SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP
Data de Depósito: 15/01/2010
Assinatura:______________________

Multiplicidade de soluções positivas para uma equação de Schrödinger não linear

Moreno Pereira Bonutti[1]

Orientador: *Sérgio Henrique Monari Soares*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Janeiro/2010

[1]Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

“Um raciocínio lógico leva você de A a B. Imaginação leva você a qualquer lugar que você quiser.”

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força para enfrentar essa jornada. Agradeço ao meu orientador Sérgio Henrique Monari Soares, um professor muito sábio e inteligente, pelos ótimos conselhos e pela imensa paciência. Sem a ajuda do professor não teria conseguido vencer esse desafio.

Obrigado a CAPES pelo financiamento dos meus estudos.

Agradeço também aos meu amigos de mestrado que me ajudaram muito durante todo o desenvolvimento deste trabalho, agradeço muito ao Matheus C. Bortolan e a Juliana T. de Lima por serem meus amigos de todas as horas e meus professores, nas intermináveis horas de estudo. Agradeço também ao meu amigo Rafael Rossato, que sempre arrumava um tempo e "matava" horas de estudos para conversar sobre qualquer assunto que não fosse a matemática.

Não posso esquecer dos meus grandes amigos da República Infiltrados, Mosquito, Nando, Farofa, Caxa e Léo que me hospedaram e me ajudaram a descontrair com muitos churrascos e sambas.

Agradeço a Nathalia Rossetti, minha grande companheira e meu grande amor, por ter me ajudado em todas as horas difíceis sem ela eu não conseguiria realizar este trabalho. Obrigado por me fazer feliz.

Por fim sou grato a minha família por ter me dado uma ótima educação e ter me ajudado a manter os meus estudos. Vocês são muito importantes na minha vida.

A todos vocês, muitíssimo obrigado!!!

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo da existência de soluções da equação de Schrödinger

$$-\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u = u^p, \quad u > 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \qquad (*)$$

onde $a \geq 0$ é uma função contínua e $p > 1$ é um expoente subcrítico. Métodos Variacionais são empregados para mostrar a existência de uma sequência $\lambda_n \to +\infty$ e da respectiva sequência de soluções u_{λ_n} convergindo para uma solução de energia mínima do problema de Dirichlet

$$-\Delta u + u = u^p, \quad u > 0 \text{em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

sendo $\Omega := \operatorname{int} a^{-1}(0)$. Além disso, estuda-se o efeito da topologia do conjunto Ω sobre o número de soluções da equação $(*)$ por meio da categoria de Lusternik e Schnirelman.

Abstract

This work is devoted to study the existence of positive solutions of the Schrödinger equation

$$-\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u = u^p, \quad u > 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{$*$}$$

where a is a nonnegative and continuous function and $p > 1$ is a subcritical exponent. Variational methods are employed in order to show the existence of a sequence $\lambda_n \to +\infty$ and the respective sequence of solutions converging in $H^1(\mathbb{R}^N)$ to a least energy solution of the Dirichlet problem

$$-\Delta u + u = u^p, \quad u > 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

where $\Omega := \operatorname{int} a^{-1}(0)$. Furthermore, it is studied the effect of the topology of the set Ω on the number of positive solutions of the equation $(*)$ by using the Lusternik and Schnirelman category.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho temos como objetivo estudar a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte equação de Schöndinger não linear:

$$-\Delta u+(\lambda a(x)+1)u=u^p,\ \ u>0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{$\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$}$$

As soluções positivas que encontraremos dependerão de λ, p e do potencial $b_\lambda(x)=\lambda a(x)+1$. Iremos trabalhar com $N\geqslant 3$ e com o problema subcrítico, isto é, $1<p<2^*-1$, sendo $2^*=2N/(N-2), N\geq 3$. O potencial b_λ satisfaz as seguintes hipóteses:

(A1) $a\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, satisfaz $a\geqslant 0$ e $\Omega:=int\{a^{-1}(0)\}$ é não vazio com fronteira suave, com $\overline{\Omega}=a^{-1}(0)$.

(A2) Existe $M_0>0$ tal que

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^N : a(x)\leqslant M_0\})<\infty,$$

onde μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$

Para descrever os resultados principais que serão aqui abordados, considere o funcional

$$\Phi_{\lambda.p}(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u|^2+(\lambda a(x)+1)u^2]\,dx-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}\,dx$$

Associado à equação ($\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$), o qual está definido em

$$E=\{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\ :\ \int_{\mathbb{R}^N}a(x)u^2\,dx<+\infty\}.$$

Defina a variedade de Nehari

$$M_{\lambda,p} = \left\{ u \in E\backslash\{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right\}$$

e seja

$$c_{\lambda,p} = \inf_{u \in M_{\lambda,p}} \Phi_{\lambda,p}(u).$$

Em [BW00], Bartsch e Wang provaram os seguintes teoremas:

Teorema 1.0.1. *Suponha que as hipóteses* **(A1)** *e* **(A2)** *estão satisfeitas. Então para λ suficientemente grande, o ínfimo é atingido, e assim* ($\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$) *possui uma solução de menor energia $u_{\lambda,p}$ correspondente ao nível $c_{\lambda,p}$. Além disso, qualquer sequência $\lambda_n \to +\infty$ possui uma subsequência tal que u_{λ_n} converge em $H^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de uma subsequência, para uma solução de menor energia do problema de Dirichlet,*

$$-\Delta u + u = u^p, \ \ u > 0 \ \ em \ \Omega. \tag{Dp}$$

O próximo resultado mostra o efeito da topologia de Ω sobre o número de soluções positivas de ($\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$).

Teorema 1.0.2. *Suponha que* **(A1)** *e* **(A2)** *estão satisfeitas e Ω é limitado. Então existem $p_0 < 2^* - 1$ e uma função $\Lambda : (p_0, 2^* - 1) \to \mathbb{R}$ tal que* ($\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$) *possui pelo menos $cat(\Omega)$*[1] *soluções distintas para todo $\lambda \geqslant \Lambda(p)$.*

Como no caso de soluções de energia mínima, as soluções obtidas pelo teorema anterior convergem para uma solução de energia mínima de (Dp).

Teorema 1.0.3. *Suponha que* **(A1)** *e* **(A2)** *estão satisfeitas. Seja u_n uma sequência de soluções de* ($\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$)*, com $\lambda_n \to +\infty$ e $\limsup_{n\to+\infty} \Phi_{\lambda_n,p}(u_n) < \infty$. Então, a menos de uma subsequência, u_n converge fortemente, em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para uma solução de* (Dp)*.*

Há vários trabalhos que estudam a existência de soluções positivas para problemas relacionados à equação ($\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}}$). Por exemplo, em [AdMFS09], Alves *et all* estudaram o caso com crescimento crítico para o seguinte problema

$$-\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = \beta u^q + u^{2^*-1}, \text{ para } u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $\lambda, \beta \in (0, +\infty)$, $q \in (1, 2^* - 1)$, $N \geqslant 3$ e $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo algumas hipóteses.

[1] Aqui $cat(\Omega)$ denota a categoria de Lusternik-Schnirelmann do conjunto Ω. Veja Apêndice C.

Em [AS08] Alves e Souto também realizaram o estudo das soluções positivas com crescimento crítico exponencial no caso $N = \mathbb{R}^2$ para a classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = f(u), & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

onde f é de classe C^1 com crescimento exponencial crítico, $\lambda \in (1, +\infty)$,$V,\ Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com $V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $\Omega = intV^{-1}(0)$ possui k componentes conexas denotadas por $\Omega_j,\ j \in \{1, 2, \dots k\}$, $V^{-1}(\{0\} = \overline{\Omega}$ e $\partial\Omega$ é suave.

Outro trabalho interessante é [dD02], no qual De Figueiredo e Ding estudaram a existência e a multiplicidade das soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + a_0(x))u = g(x, u) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

para o caso subcrítico e estudaram a existência e a multiplicidade de soluções do problema com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + a_0(x))u = K(x)|u|^{2^*-2}u + g(x, u) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Em [DS07], Ding e Szulkin estudaram a existência de soluções para a equação de Schrödinger semilinear

$$-\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = g(x, u),$$

com $\epsilon > o$ pequeno e

$$-\Delta u + \lambda V(x)u = g(x, u),$$

com $\lambda > 0$ grande, onde o potencial V pode mudar de sinal.

Em [CW07], Chabrowski e Wang estudaram a existência de soluções do seguinte problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = Q(x)|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega^c \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega,\ u > 0 \text{ em } \Omega^c. \end{cases}$$

Neste trabalho, motivados por [BW00], apresentaremos as demonstrações dos teoremas 1.0.1 - 1.0.3. Para tanto, dividimos este trabalho em um capítulo e três apêndices. O Capítulo 2 é reservado para estudar a condição de compacidade do funcional associado ao problema $(\mathrm{S}_{\lambda,\mathrm{p}})$ e provar os resultados principais deste trabalho seguindo os argumentos de Bartsch e Wang [BW00].

Capítulo

2

Múltiplas soluções positivas para a equação de Schrödinger não linear

2.1 Condição de compacidade do funcional

Nesta seção, consideraremos uma condição de compacidade para o funcional associado à equação

$$\Delta u + (\lambda a(x) + 1)u = f(x, u) \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{S$_\lambda$}$$

No que segue, admitiremos que a função $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes hipóteses:

(A3) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $f(x, u) = o(|u|)$ quando $u \to 0$ uniformemente em x;

(A4) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ *e* $1 < s < 2^* - 1$ tais que

$$|f(x, u)| \leqslant a_1(1 + |u|^s) \text{ e } |f'(x, u)| \leqslant a_2(1 + |u|^{s-1}) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R};$$

(A5) Existe $q > 2$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, temos

$$0 < qF(x, u) \equiv q \int_0^u f(x, v)dv \leqslant uf(x, u).$$

Consideremos o conjunto $E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 \, dx < \infty \right\}$ munido da norma

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2)dx \text{ para } \lambda \geqslant 0.$$

Observemos que as normas $\|\cdot\|_\lambda$ para $\lambda \geqslant 0$ são equivalentes em E e sabemos que as soluções de (S_λ) são pontos críticos do funcional $\Phi_\lambda : E \to \mathbb{R}$, onde

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx.$$

Observe também que por **(A3)** e **(A4)** o funcional Φ_λ está bem definido e $\Phi_\lambda \in C^1(E,\mathbb{R})$ para todo $\lambda \geqslant 0$ (ver (A.0.15), (A.0.18) e (A.0.19) no Apêndice A).

A seguir enunciaremos o principal resultado desta seção.

Proposição 2.1.1. *Suponha que as hipóteses* **(A1)-(A5)** *estejam satisfeitas. Então para todo $C_0 > 0$ existe $\Lambda_0 > 0$ tal que Φ_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $\lambda \geqslant \Lambda_0$ e para todo $c \leqslant C_0$.*

A fim de provarmos a Proposição 2.1.1, demonstraremos alguns lemas.

Lema 2.1.2. *Seja K_λ o conjunto formado pelos pontos críticos de Φ_λ. Então existe $\sigma > 0$ (independente de λ) tal que $\|u\|_\lambda \geqslant \|u\|_{H^1} \geqslant \sigma$ para todo $u \in K_\lambda \backslash \{0\}$.*

Demonstração: da hipótese **(A3)**, dado $\epsilon > 0$, existe $u_0 = u_0(\epsilon)$ tal que $|u| < u_0$. Então

$$|f(x,u)| \leqslant \epsilon |u|$$

e portanto

$$|f(x,u)u| \leqslant \epsilon |u|^2.$$

Por **(A4)**, para todo $|u| \geqslant u_0$,

$$f(x,u)u \leqslant a_1 \left(\frac{1}{|u|^s} + 1\right) |u|^{s+1} \leqslant a_1 \left(\frac{1}{u_0^s} + 1\right) |u|^{s+1}.$$

Denotando $A(\epsilon) = a_1 \left(\frac{1}{u_0^s} + 1\right)$, segue que

$$f(x,u) \leqslant \epsilon u^2 + A(\epsilon)|u|^{s+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,\ u \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Por fim, para $u \in K_\lambda \backslash \{0\}$ temos $\Phi_\lambda'(u)(u) = 0$, ou seja,

$$0 = \Phi_\lambda'(u)(u) = \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)udx \geqslant \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (\epsilon|u|^2 + A(\epsilon)|u|^{s+1})dx.$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\epsilon|u|^2 + A(\epsilon)|u|^{s+1})dx = \epsilon\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + A(\epsilon)\|u\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Usando as imersões de Sobolev

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \|u\|^2_\lambda - \epsilon\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - A(\epsilon)\|u\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)} \\ &\geqslant \|u\|^2_\lambda - C\left[\epsilon\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} + A(\epsilon)\|u\|^{s+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right] \\ &\geqslant \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - C\epsilon\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} - CA(\epsilon)\|u\|^{s+1}_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

uma vez que $\|u\|^2_\lambda \geqslant \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Assim

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}\left(1 - C\epsilon - K\|u\|^{s-1}_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right) \leqslant 0, \text{ onde } K = CA(\epsilon).$$

Ainda, como $\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geqslant 0$,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \geqslant \left(\frac{1 - C\epsilon}{K}\right)^{\frac{1}{s-1}} \doteq \sigma.$$

■

Lema 2.1.3. *Existe uma constante $c_0 > 0$, independente de λ, tal que se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ, então*

(i) $\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|^2_\lambda \leqslant \dfrac{2qc}{q-2}$;

(ii) $c \geqslant c_0$ *ou* $c = 0$.

Demonstração: de $\Phi'_\lambda(u_n) \to 0$ e $\Phi_\lambda(u_n) \to c$ segue que para $\epsilon > 0$ dado, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e constante $C > 0$ tal que

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{q}\Phi'_\lambda(u_n)(u_n) \leqslant c + \epsilon + C\|u_n\|_\lambda.$$

Por outro lado, por **(A5)**,

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{q}\Phi'_\lambda(u_n)(u_n) &= \frac{q-2}{2q}\|u_n\|^2_\lambda + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{q}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx \\ &\geqslant \frac{q-2}{2q}\|u_n\|^2_\lambda. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto,

$$\frac{q-2}{2q}\|u_n\|^2_\lambda \leqslant c + \epsilon + C\|u_n\|_\lambda, \text{ para todo } n \geqslant n_0;$$

logo, (u_n) é limitado em E. Mais ainda, por (2.2) encontramos

$$\frac{q-2}{2q}\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{q}\Phi'_\lambda(u_n)(u_n) \leqslant \Phi_\lambda(u_n) + \frac{1}{q}\|\Phi'_\lambda(u_n)\|\|u_n\|_\lambda.$$

Portanto da limitação de (u_n) em E e de $\Phi_\lambda(u_n) \to c$ segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \frac{2qc}{q-2}.$$

Agora, por **(A3)**-**(A5)** existe $C > 0$ independente de $\lambda \geqslant 0$ tal que

$$\Phi'_\lambda(u)(u) = \|u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)u dx \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - C\|u\|_\lambda^{s+1} = (\frac{1}{2} - C\|u\|_\lambda^{s-1})\|u\|_\lambda^2.$$

Como $1 < s < 2^* - 1$, existe $\sigma_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2 \leqslant \Phi'_\lambda(u)(u) \text{ para } \|u\|_\lambda < \sigma_1. \tag{2.3}$$

Além disso, se $c < \sigma_1^2 \frac{q-2}{2q}$ e (u_n) é $(PS)_c$ para Φ_λ, então

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \frac{2qc}{q-2} < \sigma_1^2.$$

Assim, $\|u_n\|_\lambda < \sigma_1$ para n grande. Então por (2.3),

$$\frac{1}{4}\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \Phi'_\lambda(u_n)(u_n) = o(1)\|u_n\|_\lambda,$$

o que implica $\|u_n\|_\lambda \to 0$ quando $n \to +\infty$. Portanto $\Phi(u_n) \to 0$, isto é, $c = 0$. Logo, $c_0 = \frac{\sigma_1^2(q-2)}{2q}$. ∎

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada também em [BW95].

Lema 2.1.4. *Existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer sequência (u_n) que é $(PS)_c$ de Φ_λ com $\lambda > 0$ e c>0, temos*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)}^{s+1} \geqslant \delta_0 c.$$

Demonstração: do Lema 2.1.3 sabemos

$$\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \frac{2q}{q-2}c + o(1) \text{ quando } n \to +\infty. \tag{2.4}$$

Agora, do Lema 2.1.2, da hipótese **(A3)** e da hipótese **(A4)**, para todo $\epsilon > 0$, existe $A(\epsilon) > 0$ tal que $f(x,u)u \leqslant \epsilon|u|^2 + A(\epsilon)|u|^{s+1}$, ou seja,

$$\frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,u) \leqslant \epsilon|u|^2 + A(\epsilon)|u|^{s+1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{R}$. Usando que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ e (2.1),

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to+\infty}\left(\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\Phi'_\lambda(u_n)(u_n)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx \\ &\leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\epsilon|u_n|^2 + A(\epsilon)|u_n|^{s+1})dx \\ &\leqslant \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{2q\epsilon}{q-2}c + A(\epsilon)\|u_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)}\right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{q-2}{4q}$ temos

$$\liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)} \geqslant \frac{1}{2A(\epsilon)}c.$$

Tomando $\delta_0 := \frac{1}{2A(\epsilon)}$, temos

$$\liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)} \geqslant \delta_0 c.$$

■

Lema 2.1.5. *Seja $C_1 > 0$ uma constante fixada. Então para todo $\epsilon > 0$, existem $\Lambda_\epsilon > 0$ e $R_\epsilon > 0$ tal que se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ com $c \leqslant C_1$ e $\lambda \geqslant \Lambda_\epsilon$, então*

$$\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})} \leqslant \epsilon,$$

onde,

$$B^c_{R_\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R_\epsilon\}.$$

Demonstração: para $R > 0$ dado, consideremos os seguintes conjuntos:

$$A_1(R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R,\ a(x) \geqslant M_0\},$$

$$A_2(R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R,\ a(x) \leqslant M_0\},$$

onde M_0 é dado por (A_2). Usando a desigualdade de interpolação de Hölder para $2 < s+1 < 2^*$,

$$|u_n|_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})} \leqslant |u_n|^{1-\theta}_{L^2(B^c_{R_\epsilon})}|u_n|^{\theta}_{L^{2^*}(B^c_{R_\epsilon})}.$$

Pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg,

$$|u_n|_{L^{2^*}(B^c_R)} \leqslant C|\nabla u_n|_{L^2(B^c_{R_\epsilon})}.$$

Logo,

$$\int_{B^c_{R_\epsilon}} |u_n|^{s+1} dx \leqslant C |u_n|^{1-\theta}_{L^2(B^c_{R_\epsilon})} |\nabla u_n|^{\theta}_{L^2(B^c_{R_\epsilon})}.$$

Escolhendo $\theta = \frac{N(s-1)}{2(s+1)}$ e usando o Lema 2.1.3 resulta que a menos de subsequência temos

$$\int_{B^c_{R\epsilon}} |u_n|^{s+1} dx \leqslant C \left(\frac{2q}{q-2} C_1 \right)^{\theta(s+1)} \left(\int_{A_1(R\epsilon)} u_n^2 dx + \int_{A_2(R\epsilon)} u_n^2 dx \right)^{\frac{(1-\theta)(s+1)}{2}}.$$

Analisaremos agora as integrais $\displaystyle\int_{A_1(R\epsilon)} u_n^2 dx$ e $\displaystyle\int_{A_2(R\epsilon)} u_n^2 dx$.

Do Lema 2.1.3,

$$\begin{aligned} \int_{A_1(R\epsilon)} u_n^2 dx &\leqslant \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) u_n^2 dx \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \|u_n\|^2_\lambda \leqslant \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \left(\frac{2qC_1}{q-2} + o(1) \right), \text{ quando } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 2.1.3 e usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{A_2(R\epsilon)} u_n^2 dx &\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2r} dx \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{A_2(R\epsilon)} dx \right]^{\frac{1}{r'}} \\ &\leqslant C \|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \mu(A_2(R))^{\frac{1}{r'}} \\ &\leqslant C \|u_n\|^2_\lambda \mu(A_2(R\epsilon))^{\frac{1}{r'}} \\ &\leqslant C \frac{2qC_1}{q-2} \mu(A_2(R\epsilon))^{\frac{1}{r'}}, \end{aligned}$$

para $1 < r < \frac{N}{N-2}$ e $r' = \frac{r}{r-1}$, onde $C = C(N, r)$ é uma constante positiva. Como $\displaystyle\int_{A_1(R\epsilon)} u_n^2 dx$ e $\displaystyle\int_{A_2(R\epsilon)} u_n^2 dx$ podem ser tão pequenos quanto se queira desde que $A_1(R\epsilon)$, λ e $R\epsilon$ sejam respectivamente suficientemente grandes, então desde que λ seja suficientemente grande

$$\int_{B^c_{R_\epsilon}} |u_n|^{s+1} dx \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, $\displaystyle\limsup_{n \to +\infty} \|u_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})} < \epsilon.$ ∎

Lema 2.1.6. *Seja $\lambda \geqslant 0$ fixado e seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ. Então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em E, com u sendo uma solução fraca de $(S_{\lambda u})$. Além disso, $v_n = u_n - u$ é uma sequência $(PS)_{c'}$, com $c' = c - \Phi_\lambda(u)$.*

Demonstração: primeiramente observe que pelo Lema 2.3, (u_n) é uma sequência limitada em E. Então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E, quando

$n \to +\infty$. Vamos mostrar que u é um ponto crítico de Φ_λ. Como u_n é uma sequência limitada e converge fraco para u temos:

$$u_n \to u \ em \ L^p_{Loc}(\mathbb{R}^N), \ para \ todo \ 2 \leqslant p < 2^*. \tag{2.5}$$

Portanto, para todo $w \in E$ temos

$$\Phi'_\lambda(u)(w) = \lim_{n\to+\infty} \Phi'_\lambda(u_n)(w) = 0,$$

pois (u_n) é uma sequência $(PS)_c$. Portanto u é um ponto crítico de Φ_λ, ou seja, u é uma solução fraca de (S_λ). Vamos agora mostrar que $v_n = u_n - u$ é uma sequência $(PS)_{c'}$, com $c' = c - \Phi_\lambda(u)$, isto é,

- $\Phi_\lambda(v_n) \to c - \Phi_\lambda(u), \ n \to +\infty$
- $\Phi'_\lambda(v_n) \to 0, \ n \to +\infty$

Primeiramente, vamos mostrar que, $\Phi_\lambda(v_n) \to c - \Phi_\lambda(u)$, quando $n \to +\infty$. Como

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(v_n) &= \Phi_\lambda(u_n) - \Phi_\lambda(u) - \langle v_n, u\rangle_E \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, v_n + u) - F(x, v_n) - F(x, u)]\, dx\end{aligned} \tag{2.6}$$

e $\langle v_n, u\rangle_E \to 0$, quando $n \to +\infty$, então basta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [F(x, v_n + u) - F(x, v_n) - F(x, u)]\, dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Dado $\epsilon > 0$, escolha $R(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_{B^c_{R(\epsilon)}} |u|^{s+1} dx \leqslant \epsilon \quad \text{e} \quad \int_{B^c_{R(\epsilon)}} |u|^2 dx \leqslant \epsilon, \tag{2.7}$$

onde $B^c_{R(\epsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geqslant R(\epsilon)\}$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_{B^c_{R(\epsilon)}} |F(v_n + u)| - |F(v_n)| dx &\leqslant \int_{B^c_{R(\epsilon)}} |f(v_n + \xi(x, n)u)||u| dx \\ &\leqslant C \int_{B^c_{R(\epsilon)}} (|v_n| + |u| + (|v_n| + |u|)^s)|u| dx \\ &\leqslant C\|v_n\|_{L^2(B^c_{R(\epsilon)})}\|u\|_{L^2(B^c_{R(\epsilon)})} + C\|u\|^2_{L^2(B^c_{R(\epsilon)})} \\ &\quad + C\left[\int_{B^c_{R(\epsilon)}} (|v_n| + |u|)^{s+1} dx\right]^{\frac{s}{s+1}} \left[\int_{B^c_{R(\epsilon)}} |u|^{s+1} dx\right]^{\frac{1}{s+1}} \\ &= o(\epsilon^{\frac{1}{s+1}}),\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$ uniformemente em n, com C sendo independente de n. Por outro lado, usando a compacidade das imersões de Sobolev temos

$$\int_{B_{R_\epsilon}} |F(x, v_n + u) - F(x, v_n) - F(x, u)|\, dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty. \tag{2.8}$$

Usando (2.5) e (2.8), segue que

$$\Phi_\lambda(v_n) \to c - \Phi_\lambda(u).$$

Por fim, vamos mostrar que $\Phi'_\lambda(v_n) \to 0$. Seja $w \in E$, então de (2.6) temos

$$\Phi'_\lambda(v_n)(w) = \Phi'_\lambda(u_n)(w) - \int_{\mathbb{R}^N} [(f(x, v_n) + f(x, u_n) + f(x, u))w]\, dx.$$

Como $\Phi'_\lambda(u_n) \to 0$ temos que mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x, v_n) - f(x, u_n) + f(x, u))w dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Dado $\epsilon > 0$, escolha $R(\epsilon) > 0$, como em (2.7), para obter

$$\int_{B^c_{R(\epsilon)}} |f(x, u)w| dx \leqslant C \int_{B^c_{R(\epsilon)}} (|u| + |u|^s)|w| dx \leqslant C\sqrt{\epsilon}\|w\|_\lambda + C\epsilon^{\frac{1}{s+1}}\|w\|_\lambda.$$

Além disso, dado $x \in B^c_{R(\epsilon)}$, para algum $0 \leq \xi(x) \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{B^c_{R(\epsilon)}} |f(x, v_n) - f(x, v_n + u)||w| dx &\leqslant \int_{B^c_{R(\epsilon)}} |f'(x, v_n + \xi u)||u||w| dx \\
&\leqslant C \int_{B^c_{R(\epsilon)}} (1 + (|v_n| + |u|^{s-1}))|u||w| dx \\
&\leqslant C\|u\|_{L^2(B^c_{R(\epsilon)})}\|w\|_\lambda + C\|w\|_\lambda\|u\|_{L^{s+1}(B^c_{R(\epsilon)})} \\
&= o(\sqrt{\epsilon}) + o(\epsilon^{\frac{1}{s+1}})\|w\|_\lambda.
\end{aligned}$$

Usando (2.5) temos $\Phi'_\lambda(v_n) \to 0$. Logo, $v_n = u_n - u$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ de Φ_λ, onde $c' = c - \Phi\lambda(u)$. ∎

Agora, depois de provarmos esses lemas podemos finalmente demonstrar o principal resultado desta seção.

Demonstração da Proposição 2.1.1: fixe $0 < \epsilon < \frac{\delta_0 c_0}{2}$, onde $c_0 > 0$ é dado pelo Lema 2.1.3 e δ_0 pelo Lema 2.1.4. Então dado $C_0 > 0$, escolha $\Lambda_\epsilon > 0$ e $R_\epsilon > 0$ como no Lema 2.1.5. Tome $\Lambda_0 = \Lambda_\epsilon$. Considere (u_n) uma sequência $(PS)_c$ de Φ_λ, com $\lambda \geqslant \Lambda_0$ e $c \leqslant C_0$. Pelo Lema 2.1.6, $v_n = u_n - u$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ de Φ_λ, com $c' = c - \Phi_\lambda(u)$.

Se $c' > 0$, então pelo Lema 2.1.3 temos $c' \geqslant c_0 > 0$. Do Lema 2.1.4, (v_n) satisfaz

$$\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)} \geqslant \delta_0 c' \geqslant \delta_0 c_0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\delta_0 c_0 \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)} &= \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B_{R_\epsilon})} + \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})} \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})},\end{aligned} \tag{2.9}$$

pois $\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B_{R_\epsilon})} = 0$. Usando o Lema 2.1.5 temos

$$\limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{s+1}_{L^{s+1}(B^c_{R_\epsilon})} \leqslant \epsilon < \frac{\delta_0 c_0}{2}. \tag{2.10}$$

Logo, de (2.9) e (2.10) temos

$$\delta_0 c_0 < \frac{\delta_0 c_0}{2}$$

O que é uma contradição. Portanto $c' = 0$ e daí, $v_n \to 0$, ou seja, $u_n \to u$ e $\Phi_\lambda(u) = c$. Logo, Φ_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \leqslant C_0$. ∎

2.2 Prova dos Resultados Principais

Nesta seção demonstraremos os principais resultados deste trabalho. Primeiramente dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado com fronteira suave, consideremos o problema de Dirichlet,

$$-\Delta u + u = u^p, \quad u > 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{Dp}$$

e a variedade de Nehari correspondente,

$$N(p,\Omega) = \left\{ u \in H^1_0(\Omega)\backslash\{0\} : \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx = \int_\Omega |u|^{p+1} dx \right\}.$$

Considere também

$$c(p,\Omega) = \inf_{u\in N(p,\Omega)} \Phi_{p,\Omega}(u),$$

onde

$$\Phi_{p,\Omega}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx, \text{ para } u \in H^1_0(\Omega)$$

e

$$m(p,\lambda,\Omega) = \inf_{u\in V_p} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx,$$

onde

$$V_p = V_p(\Omega) \doteq \left\{ u \in H^1_0(\Omega) : \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Pela Proposição A.0.15 do Apêndice A, o funcional $\Phi_{p,\Omega}$ está bem definido em $H_0^1(\Omega)$ e é de classe C^1. Além disso, para $r>0$ fixemos $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$ e definimos

$$c(p,r) := c(p, B_r).$$

Para $u \in N(p,\Omega)$ vamos definir o centro de massa de u.

Definição 2.2.1. *Seja $u \in N(p,\Omega)$. O centro de massa de u é dada por:*

$$\beta(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |u|^{p+1} x dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^{p+1} dx}.$$

Novamente, a fim de demonstrarmos os principais resultados deste trabalho, provaremos alguns lemas.

Lema 2.2.2. *$c(p,\Omega) \to \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, quando $p \to 2^* - 1$, onde $S \doteq m(2^*, \lambda, \Omega)$.*

Para provarmos o lema acima, demonstraremos duas proposições.

Proposição 2.2.3. *$c(p,\Omega) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left(m(p,\lambda,\Omega)\right)^{\frac{p+1}{p-1}}$.*

Demonstração: a prova será feita em dois passos (i) a (ii) a seguir:

(i) $c(p,\Omega) \leqslant \frac{p-1}{2(p+1)} \left(m(p,\lambda,\Omega)\right)^{\frac{p+1}{p-1}}$.

Seja $u \in V_p$, assim

$$\Phi_{p,\Omega}(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}.$$

Considere $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{t}u \in N(p,\Omega)$, daí

$$\bar{t}\|u\|^2 - \bar{t}^p \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} = 0,$$

implicando

$$\bar{t} = \left(\frac{\|u\|^2}{\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \|u\|^{\frac{2}{p-1}}, \quad \text{pois} \quad \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} = 1.$$

Logo,

$$\Phi_{p,\Omega}\left(\|u\|^{\frac{2}{p-1}} u\right) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left\| \|u\|^{\frac{2}{p-1}} u \right\|^2 = \frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|^{\frac{2(p+1)}{p-1}}.$$

Como $c(p,\Omega) = \inf\limits_{u \in N(p,\Omega)} \Phi_{p,\Omega}(u)$, então

$$\left(\frac{2(p+1)}{p-1} c(p,\Omega)\right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leqslant \left(\frac{2(p+1)}{p-1} \Phi_{p,\Omega}\left(\|u\|^{\frac{2}{p-1}} u\right)\right)^{\frac{p-1}{p+1}}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{2(p+1)}{p-1}c(p,\Omega)\right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leqslant \|u\|^2, \text{ para todo } u \in V_p.$$

Assim,

$$\left(\frac{2(p+1)}{p-1}c(p,\Omega)\right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leqslant m(p,\lambda,\Omega),$$

isto é,

$$c(p,\Omega) \leqslant \frac{p-1}{2(p+1)} m(p,\lambda,\Omega)^{\frac{p+1}{p-1}}$$

(ii) $c(p,\Omega) \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)} m(p,\lambda,\Omega)^{\frac{p+1}{p-1}}$.

Seja $u \in N(p,\Omega)$. Observe que para $u \in N(p,\Omega)$, temos $\dfrac{u}{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}} \in V_p$. Assim,

$$\left\|\frac{u}{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}}\right\| = \frac{\|u\|}{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}} = \frac{\|u\|}{\|u\|^{\frac{2}{p+1}}} = \|u\|^{1-\frac{2}{p+1}} = \|u\|^{\frac{p-1}{p+1}},$$

uma vez que $\|u\|^2 = \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}$. Portanto,

$$\left\|\frac{u}{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}}\right\|^2 = \|u\|^{\frac{2(P+1)}{P-1}}.$$

Assim,

$$m(p,\lambda,\Omega) \leqslant \left\|\frac{u}{\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}}\right\|^2 = \|u\|^{\frac{2(p-1)}{p+1}} = \left(\frac{2(p+1)}{p-1}\Phi_{p,\Omega}(u)\right)^{\frac{p-1}{p+1}},$$

pois, novamente como $u \in N(p,\Omega)$, $\|u\|^2 = \frac{2(p+1)}{p-1}\Phi_{p,\Omega}(u)$. Logo,

$$\frac{p-1}{2(p+1)} m(p,\lambda,\Omega)^{\frac{p+1}{p-1}} \leqslant \Phi_{p,\Omega}(u),$$

para todo $u \in N(p,\Omega)$. Portanto,

$$\frac{p-1}{2(p+1)} m(p,\lambda,\Omega)^{\frac{p+1}{p-1}} \leqslant c(p,\Omega).$$

Deste modo, de **(i)** e **(ii)** segue que

$$c(p,\Omega) = \frac{p-1}{2(p+1)} m(p,\Omega)^{\frac{p+1}{p-1}}.$$

■

<u>Proposição</u> 2.2.4. *Para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e para qualquer $\lambda \geqslant 0$,*

$$\lim_{p\to 2^*} m(p,\lambda,\Omega) = S.$$

Demonstração: primeiramente usando a desigualdade de Hölder,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \|u\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\frac{q-p}{qp}}, \tag{2.11}$$

para todo $p,\ q \in [2, 2^*]$ com $p < q$ e para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.
Deste modo,

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx}{\|u\|^2_{L^p(\Omega)}} \geqslant |\Omega|^{\frac{-2(q-p)}{qp}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx}{\|u\|^2_{L^q(\Omega)}},$$

implicando

$$\begin{aligned} m(p, \lambda, \Omega) &\geqslant |\Omega|^{\frac{-2(2^*-p)}{2^* p}} S, \\ m(p, \lambda, \Omega) &\leqslant |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} m(2, \lambda, \Omega). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Portanto para qualquer $\lambda \geqslant 0$ e Ω, $m(p, \lambda, \Omega)$ é limitado superiormente e inferiormente quando $p \in [2, 2^*]$. Defina

$$m = \liminf_{p \to 2^*} m(p, \lambda, \Omega) \quad \text{e} \quad M = \limsup_{p \to 2^*} m(p, \lambda, \Omega).$$

Para concluir a demonstração basta mostrarmos que

$$m = S = M$$

Mostraremos primeiro que $m = S$.
De (2.12) segue que $m \geqslant S$. Suponha $m > S$. Portanto podemos escolher $\epsilon \in (0, m - S)$ e escolher uma função $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$tal que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} < S + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, pela continuidade da aplicação $p \mapsto \|\overline{u}\|_{L^p(\Omega)}$, existe $\overline{p} \in (2, 2^*)$ tal que para todo $p \in [\overline{p}, 2^*)$ temos

$$\left| \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^p(\Omega)}} - \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, para todo $p \in [\overline{p}, 2^*]$ temos

$$m(p, \lambda, \Omega) \leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^p(\Omega)}} < \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} + \frac{\epsilon}{2} < S + \epsilon < m,$$

o que é um absurdo, pois $m = \liminf_{p\to 2^*} m(p,\lambda,\Omega)$. Portanto, $m = S$.

Por outro lado, usando novamente que

$$m(p,\lambda,\Omega) < \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^p(\Omega)}} < S + \epsilon$$

para todo $p \in [\overline{p}, 2^*)$, temos

$$M = \limsup_{p\to 2^*} m(p,\lambda,\Omega) \leqslant S + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Portanto, $M \leqslant S = m = S$, isto é, $M = S = m$. ■

Finalmente com esses dois resultados, a demonstração do Lema 2.2.2 é trivial, na verdade a prova é exatamente a demonstração das duas proposições anteriores.

No que segue, denotemos S_2 a melhor constante de Sobolev da imersão[1] $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$S_2 = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \ : \ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = 1 \right\}. \tag{2.13}$$

De agora em diante, admitiremos que Ω é o interior de $a^{-1}(0)$. Pela hipótese **(A1)**, existe $r > 0$ tal que as inclusões $\Omega^- \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega^+$ são homotopicamente equivalentes, onde

$$\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x,\Omega) \leqslant r\}$$

e

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : dist(x,\partial\Omega) \geqslant r\}.$$

A demonstração do lema a seguir foi extraída do trabalho [BC91] e faz uso do lema de concentração e compacidade (veja Apêndice B).

Proposição 2.2.5. *Se $(u_n) \subset V_p(\Omega)$ é tal que $\|u_n\|^2 \to S_2$, então $dist(\beta(u_n),\Omega) \to 0$.*

Demonstração: suponha por absurdo que $dist(\beta(u_n),\Omega) \nrightarrow 0$. Assim, a menos de subsequência, podemos admitir que

$$dist(\beta(u_n),\Omega) > r > 0$$

e

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ |\nabla(u_n - u)|^2 \rightharpoonup \mu & \text{em } M(\mathbb{R}^N) \\ |u_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu & \text{em } M(\mathbb{R}^N) \\ u_n \to u & \text{qtp em } \Omega, \end{cases}$$

[1]Veja a definição do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ no Apêndice B.

onde μ e ν são medidas finitas e $M(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das medidas finitas em $\mathbb{R}^N$.

Pela Proposição B.0.21 do Apêndice B resulta que

$$S_2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mu\| + \mu_\infty \tag{2.14}$$

e

$$1 = \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nu\| + \nu_\infty, \tag{2.15}$$

onde $\mu_\infty = \nu_\infty = 0$, pois Ω é limitado. Assim,

$$\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S_2^{-1}\|\mu\|$$

e

$$\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant S_2^{-1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Usando as equações dadas acima temos

$$S_2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mu\| \geqslant S_2\left(\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}}\right).$$

Implicando que,

$$\|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nu\| = 1 \geqslant \|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \tag{2.17}$$

Por (2.15), $\|\nu\| \in [0,1]$. Se $\|\nu\| \in (0,1)$, então

$$\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} > \|\nu\|. \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18) segue que

$$\|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nu\| > \|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\nu\|,$$

Mas isto é impossível pois, por (2.15), $\|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \in [0,1]$ e $2^* > 2$. Logo, $\|\nu\| = 0$ ou $\|\nu\| = 1$. Se $\|\nu\| = 0$, então, por (2.15),

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1. \tag{2.19}$$

Usando (2.14) temos

$$S_2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mu\| \geqslant \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.20}$$

Combinando (2.16), (2.19) e (2.20)

$$S_2 \leqslant \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant S_2.$$

Logo, S_2 é atingido por uma função $u \in L^{2^*}(\Omega)$, o que contradiz a Proposição B.0.22 do Apêndice B. Portanto, $\|\nu\| = 1$, ou seja, $u = 0$. Assim, do Lema B.0.21 concluímos que ν se concentra em um único ponto $y \in \overline{\Omega}$, ou seja,

$$\beta(u_n) \to \int_\Omega x d\nu(x) = y \in \overline{\Omega},$$

Contradizendo $dist(\beta(u_n), \Omega) \nrightarrow 0$. ∎

<u>Lema</u> 2.2.6. *$S \doteq m(2^*, \lambda, \Omega) = m(2^*, \lambda, \mathbb{R}^N) = S_2$.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que $S_2 = m(2^*, \lambda, \mathbb{R}^N)$. Para isso, é suficiente mostrar que $m(2^*, \lambda, \mathbb{R}^N) \leqslant S_2$. Considere a família

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{\frac{2-N}{2}} \phi(x\ \epsilon), \quad \text{onde} \quad \phi(x) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}}{[1 + |x|^2]^{\frac{N-2}{2}}},$$

para $\epsilon > 0$. É sabido que a melhor constante S_2 da imersão de Sobolev é atingida pela família ϕ_ϵ, isto é,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon|^{2^*} \, dx\right)^{2/2^*}} = S_2.$$

Portanto, para concluir esse primeiro passo da demonstração, basta verificar que

$$h(\epsilon) \doteq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon|^{2^*} \, dx\right)^{2/2^*}} \to 0, \quad \text{quando } \epsilon \to 0.$$

De fato, pela definição da função ϕ_ϵ, após uma mudança de variáveis obtemos

$$h(\epsilon) = \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2 \, dx \to 0, \quad \text{quando } \epsilon \to 0.$$

Para concluir a demonstração, resta provar que $m(2^*, \lambda, \mathbb{R}^N) = m(2^*, \lambda, \Omega)$ para qualquer que seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. É imediato verificar que $m(2^*, \lambda, \mathbb{R}^N) \leqslant m(2^*, \lambda, \Omega)$. Reciprocamente, seja ψ_m uma sequência minimizante de $m(2^*, \lambda, \mathbb{R}^N)$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos supor que $\psi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Após uma translação, podemos admitir que $0 \in \Omega$. Agora defina

$$v_m(x) = R_m^{-N/2^*} \psi_m(x/R_m),$$

para $R_m > 0$ suficientemente pequeno de modo que $v_m \in C_0^\infty(\Omega)$. Novamente, para concluir a demonstração, basta mostrar que

$$g(m) \doteq \frac{\int_\Omega |v_m|^2 \, dx}{\left(\int_\Omega |v_m|^{2^*} \, dx\right)^{2/2^*}} \to 0, \quad \text{quando } R_m \to 0.$$

De fato, pela definição da função v_m, após uma mudança de variáveis obtemos

$$g(m) = R_m^{N(2^*-2)/2} \int_{\Omega/R_m} |\psi_m(y)|^2\, dy \to 0, \quad \text{quando } R_m \to 0.$$

■

Proposição 2.2.7. *Para qualquer $\lambda \geqslant 0$ fixado, existe $\overline{p} \equiv \overline{p}(\lambda)$, com $\overline{p} \in (2, 2^*)$, tal que para todo $p \in [\overline{p}, 2^*)$,*

$$m(\lambda, p, r) < 2^{1-\frac{2}{p}} m(\lambda, p, \Omega) \tag{2.21}$$

e

$$\text{se } \Phi_{p,\Omega}(u) \leqslant m(\lambda, p, r), \text{ então } \beta(u) \in \Omega_r^+, \text{ para todo } u \in V_p \tag{2.22}$$

Demonstração: primeiramente observe que pela escolha de r

$$m(\lambda, p, r) > m(\lambda, p, \Omega).$$

Assim, o conjunto $\Phi_{p,\Omega}^{c(p,r)}$ é não vazio. Por outro lado, usando a Proposição 2.2.4 e o fato de que $\lim\limits_{p\to 2^*} 2^{1-\frac{2}{p}} = 2^{\frac{2}{N}}$ temos

$$\lim_{p\to 2^*} m(\lambda, p, r) = \lim_{p\to 2^*} m(\lambda, p, \Omega) = S.$$

Logo, existe $\hat{p} \in (2, 2^*)$ tal que (2.21) é satisfeita para todo $p \in [\hat{p}, 2^*)$. Agora observe que pela Proposição 2.2.5 e pelo Lema 2.2.6, existe $\epsilon \in (0, 1)$ tal que

$$\text{se } \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2\right) dx}{\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} < S + \epsilon, \text{ então } \beta\left(\frac{u}{\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}}\right) \in \Omega_r^+. \tag{2.23}$$

Desde modo, fixando $\overline{\epsilon} < \frac{\epsilon}{2(S+1)}$, escolheremos $\overline{p} \in [\hat{p}, 2^*)$ tal que

$$|m(\lambda, p, r) - S| < \overline{\epsilon}, \quad ||\Omega|^{\frac{2(2^*-p)}{2^* p}} - 1| < \overline{\epsilon} \text{ para todo } p \in [\overline{p}, 2^*).$$

Afirmamos que para todo $p \in [\overline{p}, 2^*)$, (2.22) é satisfeita. De fato, considere $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\overline{u}\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e

$$\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx \leqslant m(\lambda, p, r).$$

Desde que $\beta\left(\frac{\overline{u}}{\|\overline{u}\|_{L^{2^*}(\Omega)}}\right) = \beta(\overline{u})$, obtemos (2.22) de (2.23) se mostrarmos que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} < S + \epsilon.$$

De fato, por (2.11), temos

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}|^2 + \lambda \overline{u}^2\right) dx}{\|\overline{u}\|^2_{L^{2^*}(\Omega)}} \leqslant m(\lambda, p, r)|\Omega|^{\frac{2(2^*-p)}{2^*p}}$$

$$\leqslant (S + \overline{\epsilon})(1 + \overline{\epsilon}) < S + \epsilon.$$

■

Lema 2.2.8. *Para todo $r' < r$, existe $p(r') \in (1, 2^* - 1)$ tal que*

$$c(p, r') < 2c(p, \Omega) \text{ para todo } p \in [p(r'), 2^* - 1)$$

e

$$\beta(u) \in \Omega^+ \text{ para todo } u \in N_{p,\Omega} \text{ com } \Phi_{p,\Omega}(u) \leqslant c(p, r').$$

Demonstração: com os três resultados anteriores mais o Lema B.0.21 do Apêndice B, a demonstração do Lema 2.2.8 é imediata. ■

Agora considere a seguinte variedade de Nehari

$$M_{\lambda,p} = \left\{ u \in E\backslash\{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \right\}$$

e defina $c_{\lambda,p} = \inf\limits_{u \in M_{\lambda,p}} \Phi_{\lambda,p}(u)$ onde,

$$\Phi_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2\right) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Com o objetivo de obter os pontos críticos de $\Phi_{\lambda,p}$ sobre $M_{\lambda,p}$ usaremos o mesmo raciocínio que foi usado em [5] para o problema de Dirichlet e em [22] com o problema de Neumann. Escolheremos p próximo de $2^* - 1$ de modo que o Lema 1.3.2 seja satisfeito. Para tal p, escolheremos $\epsilon > 0$ pequeno tal que para λ suficientemente grande podemos estimar a categoria de Lusternik-Schnirelmann do conjunto

$$\Phi_{\lambda,p}^{c_{\lambda,p}+\epsilon} = \{u \in M_{\lambda,p} : \Phi_{\lambda,p}(u) \leqslant c_{\lambda,p} + \epsilon\},$$

em termos da categoria de Ω. Finalmente para o $\epsilon > 0$ escolhido mostraremos que os pontos críticos neste nível não mudam de sinal. Desde que $H^1_0(\Omega) \subset E$, então $c_{\lambda,p} \leqslant c(p, \Omega)$.

Corolário 2.2.9. *Para todo $p \in (1, 2^* - 1)$, existe $\Lambda_0(p) > 0$ tal que $c_{\lambda,p}$ é atingido para todo $\lambda \geqslant \Lambda_0(p)$ em algum $u_{\lambda,p}$ que é uma solução não negativa de $(S_{\lambda,p})$.*

Lema 2.2.10. *$c_{\lambda,p} \to c(p,\Omega)$ quando $\lambda \to +\infty$.*

Demonstração: observe primeiramente que a desigualdade $c_{\lambda,p} < c(p,\Omega)$ é estrita, pois caso contrário poderíamos encontrar uma solução não negativa de $(S_{\lambda,p})$ em Ω^c. O que é impossível pelo Princípio do Máximo para as equações elípticas. Admitiremos para a sequência $\lambda_n \to +\infty$ o seguinte limite

$$\lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n,p} = A < c(p,\Omega).$$

Observe que $A > 0$.

De fato, pelo Corolário 2.2.9 para cada n, existe $u_n \in M_{\lambda,p}$ tal que

$$c_{\lambda_n,p} = \Phi_{\lambda_n,p}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n} - \frac{1}{p+1}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)} = \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_n\|^2_{\lambda_n}.$$

Assim,

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n,p} = \frac{2(p+1)}{p-1}c_{\lambda_n,p}.$$

Pelo Lema 2.1.2, existe $\sigma > 0$ tal que $\sigma^2 < \|u\|^2_{\lambda_n}$. Daí,

$$\sigma^2 \leqslant \limsup_{n\to+\infty}\|u_n\|^2_{\lambda_n} = \frac{2(p+1)}{p-1}A.$$

Portanto, pelo Lema 2.1.3, $A \geqslant c_0 > 0$. Agora pelo Corolário 2.2.9, $c_{\lambda,p}$ é atingido para λ grande, assim existe uma sequência $u_n \in M_{\lambda,p}$ que são soluções de $(S_{\lambda_n,p})$ tal que $\Phi_{\lambda_n,p}(u_n) = c_{\lambda_n,p}$. Desde que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos admitir $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e daí,

$$u_n \to u \text{ em } L^\theta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 \leqslant \theta < 2^*. \tag{2.24}$$

Afirmamos que $u|_{\Omega^c} = 0$. De fato, suponha $u|_{\Omega^c} \neq 0$, então existe um conjunto compacto $F \subset \Omega^c$ tal que $dist(F,\Omega) > 0$, com $u|_F \neq 0$. Então por (2.24),

$$\int_F u_n^2 dx \to \int_F u^2 dx > 0.$$

Mas, desde que $a(x) \geqslant \epsilon_0 > 0$, para todo $x \in F$ segue que

$$\Phi_{\lambda_n,p}(u_n) \geqslant \lambda_n \int_F \left(a(x)u_n^2\right) dx \geqslant \lambda_n\epsilon_0 \int_F u_n^2 dx \to +\infty,$$

quando $n \to +\infty$ o que é um absurdo, pois $\Phi_{\lambda_n,p}(u_n) \to c_{\lambda_n,p}$. Logo, $u|_{\Omega^c} = 0$. Agora mostraremos que $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. De fato, suponha que não, ou seja, $u_n \nrightarrow u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Daí, pelo lema de P. L. Lions [12], existe $\delta_0 > 0$, $\rho > 0$ $x_n \in \mathbb{R}^N$, com $|x_n| \to +\infty$ tal que

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_{B_\rho(x_n)} |u_n - u|^2 dx \geqslant \delta > 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda_n,p}(u_n) &\geqslant \lambda_n \int_{B_\rho(x_n)\cap\{x:a(x)>M_0\}} a(x)u_n^2 dx = \lambda_n \int_{B_\rho(x_n)\bigcap\{x:a(x)>M_0\}} a(x)|u_n - u|dx \\
&\geqslant \lambda_n M_0 \int_{B_\rho(x_n)} |u_n - u|^2 dx - M_0 \int_{B_\rho(x_n)\bigcap\{x:a(x)>M_0\}} |u_n - u|dx \\
&\geqslant \lambda_n \left(M_0 \int_{B_\rho(x_n)} |u_n - u|^2 dx - o(1) \right) \to +\infty,
\end{aligned}$$

quando $\lambda_n \to +\infty$. O que é um absurdo. Logo, $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Agora, usando o lema de Fatou segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + 1)u^2\right) dx,$$

pois $u|_{\Omega^c} = 0$ e $a(x) = 0$ em Ω. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2(\lambda a(x) + 1) + u^2\right) dx &\leqslant \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2(\lambda a(x) + 1) + u_n^2\right) dx \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Como $u \mid_{\Omega^c}= 0$, temos

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \leqslant \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx.$$

Assim, existe $\alpha \in M_{\lambda,p}$ tal que

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla(\alpha u)|^2 + (\alpha u)^2\right) dx = \int_{\Omega} |\alpha u|^{p+1} dx.$$

Implicando que

$$\begin{aligned}
\Phi_{p,\Omega}(\alpha u) &= \frac{p-1}{2(p+1)} \int_{\Omega} (|\nabla(\alpha u)|^2 + (\alpha u)^2) dx = \frac{p-1}{2(p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\alpha u)|^2 + (\alpha u)^2) dx \\
&\leqslant \frac{p-1}{2(p+1)} \int _\mathbb{R}^N (|\nabla u|^2 + u^2) dx \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{p-1}{2(p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + (\lambda a(x) + 1)u_n^2) dx = A.
\end{aligned}$$

Logo, $A \geqslant c(p, \Omega)$. Portanto $\lim_{\lambda\to\infty} c_{\lambda,p} = c(p, \Omega)$. ■

<u>Lema</u> 2.2.11. *Existe $p_1 \in (1, 2^*-1)$ tal que para todo $p \in [p_1, 2^*-1)$, existe $\Lambda_1(p) \geqslant \Lambda_0(p)$ tal que*

$$c(p, r) < 2c_{\lambda,p} \text{ para todo } \lambda \geqslant \Lambda_1(p).$$

Demonstração: observe que pelo Lema 2.2.2 temos,

$$\lim_{p\to 2^*-1} c(p,r) = \lim_{p\to 2^*-1} c(p,\Omega) = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Assim, existe $p_1 \in (1, 2^*-1)$ tal que $c(p,r) < 2c(p,\Omega)$ para todo $p \in [p_1, 2^*-1)$. Pelo Lema 2.2.10, para cada $p \in [p_1, 2^*-1)$, existe $\Lambda_1(p)$ tal que

$$c(p,r) < 2c(p,\Omega), \text{ para todo } \lambda \geqslant \Lambda_1(p).$$

∎

Agora escolheremos $R_0 > 0$ com $\overline{\Omega} \subset B_{R_0}$ e consideremos $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\xi(t) = 1, \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant R_0 \qquad \text{e} \qquad \xi(t) = \frac{R_0}{t}, \text{ para } R_0 \leqslant t,$$

em seguida definimos

$$\beta_0(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\xi(|x|)x dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx}, \text{ para } u \in M_{\lambda,p}. \tag{2.25}$$

Lema 2.2.12. *Seja $p_2 = p\left(\frac{r}{2}\right)$ dado pelo Lema 2.2.8. Então para cada $p \in [p_2, 2^*-1)$, existe $\Lambda_2(p)$ tal que $\beta_0(u) \in \Omega^+$, para todo $\lambda \geqslant \Lambda_2(p)$ e para todo $u \in M_{\lambda,p}$ satisfazendo $\Phi_{\lambda,p}(u) \leqslant c(p,r)$.*

Demonstração: suponha por contradição que existam $p \in [p_2, 2^*-1)$, $\lambda_n \to +\infty$ e $u_n \in M_{\lambda,p}$ tais que $\Phi_{\lambda,p}(u_n) \leqslant c(p,r)$ e $\beta_0(u_n) \notin \Omega^+$. Como já foi visto anteriormente, a sequência u_n é limitada em $H^1_0(\mathbb{R}^N)$. Deste modo podemos admitir $u_n \to u$ em $H^1_0(\mathbb{R}^N)$ e daí,

$$u_n \to u \text{ em } L^{\theta}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ para } 2 \leqslant \theta < 2^*.$$

Da mesma forma que na demonstração do Lema 2.2.10, podemos mostrar que $u|_{\Omega^c} = 0$. Portanto, usando o fato $\lambda_n \to +\infty$, temos $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Agora usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$.
Desde que $\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \geqslant \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, temos

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \leqslant \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx,$$

pois $u|_{\Omega^c} = 0$. Então, existe $\alpha \in (0,1]$ tal que

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla(\alpha u)|^2 + (\alpha u)^2\right) dx = \int_{\Omega} |\alpha u|^{p+1} dx,$$

ou seja, $\alpha u \in N(p,\Omega)$. Logo,

$$\Phi_{p,\Omega}(\alpha u) = \frac{p-1}{2(p+1)}\int_{\Omega}\left(|\nabla(\alpha u)|^2 + (\alpha u)^2\right)dx \leqslant \frac{p-1}{2(p+1)}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right)dx$$
$$\leqslant \liminf_{n\to+\infty}\frac{p-1}{2(p+1)}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x)+1)u_n^2\right)dx = \liminf_{n\to+\infty}\Phi_{\lambda_n,p}(u_n) \leqslant c(p,r).$$

Usando o Lema 2.2.8, temos $\beta(\alpha u) \in \Omega^+_{\frac{r}{2}}$.
Assim,

$$\beta(u) = \beta(\alpha u) \in \Omega^+_{\frac{r}{2}}.$$

Mas, $\lim_{n\to+\infty}\beta_0(u_n) = \beta_0(u) = \beta(u)$ e $\beta_0(u_n) \notin \Omega^+_{\frac{r}{2}}$, o que é uma contradição. Portanto, a conclusão do lema é verdadeira. ■

Depois de provarmos esses lemas, temos agora os argumentos necessários para demonstrarmos um dos resultados principais deste trabalho.

Demonstração do Teorema 1.0.1: para concluir a prova deste resultado, devemos mostrar que dada uma sequência $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, com $(u_n) \subset M_{\lambda_n,p}$, $\Phi_{\lambda_n,p}(u_n) = c_{\lambda_n,p}$ e $\lambda_n \to +\infty$, existe uma subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para a solução de (Dp) com menor energia. Sabemos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, assim $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, e mais, como já foi visto anteriormente, $u_n \to u$ em $L^\theta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leqslant \theta < 2^*$. Vamos mostrar que $u \in H^1_0(\Omega)$ é a solução com menor energia de (Dp), ou seja $\Phi_{p,\Omega} = c(p,\Omega)$ e $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como no Lema 2.2.10, podemos mostrar que $u\,|_{\Omega^c}= 0$ e $u_n \to u$ em $L^\theta(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leqslant \theta < 2^*$. Em consequência, $\Phi_{\lambda,\Omega}(u)v = 0$ para todo $v \in H^1_0(\Omega)$, isto é, u é uma solução fraca de (Dp). Então, para concluir que u é uma solução de energia mínima é suficiente mostrar que

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_n^2 dx \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx.$$

Para provarmos as convergências acima,vamos usar a prova por absurdo. Suponha,

$$\limsup_{n\to+\infty}\lambda_n\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_n^2 dx > 0$$

ou

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2 dx > \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx.$$

Seja $\alpha \in (0,1]$ tal que $\alpha u \in M_{\lambda,p}$. Logo,

$$\begin{aligned}\Phi_{p,\Omega}(\alpha u) &= \frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega \left(|\nabla(\alpha u)|^2 + (\alpha u)^2\right) dx \\ &< \liminf_{n\to+\infty} \frac{p-1}{2(p+1)}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x)+1)u_n^2\right) dx \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \Phi_{\lambda_n,p}(u_n) = c(p,\Omega),\end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Portanto,

$$\limsup_{n\to+\infty} \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} \left(a(x)u_n^2\right) dx = 0$$

e

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

■

Para demonstrarmos o **Teorema 1.0.2**, precisamos do seguinte resultado.

<u>Lema</u> 2.2.13. *Seja u um ponto crítico de $\Phi_{\lambda,p}$ tal que $\Phi_{\lambda,p}(u) < 2c_{\lambda,p}$. Então u não muda de sinal.*

Demonstração: suponha por contradição que u muda de sinal. Seja $u = u_+ + u_-$, onde $u_+ = max\{u,0\}$ e $u_- = min\{u,0\}$, com $u_+ \neq 0$ e $u_- \neq 0$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_\pm|^2 + (\lambda a(x)+1)u_\pm^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\pm|^{p+1} dx,$$

pois $u_\pm \in M_{\lambda,p}$. Portanto,

$$\Phi_\lambda(u) = \Phi_\lambda(u_+) + \Phi_\lambda(u_-) \geqslant 2c_{\lambda,p}.$$

O que é uma contradição, pois por hipótese $\Phi_{\lambda,p}(u) < 2c_{\lambda,p}$. ■

Para finalizarmos esta seção, demonstraremos os dois últimos teoremas, o Teorema 1.0.2 e o Teorema 1.0.3.

Demonstração do Teorema 1.0.2: pela escolha de r,

$$c_{\lambda,p} < c(p,\Omega) < c(p,r).$$

Seja $U \in H_0^1(B_r)$ a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = u^p & \text{em } B_r, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_r. \end{cases}$$

Seja também $U_y(x) = U(x-y) \in H_0^1(B_r(y))$. Então $c(p,r) = \Phi_{p,B_r(y)}(U_y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Além disso, observe que $U_y \in H_0^1(\Omega)$ e $\Phi_{p,\Omega}(U_y) = c(p,r)$ para todo $y \in \Omega_r^-$. Considere $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$ e $\Lambda(p) = \max\{\Lambda_1(p), \Lambda_2(p)\}$ para todo $p \in [p_0, 2^* - 1)$. Agora defina

$$\varphi : \Omega_r^- \to M_{\lambda,p} \cap \Phi_{\lambda,p}^{c(p,r)}, \ \varphi(y) := U_y$$

e

$$\beta_0 := \Phi_{\lambda,p}^{c(p,r)} \to \Omega_r^+ \text{ como em (2.25).}$$

Observe que o Lema 2.2.12 nos garante que β_0 e φ estão bem definidas. Além disso $\beta \circ \varphi$ é a inclusão $\Omega_r^- \hookrightarrow \Omega_r^+$. Vamos definir $Y := \Phi_{\lambda,p}^{c(p,r)}$ e seja $X := Y/(-u \sim u)$ espaço quociente de Y, onde u e $-u$ são identificados. Claramente $\beta_0(-u) = \beta(u)$ o que induz uma aplicação $\beta_1 : Y \to \Omega_r^+$. O funcional $\Phi_{\lambda,p}$ induz um funcional $\Psi : X \to \mathbb{R}$ com $\psi := Q \circ \varphi : \Omega_r^- \to Y$ onde $Q : X \to Y$ é a aplicação quociente. Deste modo, pelo Lema C.0.24 do Apêndice C segue que $cat(X) \geqslant cat(\Omega)$. Pelo Teorema C.0.26 do Apêndice C, o funcional induzido Ψ possui pelo menos $cat(\Omega)$ pontos críticos, o que corresponde a $cat(\Omega)$ pares $\pm u_i$ de pontos críticos de $\Phi_{\lambda,p}$ abaixo do nível $c(p,r)$. Pelo Lema 2.2.13, as soluções não mudam de sinal e usando o Lema 2.2.11 concluímos que o funcional $\Phi_{\lambda,p}$ tem pelo menos $cat(\Omega)$ soluções. ∎

Demonstração do Teorema 1.0.3: como já foi visto anteriormente u_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Agora do Lema 2.2.10 segue que $u_n \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e que $u_n \to u$ em $L^\theta(\mathbb{R}^N)$ para $2 < \theta < 2^*$.
Desde que u_n é solução de $-\Delta u_n + (\lambda a(x) + 1)u_n = u_n^p$, podemos supor, usando a teoria de regularidade de equações elípticas, que $u_n \to u$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, u é solução de (Dp). Observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n a(x) + 1)(u_n - u)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n a(x) + 1) u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n a(x) + 1) u^2 dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx + o(1) = o(1),
\end{aligned}$$

ou seja, $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

∎

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice A

Nesta seção serão enunciados alguns resultados que ajudarão nas demonstrações dos lemas encontrados ao longo deste trabalho. O principal objetivo desta seção é mostrar que funcional Φ_λ está bem definido e é de classe C^1.

Proposição A.0.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja g satisfazendo*

- *(i) $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N, R)$;*
- *(ii) existem constantes $r, s \geqslant 1$ e $a_1, a_2 \geqslant 0$ tais que*

$$|g(x,\xi)| \leqslant a_1 + a_2|\xi|^{\frac{r}{s}}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Então a aplicação $\varphi(x) \to g(x, \varphi(x)) \in C\left(L^r(\Omega), L^s(\Omega)\right)$

Demonstração: se $u \in L^r(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |g(x,u(x))|^s dx \leqslant \int_\Omega (a_1 + a_2|u|^{\frac{r}{s}})^s dx \leqslant a_3 \int_\Omega (1 + |u|^r) dx, \tag{A.1}$$

ou seja, $g : L^r(\Omega) \to L^r(\Omega)$. Provaremos agora que nossa função $g : L^r(\Omega) \to L^r(\Omega)$ é contínua. Observe que g é contínua se, e somente se,

$$f(x, z(x)) = g(x, z(x) + \varphi(x)) - g(x, \varphi(x)) \text{ é contínua em } z = 0.$$

Portanto podemos supor $\varphi = 0$ e $g(x,0) = 0$. Seja $\epsilon > 0$. Afirmamos que existe um $\delta > 0$ tal que se $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \delta$, então $\|g(\cdot,u)\|_{L^s(\Omega)} \leqslant \epsilon$. De fato, por (i) e $g(x,0) = 0$, dado qualquer $\hat{\epsilon} > 0$, existe um $\hat{\delta} > 0$ tal que $|g(x,\xi)| \leqslant \hat{\epsilon}$ se $x \in \overline{\Omega}$ e $|\xi| \leqslant \delta$. Tome $u \in L^r(\Omega)$, com $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \delta$ e seja

$$\Omega_1 = \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| \leqslant \beta\}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega_1} |g(x,u(x))|^s dx \leqslant \hat{\epsilon}^s |\Omega_1| \leqslant \hat{\epsilon}^s |\Omega|, \tag{A.2}$$

onde $|\Omega_1|$ e $|\Omega|$ denotam a medida de Ω_1 e Ω respectivamente. Escolha $\hat{\epsilon}$ tal que $\hat{\epsilon}^s \leqslant \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^s$. Seja $\Omega_2 = \overline{\Omega} \backslash \Omega_1$. Usando (A.1) temos

$$\int_{\Omega_2} |g(x,u(x))|^s dx \leqslant \int_{\Omega_2} (1 + |u(x)|^r) dx \leqslant a_3(|\Omega_2| + \delta^r). \tag{A.3}$$

Além disso,

$$\beta^r |\Omega_2| \leqslant \int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \leqslant \delta^r, \quad \text{ou seja} \quad |\Omega_2| \leqslant (\delta\beta^{-1})^r. \tag{A.4}$$

Usando (A.3) e (A.4) segue que

$$\int_{\Omega_2} |g(x,u(x))|^s dx \leqslant a_3(1 + \beta^{-1})\delta^r. \tag{A.5}$$

Agora escolha δ tal que $a_3(1+\beta^{-1})\delta^r \leqslant \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^s$. Logo, usando (A.2) e (A.5) concluímos que

$$\|g(\cdot,u)\|_{L^s(\Omega)} \leqslant \epsilon \text{ se } \|u\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \delta,$$

■

Proposição A.0.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave. Seja p uma função satisfazendo*

- *(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;*
- *(p_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que*

$$|p(x,\xi)| \leqslant a_1 + a_2|\xi|^s, \text{ onde } 0 \leqslant s < (N+2)(N-2)^{-1} \text{ e } N \geqslant 3.$$

Se

$$P(x,\xi) \equiv \int_0^\xi p(x,t)dx$$

e

$$I(u) \equiv \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\right) dx, \tag{A.6}$$

então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - p(x,u)\varphi)\, dx, \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{A.7}$$

Além disso,

$$J(u) \equiv \int_\Omega P(x,u(x))dx$$

é fracamente contínuo e $J'(u)$ é compacto.

Demonstração: usando as imersões de Sobolev, a Proposição A.0.14, (p_1) e (p_2), I está bem definido em $H_0^1(\Omega)$ e da mesma forma, com a ajuda da desigualdade de Hölder, $I'(u)$ também está bem definida. Claramente o primeiro termo de I é de classe C^1 e o primeiro termo de $I'(u)$ é Fréchet diferenciável. Assim, devemos mostrar que

$$J(u) = \int_\Omega P(x, u(x))dx,$$

com $J(u) \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ Faremos isso em duas etapas, primeiro mostraremos que J é Fréchet diferenciável em $H_0^1(\Omega)$ (por consequência é Lipschitz contínua) e, em seguida , mostraremos que $J'(u)$ é contínua. Para começar, seja $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Afirmamos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, u)$ tal que

$$|J(u+\varphi) - J(u) - J(u)| = \int_\Omega p(x,u)\varphi dx \leqslant \epsilon \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ desde que } \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \delta. \quad (A.8)$$

De fato, considere

$$\psi \equiv |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x)) - p(x, u(x))\varphi(x)|.$$

Daí,

$$\left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega p(x,u)\varphi dx \right| \leqslant \int_\Omega \psi dx, \quad (A.9)$$

pois

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi dx &= \int_\Omega |P(x, u(x) + \varphi(x)) - P(x, u(x)) - p(x, u(x))\varphi(x)|\, dx \\
&\geqslant \left| \int_\Omega (P(x, u(x) + \varphi(x)))\, dx - \int_\Omega (P(x, u(x)))\, dx - \int_\Omega (p(x, u(x))\varphi(x))\, dx \right| \\
&= \left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega (p(x, u(x))\varphi(x))\, dx \right|.
\end{aligned}$$

Agora defina,

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 \equiv \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| \geqslant \beta\}; \\
&\Omega_2 \equiv \{x \in \overline{\Omega} : |\varphi(x)| \geqslant \gamma\}; \\
&\Omega_3 \equiv \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| \leqslant \beta \text{ e } |\varphi(x)| \leqslant \gamma\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega \psi dx \leqslant \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \psi dx. \quad (A.10)$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$P(x, u+\varphi) - P(x, u) = p(x, u+\theta\varphi)\varphi, \text{ onde } \theta \in (0, 1). \quad (A.11)$$

Portanto, por (A.11), por (p_2) e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |P(x,u(x)+\varphi(x)) - P(x,u(x))|\,dx &= \int_{\Omega_1} (|p(x,u(x)+\theta\varphi(x))|\,|\varphi(x)|)\,dx \\ &\leqslant \int_{\Omega_1} ([a_1 + a_2(|u(x)|+|\varphi(x)|)^s]|\varphi(x)|)\,dx \\ &= \int_{\Omega_1} a_1|\varphi(x)|dx + \int_{\Omega_1} a_2(|u(x)|+|\varphi(x)|)^s|\varphi(x)|dx \\ &\leqslant a_1|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega_1)} + a_3|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\left(\|u\|^s_{L^{s+1}(\Omega_1)} + \|\varphi\|^s_{L^{s+1}(\Omega_1)}\right)\|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega_1)},\end{aligned} \tag{A.12}$$

onde $\sigma > 1$ é tal que

$$1 = \frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{N-2}{2N}. \tag{A.13}$$

Após a existência de σ é possível $s < 2^* - 1$, ou seja, $\frac{s}{s+1} < \frac{2^*-1}{2^*}$. Como $\frac{1}{2^*} + \frac{2^*-1}{2^*} = 1$, então $\frac{s}{s+1} + \frac{1}{2^*} < 1$. Assim, existe $\sigma > 1$ satisfazendo (A.13). Agora, usando (A.12), temos

$$\int_{\Omega_1} |P(x,u(x)+\varphi(x))|\,dx \leqslant a_4\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega_1)}\left(|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|^s_{H^1_0(\Omega_1)} + \|\varphi\|^s_{H^1_0(\Omega_1)})\right). \tag{A.14}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} |p(x,u(x))\varphi(x)|dx &\leqslant \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2|u(x)|^s]|\varphi(x)|dx \\ &= \int_{\Omega_1} a_1|\varphi(x)|dx + \int_{\Omega_1} a_2|u(x)|^s|\varphi(x)|dx \\ &\leqslant a_1|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}}\|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega_1)} + a_2|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\|u\|^s_{L^{s+1}(\Omega_1)}\|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega_1)} \\ &\leqslant a_4\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)}\left(|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\|u\|^s_{H^1_0(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{A.15}$$

Observe que

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)} = \left(\int_{\Omega_1} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\int_{\Omega_1} |\beta|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \beta\left(\int_{\Omega_1} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \beta|\Omega_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, usando as imersões de Sobolev e a desigualdade de Hölder, segue que

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \geqslant a_6\|u\|_{L^2(\Omega)} \geqslant a_6\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \geqslant a_6\beta|\Omega_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto,

$$|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \left(\frac{\|u\|_{H^1_0(\Omega)}}{a_6\beta}\right)^{\frac{2}{\sigma}} \equiv M_1 \;\text{ e }\; |\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leqslant \left(\frac{\|u\|_{H^1_0(\Omega)}}{a_6\beta}\right)^{\frac{2(2^*-1)}{2}} \equiv M_2, \tag{A.16}$$

onde $M_1, M_2 \to 0$, quando $\beta \to +\infty$.
Agora, por (A.12), (A.14), (A.15) e (A.16),

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \psi dx &= \int_{\Omega_1} |P(x,u(x)+\varphi(x)) - P(x,u(x)) - p(x,u(x))\varphi(x)|\, dx \\
&\leqslant \int_{\Omega_1} |P(x,u(x)+\varphi(x)) - P(x,u(x))|\, dx + \int_{\Omega_1} |p(x,u(x))\varphi(x)|\, dx \\
&\leqslant a_4\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \left[|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{H_0^1(\Omega)})\right] \\
&+ a_5\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \left[|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}\|u\|^s_{H_0^1(\Omega)}\right] \\
&\leqslant a_7\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \left[|\Omega_1|^{\frac{2^*-1}{2^*}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(\|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{H_0^1(\Omega)})\right] \\
&= a_7\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \left[M_2 + M_1(\|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{H_0^1(\Omega)})\right].
\end{aligned}$$

Logo, podemos supor que $\delta \leqslant 1$. Agora escolha $\beta > 0$ tão grande tal que

$$a_7\left[M_2 + M_1(\|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + 1)\right] \leqslant \frac{\epsilon}{3}. \tag{A.17}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_1} \psi dx \leqslant \frac{\epsilon}{3}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{A.18}$$

Precisamos fazer uma estimativa para $\int_{\Omega_2} \psi dx$, para isso usaremos o mesmo raciocínio. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \psi dx &\leqslant a_3 \int_{\Omega_2} \left[1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s\right] |\varphi(x)| dx \\
&\leqslant a_4 \left\|1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s\right\|_{L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega_2)} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)} \\
&\leqslant a_5 \left(1 + \|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{H_0^1(\Omega)}\right) \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma}\right)^{m-(s+1)} dx\right)^{\frac{1}{s+1}},
\end{aligned}$$

onde $m = 2^* - 1$. Daí,

$$\int_{\Omega_2} \psi dx \leqslant a_6 \gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}} (1 + \|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{H_0^1(\Omega)})\|\varphi\|^{\frac{m}{s+1}}_{H_0^1(\Omega)}.$$

Desde que $P \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dados quaisquer $\hat{\epsilon}, \hat{\beta} > 0$, existe $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\epsilon}, \hat{\gamma})$ tal que

$$|P(x,u(x)+\varphi(x)) - P(x,u(x)) - p(x,u(x))\varphi(x)| \leqslant \hat{\epsilon}|\varphi(x)|, \tag{A.19}$$

sempre que $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant \hat{\beta}$ e $|\varphi| \leqslant \hat{\gamma}$. Em particular se $\hat{\beta} \equiv \beta$ e $\gamma \leqslant \hat{\gamma}$, então (A.19) e as imersões de Sobolev implicam

$$\int_{\Omega_3} \psi dx \leqslant \hat{\epsilon} \int_{\Omega_3} |\varphi(x)| dx \leqslant a_7 \hat{\epsilon} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{A.20}$$

Agora, escolha $\hat{\epsilon}$ tal que $3a_7\hat{\epsilon} \leqslant \epsilon$ que determinará $\hat{\gamma}$. Escolha $\gamma = \hat{\gamma}$. Usando (A.10), (A.18) e (A.20) temos

$$\int_\Omega \psi dx \leqslant \frac{2\epsilon}{3}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} + a_6\gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}}(1 + \|u\|^s_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{H_0^1(\Omega)})\|\varphi\|^{\frac{m}{s+1}}_{H_0^1(\Omega)}.$$

Finalmente, escolha δ suficientemente pequeno tal que

$$a_6\gamma^{\frac{1-m}{s+1}}(2 + \|u\|^s_{H_0^1(\Omega)})\delta^{\frac{m}{s+1}-1} \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Dessa forma obtemos (A.8). Agora mostraremos o segundo passo, ou seja, que $J'(u)$ é contínuo. Para isso, seja $u_m \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então, $u_m \to u$ em $L^{s+1}(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} \|J'(u_m) - J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1}\left|\int_\Omega [P(x,u_m(x)) - p(x,\varphi(x))\varphi(x)]\, dx\right| \\ &\leqslant a_8\|P(\cdot,u_m) - P(\cdot,u)\|_{L^{s+1}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{A.21}$$

Pela hipótese (p_2), $|p(x,u)| \leqslant a_1 + a_2|u|^{\frac{\alpha s}{\alpha}}$, para todo $\alpha \geqslant 1$ e $x \in \overline{\Omega}$, onde $x \in \mathbb{R}$. Daí, pela Proposição A.0.14 temos $p \in C\left(L^{\alpha s}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega)\right)$. Escolhendo $\alpha = \frac{s+1}{s}$, podemos ver por (A.21) que

$$\|J'(u_m) - J'(u)\| \to 0, \text{ quando } m \to +\infty$$

e assim, J' é contínuo. Finalmente para mostrar que J é fracamente contínua, seja $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então pelas imersões de Sobolev e pela hipótese (p_2),

$$u_m \to u \text{ em } L^{s+1}(\Omega) \text{ desde que } s+1 < 2^*.$$

Portanto, a Proposição A.0.14 implica que $J(u_m) \to J(u)$, ou seja J é fracamente contínuo. Como J é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$, concluímos que J' é compacto.

■

Proposição A.0.16. *Seja p satisfazendo (p_1) e (p_2) e seja I definido como em (A.6). Se (u_m) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I'(u_m) \to 0$, quando $m \to +\infty$, então (u_m) possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: seja $D : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)^*$ dada por $D(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx$. Primeiramente vamos mostrar que D é bijetora.

(i) D é injetora.

De fato, dados $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $Du = Dv$ temos que para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $(Du)\varphi = (Dv)\varphi$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx$$

o que implica

$$\int_\Omega \nabla(u - v)\varphi dx = 0, \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, $\nabla u = \nabla v$, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ (derivada fraca). Então

$$\int_\Omega u\varphi' dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi dx = \int_\Omega v\varphi' dx, \quad \text{para todo } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $u = v$

(ii) D é sobrejetora.

De fato, seja $f \in H_0^1(\Omega)^*$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, temos que existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $f(u) =< \varphi, u >$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim, pela representação de Riesz,

$$f(u) =< \varphi, u >= \int_\Omega \nabla\varphi \nabla u dx = (D\varphi)u.$$

Logo, existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $D\varphi = f$.

Assim, de (i) e (ii) segue que D é bijetora, portanto admite inversa D^{-1}. Vamos mostrar agora que D é contínua. Seja $u \in E$, temos

$$\|(Du)\varphi\| = \left|\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx\right| \leqslant \int_\Omega \|\nabla u\| \|\nabla\varphi\| dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, $Du \in E^*$, pois $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Du\|_{H_0^1(\Omega^*)} &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left|\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx\right| \\
&\leqslant \int_\Omega |\nabla\ u||\nabla\varphi| dx \leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, D é contínua e, consequentemente, D^{-1} também é contínua.

Como $(Du)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx$, então

$$D^{-1}(I'(u)) = u - D^{-1}\left[\int_\Omega p(x, u)\varphi dx\right] = u - D^{-1}(J'(u)), \tag{A.22}$$

pois

$$J(u) = \int_\Omega P(x, u) dx$$

e

$$J'(u)(v) = \int_{\Omega} p(x,u)v dx.$$

Por (A.22),

$$u_m = D^{-1}(I'(u_m)) + D^{-1}(J'(u_m)).$$

Por hipótese, $I'(u_m) \to 0$, quando $m \to +\infty$. Daí, como u_m é limitada em $H_0^1(\Omega)$, e pela proposição A.0.15 J' é compacto, então $J'(u_m)$ admite uma subsequência convergente. Logo,

$$u_{m_j} = D^{-1}(I'(u_{m_j})) + D^{-1}(J'(u_{m_j})) \to u,$$

onde u_{m_j} é uma subsequência de u_m. Portanto, u_m admite uma subsequência convergente.
■

Observe que os resultados acima são válidos para Ω limitado, mas em nosso principal resultado trabalhamos com $\Omega = \mathbb{R}^N$. Portanto, precisamos também dos dois próximos resultados.

Definição A.0.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com medida de Lebesgue infinita. Sobre o espaço $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ definimos a seguinte norma*

$$|u|_{p\wedge q} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

e sobre o espaço $L^p(\Omega) + L^q(\Omega)$ definimos a norma

$$|u|_{p\vee q} := \inf\{\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{L^q(\Omega)} : v \in L^p(\Omega),\ w \in L^q(\Omega),\ u = v + w\}.$$

Teorema A.0.18. *Sejam $1 \leqslant p,\ q,\ r,\ s < \infty$, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e*

$$|f(x,u)| \leqslant c(|u|^{\frac{p}{r}} + |u|^{\frac{q}{s}}). \tag{A.23}$$

Então para todo $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, temos $f(\cdot,u) \in L^r(\Omega) + L^s(\Omega)$ e o operador

$$T : L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \to L^r(\Omega) + L^s(\Omega) : u \mapsto f(x,u)$$

é contínuo.

Demonstração: seja $\psi \in D(]-2,2[)$ tal que $\psi = 1$ em $]-1,1[$ e defina

$$g(x,u) := \psi(u)f(x,u) \quad \text{e} \quad h(x,u) := (1-\psi(u))f(x,u).$$

Sem perda de generalidade, considere $\frac{p}{r} \leqslant \frac{q}{s}$. Deste modo obtemos

$$|g(x,u)| \leqslant a|u|^{\frac{p}{r}} \quad \text{e} \quad |h(x,u)| \leqslant b|u|^{\frac{q}{s}}.$$

Usando (A.23), podemos supor que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Assim, $g(x,u_n) \to g(x,u)$ em $L^r(\Omega)$ e $h(x,u_n) \to h(x,u)$ em $L^s(\Omega)$. Pela definição da norma $|\cdot|_{p\wedge q}$,

$$|f(x,u_n) - f(x,u)|_{r\vee s} \leqslant \|g(x,u_n) - g(x,u)\|_{L^r(\Omega)} + \|h(x,u_n) - h(x,u)\|_{L^s(\Omega)}.$$

Portanto, $f(x,u_n) \to f(x,u)$ em $L^r(\Omega) + L^s(\Omega)$, ou seja, o operador T é contínuo. ∎

Proposição A.0.19. *Se f satisfaz as hipóteses* **(A3)**, **(A4)** *e* **(A5)**, *então $\Phi_\lambda \in C^1(E,\mathbb{R})$.*

Demonstração: para mostrarmos que $\Phi_\lambda \in C^1(E,\mathbb{R})$, mostraremos que a derivada de Gateaux de $\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$, onde $F(x,u) := \int_0^u f(x,s)ds$, existe e é contínua.

(i) Existência da derivada de Gateaux.

Sejam $u, h \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Dados, $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in]0,1[$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|F(x,u(x)+th(x)) - F(x,u(x))|}{|t|} &= |(f(x,u(x)+\lambda t h(x)))h(x)| \\ &\leqslant c(|u(x)| + |h(x)|) + 2^{p-1}\left(|u(x)|^{p-1} + |h(x)|^{p-1}\right)|h(x)|. \end{aligned}$$

A desigualdade de Hölder implica que,

$$\left((|u(x)| + |h(x)|) + 2^{p-1}\left(|u(x)|^{p-1} + |h(x)|^{p-1}\right)|h(x)|\right) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$< \psi'(u), h >= \int f(x,u)hdx.$$

(ii) Continuidade da derivada de Gateaux.

Considere u_n tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelas imersões de Sobolev, podemos admitir que $u_n \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$. Segue do Terorema A.0.18 que $f(x,u_n) \to f(x,u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$, onde $q := \frac{p}{p-1}$. Logo, usando novamente a desigualdade de Hölder, obteremos

$$\begin{aligned} | < \psi'(u_n) - \psi'(u), h > | &\leqslant |f(x,u_n) - f(x,u)|_{2\vee q}|h|_{2\wedge p} \\ &\leqslant c_p|f(x,u_n) - f(x,u)|_{2\vee q}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

e então,

$$\|\psi'(u_n) - \psi'(u)\| \leqslant c_p|f(x,u_n) - f(x,u)|_{2\vee q} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim, de **(i)** e **(ii)** segue que $\Phi_\lambda \in C^1(E,\mathbb{R}^N)$. ∎

Apêndice

$\mathcal{B}$

Apêndice B

Ao longo deste trabalho usamos muitos resultados clássicos de espaços L^p e espaços de Hilbert, a maioria dos resultados pode ser encontrados em [Bre83]. Nesta seção vamos enunciar alguns resultados utilizados nas demonstrações dos lemas e proposições encontrados neste trabalho.

Seja $N \geqslant 3$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$. O espaço

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}$$

com o produto interno

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx$$

e a correspondente norma

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert. O espaço $D_0^{1,2}(\Omega)$ é definido como o fecho de $D(\Omega)$ (o espaço das funções C^∞ com suporte compacto em Ω) em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. O próximo teorema estabelece algumas das imersões de Sobolev utilizadas neste trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas em [Bre83].

Teorema B.0.20. *As seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{array}{ll} H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N), & 2 \leqslant p < +\infty, N = 1, 2; \\ H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), & 2 \leqslant q \leqslant 2^*, N \leqslant 3; \\ D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N), & N \geqslant 3. \end{array}$$

Denotamos por S_2 a melhor constante de Sobolev da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$S_2 = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = 1\right\}. \tag{B.1}$$

Além disso, é válido que $S_2 > 0$. Para contornar a perda de compacidade das imersões de Sobolev, citadas no teorema anterior, utilizamos o seguinte teorema de P. L. Lions na prova dos resultados principais. A demonstração do teorema é técnica e por isso será omitida. Uma prova pode ser encontrada em [Wil96] ou em [Lio84].

Proposição B.0.21. *(Lema da Concentração de Compacidade) Seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que*

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla(u_n - u)|^2 \rightharpoonup \mu & \text{em } M(\mathbb{R}^N), \\ |u_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu & \text{em } M(\mathbb{R}^N), \\ u_n \to u & \text{qtp em } \mathbb{R}^N. \end{array}$$

e defina

$$\mu_\infty := \lim_{R\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_{|x|\leqslant R} |\nabla u_n|^2 dx, \qquad \nu_\infty := \lim_{R\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_{|x|>R} |u_n|^{2^*} dx.$$

Então

$$\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S_2^{-1}\|\mu\|,$$

$$\nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leqslant S_2^{-1}\mu_\infty,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\mu\| + \mu_\infty,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + \|\nu\| + \nu_\infty.$$

Além disso, se $u = 0$ e $\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} = S_2^{-1}\|\mu\|$, então ν e μ estão concentradas em um único ponto, onde $M(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das medidas finitas em $\mathbb{R}^N$.

Proposição B.0.22. *Para todo subconjunto aberto de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tem-se:*

- $S_2(\Omega) := \inf_{u\in D_0^{1,2}(\Omega)} \{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \; : \; \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1\} = S_2,.$
- $S_2(\Omega)$ *nunca é atingido, exceto quando* $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Apêndice

$\mathcal{C}$

Apêndice C

Agora enunciaremos alguns resultados envolvendo categoria de um conjunto, cujas demonstrações podem ser encontradas em [Wil96].

Definição C.0.23 (Categoria de Lusternik e Schnirelman)**.** *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um fechado. A categoria de Lusternik e Schnirelman (LS) de A com respeito a X, denotada por $\operatorname{cat}_X(A)$, é o menor inteiro n tal que*

$$A \subset A_1 \dots A_n$$

com A_i fechado e contrátil em X, para cada $i = 1, \dots, n$. Lembrando que um subconjunto A de um espaço topológico X é contrátil em X se a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ é homotópica a uma constante $p \in X$, ou seja, se existe $H \in C([0,1] \times A, X)$ tal que $H(0,u) = u$ e $H(1,u) = p$.

Lema C.0.24. *Sejam A, B e X espaços topológicos e suponha que exista $\psi : A \hookrightarrow X$ e $\beta : X \to B$ tal que $\beta \circ \psi : A \to B$ é uma homotopia equivalente. Então $cat(X) \geqslant cat(A)$.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [BW95]

Teorema C.0.25. *Se $\varphi|_V$ satisfaz $(PS)_c$, onde*

$$a = \sup_Y \varphi < c \doteq c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+m} \leq d,$$

então

$$\operatorname{cat}_{\varphi^d}(K_c) \geq m + 1.$$

Teorema C.0.26. *Se $\varphi|_V$ é limitado inferiormente e satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in [\inf_V \varphi, d]$, então $\varphi|_V$ possui pelo menos $\operatorname{cat}_{\varphi^d}(\varphi^d)$ pontos críticos e $\varphi|_V$ tem um mínimo.*

Referências Bibliográficas

[AdMFS09] Claudianor O. Alves, Daniel C. de Morais Filho, and Marco A. S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **52** (2009), no. 1, 1–21. MR MR2475877

[AS08] Claudianor O. Alves and Marco A. S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations **244** (2008), no. 6, 1502–1520. MR MR2396507 (2008m:35088)

[BC91] Vieri Benci and Giovanna Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), no. 1, 79–93. MR MR1088278 (91j:35102)

[Bre83] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. MR MR697382 (85a:46001)

[BW95] Thomas Bartsch and Zhi Qiang Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbf{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), no. 9-10, 1725–1741. MR MR1349229 (96f:35050)

[BW00] Thomas Bartsch and Zhi-Qiang Wang, *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, Z. Angew. Math. Phys. **51** (2000), no. 3, 366–384. MR MR1762697 (2001f:35363)

[CW07] Jan Chabrowski and Zhi-Qiang Wang, *Exterior nonlinear Neumann problem*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **13** (2007), no. 5-6, 683–697. MR MR2329024 (2008g:35051)

[dD02] D. G. deFigueiredo and Y. H. Ding, *Solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), no. 3, 563–584. MR MR1897867 (2003c:35038)

[DS07] Yanheng Ding and Andrzej Szulkin, *Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 397–419. MR MR2321894 (2008c:35067)

[Lio84] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), no. 2, 109–145. MR MR778970 (87e:49035a)

[Wil96] Michel Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996. MR MR1400007 (97h:58037)