbamos f na topologia C^1 para obter g a qual tem uma outra ferradura Λ no lugar do laço homoclínico. Escolha um ponto q em $W_{loc}^s(p)$ e uma vizinhança U de q tal que U é um domínio fundamental. Considere $I = W^s(q) \cap U$. Em U fazemos uma perturbação do mesmo modo que em Newhouse [New78]. Suponha que $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ é uma coordenada linearizante com $\phi(q) = 0$. Considere $a > 0$ tal que $\phi^{-1}([a, a]) \subset I$. Para cada $N > 0$ grande pegue $A = A(N) > 0$ tal que $A \cdot N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Considere a seguinte função

$$\Phi(x, y) = \left(x, y + A \cos \frac{\pi x N}{2a} \right).$$

Note que Φ envia $[-a, a]$ sobre a curva γ , onde γ é o gráfico da função $x \mapsto y + A \cos(\frac{\pi x N}{2a})$. A distância maximal entre γ e o eixo x é A . Além disso, γ intercepta $[-a, a]$ N -vezes e

$$D\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A\pi N}{2a} \sin(\frac{\pi x N}{2a}) & 1 \end{bmatrix},$$

então, Φ é conservativa. Tome A suficientemente pequeno, então para $\delta > 0$ existe um difeomorfismo h δ -próximo de Id na topologia C^1 tal que, $h = \Phi$ próximo da origem e $h = Id$ fora de uma vizinhança da origem. Ponha $g = h \circ f$. Temos que q está δ - C^1 -próximo de f , $g(z) = f(z)$ para $z \in f^{-1}(U)$, $[-a, a] \subset W^s(p, g)$ e $\gamma \subset W^u(p, g)$.

A partir daqui, o argumento é o mesmo que o usado por Newhouse. Escolha um retângulo estreito R perto da $W_{loc}^s(p, g)$ que retorna, depois de n iterados por g , próximo de $W^u(p, g) \cap U$ e o intercepta (transversalmente) N vezes. Definimos Λ' o conjunto invariante maximal por $g^n|_R$ e obtemos que $h(g^n|_{\Lambda'}) = \log N$. Considere $\Lambda = \bigcup_{j=0}^{N-1} g^j(\Lambda')$ e segue que $h(g|_{\Lambda}) = \frac{1}{n} \log N$.

Temos que $\Lambda \subset \overline{H(p, g)}$, onde $p = p(f) = p(g)$, porque como $p \notin f^{-1}(U)$, $g(p) = f(p) = p$. Aqui $H(p, g)$ denota a classe homoclínica de p para g (como foi definido no final da Seção 1.1.1). Portanto, por Newhouse [New78], obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N = \log |\lambda(p)|.$$

Tome N suficientemente grande tal que

$$h(g|_{\Lambda}) = \frac{1}{n} \log N > \log |\lambda(p)| - \varepsilon.$$

Neste caso, temos $|\lambda(p)| = 3$ e podemos considerar $\varepsilon < \log(\frac{6}{5})$. Logo, $h(g|_{\Lambda}) > \log(\frac{5}{2}) > h(g|_{\Gamma})$.

Note que g é diferente de f somente dentro de uma região delimitada por dois meridianos. Então, a entropia de g restrita a Γ coincide com a entropia de f restrita a Γ . Portanto, o sistema $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tem $\overline{H(p, g)} \supset \Lambda$ como sua peça básica responsável. \square

Prova do Teorema 2.4

É conhecido que a função entropia topológica $f \mapsto h_{top}(f)$ é uma função contínua na topologia C^∞ , quando $f : M \rightarrow M$ com M superfície compacta. Usando esta observação, nosso exemplo na prova do Teorema 2.2 mostra que a perturbação de Newhouse (Teorema 2.3) não pode ser aplicada na topologia C^∞ . \square

2.2 Relação com um Resultado de Yomdin

Nesta seção apresentamos uma questão que relaciona a variação da entropia topológica com uma fórmula de entropia devida a Yomdin. Damos uma resposta à uma simplificação desta questão num caso particular.

Recordemos inicialmente de um resultado devido a Yomdin [Yom87] sobre o defeito da semi-continuidade da função entropia no espaço dos difeomorfismos C^k .

Teorema 2.7 ([Yom87]). *Para $f : M \rightarrow M$ de classe C^k e $g_n \rightarrow f$ na topologia C^k ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(g_n) \leq h(f) + \frac{2m}{k} R(f), \quad (2.2)$$

onde $k \geq 1$, $m = \dim M$ e $R(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{x \in M} \|Df^n(x)\|$.

Questão 2.1. *Seja f um C^1 -difeomorfismo com $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ onde Λ_i são peças básicas e $\mathcal{O}(q)$ é a tangência homoclínica correspondente à peça não responsável pela entropia, por exemplo, Λ_2 . Existe $\kappa > 0$ tal que se $|h(f) - h(f|_{\Lambda_2})| > \kappa$ então f é um ponto de constância na topologia C^1 ?*

Pode-se conjecturar que $\kappa \geq 4R(f)$ para o caso de superfícies, onde $m = 2$. no entanto, usando nosso exemplo concluímos que tal κ na questão acima poderia ser maior do que $R(f)$.

Com relação a esta questão que fizemos acima, temos respostas numa situação mais restrita, onde o domínio de nossas aplicações é a esfera \mathbb{S}^2 . Note que no exemplo dado na Subseção 2.1.3, também construído em \mathbb{S}^2 , a topologia considerada é baixa, é a topologia C^1 . Em sua construção usamos fortemente esse fato topológico e o Teorema 2.3 de Newhouse. Ressaltamos que para a construção feita para provar o Teorema 2.8 na próxima seção, a topologia considerada é alta.

Caso de um Difeomorfismo na Esfera \mathbb{S}^2

Vamos estudar o caso $f : M \rightarrow M$ em que $M = \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Identificamos aqui $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ onde $\infty \simeq (0, 0, 1)$ e, para todos os sistemas considerados aqui, ∞ será um ponto fixo repulsor, isto é, uma fonte.

Considere $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ um difeomorfismo de modo que $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$, onde $\Lambda_1 = \{\infty\}$ e q (e sua órbita) é o único ponto de tangência entre as variedades estável e instável de um ponto fixo (ou periódico) $p \in \Lambda_{i_0}$, para algum $i_0 \in \{1, \dots, k\}$.

Teorema 2.8. *Seja $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ um difeomorfismo como acima, tal que a tangência homoclínica $\mathcal{O}(q)$ é correspondente à peça básica não responsável pela entropia. Então f é um ponto de constância na topologia C^∞ .*

Recordemos aqui o conceito de filtração. Em [Shu78], Shub define filtrações da seguinte maneira. Seja $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo sobre M . Uma *filtração* \mathcal{M} adaptada à f é uma sequência $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$, onde M_i são subvariedades C^∞ de M , compactas, com bordo e tais que

- $\dim M_i = \dim M$;
- $f(M_i) \subset \text{int}(M_i)$.

Dada uma filtração \mathcal{M} adaptada à f , o conjunto $K_i^f(\mathcal{M}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1})$ é o conjunto f -invariante maximal de $M_i \setminus M_{i-1}$ o qual é compacto. Além disso, denotamos $K^f(\mathcal{M}) = \bigcup_{i=1}^k K_i^f(\mathcal{M})$. Se Ω denota o conjunto dos pontos não-errantes de f , denotamos

$$\Omega_i = \Omega \cap (M_i \setminus M_{i-1}).$$

Proposição 2.3 ([Shu78]). *Seja \mathcal{M} uma filtração adaptada à f e seja U uma vizinhança de $K^f(\mathcal{M})$. Então existe uma C^0 -vizinhança \mathcal{U} de f no conjunto dos homeomorfismo de M tal*

que, para toda $g \in \mathcal{U}$, \mathcal{M} é uma filtração adaptada à g e $K^g(\mathcal{M})$ está contido em U . Mais ainda, tomando $U_i = (M_i \setminus M_{i-1}) \cap U$, podemos escolher a vizinhança de \mathcal{U} de modo que $K_i^g(\mathcal{M}) \subset U_i$.

Agora, por Palis-Takens [PT93], para um difeomorfismo com uma tangência homoclínica, como o que consideramos acima, existe uma filtração \mathcal{M} para a decomposição $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k \cup \mathcal{O}(q)$ tal que

$$(i) \quad \Lambda_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1}), \text{ para } i \neq i_0;$$

$$(ii) \quad \Lambda_{i_0} \cup \mathcal{O}(q) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_{i_0} \setminus M_{i_0-1}).$$

Por esta última propriedade (ii), podemos escolher uma vizinhança aberta U_{i_0} de $\Lambda_{i_0} \cup \mathcal{O}(q)$ suficientemente pequena de modo que

$$f(U_{i_0}) \subset M_{i_0} \setminus M_{i_0-1} \quad \text{e} \quad f^{-1}(U_{i_0}) \subset M_{i_0} \setminus M_{i_0-1}.$$

Esta vizinhança tem a forma $U_{i_0} = \text{int}(\bigcap_{|n| \leq n_0} f^n(M_{i_0} \setminus M_{i_0-1}))$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Consideremos uma vizinhança U de ambos $f(U_{i_0})$ e $f^{-1}(U_{i_0})$ tal que $U \subset M_{i_0} \setminus M_{i_0-1}$. Note que

$$\Lambda_{i_0} \cup \mathcal{O}(q) \subset U_{i_0} \subset U \subset M_{i_0} \setminus M_{i_0-1}. \quad (2.3)$$

O seguinte fato não é encontrado desta forma nas referências, por essa razão enunciamos e provamos a seguinte proposição.

Proposição 2.4. *Considere duas aplicações diferenciáveis $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ , um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ e um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ tais que $K \subset U$. Seja $r \in \mathbb{N}$. Então, existe um operador $T : \text{Diff}^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow C^r(\mathbb{R}^m)$, contínuo numa vizinhança de f , tal que $T(f)|_K = f|_K$ e $T(f)|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)} = g|_{(\mathbb{R}^m \setminus U)}$.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos uma função “bump” com suporte em U , isto é, uma função $b : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que

$$b(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^m \setminus U \end{cases}$$

e $0 < b(x) < 1$ se $x \in U \setminus K$.

Considere as aplicações f e g como no enunciado, fixe um $r \in \mathbb{N}$ e seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Definimos uma nova aplicação $T(f) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$T(f)(x) = b(x)f(x) + (1 - b(x))g(x).$$

Temos que para $x \in K$, $H(f)(x) = f(x)$ e para $x \in \mathbb{R}^m \setminus U$, $H(f)(x) = g(x)$. Além disso, se f_1 é outro difeomorfismo em $\text{Diff}^\infty(\mathbb{R}^m)$ então para $x \in U \setminus K$ temos

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(f_1)(x)| &= |b(x)f(x) + (1 - b(x))g(x) - (b(x)f_1(x) + (1 - b(x))g(x))| \\ &= |b(x)||f(x) - f_1(x)| < |f(x) - f_1(x)|. \end{aligned}$$

Mais ainda, por indução na r -ésima derivada obtemos

$$\begin{aligned}
DT(f)(x) &= Dg(x) + Db(x) \cdot (f(x) - g(x)) + b(x) \cdot (Df(x) - Dg(x)); \\
D^2T(f)(x) &= D^2g(x) + D^2b(x) \cdot (f(x) - g(x)) + 2Db(x) \cdot (Df(x) - Dg(x)) + \\
&\quad + b(x) \cdot (D^2f(x) - D^2g(x)); \\
&\quad \vdots \\
D^rT(f)(x) &= D^r g(x) + \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} D^{r-j} b(x) \cdot (D^j f(x) - D^j g(x)).
\end{aligned}$$

Nas expressões anteriores o símbolo “ \cdot ” representa a forma bilinear dada por

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (\alpha, z) \mapsto \alpha \cdot z = \alpha z = (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n),$$

e utilizando a Regra de Derivação de Leibniz com a Regra da Cadeia (veja [AR67] pág 3) obtemos a expressão da derivada $D^rT(f)(x)$ acima tomando $\alpha = b(x)$ e $z = f(x) - g(x)$ e suas derivadas.

Assim, se $d_{C^\infty}(f, f_1) < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\|D^rT(f)(x) - D^rT(f_1)(x)\| &\leq \sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \|D^{r-j}b(x)\| \|D^j f(x) - D^j f_1(x)\| \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \|D^{r-j}b(x)\| \right) \delta.
\end{aligned}$$

Desse modo, dado $r \in \mathbb{N}$, como a aplicação b e todas suas derivadas são limitadas, então a soma acima $\sum_{j=0}^r \binom{r}{r-j} \|D^{r-j}b\|$ é limitada, digamos, por $L > 0$. Logo, a proposição está provada tomando-se $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$.

□

Vamos agora demonstrar o Teorema 2.8.

Demonstração. Considere $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, como no enunciado. Por simplicidade, assumiremos que $k = 4$ e que Λ_4 é um ponto fixo atrator p_0 . Ou seja, que o sistema f tem 4 peças básicas, sendo que duas delas se resumem a pontos fixos. Assim, como a entropia se anula em conjuntos invariantes finitos, restam apenas duas peças básicas com entropias positivas a considerar, as quais denotaremos por Λ_1 e Λ_2 . Suponhamos que a tangência q está associada à peça básica Λ_2 (ou seja, que $i_0 = 2$) e que $h(f|_{\Lambda_2}) < h(f|_{\Lambda_1})$. Mais ainda, identificamos $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Considere uma aplicação $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que tem ∞ como um ponto fixo repulsor, tem p_0 como ponto fixo atrator e que $\Omega(g) = \{\infty, p_0\}$. Seja U_2 como em 2.3, para $i_0 = 2$. Suponha que K é uma vizinhança compacta de $\Lambda_2 \cup \mathcal{O}(q)$ tal que $K \subset U_2 \subset U$.

Agora, considere a função $T(f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (aqui $m = 2$) construída acima na Proposição 2.4, a qual é uma “colagem” de f com g . Vamos encontrar uma vizinhança de $T(f)$ na topologia

C^r (para algum r grande) na qual a entropia não mude de peça responsável. Primeiro, denotamos por

$$d = h(f) - h(f|_{\Lambda_2}) = h(f|_{\Lambda_1}) - h(T(f)|_{\Lambda_2}). \quad (2.4)$$

Note que na última igualdade acima usamos o fato que $T(f)|_K = f|_K$ e aplicamos a Proposição 2.3 na vizinhança compacta $K \subset U_2$ da peça básica Λ_2 . Esta proposição garante que a parte do conjunto não-errante que está em K se mantém em K .

Considere $r > 0$ grande o suficiente para que

$$\max \left\{ \frac{2m}{r} R(f), \frac{2m}{r} R(T(f)) \right\} < \frac{d}{10}, \quad (2.5)$$

onde $R(\cdot)$ é definido em 2.2.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e considere $\delta > 0$ como na demonstração da Proposição 2.4 acima. Desse modo, pelo Teorema 2.7 de Yomdin podemos tomar uma vizinhança \mathcal{V} de $T(f)$ na topologia C^r tal que para toda aplicação $\tau \in \mathcal{V}$ temos

$$h(\tau) \leq h(T(f)) + \frac{2m}{r} R(f) + \frac{\varepsilon}{10}.$$

Note que por nossa escolha do conjunto K , temos que $T(f)|_{\Lambda_2} = f|_{\Lambda_2}$. Como $h(T(f)) = h(T(f)|_{\Lambda_2}) = h(f|_{\Lambda_2})$, usando a estimativa 2.5 obtemos

$$h(\tau) \leq h(f|_{\Lambda_2}) + \frac{\varepsilon + d}{10}, \quad (2.6)$$

para toda aplicação $\tau \in \mathcal{V}$, para r suficientemente grande.

Tomemos uma vizinhança \mathcal{W} de f na topologia C^∞ (contida na topologia C^r) tal que para toda $f_1 \in \mathcal{W}$ tenhamos

$$d_{C^\infty}(f_1, f) < \delta \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \|D^{n-j}b\| \right)^{-1}. \quad (2.7)$$

Mais ainda, pela Proposição 2.3 podemos escolher a vizinhança \mathcal{W} suficientemente pequena de tal modo que para toda $f_1 \in \mathcal{W}$, a parte do conjunto não errante $\Gamma_{f_1} := K_2^{f_1}(\mathcal{M}) \subset K$.

Logo, pela Proposição 2.4, segue que para cada $f_1 \in \mathcal{W}$ o operador T tem como imagem a aplicação $T(f_1)$ de classe C^r satisfazendo

$$T(f_1)|_K = f_1|_K, \quad T(f_1)|_{(\mathbb{R}^n \setminus U)} = T(f)|_{(\mathbb{R}^n \setminus U)} = g|_{(\mathbb{R}^n \setminus U)} \quad e \quad (2.8)$$

$$d_{C^r}(T(f_1), T(f)) \leq \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \|D^{n-j}b\| \right) d_{C^\infty}(f_1, f). \quad (2.9)$$

Diminuindo $\delta > 0$ se for necessário, podemos supor que toda aplicação τ satisfazendo $d_{C^r}(\tau, T(f)) < \delta$, pertence a \mathcal{V} . Donde obtemos que toda aplicação f_1 em \mathcal{W} satisfaz 2.7, logo satisfaz 2.9 e, portanto, pertence a \mathcal{V} . Isto é, $T(f_1)$ verifica a relação 2.6

$$h(T(f_1)) \leq h(f|_{\Lambda_2}) + \frac{\varepsilon + d}{10}. \quad (2.10)$$

Em particular, pela definição do operador T e por 2.8, temos

$$h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}) = h(T(f_1)|_{\Gamma_{f_1}}) \leq h(T(f_1)). \quad (2.11)$$

Então, para $f_1 \in \mathcal{W}$ temos

$$\begin{aligned} h(f_1) &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f_1|_{\Lambda_1})\} \\ &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f|_{\Lambda_1})\} \\ &\leq \max\left\{h(f|_{\Lambda_2}) + \frac{d+\varepsilon}{10}, h(f|_{\Lambda_1})\right\} \quad (\text{por 2.10 e 2.11}) \\ &= h(f|_{\Lambda_1}) = h(f). \quad (\text{por 2.4}) \end{aligned}$$

Portanto, na C^∞ -vizinhança \mathcal{W} a entropia topológica não muda de peça responsável. \square

Observação 2.1. *A Questão 2.1 é verdadeira para difeomorfismos $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ como acima se consideramos $\kappa > 4R(f)$.*

A justificativa deste fato é muito semelhante à prova do Teorema 2.8. Suponhamos que $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ e suas peças básicas são como na demonstração do Teorema 2.8 e identifiquemos $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Seja $r = 1$ e T o operador da Proposição 2.4 o qual é contínuo em $\text{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$.

Estamos supondo que $h(f) = h(f|_{\Lambda_1})$ e

$$h(f) - h(f|_{\Lambda_2}) > 4R(f).$$

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $h(f) - h(f|_{\Lambda_2}) > 4R(f) + \varepsilon$. Pelo Teorema 2.7 de Yomdin, existe uma vizinhança \mathcal{V} de $T(f)$, na topologia C^1 , tal que para toda $\tau \in \mathcal{V}$,

$$h(\tau) < h(T(f)) + 4R(f) + \varepsilon. \quad (2.12)$$

Como o operador T é contínuo, se f_1 está suficientemente próximo de f na topologia C^1 , então $T(f_1) \in \mathcal{V}$ e, portanto, por 2.12

$$h(T(f_1)) < h(T(f)) + 4R(f) + \varepsilon. \quad (2.13)$$

Assim, do mesmo modo que na demonstração do Teorema 2.8, temos para f_1 C^1 -próximo de f ,

$$\begin{aligned} h(f_1) &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f_1|_{\Lambda_1})\} \\ &= \max\{h(f_1|_{\Gamma_{f_1}}), h(f|_{\Lambda_1})\} \\ &\leq \max\left\{h(f|_{\Lambda_2}) + 4R(f) + \varepsilon, h(f|_{\Lambda_1})\right\} \quad (\text{por 2.13}) \\ &= h(f|_{\Lambda_1}) = h(f). \end{aligned}$$

Portanto, se $\kappa > 4R(f)$, então numa pequena C^1 -vizinhança de f a entropia topológica não muda de peça responsável.

2.3 Exemplo de Descontinuidade da Entropia Topológica

Nesta seção vamos apresentar um exemplo de descontinuidade da entropia topológica em dimensão três, isto é, quando a função entropia está definida num espaço de aplicações as quais tem como domínio uma variedade de dimensão três.

Teorema 2.9. *Existe uma aplicação da bola fechada 3-dimensional que é uma descontinuidade da entropia topológica na topologia C^∞ .*

Demonstração. Considere a aplicação ferradura $f : R \rightarrow R$ (ainda não estendida para \mathbb{S}^2) construída na Seção 1.3.1. Queremos que a região R seja o disco do \mathbb{R}^2 de raio unitário $D = D(0, 1)$. Para definir uma aplicação ferradura em D , vamos utilizar esta já construída anteriormente. Inicialmente, consideramos as seguintes regiões análogas àquelas criadas anteriormente:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= \left\{ (x, y) \in D \mid -\frac{1}{3} \leq y \leq -\frac{1}{4} \right\}, & \tilde{Q}_2 &= \left\{ (x, y) \in D \mid -\frac{1}{4} \leq y \leq -\frac{1}{12} \right\}, \\ \tilde{Q}_3 &= \left\{ (x, y) \in D \mid -\frac{1}{12} \leq y \leq \frac{1}{12} \right\}, & \tilde{Q}_4 &= \left\{ (x, y) \in D \mid \frac{1}{12} \leq y \leq \frac{1}{4} \right\}, \\ \tilde{Q}_5 &= \left\{ (x, y) \in D \mid \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{3} \right\}, \\ \tilde{D}_1 &= \left\{ (x, y) \in D \mid -1 \leq y \leq -\frac{1}{3} \right\} & \text{e} & \tilde{D}_2 = \left\{ (x, y) \in D \mid \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \right\}.\end{aligned}$$

Definimos a nova aplicação ferradura como segue. Note que podemos transladar e deformar D de modo que fique contido em R como definido na Seção 1.3.1. Primeiro contraímos D horizontalmente por uma razão $\frac{1}{2}$ e expandimos verticalmente por uma razão $\frac{3}{2}$. Agora transladamos a origem $(0, 0)$ para o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e com isso colocamos D dentro de R . Analiticamente fazemos a transformação

$$\psi(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{3y+1}{2} \right).$$

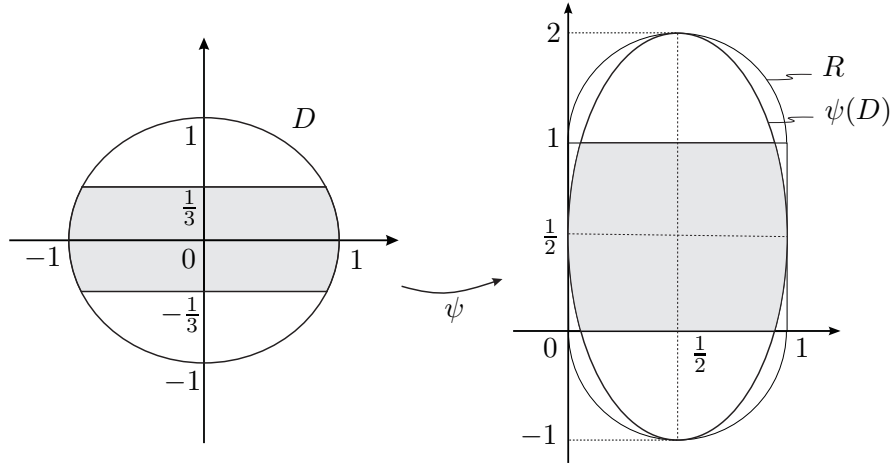
Desse modo obtemos que $\psi(\tilde{Q}_i) \subset Q_i$ e $\psi(\tilde{D}_j) \subset D_j$ para $i = 1, \dots, 5$ e $j = 1, 2$. Observe que os segmentos $\{(x, y) \in D : y = \frac{1}{3}\}$ e $\{(x, y) \in D : y = -\frac{1}{3}\}$ são levado via ψ em $[\frac{3-2\sqrt{3}}{6}, \frac{3+2\sqrt{3}}{6}] \times \{0\}$ e $[\frac{3-2\sqrt{3}}{6}, \frac{3+2\sqrt{3}}{6}] \times \{1\}$, respectivamente.

Para que nossa aplicação esteja bem definida, queremos que $\psi(D)$ contenha $f(R)$ estritamente, ou seja, $\text{int}(\psi(D)) \cap f(R) = f(R)$. Em particular, isto ocorre quando $f(\{(0, t); \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{5}{8}\})$ não intercepta $\psi(\{(\cos s, \sin s); 0 \leq s \leq \pi\})$. Analisando o sistema

$$\begin{cases} f(0, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos t, 1 + \frac{1}{6} \sin t \right), & 0 \leq t \leq \pi \\ \psi(\cos s, \sin s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos s, \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin s \right), & 0 \leq s \leq \pi. \end{cases}$$

obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \cos t = 3 \cos s \\ \sin t = 9 \sin s + 3, \end{cases}$$



com $0 \leq t, s \leq \pi$. Tomando o quadrado de cada sentença e depois somando obtemos a equação $72 \sin s + 54 \sin s + 17 = 0$, a qual tem discriminante estritamente negativo e, portanto, não tem soluções reais. Isso mostra que $\psi(D)$ contém estritamente $f(R)$.

Note que ψ é um difeomorfismo de classe C^∞ do disco D sobre $\psi(D)$. Deste modo, a aplicação $g : D \rightarrow D$ dada por $g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ continua sendo uma aplicação diferenciável, de classe C^∞ , e age como na Figura 2.5.

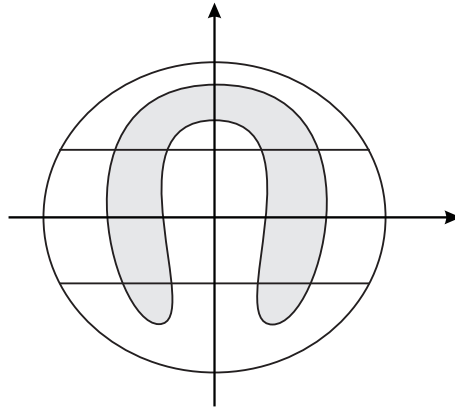


Figura 2.5: Aplicação ferradura no disco.

Além disso, $Dg(x, y)$ e $Df(\psi(x, y))$ têm os mesmos autovalores. Mais ainda, como $g^n = \psi^{-1} \circ f^n \circ \psi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, segue que o conjunto invariante maximal $\tilde{\Lambda}$ em D para g satisfaz

$$\tilde{\Lambda} := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(D) = \psi^{-1} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\psi(D)) \right),$$

ou seja,

$$\psi(\tilde{\Lambda}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\psi(D)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R) = \Lambda.$$

Desse modo, $\tilde{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico com constantes de hiperbolicidade $\tilde{\lambda} = \frac{1}{6}$ e $\tilde{\sigma} = 4$.

Vamos agora construir uma isotopia que deforma a aplicação ferradura e a torna uma contração. Vamos construir uma família g_t como segue. Definimos inicialmente as aplicações $\alpha_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\alpha_t(x, y) = (x, (1 - t)y)$, com $\frac{15}{16} \leq t \leq 1$. Agora definimos $g_t = g \circ \alpha_t$ e temos que para $t_0 = \frac{15}{16}$, a aplicação g_{t_0} é uma contração que tem um único ponto fixo, o qual é atrator. Podemos, a menos de uma reparametrização, assumir que a família g_t tem parâmetros em $t \in [0, 1]$ e que $g_0 = g$. Estendemos esta família para $t \in [-1, 1]$ definindo $g_t = g_{-t}$ quando $t \in [-1, 0)$. Mais ainda, para cada $t \in (-1, 1)$, vamos contrair o espaço onde cada g_t diminuindo o raio do disco D para $\sqrt{1 - t^2}$, ou seja, definimos a aplicação $C_t : D \rightarrow D_t$, onde $D_t = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 - t^2\}$, dada por $C_t(x, y) = ((\sqrt{1 - t^2})x, (\sqrt{1 - t^2})y)$. Assim para cada $t \in (-1, 1)$ definimos $\tilde{g}_t = C_t^{-1} \circ g_t \circ C_t$.

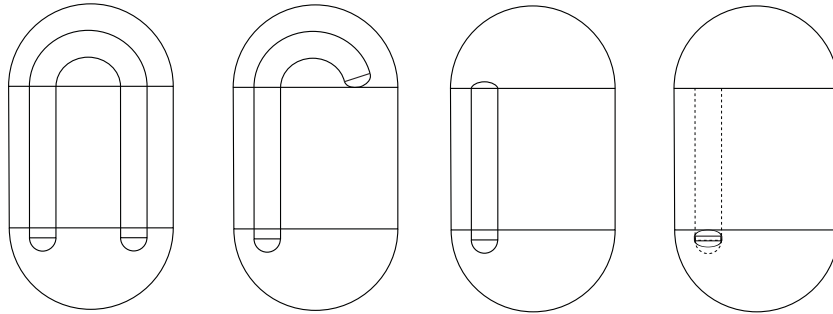


Figura 2.6:

Agora construímos uma aplicação G definida no disco 3-dimensional $\mathbb{D}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ do seguinte modo: em cada disco 2-dimensional $\mathbb{D}_t^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{D}^3 : z = t\}$, para $t \in (-1, 1)$, $G(x, y, z = t) = (\tilde{g}_t(x, y), t)$.

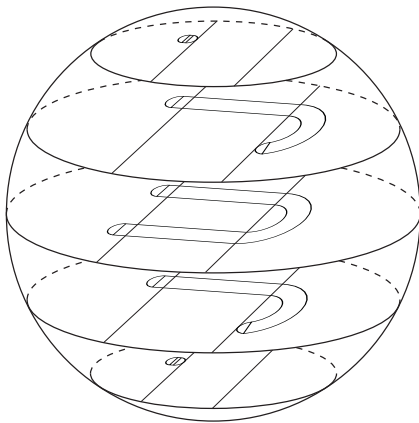


Figura 2.7:

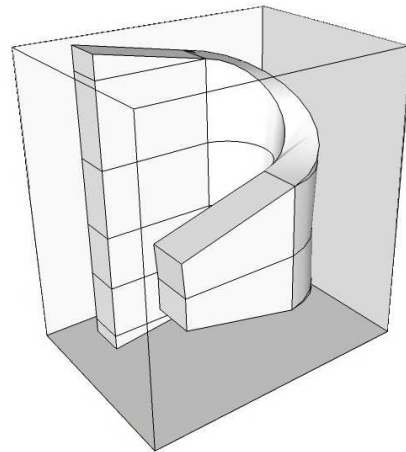


Figura 2.8:

Considere agora um fluxo $\Xi(t, (x, y, z))$ de classe C^∞ no disco 3-dimensional $\mathbb{D}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ que tem como únicas singularidades o pólo norte $N = (0, 0, 1)$ e o pólo sul $S = (0, 0, -1)$ e cujas órbitas de qualquer ponto em $\mathbb{D}^3 \setminus \{N, S\}$ tem como α -

limite N e como ω -limite S . Além disso, vamos supor que o tempo t de cada órbita está parametrizado de modo que cada disco 2-dimensional $\mathbb{D}_{z_0}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{D}^3 : z = z_0\}$, para $z_0 \in (-1, 1)$, é enviado em outro disco $\mathbb{D}_{z_1}^2$, com $z_1 < z_0$.

Denotemos o difeomorfismo tempo τ desse fluxo por $\Xi_\tau : \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$. Note que isto forma uma família a um parâmetro de difeomorfismos que no parâmetro $\tau = 0$ coincide com a identidade em \mathbb{D}^3 .

Agora consideramos a família de difeomorfismos $\Psi_\tau = \Xi_\tau \circ G$. Para $\tau = 0$, temos que $\Psi_\tau = G$, o disco \mathbb{D}_0^2 é G -invariante e $G|_{\mathbb{D}_0^2} = g$. Mais ainda, a entropia de g é $h(g) = \log 2$, o que implica que $h(G) \geq h(G|_{\mathbb{D}_0^2}) = \log 2$. Porém, quando consideramos qualquer $\tau > 0$ pequeno, a entropia de G_τ se anula, uma vez que o conjunto $\Omega(G_\tau)$ é formado apenas por S e N .

Em resumo, obtemos uma curva de difeomorfismo G_τ que para todo $\tau > 0$ tem entropia nula e que em $\tau = 0$, a entropia salta para $\log 2$. Isto mostra que a entropia topológica não é contínua em G_0 . \square

Teorema de Newhouse em Dimensões Maiores

Neste capítulo vamos enunciar um dos teoremas principais deste texto, que é uma generalização do resultado dado por Newhouse em [New04].

Considere uma variedade M n -dimensional, $n \geq 2$, compacta e de classe C^∞ e seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 2$ (denotamos $f \in \text{Diff}^r(M)$).

Dizemos que um ponto hiperbólico do tipo sela (ou apenas uma sela) é *seccionalmente dissipativo* quando sua diferencial tem um autovalor expansor e o produto de quaisquer dois autovalores tem valor absoluto menor do que um.

Um conjunto Λ *carrega* uma probabilidade ν quando $\nu(\Lambda) = 1$.

Teorema 3.1. *Existe um subconjunto residual \mathcal{U} em $\text{Diff}^r(M)$, $r \geq 2$, tal que se $f \in \mathcal{U}$ e Λ é um conjunto homoclínico para f que contém uma tangência homoclínica e tem um ponto periódico seccionalmente dissipativo associado, então Λ não carrega uma medida de SRB hiperbólica.*

3.1 Ingredientes para a Prova do Teorema

O lema que faremos a seguir nos diz que se um conjunto homoclínico tem medida de SRB total, então o suporte dessa medida contém a variedade instável de qualquer ponto periódico associado ao conjunto homoclínico.

Lema 3.1. *Suponha que Λ é um conjunto homoclínico que carrega uma medida de SRB ν . Então, $\text{supp}(\nu)$ consiste do fecho das variedades instáveis de todo ponto periódico associado à Λ .*

Demonstração. Como estamos supondo que ν é medida hiperbólica, então existe $\Lambda_1 \subset \Lambda$ com $\nu(\Lambda) = 1$ tal que, para todo $x \in \Lambda_1$, existem $W^s(x)$ e $W^u(x)$ (pelo Teorema da Variedade Estável de Pesin, vide por exemplo [BP02]).

Inicialmente, o Lema 1.1 nos garante que para todo $x \in \Lambda_1$, a variedade instável $W^u(x)$ está completamente contida no suporte de ν . Queremos garantir que bastam os fechos das variedades instáveis dos pontos periódicos para obtermos todo o suporte $\text{supp}(\nu)$.

Vamos mostrar agora que todo ponto periódico associado à Λ tem sua variedade instável completamente contida em $\text{supp}(\nu)$. Considere p um ponto periódico associado à Λ , isto é, p está em alguma classe homoclínica de Λ . Pelo artigo de Tsujii ([Tsu91]), temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1 (Tsujii [Tsu91]). *Para cada medida de SRB hiperbólica μ existe um ponto periódico hiperbólico q com pontos homoclínicos transversais tal que*

$$\text{supp}(\mu) = \overline{W^u(o(q))} = \overline{W^u(o(q)) \cap W^s(o(q))},$$

onde $W^s(o(p))$ e $W^u(o(p))$ são as variedades estável e instável da órbita de p , respectivamente.

Pela Proposição 1.3, temos que a classe homoclínica $\overline{H(p, f)}$ de um ponto periódico hiperbólico p coincide com o conjunto homoclínico Λ que contém p como um ponto associado, ou seja,

$$\Lambda = \overline{H(p, f)}.$$

Por outro lado, como p é ponto associado à $\Lambda = \overline{H(p, f)}$, então está homoclinicamente relacionado com q . Isso significa que

$$W^u(o(q)) \cap W^s(o(p)) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad W^u(o(p)) \cap W^s(o(q)) \neq \emptyset.$$

Agora, com um argumento direto de λ -Lema (Teorema 1.2) e utilizando o resultado de Tsujii (Proposição 3.1) concluímos que

$$W^u(o(p)) \subset \overline{W^u(o(q))} = \text{supp}(\nu).$$

Assim, concluímos que toda órbita periódica associada à Λ tem o fecho de sua variedade instável contido em $\text{supp}(\nu)$. Mais ainda, o resultado de Tsujii garante que

$$\text{supp}(\nu) = \bigcup_p \overline{W^u(o(p))},$$

onde p percorre o conjunto de todos os pontos periódicos hiperbólicos associados à Λ . □

Para o próximo passo, vamos recordar o conceito de pontos u -relacionados.

Definição 3.1. *Seja p um ponto periódico do tipo sela e q um poço hiperbólico. Dizemos que q é u -relacionado com p se*

$$W^u(o(p)) \cap W^s(o(q)) \neq \emptyset.$$

Dizemos que q é u -relacionado com um conjunto homoclínico Λ se existe um ponto periódico de sela $p \in \Lambda$ associado a Λ tal que q é u -relacionado com p .

A seguinte proposição nos diz que próximo de um difeomorfismo com uma tangência e um ponto seccionalmente dissipativo sempre encontramos outra função com um poço u -relacionado. Mas antes de enunciar tal proposição, vamos recorrer a dois lemas fundamentais para a sua demonstração.

Em [New80] pág. 96, newhouse prova o seguinte

Lema 3.2 ([New80]). *Seja Λ uma peça básica para f tal que $W^s(\Lambda)$ e $W^u(\Lambda)$ são tangentes num ponto q . Seja p um ponto periódico em Λ . Então f pode ser C^r perturbada para uma g tal que p é periódico para g e $W^u(o(p), g)$ e $W^s(o(p), g)$ tem uma tangência arbitrariamente próxima de q .*

Além disso, em [PV94] pág. 246, Palis-Viana obtém a seguinte perturbação.

Lema 3.3 ([PV94]). *Seja f um difeomorfismo de classe C^2 com uma tangência homoclínica q associada a um ponto de sela seccionalmente dissipativo p . Então, (a menos de algumas condições genéricas) existe uma perturbação g , arbitrariamente próxima de f , tal que a tangência homoclínica q é quadrática, p é C^2 -linearizável e tem apenas um menor autovalor contrativo. Além disso, pode-se tomar g tal que o ponto de tangência não esteja contido na variedade estável forte de p .*

Mais ainda, em [Rob71], temos o seguinte teorema de continuação de pontos fixos hiperbólicos (poços). Aqui estamos usando a mesma notação que na Observação A.1.

Teorema 3.2 (Robbin [Rob71], Teor. 3.1). *Seja \mathcal{Z} uma vizinhança de (x^*, Y^*) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ e seja $\beta \rightarrow H_{\nu, \beta}(x, Y)$ definida em \mathcal{Z} uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Seja β_0 tal que (x^*, Y^*) é um ponto fixo atrator de $H_{\nu, \beta_0}(x, Y)$. Então, existem vizinhanças \mathcal{B} de β e \mathcal{Z}_0 de (x^*, Y^*) tais que para $\beta \in \mathcal{B}$, a aplicação $H_{\nu, \beta}(x, Y)$ tem um único ponto fixo atrator em \mathcal{Z}_0 , o qual é a continuação de (x^*, Y^*) .*

Estamos aptos a enunciar e provar a proposição mencionada anteriormente.

Proposição 3.2. *Seja $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, e $p(f)$ um ponto periódico hiperbólico seccionalmente dissipativo de f cujo fecho homoclínico contém uma tangência homoclínica. Então, arbitrariamente C^r -próximo de f podemos encontrar um difeomorfismo g tal que $p(g)$ tem um poço u -relacionado.*

Demonstração. Seja f um difeomorfismo com uma tangência homoclínica q associada ao fecho homoclínico de um ponto periódico seccionalmente dissipativo p . Pelo Lema 3.2, sempre podemos supor que a tangência q está associada ao ponto seccionalmente dissipativo p .

Vamos fazer agora uma sequência de perturbações em f idênticas àquelas feitas em [PV94], pág. 246. Pelo Lema 3.3, tomamos uma perturbação g de f de modo que a tangência homoclínica é quadrática, o ponto de sela p é C^2 -linearizável e tem somente um menores (em módulo) autovalores contratores, o qual denotamos por λ (o autovalor expensor será denotado por σ). Note que sempre podemos supor que o domínio das linearizações (ν -dependentes) comtem uma vizinhança de uma hipérficie compacta (um disco centrado em p) $D^s(\nu) \subset W^s(p_\nu)$ de modo que $D^s(0)$ contém a tangência q e o ponto de sela $p = p(g)$. Agora, mergulhamos $g = f_0$ numa família de difeomorfismos a um parâmetro $\{f_\nu\}$ que desdobra genericamente.

Nessas condições, utilizando técnicas de renormalização em dimensões altas (veja Seção 1.2 e o Apêndice A deste texto ou [PV94]), podemos encontrar restrições de iterados de f_ν a domínios apropriados próximos à tangência que teem a forma

$$F_\nu : (x, Y) \mapsto (x^2 + \nu, xA) + \varepsilon(\nu, x, Y), \text{ para algum } A \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ e } \varepsilon \text{ } C^2\text{-pequeno,} \quad (3.1)$$

quando escritos em coordenadas $(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ e parâmetro ν convenientes. Esses domínios são m -cilindros C_ν curvilineares ν -dependentes localizados próximos do ponto de tangência que denotaremos por q . Na verdade, pelo Lema A.3, existe uma sequência de intervalos I_n no espaço de parâmetros ν , próximos de 0 e com diâmetro convergindo para zero, tais que se $\nu \in I_n$, então pelas expressões A.6 no Apêndice A a “altura” do cilindro C_ν é proporcional a σ^{-2n} e o diâmetro da “base” é proporcional a σ^{-n} .

Note que a aplicação $\chi : (-\delta, \delta) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$, dada por

$$\chi(\nu, x, Y) = \chi_\nu(x, Y) = (x^2 + \nu, Ax),$$

tem órbitas periódicas contratoras para ν , digamos, próximo de zero. A presença de tais órbitas é um fenômeno persistente por pequenas perturbações. Segue deste fato que para valores pequenos e arbitrários do parâmetro ν (ν próximo de zero) a aplicação f_μ tem uma órbita periódica atratora numa vizinhança (ν -dependente) da órbita de tangência. Para entender melhor esta afirmação, vamos analisar um pouco mais a aplicação χ_ν . Os seus pontos fixos são

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\nu}}{2}, \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\nu}}{2} \right) \cdot A \right) \text{ e } \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}{2}, \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}{2} \right) \cdot A \right),$$

mas o que nos interessa é o primeiro deles, que denotaremos por (x^*, Y^*) , pois é atrator. A diferencial de χ_ν é dada por

$$D\chi_\nu(x, Y) = \begin{bmatrix} 2x & \mathbf{0} \\ A^t & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde A^t é o vetor transposto de A e $\mathbf{0}$ é a matriz quadrada nula de ordem $m - 1$. Logo,

$$D\chi_\nu(x^*, Y^*) = \begin{bmatrix} (1 - \sqrt{1 - 4\nu}) & \mathbf{0} \\ A^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e seus autovalores são 0 e $1 - \sqrt{1 - 4\nu}$. Basta então verificar quando $|1 - \sqrt{1 - 4\nu}| < 1$. Isso ocorre quando

$$-\frac{3}{4} < \nu < \frac{1}{4}.$$

Por outro lado, no outro ponto fixo, a diferencial é

$$D\chi_\nu(x^*, Y^*) = \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{1 - 4\nu}) & 0 \\ A^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e seus autovalores são 0 e $1 + \sqrt{1 - 4\nu}$, o segundo com módulo maior do que um, logo temos um ponto de sela. Assim, a vizinhança $\left(\frac{-1 - \sqrt{1 - 4\nu}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}{2}\right) \times \mathbb{R}^{m-1}$ é a bacia de atração do ponto fixo atrator (x^*, Y^*) , para ν suficientemente pequeno. Para que o conjunto $\left[-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right] \times \mathbb{R}^{m-1}$ esteja contido na bacia de atração de (x^*, Y^*) , basta exigir que $\frac{1 + \sqrt{1 - 4\nu}}{2} > \frac{7}{8}$, isto é,

$$\nu < \frac{7}{64} = \frac{4}{64} + \frac{3}{64} = \frac{1}{16} + \frac{3}{64}.$$

Deste modo, basta exigirmos $\nu \leq \frac{1}{16}$. Note que se $\nu \geq 0$, a primeira coordenada do ponto fixo de sela fica no intervalo $[-1, 1]$. Logo, se $\nu \in \left[\frac{1}{64}, \frac{1}{16}\right]$, então temos ambas condições anteriores satisfeitas. Em particular, o m -cilindro $C = \left[-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right] \times B^{m-1}(0, 1)$ está contido na variedade estável $W^s(x^*, Y^*)$.

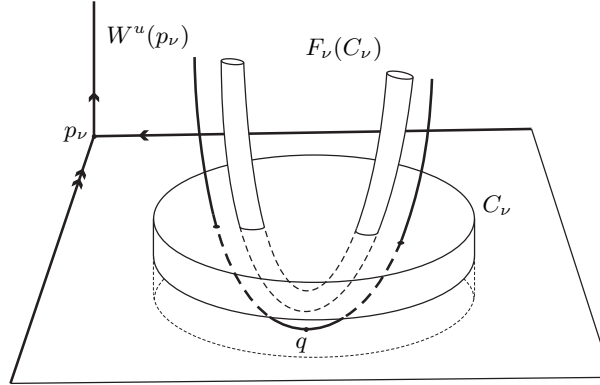


Figura 3.1:

Agora, como a aplicação F_ν em (3.1) é uma pequena perturbação de χ_ν , então a continuação do ponto fixo atrator (x^*, Y^*) é também um ponto fixo atrator (veja a Proposição 3.2) e a variedade estável deste ponto contém o m -cilindro C . Temos assim a situação como na Figura 3.1.

No domínio das coordenadas linearizantes, aumentamos a largura (base $B^{m-1}(0, 1)$) do cilindro C_ν para um novo cilindro $\tilde{C}_\nu \supset C_\nu$ de mesma altura que C_ν que contém agora uma curva $\gamma^u \subset W^u(p_\nu)$. Veja a Figura 3.2 abaixo.

Como o ponto periódico p_ν é seccionalmente dissipativo, e usando a Proposição 1.4, temos para n grande que a imagem $F_\nu(\tilde{C}_\nu)$ é um cilindro curvado estreito, um pouco mais espesso do que $F_\nu(C_\nu)$, que contém um segmento curvado de $W^u(p_\nu)$ e que tem uma região contida em C_ν . Isso faz com que um trecho de $W^u(p_\nu)$ fique contido na bacia de atração do ponto fixo atrator, na verdade, é o trecho $F_\nu(\gamma^u)$ de $W^u(p_\nu)$ que intercepta a variedade estável do ponto fixo atrator. Logo, obtemos que o ponto fixo atrator está u -relacionado com p_ν . Isso prova a proposição. \square

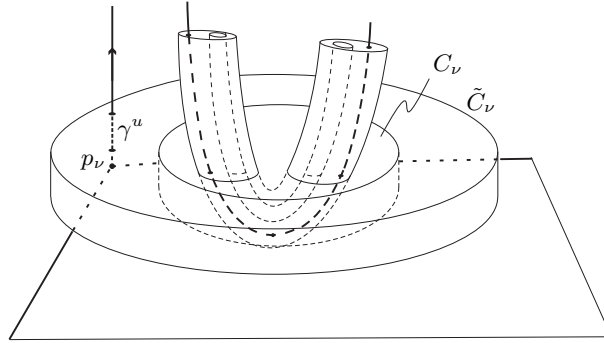


Figura 3.2:

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{U}_n \subset \text{Diff}^r(M)$ definido por

$$\mathcal{U}_n := \{f \in \text{Diff}^r(M) : \forall p \in \text{Per}_n(f) \text{ é hiperbólico, } \det Df_p \neq 1 \text{ e } |\lambda_i \cdot \lambda_j| \neq 1, \forall i \neq j\}.$$

Pela demonstração do Teorema de Kupka-Smale (Robinson, [Rob99] pag 450), sabemos que os conjuntos da forma

$$\mathcal{H}_n := \{f \in \text{Diff}^r(M) : \forall p \in \text{Per}_n(f) \text{ é hiperbólico}\}$$

são abertos e densos em $\text{Diff}^r(M)$. Além disso, o conjunto

$$\mathcal{I}_n := \{f \in \text{Diff}^r(M) : \forall p \in \text{Per}_n(f) \det Df_p \neq 1 \text{ e } |\lambda_i \cdot \lambda_j| \neq 1, \forall i \neq j\}$$

é também aberto e denso em $\text{Diff}^r(M)$. Assim, $\mathcal{U}_n := \mathcal{H}_n \cap \mathcal{I}_n$ é aberto e denso em $\text{Diff}^r(M)$ pois este é um espaço de Baire com a topologia C^r .

Para cada $f \in \mathcal{U}_n$, considere

$$\mathcal{P}_n^t(f) := \{p \in \text{Per}_n(f) : p \text{ é seccionalmente dissipativo e existe uma sequência de difeomorfismos } g_n \rightarrow f \text{ em } \text{Diff}^r(M) \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N} \text{ o } h\text{-fecho de } p(g_n) \text{ contém uma tangência homoclínica}\},$$

ou seja, p é periódico seccionalmente dissipativo e f é aproximada por difeomorfismos que contém alguma tangência.

Considere agora \mathcal{V}_n o subconjunto das aplicações de \mathcal{U}_n cujos pontos periódicos seccionalmente dissipativos, se existirem, não podem ser aproximados por tangências, isto é,

$$\mathcal{V}_n := \{f \in \mathcal{U}_n : \mathcal{P}_n^t(f) = \emptyset\}.$$

Afirmção. \mathcal{V}_n é um subconjunto aberto de \mathcal{U}_n .

Justificativa da Afirmção. Para uma dada $f \in \mathcal{V}_n$ tal que $\mathcal{P}_n^t(f) = \emptyset$ e tal que existe algum $p \in \text{Per}_n(f)$ seccionalmente dissipativo, existe uma vizinhança de f em $\text{Diff}^1(M)$, e portanto também em \mathcal{U}_n , tal que a continuação de p para aplicações nesta vizinha ainda são seccionalmente dissipativos. Se além disso f não é aproximada por difeomorfismos contendo tangências em seus h -fechos, significa que alguma vizinhança pequena de f deve manter esta mesma propriedade. A intersecção destas duas vizinhanças de f ainda está contida em \mathcal{V}_n e, portanto, este conjunto é aberto.

Continuando a prova, consideremos o conjunto $\mathcal{F}_n := \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{V}_n$. Assim, se $f \in \mathcal{F}_n$, então $\mathcal{P}_n^t(f)$ é um conjunto não vazio e finito de pontos periódicos. Rotulemos estes pontos por

$$\mathcal{P}_n^t(f) = \{p_1(f), p_2(f), \dots, p_{s_n(f)}(f)\}.$$

Vamos agora fatiar \mathcal{F}_n . Para cada $m \geq 0$, seja

$$\mathcal{F}_{n,m} := \{f \in \mathcal{F}_n : s_n(f) = m\}$$

e consideremos o conjunto dos índices m tais que existe alguma $f \in \mathcal{F}_n$ com números de pontos rotulados igual a m , isto é,

$$T_n := \{m \in \mathbb{N} : \mathcal{F}_{n,m} \neq \emptyset\}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{F}_{m,n}$ é o conjunto dos difeomorfismos, que possuem m pontos periódicos seccionalmente dissipativos de período no máximo n , os quais são aproximados por outros difeomorfismos exibindo tangências homoclínicas.

Notemos que $s_n(f)$ é no máximo igual a $\#\text{Per}_n(f) < \infty$. Assim, T_n é um conjunto finito de números naturais tal que

$$\mathcal{F}_n = \bigcup_{m \in T_n} \mathcal{F}_{n,m}.$$

Para $m \in T_n$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, consideremos

$$\mathcal{F}_{n,m,j} := \{f \in \mathcal{F}_{n,m} \mid h\text{-fecho de } p_j(f) \text{ tem persistência de tangências e tem um poço } u\text{-relacionado}\}.$$

Com o *Main Theorem* do artigo de Palis-Viana [PV94] e pela Proposição 3.2, obtemos que $\mathcal{F}_{n,m,j}$ é denso e aberto em $\mathcal{F}_{n,m}$.

De fato, a Proposição 3.2 prova que o conjunto $\mathcal{F}_{n,m,j}$ é denso em $\mathcal{F}_{n,m}$. Pois, se $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ e \mathcal{A} é um aberto em $\mathcal{F}_{n,m}$ contendo f (e que já podemos supor que é um aberto no qual persistem as tangências de f), então para cada $k = 1, \dots, m$ existe $g_{i,k}$ muito próxima de f contida também em \mathcal{A} tal que o h -fecho de $p_k(g_{i,k})$ contém uma tangência homoclínica, onde $p_k(g_{i,k})$ é a continuação de $p_k(f)$. Como cada $p_k(f)$ é seccionalmente dissipativo, perto de f (isto é, para i suficientemente grande) cada $p_k(g_{i,k})$ também o é, logo cada $g_{i,k}$ satisfaz a Proposição 3.2 e então existem $\tilde{g}_{i,k}$ arbitrariamente próximas de $g_{i,k}$ (isto é, contidas em \mathcal{A}) tais que $p_k(\tilde{g}_{i,k})$ tem um poço u -relacionado. Em particular, para $k = j$, temos que $\tilde{g}_{i,j}$ está em $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_{n,m,j}$.

Para concluirmos que $\mathcal{F}_{n,m,j}$ é aberto em $\mathcal{F}_{n,m}$, basta observarmos que a condição de persistência de tangências homoclínicas é uma condição aberta (pela definição) e que a condição de ter um poço u -relacionado também é condição aberta, uma vez que a condição $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ persiste por pequenas perturbações.

Portanto, $\mathcal{F}_{n,m,j}$ é denso e aberto em $\mathcal{F}_{m,n}$.

Desse modo, o seguinte conjunto é também aberto e denso em \mathcal{F}_n

$$\mathcal{E}_n := \bigcup_{m \in T_n} \left[\bigcap_{1 \leq j \leq m} \mathcal{F}_{n,m,j} \right],$$

uma vez que $\mathcal{F}_n = \bigcup_{m \in T_n} \mathcal{F}_{n,m}$.

Consideremos agora \mathcal{G}_n o conjunto das aplicações de \mathcal{U}_n com $\mathcal{P}_n^t(f) = \emptyset$ unido com as aplicações de \mathcal{E}_n , isto é,

$$\mathcal{G}_n := \mathcal{V}_n \cup \mathcal{E}_n.$$

Afirmção. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto \mathcal{G}_n é aberto e denso em $\text{Diff}^r(M)$.

Justificativa da Afirmção. Seja $f \in \mathcal{G}_n \subset \mathcal{V}_n \cup \mathcal{F}_n$, logo ou f está em \mathcal{V}_n ou f está em \mathcal{E}_n . Se f estiver em \mathcal{V}_n , então o próprio \mathcal{V}_n é um aberto de \mathcal{U}_n que contém f . Agora, se f estiver em \mathcal{E}_n , como este conjunto é um aberto de \mathcal{F}_n e \mathcal{F}_n é fechado, então f pode estar em $\text{int}(\mathcal{F}_n)$ ou então $f \in \partial\mathcal{F}_n$. No primeiro caso, o conjunto $\mathcal{E}_n \cap \text{int}(\mathcal{F}_n)$ é o aberto de \mathcal{U}_n que contém f . No segundo caso, pelo fato de que \mathcal{E}_n é aberto de \mathcal{F}_n com a topologia induzida de \mathcal{U}_n , segue que existe aberto (induzido) $\mathcal{A} = \mathcal{O} \cap \mathcal{F}_n$ contendo f , onde \mathcal{O} é um aberto de \mathcal{U}_n . Assim, se provarmos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{V}_n \ni f$ é aberto de \mathcal{U}_n , obtemos o desejado. Para isso basta observarmos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cup \mathcal{V}_n &= (\mathcal{O} \cap \mathcal{F}_n) \cup \mathcal{V}_n \\ &= (\mathcal{O} \cup \mathcal{V}_n) \cap (\mathcal{F}_n \cup \mathcal{V}_n) = (\mathcal{O} \cup \mathcal{V}_n) \cap \mathcal{U}_n, \end{aligned}$$

e como \mathcal{O} e \mathcal{V}_n são ambos abertos de \mathcal{U}_n , essa última intersecção também o é. Portanto, \mathcal{G}_n é aberto em \mathcal{U}_n e, então, aberto de $\text{Diff}^r(M)$.

Para ver que \mathcal{G}_n é denso em $\text{Diff}^r(M)$, basta observarmos que

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{G}_n} &= \overline{\mathcal{V}_n \cup \mathcal{E}_n} = \overline{\mathcal{V}_n} \cup \overline{\mathcal{F}_n} \\ &= \overline{\mathcal{V}_n \cup \mathcal{E}_n} = \overline{\mathcal{U}_n} = \text{Diff}^r(M).\end{aligned}$$

Agora, para concluirmos a demonstração do Teorema, consideremos $f \in \mathcal{G}_n = \mathcal{V}_n \cup \mathcal{E}_n$ e suponhamos que de f possui um conjunto homoclínico Λ que contém uma tangência homoclínica associada a um ponto periódico dissipativo. Logo, f não pode estar em \mathcal{V}_n porque, se estivesse, f não teria pontos periódicos seccionalmente dissipativos de período $\leq n$ ou não seria aproximada por difeomorfismos com h -fecho contendo uma tangência; o que não pode ocorrer. Nesse caso, f pertence à \mathcal{E}_n e conseqüentemente f tem um poço u -relacionado. Pelo Lema 3.1, como esse poço está contido no fecho da variedade instável do ponto periódico seccionalmente dissipativo, segue que o h -fecho relacionado com este ponto periódico não pode carregar uma medida de SRB. Finalmente, como \mathcal{G}_n é aberto e denso em $\text{Diff}^r(M)$, provamos o resultado. \square

Renormalizações em Dimensões Altas - Construção

Faremos neste apêndice um detalhamento da construção feita na Seção 1.2.

Considere M uma variedade m -dimensional compacta e $\varphi_0 : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^2 com uma tangência homoclínica associada a um ponto fixo p . Suponha que o ponto p é seccionalmente dissipativo, isto é, que quaisquer dois autovalores λ_1 e λ_2 da diferencial $D\varphi_0(p)$ satisfaz a condição

$$|\lambda_1||\lambda_2| < 1.$$

Denotamos por σ o único autovalor de módulo maior do que um.

Palis-Viana [PV94] mostram que, sob algumas condições genéricas, o desdobramento de uma família a um parâmetro de difeomorfismo $\{\varphi_\mu\}_\mu$ (ver definição no Capítulo 1.3) contém o desdobramento de famílias de difeomorfismos quase-quadráticas. Mais especificamente, eles mostram que restrições de iterados de φ_μ a domínios apropriados, próximos do ponto de tangência, tem a forma:

$$F_{\nu,n} : (x, Y) \mapsto (x^2 + \nu, xA) + \varepsilon(\nu, x, Y),$$

para algum vetor $A \in \mathbb{R}^{m-1}$ e uma aplicação ε pequena na topologia \mathcal{C}^2 , quando escrita em coordenadas $(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ e parâmetro real ν convenientemente escolhidos.

Assumimos que, para μ pequeno, o difeomorfismo φ_μ admite coordenadas linearizantes de classe \mathcal{C}^2 μ -dependentes $(\zeta, Z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ sobre uma vizinhança do ponto fixo p (por

exemplo, veja em Hartmann [Har64]). Fixamos essas coordenadas de tal modo que

$$W_{loc}^s(p_\mu) \subset \{\zeta = 0\} \quad \text{e} \quad W_{loc}^u(p_\mu) \subset \{Z = 0\}.$$

Assim, supondo que φ_μ já está nas coordenadas linearizantes, escrevemos

$$\varphi_\mu(\zeta, Z) = (\sigma_\mu \zeta, S_\mu(Z)), \tag{A.1}$$

onde σ_μ é o autovalor expensor de $D\varphi_\mu(p_\mu)$ e $S_\mu = D\varphi_\mu|_{E^s(p_\mu)}$.

A hipótese de dissipatividade do ponto p nos garante o seguinte:

Lema A.1. *Existe uma norma em \mathbb{R}^m tal que, para todo μ pequeno,*

$$|\sigma_\mu| \cdot \|S_\mu\| < 1.$$

Para a demonstração do lema, utilizaremos o seguinte fato encontrado em [KH95] (livro de Hasselblat-Katok, Proposição 1.2.2)

Proposição A.1 ([KH95]). *Seja $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Para todo $\delta > 0$ dado, existe uma norma $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^m tal que*

$$\|S\| < r(A) + \delta,$$

onde $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(A)\}$.

Demonstração do Lema A.1. Como $p = p_0$ é seccionalmente dissipativo e esta propriedade é aberta, para μ suficientemente pequeno temos que p_μ mantém essa propriedade. Logo, para μ bem pequeno, existe $\tilde{\delta} > 0$ para o qual

$$\max\{|\lambda_{\mu,i}| \cdot |\sigma_\mu| : \lambda_{\mu,i}, \sigma_\mu \in \text{Spec}(D\varphi_\mu(p_\mu)), 1 \leq i < m - 1\} + \tilde{\delta} < 1.$$

Seja $\delta \leq \tilde{\delta} \cdot \min\{|\sigma_\mu|^{-1}\}$. Então, pela Proposição A.1 acima, existe uma norma $\|\cdot\|_{\tilde{\delta}}$ em \mathbb{R}^{m-1} tal que

$$\|S_\mu\|_{\tilde{\delta}} \leq r(S_\mu) + \delta \leq \max_{1 \leq i < m} |\lambda_{\mu,i}| + \frac{\delta}{|\sigma_\mu|} = \left(\max_{1 \leq i < m} |\lambda_{\mu,i}| |\sigma_\mu| + \tilde{\delta} \right) \frac{1}{|\sigma_\mu|} < \frac{1}{|\sigma_\mu|};$$

ou seja, $|\sigma_\mu| \cdot \|S_\mu\|_{\tilde{\delta}} < 1$. Basta agora definirmos a norma da soma em $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ por

$$\|(\zeta, Z)\| = |\zeta| + \|Z\|_{\tilde{\delta}}.$$

□

Consideremos os pontos $q_0 = (0, Q_0) \in W_{loc}^s(p)$ e $r_0 = (\rho_0, 0) \in W_{loc}^u(p)$ pertencentes à órbita de tangência tais que, para um $N > 1$ fixado de agora em diante, tenhamos $\varphi_0^N(r_0) = q_0$.

Lema A.2. Para (μ, ζ, Z) próximo de $(0, \rho_0, 0)$, podemos expressar $\varphi_\mu^N(\zeta, Z)$ da seguinte forma

$$(v\mu + a_2Z + b(\zeta - \rho_0)^2 + b_1(\zeta - \rho_0)\mu + b_2\mu^2 + h(\mu, \zeta - \rho_0, Z), \\ Q_0 + V\mu + A_1(\zeta - \rho_0) + A_2Z + H(\mu, \zeta - \rho_0, Z)),$$

onde $v, b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R})$, $V, A_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m-1})$, $A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m-1}, \mathbb{R}^{m-1})$ e

$$Dh = 0, DH = 0, \partial_{\zeta\zeta}h = \partial_{\zeta\mu}h = \partial_{\mu\mu}h = 0 \quad \text{no ponto } (0, 0, 0). \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Para ver isso, basta expandirmos φ_μ^N em Série de Taylor em torno de $(0, \rho_0, 0)$. Denotemos, somente para facilitar a notação nesta demonstração, $\varphi^N = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-1}$. Assim,

$$\varphi_\mu^N(\mu, \zeta, Z) = \varphi_\mu^N(0, \rho_0, 0) + D\varphi_\mu^N(0, \rho_0, 0) \cdot (\mu, \zeta - \rho_0, Z) + \\ + \frac{1}{2}D^2\varphi_\mu^N(0, \rho_0, 0) \cdot (\mu, \zeta - \rho_0, Z)^2 + O(3),$$

onde $O(3)$ significa termos de ordem 3 e as derivadas são da seguinte forma:

$$D\varphi_\mu^N(0, \rho_0, 0) \cdot (\mu, \zeta - \rho_0, Z) = \begin{bmatrix} \partial_\mu f_1 & \partial_\zeta f_1 & \partial_Z f_1 \\ \partial_\mu f_2 & \partial_\zeta f_2 & \partial_Z f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \zeta - \rho_0 \\ Z \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \partial_\mu f_1 \cdot \mu + \partial_\zeta f_1 \cdot (\zeta - \rho_0) + \partial_Z f_1 \cdot Z \\ \partial_\mu f_2 \cdot \mu + \partial_\zeta f_2 \cdot (\zeta - \rho_0) + \partial_Z f_2 \cdot Z \end{bmatrix},$$

e a segunda derivada $D^2\varphi_\mu^N(0, \rho_0, 0) \cdot (\mu, \zeta - \rho_0, Z)^2$ tem sua i -ésima coordenada, $i = 1, 2$, na forma

$$\partial_{\mu\mu}f_i \cdot \mu^2 + \partial_{\mu\zeta}f_i \cdot (\zeta - \rho_0)\mu + \partial_{\mu Z}f_i \cdot Z\mu + \partial_{\zeta\mu}f_i \cdot \mu(\zeta - \rho_0) + \partial_{\zeta\zeta}f_i \cdot (\zeta - \rho_0)^2 + \\ + \partial_{\zeta Z}f_i \cdot Z(\zeta - \rho_0) + \partial_{Z\mu}f_i \cdot \mu Z + \partial_{Z\zeta}f_i \cdot (\zeta - \rho_0)Z + \partial_{ZZ}f_i \cdot Z^2$$

onde todas as derivadas parciais estão avaliadas no ponto $(0, \rho_0, 0)$.

Note também que

$$\varphi^N(0, \rho_0, 0) = \varphi_0^N(\rho_0, 0) = \varphi_0^N(r_0) = q_0 = (0, Q_0).$$

Assim, como $\varphi_0^N(r_0) = q_0$ é ponto de tangência, então ele é extremo local da aplicação $\zeta \mapsto f_1(\mu, \zeta, 0) \in W_{loc}^u(p)$, para ζ numa pequena vizinhança de r_0 em $W_{loc}^u(p)$; ou seja,

$$\partial f_1(0, \rho_0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_{\zeta\zeta}f_1(0, \rho_0, 0) \neq 0.$$

Logo, obtemos a seguinte expressão local para a primeira coordenada

$$f_1(\mu, \zeta - \rho_0, Z) = (\partial_\mu f_1)\mu + (\partial_Z f_1)Z + \left(\frac{1}{2}\partial_{\zeta\zeta}f_1\right)(\zeta - \rho_0)^2 + (\partial_{\mu\zeta}f_1)(\zeta - \rho_0)\mu + \\ + (\partial_{\mu\mu}f_1)\mu^2 + [\partial_{\mu Z}f_1 Z\mu + \partial_{\zeta Z}f_1 Z(\zeta - \rho_0) + \frac{1}{2}\partial_{ZZ}f_1 Z^2 + O(3)],$$

ou seja,

$$f_1(\mu, \zeta - \rho_0, Z) = v\mu + a_2Z + b(\zeta - \rho_0)^2 + b_1(\zeta - \rho_0)\mu + b_2\mu^2 + h(\mu, \zeta - \rho_0, Z),$$

com $v = \partial_\mu f_1$, $a_2 = \partial_Z f_1$, $b = \frac{1}{2}\partial_{\zeta\zeta} f_1$, $b_1 = \partial_{\mu\zeta} f_1$, $b_2 = \partial_{\mu\mu} f_1$ e $h(\mu, \zeta - \rho_0) = \partial_{\mu Z} f_1 Z\mu + \partial_{\zeta Z} f_1 Z(\zeta - \rho_0) + \frac{1}{2}\partial_{ZZ} f_1 Z^2 + O(3)$. Aqui, todas as derivadas parciais são avaliadas no ponto $(0, \rho_0, 0)$. Note que, diretamente da expressão de h , obtemos que

$$\begin{aligned} Dh(0, 0, 0) &= ((\partial_{\mu Z} f_1)Z, (\partial_{\zeta Z} f_1)Z, (\partial_{\mu Z} f_1)\mu + (\partial_{\zeta Z} f_1)(\zeta - \rho_0) + (\partial_{ZZ} f_1)Z) + O(2)|_{(0,0,0)} \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Além disso, obtemos diretamente desta última expressão que

$$\partial_{\zeta\zeta} h(0, 0, 0) = 0 = \partial_{\zeta\mu} h(0, 0, 0) = \partial_{\mu\mu} h(0, 0, 0).$$

Agora, a expressão local da segunda coordenada é

$$f_2(\mu, \zeta - \rho_0, Z) = Q_0 + V\mu + A_1(\zeta - \rho_0) + A_2Z + O(2),$$

com $V = \partial_\mu f_2$, $A_1 = \partial_\zeta f_2$ e $H(\mu, \zeta - \rho_0, Z) = O(2)$. Além disso,

$$DH(0, 0, 0) = O(1)|_{(0,0,0)} = (0, 0).$$

E concluímos a demonstração do lema. \square

Hipótese extra: Queremos que a tangência homoclínica seja quadrática e desdobre genericamente a família $\{\varphi_\mu\}$ (veja Observação 1.1), para isso, assumiremos que

$$b \neq 0 \quad \text{e} \quad v \neq 0. \tag{A.3}$$

Vamos introduzir, inicialmente, reparametrizações n -dependentes para o parâmetro μ , dadas por:

$$\tilde{v} := \tilde{\theta}_n(\mu) = v\sigma_\mu^{2n}\mu + a_2\sigma_\mu^{2n}S_\mu^n Q_0 - \rho_0\sigma_\mu^n. \tag{A.4}$$

Esta reparametrização fica mais intuitiva nos cálculos que aparecem mais abaixo. Fixemos um inteiro $K > 0$ grande.

Lema A.3. *Para cada $n \geq 1$ suficientemente grande, existe um intervalo $I_n = [\iota_1^{(n)}, \iota_2^{(n)}]$ no espaço \mathbb{R} dos parâmetros μ tal que $\tilde{\theta}_n|_{I_n}$ é um difeomorfismo, $\tilde{\theta}_n(I_n) = [-K, K]$, $\iota_1^{(n)} > 0$ e, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$\iota_2^{(n)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad |I_n| = \iota_2^{(n)} - \iota_1^{(n)} \rightarrow 0.$$

Demonstração. Note que podemos escrever

$$\tilde{\theta}_n(\mu) = \sigma_\mu^{2n}(v\mu + a_2S_\mu^n Q_0 - \rho_0\sigma_\mu^{-n}) = \sigma_\mu^{2n}(v\mu - \delta_n),$$

onde $\delta_n = a_2S_\mu^n Q_0 - \rho_0\sigma_\mu^{-n} > 0$. Mas como escolhemos a norma em \mathbb{R}^m tal que $\|S_\mu\| < |\sigma_\mu|^{-1}$ (ver Lema A.1), então temos que $\delta_n = O(\sigma_\mu^{-n})$.

Para que $-K \leq \tilde{\theta}_n(\mu) \leq K$, basta exigir que

$$-K \leq \sigma_\mu^{2n} [v\mu - \delta_n] \leq K \iff \frac{\delta_n}{v} - \frac{\sigma_\mu^{-2n}}{v} K \leq \mu \leq \frac{\delta_n}{v} + \frac{\sigma_\mu^{-2n}}{v} K.$$

Assim, como $0 < \delta_n = O(\sigma^{-n})$, então para n suficientemente grande temos que

$$\delta_n - \sigma_\mu^{-2n} > 0.$$

Definindo $\iota_1^{(n)} = \frac{\delta_n}{v} - \frac{\sigma_\mu^{-2n}}{v} K$ e $\iota_2^{(n)} = \frac{\delta_n}{v} + \frac{\sigma_\mu^{-2n}}{v} K$, obtemos o resultado. \square

Denotemos agora $\theta_n = (\tilde{\theta}_n|_{I_n})^{-1}$ e definamos as novas coordenadas (\tilde{x}, \tilde{Y}) , que são (n, μ) -dependentes, por

$$(\zeta, Z) = \psi_{n,\mu}(\tilde{x}, \tilde{Y}) := (\sigma_\mu^{-2n}\tilde{x} + \rho_0\sigma_\mu^{-n}, \sigma_\mu^{-n}\tilde{Y} + Q_0 + V\mu). \quad (\text{A.5})$$

Desse modo, podemos definir a aplicação, que muda simultaneamente o parâmetro e as coordenadas, $\Psi_n : [-K, K]^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dada por

$$\Psi_n(\tilde{\nu}, \tilde{x}, \tilde{Y}) = (\mu, \zeta, Z) = (\theta_n(\tilde{\nu}), \psi_{n,\mu}(\tilde{x}, \tilde{Y})).$$

Para simplificar notações, denotaremos $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M$ a aplicação dada por $\Phi(\mu, \eta) = (\mu, \varphi_\mu(\eta))$. Com essas mudanças de parâmetros e coordenadas definidas, vamos agora expressar Φ^{n+N} nas variáveis $(\tilde{\nu}, \tilde{x}, \tilde{Y})$, ou seja, $\Psi_n^{-1} \circ \Phi^{n+N} \circ \Psi_n$. Primeiro calcularemos $\Psi_n^{-1} \circ \Phi^{n+N}$ nas variáveis (μ, ζ, Z) e depois, no resultado obtido, mudamos as variáveis utilizando as seguintes relações obtidas de (A.5)

$$\begin{cases} \zeta = \sigma_\mu^{-2n}\tilde{x} + \rho_0\sigma_\mu^{-n} \\ Z = \sigma_\mu^{-n}\tilde{Y} + Q_0 + V\mu \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \tilde{x} = \sigma_\mu^{2n}\zeta - \sigma_\mu^n\rho_0 \\ \tilde{Y} = \sigma_\mu^n Z - \sigma_\mu^n Q_0 - \sigma_\mu^n V\mu. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Também utilizaremos a relação (A.4) e sua inversa

$$\mu = \frac{1}{v}(\sigma_\mu^{-2n}\tilde{\nu} - a_2 S_\mu^n Q_0 + \sigma_\mu^{-n}\rho_0). \quad (\text{A.7})$$

Utilizando (A.1) e o Lema A.2, temos que

$$\Phi^{n+N}(\mu, \zeta, Z) = \Phi^N(\mu, \sigma_\mu^n \zeta, S_\mu^n Z) = (\mu, \zeta_1, Z_1),$$

onde

$$\begin{cases} \zeta_1 = v\mu + a_2 S_\mu^n Z + b(\sigma_\mu^n \zeta - \rho_0)^2 + b_1(\sigma_\mu^n \zeta - \rho_0)\mu + b_2\mu^2 + h, \\ Z_1 = Q_0 + V\mu + A_1(\sigma_\mu^n \zeta - \rho_0) + A_2 S_\mu^n Z + H \end{cases}$$

e por simplicidade, denotamos $h = h(\mu, \sigma_\mu^n \zeta, S_\mu^n Z)$ e $H = H(\mu, \sigma_\mu^n \zeta, S_\mu^n Z)$.

Assim, calculando $\Psi_n^{-1}(\mu, \zeta_1, Z_1) = (\tilde{\nu}, \tilde{x}_1, \tilde{Y}_1)$ e depois substituindo ζ e Z utilizando as relações (A.6), obtemos que

$$\tilde{x}_1 = b\tilde{x}^2 + b_1\sigma_\mu^n \tilde{x}\mu + b_2\sigma_\mu^{2n}\mu^2 + \tilde{\nu} + a_2\sigma_\mu^n S_\mu^n(\tilde{Y} + V\sigma_\mu^n \mu) + \sigma^{2n}h \quad (\text{A.8})$$

e que

$$\tilde{Y}_1 = A_1 \tilde{x} + A_2 (S_\mu^n \tilde{Y} + \sigma_\mu^n S_\mu^n (Q_0 + V\mu)) + \sigma_\mu^n H,$$

onde h e H são avaliados na terna $(\theta_n(\nu), \sigma_\mu^{-n} \tilde{x}, S_\mu^n (\sigma_\mu^{-n} \tilde{Y} + Q_0 + V\mu))$.

Estudemos agora a convergência de certos termos das coordenadas $(\tilde{x}_1, \tilde{Y}_1)$ quando $n \rightarrow \infty$. Primeiro, note que pelo Lema A.1, temos que $|\sigma_\mu|^n \|S_\mu\|^n$ converge para 0, quando n cresce. Agora pela expressão (A.7), temos

$$\mu = \sigma_\mu^{-n} \frac{1}{v}$$

logo, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|\mu|, |x_n| \leq c_1 |\sigma_\mu|^{-n} \text{ e } \|Y_n\| \leq c_2 \|S_\mu\|^n, \quad (\text{A.9})$$

onde $x_n = \sigma_\mu^{-n} \tilde{x}$ e $Y_n = S_\mu^n (\sigma_\mu^{-n} \tilde{Y} + Q_0 + V\mu)$. Isto nos diz que quando n cresce, tanto as expressões $\sigma_\mu^{2n} h(\mu, x_n, Y_n)$ e $\sigma_\mu^{2n} H(\mu, x_n, Y_n)$ quanto suas primeiras e segundas derivadas convergem para zero, uniformemente quando $(\tilde{\nu}, \tilde{x}, \tilde{Y}) \in [-K, K]^{n+1}$.

Além disso, pela expressão A.7, obtemos

$$\sigma_\mu^n \mu = \frac{1}{v} (\sigma_\mu^{-n} \tilde{\nu} - a_2 \sigma_\mu^n S_\mu^n Q_0 + \rho_0) \longrightarrow \frac{\rho_0}{v} \quad (\text{A.10})$$

quando n vai para infinito. Note que também temos $\sigma_\mu^{2n} \mu^2 \longrightarrow \frac{\rho_0^2}{v^2}$.

Assim, as expressões de \tilde{x}_1 e \tilde{Y}_1 convergem uniformemente, quando n vai para infinito, para $b\tilde{x}^2 + b_1 \frac{\rho_0}{v} \tilde{x} + b_2 \frac{\rho_0^2}{v^2} + \tilde{\nu}$ e $A_1 \tilde{x}$, respectivamente. Ou seja, a sequência de aplicações $(\Psi_n^{-1} \circ \Phi^{n+N} \circ \Psi_n)(\tilde{\nu}, \tilde{x}, \tilde{Y})$ converge uniformemente na topologia C^2 para

$$\tilde{\chi}(\tilde{\nu}, \tilde{x}, \tilde{Y}) = \left(\tilde{\nu}, b\tilde{x}^2 + b_1 \frac{\rho_0}{v} \tilde{x} + b_2 \frac{\rho_0^2}{v^2} + \tilde{\nu}, A_1 \tilde{x} \right). \quad (\text{A.11})$$

Ainda é possível fazer mais uma mudança de parâmetro e variáveis que torne a expressão de Φ^{n+N} mais parecida com uma função quadrática da reta real. Para isso, fazemos as seguintes mudanças

$$\begin{cases} \nu = b\tilde{\nu} + \frac{b_1 \rho_0}{2v} - \frac{b_1^2 \rho_0^2}{4v^2} + \frac{bb_2 \rho_0^2}{v^2} \\ x = \tilde{x} + \frac{b_1 \rho_0}{2v} \\ Y = \tilde{Y} + A_1 \frac{b_1 \rho_0}{2vb}. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Assim, a expressão de Φ^{n+N} nas variáveis (ν, x, Y) converge na topologia C^2 para

$$\chi(\nu, x, Y) = \left(\nu, x^2 + \nu, \frac{A_1}{b} x \right). \quad (\text{A.13})$$

Se definirmos $A = \frac{A_1}{b}$, obtemos o resultado desejado.

Observação A.1. Note que se aplicarmos as mudanças de variáveis (A.12) nas expressões de \tilde{x}_1 e \tilde{Y}_1 acima, antes de fazer o limite de $n \rightarrow \infty$, obtemos a seguinte expressão para Φ^{n+N} , que denotamos por χ_n ,

$$\chi_n(\nu, x, Y) = \left(\nu, x^2 + \nu + a_2 \sigma_\mu^n S_\mu^n Y, Ax \right) + \epsilon(\nu, x, Y),$$

onde $\epsilon(\nu, x, Y) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Essa família de aplicações $\chi_n(\nu, x, Y)$ é conjugada à seguinte família de aplicações

$$H_{\nu, \beta}(x, Y) = \left(x^2 + \nu + \beta Y, Ax \right)$$

onde $\beta = a_2 \sigma_\mu^n S_\mu^n$, se n é grande.

Referências Bibliográficas

- [ABV00] José F. Alves, Christian Bonatti, and Marcelo Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, *Invent. Math.* **140** (2000), no. 2, 351–398.
- [AKM65] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew, *Topological entropy*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 309–319.
- [AR67] Ralph Abraham and Joel Robbin, *Transversal mappings and flows*, An appendix by Al Kelley, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [AT08] Vítor Araújo and Ali Tahzibi, *Physical measures at the boundary of hyperbolic maps*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **20** (2008), no. 4, 849–876.
- [BDV05] Christian Bonatti, Lorenzo J. Díaz, and Marcelo Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 102, Springer-Verlag, Berlin, 2005, A global geometric and probabilistic perspective, *Mathematical Physics*, III.
- [Bow70] Rufus Bowen, *Topological entropy and axiom A*, *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 23–41.
- [Bow08] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, revised ed., *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 2008, With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes.
- [BP02] Luis Barreira and Yakov B. Pesin, *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, *University Lecture Series*, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

- [BV00] Christian Bonatti and Marcelo Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting*, Israel J. Math. **115** (2000), 157–193.
- [Cro08] Sylvain Crovisier, *Partial hyperbolicity far from homoclinic bifurcations*, Preprint (2008).
- [FHY83] A. Fathi, M.-R. Herman, and J.-C. Yoccoz, *A proof of Pesin's stable manifold theorem*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 177–215.
- [Gan59] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices. Vols. 1, 2*, Translated by K. A. Hirsch, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.
- [Har64] Philip Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- [HSX08] Yongxia Hua, Radu Saghin, and Zhihong Xia, *Topological entropy and partially hyperbolic diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **28** (2008), no. 3, 843–862.
- [Kat84] Anatole Katok, *Nonuniform hyperbolicity and structure of smooth dynamical systems*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983) (Warsaw), PWN, 1984, pp. 1245–1253.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [LY85] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 3, 540–574.
- [Mis71] M. Misiurewicz, *On non-continuity of topological entropy*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **19** (1971), 319–320.
- [MY01] Carlos Gustavo T. Moreira and Jean-Christophe Yoccoz, *Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions*, Ann. of Math. (2) **154** (2001), no. 1, 45–96.
- [New74] Sheldon E. Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology **13** (1974), 9–18.
- [New78] S. E. Newhouse, *Topological entropy and Hausdorff dimension for area preserving diffeomorphisms of surfaces*, Dynamical systems, Vol. III—Warsaw, Soc. Math. France, Paris, 1978, pp. 323–334. Astérisque, No. 51.

- [New79] Sheldon E. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1979), no. 50, 101–151.
- [New80] ———, *Lectures on dynamical systems*, Dynamical systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978), Progr. Math., vol. 8, Birkhäuser Boston, Mass., 1980, pp. 1–114.
- [New04] ———, *New phenomena associated with homoclinic tangencies*, Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2004), no. 5, 1725–1738.
- [NPT83] S. Newhouse, J. Palis, and F. Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1983), no. 57, 5–71.
- [Pes76] Ja. B. Pesin, *Characteristic Ljapunov exponents, and ergodic properties of smooth dynamical systems with invariant measure*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **226** (1976), no. 4, 774–777.
- [Pol93] Mark Pollicott, *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 180, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [PS82] Ya. B. Pesin and Ya. G. Sinaï, *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors*, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982), no. 3-4, 417–438 (1983).
- [PS89] Charles Pugh and Michael Shub, *Ergodic attractors*, Trans. Amer. Math. Soc. **312** (1989), no. 1, 1–54.
- [PS00a] Enrique R. Pujals and Martín Sambarino, *Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 3, 961–1023.
- [PS00b] ———, *On homoclinic tangencies, hyperbolicity, creation of homoclinic orbits and variation of entropy*, Nonlinearity **13** (2000), no. 3, 921–926.
- [PT93] Jacob Palis and Floris Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Fractal dimensions and infinitely many attractors.
- [Puj08] Enrique R. Pujals, *Density of hyperbolicity and homoclinic bifurcations for attracting topologically hyperbolic sets*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **20** (2008), no. 2, 335–405.
- [PV94] J. Palis and M. Viana, *High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 1, 207–250.

- [PY01] Jacob Palis and Jean-Christophe Yoccoz, *Fers à cheval non uniformément hyperboliques engendrés par une bifurcation homocline et densité nulle des attracteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 9, 867–871.
- [Rob71] J. W. Robbin, *Stable manifolds of semi-hyperbolic fixed points*, Illinois J. Math. **15** (1971), 595–609.
- [Rob99] C. Robinson, *Dynamical systems*, second ed., Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, Stability, symbolic dynamics, and chaos.
- [Roh52] V. A. Rohlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Amer. Math. Soc. Translation **1952** (1952), no. 71, 55.
- [Rom95] Neptalí Romero, *Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (1995), no. 4, 735–757.
- [Shu78] Michael Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, vol. 56, Société Mathématique de France, Paris, 1978, With an English preface and summary.
- [Sma67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.
- [Tsu91] Masato Tsujii, *Regular points for ergodic Sinai measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), no. 2, 747–766.
- [Wen04] Lan Wen, *Generic diffeomorphisms away from homoclinic tangencies and heterodimensional cycles*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **35** (2004), no. 3, 419–452.
- [Yom87] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), no. 3, 285–300.

