

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Enlaçamentos de singularidades mistas**

**Eder Leandro Sanchez Quiceno**

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em  
Matemática (PPG-Mat)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Eder Leandro Sanchez Quiceno**

## Enlaçamentos de singularidades mistas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos

Co-orientador: Prof. Dr Osamu Saeki

**USP – São Carlos**  
**Julho de 2023**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S211e Sanchez Quiceno, Eder Leandro  
Enlaçamentos de singularidades mistas / Eder  
Leandro Sanchez Quiceno; orientador Raimundo  
Nonato Araújo dos Santos; coorientador Osamu  
Saeki. -- São Carlos, 2023.  
123 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. enlaçamento da singularidade . 2. enlaçamento  
algébrico real. 3. enlaçamento fibrado. 4.  
singularidade de polinômio misto . 5. poliedro de  
Newton . I. Araújo dos Santos, Raimundo Nonato ,  
orient. II. Saeki, Osamu, coorient. III. Título.

**Eder Leandro Sanchez Quiceno**

## Links of mixed singularities

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos

Co-advisor: Prof. Dr Osamu Saeki

**USP – São Carlos**  
**July 2023**



*Este trabalho é dedicado a meus pais Rodrigo e Luz Mary  
meu irmão Leonel e minha companheira de vida Larissa.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Eu gostaria de expressar minha profunda gratidão a várias pessoas que me ajudaram a chegar onde estou hoje. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família pelo seu incrível apoio em todo o meu processo acadêmico. Sem a sua constância, esforços e amor, eu não teria sido capaz de superar os desafios que encontrei.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer à minha esposa Larissa Aquino, que conheci durante o período em que estava fazendo meu doutorado na USP-São Carlos. Ela é um dos sinais mais claros de que essa foi a melhor decisão que tomei na minha vida. Agradeço por seu companheirismo constante, pelas palavras de apoio, pela confiança em mim e pelo fato de ter acreditado em mim mais do que eu mesmo. Sou profundamente grato por ela ter aparecido em minha vida e por todo o amor e suporte que ela tem me dado ao longo desses anos.

Também gostaria de expressar minha sincera gratidão ao meu orientador, Raimundo Nonato, por sua paciência, disposição, confraternização e por ter sido um promotor do meu crescimento profissional. Agradeço a ele por aceitar trabalhar comigo e por me guiar na minha jornada acadêmica.

Além disso, quero agradecer ao professor Osamu Saeki por seu acolhimento durante minha estadia no Instituto de Matemáticas da Universidade de Kyushu e à sua esposa Célia por seu apoio durante esse tempo. Agradeço também por ter aceitado ser meu co-orientador e junto com Raimundo por terem me introduzido a esta linha de pesquisa que cada dia mais me cativa. Cada um de vocês contribuiu de maneira única para minha formação e desenvolvimento profissional, e sou eternamente grato por tudo o que aprendi com vocês.

Também gostaria de agradecer a Benjamin Bode por seu suporte durante o início da minha carreira como matemático, pelas conversas e também pelo excelente acolhimento durante minha estadia em Madrid. Espero que nossas colaborações continuem a crescer ainda mais.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a Daniel Peralta Salas e Juanjo Ballesteros por terem me recebido em seus centros de pesquisa na Espanha. Foi uma grande honra e privilégio passar um tempo em lugares tão renomados, e sou grato por sua hospitalidade e apoio durante a minha estadia.

Quero expressar um agradecimento especial aos meus amigos singularistas colombianos, Gabriel, Ivan, Julián, por seu apoio e amizade inabaláveis durante este período.

Também quero agradecer de coração aos meus colegas e grandes amigos de turma, Estefani, Estela e Javier, que me acompanharam em cada passo desta jornada. Cada um de vocês

marcou minha vida de maneira única e espero ter retribuído o mesmo a vocês.

Aos professores que aceitaram fazer parte da banca examinadora desta tese, minha gratidão profunda.

Ao Brasil, meu profundo reconhecimento pelo acolhimento caloroso que recebi neste país maravilhoso. A oportunidade de estudar e realizar meu sonho de ser matemático neste solo fértil foi um privilégio que jamais esquecerei.

Por fim, gostaria de agradecer à CAPES e FAPESP(2017/25902-8 e 2019/11415-3) pelos financiamentos que foram indispensáveis para a realização deste trabalho. Sem esse apoio financeiro, muitas das atividades e recursos que foram fundamentais para minha pesquisa teriam sido impossíveis. Sou profundamente grato por esta oportunidade.

Agradeço a todos os colegas, professores e funcionários do ICMC-USP que contribuíram, de alguma forma, na realização deste trabalho.

*“a persistência é o caminho do êxito”  
(Charles Chaplin)*



# RESUMO

SANCHEZ QUICENO, EDER L. **Enlaçamentos de singularidades mistas**. 2023. 123 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho apresentamos métodos para estudar enlaçamentos e singularidades de polinômios mistos a partir de novas condições de não-degeneração chamadas de não-degeneração interior (NDI), não-degeneração parcial (NDP), não-degeneração interior forte (FNDI) e não-degeneração parcial forte (FNDP). Além disso mostramos que em certas famílias de polinômios mistos a estrutura topológica do enlaçamento é completamente determinada nas faces compactas do bordo de Newton. Além do mais, utilizamos a condição FNDI para fornecer famílias de realizações de enlaçamentos algébricos reais que nos permite explorar a conexão entre a conjectura de Benedetti-Shiota e singularidades mistas.

**Palavras-chave:** enlaçamento da singularidade, enlaçamento algébrico real, enlaçamento fibrado, singularidade de polinômio misto, poliedro de Newton, polinômio semiholomorfo.



# ABSTRACT

SANCHEZ QUICENO, EDER L. **Links of mixed singularities.** 2023. 123 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work we introduce methods to study links and singularities of mixed polynomials through new conditions of non-degeneracies called inner non-degeneracy (IND), partial non-degeneracy (PND), strong inner non-degeneracy (SIND) and strong partial non-degeneracy (SPND). Moreover, we show that for certain families of mixed polynomials, the topological structure of the link is completely described on the compact faces of the Newton boundary. Furthermore, we use the SIND condition to provide families of realizations of real algebraic links that allow us to explore the connexion between the Benedetti-Shiota conjecture and the mixed singularities.

**Keywords:** link of singularity, real algebraic link, fibered link, singularity of mixed polynomial, Newton polyedron, semiholomorphic polynomial.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Enlaçamentos na 3-esfera . . . . .	29
Figura 2 – Enlaçamentos de Hopf orientados . . . . .	30
Figura 3 – Trança geométrica . . . . .	31
Figura 4 – Identidade de $B_s$ . . . . .	32
Figura 5 – Cruzamento positivo . . . . .	33
Figura 6 – Cruzamento negativo . . . . .	34
Figura 7 – Gerador $\sigma_j$ e seu inverso $\sigma_j^{-1}$ . . . . .	34
Figura 8 – Processo de identificação de $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ em $\mathbb{C} \times S^1$ . . . . .	35
Figura 9 – Fecho da trança em $\mathbb{C} \times S^1$ . . . . .	35
Figura 10 – Decomposição da 3-esfera como a união de dois toros sólidos . . . . .	36
Figura 11 – Curvas fechadas planas . . . . .	38
Figura 12 – Nó $5_2$ . . . . .	39
Figura 13 – Projeção em $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$ de $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2$ . . . . .	40
Figura 14 – Rótulos . . . . .	41
Figura 15 – Translado dos rótulos . . . . .	41
Figura 16 – Rótulos para obter o sinal de cruzamento . . . . .	43
Figura 17 – Processo de concatenação de duas cópias de $B$ . . . . .	44
Figura 18 – Trança quadrada de 3-fios $(F_B(\frac{t+2\pi j}{3}), G_B(\frac{t+2\pi j}{3}), t)$ , $j = 1, 2, 3$ . . . . .	44
Figura 19 – Trivialidade na vizinhança tubular . . . . .	49
Figura 20 – Nó toroidal $K(2, 3)$ . . . . .	50
Figura 21 – Singularidades na origem . . . . .	51
Figura 22 – Órbita $\gamma_j(\lambda)$ , $\lambda > 0$ definida para $\rho > 0$ e $t \in [0, 2\pi]$ fixos, onde $\gamma_j(\lambda) \subset V_{p_k}$ . O ponto $\gamma_j(1)$ pertence ao fecho de $B$ em $\dot{D}_\rho \times S_\rho^1$ , $\Psi_\rho(\gamma(1))$ pertence ao fecho de $B$ mergulhado por $\Psi_\rho$ em $S_\rho^3$ e $\gamma_j(\lambda_{j,\rho}(t)) = \Psi_\rho(u_j(\rho\gamma_{j,\rho}(t), \rho e^{it}))$ que pertence a $L_{p_k,\rho} = S_\rho^3 \cap V_{p_k}$ . . . . .	67
Figura 23 – Bordo de Newton, vértices extremos e não extremos de $f$ . . . . .	77
Figura 24 – Na linha superior: uma trança $B_1$ e duas tranças $B_2, B_3$ afins. Na linha inferior: as tranças aninhadas $B(B_1, B_2)$ e $B(B_1, B_2, B_3)$ . . . . .	98
Figura 25 – Na parte superior: enlaçamentos $L_1$ em $\mathbb{C} \times S^1$ , $L_2$ em $\mathbb{C}^* \times S^1$ , e $L_3$ no toro complemento $S^1 \times \mathbb{C}$ . Na parte inferior: os enlaçamentos $[L_1, L_2]$ e $L([L_1, L_2], L_3)$ . . . . .	102
Figura 26 – Bordos de Newton de $f$ , $f_u$ e $s_{3,f}$ . . . . .	112
Figura 27 – Representação de $L_{f_{k,5,5}}$ com $(u, t) \in \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ quando $v = r_0 e^{it}$ e $r_0 \ll 1$ . . . . .	117



# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

---

CFM	<i>Condição forte de Milnor</i>
FND	<i>Newton fortemente não-degenerado</i>
FNDI	<i>Newton fortemente não-degenerado interior</i>
FNDP	<i>Newton fortemente não-degenerado parcial</i>
NDP	<i>Newton não-degenerado parcial</i>
CO	<i>Newton conveniente</i>
NDI	<i>Newton não-degenerado interior</i>
ND	<i>Newton não-degenerado</i>



# LISTA DE SÍMBOLOS

---

---

$L = \cup_{j=1}^l L_j$  — Enlaçamento de  $l$  componentes

$S_s$  — Conjunto das permutações dos inteiros  $\{1, 2, \dots, s\}$

$B$  — Trança geométrica

$i = \sqrt{-1}$  — Unidade imaginária

$\mathcal{C}$  — Conjunto de componentes conexas do fecho de uma trança geométrica  $B$  em  $\mathbb{C} \times S^1$

$\mathcal{P}_B$  — Conjunto de curvas fechadas que são projeções dos fios de uma trança  $B$  que fecham em componentes conexas de  $\mathcal{C}$

$|\mathcal{C}|$  — Número de componentes conexas do fecho de uma trança  $B$

$|\mathcal{P}_B|$  — Número de elementos de  $\mathcal{P}_B$

$V_f$  — Conjunto dos zeros de  $f$

$\Sigma_f$  — Conjunto singular local de  $f$

$J_x f$  — Matriz Jacobiana de  $f$  em  $x$

$L_f = V_f \cap S_\rho^n$  — enlaçamento da singularidade

$M_f$  — Conjunto de Milnor de  $f$

$\deg_u f$  — Grau na variável  $u$  de  $f$

$\Gamma(f)$  — Bordo de Newton de  $f$

$f_\Gamma$  — Parte principal de Newton de  $f$

$\deg_{|u|} B(z, \bar{z})$  — Grau na variável  $|u|$  de  $B(z, \bar{z})$  visto como uma função em  $|u|$ ,  $\arg u$ ,  $v$  e  $\bar{v}$

$B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  — Trança aninhada

$B^o(B_1, B_2, \dots, B_N)$  — Trança aninhada com eixo de trançamento

$[L_1, L_2, \dots, L_{N-1}]$  — Enlaçamento aninhado no toro sólido aberto  $\mathbb{C} \times S^1$

$L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$  — Enlaçamento aninhado em  $S^3$



# SUMÁRIO

---

---

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	23
1.1	Motivações	23
1.1.1	<i>Motivação no caso complexo</i>	23
1.1.2	<i>Motivação no caso real</i>	25
1.2	Resumo da tese	26
2	<b>ENLAÇAMENTOS E TRANÇAS</b>	29
2.1	Enlaçamentos	29
2.2	Breve introdução a tranças e seus fechos	30
2.2.1	<i>Tranças geométricas e algébricas</i>	31
2.2.2	<i>O fecho de uma trança na 3-esfera</i>	35
2.3	Parametrização de Fourier de uma trança	37
2.3.1	<i>Existência da parametrização de Fourier</i>	37
2.3.2	<i>Algoritmo da parametrização de Fourier</i>	39
2.3.3	<i>Parametrização da concatenação</i>	44
3	<b>ENLAÇAMENTOS FIBRADOS E APLICAÇÕES ANALÍTICAS REAIS</b>	47
3.1	Enlaçamentos fibrados	47
3.2	Singularidades de aplicações e enlaçamentos	50
3.2.1	<i>Enlaçamentos algébricos clássicos</i>	52
3.2.2	<i>Enlaçamentos algébricos reais</i>	53
4	<b>SINGULARIDADES MISTAS</b>	55
4.1	Polinômios mistos	56
4.1.1	<i>Realização semiholomorfas de tranças</i>	57
4.2	Bordo de Newton	58
4.3	Tranças e funções semiholomorfas	59
4.3.1	<i>Enlaçamentos transversais</i>	61
4.3.2	<i>Extensão radial de tranças</i>	62
4.3.2.1	<i>Realização da trança quadrada</i>	69
5	<b>NOVOS CRITÉRIOS DE NÃO-DEGENERAÇÃO</b>	73
5.1	Não-degenerações	73
5.1.1	<i>Caso radialmente homogêneo pesado</i>	83

5.2	Não-degenerações fortes . . . . .	84
5.2.1	<i>Condição forte de Milnor</i> . . . . .	88
5.2.2	<i>Caso radialmente homogêneo pesado</i> . . . . .	95
6	<b>TOPOLOGIA DE REALIZAÇÕES MISTAS (NDI) COM BORDO</b>	
	<i>NICE</i> . . . . .	97
6.1	Tranças aninhadas de polinômios semiholomorfos . . . . .	97
6.1.0.1	<i>Decomposição de um polinômio misto</i> . . . . .	99
6.1.1	<i>Enlaçamento de um polinômio semiholomorfo NDI</i> . . . . .	100
6.2	Enlaçamentos aninhados e polinômios mistos . . . . .	101
6.2.1	<i>Enlaçamentos de polinômios mistos NDI com bordo nice</i> . . . . .	104
6.2.2	<i>Aplicações</i> . . . . .	107
7	<b>REALIZAÇÕES FORTES MISTAS</b> . . . . .	109
7.1	Ação polar e produtos mistos . . . . .	109
7.1.1	<i>Produtos de polinômios mistos</i> . . . . .	110
7.2	Construção de realizações fortes de enlaçamentos na 3-esfera. . . . .	111
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	119

# INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivações

### 1.1.1 Motivação no caso complexo

O clássico teorema da fibração de Milnor (MILNOR, 1968) para funções complexas afirma que dado um germe de função holomorfa  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  não constante, para todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno a projeção

$$\arg f := \frac{f}{|f|} : S_\rho^{2n+1} \setminus L_{f,\rho} \rightarrow S^1$$

é uma fibração suave localmente trivial. O conjunto  $L_f = L_{f,\rho} := f^{-1}(0) \cap S_\rho^{2n+1}$  é chamado o enlaçamento (link) da singularidade  $f$  e para todo  $\theta \in S^1$  a fibra de Milnor  $F_f = (\arg f)^{-1}(\theta)$  é uma subvariedade aberta na esfera, com fecho  $\overline{F_f} = F_f \cup L_f$ . Quando  $f$  tem uma singularidade isolada na origem  $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$  o espaço  $L_f$  é uma subvariedade suave  $(n-2)$ -conexa mergulhada na esfera  $S_\rho^{2n+1}$  cujo tipo de isotopia está bem definida para todo  $\rho$  suficientemente pequeno.

Na Teoria de Nós (Knot Theory) o espaço  $L_f$  como acima é de fundamental importância e é conhecido como um *link algébrico* (ou nó algébrico se  $L_f$  é conexo) e o fecho da fibra de Milnor  $F_f$  é chamada de variedade de Seifert de  $L_f$ .

Várias conexões interessantes são classicamente bem conhecidas entre a Teoria de Nós e a Teoria de Singularidades. Por exemplo, em (KING, 1978), (PERRON, 1985) e (SAEKI, 1989) os autores mostraram independentemente que dados  $f, g : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  polinômios com  $f(0) = g(0) = 0$ , ambas com singularidade isolada na origem, são equivalentes:

“o par  $(S^{2n+1}, L_f)$  é homeomorfo ao par  $(S^{2n+1}, L_g)$ , se e só se, o par  $(S^{2n+1}, L_f)$  difeomorfo ao par  $(S^{2n+1}, L_g)$ , se e só se, existir um germe de homeomorfismo  $h : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$  tal que  $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ , se e só se,  $f$  e  $g$  são  $C^0$ - $A$ -equivalentes, se e só se, as respectivas fibrações de Milnor  $f$  e  $g$  (como acima) são fibras-equivalente por um difeomorfismo

de par  $h : (S^{2n+1}, L_f) \rightarrow (S^{2n+1}, L_g)$ ”.

Tal resultado demonstra que o problema de classificação de *links* algébricos está intimamente relacionado com a classificação topológica da singularidade.

Nesta direção vários invariantes tem sido desenvolvidos como o polinômio de Alexander  $\Delta_f(t)$  do nó, a forma de Seifert  $\mathcal{L}_f$ , e relações de equivalências via isotopia e cobordismo de nós.

De forma geral, pode-se considerar um enlaçamento como um mergulho de uma  $n$ -variedade suave fechada e orientada  $M^n$  com codimensão 2 na esfera  $S^{n+2}$ . E no caso quando o enlaçamento é conexo este é chamado de nó.

Um conceito fundamental no estudo de enlaçamento é o de cobordismo, dois nós  $L_1^n$  e  $L_2^n$  em  $S^{n+2}$  são cobordantes se existir uma  $(n+1)$ -variedade orientada  $Y \hookrightarrow S^{n+2} \times [0, 1]$  tal que:

1.  $Y$  é difeomorfa à  $L_1 \times [0, 1]$ , e
2.  $\partial Y = (L_1 \times \{0\}) \cup (-L_2 \times \{1\})$ , em que  $-L$  indica que a orientação de  $L$  foi invertida.

Por definição,  $Y$  é chamado de cobordismo entre  $L_1$  e  $L_2$ .

Uma classe especial de nós algébricos são os provenientes dos polinômios complexos (quase-homogêneos) chamados de Pham-Brieskorn  $f(z_1, \dots, z_{n+1}) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ , em que os expoentes  $a_j \geq 2$  são inteiros positivos. Nesta classe, o sistema de pesos  $\omega = (a_1, \dots, a_{n+1})$  em conjunto com o polinômio de Alexander e a forma de Seifert do nó (Ver (ARAÚJO DOS SANTOS; SAEKI; SOUZA, 2022) para definições e resultados relacionados) têm uma importância fundamental para determinar o tipo topológico da singularidade, como veremos brevemente a seguir:

1. Em (YOSHINAGA; SUZUKI, 1978) foi mostrado que os nós algébricos  $L_f$  e  $L_g$  (para polinômios Pham-Brieskorn) são isotópicos se, e somente se, o sistemas de pesos  $\omega_f$  e  $\omega_g$  coincidem a menos da ordem se, e somente se, os polinômios de Alexander  $\Delta_f(t) = \pm \Delta_g(t)$ .
2. Em (SAEKI, 1987) foi utilizado técnicas da teoria de nó para mostrar que dado um polinômio complexo em três variáveis  $f(z_1, z_2, z_3)$  quase-homogêneo com singularidade isolada na origem e  $\Delta_f(1) = \pm 1$ , então  $f$  é topologicamente equivalente a um polinômio do tipo Pham-Brieskorn acima.
3. Em (BLANLŒIL; SAEKI, 2011) foi mostrado que para polinômios quase-homogêneos (quaisquer) em duas variáveis complexas  $f(z_1, z_2)$  e  $g(z_1, z_2)$  com singularidade isolada na origem, as formas de Seifert  $\mathcal{L}_f$  e  $\mathcal{L}_g$  são Witt equivalentes sobre  $\mathbb{R}$  se e somente se,  $f$  e  $g$  tem os mesmos pesos (de quase-homogeneidade) a menos da ordem. Além disso, no caso de três variáveis com  $f(z_1, z_2, z_3)$  e  $g(z_1, z_2, z_3)$  ainda do tipo Pham-Brieskorn, as

formas de Seifert  $\mathcal{L}_f$  e  $\mathcal{L}_g$  são Witt equivalentes sobre  $\mathbb{R}$  se, e somente se, os respectivos pesos ( $\omega_f$  e  $\omega_g$ ) em cada variável são iguais a menos da ordem. Para mais detalhes veja (BLANLCEIL; SAEKI, 2011, Section 4).

### 1.1.2 Motivação no caso real

Um enlaçamento  $L$  em  $S^3$  é fibrado se o complemento  $S^3 \setminus L$  é um espaço fibrado sobre  $S^1$  cuja fibra  $F$  é o interior de uma superfície compacta e orientada com  $\partial \bar{F} = L$ . É classicamente conhecido que enlaçamentos fibrados na 3-esfera foram caracterizados em (STALLINGS, 1978) onde foi mostrado que  $L$  é fibrado se e somente se o subgrupo comutador do grupo fundamental  $\pi_1(S^3 \setminus L)$  é finitamente gerado.

Em (AKBULUT; KING, 1981) e mais recentemente em (BODE, 2022a) foi mostrado que todo enlaçamento (não necessariamente fibrado) na 3-esfera pode ser associado a algum tipo de singularidade de germe de aplicação polinomial  $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , ou respectivamente de um polinômio semiholomorfo  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , com uma *singularidade fracamente isolada* na origem no sentido que  $\Sigma_f \cap V_f = \{0\}$  como um germe de conjuntos, onde  $\Sigma_f$  é o conjunto singular de  $f$  e  $V_f := f^{-1}(0)$ . Isto motivou em (BENEDETTI; SHIOTA, 1998) a introdução do seguinte conceito: um enlaçamento  $L$  em  $S^3$  é chamado *fracamente algébrico* se existem um germe de aplicação polinomial  $f_L : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  com singularidade fracamente isolada na origem e um número positivo real  $\rho_0$  tal que  $L_{f_L, \rho} := V_{f_L} \cap S_\rho^3$  é isotópico a  $L$  em  $S_\rho^3 \approx S^3$  para cada  $0 < \rho \leq \rho_0$ , onde  $S_\rho^3$  é a esfera de raio  $\rho$  centrada na origem em  $\mathbb{R}^4$ .

Neste caso, diremos que o germe de aplicação polinomial  $f_L$  é uma *realização fraca* de  $L$ . No caso particular onde  $\Sigma_{f_L} = \{0\}$  diremos que  $f_L$  é uma *realização forte* de  $L$  e que  $L$  é um *enlaçamento algébrico real*.

No caso de um germe de polinômio holomorfo  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com singularidade isolada na origem o enlaçamento  $L_f$  foi completamente caracterizado como uma classe de uniões de nós toroidais iterados (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986). Como todo polinômio complexo  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser visto como uma aplicação polinomial real  $(\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  segue que enlaçamentos algébricos (ver Subseção 3.2.1) formam uma classe bem conhecida de enlaçamentos algébricos reais.

Por outro lado, para um germe de aplicação analítica real com singularidade isolada na origem  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $n > p \geq 2$ , Milnor provou que para cada  $\rho$  suficientemente pequeno o enlaçamento  $L_{f, \rho} = f^{-1}(0) \cap S_\rho^{n-1}$ ,  $0 < \rho \ll 1$  é sempre um enlaçamento fibrado (Veja Definição 5). Portanto, para  $n = 4$  e  $p = 2$  todo enlaçamento algébrico real  $L_f$  não vazio é um enlaçamento fibrado na 3-esfera.

A recíproca ainda é um problema em aberto e foi conjecturado em (BENEDETTI; SHIOTA, 1998) que: todo enlaçamento fibrado é algébrico real.

Em (LOOIJENGA, 1971) pode ser encontrada uma resposta parcial desta conjectura

(antes ainda dela ter sido enunciada) como consequência de uma construção mais geral em que mostra que dado um enlaçamento fibrado  $(S^3, L)$ , uma soma conexa especial  $(S^3, L) \# (S^3, L)$  (ver [Subseção 3.2.2](#)) admite uma realização forte, ou seja é um enlaçamento algébrico real.

Recentemente, ([BODE, 2019](#); [BODE, 2022a](#)) estudou enlaçamentos na 3-esfera a partir da perspectiva da teoria de tranças seguindo uma construção desenvolvida em ([BODE; DENNIS, 2019](#)), que é semelhante à construção da realização forte do nó da figura oito (figure eight knot) feita por ([PERRON, 1981/82](#)). Bode provou que dado uma *trança quadrada*  $B$ , isto é,  $B = w^2$  para uma trança  $w$ , é possível construir uma realização fraca  $f_L := (\text{Re}(f), \text{Im}(f)) : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  do fecho de  $B$ , denotado por  $L$ . Quando a trança  $B$  é homogênea (ver [Definição 7](#)), foi mostrado que  $f_L$  é uma realização forte de  $L$  tornando-o assim um enlaçamento algébrico real.

As classes de polinômios construídas por Bode chamam a atenção por se conectarem com os exemplos construídos por ([RUDOLPH, 1987](#)) para realização forte do nó da figura oito e anéis Borromeanos, com os exemplos construídos em ([PICHON, 2005](#)) para realizações fortes de união de nós toroidais iterados, e com outros exemplos na literatura para construir singularidades analíticas reais que não são topologicamente equivalentes a uma holomorfa. Tal conexão vem através da classe de polinômios mistos que foram sistematicamente estudadas em ([OKA, 2010](#)).

## 1.2 Resumo da tese

Nessa direção o objetivo principal deste trabalho é explorar a conexão entre a conjectura de Benedetti-Shiota e o estudo da topologia das singularidades de polinômios mistos; bem como, as singularidades das realizações de enlaçamentos na 3-esfera. Para isso, propomos fornecer métodos que permitam descrever os enlaçamentos associados a esses polinômios mistos, além de examinar com clareza as condições que garantam realizações fortes. Com esse propósito em mente, organizamos nosso trabalho da seguinte forma:

Ao longo de todo o trabalho colocamos ao menos uma referência para os resultados e definições classicamente conhecidos e que utilizaremos como base. Nos casos em que não colocamos referências significa que, ou são conceitos amplamente conhecidos (dispensando assim referências), ou são conceitos novos que introduzimos neste trabalho. De forma geral os resultados novos deste trabalho estão na forma de artigos nas referências ([ARAÚJO DOS SANTOS; SANCHEZ QUICENO, 2020](#)), ([ARAÚJO DOS SANTOS; BODE; SANCHEZ QUICENO, 2022](#)) e ([BODE; SANCHEZ QUICENO, 2023](#)).

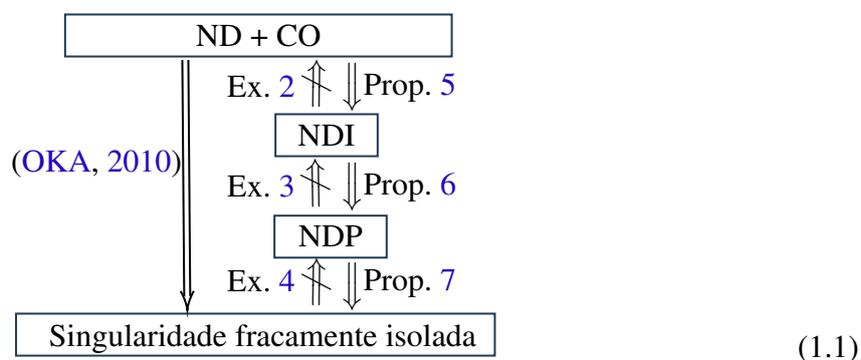
No [Capítulo 2](#), apresentamos conceitos fundamentais da teoria de enlaçamentos e teoria de tranças, sobretudo sua conexão através do famoso Teorema de Alexander ([ALEXANDER, 1923](#)), que diz que todo enlaçamento é isotópico ao fecho de uma trança. Descrevemos o processo de fechamento de tranças no toro sólido e na 3-esfera, e apresentamos uma versão refinada do Teorema de Alexander ([BODE; DENNIS, 2019](#)) para tranças que admitem uma parametrização por polinômios de Fourier (Veja Equação (2.3)). Para apresentar o processo de fechamento

de tranças no toro sólido e seu mergulho na 3-esfera introduzimos vários passos ilustrando o processo de forma mais geométrica. No nosso entendimento esses passos tornam o processo mais didático para não especialistas.

No [Capítulo 3](#), abordamos alguns resultados prévios que conectam a teoria de enlaçamentos e a teoria de singularidades, destacando, em especial, as classes de enlaçamentos fibrados (NS-pares) provenientes dos resultados de ([MILNOR, 1968](#)) e ([LOOIJENGA, 1971](#)). Neste contexto apresentamos também os conceitos de enlaçamentos fracamente algébrico e algébrico real ([Definição 9](#)), e discutimos o problema de caracterização desses enlaçamentos na 3-esfera. Resumimos em [Subseção 3.2.1](#) e [3.2.2](#) os resultados sobre enlaçamentos associados à singularidades, em particular relembramos o [Teorema 5](#) que afirma que todo enlaçamento na 3-esfera é fracamente algébrico. Ressaltamos, nesta direção de realizações, a conjectura de Benedetti-Shiota ([Conjetura 1](#)).

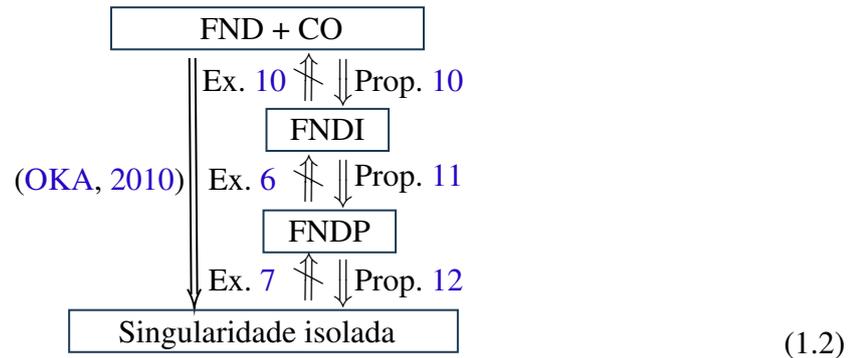
No [Capítulo 4](#), iniciamos apresentando a classe de polinômios mistos, suas diferentes formulações do conjunto singular e a construção do bordo de Newton radial, que é característico de polinômios mistos. Em seguida, relacionamos os polinômios mistos ao problema de realização de enlaçamentos na 3-esfera, destacando as realizações semiholomorfas, as quais são capazes de realizar fracamente todo enlaçamento na 3-esfera ([BODE, 2022a](#)). Na [Seção 4.3](#), a fim de entender a relação entre tranças e o problema de realização, apresentamos diferentes abordagens anteriores de realização a partir da parametrização de Fourier de uma trança. Em seguida contrastamos essas com o estudo do enlaçamento e das singularidades de polinômios semiholomorfos radialmente homogêneos pesados, abordados em [Proposição 2, 3 e 4](#).

No [Capítulo 5](#), apresentamos novas condições de não-degeneração de um polinômio misto que generalizam conceitos anteriores. Na [Seção 5.1](#) introduzimos os conceitos NDI e NDP ([Definição 18 e 22](#)) e mostramos sua conexão com a condição de não-degeneração (ND) e conveniência (CO) definida por [Oka \(2010\)](#), como resumimos no Diagrama (1.1).



Também mostramos na [Proposição 9](#) que para polinômios mistos radialmente homogêneos pesados, os conceitos NDI, NDP, e singularidade fracamente isolada na origem são equivalentes. Na [Seção 5.2](#), apresentamos versões fortes dos conceitos anteriores que chamamos de FNDI e FNDP ([Definição 21 e 22](#)), que fornecem classes de singularidades isoladas na origem. E analogamente ao caso anterior relacionamos estes com a condição (FND+CO) definida por [Oka](#)

(2010), como resumimos no Diagrama (1.2).



Além disso, demonstramos no Teorema 9 que a condição FNDI generaliza o Teorema 8 apresentado em (OKA, 2010), e em Exemplo 8 mostramos que isto não vale para a condição FNDP. Por fim, no Corolário 2 desta mesma seção mostramos que no caso radialmente homogêneo pesado os conceitos FNDI, FNDP, singularidade isolada na origem e a condição relacionada com Teorema 9 são equivalentes.

No Capítulo 6, desenvolvemos um novo método (Teorema 12) que nos permite compreender o tipo topológico de um polinômio misto NDI sob uma condição que chamamos de *nice* (Definição 26). Neste caso, o enlaçamento da singularidade é isotópico a um enlaçamento aninhado (Definição 24) “imitando o empacotamento encaixado das bonecas russas”. Em particular, no caso de polinômios semiholomorfos NDI essa condição *nice* é sempre satisfeita e a descrição do enlaçamento é feita a partir do fecho de uma trança aninhada (Definição 23). Essas descrições são feitas no Teorema 12 onde se prova que essas informações são inteiramente obtidas no bordo de Newton do polinômio misto, permitindo assim deduzir que o enlaçamento associado a esses polinômios é determinado pela sua parte principal de Newton. Esse resultado generaliza o teorema no caso de polinômios holomorfos ND provado em ((FUKUI; YOSHINAGA, 1985) e (KING, 1978)). Além disso, na Subseção 6.2.2 apresentamos duas aplicações do método anterior, Corolário 4 e 5, que lidam com os problemas de contagem de componentes do enlaçamento de um polinômio misto e com transformações de um polinômio misto em um polinômio misto Newton conveniente ou cômodo (CO).

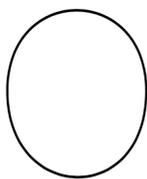
No Capítulo 7, abordamos diversos tópicos relacionados à construção de polinômios mistos FNDI que realizam enlaçamentos algébricos reais na 3-esfera. Na Seção 7.1, apresentamos os polinômios com ação polar e discutimos propriedades dos polinômios mistos do tipo produto. Na Seção 7.2, no Teorema 13, apresentamos classes de realizações fortes que generalizam as classes  $f\bar{g}$ ,  $f$  e  $g$  holomorfas, construídas em (PICHON, 2005). No Teorema 14, apresentamos classes de realizações fortes do tipo produto que não necessariamente satisfazem uma ação polar. Além disso, construímos vários exemplos, incluindo exemplos que mostram que as condições FNDP e FNDI não são equivalentes à condição FND+CO. Ver Exemplo 10. Essas construções evidenciam que, embora os enlaçamentos algébricos reais realizados por polinômios mistos FNDI tenham uma estrutura aninhada, seu agrupamento de componentes particulares não necessariamente são enlaçamentos fibrados. Veja Exemplo 11.

## ENLAÇAMENTOS E TRANÇAS

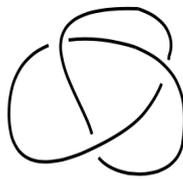
Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos na conexão entre a teoria de enlaçamentos e a teoria de tranças de um ponto de vista mais moderno e sobretudo destacando a geometria por trás desses conceitos. Apresentamos por fim a ideia de como um trança geométrica pode ser aproximada por uma parametrização trigonométrica de uma série finita de Fourier.

### 2.1 Enlaçamentos

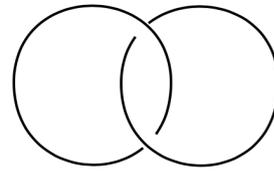
**Definição 1.** Um *enlaçamento de  $l$ -componentes*  $L = \cup_{j=1}^l L_j$  é uma união disjunta de  $l$  cópias  $L_j$  de  $S^1$  suavemente mergulhadas em  $S^3$ .



(a) Nó trivial



(b) Nó de trevo



(c) Enlaçamento de Hopf

Figura 1 – Enlaçamentos na 3-esfera

É possível dotar cada componente conexa do enlaçamento de uma orientação. Neste caso chamamos  $L$  de um *enlaçamento orientado de  $l$ -componentes*. Veja o exemplo do enlaçamento de Hopf na [Figura 2](#), onde este foi dotado com duas orientações diferentes.



(a) Enlaçamento de Hopf orientado

(b) Enlaçamento de Hopf com diferente orientação

Figura 2 – Enlaçamentos de Hopf orientados

**Definição 2.** Dois enlaçamentos (orientados) de  $l$ -componentes  $L_1 = \cup_{j=1}^l L_{1,j}$  e  $L_2 = \cup_{j=1}^l L_{2,j}$  são *isotópicos* se existe uma aplicação suave  $\varphi : S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$  tal que  $\varphi(\bullet, 0)$  é a identidade,  $\varphi(L_1, 1) = L_2$  e  $\varphi(\bullet, t)$  é um difeomorfismo (que preserva a orientação) para cada  $t \in [0, 1]$ . A aplicação  $\varphi$  é chamada de *isotopia ambiente suave*.

É importante ressaltar que orientações diferentes no mesmo enlaçamento podem gerar enlaçamentos orientados não isotópicos. Por exemplo, os enlaçamentos orientados nas [Figura 2-\(a\)](#) e [Figura 2-\(b\)](#) não são isotópicos como enlaçamentos orientados. Uma maneira de verificar isto é comparando o número de enlaçamento que nas [Figura 2-\(a\)](#) e [Figura 2-\(b\)](#) são  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. Veja ([ROLFSEN, 1990](#); [KAWAUCHI, 1996](#)) para mais detalhes.

Uma ferramenta bastante útil para provar que dois enlaçamentos são isotópicos é o Teorema da Extensão de Isotopia, o qual diz que é suficiente construir uma isotopia suave entre os conjuntos de curvas.

**Teorema 1.** ([HIRSCH, 1976](#)) Seja  $I : (S^1 \cup \dots \cup S^1) \times [0, 1] \rightarrow S^3$  uma função suave tal que  $I_\tau : (S^1 \cup \dots \cup S^1) \rightarrow S^3$  definida por  $I_\tau(S^1 \cup \dots \cup S^1) = I(S^1 \cup \dots \cup S^1, \tau)$  é um família a um parâmetro  $\tau \in [0, 1]$  de mergulhos suaves de  $l$  círculos em  $S^3$  satisfazendo  $I(S^1 \cup \dots \cup S^1, 0) = L_1$  e  $I(S^1 \cup \dots \cup S^1, 1) = L_2$ , então existe uma isotopia ambiente suave  $\tilde{I} : S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$  com  $\tilde{I}(L_1, \tau) = I(S^1 \cup \dots \cup S^1, \tau)$  para cada  $\tau \in [0, 1]$ .

## 2.2 Breve introdução a tranças e seus fechos

As tranças foram introduzidas por Artin em 1925 ([ARTIN, 1925](#)) onde ele propôs usar as tranças para o estudo de enlaçamentos. Vamos introduzir a seguir as tranças geométricas em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  que serão uns dos nosso principais objetos de estudo. Uma exposição das definições e resultados básicos pode ser encontrada em ([KASSEL; TURAEV, 2008](#)).

Fixada uma cópia de  $\mathbb{C}$  e  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\} \subset \mathbb{C}$  um conjunto de  $s$  distintos números complexos, a ideia intuitiva de uma trança geométrica de  $s$  fios em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  com base no conjunto  $A$  é uma coleção de  $s$  curvas disjuntas difeomorfas ao intervalo  $[0, 1]$ , com pontos iniciais no conjunto  $A \times \{0\} \subset \mathbb{C} \times \{0\}$  e pontos finais no conjunto  $A \times \{2\pi\} \subset \mathbb{C} \times \{2\pi\}$ ; além

disso, em cada curva (que é vista como o fio da trança) a reta tangente não é paralela ao plano  $\mathbb{C} \times \{0\}$ .

Em particular fixado o conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  e denotando por  $S_s$  o conjunto das permutações dos inteiros  $\{1, 2, \dots, s\}$ , dada uma trança geométrica com base no conjunto  $A$  existe uma permutação  $\sigma \in S_s$  tal que o  $j$ -ésimo fio tem ponto inicial  $(a_j, 0)$  e ponto final  $(a_{\sigma(j)}, 2\pi)$ .

A partir deste ponto estaremos considerando sem perda de generalidade que o conjunto de pontos base da trança  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  satisfaz a condição  $\text{Re}(a_1) < \text{Re}(a_2) < \dots < \text{Re}(a_s)$ , a menos que o contrário seja explicitamente mencionado.

### 2.2.1 Tranças geométricas e algébricas

Com base nesta ideia vamos considerar a definição a seguir que vai ser útil ao longo deste trabalho.

**Definição 3.** Dado  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  pontos distintos em  $\mathbb{C}$ , uma *trança geométrica de  $s$  fios*  $B$  em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  com base em  $A$  é uma coleção de  $s$  curvas suaves e disjuntas em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  que admite uma parametrização da forma

$$\bigcup_{j=1}^s \{(u_j(t), t) : t \in [0, 2\pi]\} \quad (2.1)$$

para algumas funções suaves  $u_j : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , com  $u_j(0) = a_j$  e  $u_j(2\pi) = a_{\sigma(j)}$  para alguma permutação  $\sigma \in S_s$ . Veja uma ilustração na [Figura 3](#).

Por convenção o  $j$ -ésimo fio da trança é o fio cuja parametrização é dada por  $\{(u_j(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$ . Por simplicidade e quando não houver confusão vamos denotar o  $j$ -ésimo fio por  $u_j$ .

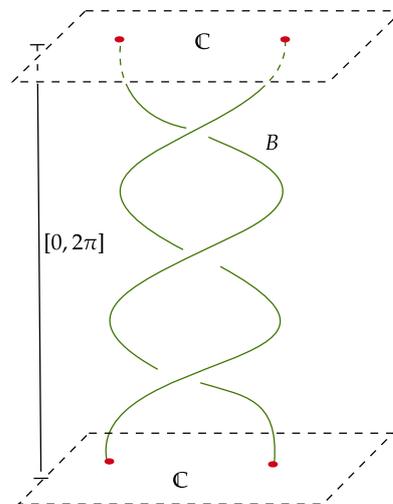


Figura 3 – Trança geométrica

**Definição 4.** Duas tranças geométricas  $B, \tilde{B}$  são chamadas *ambiente isotópicas* se existir uma aplicação suave  $F : \mathbb{C} \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  tal que para cada  $\tau \in [0, 1]$  a aplicação  $F_\tau : \mathbb{C} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  é um difeomorfismo suave que é a identidade em  $\mathbb{C} \times \{0\}$  e  $\mathbb{C} \times \{2\pi\}$ , com  $F_0 = \text{Id}$ ,  $F_\tau(B)$  uma trança geométrica para todo  $\tau$  e  $F_1(B) = \tilde{B}$ .

**Observação 1.** É possível considerar a classe de isotopia de tranças geométricas em que as deformações de  $B$  em  $\tilde{B}$  são feitas através de uma família de tranças geométricas  $B_\tau$ ,  $\tau \in [0, 1]$ ,  $B_0 = B$  e  $B_1 = \tilde{B}$ , com pontos iniciais e finais fixos ao longo da deformação e sem necessariamente envolver todo o ambiente  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ . Ainda assim é possível provar que uma isotopia desta forma se estende a uma isotopia de todo ambiente  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ , como na [Definição 4](#). Mais detalhes podem ser visto em ([KASSEL; TURAEV, 2008](#), Theorem 1.40, p. 44).

Fixados  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{C}$  pontos distintos, podemos considerar o conjunto de todas as tranças geométricas com base nestes pontos. A isotopia de tranças geométricas define uma relação de equivalência neste conjunto e chamamos de *trança* à classe de equivalência desses objetos.

Em muitos textos ambas, a classe de equivalência e qualquer representante são chamados simplesmente de tranças. Porém, neste trabalho algumas construções podem depender da escolha das parametrizações da trança geométrica. Para enfatizar isto, referimos a uma classe de isotopia como uma trança e a um representante da classe como uma trança geométrica. Contudo, para o caso de propriedades topológicas esta distinção não será necessária.

Existe uma composição natural de duas tranças  $B$  e  $\tilde{B}$  que é formada pela adjunção da parte superior da primeira trança  $B$  com a parte inferior da segunda trança  $\tilde{B}$ , o que a menos de reparametrização da direção vertical podemos representar como uma nova trança em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  que denotamos por  $B\tilde{B}$ . Chamamos esta composição de *concatenação* de tranças.

A concatenação dos representantes define uma operação nas classes de equivalência das tranças, que é associativa e possui um elemento identidade como representado pela [Figura 4](#). Além disso, para cada classe de equivalência existe um elemento inverso. Essas propriedades fazem com que o conjunto de tranças munido com a operação de concatenação forme um grupo conhecido como o grupo de tranças de Artin ([ARTIN, 1925](#)). Para mais detalhes sobre o grupo veja ([BIRMAN, 1974](#)) ou ([KASSEL; TURAEV, 2008](#)).

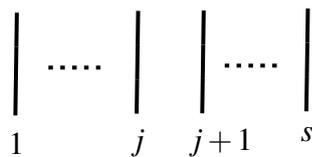


Figura 4 – Identidade de  $B_s$

Ao longo deste trabalho vamos denotar o grupo de tranças com  $s$  fios por  $B_s$ . Antes de descrever os geradores do grupo  $B_s$  devemos fixar algumas notações:

Fixando uma parametrização da trança geométrica  $B = \bigcup_{j=1}^s \{(u_j(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$  denote por  $\text{Re}(\mathbb{C})$  e  $\text{Im}(\mathbb{C})$  os eixos que representam a parte real e imaginária da reta complexa  $\mathbb{C}$ , respectivamente. Logo para cada  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  e para todo  $t \in [0, 2\pi]$  considere  $\text{Re}(u_j(t))$  e  $\text{Im}(u_j(t))$  tal que  $u_j(t) = \text{Re}(u_j(t)) + i\text{Im}(u_j(t))$ , em que  $i = \sqrt{-1}$ .

Para especificar uma trança geométrica podemos considerar sua projeção no  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$  e em cada ponto de “cruzamento da projeção” indicar se esta ocorreu “positivamente” ou “negativamente”. Por cruzamento da projeção (ou simplesmente cruzamento) queremos indicar os pontos na imagem da projeção da trança em que existe  $t_* \in (0, 2\pi)$  satisfazendo  $\text{Re}(u_j(t_*)) = \text{Re}(u_k(t_*))$  com  $j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$  com  $j \neq k$ . Ver [Figura 5](#).

Para isto vamos considerar que a projeção ortogonal dos fios da trança no plano  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$  cumprem as seguintes condições:

- (i) Os fios projetados ou não se intersectam, ou se intersectam transversalmente.
- (ii) Cada ponto de interseção envolve somente a projeção de dois fios.

Genericamente é sempre possível escolher um representante da trança cuja projeção cumpre as condições acima. Esta projeção é conhecida como o *diagrama da trança*.

Vamos fixar neste ponto uma convenção para decidir se um cruzamento ocorreu positivamente ou negativamente, desta perspectiva da projeção.

Para isto considere dois fios distintos  $u_j$  e  $u_k$  cujas projeções admite um cruzamento na faixa  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]$  para algum  $t_* \in (0, 2\pi)$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Diremos que o fio  $u_j$  está à *esquerda* do fio  $u_k$  na faixa  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]$  se  $\text{Re}(u_j(t)) < \text{Re}(u_k(t))$  para  $t \in [t_* - \varepsilon, t_*)$ . Caso contrário, ou seja, se  $\text{Re}(u_j(t)) > \text{Re}(u_k(t))$  para  $t \in [t_* - \varepsilon, t_*)$  diremos que  $u_j$  está à *direita* do fio  $u_k$  na faixa  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]$ .

Nestas condições diremos que o cruzamento das projeções do  $j$ -ésimo fio com o  $k$ -ésimo fio na faixa  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]$  é *positivo*, se existir  $\varepsilon > 0$  (suficientemente pequeno) tal que para todo  $t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)$   $\text{Im}(u_j(t)) < \text{Im}(u_k(t))$ , e o cruzamento é *negativo* se  $\text{Im}(u_j(t)) > \text{Im}(u_k(t))$ . Veja [Figura 5](#) e [6](#) abaixo.

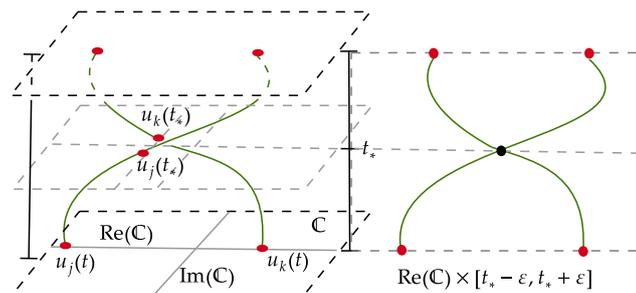


Figura 5 – Cruzamento positivo

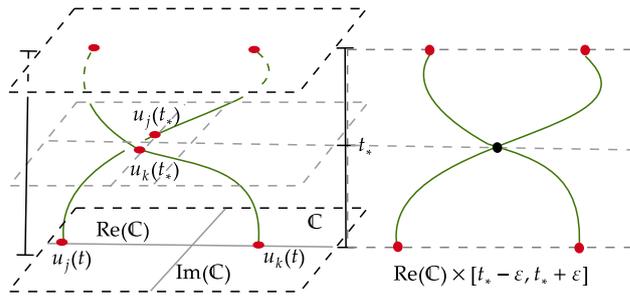


Figura 6 – Cruzamento negativo

Com base nas definições e notações acima vamos considerar a trança com  $s$  fios cuja projeção no plano  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$  admite um único cruzamento que é positivo e proveniente das projeções dos fios  $u_j$  e  $u_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s - 1$ . Neste caso chamamos tal trança de uma *trança básica* e denotaremos por  $\sigma_j$ . Se nas condições anteriores o cruzamento das projeções dos fios  $u_j$  e  $u_{j+1}$  é negativo vamos denotar este por  $\sigma_j^{-1}$ . Veja [Figura 7](#) para visualizar  $\sigma_j$  e  $\sigma_j^{-1}$ . Com isto podemos enunciar o seguinte resultado:

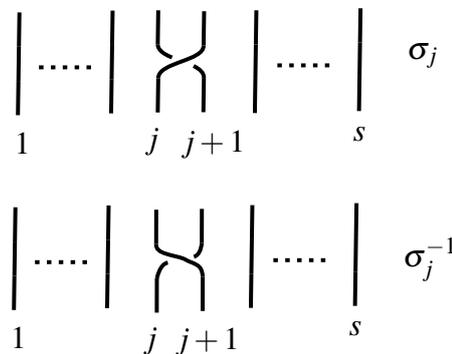


Figura 7 – Gerador  $\sigma_j$  e seu inverso  $\sigma_j^{-1}$

**Teorema 2.** O grupo de tranças  $B_s$  pode ser representado como segue:

$$B_s = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{s-1} : \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| > 1, \\ \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}, j \in \{1, 2, \dots, s - 2\} \end{array} \right\rangle.$$

De forma geral o [Teorema 2](#) diz que dada uma trança geométrica  $B$  esta é isotópica à concatenação de tranças básicas e seus inversos. Em resumo, mais geometricamente podemos encontrar uma partição  $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi\}$  de  $[0, 2\pi]$  tal que em cada faixa  $\mathbb{C} \times [t_l, t_{l+1}]$ ,  $0 \leq l \leq n - 1$  a trança geométrica  $B$  (a menos de isotopia) é representada por uma trança básica  $\sigma_j$  ou um inverso  $\sigma_j^{-1}$ .

### 2.2.2 O fecho de uma trança na 3-esfera

Para efeito de entendermos a relação entre tranças (braids) e enlaçamentos (links) vamos mostrar nesta subseção como podemos fechar uma trança na 3-esfera obtendo desta forma um enlaçamento no sentido clássico. Para isto considere a seguinte identificação topológica dos pontos em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ : para cada  $u \in \mathbb{C}$  identifique  $(u, 0) \sim (u, 2\pi)$  e para todo  $t \in (0, 2\pi)$  identifique  $(u, t) \sim (u, t)$ .

A relação “ $\sim$ ” é uma relação de equivalência no espaço topológico  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  e o espaço quociente  $\frac{\mathbb{C} \times [0, 2\pi]}{\sim}$  é identificado com o toro sólido aberto  $\mathbb{C} \times S^1$ . Veja ilustração na [Figura 8](#).

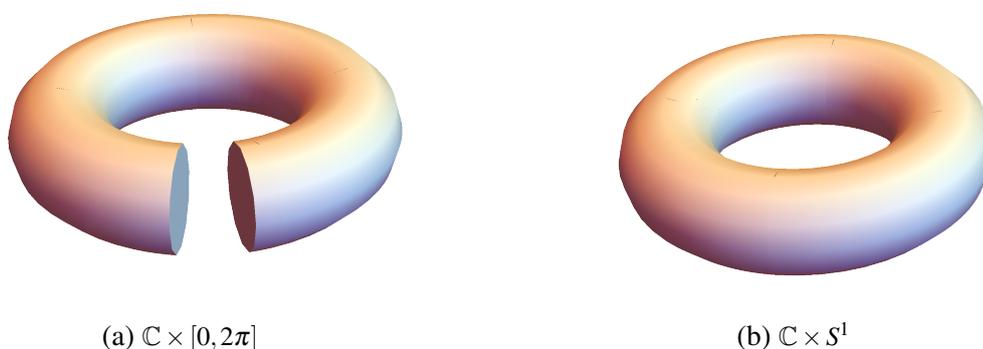


Figura 8 – Processo de identificação de  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  em  $\mathbb{C} \times S^1$

Já que os pontos iniciais da trança geométrica  $B$  no plano  $\mathbb{C} \times \{0\}$  coincidem com os pontos finais no plano  $\mathbb{C} \times \{2\pi\}$ , a menos de uma permutação, segue que após a identificação teremos uma coleção disjunta de curvas fechadas homeomorfas a  $S^1$  e após suavização podemos considerar que são difeomorfas a  $S^1$ . Este processo é chamado do fecho da trança em  $\mathbb{C} \times S^1$  e está bem definido na classe de isotopia da trança geométrica. Veja por exemplo [Figura 9](#) a seguir, onde está ilustrado a trança  $B$  da [Figura 3](#) após a identificação comentada anteriormente.

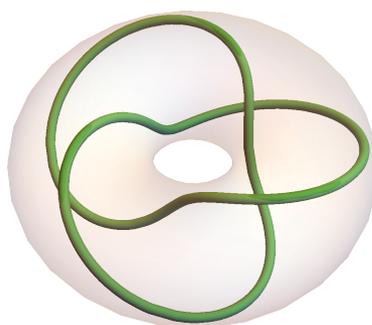


Figura 9 – Fecho da trança em  $\mathbb{C} \times S^1$

Uma maneira topologicamente usual de obter  $S^3$  é como o bordo da bola fechada  $B^4 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ . Topologicamente a bola  $B^4$  pode ser identificada com o espaço  $D \times D$  onde  $D = \{u \in \mathbb{C} : |u| \leq 1\}$  é o disco fechado unitário. Consequentemente,

$$S^3 \approx \partial(D \times D) = (D \times S^1) \cup_{S^1 \times S^1} (S^1 \times D).$$

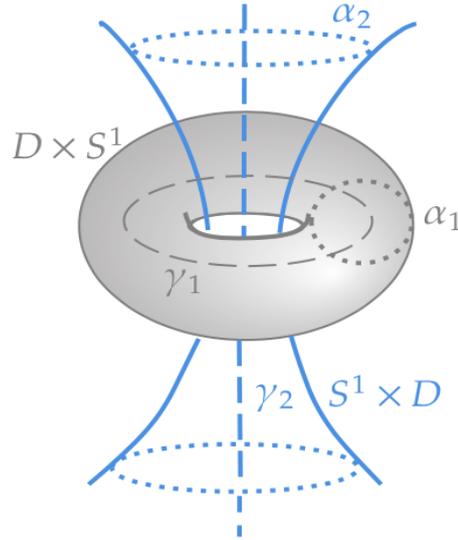


Figura 10 – Decomposição da 3-esfera como a união de dois toros sólidos

Assim  $S^3$  é visto como a união de dois toros sólidos fechados unidos no seu bordo comum  $S^1 \times S^1$ .

Fixando o toro sólido  $D \times S^1$  a curva  $\{0\} \times S^1$ , que é um nó trivial, é chamada de *núcleo* ou linha central ou 0-seção do toro sólido  $D \times S^1$ . Veja uma ilustração do núcleo  $\gamma_1$  de  $D \times S^1$  na Figura 10.

Neste trabalho vamos identificar  $\mathbb{C} \times S^1$  canonicamente com o interior de  $D \times S^1$ , isto é, usamos o mergulho padrão sem torção do toro sólido aberto  $\mathbb{C} \times S^1$  no interior do toro sólido fechado  $D \times S^1$ . Portanto, dada uma trança geométrica (orientada)  $B \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ , o seu fecho em  $\mathbb{C} \times S^1$  como mencionado anteriormente, pode ser visto como um enlaçamento (orientado) na  $S^3$ , o qual é chamado de *fecho da trança geométrica B* na  $S^3$ . Por definição o núcleo  $S^1 \times \{0\}$  do toro complementar  $S^1 \times D$  é o eixo de trançamento do fecho de  $B$ . Veja uma ilustração do núcleo  $S^1 \times \{0\}$  dado pela curva  $\gamma_2$  na Figura 10.

Além disso, podemos assumir  $|u_j(t)| < 1$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$  e  $j = 1, 2, \dots, s$ , desta forma podemos considerar que o fecho dos fios em  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  são parametrizados por

$$\bigcup_{j=1}^s \left\{ \left( u_j(t), \sqrt{1 - |u_j(t)|^2} e^{it} \right) : t \in [0, 2\pi] \right\} \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2. \quad (2.2)$$

A curva parametrizada  $\{(e^{i\chi}, 0) : \chi \in [0, 2\pi]\}$  é o eixo de trançamento.

Como discutido acima toda trança fecha num enlaçamento em  $S^3$ . Se considerarmos em cada componente conexa do fecho uma orientação (que pode ser escolhida arbitrariamente) teremos com isso um enlaçamento orientado. Uma forma canônica de orientar o enlaçamento é considerar o sentido de percurso dos pontos em cada fio da trança sendo o proveniente da própria parametrização dos fios, como na Equação (2.1), ou seja, quando percorrermos o intervalo  $[0, 2\pi]$  no sentido positivo os pontos na imagem de cada fio vão do plano  $\mathbb{C} \times \{0\}$  para o plano  $\mathbb{C} \times \{2\pi\}$ .

A recíproca também é verdadeira e foi provada por (ALEXANDER, 1923); isto é, todo enlaçamento orientado em  $S^3$  é isotópico a o fecho de uma trança geométrica com  $s$  fios orientado canonicamente. Isto demonstra uma conexão interessante entre o estudo de enlaçamentos (links) na 3-esfera com a teoria de tranças (braids).

## 2.3 Parametrização de Fourier de uma trança

Nesta seção mostraremos uma forma de conectar a teoria de tranças e a teoria de singularidade por meio dos polinômios trigonométricos de Fourier. Para isto vamos apresentar inicialmente uma ideia sobre a existência da parametrização de Fourier tomando como base os trabalhos (BODE, 2018; DENNIS *et al.*, 2010; BODE *et al.*, 2017; DENNIS; BODE, 2017a; BODE; DENNIS, 2019) onde os autores mostram como aproximar uma dada parametrização de uma trança geométrica  $B$  por uma parametrização proveniente de polinômios trigonométricos de Fourier. Em seguida apresentaremos um algoritmo que mostra como exibir explicitamente uma parametrização de uma dada trança, que não necessariamente seja proveniente de uma parametrização suave. Este algoritmo pode ser utilizado para encontrar uma trança geométrica (suave) uma vez que tenhamos uma parametrização dos fios que seja por exemplo linear por partes.

### 2.3.1 Existência da parametrização de Fourier

Dada uma trança geométrica  $B = \bigcup_{j=1}^s \{(u_j(t), t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  denote por  $\mathcal{C}$  o conjunto de componentes conexas do fecho da trança  $B$  em  $\mathbb{C} \times S^1$ . Ver Figura 11-(b). Considere a projeção vertical das  $s$  curvas  $(u_j(t), t)$ ,  $j = 1, \dots, s$  no plano  $\mathbb{C} \times \{0\}$ . Ver Figura 11-(a). A projeção fornece um conjunto  $\mathcal{P}_B$  de  $l$  curvas planas fechadas  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$  provenientes de  $s_{C_j}$  fios que fecham numa das componentes conexas  $\hat{C}_j \in \mathcal{C}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Note que existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{P}_B$  portanto o número de componentes de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{P}_B$ , denotados por  $|\mathcal{C}|$  e  $|\mathcal{P}_B|$  respectivamente, coincidem. Em (BODE; DENNIS, 2019) se usa a notação  $s_{\hat{C}}$  para se referir ao número de fios que fecha na componente  $\hat{C} \in \mathcal{C}$ , porém nesta tese usamos  $s_C$  para nos referir ao mesmo número de fios que projetam em  $C \in \mathcal{P}_B$ , e que a sua vez fecham em  $\hat{C}$ .

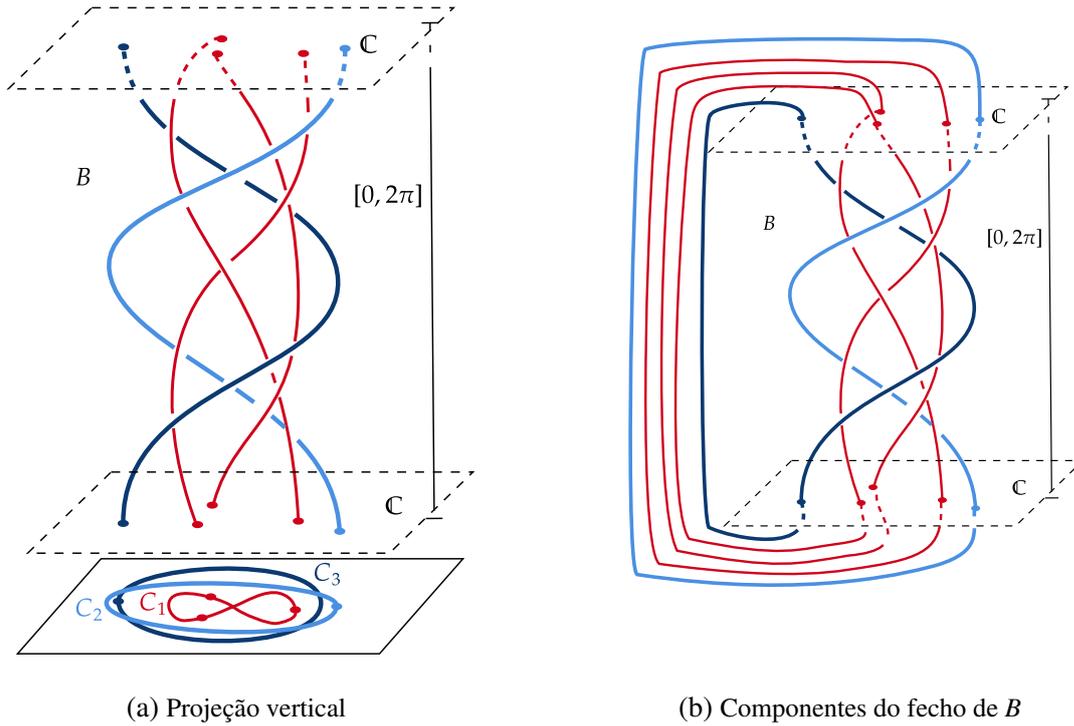


Figura 11 – Curvas fechadas planas

Para cada curva  $C \in \mathcal{P}_B$  a qual é periódica temos que pelo Teorema de Stone–Weierstrass (RUDIN, 1976, Theorem 8.15, p.190) existe uma aproximação  $F_C(t) + iG_C(t)$ , tão próxima quanto desejarmos, por polinômios trigonométricos  $F_C, G_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F_C(t) = \sum_{l=-N_C}^{N_C} a_{C,l} e^{ilt}, G_C(t) = \sum_{l=-M_C}^{M_C} b_{C,l} e^{ilt},$$

com  $a_{C,-l} = \overline{a_{C,l}}$  e  $b_{C,-l} = \overline{b_{C,l}}$  para todo  $C \in \mathcal{P}_B$  e todo  $l$ . Com isto obtemos uma aproximação da parametrização dos fios  $(u_j(t), t)$ ,  $j = 1, \dots, s$  de  $B$  dadas por

$$c_{C,j}(t) = \left( F_C \left( \frac{t+2\pi j}{s_C} \right) + iG_C \left( \frac{t+2\pi j}{s_C} \right), t \right), C \in \mathcal{P}_B, j = 1, 2, \dots, s_C \quad (2.3)$$

formando a trança geométrica

$$\bigcup_{C \in \mathcal{P}_B} \bigcup_{j=1}^{s_C} \{c_{C,j}(t) : t \in [0, 2\pi]\},$$

a qual será equivalente a  $B$  se escolhermos esta aproximação por polinômios trigonométricos suficientemente próxima. Esta parametrização será chamada de *parametrização de Fourier* de  $B$ .

Resumindo, toda trança admite uma parametrização de Fourier e portanto todo enlaçamento em  $S^3$  é isotópico ao fecho de uma trança geométrica proveniente de uma parametrização de Fourier dos fios.

**Exemplo 1.** Em (DENNIS; BODE, 2017b) os autores desenvolveram um estudo para encontrar uma parametrização de Fourier da trança  $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^3\sigma_1$  a qual fecha no nó  $5_2$  (veja Figura 12). Os autores chegaram na parametrização

$$(F_B(t), G_B(t)) = \left( -\cos(2t) - \frac{3}{4}\cos(5t), -\sin(4t) - \frac{1}{2}\sin(t) \right).$$

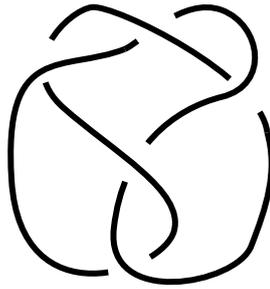


Figura 12 – Nó  $5_2$

O método usado para encontrar uma parametrização de Fourier explícita da trança  $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^3\sigma_1$  só se generaliza a algumas famílias de tranças e portanto os autores posteriormente em (BODE; DENNIS, 2019) tiveram que definir um novo algoritmo geral para incluir todas as tranças.

### 2.3.2 Algoritmo da parametrização de Fourier

Bode e Dennis (2019) motivados por aplicações das parametrizações de Fourier para descrever configurações de alguns modelos físicos apresentaram um algoritmo de quatro passos que mostra como encontrar uma parametrização explícita a partir de uma dada trança algébrica. Algumas destas aplicações podem se encontrar em (DENNIS *et al.*, 2010; BODE *et al.*, 2017; DENNIS; BODE, 2017a). A seguir apresentamos um breve resumo do algoritmo em (BODE; DENNIS, 2019) no qual por simplicidade incluiremos algumas modificações feitas posteriormente em (BODE, 2022a).

Fixe os  $s_C$  fios de  $B$ , onde  $C \in \mathcal{P}_B$ .

**Passo 1** Considere a projeção dos  $s_C$  fios de  $B$  no plano  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$ , como na Figura 13. Isto produz um conjunto de  $s_C$  curvas planas em que cada uma é homeomorfa ao intervalo  $[0, 1]$ . A menos de isotopia da trança  $B$  podemos assumir que “algumas condições” genéricas na projeção são satisfeitas, que são: dois fios ou não se intersectam ou eles se intersectam transversalmente, além disso não são permitidas interseções de três ou mais fios num único ponto, e em cada altura que ocorrer um cruzamento não pode ocorrer nenhum outro

cruzamento. Isto é a projeção dos fios define um diagrama da trança  $B$ . Veja [Figura 13](#) para uma ilustração das condições genéricas.

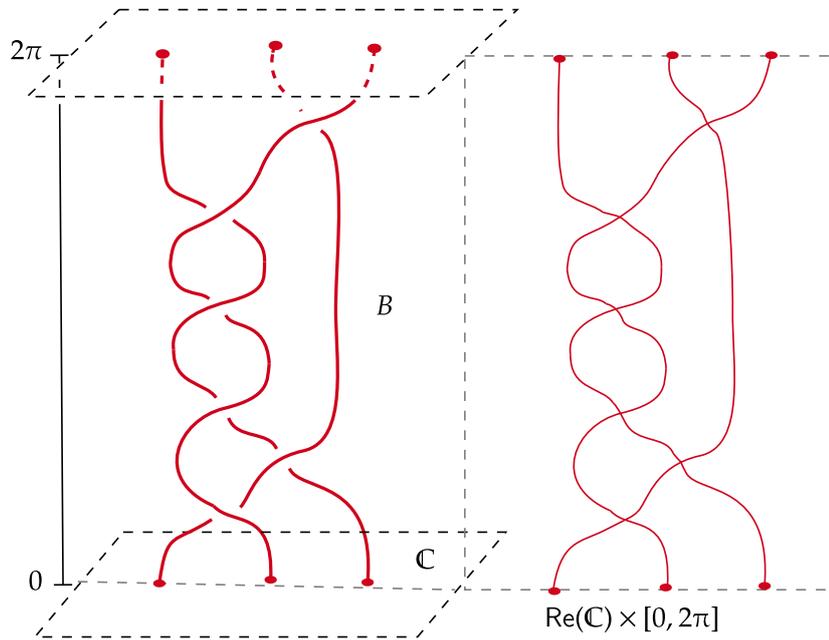


Figura 13 – Projeção em  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$  de  $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2$

Em seguida considere no plano  $[0, 2\pi] \times \text{Re}(\mathbb{C})$  a disposição do conjunto de  $s_C$  fios projetados, rotacionados de 90 graus para direita, como na parte superior da [Figura 14](#). Como sabemos que os  $s_C$  fios fecham numa componente conexa, podemos escolher uma indexação dos  $s_C$  fios na projeção de tal forma que o ponto final do  $j$ -ésimo fio coincida com o ponto inicial do  $(j + 1)$ -ésimo fio. De acordo com essa indexação transporte rigidamente o primeiro fio para a faixa  $[0, 2\pi] \times \text{Re}(\mathbb{C})$  de tal forma que o ponto inicial da curva fique sobre o eixo  $\{0\} \times \text{Re}(\mathbb{C})$ . Ver ilustração na parte superior da [Figura 15](#). Em seguida transporte rigidamente o segundo fio para a faixa  $[2\pi, 4\pi] \times \text{Re}(\mathbb{C})$  e concatene o ponto final do fio anterior com o ponto inicial deste. Siga este procedimento para todos os outros fios indexados nas faixas  $[2\pi(j - 1), 2\pi j] \times \text{Re}(\mathbb{C})$ ,  $1 \leq j \leq s_C$  obtendo assim uma curva contínua no domínio  $[0, 2\pi s_C]$ .

Note que os pontos inicial e final desta nova curva coincidem uma vez que os  $s_C$  fios fecham numa componente conexa do fecho da trança, como ilustrado na parte superior da [Figura 15](#).

Em seguida rotule os  $s_C$  pontos iniciais das curvas na linha  $\{t_1 = 0\} \times \text{Re}(\mathbb{C})$ , como é mostrado na parte inferior da [Figura 14](#). Seguindo o sentido positivo do intervalo  $[0, 2\pi]$  da horizontal, entre cada dois cruzamentos consecutivos trace a reta  $\{t_j\} \times \text{Re}(\mathbb{C})$  em que  $2 \leq j \leq l$ , onde  $l$  corresponde ao número total de cruzamentos. Em seguida, rotule sob essas retas verticais os pontos de interseção delas com os  $s_C$  fios projetados. Veja uma ilustração na parte inferior da [Figura 14](#).

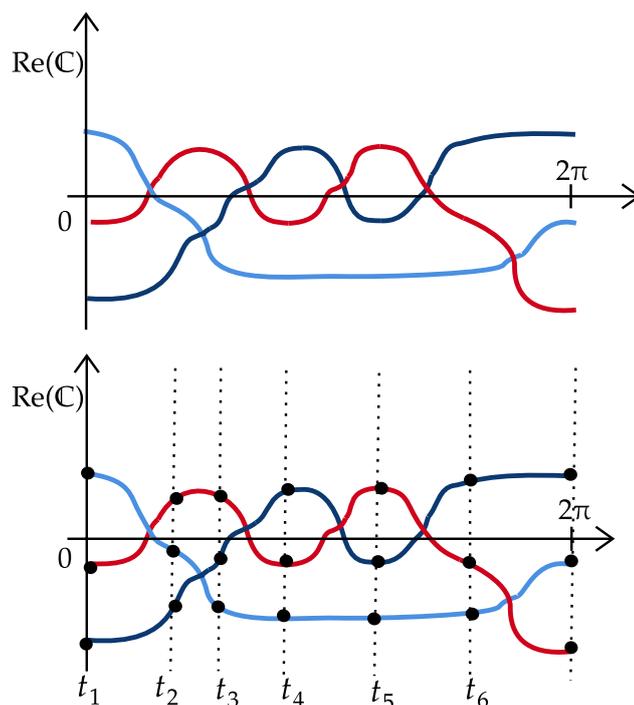


Figura 14 – Rótulos

Nesta parte vamos utilizar como referência a parte superior da [Figura 15](#).

Após o transporte rígido dos  $s_C$  fios para o espaço  $[0, 2\pi s_C] \times \text{Re}(\mathbb{C})$  chegaremos na configuração da [Figura 15](#), preservando também os pontos rotulados nos fios. Note que com o transporte as coordenadas horizontais dos pontos rotulados vão diferir das coordenadas anteriores por um múltiplo de  $2\pi$  e suas respectivas coordenadas verticais continuam as mesmas.

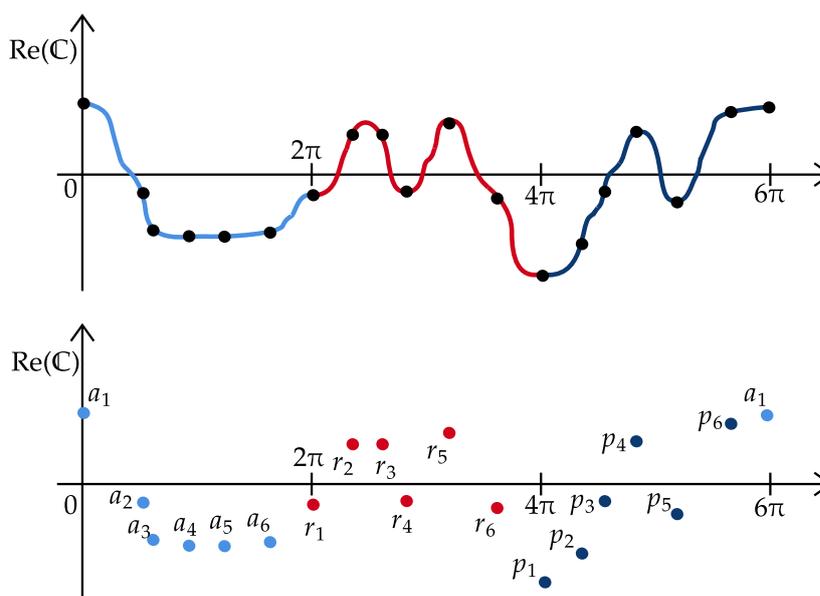


Figura 15 – Translado dos rótulos

Passo 2 Neste passo vamos considerar a parte inferior da [Figura 15](#) que é formada somente pelos pontos rotulados da parte superior da figura. Considere as coordenadas dos pontos rotulados. Isto permite aplicar uma interpolação trigonométrica nestes pontos a qual fornece um polinômio trigonométrico explícito  $F_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que “passa” por estes pontos. É importante mencionar que não é de se esperar que os fios

$$\bigcup_{C \in \mathcal{P}_B} \bigcup_{j=1}^{s_C} \left\{ \left( X_{C,j}(t) = F_C \left( \frac{t + 2\pi j}{s_C} \right), t \right) : t \in [0, 2\pi] \right\} \quad (2.4)$$

tracem o diagrama da trança  $B$  no plano  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$ . [Bode \(2022a\)](#) provou que sempre é possível encontrar polinômios trigonométricos  $F_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathcal{P}_B$  tal que os fios em (2.4) tracem o diagrama da trança  $B$  em  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$ .

Note que  $F_C$  é a coordenada real da parametrização de Fourier da trança geométrica desejada, assim  $F_C$  não contém nenhuma informação do sinal do cruzamento. Para codificar o sinal em cada cruzamento vamos criar uma nova função  $G_C$  correspondente a parte imaginária da parametrização de Fourier da trança geométrica. Para isto vamos considerar como referência a [Figura 16](#).

Passo 3 Neste ponto estaremos utilizando a convenção estabelecida no final da [Subseção 2.2.1](#). Considere os polinômios trigonométricos do Passo 2 os quais satisfazem que os fios em (2.4) tracem o diagrama da trança  $B$ . Note que por simplicidade ilustramos na parte superior da [Figura 16](#) o diagrama original de  $B$  em lugar do diagrama definido por (2.4). Rotule os pontos de interseção do diagrama definido por (2.4) como na parte superior da [Figura 16](#). Por cada ponto trace uma reta vertical associando a cada reta o sinal positivo (+) ou negativo (-), de acordo com o tipo de cruzamento ser positivo ou negativo (ver [Subseção 2.2.1](#)), respectivamente. Em seguida vamos transportar rigidamente os pontos rotulados e suas respectivas retas verticais, analogamente ao procedimento desenvolvido na parte final do Passo 1. Com isto obtemos a configuração como ilustrada na parte inferior da [Figura 16](#).

Por simplicidade, podemos escolher um número real  $\lambda > 0$  tal que todos os pontos rotulados estejam na faixa  $[0, 2\pi s_C] \times (-\lambda, \lambda)$ . Como cada ponto de cruzamento da parte superior da figura se desdobra em dois pontos na figura inferior, vamos codificar em cada um desses pontos se o cruzamento ocorreu por cima ou por baixo de acordo com a regra abaixo. Para isso vamos fixar o primeiro par de pontos de cruzamento na parte inferior da [Figura 16](#):

note que neste ponto o fio azul cruzou por baixo do fio vermelho. Para codificar essa informação no fio azul vamos mover o ponto na vertical para a reta horizontal  $\lambda$ . E no seu respectivo associado no fio vermelho vamos mover o ponto na vertical para a reta horizontal  $-\lambda$ . Já que o fio azul está à esquerda referente ao primeiro cruzamento de (2.4) então denotamos o ponto associado ao fio azul por  $e_1$  e denotamos por  $d_1$  ao ponto associado ao fio vermelho que está à direita referente ao primeiro cruzamento.

Vamos aplicar esta regra para os outros pontos e com isto vamos obter os pontos  $e_i$ s e  $d_i$ s na parte inferior da Figura 16.

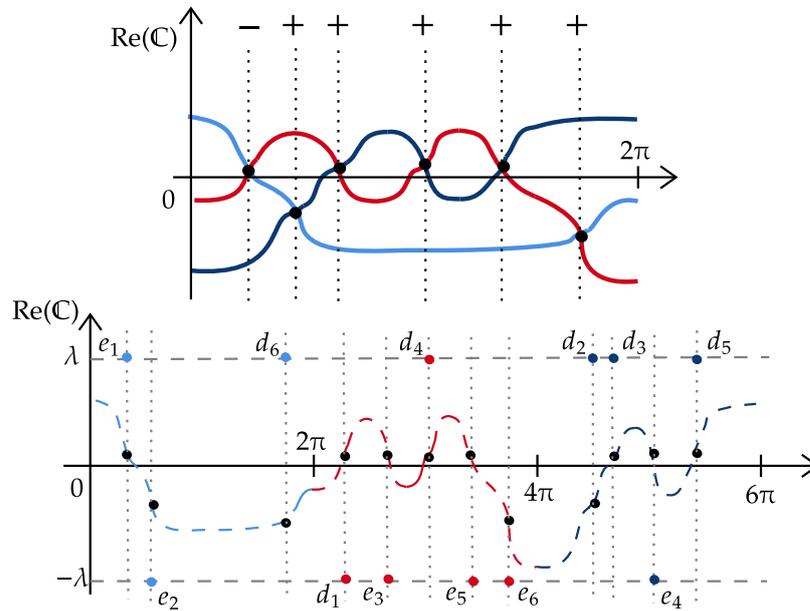


Figura 16 – Rótulos para obter o sinal de cruzamento

Passo 4 Considere as coordenadas dos pontos do passo anterior  $\{d_i, e_i, i = 1, 2, \dots, l\}$ , onde  $l$  é o número de cruzamentos do diagrama da trança realizado por (2.4), e considere um polinômio trigonométrico  $G_C$  que passa por estes pontos. Note que tal polinômio  $G_C$  codifica o cruzamento sendo positivo ou negativo. Por exemplo, considere no diagrama realizado por (2.4) o primeiro cruzamento do fio azul  $\{(X_{C,3}(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$  e o fio vermelho  $\{(X_{C,1}(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$ , isto é, o ponto nos fios com o menor  $t_* \in [0, 2\pi]$  satisfazendo  $X_{C,3}(t_*) = X_{C,1}(t_*)$ . As parametrizações  $\left\{ \left( Y_{C,j}(t) = G_C \left( \frac{t+2\pi j}{s_C} \right) \right) : t \in [0, 2\pi] \right\}$ ,  $j = 1, 3$  satisfazem que o valor de  $Y_{C,3}(t_*) \approx e_1$  é maior do que o valor que toma no fio vermelho  $Y_{C,1}(t_*) \approx d_1$ . Portanto, localmente as curvas parametrizadas  $\bigcup_{j \in \{1,3\}} \{(X_{C,j}(t) + iY_{C,j}(t)) : t \in [t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon]\}$  representam um cruzamento negativo como na Figura 6. Assim para este cruzamento temos o sinal como é indicado na palavra inicial da trança.

Finalmente as funções  $(F_C(t), G_C(t))$  providenciam uma trança geométrica

$$\bigcup_{C \in \mathcal{P}_B} \bigcup_{j=1}^{s_C} \{(X_{C,j}(t) + iY_{C,j}(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

tal que a projeção no plano  $\text{Re}(\mathbb{C}) \times [0, 2\pi]$  dado por (2.4) coincide com o diagrama de  $B$  e tal que as parametrizações dadas por  $Y_{C,j}(t)$ ,  $C \in \mathcal{P}_B$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_C$  definem os sinais de cruzamento de (2.4) e estes a sua vez coincidem com os sinais da palavra de  $B$ . Conseqüentemente a trança geométrica dada por esta parametrização, que é de Fourier, é um representante da trança  $B$ .

Note que o grau destes polinômios trigonométricos pode variar dependendo do número de pontos escolhidos.

### 2.3.3 Parametrização da concatenação

Podemos considerar a concatenação de  $n$  cópias de uma trança fixa  $B$ , a qual denotamos por  $B^n$ . Fixada uma parametrização de Fourier  $(F_C(t), G_C(t))$  de uma trança  $B$  a família de funções  $(F_C(nt), G_C(nt))$ ,  $C \in \mathcal{P}_B$ , fornece uma parametrização de Fourier de  $B^n$ .

Veja uma representação da concatenação de duas cópias de uma trança na [Figura 17-\(a\)](#) e [-\(b\)](#).

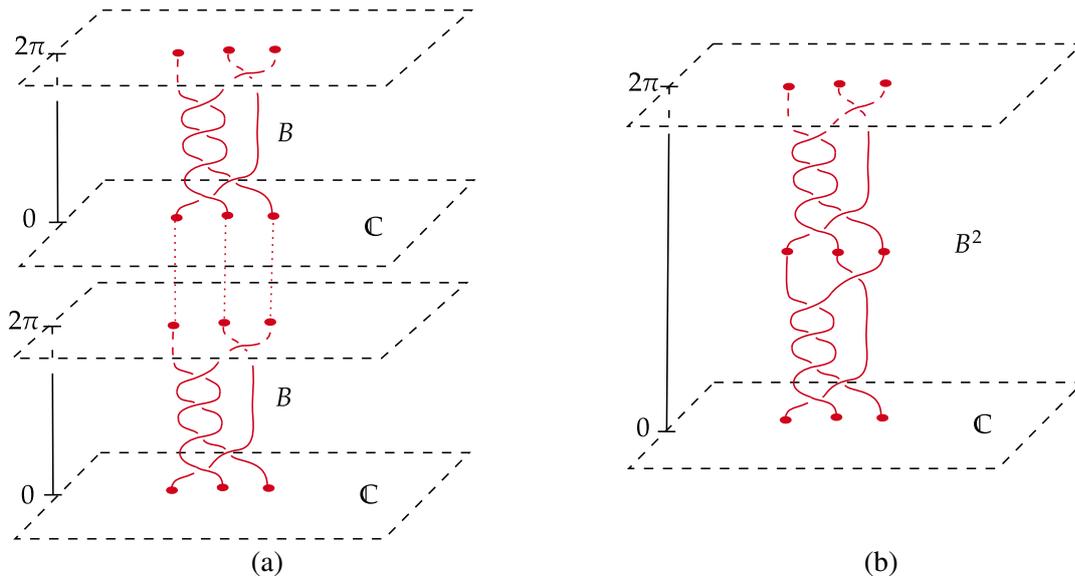
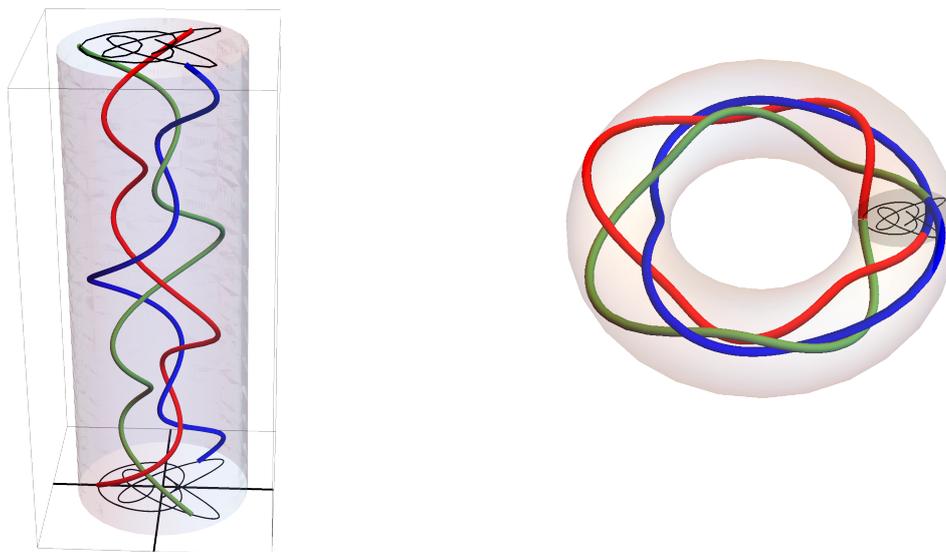


Figura 17 – Processo de concatenação de duas cópias de  $B$

Como um exemplo disto, considere a trança quadrada  $B^2 = (\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^3 \sigma_1)^2$ , [Figura 18-\(a\)](#), parametrizada por  $(F_{B^2}(t), G_{B^2}(t)) = (F_B(2t), G_B(2t))$  e o seu fecho, que chamaremos o quadrado do nó  $5_2$ , está representado na [Figura 18-\(b\)](#).



(a) Trança  $(\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^3 \sigma_1)^2$

(b) Quadrado do nó  $5_2$

Figura 18 – Trança quadrada de 3-fios  $(F_B(\frac{t+2\pi j}{3}), G_B(\frac{t+2\pi j}{3}), t)$ ,  $j = 1, 2, 3$

Neste ponto faremos uma observação que será útil no trabalho. Para isto vamos fixar o caso do nó  $5_2$  representado na [Figura 12](#).

Vamos considerar sua representação como o fecho da trança de 3-fios  $B = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^3 \sigma_1$ , [Figura 13](#). Na referência [Dennis e Bode \(2017b\)](#) os autores discutiram possíveis formas de construir parametrizações de Fourier desta trança. Consideremos assim a parametrização de Fourier desta trança dada pelas funções trigonométricas

$$(F_B(t), G_B(t)) = \left( -\cos(2t) - \frac{3}{4} \cos(5t), -\sin(4t) - \frac{1}{2} \sin(t) \right).$$

Note que qualquer deslocamento de fase de uma parametrização de Fourier de uma trança, isto é,  $(F_C(t + \theta), G_C(t + \theta))$  para toda componente  $C$  e um ângulo  $\theta$ , é uma parametrização de Fourier de uma trança conjugada a  $B$  e assim o fecho da trança não muda. Com isto estaremos considerando a parametrização da trança a menos de deslocamento de fase.



# ENLAÇAMENTOS FIBRADOS E APLICAÇÕES ANALÍTICAS REAIS

Uma classe bem importante de subvariedades fechadas  $L$  mergulhadas na  $(n-1)$ -esfera  $S^{n-1}$  são aquelas que admitem uma estrutura fibrada no complemento  $S^{n-1} \setminus L$ . Tais classes têm uma relação bastante próxima ao estudo da topologia de singularidades de aplicações analíticas reais, principalmente quando vistas através da ótica do celebrado Teorema de Nash-Tognolli (BOCHNAK; COSTE; ROY, 1998) que garante que toda variedade suave e fechada é difeomorfa a uma variedade algébrica. Além do mais, após a clássica referência (MILNOR, 1968) sabemos que todo germe de aplicação analítica, digamos  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $n > p \geq 2$ , com singularidade isolada na origem como germe de conjunto, existe uma fibração suave  $S_\rho^{n-1} \setminus L_{f,\rho} \rightarrow S^{p-1}$  em que  $L_{f,\rho} := f^{-1}(0) \cap S_\rho^{n-1}$  é vazio ou é uma subvariedade suave mergulhada em  $S_\rho^{n-1}$ , a  $(n-1)$ -esfera centrada na origem e de raio  $\rho > 0$  suficientemente pequeno, cuja classe de isotopia de  $L_{f,\rho}$  e da fibração não muda para todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno. Consequentemente, vamos denotar  $L_{f,\rho}$  simplesmente por  $L_f$ .

Esse último resultado motivou a definição de NS-par em (LOOIJENGA, 1971) tendo como principal classe de exemplos aqueles provenientes de singularidades isoladas de aplicações analíticas reais ou complexas fornecidas por Milnor em (MILNOR, 1968).

Em resumo, tal linha de pesquisa demonstra que o problema do mergulho  $L \hookrightarrow S^{n-1}$  tal que  $S^{n-1} \setminus L$  fibra sobre esferas pode ser entendido do ponto de vista da Teoria de Singularidades.

## 3.1 Enlaçamentos fibrados

**Definição 5.** (LOOIJENGA, 1971) Seja  $L^{n-p-1}$  uma subvariedade fechada orientada de  $S^{n-1}$  orientada com fibrado normal trivial. Suponha que para alguma trivialização  $c : T(L) \rightarrow L \times D^p$

de uma vizinhança tubular  $T(L)$  de  $L$  o fibrado trivial definido pela composição  $p \circ c$  :

$$T(L) \setminus L \rightarrow L \times (D^p - \{0\}) \rightarrow S^{p-1} \text{ com } p(x,y) = \frac{y}{\|y\|},$$

se estende a um fibrado suave  $S^{n-1} \setminus L \rightarrow S^{p-1}$ . Então o par  $(S^{n-1}, L^{n-p-1})$  será chamado *um par de Neuwirth-Stallings* (abreviadamente como um NS-par).

Na definição de Looijenga a subvariedade  $L^{n-p-1}$  pode ser vazia. Note também que  $L^{n-p-1}$  não é necessariamente homeomorfo a uma união de  $(n-p-1)$ -esferas. Assim, enlaçamentos (mergulhos de  $(n-p-1)$ -esferas) que admitem uma fibração localmente trivial no complemento são um caso particular de NS-pares.

No caso de germes de funções holomorfas  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  Milnor também provou o seguinte.

**Teorema 3.** (MILNOR, 1968) Seja  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função analítica complexa não constante então para todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno

$$\arg f := \frac{f}{|f|} : S_\rho^{2n+1} \setminus L_f \rightarrow S^1 \quad (3.1)$$

é a projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Neste caso a projeção da fibração é dada pela aplicação argumento  $\arg f := \frac{f}{|f|}$  e no caso particular em que a origem é uma singularidade isolada de  $f$  então o par  $(S_\rho^{2n+1}, L_f)$  fornece exemplos de NS-pares.

No caso clássico de enlaçamentos (união de cópias de círculos) fibrados na 3-esfera, a definição de NS-par é equivalente à seguinte definição.

**Definição 6** (Enlaçamento fibrados clássicos). Um enlaçamento (orientado) de  $l$ -componentes  $L \subset S^3$  (ver Seção 2.1) é chamado *fibrado* se

- Existe uma aplicação  $\varphi_L : S^3 \setminus L \rightarrow S^1$  que é uma fibração suave localmente trivial e
- Numa vizinhança tubular  $T(L)$  difeomorfa à  $L \times D$ , em que  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ , a projeção é dada por  $\varphi_L : T(L) \setminus L \rightarrow S^1, (x,y) \rightarrow \frac{y}{|y|}$ .

Veja a [Figura 19](#) para o comportamento da fibração na vizinhança  $T(L)$ .

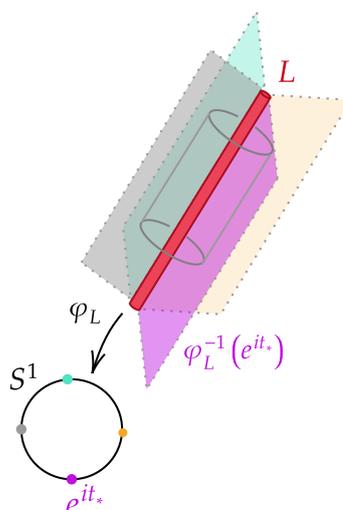


Figura 19 – Trivialidade na vizinhança tubular

Clássicamente é conhecido que o subgrupo dos comutadores do grupo fundamental  $\pi_1(S^3 \setminus L)$  de um enlaçamento fibrado é finitamente gerado (ROLFSEN, 1990, Proposition 3, p.324). A recíproca foi provada por (STALLINGS, 1962) para o caso de nós, ou seja, se o subgrupo de comutadores do grupo fundamental do nó é finitamente gerado então o nó é fibrado. Porém, tal condição é difícil de ser testada pela complexidade do grupo fundamental. Uma outra condição necessária para que um nó seja fibrado (porém não suficiente) é que o polinômio de Alexander seja mônico (ROLFSEN, 1990). Por exemplo, podemos usar este critério para provar que o nó  $5_2$  e o seu quadrado não são fibrados, já que seus polinômios de Alexander  $\Delta(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  são  $2t - 3 + 2t^{-1}$  e  $2t^2 - 5t + 7 - 5t^{-1} + 2t^{-2}$ , respectivamente. Mais detalhes e cálculos do polinômio de Alexander<sup>1</sup> de um nó podem ser encontrados em (ROLFSEN, 1990), especialmente a tabela de alguns nós nas páginas p.391-414, onde aparecem seus polinômios de Alexander.

Importantes exemplos de enlaçamentos fibrados são aqueles cujas propriedades topológicas podem ser lidas na representação da palavra do grupo da trança.

**Definição 7.** (STALLINGS, 1978) Uma trança de  $s$  fios é chamada *homogênea* se para cada  $j \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ , o gerador  $\sigma_j$  aparece na palavra da trança se e somente se  $\sigma_j^{-1}$  não aparece.

Stallings (1978) provou que o fecho de toda trança homogênea resulta em um enlaçamento fibrado. Por exemplo, a trança de 2 fios  $\sigma_1^3$  (Figura 3) é um exemplo de uma trança homogênea e o seu fecho é o nó de trevo que já é classicamente conhecido como um nó fibrado. Entretanto, é importante destacar que existem exemplos de enlaçamentos fibrados que não são isotópicos a fechos de tranças homogêneas, como por exemplo o nó  $8_{20}$ . Mais detalhes podem ser encontrados em (BELL, 2012).

<sup>1</sup> O polinômio de Alexander também pode ser calculado a partir da representação de uma palavra da trança que fecha no nó. Veja (BIRMAN, 1974).

Uma subclasse interessante de tranças homogêneas são aquelas que fecham num nó que pode ser desenhado na superfície de um toro mergulhado na  $S^3$ . Estes são caracterizados por dois inteiros co-primos  $p$  e  $q$  que contam<sup>2</sup> o número de vezes que o nó corta o meridiano e a longitude do toro, respectivamente. Por essa razão eles são conhecidos por *nó toroidal* ou nó  $(p, q)$ -toroidal e denotado por  $K(p, q)$ . De fato, estes nós são exemplos de fechos das chamadas tranças positivas, pois, cada gerador sempre aparece com um sinal positivo. Na [Figura 20](#) representamos o nó toroidal  $K(2, 3)$  ou também conhecido como nó do trevo ou “trefoil knot” que é o fecho da trança de 2 fios  $\sigma_1^3$ .

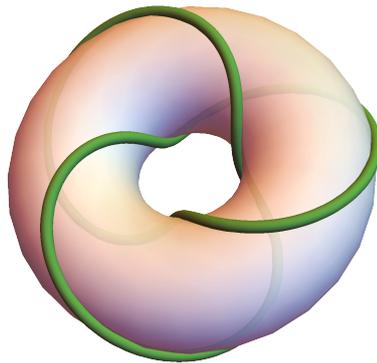


Figura 20 – Nó toroidal  $K(2, 3)$

Dessa forma, há uma ampla variedade de enlaçamentos fibrados com diferentes características, o que torna a área de estudo destes enlaçamentos bastante rica e desafiadora.

Ainda nesta linha de caracterização dos enlaçamentos fibrados mais recentemente em ([BODE, 2021](#)) foi definido a classe de tranças  $P$ -fibradas ([Definição 13](#)), que é uma classe que estende as tranças homogêneas ([BODE, 2019](#)) e apresenta propriedades bastante relacionadas com a Teoria de singularidades, sobretudo relacionada com a Conjectura de Benedetti e Shiota ([Conjetura 1](#)), como veremos neste trabalho. Além do mais até o momento do desenvolvimento deste trabalho não se tem exemplo de enlaçamento fibrado que não provenha de uma trança  $P$ -fibrada. Isso sugere que tal classe seja uma possível candidata a caracterização dos enlaçamentos fibrados.

## 3.2 Singularidades de aplicações e enlaçamentos

A partir desta seção vamos denotar por  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ,  $n > p \geq 2$ , um germe de aplicação analítica real não-constante e por  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de função analítica complexa não-constante, a menos que haja menção contrária. Também consideramos os seguintes germes de conjuntos analíticos na origem.

- $V_f := f^{-1}(0)$ , a variedade local de  $f$ ;

<sup>2</sup> Esta contagem se faz a partir da fixação da longitude  $l$  e do meridiano  $m$  que geram  $H_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  e assim  $[K(p, q)] \in H_1(S^1 \times S^1)$  é tal que  $[K(p, q)] = p[m] + q[l]$ .

- No caso de aplicação analítica real o conjunto singular é dado por

$$\Sigma_f := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{rank } J_x f < p\}, \quad (3.2)$$

em que  $J_x f$  denota a matriz Jacobina de  $f$  em  $x$ . No caso de função analítica complexa o conjunto singular é dado por

$$\Sigma_f = \{z \in \mathbb{C}^n : \nabla f(x) = (f_{z_1}(z), \dots, f_{z_n}(z)) = 0\}, \quad (3.3)$$

em que  $\nabla f$  denota o gradiente de  $f$  e  $f_{z_i}$  as derivadas parciais de  $f$  respeito a  $z_i$ .

**Observação 2.** Em geral vamos denotar os germes e seus representantes com a mesma notação. Para flexibilizar a notação algumas vezes representamos uma aplicação analítica na origem por  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ficando subentendido que estamos trabalhando numa vizinhança da origem da fonte e da meta.

**Definição 8.** Uma aplicação polinomial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $n > p \geq 2$ ,  $f(0) = 0$ , tem uma *singularidade fracamente isolada* na origem se o germe  $\Sigma_f \cap V_f = \{0\}$  como germe de conjunto. No caso particular onde  $\Sigma_f = \{0\}$  dizemos que  $f$  tem uma *singularidade isolada* na origem.

Uma propriedade que segue da singularidade fracamente isolada (MILNOR, 1968) é que  $V_f$  intersecta transversalmente toda pequena esfera numa variedade suave  $L_f := V_f \cap S_\rho^{n-1}$ , que está bem definida a menos de isotopia, que é chamada o *enlaçamento da singularidade* na origem, veja Figura 21.

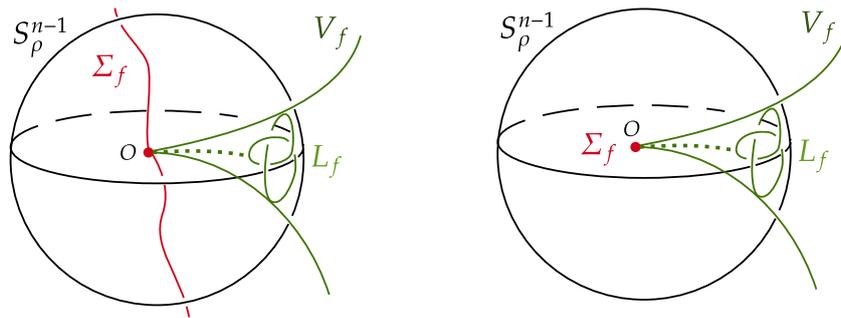


Figura 21 – Singularidades na origem

Mais ainda, a interseção de  $V_f$  com a bola fechada do  $\mathbb{R}^n$  centrada na origem  $\overline{D}_\rho^n(0)$  é homeomorfo ao cone sob  $L_f$ . Isso motiva as seguintes definições.

**Definição 9.** Uma subvariedade fechada  $L$  de  $S^{n-1}$  é dita ser *fracamente algébrica* (resp. *fortemente algébrica* ou *algébrica real*) se existem:

- uma aplicação polinomial  $f_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  tal que  $f_L(0) = 0$  e  $f_L$  com singularidade fracamente isolada (respectivamente isolada) na origem;

- (ii) e um raio  $\rho_0$  tal que para cada  $0 < \rho \leq \rho_0$  a subvariedade  $L_{f_L, \rho} := V_{f_L} \cap S_\rho^{n-1}$  seja isotópica a  $L$  em  $S_\rho^{n-1} \approx S^{n-1}$ , onde  $S_\rho^{n-1}$  é a esfera de raio  $\rho$  centrada na origem de  $\mathbb{R}^n$ .

Neste caso a aplicação polinomial  $f_L$  é chamada uma *realização fraca* (respectivamente uma *realização forte*) de  $L$ .

Claramente as realizações fracas e fortes estão bem definidas na classe de equivalência dos germes de aplicações.

### 3.2.1 Enlaçamentos algébricos clássicos

Considere  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio holomorfo com singularidade isolada, então existe uma caracterização dos enlaçamentos que aparecem desta forma. Neste caso os enlaçamentos associados são chamados *enlaçamentos algébricos* e estes foram completamente caracterizados em (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986). A seguir faremos uma descrição da caracterização utilizando como base essa mesma referência.

Considere  $f(u, v)$  um polinômio holomorfo irreduzível, mônico na variável  $u$  e com uma singularidade isolada na origem. Assim  $V_f$  pode ser parametrizada em termos da variável  $v$  da seguinte forma:

$$u = c_1 v^{m_1/n_1} + c_2 v^{m_2/n_1 n_2} + \dots + c_s v^{m_s/n_1 \dots n_s} + \dots, \quad (3.4)$$

onde  $c_i$ 's são números complexos não nulos e  $m_i, n_i$  são inteiros positivos. A princípio esta soma pode ser infinita, porém a topologia de  $V_f$  é determinada por um conjunto finito de pares  $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_s, m_s)$  os quais são chamados *pares de Puiseux* de  $f$  e têm as seguintes restrições

$$\begin{aligned} n_1 &< m_1, \\ m_{j-1} n_j &< m_j, \text{ para } j \geq 2, \\ \text{mdc}(n_j, m_j) &= 1 \text{ para } j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno podemos associar o nó algébrico  $L_f = V_f \cap S_\varepsilon^3$  à curva algébrica  $V_f$ . Esse nó é um nó toroidal iterado do tipo  $K((p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_s, q_s))$ , construído como no seguinte processo: construa um nó toroidal  $K(p_1, q_1)$  e então considere uma vizinhança tubular deste nó. Já que o nó, por definição, tem uma componente, a vizinhança tubular forma um segundo toro a menos de difeomorfismo. Então neste segundo toro construa um outro nó toroidal do tipo  $K(p_2, q_2)$ , onde a longitude considerada no segundo toro que chamaremos de *longitude preferida* é tomada na classe de isotopia de curvas fechadas no toro que tem número de enlaçamento <sup>3</sup> zero com  $K(p_1, q_1)$ . O nó resultante desta operação é chamado de *nó iterado toroidal* e denotado por  $K((p_1, q_1), (p_2, q_2))$ , e os pares  $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$  são chamados pares de

<sup>3</sup> O número de enlaçamento de dois nós  $K_1$  e  $K_2$  em  $S^3$  é tomado como o inteiro  $l$  tal que a classe de homologia  $[K_1] \in H_1(S^3 \setminus K_2) \cong \mathbb{Z}$  é dada por  $[K_1] = l\gamma$ , onde  $\gamma$  é um gerador de  $H_1(S^3 \setminus K_2)$ . Veja (ROLFSEN, 1990, p.132) para mais detalhes e definições equivalentes.

iteração. Fazendo este processo várias vezes considerando as respectivas longitudes preferidas obtemos o nó toroidal iterado  $K((p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_s, q_s))$ .

Os pares de Puiseux  $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_s, m_s)$  do polinômio holomorfo  $f$  determinam os pares de iteração de  $L_f$  de acordo com a seguinte relação:

$$\begin{aligned} (p_1, q_1) &= (n_1, m_1), \\ (p_2, q_2) &= (n_2, m_2 + m_1 n_2 (n_1 - 1)), \\ &\vdots \\ (p_s, q_s) &= (n_s, m_s + m_{k-1} n_k (n_{k-1} - 1) + \sum_{i=1}^{s-2} [m_i (n_i - 1) n_k \prod_{j=i+1}^{s-1} n_j^2]). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que nem todo nó toroidal iterado  $K((p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_s, q_s))$  é um nó algébrico. Por exemplo o nó toroidal iterado  $K((3, 2), (3, 2))$  não é algébrico uma vez que uma condição necessária e suficiente nos pares de iteração para um nó toroidal iterado ser algébrico é dada por  $q_1 > p_1$  e  $q_j > p_j p_{j-1} q_{j-1}$ ,  $j = 2, 3, \dots, s$ , a qual provém diretamente de Equações (3.5) e (3.6).

Uma apresentação sistemática da caracterização de nós algébricos pode ser encontrada em (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986).

**Teorema 4.** (BRIESKORN; KNÖRRER, 1986, Theorem 12; p. 438) O nó  $L_f$  proveniente de uma função polinomial holomorfa irreduzível com singularidade isolada na origem é isotópico a um nó toroidal iterado do tipo  $K((p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_s, q_s))$  com  $(p_j, q_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  satisfazendo Equações (3.5) e (3.6).

O caso de enlaçamentos de polinômios holomorfos redutíveis com singularidade isolada segue a partir do resultado anterior aplicado a cada fator irreduzível de  $f$  e descrevendo a forma como estes nós estão enlaçados. Veja uma descrição em (EISENBUD; NEUMANN, 1985, p.53). Uma outra forma de ver esta união de nós toroidais iterados é como o fecho de uma trança aninhada  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  onde cada  $B_j$  fecha numa união aninhada de nós toroidais iterados. Ver a definição de trança aninhada Definição 23.

### 3.2.2 Enlaçamentos algébricos reais

Uma maneira de estender o estudo de enlaçamentos algébricos do ponto de vista da Teoria de Singularidades de Aplicações é estudar os enlaçamentos oriundos das aplicações polinomiais reais  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Parte dessa motivação já foi mencionada no início deste capítulo e também pode ser visto no enunciado do teorema a seguir.

**Teorema 5.** (AKBULUT; KING, 1981) “Todo enlaçamento na 3-esfera é fracamente algébrico”.

Como descrito na introdução deste capítulo Milnor mostrou que dada uma aplicação polinomial  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com a singularidade isolada na origem e  $f^{-1}(0) \neq \{0\}$  para todo  $\rho > 0$

suficientemente pequeno o enlaçamento  $L_f = V_f \cap S^3_\rho$  é um enlaçamento fibrado. A recíproca deste resultado é um problema em aberto como podemos ver a seguir.

**Conjetura 1.** (BENEDETTI; SHIOTA, 1998) Todo enlaçamento fibrado (ou NS-par) na 3-esfera é algébrico real.

Ou seja, a conjectura afirma que todo enlaçamento fibrado na  $S^3$  admite uma realização forte.

Vamos apresentar uma breve descrição de um resultado em (LOOIJENGA, 1971) anterior à conjectura mas reforçando sua veracidade. O autor apresentou uma construção topológica de NS-pares, que permite encontrar uma realização forte de uma subclasse desses objetos.

**Teorema 6.** (LOOIJENGA, 1971) Seja  $(S^{n-1}, L^{n-p-1})$  um NS-par com  $L \neq \emptyset$ . Então, existe uma realização forte  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  de  $(S^{n-1}, L) \# ((-1)^n S^{n-1}, (-1)^{n-p} L)$ .

Aqui usamos a convenção que as variedades orientadas  $M$  e  $-M$  denotam a mesma variedade mas com a orientações revertidas, e a operação “#” denota uma soma conexa especial dos NS-pares ao longo de uma componente conexa da subvariedade  $L$ . A construção de Looijenga pressupõe várias propriedades no NS-par resultante da soma conexa e sua fibração associada como comentamos a seguir:

considere a subvariedade  $L^{n-p-1} = \cup_{i=1}^r L_i$  da esfera  $S^{n-1}$  em que  $L_i$  são as componentes conexas de  $L^{n-p-1}$  e fixe um ponto  $x$  numa componente conexa digamos  $L_1$ . É possível encontrar um vizinhança  $D_x$  de  $S^{n-1}$  difeomorfa ao disco fechado  $D^n$  e satisfazendo que o par  $(D_x, D_x \cap L^{n-p-1})$  é difeomorfo ao mergulho canônico  $(D^n, D^{n-p-1})$ . Remova de  $S^{n-1}$  o interior do disco  $D_x$ . Agora considere o NS-par  $((-1)^n S^{n-1}, (-1)^{n-p} L)$  e  $L \# (-1)^{n-p} L$  e faça o procedimento análogo ao anterior. Assim identificando devidamente os bordos resultantes obtemos as variedade  $S^{n-1} \# (-1)^n S^{n-1}$  e  $\mathcal{L} := L \# (-1)^{n-p} L$ . Na referência (LOOIJENGA, 1971) o autor provou que o par  $(S^{n-1} \# (-1)^n S^{n-1}, \mathcal{L})$  também é um NS-par e denotou por  $(S^{n-1}, L) \# ((-1)^n S^{n-1}, (-1)^{n-p} L)$ . Esse novo NS-par satisfaz as seguinte simetrias:  $\mathcal{L}$  é invariante sob a aplicação antipodal  $\alpha : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ,  $\alpha(x) = -x$  e sua fibração  $\Phi : S^{n-1} \setminus \mathcal{L} \rightarrow S^{p-1}$  satisfaz  $\Phi(x) = -\Phi(-x)$  para todo  $x \in S^{n-1} \setminus \mathcal{L}$ . De forma geral NS-pares que satisfazem essas simetrias são frequentemente chamados de “odd fibered links”.

---

## SINGULARIDADES MISTAS

---

Uma generalização natural para o caso de funções analíticas complexas é o das funções complexas mistas, que fornece uma classe interessante de aplicações analíticas reais que não necessariamente provém de uma função holomorfa. Um estudo sistemático dessa classe de funções foi desenvolvido por Oka em (OKA, 2010; OKA, 2008; OKA, 2011), todavia suas características e propriedades remontam a trabalhos anteriores aos de Oka como brevemente descrevemos abaixo.

Um dos primeiros exemplos de polinômios mistos envolvendo a topologia da singularidade real e complexa foi apresentado por A'Campo (1973), onde ele mostrou que uma determinada singularidade de função mista não era topologicamente equivalente a uma função polinomial holomorfa.

Em (PERRON, 1981/82) foi apresentada a primeira realização forte do nó da figura oito, que sabidamente não é realizável por uma função holomorfa com singularidade isolada na origem uma vez que o polinômio de Alexander do nó não é ciclotômico. Contudo a realização apresentada é de difícil manipulação algébrica. Todavia em (RUDOLPH, 1987) o autor apresentou uma outra realização forte do mesmo nó dada por um polinômio misto e de muito mais fácil manipulação.

Nos trabalhos (SEADE, 1996; SEADE, 1997) o autor utilizou operações com campos holomorfos em  $\mathbb{C}^n$  para criar famílias de exemplos de polinômios mistos  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  que produzem estrutura open book em esferas. Em (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002) os autores produziram classes de aplicações analíticas reais oriundas de funções mistas que satisfaziam a hipótese de Milnor (singularidade isolada na origem). Além disso nesse trabalho pode ser encontrado um dos primeiros estudos das ações radiais e polares de um ponto de vista da teoria de singularidades.

Em (PICHON, 2005; PICHON; SEADE, 2003; PICHON; SEADE, 2008) os autores desenvolveram um estudo dos enlaçamentos fibrados provenientes da classe particular de singularidades mistas do tipo  $f\bar{g}$  em que  $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  são funções holomorfas.

Outros estudos da singularidade dos polinômios mistos também foram desenvolvidos em (CISNEROS-MOLINA, 2008; CHEN, 2014).

## 4.1 Polinômios mistos

**Definição 10.** (OKA, 2008) Uma função polinomial  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é chamada de *polinômio misto* se

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} z^\nu \bar{z}^\mu$$

onde,  $z^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$  para  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , respectivamente  $\bar{z}^\mu = \bar{z}_1^{\mu_1} \cdots \bar{z}_n^{\mu_n}$  para  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ . E o somatório percorre um número finito de pares  $(\nu, \mu)$ .

Os polinômios mistos possuem uma estrutura analítica real mas com a vantagem de poderem ser manipulados com variáveis complexas.

Considere  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio misto, tal que  $f = g + ih$ , onde  $g = \operatorname{Re}(f)$  e  $h = \operatorname{Im}(f)$ . O conjunto de zeros  $V_f := f^{-1}(0)$  é chamada de *hipersuperfície mista*. Tomando as derivadas parciais

$$f_{z_j} = g_{z_j} + ih_{z_j} \text{ e } f_{\bar{z}_j} = g_{\bar{z}_j} + ih_{\bar{z}_j},$$

podemos formar os gradientes

$$df := (f_{z_1}, \dots, f_{z_n}) \text{ e } \bar{d}f := (f_{\bar{z}_1}, \dots, f_{\bar{z}_n}).$$

Com esses gradientes Oka (2008, Proposition 1) caracterizou o conjunto singular (3.2) da aplicação real  $(g, h) : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  associada ao polinômio misto  $f = g + ih$  da seguinte forma:

$$\Sigma_f = \{z \in \mathbb{C}^n : \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, \|\lambda\| = 1, \bar{d}f(z, \bar{z}) = \lambda df(z, \bar{z})\} \quad (4.1)$$

Analogamente Chen (2014) caracterizou o conjunto de Milnor do polinômio misto  $f$  em termos dos diferenciais mistos:

$$M_f = \{z \in \mathbb{C}^n : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{C}^*, \|\mu\| = 1, \lambda z = \mu \bar{d}f(z, \bar{z}) + \bar{\mu} df(z, \bar{z})\}. \quad (4.2)$$

E provou que este é equivalente à definição geral para aplicações reais (ARAÚJO DOS SANTOS; CHEN; TIBĂR, 2013, Definition 1.2, p.818).

Dada  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto podemos também definir a função

$$\arg f := \frac{f}{|f|} : \mathbb{C}^n \setminus V_f \rightarrow S^1.$$

O conjunto de Milnor e o conjunto singular de  $\arg f$  são caracterizados em (CHEN, 2014) como segue:

$$M_{\arg f} = \{z \in \mathbb{C}^n \setminus V_f : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda z = i(f \bar{d}f - \bar{f} df)\}, \quad (4.3)$$

$$\Sigma_{\arg f} = \{z \in \mathbb{C}^n \setminus V_f : 0 = f \bar{d}f - \bar{f} df\}. \quad (4.4)$$

Para mais detalhes da caracterização destes conjuntos do ponto de vista real e misto veja (RIBEIRO, 2018, Chapter 3).

Observe que o vetor normal de  $\arg f$  é linearmente independente ao vetor normal de  $-\operatorname{Re}(i \log f)$  sobre  $\mathbb{R}$ . Portanto alguns autores, por exemplo (OKA, 2010), usam esta identificação de  $\arg f$  por  $-\operatorname{Re}(i \log f)$  para estudar as propriedades de  $\arg f$ .

### 4.1.1 Realização semiholomorfas de tranças

Embora algumas construções no nosso trabalho possam ser analisadas para dimensões superiores, nosso foco vai ser o estudo de polinômios mistos  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  e a sua relação com os enlaçamentos clássicos na 3-esfera. Para isto vamos a considerar  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  nas variáveis  $z = (u, v)$ ,  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$  e vamos denotar por  $f_u$  a derivada parcial de  $f$  com respeito à variável  $u$  e  $\bar{f}_u$  o conjugado de  $f_u$ . Analogamente denotamos  $f_{\bar{u}}$ ,  $f_v$ ,  $f_{\bar{v}}$ ,  $\bar{f}_u$ ,  $\bar{f}_v$  e  $\bar{f}_{\bar{v}}$ . Vamos a considerar também a seguinte caracterização do conjunto singular (4.1) em termos das derivadas parciais mistas e de tal forma que não dependa de um número complexo  $\lambda$ . Por simplicidade para um ponto dado  $z_* = (u_*, v_*) \in \mathbb{C}^2$  escrevemos  $f(z_*)$  ou  $f(u_*, v_*)$  em lugar de  $f(z_*, \bar{z}_*)$  ou  $f(u_*, v_*, \bar{u}_*, \bar{v}_*)$

**Lema 1.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto então o conjunto singular (3.2) de  $f$  vista como aplicação real é caracterizado por

$$\Sigma_f = \begin{cases} s_{1,f} := f_u \bar{f}_v - f_v \bar{f}_u = 0 \\ s_{2,f} := |f_u|^2 - |\bar{f}_u|^2 = 0 \\ s_{3,f} := |f_v|^2 - |\bar{f}_v|^2 = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Como vimos anteriormente o conjunto singular (3.2) é caracterizado em (4.1). Assim resta provar que (4.5) é equivalente a (4.1). De fato, considere  $z_* \in \mathbb{C}^2$  satisfazendo (4.5). Suponha que alguma derivada parcial se anula em  $z_*$ , digamos que  $f_u(z_*) = 0$ , então substituindo em  $s_{2,f}(z_*) = 0$  temos que  $\bar{f}_u(z_*) = 0$ . Portanto, segue que  $z_*$  satisfaz (4.1) pois  $s_{3,f}(z_*) = 0$  implica  $f_v(z_*) = \lambda \bar{f}_v(z_*)$  com  $|\lambda| = \frac{|f_v(z_*)|}{|\bar{f}_v(z_*)|} = 1$ . Se nenhuma derivada parcial se anula em  $z_*$  então  $s_{1,f}(z_*) = 0$  implica  $\frac{f_v(z_*)}{\bar{f}_v(z_*)} = \frac{f_u(z_*)}{\bar{f}_u(z_*)} = \lambda$  e de  $s_{2,f}(z_*) = 0$  ou  $s_{3,f}(z_*) = 0$  segue que  $|\lambda| = 1$ . Portanto,  $z_*$  satisfaz (4.1). A recíproca segue diretamente pois se  $z_*$  satisfaz (4.1) então por substituir  $f_u(z_*) = \lambda \bar{f}_u(z_*)$  e  $f_v(z_*) = \lambda \bar{f}_v(z_*)$ ,  $|\lambda| = 1$  em  $s_{1,f}, s_{2,f}$  e  $s_{3,f}$  obtemos que  $z_*$  satisfaz (4.5).  $\square$

Outra caracterização de (3.2) que não envolve um número complexo  $\lambda$  pode ser dada por:

$$\Sigma_f = \begin{cases} r_f := |f_u|^2 - |\bar{f}_u|^2 + |f_v|^2 - |\bar{f}_v|^2 = 0 \\ s_f := f_u \bar{f}_v - f_v \bar{f}_u = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Esta caracterização pode ser encontrada em (RUDOLPH, 1987, MACHINERY 4.1, p.640) a qual é provada usando outros argumentos. De forma análoga ao Lema 1 podemos provar que (4.6) é equivalente à caracterização em (4.1) e portanto estas são três formas alternativas de caracterizar o conjunto singular (3.2) em termos de derivadas parciais complexas.

**Definição 11.** Diremos que um polinômio misto  $f(z, \bar{z}) = \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} z^\nu \bar{z}^\mu$  é:

- (i)  $u$ -semiholomorfo ( $\bar{u}$ -semiholomorfo) se  $f_u \equiv 0$  (resp.  $f_{\bar{u}} \equiv 0$ ).
- (ii)  $\nu$ -semiholomorfo ( $\bar{\nu}$ -semiholomorfo) se  $f_\nu \equiv 0$  (resp.  $f_{\bar{\nu}} \equiv 0$ ).

Com esta definição temos que  $f$  é um polinômio holomorfo se e somente se  $f$  é polinômio  $u$ -semiholomorfo e  $\nu$ -semiholomorfo. Analogamente,  $f$  é um polinômio anti-holomorfo se e somente se  $f$  é um polinômio  $\bar{u}$ -semiholomorfo e  $\bar{\nu}$ -semiholomorfo.

Note que para um polinômio  $u$ -semiholomorfa as equações do conjunto singular (4.5) se reduzem a:

$$\Sigma_f := \begin{cases} f_u = 0 \\ |f_\nu|^2 - |f_{\bar{\nu}}|^2 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Mais recentemente Bode (2022a) mostrou que a classe de funções mistas semiholomorfas são suficientes no estudo de realizações de enlaçamentos na 3-esfera conforme mostra o resultado.

**Teorema 7.** (BODE, 2022a, Theorem 1.1) Dada qualquer trança  $B$  de  $s$  fios existe um polinômio  $u$ -semiholomorfo  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com grau na variável  $u$ ,  $\deg_u f = s$ , e com singularidade fracamente isolada na origem tal que  $L_f$  é ambiente isotópico ao fecho de  $B$ .

Ou seja, todo enlaçamento na 3-esfera admite uma realização fraca semiholomorfa.

## 4.2 Bordo de Newton

Nesta parte apresentamos a construção do poliedro de Newton radial para um polinômio misto em (OKA, 2010). Para isso vamos introduzir o conceito de ação radial como segue.

Seja  $M_{\nu, \mu} = z^\nu \bar{z}^\mu$  um monômio misto onde  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  e  $P := (p_1, p_2, \dots, p_n)$  um vetor peso, onde  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são inteiros não negativos. Definimos o grau radial de  $M_{\nu, \mu}$ ,  $\text{rdeg}_P M_{\nu, \mu}$  com respeito a  $P$  por  $\text{rdeg}_P M_{\nu, \mu} = \sum_{j=1}^n p_j (\nu_j + \mu_j)$ .

**Definição 12.** (OKA, 2010) Dizemos que  $f(z, \bar{z}) = \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} z^\nu \bar{z}^\mu$  é um polinômio misto radialmente homogêneo pesado do tipo pesado radial  $(P; d_r)$  se  $\text{rdeg}_P z^\nu \bar{z}^\mu = d_r$  para cada  $(\nu, \mu)$  com  $c_{\nu, \mu} \neq 0$ .

Para um polinômio misto

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} z^\nu \bar{z}^\mu,$$

associamos o *poliedro de Newton*  $\Gamma_+(f)$  de  $f$ , definido como a envoltura convexa de

$$\bigcup_{\mathbf{v}+\boldsymbol{\mu} \in \text{supp}(f)} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}) + (\mathbb{R}^+)^n,$$

onde  $\text{supp}(f) = \{\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu} : c_{\mathbf{v},\boldsymbol{\mu}} \neq 0\}$ . Associado a este consideramos o *bordo de Newton*  $\Gamma(f)$  definido pela união de faces compactas de  $\Gamma_+(f)$ . A *parte principal de Newton* de  $f$  é definida e denotada por

$$f_\Gamma(z, \bar{z}) = \sum_{\mathbf{v}+\boldsymbol{\mu} \in \Gamma(f)} c_{\mathbf{v},\boldsymbol{\mu}} z^{\mathbf{v}} \bar{z}^{\boldsymbol{\mu}}. \quad (4.8)$$

Quando  $f \equiv f_\Gamma$  dizemos que  $f$  é um *polinômio bordo*.

Dizemos que o polinômio misto  $f(z, \bar{z})$  é *Newton conveniente* (CO) se  $\Gamma(f)$  intersecta todo eixo coordenado de  $(\mathbb{R}^+)^n$ .

Dado um vetor de inteiros positivos  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , associamos uma função linear  $l_P$  em  $\Gamma(f)$  definida por

$$l_P(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n p_j v_j \quad (4.9)$$

para  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Gamma(f)$ , e tome  $\Delta(P; f) = \Delta(P)$  a face onde  $l_P$  toma seu mínimo valor. Denotamos o mínimo valor de  $l_P$  por  $d(P; f)$ . Note que  $d(P; f) = \min\{\text{rdeg}_P z^{\mathbf{v}} \bar{z}^{\boldsymbol{\mu}} : c_{\mathbf{v},\boldsymbol{\mu}} \neq 0\}$ .

Definimos a função face  $f_P$  por

$$f_{\Delta(P)}(z, \bar{z}) = f_P(z, \bar{z}) = \sum_{\mathbf{v}+\boldsymbol{\mu} \in \Delta(P)} c_{\mathbf{v},\boldsymbol{\mu}} z^{\mathbf{v}} \bar{z}^{\boldsymbol{\mu}}.$$

A função face  $f_P$  é um polinômio misto radialmente homogêneo pesado do tipo radial pesado  $(P; d)$  com  $d = d(P; f)$ .

### 4.3 Tranças e funções semiholomorfas

Primeiramente vamos ver a conexão entre tranças geométricas e famílias de funções  $u$ -semiholomorfas.

Para uma dada trança geométrica  $B = \bigcup_{j=1}^s \{(u_j(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$  de  $s$  fios, podemos definir uma função  $\Phi : \mathbb{C} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , via

$$\Phi(u, t) = \prod_{j=1}^s (u - u_j(t)). \quad (4.10)$$

Note que  $\Phi$  pode ser visto como uma família de polinômios  $u$ -semiholomorfos a 1-parâmetro  $\Phi(\bullet, t) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Cada função  $\Phi(\bullet, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  é um polinômio mônico de grau  $s$  na variável  $u$  e com raízes distintas  $u_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , o qual são precisamente as coordenadas complexas dos  $s$  fios de  $B$  na altura  $t$ . Portanto, quando  $t$  variar no intervalo  $[0, 2\pi]$  as raízes de  $\Phi(\bullet, t)$  vão se deslocar ao longo dos fios da trança geométrica  $B$ .

Como vimos na [Subseção 2.2.2](#) a trança geométrica  $B$  definida em  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  pode ser fechada no toro sólido  $\mathbb{C} \times S^1$ . E como por definição temos que  $\Phi(u, 0) = \Phi(u, 2\pi)$ , isto nos permite considerar a existência da aplicação  $g$  que faz o Diagrama (4.11) comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times [0, 2\pi] & \xrightarrow{\text{Id} \times e^{it}} & \mathbb{C} \times S^1 \\ & \searrow \Phi & \downarrow g \\ & & \mathbb{C} \end{array} \quad (4.11)$$

Além disso considerando uma parametrização de Fourier por polinômios trigonométricos de  $B$  e usando a relação  $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$  e  $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$  a função  $g$  pode ser escritas nas variáveis  $u$ ,  $e^{it}$  e  $e^{-it}$ . Além disso,  $V_g := g^{-1}(0) \subset \mathbb{C} \times S^1$  é o fecho da trança  $B$  em  $\mathbb{C} \times S^1$ . Neste caso a função  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  é suave, inclusive nos pontos da forma  $(u, e^{2i\pi})$ .

Note que  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  acima induz a *aplicação argumento* de  $g$

$$\arg g : \mathbb{C} \times S^1 \setminus V_g \rightarrow S^1.$$

Um ponto  $(u, e^{it}) \in \mathbb{C} \times S^1 \setminus V_g$  é chamado de um *ponto crítico do argumento* de  $g$  se

$$\frac{\partial \arg g}{\partial \text{Re}(u)}(u, e^{it}) = \frac{\partial \arg g}{\partial \text{Im}(u)}(u, e^{it}) = \frac{\partial \arg g}{\partial t}(u, e^{it}) = 0.$$

Já que  $g(\bullet, e^{it})$  é  $u$ -semiholomorfo segue que  $\frac{\partial \arg g}{\partial \text{Re}(u)}(u, e^{it}) = \frac{\partial \arg g}{\partial \text{Im}(u)}(u, e^{it}) = 0$  se e somente se  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, e^{it}) = 0$ . Assim,  $(u, e^{it})$  é um ponto crítico do argumento de  $g$  se e somente se

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, e^{it}) = \frac{\partial \arg g}{\partial t}(u, e^{it}) = 0. \quad (4.12)$$

A conexão entre tranças e famílias de polinômios motivou a seguinte definição.

**Definição 13.** (BODE, 2021) Uma trança geométrica  $B$  como na Equação (2.1) é chamada *P-fibrada* ( $P$  por polinomial) se o argumento  $\arg g : (\mathbb{C} \times S^1) \setminus V_g \rightarrow S^1$  associada à correspondente função na Equação (4.10) é uma fibração suave localmente trivial. Uma trança é chamada *P-fibrada* se esta pode ser representada por uma trança geométrica  $P$ -fibrada.

**Observação 3.** Vamos destacar dois pontos que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho:

- (i) De fato a função  $g$  proveniente da parametrização de Fourier pode ser considerada polinomial nas variáveis  $u$ ,  $e^{it}$  e  $e^{-it}$  como provado pelos autores (BODE; DENNIS, 2019, Lemma 2.1). A ideia foi considerar as parametrizações dos fios por  $c_{C,j}(t) = (X_{C,j}(t) + iY_{C,j}(t), t)$ ,  $C \in \mathcal{P}_B$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_C$ , como em (2.3), isto é,  $X_{C,j}(t) = F_C\left(\frac{t+2\pi j}{s_C}\right)$  e  $Y_{C,j}(t) = G_C\left(\frac{t+2\pi j}{s_C}\right)$ ,  $C \in \mathcal{P}_B$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_C$ , e para todo real  $a > 0$  e  $b > 0$  a função

$$\Phi_{a,b}(u, t) = \prod_{C \in \mathcal{P}_B} \prod_{j=1}^{s_C} (u - aX_{C,j}(t) - biY_{C,j}(t)),$$

que tem como conjunto de zeros  $\Phi_{a,b}^{-1}(0)$  que continua sendo equivalente a  $B$ , isto segue porque  $\cup_{C \in \mathcal{P}_B} \cup_{j=1}^{s_C} \{(aX_{C,j}(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$  ainda representa o mesmo diagrama de  $B$  a menos de um escalonamento dado por  $a > 0$  e as funções  $bY_{C,j}(t)$ ,  $C \in \mathcal{P}_B$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_C$  ainda definem o sinal adequado dos cruzamentos pois  $b > 0$ . Sendo  $B$  uma trança de  $s$  fios e  $\mathcal{P}_B$  o conjunto das componentes conexas da projeção da trança, temos que  $\sum_{C \in \mathcal{P}_B} s_C = s$ . Em geral fixado  $C$  podemos esperar que na função  $\prod_{j=1}^{s_C} (u - aX_{C,j}(t) - biY_{C,j}(t))$  as potências das variáveis  $e^{it}$  e  $e^{-it}$  são frações com denominador dado por  $s_C$ , do tipo  $c_m(e^{it})^{\frac{m}{s_C}}$  para algum inteiro  $m$  e  $c_m \in \mathbb{C}$ . Em (BODE; DENNIS, 2019, Lemma 2.1) os autores mostraram que se  $s_C \nmid m$  então  $c_m = 0$ . Conseqüentemente a função  $\prod_{j=1}^{s_C} (u - aX_{C,j}(t) - biY_{C,j}(t))$  é polinomial nas variáveis  $u$ ,  $e^{it}$  e  $e^{-it}$ . Já que  $\Phi_{a,b}$  é o produto de  $|\mathcal{P}_B|$  destas funções esta é ainda polinomial nas variáveis  $u$ ,  $e^{it}$  e  $e^{-it}$ .

- (ii) Para cada  $t \in [0, 2\pi]$  denote por  $(c_j(t), t)$  as raízes de  $\frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial u}$ , chamados dos *pontos críticos* de  $\Phi(u, t)$ , as quais formam  $s - 1$  curvas  $(c_j(t), t) \in \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  e  $s - 1$  curvas paramétricas  $v_j(t) = \Phi(c_j(t), t)$  em  $\mathbb{C}$ , chamados dos *valores críticos* de  $\Phi_t$ . Note que  $\Phi(\bullet, t)$  só tem raízes simples para cada  $t$ , então  $v_j(t) \neq 0$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$  e  $j \in \{1, 2, \dots, s - 1\}$  e a menos de uma pequena isotopia de  $B$  podemos assumir que  $\frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial u}$  possui raízes simples e assim os valores críticos  $v_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s - 1$  são suaves e satisfazem  $v_j(t) \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, s - 1$ . Então, a Condição (4.12) que caracteriza os pontos críticos do argumento da função  $g$  associada a  $\Phi(u, t)$  é equivalente à existência de  $j \in \{1, 2, \dots, s - 1\}$  tal que  $u_* = c_j(t_*)$  e

$$\frac{\partial \arg(v_j(t))}{\partial t}(t_*) = 0. \quad (4.13)$$

Assim como  $t$  varia no intervalo  $[0, 2\pi]$  os pontos  $v_j(t)$  se movimenta no plano complexo, mas sempre evitando a origem. Assim, Equação (4.14) mostra entre outros os pontos para os quais as curvas suaves  $v_j(t)$  mudam sua orientação quando este se movimenta ao redor da origem, ou seja, os pontos que adicionalmente satisfazem

$$\frac{\partial^2 \arg(v_j(t))}{\partial t^2}(t_*) = 0. \quad (4.14)$$

### 4.3.1 Enlaçamentos transversais

Seja  $g_{a,b} : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  associada a  $\Phi_{a,b} : \mathbb{C} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  como Diagrama (4.11), onde  $\Phi_{a,b}$  provém de uma parametrização de Fourier de uma trança  $B$ . Assim,  $g_{a,b}$  é polinomial nas variáveis  $u$ ,  $e^{it}$  e  $e^{-it}$ . Podemos estender  $g_{a,b}$  para uma função polinomial  $f_{a,b} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  simplesmente trocando em  $g_{a,b}$  as variáveis  $e^{it}$  por  $re^{it}$  e  $e^{-it}$  por  $re^{-it}$ . Claramente  $f_{a,b}|_{\mathbb{C} \times S^1} = g_{a,b}$  e  $(f_{a,b}|_{\mathbb{C} \times S^1})^{-1}(0)$  é igual a  $g_{a,b}^{-1}(0)$  que é isotópico ao fecho da trança  $B$ . Fazendo  $v = re^{it}$  e  $\bar{v} = re^{-it}$ , então  $f_{a,b}$  toma a forma de um polinômio nas variáveis  $u$ ,  $v$  e  $\bar{v}$ , ou seja,  $f_{a,b}$  é um polinômio  $u$ -semiholomorfo.

Podemos trocar  $a, b > 0$  por  $\lambda a, \lambda b$  para  $\lambda > 0$  e  $a, b$  prefixados e considerar  $f_\lambda := f_{\lambda a, \lambda b}$  para um  $\lambda > 0$ . Claro que  $f_\lambda$  ainda é uma extensão de  $g_{\lambda a, \lambda b}$ . Com essa notação em (BODE; DENNIS, 2019, Theorem 1.1) os autores provaram que para uma escolha de  $\lambda$  suficientemente pequeno o enlaçamento proveniente da interseção de  $V_{f_\lambda}$  e a esfera unitária  $S^3$  é isotópico ao fecho da trança  $B$ .

Enlaçamentos provenientes dessa forma, ou seja, como a interseção de zeros de um polinômio misto e a esfera unitária são chamados de *enlaçamentos transversais*. Já que todo enlaçamento é isotópico ao fecho de uma trança com uma parametrização de Fourier, então todo enlaçamento na 3-esfera é transversal. Mais ainda o polinômio misto  $f_\lambda$  é um polinômio semiholomorfo.

Quando pedimos que o enlaçamento  $L$  seja realizado transversalmente por um polinômio holomorfo  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , então Rudolph (1983) provou que o conjunto destes enlaçamentos, os quais chamou de  $\mathbb{C}$ -enlaçamentos transversais, vai pertencer a um subconjunto próprio dos enlaçamentos na 3-esfera, os chamados enlaçamentos quase-positivos.

**Definição 14.** (RUDOLPH, 1983) Uma trança é chamada *quase-positiva* se esta pode ser representada por uma palavra quase-positiva, isto é,

$$B = \prod_{j=1}^l w_j \sigma_{i_j} w_j^{-1}$$

para algumas palavras de tranças  $w_j$  e  $l > 0$  e geradores  $\sigma_{i_j}$ . Um enlaçamento é chamado *quase-positivo* se este é o fecho de uma trança que na sua correspondente classe de conjugação contém uma trança quase-positiva.

De fato, Boileau e Orevkov (2001) mostraram que o conjunto de  $\mathbb{C}$ -enlaçamentos transversais é idêntico ao conjunto de enlaçamentos quase-positivos.

### 4.3.2 Extensão radial de tranças

A construção de extensões transversais não é suficiente para garantir que o tipo de isotopia do enlaçamento seja preservado para todas as pequenas esferas centradas na origem. Seguindo a mesma ideia da isotopia produzida anteriormente Bode (2018) definiu a partir de uma função  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , associada a uma trança  $B$  de  $s$  fios, a seguinte extensão:

$$p_k(u, v, \bar{v}) = (v\bar{v})^{ks} g\left(\frac{u}{(v\bar{v})^k}, \frac{v}{\sqrt{v\bar{v}}}\right), \quad (4.15)$$

onde  $k > 0$  é um número inteiro e  $\deg_u p_k = \deg_u g = s$ . Note que  $p_k(u, 0) = u^s$ , assim  $p_k(0, 0) = 0$ . Além disso, se tomamos  $v = e^{it}$  então  $v/\sqrt{v\bar{v}} = e^{it}$ , assim  $p_k$  em Equação (4.15) se obtém por substituir em  $g$  a variável  $u$  por  $u/(v\bar{v})^k$  e modificar a expressão de  $e^{it}$  por  $v/\sqrt{v\bar{v}}$  e  $e^{-it}$  por  $\bar{v}/\sqrt{v\bar{v}}$ . Assim, todo somando de  $p_k$  são, a menos de um produto por um número complexo, do

tipo

$$(\nu\bar{\nu})^{ks} \left( \frac{\nu}{\sqrt{\nu\bar{\nu}}} \right)^n \left( \frac{u}{(\nu\bar{\nu})^k} \right)^m = r^{2k(s-m)} e^{nit} u^m \text{ ou } (\nu\bar{\nu})^{ks} \left( \frac{\bar{\nu}}{\sqrt{\nu\bar{\nu}}} \right)^n \left( \frac{u}{(\nu\bar{\nu})^k} \right)^m = r^{2k(s-m)} e^{-nit} u^m, \quad (4.16)$$

onde  $0 \leq m \leq \deg_u g = s$  e  $n$  é um número inteiro não negativo. Esta extensão produz uma ação radial na aplicação  $p_k$ , isto é,  $p_k$  satisfaz

$$p_k(\lambda^{2k} u, \lambda \nu, \lambda \bar{\nu}) = \lambda^{2ks} p_k(u, \nu, \bar{\nu}), \quad \lambda > 0. \quad (4.17)$$

Se escolhermos  $k$  suficientemente grande tal que  $2k(s-m) - n \geq 0$  para todos os somandos em Equação (4.16) de  $p_k$

$$(\sqrt{\nu\bar{\nu}})^{2k(s-m)-n} \nu^n u^m \text{ ou } (\sqrt{\nu\bar{\nu}})^{2k(s-m)-n} \bar{\nu}^n u^m, \quad (4.18)$$

então  $p_k$  pode ser escrito como um polinômio nas variáveis  $u$ ,  $\sqrt{\nu\bar{\nu}}$ ,  $\nu$  e  $\bar{\nu}$ , o qual mostra que  $p_k$  nestas condições é semi-álgebraica e assim podemos ver que  $p_k$  não é sempre um polinômio misto.

Em (BODE, 2018) o autor caracterizou os pontos singulares desta aplicação em termos da aplicação  $g$  e seus valores críticos como segue:

**Proposição 1.** (BODE, 2018) A aplicação  $p_k$  como em (4.15) tem uma singularidade isolada na origem se e somente se  $g$  não tem pontos críticos do argumento.

Pelo Item-(ii) da Observação 3 a menos de uma pequena isotopia da trança a caracterização acima é equivalente ao não anulamento de  $\frac{\partial \arg v_j}{\partial t}$  para todo  $t \in [0, 2\pi]$  e todo  $j = 1, 2, \dots, s-1$ .

Uma pergunta natural sobre a aplicação  $p_k$  é quando esta providencia uma fibração de Milnor nas esferas de raio suficientemente pequeno centradas na origem. Isso nos forneceria uma maneira de associar o enlaçamento à respectiva singularidade da aplicação  $p_k$ . Para isso vamos precisar do seguinte resultado.

Seja  $p_k = \text{Re}(p_k) + i \text{Im}(p_k)$  então aqui tomamos  $\arg p_k := \frac{(\text{Re}(p_k), \text{Im}(p_k))}{|(\text{Re}(p_k), \text{Im}(p_k))|} : \mathbb{R}^4 \setminus V_{p_k} \rightarrow S^1$ . Por simplicidade denotamos  $(\text{Re}(p_k), \text{Im}(p_k))$  por  $p_k$  e  $(\text{Re}(u), \text{Im}(u), \text{Re}(v), \text{Im}(v)) \in \mathbb{R}^4$  por  $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ . Além disso, se consideramos  $v = re^{it}$ ,  $r > 0$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  assim os gradientes das funções coordenadas na base  $(\text{Re}(u), \text{Im}(u), r, t)$  são

$$\begin{aligned} \nabla \text{Re}(p_k)(u, v) &= \left( \frac{\partial \text{Re}(p_k)}{\partial \text{Re}(u)}(u, v), \frac{\partial \text{Re}(p_k)}{\partial \text{Im}(u)}(u, v), \frac{\partial \text{Re}(p_k)}{\partial r}(u, v), \frac{\partial \text{Re}(p_k)}{\partial t}(u, v) \right) e \\ \nabla \text{Im}(p_k)(u, v) &= \left( \frac{\partial \text{Im}(p_k)}{\partial \text{Re}(u)}(u, v), \frac{\partial \text{Im}(p_k)}{\partial \text{Im}(u)}(u, v), \frac{\partial \text{Im}(p_k)}{\partial r}(u, v), \frac{\partial \text{Im}(p_k)}{\partial t}(u, v) \right) \end{aligned}$$

**Proposição 2.** Seja  $p_k : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  como (4.15) construída de uma função  $u$ -semiholomorfa  $g$  e satisfazendo  $\{0\} \subseteq \Sigma_{p_k}$ . Então, temos

$$(i) \quad \Sigma_{\arg(p_k)} = \Sigma_{p_k} \setminus V_{p_k},$$

(ii)  $\Sigma_{p_k} \cap V_{p_k} = V_{p_k} \cap V_{(p_k)_u}$ , onde  $(p_k)_u = \frac{\partial p_k}{\partial u}$ .

*Demonstração.* Como podemos ver em (ARAÚJO DOS SANTOS, 2012) as singularidades de  $\arg p_k : \mathbb{R}^4 \setminus V_{p_k} \rightarrow S^1$  são caracterizadas como os pontos  $(u, v)$  tais que  $w(u, v) = 0$ , onde

$$w(u, v) = \operatorname{Re}(p_k)(u, v) \nabla \operatorname{Im}(p_k)(u, v) - \operatorname{Im}(p_k)(u, v) \nabla \operatorname{Re}(p_k)(u, v).$$

Tome  $w(u, v) = (w_1(u, v), w_2(u, v), w_3(u, v), w_4(u, v))$ , assim

$$\begin{aligned} w_1(u, v) &= \operatorname{Re}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v) - \operatorname{Im}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v), \\ w_2(u, v) &= \operatorname{Re}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v) - \operatorname{Im}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v), \\ w_3(u, v) &= \operatorname{Re}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u, v) - \operatorname{Im}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u, v), \\ w_4(u, v) &= \operatorname{Re}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u, v) - \operatorname{Im}(p_k)(u, v) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u, v). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por outro lado o conjunto singular  $\Sigma_{p_k}$  é dado pelos pontos  $(u, v)$  tal que o jacobiano de  $p_k$  nas coordenadas  $(\operatorname{Re}(u), \operatorname{Im}(u), r, t)$

$$Jp_k(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v) & \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v) & \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u, v) & \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u, v) \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v) & \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v) & \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u, v) & \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u, v) \end{pmatrix}$$

não tem posto maximal. Note que  $w(u, v) = 0$  com  $(u, v) \notin V_{p_k}$  implica que  $\nabla \operatorname{Re}(p_k)(u, v)$  e  $\nabla \operatorname{Im}(p_k)(u, v)$  são linearmente dependentes o que é equivalente a  $Jp_k$  não ter posto maximal.

Portanto,  $\Sigma_{\arg p_k} \subseteq \Sigma_{p_k} \setminus V_{p_k}$ .

A aplicação  $p_k$  é  $u$ -semiholomorfa, assim podemos considerar as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v) = \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v) \text{ e } \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v) = -\frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v). \quad (4.20)$$

Substituindo Equações (4.20) no jacobiano temos que se  $(u_*, v_*) \in \mathbb{R}^4$  satisfaz  $(p_k)_u(u_*, v_*) \neq 0$  então  $(u_*, v_*) \notin \Sigma_{p_k}$ . Note que por exemplo,  $(u_*, 0) \in \mathbb{C}^* \times \{0\}$  satisfaz  $(p_k)_u(u_*, 0) = su_*^{s-1} \neq 0$ .

Seja  $(u_*, v_*) \in \Sigma_{p_k} \setminus V_{p_k}$  então temos que  $(p_k)_u(u_*, v_*) = 0$  e  $r_* = |v_*| \neq 0$ . Consequentemente  $w_1(u_*, v_*) = w_2(u_*, v_*) = 0$  e o jacobiano

$$Jp_k(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) \\ 0 & 0 & \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

satisfaz que

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) - \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) = 0. \quad (4.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial r}(u, v) &= 2ksr^{2ks-1} g\left(\frac{u}{r^{2k}}, e^{it}\right) - 2kur^{2ks-2k-1} g_u\left(\frac{u}{r^{2k}}, e^{it}\right) \\ &= 2ksr^{-1} \underbrace{r^{2ks} g\left(\frac{u}{r^{2k}}, e^{it}\right)}_{p_k(u, v)} - 2kur^{-1} \underbrace{r^{2ks-2k} g_u\left(\frac{u}{r^{2k}}, e^{it}\right)}_{(p_k)_u(u, v)} \\ &= 2ksr^{-1} p_k(u, v) - 2kur^{-1} (p_k)_u(u, v). \end{aligned}$$

Assim no ponto  $(u_*, v_*)$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) &= 2ks(r_*)^{-1} \operatorname{Re}(p_k)(u_*, v_*) e \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) &= 2ks(r_*)^{-1} \operatorname{Im}(p_k)(u_*, v_*). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Consequentemente, substituindo (4.23) em  $w_4(u, v)$  de (4.19) e em (4.22) temos que

$$w_4(u_*, v_*) = \operatorname{Re}(p_k)(u_*, v_*) 2ks(r_*)^{-1} \operatorname{Im}(p_k)(u_*, v_*) - \operatorname{Im}(p_k)(u_*, v_*) 2ks(r_*)^{-1} \operatorname{Re}(p_k)(u_*, v_*) = 0$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) - \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) \\ &= 2ks(r_*)^{-1} \left( \operatorname{Re}(p_k)(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) - \operatorname{Im}(p_k)(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) \right) \\ &= 2ks(r_*)^{-1} w_3(u_*, v_*). \end{aligned}$$

Já que  $r_* \neq 0$  segue que  $w_3(u_*, v_*) = w_4(u_*, v_*) = 0$ . Portanto  $(u_*, v_*) \in \Sigma_{\arg p_k}$ .

Para a segunda afirmação, se  $(u_*, v_*) \in \Sigma_{p_k} \cap V_{p_k}$  então  $(p_k)_u(u_*, v_*) = 0$  e  $p_k(u_*, v_*) = 0$ , assim  $\Sigma_{p_k} \cap V_{p_k} \subseteq V_{(p_k)_u} \cap V_{p_k}$ . Por outro lado, se  $(u_*, v_*) \in V_{p_k} \cap V_{(p_k)_u}$  com  $|v_*| \neq 0$  então  $w_3(u_*, v_*) = 0$ . Analogamente ao Item-(i) temos que  $(p_k)_u(u_*, v_*) = 0$  implica que o menor de  $Jp_k(u_*, v_*)$  em Equação (4.21) que não é directamente nulo pode ser escrito como

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) - \frac{\partial \operatorname{Im}(p_k)}{\partial r}(u_*, v_*) \frac{\partial \operatorname{Re}(p_k)}{\partial t}(u_*, v_*) = 2ks(r_*)^{-1} w_3(u_*, v_*).$$

Portanto, temos assim que  $(u_*, v_*) \in \Sigma_{p_k} \cap V_{p_k}$ . Se  $|v_*| = 0$  segue de  $p_k$  ser  $u$ -mônico e  $\deg_u p_k = s$  que  $(p_k)_u(u, 0) = su^{s-1}$ , isto implica que  $(V_{p_k} \cap V_{(p_k)_u}) \cap (\mathbb{C}^* \times \{0\}) = \emptyset$ . Portanto  $(V_{p_k} \cap V_{(p_k)_u}) \setminus \{0\} \subseteq \Sigma_{p_k} \cap V_{p_k}$ . Assim, já que  $\{0\} \subseteq \Sigma_{p_k}$  então obtemos a igualdade.  $\square$

A seguir apresentaremos a ideia desenvolvida em (BODE; DENNIS, 2019; BODE, 2019) para mostrar que para todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno  $L_{p_k, \rho} = V_{p_k} \cap S_\rho^3$  é um enlaçamento em  $S_\rho^3$  e além disso  $L_{p_k, \rho}$  é isotópico ao enlaçamento  $V_g$  mergulhado apropriadamente em  $S_\rho^3$ . Note que pela ação radial (4.17) induzida na  $p_k$  o resultado vale para todo  $\rho > 0$ .

**Proposição 3.** (BODE; DENNIS, 2019) Seja  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  como (4.11), construída a partir de uma parametrização de Fourier de uma trança  $B$  de  $s$  fios, então para um inteiro grande  $k$  a aplicação (4.15) satisfaz:

(i)  $p_k$  tem uma singularidade fracamente isolada na origem. Mais ainda,  $V_{p_k} \setminus \{0\}$  é uma superfície suave,  $p_k$  é uma função semi-algébrica  $u$ -semiholomorfa e  $u$ -mônica com grau  $\deg_u p_k = s$ .

(ii) Para todo  $\rho > 0$  o enlaçamento  $L_{p_k, \rho}$  é isotópico ao fecho de  $B$  mergulhado em  $S_\rho^3$ .

*Demonstração.* Pela definição temos que  $p_k$  é  $u$ -semiholomorfo e  $u$ -mônico. Mais ainda  $p_k(u, 0) = u^s$ , onde  $\deg_u p_k = \deg_u g = s$  e assim  $(u, re^{it}) \in V_{p_k} \setminus \{0\}$  implica  $v = re^{it} \neq 0$ . Segue direto da [Proposição 2](#) que  $V_{p_k} \setminus \{0\}$  é uma superfície suave pois  $g$  tem raízes simples. Isto concluí a prova do Item (i).

A aplicação  $p_k$  satisfaz:

$$p_k(\lambda^{2k}u, \lambda v, \lambda \bar{v}) = \lambda^{2ks} p_k(u, v, \bar{v}), \quad \lambda > 0.$$

Esta ação radial permite provar algumas propriedades de  $p_k$ . Por exemplo, já que  $V_{p_k} \setminus \{0\}$  é suave temos que para todo  $\rho > 0$ , a variedade  $V_{p_k}$  intersecta transversalmente a esfera  $S_\rho^3$ , assim podemos ver que a classe de  $L_{p_k, \rho} = V_{p_k} \cap S_\rho^3$  não depende do raio  $\rho > 0$  e portanto  $L_{p_k, \rho}$  é isotópico ao enlaçamento  $L_{p_k}$  associado com a singularidade fracamente isolada na origem de  $p_k$ .

Para provar Item (ii) tome  $(u, v) \in V_{p_k} \setminus \{0\}$ , então  $g(u/(v\bar{v})^k, v/\sqrt{v\bar{v}}) = 0$ . Denote por  $(u_*, e^{it_*}) = (u/(v\bar{v})^k, v/\sqrt{v\bar{v}}) \in V_g$ , portanto  $(u, \arg v) = ((v\bar{v})^k u_*, t_*)$ . A órbita da ação  $\gamma(\lambda) = (\lambda^{2k}u, \lambda v)$  claramente pertence a  $V_{p_k}$  e intersecta transversalmente a todo toro sólido  $\mathbb{C} \times S_\rho^1$ ,  $\rho > 0$ . Assim, concluímos que  $V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1)$  é o fecho da trança  $B$  no toro sólido  $\mathbb{C} \times S_\rho^1$ .

Como em (2.2) vamos considerar o fecho da trança  $B$  em  $S_\rho^3$  mergulhado canonicamente. Para isto pensamos  $p_k$  como uma família de polinômios holomorfos em uma variável complexa  $u$ , parametrizada por  $v = re^{it}$ . Fixando  $r$  e  $t$ , denotamos as  $s$  raízes de  $p_k(\bullet, re^{it})$  por  $u_j(r, t)$ .

Note que por definição  $u_j(1, t) = u_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , onde  $\{(u_j(t), t) : t \in [0, 2\pi]\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , são os fios de  $B$ . Mais ainda, para qualquer  $r > 0$  a raiz  $u_j(r, t) = r^{2k}u_j(1, t)$ . Portanto, as raízes satisfazem  $u_j(r, t) = r^{2k}u_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Existe um raio pequeno  $\rho > 0$  tal que  $|u_j(\rho, t)| = |\rho^{2k}u_j(1, t)| < \rho$ , para todo  $t \in [0, 2\pi]$  e  $j = 1, 2, \dots, s$ . Assim, todas as raízes  $u_j(\rho, t)$  de  $p_k(\bullet, \rho e^{it})$  pertence ao interior de um disco  $\mathring{D}_\rho$  de raio  $\rho > 0$  no plano complexo. Consequentemente,  $V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1) \subset \mathring{D}_\rho \times S_\rho^1$  e a imagem de  $V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1)$  por

$$\Psi_\rho : \mathring{D}_\rho \times S_\rho^1 \rightarrow S_\rho^3, \quad \Psi_\rho(u, v) = \left( u, \frac{v}{|v|} \sqrt{\rho^2 - |u|^2} \right)$$

é a união de  $s$  curvas  $t \mapsto \Psi_\rho(u_j(\rho, t), \rho e^{it})$ , para  $j = 1, 2, \dots, s$ , os quais formam o fecho de  $B$  na esfera  $S_\rho^3$ . Note que a parametrização de cada componente  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , do fecho de  $B$  em  $S_\rho^3$  é dada pela concatenação de um conjunto de curvas abertas satisfazendo  $t \mapsto \Psi_\rho(u_j(\rho, t), \rho e^{it}) \subseteq$

$K_i$ . Agrupando as curvas abertas para cada componente obtemos assim um conjunto de  $|\mathcal{C}|$  nós parametrizados em  $S_\rho^3$ .

De fato, pelo Teorema de extensão de isotopia, é suficiente construir uma isotopia suave entre os correspondente conjuntos das duas curvas  $\Psi_\rho(V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1))$  e  $L_{p_k, \rho}$  para um raio apropriado  $\rho > 0$ . Vamos construir esta isotopia a partir de cada curva, possivelmente aberta,  $t \mapsto \Psi_\rho(u_j(\rho, t), \rho e^{it}) \subseteq K_i$  em lugar de construí-la diretamente na parametrização de  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, |\mathcal{C}|$ , a qual é a concatenação de um conjunto destas curvas.

Para cada ponto fixado  $(u_j(\rho, t), \rho e^{it})$  a órbita da ação  $\gamma_j(\lambda) = (\lambda^{2k} u_j(\rho, t), \lambda \rho e^{it})$  intersecta todas as 3-esferas transversalmente em um único ponto. Denotamos por  $\lambda_{j, \rho}(t)$  o valor de  $\lambda$  para o qual a interseção com  $S_\rho^3$  acontece, isto é,  $\gamma_j(\lambda_{j, \rho}(t)) \in S_\rho^3$  que é equivalente a

$$|(\lambda_{j, \rho})^{2k} u_j(\rho, t)|^2 + (\lambda_{j, \rho})^2 \rho^2 = \rho^2. \quad (4.24)$$

Isto é claro que  $\lambda_{j, \rho}(t) \in (0, 1]$  uma vez que  $|\gamma_j(\lambda)| \geq \lambda \rho$  para todo  $\lambda > 0$ . Veja em [Figura 22](#) a órbita de  $\gamma_j(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

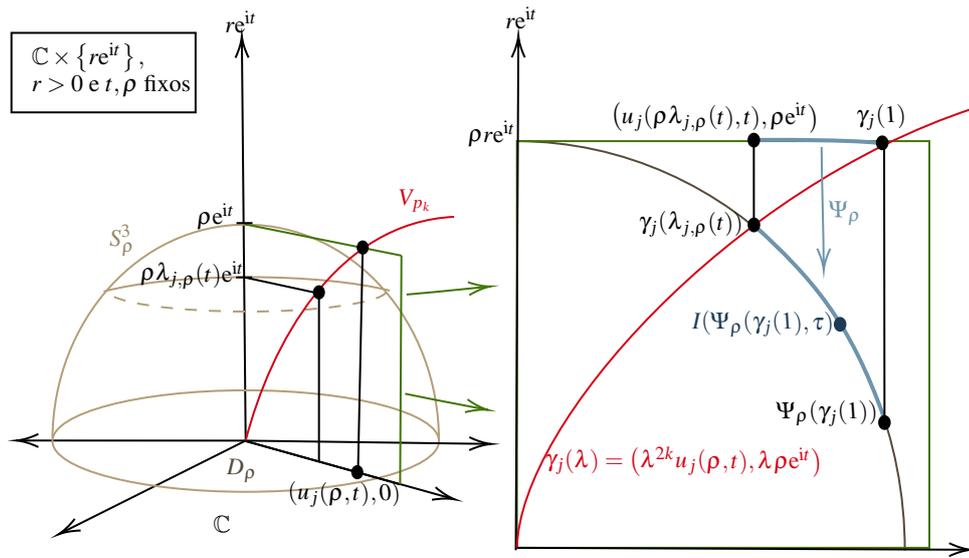


Figura 22 – Órbita  $\gamma_j(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$  definida para  $\rho > 0$  e  $t \in [0, 2\pi]$  fixos, onde  $\gamma_j(\lambda) \subset V_{p_k}$ . O ponto  $\gamma_j(1)$  pertence ao fecho de  $B$  em  $\mathring{D}_\rho \times S_\rho^1$ ,  $\Psi_\rho(\gamma(1))$  pertence ao fecho de  $B$  mergulhado por  $\Psi_\rho$  em  $S_\rho^3$  e  $\gamma_j(\lambda_{j, \rho}(t)) = \Psi_\rho(u_j(\rho \lambda_{j, \rho}(t), t), \rho e^{it})$  que pertence a  $L_{p_k, \rho} = S_\rho^3 \cap V_{p_k}$

Definimos a isotopia suave entre os enlaçamentos  $\Psi_\rho(V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1))$  e  $L_{p_k, \rho}$ , onde o enlaçamento  $\Psi_\rho(V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1))$  é o fecho da trança  $B$  em  $S_\rho^3$ .

Tome

$$I : \underbrace{(K_1 \cup \dots \cup K_i)}_{|\mathcal{C}| \text{ cópias}} \times [0, 1] \rightarrow S_\rho^3$$

$$I(\Psi_\rho(u_j(\rho, t), \rho e^{it}), \tau) = \Psi_\rho(u_{j_i}(\rho - \tau\rho + \tau\rho\lambda_{j_i, \rho}(t), t), \rho e^{it}),$$

onde  $j_i \in \{1, 2, \dots, s\}$  satisfaz  $\Psi_\rho(u_{j_i}(\rho, t), \rho e^{it}) \subset K_i$ . Note que  $I$  é bem definido se  $\rho$  é pequeno e para cada  $j_i \in \{1, 2, \dots, s\}$  pela Equação (4.24) temos:

$$I(\Psi_\rho(u_{j_i}(\rho, t), \rho e^{it}), 0) = \Psi_\rho(u_{j_i}(\rho, t), \rho e^{it}) \subset \Psi_\rho(V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1))$$

e

$$I(\Psi_\rho(u_{j_i}(\rho, t), \rho e^{it}), 1) = (u_{j_i}(\rho \lambda_{j_i, \rho}(t), t), e^{it} \sqrt{\rho^2 - |u_{j_i}(\lambda_{j_i, \rho}(t), \rho, t)|^2}) = \gamma_{j_i}(\lambda_{j_i, \rho}(t)) \subset L_{p_k, \rho}.$$

Veja Figura 22 onde se mostra a imagem da isotopia  $I(\Psi_\rho(\gamma_j(1)), \tau)$  para  $j = 1, 2, \dots, s$  com ponto inicial  $\Psi_\rho(\gamma_j(1))$  em  $\tau = 0$  e ponto final  $\Psi_\rho(u_j(\rho \lambda_{j, \rho}(t), \rho e^{it})) = \gamma_j(\lambda_{j, \rho}(t))$  em  $\tau = 1$ .

Temos que mostrar que para cada  $\tau$  a função  $I(\bullet, \tau)$  é um mergulho e que  $I$  é suave.

Suponha que existe um  $\tau_0 \in [0, 1]$  tal que  $I(\bullet, \tau_0)$  não é mergulho, então existe um número complexo

$$u_j(\rho - \tau_0 \rho + \tau_0 \rho \lambda_{j, \rho}(t), t) = u_l(\rho - \tau_0 \rho + \tau_0 \rho \lambda_{l, \rho}(t), t), \text{ com } j \neq l, \quad (4.25)$$

mas isto implica que  $u_j(1, t) = \eta u_l(1, t)$ , onde  $\eta = \frac{\rho - \tau_0 \rho + \tau_0 \rho \lambda_{j, \rho}(t)}{\rho - \tau_0 \rho + \tau_0 \rho \lambda_{l, \rho}(t)} > 0$  (já que  $\rho - \tau_0 \rho + \tau_0 \rho \lambda_{j, \rho}(t) \in [\rho \lambda_{j, \rho}(t), \rho]$  para todo  $\tau_0 \in [0, 1]$  e  $j = 1, 2, \dots, s$ ). Note que se  $u_j(1, t) = 0$  então a outra raiz  $u_l(1, t) = 0$ , o que contradiz que  $p_k(\bullet, re^{it})$  só tem raízes simples. Portanto,  $u_j(1, t) \neq 0$  e  $u_l(1, t) \neq 0$ . A menos de trocar os subíndices  $l \leftrightarrow j$  podemos supor sem perda de generalidade que  $\eta \leq 1$ , e já que  $p_k(\bullet, re^{it})$  só tem raízes simples então  $\eta < 1$ .

Temos pela Equação (4.24) que  $\rho \rightarrow 0$  implica  $\lambda_{l, \rho}(t) \rightarrow 1$  assim, já que  $\eta < 1$  podemos escolher  $\rho$  tal que  $\eta < (\lambda_{l, \rho}(t))^{2k}$ . Então,

$$|\eta u_l(\rho, t)| < |(\lambda_{l, \rho}(t))^{2k} u_l(\rho, t)| = |u_l(\rho \lambda_{l, \rho}(t), t)|.$$

Assim, para  $\rho > 0$  suficientemente pequeno temos que

$$|u_j(\rho \lambda_{j, \rho}(t), t)| < |u_j(\rho, t)| = |\eta u_l(\rho, t)| < |u_l(\rho \lambda_{l, \rho}(t), t)|. \quad (4.26)$$

Portanto, já que  $|u_j(\rho \lambda_{j, \rho}(t), t)| \leq |u_j(\rho - \tau \rho + \tau \rho \lambda_{j, \rho}(t), t)| \leq |u_j(\rho, t)|$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, s$ , e as desigualdades em (4.26) temos que

$$|u_j(\rho - \tau \rho + \tau \rho \lambda_{j, \rho}(t), t)| < |u_l(\rho - \tau \rho + \tau \rho \lambda_{l, \rho}(t), t)|, \forall \tau \in [0, 1],$$

o qual da uma contradição a Equação (4.25). Portanto, para um raio  $\rho$  suficientemente pequeno temos que para cada  $\tau$  a função  $I(\bullet, \tau)$  é um mergulho. Consequentemente, já que as raízes simples do polinômio depende suavemente nos coeficientes e a aplicação  $\Psi_\rho$  é suave,  $I$  é uma isotopia suave.

O Teorema de extensão de isotopia, Teorema 1, diz que  $I$  estende a uma isotopia ambiente. Assim, para  $\rho$  suficientemente pequeno  $L_{p_k, \rho}$  é ambiente isotópica ao enlaçamento  $\Psi_\rho(V_{p_k} \cap (\mathbb{C} \times S_\rho^1))$  o qual é o fecho de  $B$  mergulhado em  $S_\rho^3$ .  $\square$

## 4.3.2.1 Realização da trança quadrada

Em (BODE, 2019, Lemma 4.1) o autor provou que para certas tranças quadradas  $B^2$  a aplicação  $p_k$  proveniente da função  $g$  é um polinômio  $u$ -semiholomorfo com singularidade fracamente isolada na origem. Isto se deve a explicação apresentada na Subseção 2.3.3, onde mostramos que quando temos a parametrização de uma trança  $B$  para encontrar o quadrado da trança (ou equivalentemente a concatenação de  $B$  com ela mesma) é suficiente dobrar a velocidade no parâmetro  $t$ ; ou seja, fazer a troca de  $e^{it}$  por  $e^{2it}$ . Assim, os somandos de

$$p_k(u, v, \bar{v}) = (v\bar{v})^{ks} g\left(\frac{u}{(v\bar{v})^k}, \frac{v^2}{v\bar{v}}\right) \quad (4.27)$$

são da forma

$$(v\bar{v})^{ks} \left(\frac{v^2}{v\bar{v}}\right)^n \left(\frac{u}{(v\bar{v})^k}\right)^m = (v\bar{v})^{k(s-m)-n} v^{2n} u^m \text{ ou } (v\bar{v})^{ks} \left(\frac{\bar{v}^2}{v\bar{v}}\right)^n \left(\frac{u}{(v\bar{v})^k}\right)^m = (v\bar{v})^{k(s-m)-n} \bar{v}^{2n} u^m,$$

onde  $0 \leq m \leq \deg_u g = s$  e  $n$  é um número inteiro não negativo. Portanto, escolhendo  $k > 0$  suficientemente grande tal que  $k(s-m) - n \geq 0$ , temos que  $p_k$  é um polinômio misto o qual é uma realização fraca do fecho de  $B^2$ . Além disso, o polinômio  $p_k$  é radialmente homogêneo pesado do tipo  $(2k, 1; 2ks)$ .

Nesta tese conseguimos verificar que as propriedades da aplicação  $p_k$  também são válidas para qualquer dado polinômio semiholomorfo  $p : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  radialmente homogêneo pesado, ou seja,  $p$  pode ser decomposto num produto de uma aplicação  $u$ -semiholomorfa  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  com alguma potência possivelmente racional de  $|v| = r$ , e além disso a existência de uma singularidade fracamente isolada na origem de  $p$  está relacionada com as raízes simples de  $g$ .

**Proposição 4.** Seja  $p : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio  $u$ -semiholomorfo que é radialmente homogêneo pesado do tipo radial  $(p_1, p_2; d_r)$ . Então, existe uma função  $u$ -semiholomorfa  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$p(u, re^{it}, re^{-it}) := r^n g\left(\frac{u}{r^\kappa}, e^{it}\right), \quad n = \frac{d_r}{p_2}, \quad \kappa = \frac{p_1}{p_2}. \quad (4.28)$$

*Demonstração.* Seja

$$p(u, v, \bar{v}) = \sum_{j=1}^l c_{v_j, \mu_j} u^{v_{j,1}} v^{v_{j,2}} \bar{v}^{\mu_{j,2}}$$

onde  $v_j = (v_{j,1}, v_{j,2})$ ,  $\mu_j = (0, \mu_{j,2})$ ,  $c_{v_j, \mu_j} \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ . Em razão de  $p$  ser um polinômio misto radialmente homogêneo pesado então para qualquer  $j = 1, 2, \dots, l$

$$p_1 v_{j,1} + p_2 (v_{j,2} + \mu_{j,2}) = d_r.$$

Tomando  $v = re^{it}$ , temos

$$\begin{aligned} p(u, re^{it}, re^{-it}) &= \sum_{j=1}^l c_{v_j, \mu_j} u^{v_{j,1}} r^{v_{j,2} + \mu_{j,2}} e^{(v_{j,2} - \mu_{j,2})it} \\ &= r^n \left( \sum_{j=1}^l c_{v_j, \mu_j} \left( \frac{u}{r^{\left(\frac{n - (v_{j,2} + \mu_{j,2})}{v_{j,1}}\right)}} \right)^{v_{j,1}} e^{(v_{j,2} - \mu_{j,2})it} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Tome  $n = \frac{d_r}{p_2}$  e  $m = \frac{d_r}{p_1}$  assim para qualquer  $j = 1, 2, \dots, l$ , temos

$$nv_{j,1} + m(v_{j,2} + \mu_{j,2}) = nm.$$

Logo

$$\frac{n - (v_{j,2} + \mu_{j,2})}{v_{j,1}} = \frac{n}{m}. \quad (4.30)$$

Mais ainda, temos  $\frac{n}{m} = \frac{p_1}{p_2} = \kappa$ . Portanto substituindo Equação (4.30) em Equação (4.29)

$$p(u, re^{it}, re^{-it}) = r^n g\left(\frac{u}{r^\kappa}, e^{it}\right),$$

onde  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $u$ -semi-holomorfa,

$$g(u, e^{it}) = \sum_{j=1}^l c_{v_j, \mu_j} u^{v_{j,1}} e^{(v_{j,2} - \mu_{j,2})it}.$$

□

Note que para o caso da realização fraca  $p_k$  de uma trança quadrada Equação (4.27) que é um polinômio semi-holomorfo radialmente homogêneo pesado do tipo  $(2k, 1; 2ks)$  temos que  $n = \frac{d_r}{p_2} = \frac{2ks}{1} = 2ks$  e  $\kappa = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2k}{1} = 2k$ . Contudo, é importante destacar que para alguns polinômios semi-holomorfos radialmente homogêneos pesados os números  $n$  e  $\kappa$  podem não ser números inteiros.

**Corolário 1.** Seja  $p : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio  $u$ -semi-holomorfo que é radialmente homogêneo pesado do tipo radial  $(p_1, p_2; d_r)$  com singularidade fracamente isolada na origem. Então, existe uma função  $u$ -semi-holomorfa  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  com raízes simples que satisfaz a Equação (4.28).

*Demonstração.* A existência de  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$p(u, v, \bar{v}) = (v\bar{v})^{\frac{n}{2}} g\left(\frac{u}{(v\bar{v})^{\frac{\kappa}{2}}}, \frac{v}{\sqrt{v\bar{v}}}\right)$$

foi provada na [Proposição 4](#). Pela regra da cadeia temos que

$$p_u(u, v, \bar{v}) = (v\bar{v})^{\frac{n-\kappa}{2}} g_u\left(\frac{u}{(v\bar{v})^{\frac{\kappa}{2}}}, \frac{v}{\sqrt{v\bar{v}}}\right).$$

Sendo  $p$  radialmente homogêneo pesado podemos deduzir da prova da [Proposição 2](#) que  $(V_p \cap \Sigma_p) \setminus \{v = 0\} = (V_p \cap V_{p_u}) \setminus \{v = 0\}$ , além disso a hipótese da singularidade ser fracamente isolada na origem garante que

$$(V_p \cap V_{p_u}) \setminus \{v = 0\} = \{0\}. \quad (4.31)$$

Portanto, se  $|v| \neq 0$  então (4.31) implica que  $V_g \cap V_{g_u} = \{0\}$ , ou seja,  $g$  tem raízes simples.  $\square$



# NOVOS CRITÉRIOS DE NÃO-DEGENERAÇÃO

---

A noção de poliedro de Newton não-degenerado foi introduzida por [Kouchnirenko \(1976\)](#) para funções holomorfas com o objetivo de calcular um conhecido invariante analítico da singularidade que é o número de Milnor, a partir do número de Newton que é um número combinatorial. Para isso foi necessário introduzir o conceito de bordo de Newton conveniente para que o número de Newton estivesse bem definido. Uma consequência direta é que funções holomorfas com bordo de Newton não-degenerado e conveniente possui singularidade isolada.

Posteriormente [Wall \(1999\)](#) e [Mondal \(2021\)](#) visaram estender os resultados de Kouchnirenko removendo a hipótese de Newton conveniente no bordo de Newton. Para isso introduziram os conceitos de Newton não-degenerado interior e Newton não-degenerado parcial, respectivamente, que em particular incluíam os polinômios radialmente homogêneos pesados com singularidade isolada e não convenientes.

Posteriormente, o conceito de Newton não-degenerado foi considerado por [Oka \(2010\)](#) para funções mistas com o interesse de generalizar propriedades conhecidas dos polinômios holomorfos nesta nova classe.

O objetivo neste capítulo é generalizar as não-degenerações de Newton interna e parcial para o caso de polinômios mistos de duas variáveis, como também generalizar resultados conhecidos de polinômios não-degenerados holomorfos ou mistos. Estes resultados aparecem em ([ARAÚJO DOS SANTOS; BODE; SANCHEZ QUICENO, 2022](#)) e ([BODE; SANCHEZ QUICENO, 2023](#))

## 5.1 Não-degenerações

Considere um polinômio misto  $f(z, \bar{z}) = \sum_{v, \mu} c_{v, \mu} z^v \bar{z}^\mu$ , onde  $z = (u, v)$  e  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$ . No bordo de Newton  $\Gamma(f)$  considere a sequência de vetores de pesos positivos

$$\mathcal{P} := \{P_i, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (5.1)$$

associados as 1-faces compactas de  $\Gamma(f)$ . Quando for necessário explicitar o polinômio  $f$  associado ao bordo de Newton, escrevemos  $\mathcal{P}(f)$  em lugar de  $\mathcal{P}$ .

Vamos introduzir a seguinte ordem parcial no conjunto  $\mathcal{P}$ : dados os vetores de pesos  $P_i = (p_{i,1}, p_{i,2})$  e  $P_j = (p_{j,1}, p_{j,2})$  vamos denotar por  $P_i \succ P_j$  se e somente se  $\frac{p_{i,1}}{p_{i,2}} > \frac{p_{j,1}}{p_{j,2}}$ .

Podemos reindexar o conjunto  $\mathcal{P}$  de forma que

$$P_1 \succ P_2 \succ \cdots \succ P_N. \quad (5.2)$$

Seguindo analogamente como na [Proposição 4](#) podemos provar que para  $P_i = (p_{i,1}, p_{i,2}) \in \mathcal{P}$  existe  $g_i : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  que não depende de  $r$  e é definida por

$$g_i(u, \bar{u}, e^{it}) = r^{-k_i s_i - n_i} f_{P_i}(r^{k_i} u, r^{k_i} \bar{u}, v, \bar{v}), \quad (5.3)$$

onde  $k_i = \frac{p_{i,1}}{p_{i,2}}$ ,  $n_i$  é o menor expoente de  $r := |v|$  em  $f_{P_i}$  e  $s_i$  é o maior expoente de  $R := |u|$  em  $f_{P_i}$ .

Note que esta é uma forma alternativa a (4.28) para decompor  $f_{P_i}$  e que vale para todo polinômio misto radialmente homogêneo pesado.

**Definição 15.** (OKA, 2010) Chamamos  $f_{P_i}$  *true* se o polinômio correspondente  $g_i(u, \bar{u}, e^{it})$  tem um conjunto de zeros não vazio em  $\mathbb{C}^* \times S^1$ , onde  $\mathbb{C}^*$  denota  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Um polinômio misto  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  é chamado *true* se para todo  $P_i \in \mathcal{P}$  a respectiva função face  $f_{P_i}$  é *true*.

Uma classe de polinômios mistos que são *true* são os polinômios  $x$ -semiholomorfos,  $x \in \{u, v, \bar{u}, \bar{v}\}$ , o qual segue de aplicar o Teorema Fundamental da Álgebra em cada função  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , as quais de fato têm um conjunto de zeros não vazio em  $\mathbb{C} \times S^1$ .

**Definição 16.** Uma face 0-dimensional de  $\Gamma(f)$  que borda uma única 1-face compacta, é chamada de *vértice extremo*. Do contrário, chamamos de *vértice não extremo*.

Vamos considerar também as seguinte definições.

**Definição 17.** (OKA, 2010) Dizemos que o polinômio misto  $f$  tem um bordo *Newton não-degenerado* (ND) se para qualquer face fechada  $\Delta$  (0-dimensional ou 1-dimensional), a função face  $f_\Delta$  não tem pontos críticos em  $V_{f_\Delta} \cap \mathbb{C}^{*2}$ , onde  $\mathbb{C}^{*2} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

**Observação 4** (Importante). Note que ND envolve a não-degeneração de todas as funções face definidas no bordo de Newton. Também é importante destacar que [Definição 17](#) pode ser equivalentemente definida em termos de vetores de pesos  $P$ ; isto é: para todo vetor de pesos  $P$  considere a função  $l_P$  como na Equação (4.9) e seu mínimo no  $\text{supp}(f)$ . Como esse mínimo vai ser realizado exclusivamente ao longo de uma face 1-dimensional, ou ao longo de uma face 0-dimensional, basta verificar que  $f$  restrita nesses monômios (que denotamos por  $f_P$ ) não tem pontos críticos em  $V_{f_P} \cap \mathbb{C}^{*2}$ .

**Definição 18.** Dado um polinômio misto  $f$  e  $\mathcal{P}(f)$  como em (5.2). Dizemos que  $f$  tem um bordo *Newton não-degenerado interior* (NDI) se as seguintes condições são válidas:

- (i) a função face  $f_{P_1}$  e  $f_{P_N}$  não tem pontos críticos em  $V_{f_{P_1}} \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \{v = 0\})$  e  $V_{f_{P_N}} \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\})$ , respectivamente;
- (ii) em cada 1-face e vértice não extremo  $\Delta$ , a função face  $f_\Delta$  não tem pontos críticos em  $V_{f_\Delta} \cap \mathbb{C}^{*2}$ .

**Observação 5.** (i) Se  $\mathcal{P}(f) = \emptyset$  então definimos  $f_{P_1} = f_{P_N} = f_\Gamma$ .

- (ii) As condições ND e NDI envolvem somente termos da parte principal do bordo de Newton. A condição NDI-(ii) é a condição ND, exceto que nos vértices extremos a condição NDI pode admitir degeneração no sentido de ND.

Para a definição seguinte vamos lembrar que dado  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de polinômio misto então pelo [Lema 1](#) o conjunto singular é dado por

$$\Sigma_f = \begin{cases} s_{1,f} = f_u \bar{f}_v - f_v \bar{f}_u = 0 \\ s_{2,f} = |f_u|^2 - |f_{\bar{u}}|^2 = 0 \\ s_{3,f} = |f_v|^2 - |f_{\bar{v}}|^2 = 0. \end{cases}$$

**Definição 19.** Dizemos que o polinômio misto  $f$  é *Newton não-degenerado parcial* (NDP) se para todo vetor de pesos positivo  $P$  ambas das seguintes condições são válidas:

- (i) o sistema

$$(s_{1,f}(0, v))_P = (s_{2,f}(0, v))_P = (s_{3,f}(0, v))_P = (f(0, v))_P = 0 \quad (5.4)$$

não têm solução em  $\mathbb{C}^{*2}$  e

$$(s_{1,f}(u, 0))_P = (s_{2,f}(u, 0))_P = (s_{3,f}(u, 0))_P = (f(u, 0))_P = 0 \quad (5.5)$$

não têm solução em  $\mathbb{C}^{*2}$ ;

- (ii) o sistema

$$(s_{1,f})_P = (s_{2,f})_P = (s_{3,f})_P = f_P = 0 \quad (5.6)$$

não têm solução em  $\mathbb{C}^{*2}$ .

Aqui  $s_{i,f}(0, v)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são polinômios mistos em variáveis  $v$  e  $\bar{v}$  e  $s_{i,f}(u, 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são polinômios mistos em variáveis  $u$  e  $\bar{u}$ . Porém, fazendo  $v^a \bar{v}^b = u^0 \bar{u}^0 v^a \bar{v}^b$  e  $u^a \bar{u}^b = v^0 \bar{v}^0 u^a \bar{u}^b$ , podemos considerar estes como polinômios em duas variáveis e suas conjugadas. Assim, as funções face para um vetor de pesos  $P = (p_1, p_2)$  de um polinômio misto  $h$  como os polinômios anteriores, não dependem dos vetores de pesos  $P$  pois o bordo de Newton  $\Gamma(h)$  são vértices, ou

seja,  $\Gamma(h) = \{(a, 0), a \in \mathbb{N}\}$  ou  $\Gamma(h) = \{(0, b), b \in \mathbb{N}\}$ . Assim, para todo vetor de pesos positivos  $P$  a função face  $f_P$  coincide com a parte principal de  $h$ , isto é,  $h_P = h_\Gamma$ .

A não-degeneração NDP pode envolver termos além daqueles do bordo de Newton. As definições NDI e NDP acima foram introduzidas neste trabalho e nas [Proposição 5, 6, 7](#) vamos mostrar que elas estendem ([OKA, 2010](#)), ou seja, estende a condição de não-degeneração (ND) munida com a condição de conveniencia do bordo de Newton (CO) como no Diagrama (1.1).

**Observação 6.** Note que as condições ND e CO isoladamente não são suficientes para garantir singularidade fracamente isolada na origem, como pode ser visto nos exemplos  $f(u, v) = u^4 - u^2v^3$  e  $g(u, v) = (u^2 + v^3)^2$ , respectivamente.

**Proposição 5.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto ND e CO. Então  $f$  é NDI.

*Demonstração.* Suponha que  $f$  não é NDI. Uma vez que  $f$  é ND, NDI-(ii) é satisfeita e assim NDI-(i) não é. Portanto existe um ponto crítico de  $f_{P_1}$  em  $V_{f_{P_1}} \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \{v = 0\})$  ou um ponto crítico de  $f_{P_N}$  em  $V_{f_{P_N}} \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\})$ . Assuma que o primeiro seja verdade. O argumento do último é análogo.

Seja  $(u_*, v_*) \in V_{f_{P_1}} \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \{v = 0\})$  um ponto crítico de  $f_{P_1}$ . Uma vez que  $f$  é ND,  $f_{P_1}$  não tem pontos críticos em  $V_{f_{P_1}} \cap \mathbb{C}^{*2}$  e portanto  $u_* = 0$ . Já que  $f$  satisfaz CO, seu bordo de Newton intersecta o eixo vertical e chamemos o correspondente vértice  $\Delta$ . Já que  $v_* \neq 0$ , escrevemos  $f_\Delta$  numa vizinhança de  $v_*$  como  $r^k \Phi(e^{it})$  para algum  $\Phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ , escrevendo a variável complexa  $v$  como  $re^{it}$ . Note que  $f_\Delta(u, v) = f_{P_1}(0, v)$  para todo  $u \in \mathbb{C}$ .

Com  $v_* \neq 0$  temos que  $f_\Delta(u, v_*) = f_{P_1}(0, v_*) = 0$  implica que  $\Phi(e^{it_*}) = 0$ . Calculamos a matriz Jacobiana real de  $f_\Delta$  em  $(u, v_*) = (u, r_* e^{it_*})$ :

$$\begin{aligned} Jf_\Delta(u, v_*) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(f_\Delta)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Re}(f_\Delta)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Re}(f_\Delta)}{\partial r}(u, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Re}(f_\Delta)}{\partial t}(u, v_*) \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(f_\Delta)}{\partial \operatorname{Re}(u)}(u, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Im}(f_\Delta)}{\partial \operatorname{Im}(u)}(u, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Im}(f_\Delta)}{\partial r}(u, v_*) & \frac{\partial \operatorname{Im}(f_\Delta)}{\partial t}(u, v_*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & kr_*^{k-1} \operatorname{Re}(\Phi)(e^{it_*}) & r_*^k \frac{\partial \operatorname{Re}(\Phi)}{\partial t}(e^{it_*}) \\ 0 & 0 & kr_*^{k-1} \operatorname{Im}(\Phi)(e^{it_*}) & r_*^k \frac{\partial \operatorname{Im}(\Phi)}{\partial t}(e^{it_*}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r_*^k \frac{\partial \operatorname{Re}(\Phi)}{\partial t}(e^{it_*}) \\ 0 & 0 & 0 & r_*^k \frac{\partial \operatorname{Im}(\Phi)}{\partial t}(e^{it_*}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

o qual segue do fato que  $f_\Delta$  não depende em  $\operatorname{Re}(u)$  ou  $\operatorname{Im}(u)$  e  $\Phi(e^{it_*}) = 0$ . Dado que  $Jf_\Delta$  não tem posto maximal,  $(u, v_*)$  é um ponto crítico de  $f_\Delta$  para qualquer número complexo  $u$ . Em particular escolhendo  $u \neq 0$  resulta num ponto crítico de  $f_\Delta$  em  $V_{f_\Delta} \cap \mathbb{C}^{*2}$ , o qual contradiz a Newton não-degeneração de  $f$ .  $\square$

**Exemplo 2** (NDI  $\not\Rightarrow$  ND+CO). Consideremos o polinômio bordo

$$f(u, v, \bar{v}) = vu^8 + v^3u^2 + \bar{v}^5u - 2(v^7 + \bar{v}^7).$$

Assim, os vetores de pesos associados às 1-face  $\mathcal{P} = \{P_1 = (2, 1), P_2 = (1, 3)\}$  e

$$\Gamma(f) = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta, \Delta(P_1), \Delta(P_2)\}$$

onde  $\Delta(P_1)$  e  $\Delta(P_2)$  são 1-faces,  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são vértices extremos de  $f$  e  $\Delta = \Delta(P_1) \cap \Delta(P_2)$  é o único vértice não extremo. Como ilustramos na [Figura 23](#).

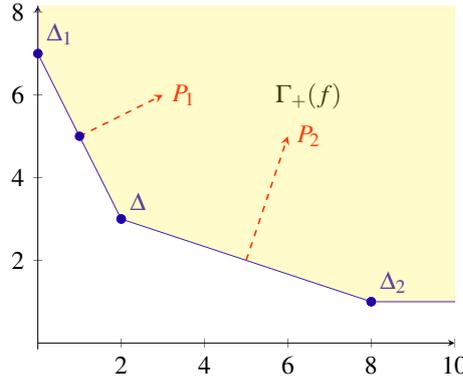


Figura 23 – Bordo de Newton, vértices extremos e não extremos de  $f$

Uma vez que  $f$  é semiholomorfo a interseção do conjunto singular e a variedade mista de  $f$  se reduz a  $f_u = s_{3,f} = f = 0$ . Considere  $v = re^{it}$ . Associado ao vetor de pesos  $P_1$  tome  $k_1 = 2$ ,  $s_1 = 2$  e  $n_1 = 3$ , Equação (5.3) toma a forma

$$f_{P_1}(z, \bar{z}) = v^3 u^2 + \bar{v}^5 u - 2(v^7 + \bar{v}^7) = r^7 \overbrace{\left( e^{3it} \left( \frac{u}{r^2} \right)^2 + e^{-5it} \left( \frac{u}{r^2} \right) - 2(e^{7it} + e^{-7it}) \right)}^{g_1 \left( \frac{u}{r^2}, e^{it} \right)}.$$

Associado aos vetores de pesos  $P_2$  tome  $k_2 = \frac{1}{3}$ ,  $s_2 = 8$  e  $n_2 = 1$  a Equação (5.3) toma a forma

$$f_{P_2}(z, \bar{z}) = vu^8 + v^3 u^2 = r^{11/3} \overbrace{\left( e^{it} \left( \frac{u}{r^{1/3}} \right)^8 + e^{3it} \left( \frac{u}{r^{1/3}} \right)^2 \right)}^{g_2 \left( \frac{u}{r^{1/3}}, e^{it} \right)}.$$

A condição NDI-(i) segue de aplicar o [Corolário 1](#) e o fato que  $g_1$  e  $g_2$  têm raízes simples em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$  e  $\mathbb{C}^2 \setminus \{v = 0\}$ , respectivamente.

Para provar NDI-(ii) lembre que  $f$  em  $\Delta = \Delta(P_1) \cap \Delta(P_2)$  satisfaz  $f_\Delta(u, v, \bar{v}) = \bar{v}^5 u$  não tem pontos críticos em  $\mathbb{C}^{*2}$ , o qual é trivial. Portanto,  $f$  é NDI. Porém,  $f_{\Delta_1} = -2(v^7 + \bar{v}^7)$  é degenerado, assim  $f$  não é ND. Por outro lado,  $\Gamma(f)$  não intersecta o eixo horizontal. Consequentemente,  $f$  é NDI e não é CO.

Para continuar relacionando as condições de não-degeneração, precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 2.** Tome  $x \in \{u, \bar{u}, v, \bar{v}\}$ . Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto o qual não é  $\bar{x}$ -semi-holomorfo (onde tomamos  $\overline{(\bar{u})} = u$  e  $\overline{(\bar{v})} = v$ ), então para todo vetor pesado  $P = (p_1, p_2)$  segue que  $d(P; f_x) \geq d(P; f) - p_i$ , onde  $i = 1$  se  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $i = 2$  se  $x \in \{v, \bar{v}\}$ . Mais ainda, as seguintes são equivalentes:

- (i)  $d(P; f_x) = d(P; f) - p_i$ , onde  $i = 1$  se  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $i = 2$  se  $x \in \{v, \bar{v}\}$ .
- (ii)  $(f_x)_P = (f_P)_x$ .
- (iii)  $f_P$  não é  $\bar{x}$ -semi-holomorfo.

*Demonstração.* Como no enunciado do lema tome  $i = 1$  se  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $i = 2$  se  $x \in \{v, \bar{v}\}$ . Tomando a derivada com respeito a  $x$  reduz o grau do monômio  $M_{v,\mu} = c_{v,\mu} z^v \bar{z}^\mu$  com respeito à variável  $x$  por um se  $M_{v,\mu}$  depende em  $x$ , isto é,  $\deg_x(M_{v,\mu})_x = \deg_x M_{v,\mu} - 1$  se  $\deg_x M_{v,\mu} > 0$ . Portanto, o grau radial  $\text{rdeg}_P M_{v,\mu}$  de  $M_{v,\mu}$  decresce por  $p_i$  sob a diferenciação por  $x$  se  $M_{v,\mu}$  depende em  $x$ .

Devemos escrever  $f = f_P + f'$  para algum polinômio misto  $f'$  com  $d(P; f') > d(P; f_P) = d(P; f)$ . Claramente isto implica  $f_x = (f_P)_x + f'_x$  e  $d(P; f_x) = \min\{d(P; (f_P)_x), d(P; f'_x)\}$ .

Suponha que  $f_P$  não é  $\bar{x}$ -semi-holomorfo. Se  $f'$  não depende em  $x$ , temos  $f_x = (f_P)_x$  e como  $\ell_P$  é constante em  $(f_P)_x$ , temos  $(f_x)_P = f_x = (f_P)_x$  e

$$d(P; f_x) = d(P; (f_P)_x) = d(P; f_P) - p_i = d(P; f) - p_i. \quad (5.8)$$

Se  $f'$  depende em  $x$ , então

$$d(P; (f_P)_x) = d(P; f_P) - p_i < d(P; f') - p_i = d(P; f'_x) \quad (5.9)$$

e portanto  $(f_x)_P = (f_P)_x$  e novamente

$$d(P; f_x) = d(P; (f_P)_x) = d(P; f_P) - p_i = d(P; f) - p_i. \quad (5.10)$$

Isto implica que (iii) implica (ii) e (i).

Suponha que  $f_P$  é  $\bar{x}$ -semi-holomorfo. Então  $f_x = f'_x$ . Já que  $f$  em si não é  $\bar{x}$ -semi-holomorfo,  $f_x$  e  $(f_x)_P$  não são constante zero, o qual implica que  $(f_x)_P \neq (f_P)_x = 0$  e

$$d(P; f_x) = d(P; f'_x) = d(P; f') - p_i > d(P; f_P) - p_i = d(P; f) - p_i. \quad (5.11)$$

Portanto, (i) e (ii) independentemente implicam (iii). Isto também mostra que se  $d(P; f_x) \neq d(P; f) - p_i$ , então  $d(P; f_x) > d(P; f) - p_i$ , o qual finaliza a prova do lema.  $\square$

**Proposição 6.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto NDI. Então  $f$  é NDP.

*Demonstração.* Assumimos que  $f$  é NDI, mas não NDP, e provamos a Proposição por contradição. Suponha que NDP-(ii) não é válido para algum vetor de pesos positivos  $P$ , com  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$ . Então existe  $(a, b)$ ,  $ab \neq 0$ , que é solução de (5.6)

$$(s_{1,f})_P(a, b) = (s_{2,f})_P(a, b) = (s_{3,f})_P(a, b) = f_P(a, b) = 0. \quad (5.12)$$

Analisando os graus radiais das derivadas parciais de  $f$  temos:

$$(s_{1,f})_P(a, b) = \begin{cases} (f_u)_P(a, b)(\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b), & \text{se } d(P; f_u) + d(P; f_{\bar{v}}) < d(P; f_v) + d(P; f_{\bar{u}}) \\ (f_v)_P(a, b)(\bar{f}_{\bar{u}})_P(a, b), & \text{se } d(P; f_v) + d(P; f_{\bar{u}}) < d(P; f_u) + d(P; f_{\bar{v}}) \\ (s_{1,f})_P(a, b), & \text{se } d(P; f_u) + d(P; f_{\bar{v}}) = d(P; f_v) + d(P; f_{\bar{u}}) \end{cases} \quad (5.13)$$

$$(s_{2,f})_P(a, b) = \begin{cases} |(f_u)_P(a, b)|^2, & \text{se } d(P; f_u) < d(P; f_{\bar{u}}) \\ |(f_{\bar{u}})_P(a, b)|^2, & \text{se } d(P; f_{\bar{u}}) < d(P; f_u) \\ (s_{2,f})_P(a, b), & \text{se } d(P; f_u) = d(P; f_{\bar{u}}) \end{cases} \quad (5.14)$$

$$(s_{3,f})_P(a, b) = \begin{cases} |(f_v)_P(a, b)|^2, & \text{se } d(P; f_v) < d(P; f_{\bar{v}}) \\ |(f_{\bar{v}})_P(a, b)|^2, & \text{se } d(P; f_{\bar{v}}) < d(P; f_v) \\ (s_{3,f})_P(a, b), & \text{se } d(P; f_v) = d(P; f_{\bar{v}}). \end{cases} \quad (5.15)$$

Já que  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$  então toda função face  $f_P$  não é do tipo  $u$  e  $\bar{u}$ -semiholomorfo nem  $v$  e  $\bar{v}$ -semiholomorfo. Portanto, aplicando o [Lema 2](#) temos

$$\begin{cases} d(P; f_u) > d(P; f_{\bar{u}}) = d(P; f) - p_1, & \text{se } f_P \text{ é } \bar{u}\text{-semiholomorfo} \\ d(P; f_{\bar{u}}) > d(P; f_u) = d(P; f) - p_1, & \text{se } f_P \text{ é } u\text{-semiholomorfo} \\ d(P; f_{\bar{u}}) = d(P; f_u) = d(P; f) - p_1, & \text{se } f_P \text{ depende em } u \text{ e também } \bar{u} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} d(P; f_v) > d(P; f_{\bar{v}}) = d(P; f) - p_2, & \text{se } f_P \text{ é } \bar{v}\text{-semiholomorfo} \\ d(P; f_{\bar{v}}) > d(P; f_v) = d(P; f) - p_2, & \text{se } f_P \text{ é } v\text{-semiholomorfo} \\ d(P; f_{\bar{v}}) = d(P; f_v) = d(P; f) - p_2, & \text{se } f_P \text{ depende em } v \text{ e também } \bar{v}. \end{cases}$$

Dependendo na combinação desses diferentes casos, existem 9 casos a considerar em total. Mostraremos os cálculos para o caso que  $d(P; f_u) > d(P; f_{\bar{u}}) = d(P; f) - p_1$  e  $d(P; f_{\bar{v}}) = d(P; f_v) = d(P; f) - p_2$  o que é equivalente a que  $f_P$  é  $\bar{u}$ -semiholomorfo, ou seja,  $(f_P)_u \equiv 0$ , e também depende em  $v$  e  $\bar{v}$ . Então, deduzimos por comparar os casos das Equações (5.13)-(5.15),

$$\begin{aligned} (s_{1,f})_P(a, b) &= (f_v)_P(a, b)(\bar{f}_{\bar{u}})_P(a, b) = 0 \\ (s_{2,f})_P(a, b) &= |(f_{\bar{u}})_P(a, b)|^2 = 0 \\ (s_{3,f})_P(a, b) &= 0 \\ f_P(a, b) &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aplicando [Lema 2](#) temos  $(f_{\bar{u}})_P = (f_P)_{\bar{u}}$ ,  $(f_v)_P = (f_P)_v$  e  $(f_{\bar{v}})_P = (f_P)_{\bar{v}}$ . Logo, da Equação (5.16) temos que  $(s_{1,f})_P(a,b) = s_{1,f_P}(a,b)$  e  $(s_{2,f})_P(a,b) = s_{2,f_P}(a,b)$ . Assim, para encontrar uma solução de  $s_{1,f_P} = s_{2,f_P} = s_{3,f_P} = f_P = 0$  devemos considerar dois casos:

Se  $s_{3,f_P} \neq 0$ ,

$$s_{3,f_P} = |(f_P)_v|^2 - |(f_P)_{\bar{v}}|^2 = |(f_v)_P|^2 - |(f_{\bar{v}})_P|^2 \neq 0. \quad (5.17)$$

Note que,

$$\begin{aligned} s_{3,f} &= ((f_v)_P + M_1) \overline{((f_v)_P + M_1)} - ((f_{\bar{v}})_P + M_2) \overline{((f_{\bar{v}})_P + M_2)} \\ &= (f_v)_P \overline{(f_v)_P} + (f_v)_P \overline{M_1} + M_1 \overline{(f_v)_P} + M_1 \overline{M_1} - \\ &\quad ((f_{\bar{v}})_P \overline{(f_{\bar{v}})_P} + (f_{\bar{v}})_P \overline{M_2} + M_2 \overline{(f_{\bar{v}})_P} + M_2 \overline{M_2}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde  $M_1 = f_v - (f_v)_P$  e  $M_2 = f_{\bar{v}} - (f_{\bar{v}})_P$  são polinômios mistos satisfazendo  $d(P; (f_v)_P) < d(P; M_1)$  e  $d(P; (f_{\bar{v}})_P) < d(P; M_2)$ , respectivamente. Assim, pelas Equações (5.17) e (5.18) a função face  $(s_{3,f})_P = (f_v)_P \overline{(f_v)_P} - (f_{\bar{v}})_P \overline{(f_{\bar{v}})_P} = s_{3,f_P}$ . Portanto, temos

$$s_{1,f_P} = (f_P)_u \overline{(f_P)_{\bar{v}}} - \overline{(f_P)_{\bar{u}}} (f_P)_v = (f_P)_u \overline{(f_P)_{\bar{v}}} = (f_u)_P \overline{(f_{\bar{v}})_P} = (s_{1,f})_P \quad (5.19)$$

$$s_{2,f_P} = |(f_P)_u|^2 - |(f_P)_{\bar{u}}|^2 = -|(f_P)_{\bar{u}}|^2 = -|(f_{\bar{u}})_P|^2 = (s_{2,f})_P \quad (5.20)$$

$$s_{3,f_P} = (s_{3,f})_P, \quad (5.21)$$

e uma solução  $(a,b)$  da Equação (5.16) implica uma solução  $s_{1,f_P}(a,b) = s_{2,f_P}(a,b) = s_{3,f_P}(a,b) = f_P(a,b) = 0$ , o qual contradiz NDI-(ii).

Se  $s_{3,f_P} \equiv 0$ , então o sistema  $s_{1,f_P} = s_{2,f_P} = s_{3,f_P} = f_P = 0$  é igual a  $s_{1,f_P} = s_{2,f_P} = f_P = 0$ , logo pelas Equações (5.19) e (5.20) a mesma solução  $(a,b)$  em (5.16) implica  $s_{1,f_P}(a,b) = s_{2,f_P}(a,b) = f_P(a,b) = 0$  o que contradiz novamente NDI-(ii).

Os outros casos quando  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$  seguem de aplicar argumentos quase idênticos para provar que a solução  $(a,b)$  de (5.6) satisfaz  $s_{1,f_P}(a,b) = s_{2,f_P}(a,b) = s_{3,f_P}(a,b) = f_P(a,b) = 0$ . Portanto,  $f$  satisfaz NDP-(ii) para vetores de peso  $P$  satisfazendo  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$ . Assim, como  $f$  não é NDP então este não satisfaz NDP-(ii) para um vetor pesado positivo  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  ou  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ , ou  $f$  não satisfaz a condição NDP-(i).

Podemos escrever  $f_{P_1}(z, \bar{z}) = A(v, \bar{v}) + B(v, \bar{v})u + C(v, \bar{v})\bar{u} + D(z, \bar{z})$  para alguns polinômios mistos  $A, B, C, D$ , onde o grau de  $D$  com respeito a  $R = |u| = |\bar{u}|$  é maior que 1. Já que  $f$  é NDI, a condição,  $f_{P_1}$  não tem pontos críticos em  $(\{u = 0\} \setminus \{(0,0)\}) \cap V_{f_{P_N}}$  é equivalente a não solução do sistema dado por:

se  $f$  é  $v$ -conveniente

$$\left\{ \begin{array}{l} B(v, \bar{v}) \overline{A_{\bar{v}}(v, \bar{v})} - \overline{C(v, \bar{v})} A_v(v, \bar{v}) = 0 \\ |B(v, \bar{v})|^2 - |C(v, \bar{v})|^2 = 0 \\ |A_v(v, \bar{v})|^2 - |A_{\bar{v}}(v, \bar{v})|^2 = 0 \\ A(v, \bar{v}) = 0, \end{array} \right. \quad (5.22)$$

se  $f$  não é  $v$ -conveniente, isto é,  $A(v, \bar{v}) \equiv 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} |B(v, \bar{v})|^2 - |C(v, \bar{v})|^2 = 0. \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Agora, suponha que o sistema (5.4) tem solução da forma  $(0, b)$  e que para vetores de pesos  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  o sistema (5.6) tem solução da forma  $(a, b)$ , assim obtemos: se  $f$  é  $v$ -conveniente

$$\left\{ \begin{array}{l} B(b, \bar{b})\overline{A_{\bar{v}}(b, \bar{b})} - \overline{C(b, \bar{b})}A_v(b, \bar{b}) = 0 \\ |B(b, \bar{b})|^2 - |C(b, \bar{b})|^2 = 0 \\ |A_v(b, \bar{b})|^2 - |A_{\bar{v}}(b, \bar{b})|^2 = 0 \\ A(b, \bar{b}) = 0, \end{array} \right. \quad (5.24)$$

se  $f$  não é  $v$ -conveniente, isto é,  $A(v, \bar{v}) \equiv 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} B(b, \bar{b})(\overline{B_{\bar{v}}(b, \bar{b})}a + \overline{C_{\bar{v}}(b, \bar{b})}\bar{a}) - (B_v(b, \bar{b})a + C_v(b, \bar{b})\bar{a})\overline{C(b, \bar{b})} = 0 \\ |B(b, \bar{b})|^2 - |C(b, \bar{b})|^2 = 0 \\ |B_v(b, \bar{b})a + C_v(b, \bar{b})\bar{a}|^2 - |B_{\bar{v}}(b, \bar{b})a + C_{\bar{v}}(b, \bar{b})\bar{a}|^2 = 0 \\ B(b, \bar{b})a + C(b, \bar{b})\bar{a} = 0. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Em ambos casos,  $v$ -conveniente e não  $v$ -conveniente, (5.24) e (5.25) com  $(a, b)$ ,  $b \neq 0$  da uma solução de (5.22) e (5.23), respectivamente, o qual é uma contradição a NDI-(i). Portanto,  $f$  satisfaz NDP-(ii) para vetores de pesos  $P$  satisfazendo  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e o sistema (5.4) não tem solução não trivial.

Analogamente podemos usar a condição NDI-(i) em  $f_{P_N}$  para provar que  $f$  satisfaz NDP para vetores de pesos satisfazendo  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$  e também para provar que não existe uma solução não trivial  $(a, 0)$  do sistema (5.5). Consequentemente,  $f$  satisfaz NDP-(i) e (ii) e portanto  $f$  é NDP.  $\square$

Note que como vimos anteriormente o sistema  $(s_{1,f})_P = (s_{2,f})_P = (s_{3,f})_P = f_P = 0$  não é necessariamente o mesmo que o sistema  $s_{1,f_P} = s_{2,f_P} = s_{3,f_P} = f_P = 0$ , sendo que a solução do primeiro sistema sempre implica numa solução do segundo. Porém, dado que em vários casos o sistema  $(s_{1,f})_P = (s_{2,f})_P = (s_{3,f})_P = f_P = 0$  tem mais equações não nulas que o sistema  $s_{1,f_P} = s_{2,f_P} = s_{3,f_P} = f_P = 0$ , então não podemos esperar o contrário, como veremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 3** (NDP  $\not\Rightarrow$  NDI). Consideremos o polinômio misto

$$f(z, \bar{z}) = v\bar{v} - u\bar{u} + \bar{v}u^2.$$

Então, os polinômios mistos que definem o conjunto singular misto são:

$$\begin{aligned} s_{1,f}(z, \bar{z}) &= -\bar{u}^3 + 2u\bar{v}^2 + 2u\bar{u}^2\bar{v}, \\ s_{2,f}(z, \bar{z}) &= -4\operatorname{Re}(v\bar{u}^2) + 2v\bar{v}u\bar{u}, \\ s_{3,f}(z, \bar{z}) &= -2\operatorname{Re}(v\bar{u}^2) - (u\bar{u})^2. \end{aligned}$$

Claramente, o único vetor de pesos para o qual  $f$  não é NDI é  $P = (1, 1)$ , pois os polinômios mistos  $s_{1,f_P}$ ,  $s_{2,f_P}$  e  $s_{3,f_P}$  são nulos, ou seja,  $s_{i,f_P} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por outro lado, para  $P = (1, 1)$  temos:

$$\begin{aligned}(s_{1,f})_P(z, \bar{z}) &= -\bar{u}^3 + 2u\bar{v}^2, \\(s_{2,f})_P(z, \bar{z}) &= -4\operatorname{Re}(v\bar{u}^2), \\(s_{3,f})_P(z, \bar{z}) &= -2\operatorname{Re}(v\bar{u}^2), \\f_P(z, \bar{z}) &= v\bar{v} - u\bar{u}.\end{aligned}$$

Se tomamos  $u = Re^{\phi i}$  e  $v = re^{it}$  então  $f_P = 0$  implica  $R = r$ . Substituindo isto em  $(s_{1,f})_P$  temos que  $R^3(-e^{-3\phi i} + 2e^{(\phi-2t)i}) = 0$ . Evidentemente esta equação só tem solução quando  $R = 0$ . Assim,  $(s_{1,f})_P = (s_{2,f})_P = (s_{3,f})_P = f_P = 0$  não tem solução em  $\mathbb{C}^{*2}$ . Consequentemente,  $f$  é um exemplo de um polinômio que é NDP e não é NDI.

**Proposição 7.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto NDP. Então,  $f$  tem uma singularidade fracamente isolada na origem.

*Demonstração.* Vamos provar por contradição, já que  $f$  é polinomial, a singularidade não fracamente isolada implica pelo Lema da Seleção da Curva que:

Existe uma curva analítica

$$z(\tau) = (a\tau^{p_1} + \text{h.o.t.}, b\tau^{p_2} + \text{h.o.t.}) \in \Sigma_f \cap V_f \cap \mathbb{C}^{*2}$$

com  $a, b \neq 0$ , isto é,  $s_{1,f}(z(\tau)) = s_{2,f}(z(\tau)) = s_{3,f}(z(\tau)) = f(z(\tau)) = 0$ . Assim,  $(s_{1,f})_P(a, b) = (s_{2,f})_P(a, b) = (s_{3,f})_P(a, b) = f_P(a, b) = 0$ . O qual contradiz a NDP-(ii).

Se a curva é da forma  $z(\tau) = (0, b\tau^{p_2} + \text{h.o.t.})$  então

$$s_{1,f}(z(\tau)) = s_{2,f}(z(\tau)) = s_{3,f}(z(\tau)) = f(z(\tau)) = 0$$

implica  $(s_{1,f})_P(0, b) = (s_{2,f})_P(0, b) = (s_{3,f})_P(0, b) = f_P(0, b) = 0$  o que é equivalente a

$$(s_{1,f}(0, v))_P(0, b) = (s_{2,f}(0, v))_P(0, b) = (s_{3,f}(0, v))_P(0, b) = (f(0, v))_P(0, b) = 0,$$

o qual contradiz NDP-(i) de  $f$ . O caso  $z(\tau) = (a\tau^{p_1} + \text{h.o.t.}, 0)$  é completamente análogo. Portanto  $f$  tem uma singularidade fracamente isolada na origem.  $\square$

Note que para alguns casos  $O \notin \Sigma_f$ , isto pode acontecer quando  $\mathcal{P}(f) = \emptyset$ .

**Exemplo 4** ( $\Sigma_f \cap V_f = \{0\} \not\Rightarrow$  NDP). Consideremos  $f(u, v) = (u - v)^2 + uv^2$ . Note que  $(u, v) \in \Sigma_f$  se e somente se

$$f_u(u, v) = 2(u - v) + v^2 \tag{5.26}$$

$$f_v(u, v) = -2(u - v) + 2uv. \tag{5.27}$$

Assim, Equação (5.27) implica  $(u - v) = uv$ , substituindo em Equação (5.26) temos  $2uv + v^2 = 0$  o qual implica  $v = 0$  ou  $u = -\frac{v}{2}$ . Se  $v = 0$  então  $u = 0$ . Se  $u = -\frac{v}{2}$  então substituindo em Equações (5.26)-(5.27) temos  $f_u(-\frac{v}{2}, v) = -3v + v^2 = 0$  e  $f_v(-\frac{v}{2}, v) = 3v - v^2 = 0$ , o que implica que  $v = 0$  ou  $v = 3$ . Logo,  $\Sigma_f = \{(0, 0), (-\frac{3}{2}, 3)\}$ . Portanto, para uma vizinhança suficientemente pequena da origem  $U \cap \Sigma_f = \{0\}$ .

Por outro lado, note que para  $P = (1, 1)$

$$(f_u)_P(u, v) = 2(u - v) \quad (5.28)$$

$$(f_v)_P(u, v) = -2(u - v) \quad (5.29)$$

$$f_P(u, v) = (u - v)^2. \quad (5.30)$$

O sistema (5.6) é equivalente a

$$(f_u)_P = (f_v)_P = f_P = 0,$$

e assim vemos que este tem solução não trivial  $u = v$ . Portanto,  $f$  não satisfaz NDP-(ii) e consequentemente  $f$  não é NDP.

**Proposição 8.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto NDI. Então,  $f$  e  $f_\Gamma$  têm uma singularidade fracamente isolada na origem.

*Demonstração.* Visto que a Newton não-degeneração interior é uma condição no bordo de Newton  $\Gamma(f)$  tanto o polinômio  $f$  quanto  $f_\Gamma$  são NDI. Assim pelas Proposições 6 e 7, ambas  $f$  e  $f_\Gamma$  têm uma singularidade fracamente isolada na origem.  $\square$

### 5.1.1 Caso radialmente homogêneo pesado

Para o caso particular de polinômios mistos radialmente homogêneo pesado as condições de não-degeneração interior, não-degeneração parcial e a condição de singularidade fracamente isolada coincidem.

**Proposição 9.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto radialmente homogêneo pesado, então as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $f$  tem uma singularidade fracamente isolada na origem.
- (ii)  $f$  é NDI.
- (iii)  $f$  é NDP.

*Demonstração.* (iii) implica (i) segue da Proposição 7. (ii) implica (iii) segue da Proposição 6. (i) implica (ii) pois já que  $f$  é radialmente homogêneo pesado, então a singularidade fracamente isolada implica a condição NDI-(i) e NDI-(ii) para o vetor  $P$ , associado à única 1-face.  $\square$

As condições anteriores não são equivalentes à não-degeneração e conveniência (ND+CO). Veja o exemplo a seguir de um polinômio que satisfaz NDI que não satisfaz ND.

**Exemplo 5.** (BODE, 2018) Considere a trança  $B = (\sigma_1 \sigma_2^{-1})^2$  com 3-fios e a parametrização de Fourier de  $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$  por

$$c_{C,j}(t) = \left( F_C \left( \frac{t+2\pi j}{s_C} \right) + iG_C \left( \frac{t+2\pi j}{s_C} \right), t \right), j = 1, 2, 3,$$

onde  $(F_C(t), G_C(t)) = (\cos(t), \sin(2t))$ . A função  $u$ -semiholomorfa em (4.27) é dada por

$$g(u, e^{2it}) = u^3 + \frac{3}{4}(e^{2it} - e^{-2it})u - \frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) - \frac{1}{8}(e^{4it} - e^{-4it}).$$

e por  $B$  ser uma trança quadrada a aplicação em (4.15) é polinomial e é dada por

$$p_k(u, v, \bar{v}) = u^3 + \frac{3}{4}(v \cdot \bar{v})^{2k-1}(v^2 - \bar{v}^2)u - \frac{1}{2}(v \cdot \bar{v})^{3k-1}(v^2 + \bar{v}^2) - \frac{1}{8}(v \cdot \bar{v})^{3k-2}(v^4 - \bar{v}^4).$$

Neste caso  $p_k$  providencia uma realização fraca semiholomorfa do fecho da trança  $B$ , que é o nó da figura oito, a qual é radialmente homogênea pesada do tipo  $((2k, 1); 6k)$ .

Note que para  $P \succ (2k, 1)$  a função face  $(p_k)_P(u, v, \bar{v})$  é degenerada no sentido de Oka. Porém,  $p_k$  tem singularidade fracamente isolada, o que é equivalente pela [Proposição 9](#) a NDI e também a NDP.

## 5.2 Não-degenerações fortes

Uma versão mista do Teorema da fibração de Milnor do caso holomorfo foi provada por [Oka \(2010\)](#) utilizando uma versão forte de ND (FND, [Definição 20](#)) como enunciado abaixo.

**Teorema 8.** (OKA, 2010, Theorem 33) Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto satisfazendo FND e CO. Então  $f$  tem uma singularidade isolada na origem. Mais ainda,

$$\arg f := \frac{f}{|f|} : S_\rho^{2n-1} \setminus L_f \rightarrow S^1 \quad (5.31)$$

é a projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Inspirados no [Teorema 8](#), onde se obtém uma singularidade isolada na origem e a propriedade forte de Milnor, generalizamos novamente as condições de não-degeneração interior e parcial para o caso misto, requerendo uma condição mais restrita (forte) no espírito de ([OKA, 2011](#), Definition 3). Além do mais, generalizamos o [Teorema 8](#) para estas famílias.

**Definição 20.** (OKA, 2010) Dizemos que o polinômio misto  $f$  tem um bordo *Newton fortemente não-degenerado* (FND) se para qualquer face fechada  $\Delta$  (0-dimensional ou 1-dimensional), a função face  $f_\Delta$  não tem pontos críticos em  $\mathbb{C}^{*2}$ .

Oka (2010) pede que  $f_\Delta : \mathbb{C}^{*2} \rightarrow \mathbb{C}$  seja sobrejetora sempre que  $\dim(\Delta) \geq 1$ . Por outro lado, Eyrál e Oka (2018) excluem esta condição como na nossa definição. Neste capítulo podemos ver que esta condição não é necessária para provar resultados envolvendo as singularidades de um polinômio misto, por exemplo [Proposição 12](#).

**Definição 21.** Dizemos que  $f$  tem um bordo *Newton fortemente não-degenerado interior* (FNDI) se as seguintes condições são válidas:

- (i) a função face  $f_{P_1}$  e  $f_{P_N}$  não tem pontos críticos em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{v = 0\}$  e  $\mathbb{C}^2 \setminus \{u = 0\}$ , respectivamente;
- (ii) em cada 1-face e vértice não extremo, a função face  $f_\Delta$  não tem pontos críticos em  $\mathbb{C}^{*2}$ .

**Definição 22.** Dizemos que o polinômio misto  $f$  é *Newton fortemente não-degenerado parcial* (FNDP) se ambas das seguintes condições são válidas para todo vetor pesado positivo  $P$ :

- (i) o sistema

$$(s_{1,f}(0, v))_P = (s_{2,f}(0, v))_P = (s_{3,f}(0, v))_P = 0 \quad (5.32)$$

não tem solução em  $\mathbb{C}^{*2}$  e

$$(s_{1,f}(u, 0))_P = (s_{2,f}(u, 0))_P = (s_{3,f}(u, 0))_P = 0 \quad (5.33)$$

não tem solução em  $\mathbb{C}^{*2}$ ;

- (ii) o sistema

$$(s_{1,f})_P = (s_{2,f})_P = (s_{3,f})_P = 0 \quad (5.34)$$

não tem solução em  $\mathbb{C}^{*2}$ .

Como no caso das não-degenerações, NDI e NDP, nossas noções de não-degeneração fortes, FNDI e FNDP, generalizam o caso FND+CO de Oka, como é visto no Diagrama 1.2.

**Observação 7.** Veja que a condição ND e FND são equivalentes no caso de funções holomorfas. Consequentemente FND não é suficiente para garantir singularidade isolada na origem. Ver [Observação 6](#).

**Proposição 10.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FND e CO. Então  $f$  é FNDI.

*Demonstração.* Como na prova da [Proposição 5](#) somente temos que provar que os pontos críticos de  $f_\Delta$  em  $\mathbb{C}^{*2}$  para  $\Delta$  um vértice extremo de  $f$  permite uma contradição com FNDI-(i). Assuma que  $\Delta$  é o vértice extremo pertencendo a  $\Delta(P_1)$ . Como  $f$  satisfaz CO,  $f_\Delta$  toma a forma  $f_\Delta(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = A(v, \bar{v})$  para algum  $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Assim  $s_{1,f_\Delta} = s_{2,f_\Delta} = 0$  e um ponto crítico de  $f_\Delta$  em  $\mathbb{C}^{*2}$  corresponde a uma raiz não nula de  $s_{3,f_\Delta} = |A_v(v, \bar{v})|^2 - |A_{\bar{v}}(v, \bar{v})|^2$ .

FNDI-(i) é equivalente a não existência de solução  $\{(0, v) : v \neq 0\}$  das primeiras três equações em (5.22). Em particular em  $u = 0$ , as três equações é  $s_{3, f_{P_1}}|_{u=0} = s_{3, f_{\Delta}}$ . Portanto se  $f$  é FND, não existe raízes não nulas de  $s_{3, f_{\Delta}}$  e assim FNDI-(i) é satisfeita para  $f_{P_1}$ . O argumento para  $f_{P_N}$  é análogo.  $\square$

Seguindo a mesma ideia da prova da [Proposição 5](#) obtemos.

**Proposição 11.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FNDI. Então  $f$  é FNDP.

*Demonstração.* A prova é quase idêntica aquela da [Proposição 6](#). Assumindo soluções dos sistemas oriundos de FNDP-(i) -(ii) gera um sistema de equações como em (5.13)-(5.15) em termos de series de potencia de  $\tau$ . Comparando os termos de menor ordem gera uma solução à equação que define a não-degeneração interior forte de  $f_P$ , onde  $P = (p_1, p_2)$  é o vetor pesado definido pelos menores ordens de  $z(\tau)$  como na [Proposição 6](#). Novamente existem os mesmos casos para ser considerados como na prova de [Proposição 6](#):  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$ ,  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ ,  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ , e a anulação de uma das coordenadas complexas de  $z(\tau)$ . Nestes casos, os argumentos de [Proposição 6](#) se mantem, mas como  $z(\tau)$  não é assumida em  $V_f$ , isto prova uma contradição que  $f$  é FNDI.  $\square$

**Exemplo 6** (FNDP  $\not\Rightarrow$  FNDI). O polinômio misto  $f(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = u^{10} + u^2v + (v\bar{v})^n + \bar{u}v^{2n-1}$  com  $n > 1$  é FNDP, mas não é FNDI.

O polinômio tem duas 1-face com vetores de pesos  $P_1 = (2n - 1, 2)$  e  $P_2 = (1, 8)$ , e

$$\begin{aligned} f_{P_1}(u, v, \bar{v}) &= u^2v + (v\bar{v})^n \\ f_{P_2}(u, v, \bar{v}) &= u^{10} + u^2v. \end{aligned}$$

Já que  $f_{P_1}$  é semiholomorfo, podemos encontrar seus pontos críticos ao resolver  $(f_{P_1})_u = s_{3, f_{P_1}} = 0$  e encontramos que

$$\begin{aligned} (f_{P_1})_u(u, v, \bar{v}) &= 2uv \\ s_{3, f_{P_1}}(u, v, \bar{v}) &= n\bar{u}^2v^{n-1}\bar{v}^n + (u\bar{u})^2(1 + nv^n\bar{v}^{n-1}). \end{aligned}$$

Segue que  $(0, v)$  é ponto crítico de  $f_{P_1}$  para todo  $v \in \mathbb{C}$ . Portanto,  $f$  não é FNDI, já que este não satisfaz FNDI (i).

Para provar FNDP para  $f$  primeiro calculamos

$$s_{2, f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = 100u^9\bar{u}^9 + 20u\bar{u}^9v + 20u^9\bar{u}\bar{v} + 4u\bar{u}v\bar{v} - (v\bar{v})^{2n-1}.$$

Vemos que  $s_{2, f}(0, v) = -(v\bar{v})^{2n-1}$  e  $s_{2, f}(u, 0) = 100u^9\bar{u}^9$ . Ambas dessas funções não têm zero em  $\mathbb{C}^{*2}$ , assim a condição FNDP-(i) é satisfeita. Além disso, temos

$$\begin{aligned} s_{1, f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) &= 10nu^9v^{n-1}\bar{v}^n - u^2\bar{v}^{2n-1} + \bar{u}v^{2n-2}\bar{v}^{2n-1} \\ &\quad - 2n\bar{u}v^{2n-2}\bar{v}^{2n-1} + 2nu(v\bar{v})^n - n\bar{v}^{2n-1}v^{n-1}\bar{v}^n. \end{aligned}$$

O poliedro de Newton de este polinômio tem duas 1-face compactas com  $Q_1 = (2n-2, 1)$ ,  $Q_2 = (1, 1)$  e

$$\begin{aligned} (s_{1,f})_{Q_1}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) &= 2nu(v\bar{v})^n - n\bar{v}^{3n-1}v^{n-1} \\ (s_{1,f})_{Q_2}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) &= -u^2\bar{v}^{2n-1} + 2nu(v\bar{v})^n. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Note que se  $P \notin \{Q_1, Q_2\}$ , então  $(s_{1,f})_P$  consiste de exatamente um somando da expressões acima. Assim, esses polinômios não têm zero em  $\mathbb{C}^{*2}$  e segue que FNDP-(ii) é satisfeita para esses  $P$ . Para  $P = Q_2$  verifique que  $(s_{2,f})_P(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = 4u\bar{u}v\bar{v}$ , o qual é não nulo em  $\mathbb{C}^{*2}$ . Para  $P = Q_1$  obtemos

$$(s_{2,f})_P(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = 4u\bar{u}v\bar{v} - (v\bar{v})^{2n-1}. \quad (5.36)$$

Assuma que  $(u_*, v_*) \in \mathbb{C}^{*2}$  é zero de  $(s_{2,f})_P$ . Então  $|u_*| = \frac{1}{4}|v_*|^{2n-2}$ . Mas o primeiro somando em Equação (5.35) tem modulo  $2n|v_*|^{4n-2}$ , enquanto o segundo somando tem modulo  $n|v_*|^{4n-2}$ . Portanto,  $(s_{1,f})_{Q_1}(u_*, v_*) \neq 0$ , desde que  $v_* \neq 0$ .

Assim temos uma contradição. Não existe zero comum  $(u_*, v_*) \in \mathbb{C}^{*2}$  de  $(s_{1,f})_P$  e  $(s_{2,f})_P$  para qualquer  $P$  e portanto FNDP-(ii) é satisfeita e  $f$  é FNDP.

**Proposição 12.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FNDP. Então  $f$  tem uma singularidade isolada na origem.

*Demonstração.* Assumindo que a singularidade não é isolada resulta via o Lema da Seleção da Curva na curva real-analítica  $z(\tau)$  de pontos críticos começando na origem. Avaliando as equações  $s_{1,f}$ ,  $s_{2,f}$  e  $s_{3,f}$  de  $\Sigma_f$  nesta curva gera um sistema de equações como em (5.13)-(5.15) em termos de series de potencia de  $\tau$ , os quais implicam uma contradição em FNDP-(i) -(ii).  $\square$

**Exemplo 7** ( $\Sigma_f = \{0\} \not\cong$  FNDP). Consideramos  $f(u, v) = (u - v)^2 + uv^2$  como no Exemplo 4. Note que  $\Sigma_f \cap U = \{0\}$  para uma vizinhança suficientemente pequena da origem e analogamente podemos provar que para  $P = (1, 1)$ ,  $u = v$  é solução não trivial do sistema (5.34). Portanto,  $f$  não é FNDP.

Seguindo a mesma ideia da prova da Proposição 8 temos.

**Proposição 13.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FNDI. Então,  $f$  e  $f_\Gamma$  têm uma singularidade isolada na origem.

Um resultado que segue totalmente análogo ao caso fraco de não-degeneração, Proposição 9, é o seguinte.

**Proposição 14.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto radialmente homogêneo pesado, então as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $f$  tem uma singularidade isolada na origem.

(ii)  $f$  satisfaz FNDI.

(iii)  $f$  satisfaz FNDP.

### 5.2.1 Condição forte de Milnor

A condição FNDI generaliza em vários aspectos a condição FND+CO de Oka. Vamos mostrar a seguir que a condição Milnor forte ainda vale na classe FNDI generalizando portanto [Teorema 8](#) de Oka. Lembremos que  $f$  satisfaz a *Condição forte de Milnor* (CFM) se existe um número positivo  $\rho_0 > 0$  tal que

$$\arg f := \frac{f}{|f|} : S_\rho^3 \setminus L_f \rightarrow S^1 \quad (5.37)$$

é uma fibração suave localmente trivial para todo raio  $0 < \rho \leq \rho_0$ .

Como consequência de um resultado mais geral em ([ARAÚJO DOS SANTOS; TIBĂR, 2010](#), Theorem 2.2, p. 179) na hipótese de singularidade isolada a condição forte de Milnor é equivalente a  $U \cap M_{\arg f} = \emptyset$  para uma vizinhança suficientemente pequena da origem, onde  $M_{\arg f}$  denota o conjunto de Milnor de  $\arg f$ , veja [\(4.3\)](#).

**Teorema 9.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FNDI. Então a projeção

$$\arg f := \frac{f}{|f|} : S_\rho^3 \setminus L_f \rightarrow S^1 \quad (5.38)$$

é a projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Para provar [Teorema 9](#) vamos necessitar de dois lemas auxiliares.

**Lema 3.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FNDI e  $P$  um vetor de pesos positivo. Tome  $\alpha$  algum número complexo não nulo. Defina

$$w_1(u, v) := i(\alpha \bar{f}_u - \bar{\alpha} f_{\bar{u}})_P(u, v)$$

$$w_2(u, v) := i(\alpha \bar{f}_v - \bar{\alpha} f_{\bar{v}})_P(u, v).$$

Então,  $(w_1(a, b), w_2(a, b)) \neq (0, 0)$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{C}^{*2}$ .

*Demonstração.* Vamos provar por contradição, isto é, suponhamos que existe  $(a, b) \in \mathbb{C}^{*2}$  tal que  $w_1(a, b) = w_2(a, b) = 0$ . Já que  $w_1$  e  $w_2$  depende da escolha de  $P$  assim devemos investigar vários casos como segue:

Caso 1:  $f_P$  depende em  $x$  e  $y$ , onde  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $y \in \{v, \bar{v}\}$

Suponha que  $f_P$  é  $u$ -semiholomorfo e depende em  $v$  e  $\bar{v}$ , assim por [Lema 2](#)

$$d(P; f_u) = d(P; f) - p_1, d(P; f_v) = d(P; f_{\bar{v}}) = d(P; f) - p_2, d(P; f) - p_1 < d(P; f_{\bar{u}}) \quad (5.39)$$

e

$$(f_u)_P = (f_u)_P, (f_v)_P = (f_v)_P, (f_{\bar{v}})_P = (f_{\bar{v}})_P. \quad (5.40)$$

Já que  $w_1(a, b) = w_2(a, b) = 0$  então pelas Equações em (5.39)-(5.40)

$$(-i/\alpha)w_1(a, b) = \overline{(f_P)_u}(a, b) = 0 \quad (5.41)$$

$$-iw_2(a, b) = \alpha \overline{(f_P)_v}(a, b) - \bar{\alpha}(f_P)_{\bar{v}}(a, b) = 0, \quad (5.42)$$

o qual implica por (4.1) que  $(a, b)$  é um ponto crítico de  $f_P$ . Com apropriadas modificações que surgem de aplicar [Lema 2](#) podemos verificar os casos onde  $f_P$  depende de todas as variáveis e seus conjugados e o caso onde  $f$  é simultaneamente  $x$ -semiholomorfo e  $y$ -semiholomorfo,  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $y \in \{v, \bar{v}\}$ . Note que por exemplo se  $P$  satisfaz  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$  então  $f_P$  depende de  $x$  e  $y$ , assim  $w_1(a, b) = w_2(a, b) = 0$  contradiz FNDI-(ii).

Se  $f$  não é  $v$ -conveniente então para todo  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  temos  $w_2(0, v) \equiv 0$  e além disso se  $f_P$  depende de  $u$  e  $\bar{u}$

$$-iw_1(a, b) = -iw_1(0, b) = \alpha \overline{(f_u)_P}(0, b) - \bar{\alpha}(f_{\bar{u}})_P(0, b) = 0, \quad (5.43)$$

e  $w_1(a, b) = w_1(0, b)$ . Portanto, a Equação (5.43) implica que  $(0, b)$  é solução de (5.32), e assim FNDP-(i) não é válida. Já que  $f$  é FNDP pela [Proposição 11](#) então obtemos uma contradição. Neste caso  $w_1(0, b) \neq 0$  para todo  $b \in \mathbb{C}^{*2}$ . Analogamente, podemos ver que se  $f$  não é  $u$ -conveniente então para todo  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ ,  $w_2(a, b) = w_2(a, 0) = 0$  implica uma contradição. Neste caso,  $w_2(a, 0) \neq 0$  para todo  $a \in \mathbb{C}^*$ .

Caso 2:  $f$  é  $v$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  ou  $f$  é  $u$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$

Vamos considerar o caso onde  $f$  é  $v$ -conveniente e  $P$  satisfaz  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ , o caso de  $f$  ser  $u$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$  segue analogamente por considerar mudanças apropriadas. Podemos mostrar que  $w_1(a, b) = w_2(a, b) = 0$  implica que  $(0, b)$  é ponto crítico de  $f_{P_1}$  implicando uma contradição com FNDI-(i). De fato, se  $f_{P_1}(z, \bar{z}) = A(v, \bar{v}) + B(z, \bar{z})$  com  $\deg_{|u|} B(z, \bar{z}) \geq 2$ , onde  $\deg_{|u|} B(z, \bar{z})$  é o grau na variável  $|u|$  de  $B(z, \bar{z})$ , então  $(0, b)$  é um ponto crítico de  $f_{P_1}$  se e somente se

$$|A_v(v, \bar{v})|^2 = |A_{\bar{v}}(v, \bar{v})|^2. \quad (5.44)$$

Temos também que  $s_{1, f_{P_1}}(0, b) = s_{2, f_{P_2}}(0, b) = 0$ , pois ambos polinômios dependem de  $|u|$ . E condição (5.44) é precisamente satisfeita quando  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e  $0 = w_2(a, b) = i(\alpha \bar{A}_v(b, \bar{b}) - \bar{\alpha} A_{\bar{v}}(b, \bar{b}))$ , o que contradiz FNDI-(i). Portanto,  $(w_1(a, b), w_2(a, b)) \neq (0, 0)$ .

Se  $f_{P_1}(z, \bar{z}) = A(v, \bar{v}) + B(v, \bar{v})u + C(v, \bar{v})\bar{u} + D(z, \bar{z})$  então  $(0, b)$  é um ponto crítico de  $f_{P_1}$  se e somente se

$$|A_v(b, \bar{b})|^2 = |A_{\bar{v}}(b, \bar{b})|^2, \quad (5.45)$$

$$|B(b, \bar{b})|^2 = |C(b, \bar{b})|^2, \quad (5.46)$$

$$s_{1, f_{P_1}}(0, b) = 0, \quad (5.47)$$

se e somente se  $A_v(b, \bar{b}) = \lambda \bar{A}_{\bar{v}}(b, \bar{b})$  e  $B(b, \bar{b}) = \lambda \bar{C}(b, \bar{b})$  com  $|\lambda| = 1$ . Esta condição é satisfeita quando  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e  $w_1(a, b) = w_2(a, b) = 0$  uma vez que

$$w_1(a, b) = i(\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b) - \bar{\alpha}(f_{\bar{u}})_P(a, b)) = i(\alpha \bar{B}(b, b) - \bar{\alpha} C(b, b)) \quad (5.48)$$

$$w_2(a, b) = i(\alpha(\bar{f}_P)_v(a, b) - \bar{\alpha}(f_P)_{\bar{u}}(a, b)) = i(\alpha \bar{A}_v(b, \bar{b}) - \bar{\alpha} A_{\bar{v}}(b, \bar{b})). \quad (5.49)$$

Aqui,  $f_u$  é  $v$ -conveniente pois  $B(v, \bar{v})$  aparece em  $f_u$  e assim o vetor  $Q_1 = (q_1, q_2)$  associado à primeira 1-face de  $\Gamma(f_u)$  sempre satisfaz  $\frac{q_1}{q_2} \leq \frac{p_{1,1}}{p_{1,2}}$ . Portanto, se  $P$  satisfaz  $\frac{p_1}{p_2} > \frac{p_{1,1}}{p_{1,2}} \geq \frac{q_1}{q_2}$  então é claro que  $(f_u)_P(z, \bar{z}) = B(v, \bar{v})$ . Isto também acontece com  $f_{\bar{u}}$  assim  $(f_{\bar{u}})_P(z, \bar{z}) = C(v, \bar{v})$  para todo  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > \frac{p_{1,1}}{p_{1,2}}$ . Portanto,  $(w_1(a, b), w_2(a, b)) \neq (0, 0)$ .  $\square$

**Lema 4.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto FNDI. Então,

- (i) Se para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $(n, 0), (0, m) \notin \text{supp}(f)$ .
- (ii) Se  $k_1 < 1$  e  $k_N > 1$ , com  $k_1, k_N$  como em (5.3).
- (iii) Se  $(1, n) \notin \Delta(P_1; f) \cap \text{supp}(f)$  e  $(m, 1) \notin \Delta(P_N; f) \cap \text{supp}(f)$ .

Então,  $f$  é um polinômio misto FND.

*Demonstração.* Note que a condição FNDI-(ii) implica que  $f$  é FND para todo  $P$  com  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq k_N$  assim resta provar os casos onde  $P$  satisfaz  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ .

(i) Pelo Caso 1 do Lema 3 vimos que para  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ ,  $w_1(a, b) \neq 0$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{C}^{*2}$ . Assim, se  $f_P$  depende em  $u$  e  $\bar{u}$  então

$$|(f_P)_{\bar{u}}(a, b)|^2 - |(\bar{f}_P)_u(a, b)|^2 \neq 0.$$

Portanto,  $f_P$  é SND para qualquer  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ . Os casos onde  $f_P$  é  $x$ -semiholomorfo,  $x \in \{u, \bar{u}\}$ , seguem analogamente da condição  $w_1(a, b) \neq 0$ . O caso para  $P$  satisfazendo  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$  segue analogamente de aplicar Caso 1 do Lema 3. Portanto,  $f$  é FND para todo vetor pesado positivo e assim  $f$  é FND.

(ii) O caso quando  $f$  não é  $v$ -conveniente segue do Item-(i), assim suponha que  $f$  é  $v$ -conveniente. Se  $P_1 = (p_{1,1}, p_{1,2})$  satisfaz  $k_1 = \frac{p_{1,1}}{p_{1,2}} < 1$ , isto é,  $p_{1,1} < p_{1,2}$ , então a função face

$$f_{P_1}(z, \bar{z}) = A(v, \bar{v}) + B(z, \bar{z}),$$

onde  $A(v, \bar{v}), B(z, \bar{z})$  são tais que  $\deg_{|v|}(A(v, \bar{v})) = d_1$  e  $\deg_{|u|}(B(z, \bar{z})) \geq 2$ . De fato, suponha que  $(1, n) \in \Delta(P_1; f) \cap \text{supp}(f)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  então  $p_{1,1} + np_{1,2} = d(P_1; f) = d_1 p_{1,2}$  e segue que  $n = d_1 - k_1$ . Já que  $k_1 < 1$  temos  $d_1 - 1 < n < d_1$ , o que contradiz  $n \in \mathbb{N}$ , logo  $(1, n) \notin \Delta(P_1; f) \cap \text{supp}(f)$ .

Portanto, condição FNDI-(i) para  $f_{P_1}(z, \bar{z}) = A(v, \bar{v}) + B(z, \bar{z})$  implica que

$$|A_v(v, \bar{v})|^2 \neq |A_{\bar{v}}(v, \bar{v})| \quad \text{para } v \in \mathbb{C}^*. \quad (5.50)$$

Esta condição é equivalente a  $f$  ser FND para  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ . Analogamente, provamos que  $f$  é FND para  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_N$ . Portanto,  $f$  é FND.

(iii) Se  $(1, n) \notin \Delta(P_1; f) \cap \text{supp}(f)$  então analogamente a conclusão do Item-(ii) temos que Equação (5.50) vale e portanto  $f$  é FND para  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ . Se  $(m, 1) \notin \Delta(P_N; f) \cap \text{supp}(f)$  então segue analogamente por modificações apropriadas do caso anterior que  $f$  é FND para  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ . Portanto,  $f$  é FND.  $\square$

*Demonstração Teorema 9.* Para provar que  $U \cap M_{\text{arg } f} = \emptyset$  para uma vizinhança suficientemente pequena da origem vamos a proceder por contradição (veja o caso SND+CO (OKA, 2010, Lemma 31)). Podemos encontrar uma curva analítica  $z(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  satisfazendo

- (i)  $z(0) = O$  e  $z(\tau) \in \mathbb{C}^2 \setminus V_f$  para  $\tau > 0$ .
- (ii)  $i(f\bar{d}f - \bar{f}d\bar{f})(z(\tau), \bar{z}(\tau)) = \lambda(\tau)z(\tau)$  para algum número real  $\lambda(\tau)$ .

Como  $i(f\bar{d}f - \bar{f}d\bar{f})$  não se anula fora de  $V_f$  e próximo da origem, então pela Proposição 12 vemos que  $\lambda(\tau) \neq 0$ . Suponha que  $u(\tau) \neq 0$  e  $v(\tau) \neq 0$ , os outros casos são análogos por analisar a condição FNDI-(i) em lugar de FNDI-(ii) e serão vistos no Caso 4 desta prova. Considere as expansões de Taylor:

$$u(\tau) = a\tau^{p_1} + \text{h.o.t.}, \quad a \neq 0, \quad p_1 > 0,$$

$$v(\tau) = b\tau^{p_2} + \text{h.o.t.}, \quad b \neq 0, \quad p_2 > 0.$$

Defina  $P = (p_1, p_2)$ ,  $z_0 = (a, b) \in \mathbb{C}^{*2}$  e  $d = d(P; f)$ . Então, consideramos as expansões:

$$f(z(\tau)) = \alpha\tau^q + \text{h.o.t.}; \quad q \geq d = d(P; f), \quad \alpha \neq 0 \quad (5.51)$$

$$f_x(z(\tau)) = \beta_x\tau^{q_x} + \text{h.o.t.}; \quad x \in \{u, \bar{u}\}, \quad q_x \geq d(P; f_x) \geq d - p_1, \quad \beta_x \neq 0 \quad (5.52)$$

$$f_y(z(\tau)) = \beta_y\tau^{q_y} + \text{h.o.t.}; \quad y \in \{v, \bar{v}\}, \quad q_y \geq d(P; f_y) \geq d - p_2, \quad \beta_y \neq 0 \quad (5.53)$$

$$\lambda(\tau) = \lambda_0\tau^s + \text{h.o.t.}, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (5.54)$$

Note que  $q_z = d(P; f_z)$  se e somente se  $(f_z)_P(a, b) \neq 0$  e assim  $\beta_z = (f_z)_P(a, b)$ ,  $z \in \{u, v, \bar{u}, \bar{v}\}$ .

Consideramos o diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}f(z(\tau)) &= \left( f_u(z(\tau))\frac{du(\tau)}{d\tau} + f_{\bar{u}}(z(\tau))\frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} \right) + \left( f_v(z(\tau))\frac{dv(\tau)}{d\tau} + f_{\bar{v}}(z(\tau))\frac{d\bar{v}(\tau)}{d\tau} \right) = \\ &= \left\langle \frac{dz(\tau)}{d\tau}, \bar{d}f(z(\tau)) \right\rangle + \left\langle \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau}, \bar{d}f(z(\tau)) \right\rangle = q\alpha\tau^{q-1} + \text{h.o.t.}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno Hermitiano e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dz(\tau)}{d\tau}, \bar{d}f(z(\tau)) \right\rangle &= \langle (p_1 a, 0), (\bar{f}_u)_P(a, b), 0 \rangle \tau^{d(P; f_u) + p_1 - 1} + \dots \\ &+ \langle (0, p_2 b), (0, (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle \tau^{d(P; f_v) + p_2 - 1} + \text{h.o.t.}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau}, \bar{d}f(z(\tau)) \right\rangle &= \langle (p_1\bar{a}, 0), (\bar{f}_{\bar{u}})_P(a, b), 0 \rangle \tau^{d(P; f_{\bar{u}}) + p_1 - 1} + \dots \\ &+ \langle (0, p_2\bar{b}), (0, (\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle \tau^{d(P; f_{\bar{v}}) + p_2 - 1} + \text{h.o.t.}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

Note que o menor grau com coeficiente não nulo no lado esquerdo da Equação (5.55) é maior ou igual a  $d - 1$ , e este grau pode depender nos valores de  $q_z$ ,  $z \in \{u, v, \bar{u}, \bar{v}\}$ . Por tal motivo estudaremos este grau aplicando [Lema 2](#). Por outro lado veja que na Equação (5.56) e Equação (5.57) diferentes termos podem ser nulos, porém estamos interessados no comportamento da soma e o aporte no primeiro coeficiente não nulo da soma das duas equações.

Caso 1:  $f_P$  depende em  $x$  e  $y$ , onde  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $y \in \{v, \bar{v}\}$

Suponha que  $f_P$  é  $u$ -semiholomorfo e depende em  $v$  e  $\bar{v}$ , assim por [Lema 2](#)

$$d(P; f_u) + p_1 - 1 = d(P; f_v) + p_2 - 1 = d(P; f_{\bar{v}}) + p_2 - 1 = d - 1, \quad (5.58)$$

$$d - 1 < d(P; f_{\bar{u}}) + p_1 - 1 \quad (5.59)$$

e

$$(f_u)_P = (f_u)_P, (f_v)_P = (f_v)_P, (f_{\bar{v}})_P = (f_{\bar{v}})_P. \quad (5.60)$$

Por definição temos que

$$(w_1(a, b), w_2(a, b)) = (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b) - \bar{\alpha}(f_{\bar{v}})_P(a, b)). \quad (5.61)$$

Note que

$$\begin{aligned} &\langle (p_1a, p_2b), ((\bar{f}_u)_P(a, b), (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, (\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle = \\ &(i/\bar{\alpha}) (\langle (p_1a, p_2b), (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle) \end{aligned} \quad (5.62)$$

e

$$\begin{aligned} &\text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle) = \\ &\text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle) + \text{Re} (\langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle) = \\ &\text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle) + \text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (0, -i\bar{\alpha}(f_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle) = \\ &\text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b) - i\bar{\alpha}(f_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle) = \\ &\text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (w_1(a, b), w_2(a, b)) \rangle). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Pelo [Lema 3](#)  $(w_1(a, b), w_2(a, b)) \neq (0, 0)$ . Suponha que  $w_2(a, b) \neq 0$  e  $w_1(a, b) = 0$  isto implica pela suposição (ii) que  $w_2(a, b) = \lambda_0 b$  então

$$\text{Re} (\langle (p_1a, p_2b), (w_1(a, b), w_2(a, b)) \rangle) = \lambda_0(|b|^2 p_2) \neq 0. \quad (5.64)$$

Portanto, pelas Equações (5.62)-(5.64) temos

$$\langle (p_1a, p_2b), ((\bar{f}_u)_P(a, b), (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, (\bar{f}_{\bar{v}})_P(a, b)) \rangle \neq 0,$$

o qual implica por considerar as equações em Eq. (5.58) e as desigualdades em Eq. (5.59) nas Equações (5.55)-(5.57) que  $d = q$  e

$$q\alpha = \langle (p_1a, p_2b), ((\bar{f}_u)_P(a, b), (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle$$

ou equivalentemente por Equação (5.62)

$$-iq|\alpha|^2 = \langle (p_1a, p_2b), (i\alpha(\bar{f}_u)_P(a, b), i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (p_1\bar{a}, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle.$$

Tomando a parte real da última igualdade, obtemos pelas Equações (5.63)-(5.64) uma contradição óbvia:

$$0 = \operatorname{Re}(\langle (p_1a, p_2b), (w_1(a, b), w_2(a, b)) \rangle) = \lambda_0|b|^2p_1 \neq 0. \quad (5.65)$$

Os casos  $w_1(a, b) \neq 0, w_2(a, b) \neq 0$  e  $w_1(a, b) \neq 0, w_2(a, b) = 0$  resultam nas contradições

$$0 = \operatorname{Re}(\langle (p_1a, p_2b), (w_1(a, b), w_2(a, b)) \rangle) = \lambda_0(|a|^2p_1 + |b|^2p_2) \neq 0 \quad (5.66)$$

e

$$0 = \operatorname{Re}(\langle (p_1a, p_2b), (w_1(a, b), w_2(a, b)) \rangle) = \lambda_0|a|^2p_1 \neq 0, \quad (5.67)$$

respectivamente. Assim, podemos ver que se  $u(\tau) \neq 0$  e  $v(\tau) \neq 0$  então pelo [Lema 3](#) encontramos contradições nos casos:  $P$  satisfaz  $k_1 \geq \frac{p_1}{p_2} \geq p_N$ ,  $f$  não é  $v$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ , e  $f$  não é  $u$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ . Portanto, resta encontrar uma contradição para os casos:  $f$  é  $v$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$ ,  $f$  é  $u$ -conveniente e  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$ ,  $u(\tau) \equiv 0$ , e  $v(\tau) \equiv 0$ .

Caso 2:  $f$  é  $v$ -conveniente,  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e  $w_2(a, b) \neq 0$  ou  $f$  é  $u$ -conveniente,  $\frac{p_1}{p_2} < k_N$  e  $w_1(a, b) \neq 0$

Temos que se  $f$  é  $v$ -conveniente,  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e  $w_2(a, b) \neq 0$ . Podemos supor que  $f_P$  depende em  $v$  e  $\bar{v}$ , o caso  $y$ -semiholomorfo,  $y \in \{v, \bar{v}\}$ , segue similarmente, então pelo [Lema 2](#)

$$d(P; f_v) + p_2 - 1 = d(P; f_{\bar{v}}) + p_2 - 1 = d - 1, \quad (5.68)$$

$$d - 1 < \min\{d(P; f_u) + p_1 - 1, d(P; f_{\bar{u}}) + p_1 - 1\} \quad (5.69)$$

e por assim encontramos

$$w_2(a, b) = i(\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b) - \bar{\alpha}(f_{\bar{v}})_P(a, b)).$$

Já que  $w_2(a, b) \neq 0$  temos que  $w_2(a, b) = \lambda_0b$ . Assim,

$$\operatorname{Re}(\langle (0, p_2b), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (0, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle) = \lambda_0|b|^2p_2 \neq 0$$

e

$$\begin{aligned} &\langle (0, p_2b), (0, (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (0, p_2\bar{b}), (0, (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle = \\ &(i/\bar{\alpha}) (\langle (0, p_2b), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (0, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle) \neq 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Pelas Equações (5.55)-(5.57) e Equações (5.68)-(5.69) temos  $q = d$  e

$$q\alpha = \langle (0, p_2b), (0, (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (0, p_2\bar{b}), (0, (\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle, \quad (5.71)$$

ou equivalentemente

$$-iq\alpha\bar{\alpha} = \langle (0, p_2b), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle + \langle (0, p_2\bar{b}), (0, i\alpha(\bar{f}_v)_P(a, b)) \rangle. \quad (5.72)$$

Tomando a parte real da última igualdade, temos uma contradição como em(5.65), ou seja,  $0 \neq \lambda_0|b|^2p_2 = 0$ . Assim, se  $v(\tau) \neq 0$  e  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  então  $w_2(a, b) \neq 0$  implica uma contradição. Esta situação inclui os casos onde  $f$  é  $v$ -conveniente e FND para  $P$  (Por exemplo, os casos no [Lema 4](#)). Portanto, as únicas possibilidades restantes para  $f$  quando  $u(\tau) \neq 0$  e  $v(\tau) \neq 0$  estão no próximo caso.

Caso 3:  $f$  é  $v$ -convenient  $\frac{p_1}{p_2} > k_1 \geq 1$ ,  $(0, d_1), (1, n) \in \Delta(P_N; f) \cap \text{supp}(f)$  e  $w_2(a, b) = 0$  ou  $f$  é  $u$ -conveniente  $\frac{p_1}{p_2} < k_N \leq 1$ ,  $(d_2, 0), (m, 1) \in \Delta(P_1; f) \cap \text{supp}(f)$  e  $w_1(a, b) = 0$

Suponha que  $f$  é  $v$ -convenient  $\frac{p_1}{p_2} > k_1 \geq 1$ ,  $(0, d_1), (1, n) \in \Delta(P_1; f) \cap \text{supp}(f)$  e  $w_2(a, b) = 0$  então pelo [Lema 3](#)  $w_1(a, b) \neq 0$ . Pela Suposição (ii) temos

$$q + (d_1p_2 - p_2) < s + p_2 \quad (5.73)$$

$$q + np_2 = s + p_1. \quad (5.74)$$

Já que  $(0, d_1), (1, n) \in \Delta(P_1; f)$  então  $n = d_1 - k_1$ . Assim,  $k_1 \geq 1$  implica  $d_1 - n \geq 1$ . Portanto pelas Equações (5.73)-(5.74) obtemos

$$q + d_1p_2 - p_2 < q + np_2 - p_1 + p_2 \Rightarrow ((d_1 - n) - 1)p_2 < p_2 - p_1 \Rightarrow 0 \leq ((d_1 - n) - 1) < 1 - \frac{p_1}{p_2} < 0, \quad (5.75)$$

o qual é uma contradição evidente. O caso onde  $f$  é  $u$ -conveniente  $\frac{p_1}{p_2} < k_N \leq 1$ ,  $(d_2, 0), (m, 1) \in \Delta(P_N; f) \cap \text{supp}(f)$  e  $w_1(a, b) = 0$  segue analogamente considerando mudanças apropriadas. Portanto, pelos casos anteriores temos que  $U \cap M_{\text{arg } f} \cap \mathbb{C}^{*2} = \emptyset$ .

Caso 4:  $u(\tau) \equiv 0$  ou  $v(\tau) \equiv 0$

Suponha que  $u(\tau) \equiv 0$  então se  $f$  não é  $v$ -conveniente  $z(\tau) \in V_f$  assim temos uma contradição com Suposição-(i). Note que pelo Caso-(i) do [Lema 3](#) para  $P$  com  $\frac{p_1}{p_2} > k_1$  e  $f$   $v$ -conveniente  $(w_1(0, b), w_2(0, b)) \neq (0, 0)$  assim podemos ver que em ambos casos obtemos contradições. Se  $w_1(0, b) \neq 0$  obtemos a contradição na Suposição (ii)

$$0 \neq w_1(0, b) = \lambda_0 0 = 0.$$

Se  $w_2(a, b) \neq 0$  então obtemos a contradição (5.65), ou seja,  $0 \neq \lambda_0|b|^2p_2 = 0$ . Analogamente temos o caso  $v(\tau) \equiv 0$  e  $f$   $u$ -conveniente. Portanto, temos que fazendo  $U$  suficientemente pequeno se for necessário  $U \cap M_{\text{arg } f} \cap \{u = 0\} = \emptyset$  e  $U \cap M_{\text{arg } f} \cap \{v = 0\} = \emptyset$ .

Portanto, segue dos casos anteriores que  $U \cap M_{\arg f} = \emptyset$ , para uma vizinhança suficientemente pequena  $U$  da origem  $0 \in \mathbb{R}^4$ .

□

**Exemplo 8** (FNDP  $\not\Rightarrow$  CFM). Consideramos a aplicação polinomial com singularidade isolada na origem  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1^2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2))$ . Definindo  $u = x_1 + ix_2$  e  $v = x_3 + ix_4$  temos que  $s_{2,f}(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ , assim analisando as raízes temos que o polinômio misto  $f(u, \bar{u}, v, \bar{v})$  é FNDP. Contudo, [Ribeiro \(2018, p.49\)](#) mostrou que  $f$  não satisfaz a Condição forte de Milnor.

### 5.2.2 Caso radialmente homogêneo pesado

Segue da [Proposição 14](#) que para um polinômio misto radialmente homogêneo pesado  $f$ , as condições  $\Sigma_f = \{0\}$ , FNDP e FNDI são equivalentes. Assim, segue da [Teorema 9](#) que polinômios mistos radialmente homogêneos pesados  $f$  com singularidade isolada satisfazem  $M_{\arg f} = \emptyset$ . Vejamos que a recíproca vale no caso de  $f$  ter uma singularidade fracamente isolada.

No caso geral a condição de homogeneidade radial ([Definição 12](#)) permite relacionar o conjunto de Milnor do argumento de  $f$  e o seu conjunto singular.

**Teorema 10.** ([CHEN, 2014, Proposition 3.4](#)) Se  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é um polinômio radialmente homogêneo pesado e não constante, então  $\Sigma_{\arg f} = \Sigma_f \setminus V_f = M_{\arg f}$ .

Como uma consequência dos resultados anteriores temos o seguinte resultado.

**Corolário 2.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto radialmente homogêneo pesado, então as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $f$  tem uma singularidade isolada na origem.
- (ii)  $f$  é FNDI.
- (iii)  $f$  é FNDP.
- (iv)  $f$  tem uma singularidade fracamente isolada na origem e satisfaz a condição forte de Milnor.

*Demonstração.* Pelo [Teorema 10](#) temos que  $\Sigma_f \setminus V_f = \Sigma_{\arg f} = M_{\arg f}$ . Assim se  $f$  possui uma singularidade fraca na origem  $\Sigma_f = \Sigma_f \setminus V_f = \Sigma_{\arg f} = M_{\arg f}$ . O resultado segue então da [Proposição 14](#) e que no caso de singularidade fracamente isolada ( $\Sigma_f \cap V_f = \{0\}$ )  $M_{\arg f} = \emptyset$  e a condição forte de Milnor são equivalentes<sup>1</sup>. □

<sup>1</sup> Veja ([RIBEIRO, 2018, Theorem 2.2.12, p.55](#)) para mais esclarecimentos da equivalência de  $M_{\arg f} = \emptyset$  e a condição forte de Milnor.



# TOPOLOGIA DE REALIZAÇÕES MISTAS (NDI) COM BORDO *NICE*

Neste capítulo, apresentaremos um método que permite estudar a topologia da classe de polinômios mistos que satisfaz NDI com uma condição adicional que chamamos de *nice*. Esse método pode abrir caminho para a busca de uma técnica geral para estudar a topologia de polinômios mistos com singularidade fracamente isolada. Estes resultados na sua maioria podem ser encontrados em (ARAÚJO DOS SANTOS; BODE; SANCHEZ QUICENO, 2022).

Como consequência do resultado principal temos que a topologia do enlaçamento destes polinômios só depende do seu bordo de Newton. Assim este resultado fornece uma generalização do resultado que já era conhecido na classe de polinômios holomorfos ND. Isto destaca as principais semelhanças entre os polinômios holomorfos e classes de polinômios mistos.

## 6.1 Tranças aninhadas de polinômios semiholomorfos

Esta seção trata da classe de polinômios semiholomorfos NDI que tem mostrado propriedades boas suficiente para ser considerado como objeto de estudo por si só, veja por exemplo o Teorema da realização de enlaçamentos [Conjetura 1](#). Além do mais como veremos nesta seção os enlaçamentos que surgem associados aos polinômios semiholomorfos NDI podem ser representados como o fecho de tranças geométricas aninhadas.

**Definição 23.** Para uma sequência de tranças geométricas  $(B_1, B_2, \dots, B_N)$  de  $S_i$  fios, onde  $B_i$  é parametrizada por

$$\bigcup_{j=1}^{S_i} \{(z_{i,j}(t), t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi], \quad (6.1)$$

$z_{i,j}(t) \neq 0$  para todo  $i \neq 1, j$  e  $t$ , definimos a *trança aninhada*  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  sendo a trança

dada por

$$\bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^{S_i} \{(\varepsilon^{k_i} z_{i,j}(t), t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi], \tag{6.2}$$

para algum  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e  $k_i, i = 1, 2, \dots, N$ , uma sequência de número reais estritamente decrescente.

Definimos  $B^\circ(B_1, B_2, \dots, B_N)$  sendo o enlaçamento dado pela união de  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  e seu eixo de trançamento

$$\{(e^{i\varphi}, \pi) : \varphi \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times [0, 2\pi]. \tag{6.3}$$

Note que o tipo de trança de  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  não depende da escolha de  $\varepsilon$  desde que este seja escolhido suficientemente pequeno e não depende da sequência  $k_i$ , desde que esta seja escolhida estritamente decrescente e positiva. Veja [Figura 24](#) para ilustrar um exemplo com  $N = 3$ .

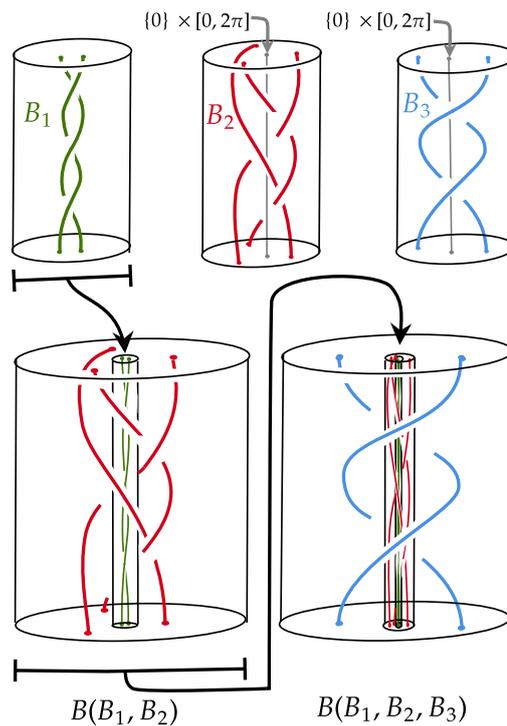


Figura 24 – Na linha superior: uma trança  $B_1$  e duas tranças  $B_2, B_3$  afins. Na linha inferior: as tranças aninhadas  $B(B_1, B_2)$  e  $B(B_1, B_2, B_3)$

Esta construção claramente depende da parametrização explícita das tranças geométricas  $B_i$ s. Mesmo uma translação da forma  $u_{i,j}(t) \mapsto u_{i,j}(t) + c$  para algum número complexo  $c$  e todos  $j \in \{1, 2, \dots, S_i\}$  em uma dada trança  $B_i$  pode mudar a topologia da trança resultante  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$ . Porém, a isotopia da trança de  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  e o tipo do enlaçamento de

$B^o(B_1, B_2, \dots, B_N)$  somente depende da classe de isotopia da trança  $B_1$  e a classe de isotopia das tranças afins<sup>1</sup>  $B_i$ .

### 6.1.0.1 Decomposição de um polinômio misto

**Lema 5.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto e  $\mathcal{P}(f) = \{P_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  uma seqüência de vetores de pesos ordenados como em (5.2). Para cada  $P_i \in \mathcal{P}$  considere  $f_{P_i}$  e  $g_i$  como na Equação (5.3). Então, para um apropriado  $k_i, s_i$  e  $n_i$ , a função  $f$  admite a decomposição

$$f(u, \bar{u}, re^{it}, re^{-it}) = r^{k_i s_i + n_i} f_i \left( \frac{u}{r^{k_i}}, \frac{\bar{u}}{r^{k_i}}, r, e^{it} \right), \quad (6.4)$$

onde  $f_i$  é uma deformação a  $r$ -parâmetro de  $g_i$ , com a propriedade adicional que a diferença  $f_i - g_i$  converge a 0, quando  $r \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Fixe  $P_i \in \mathcal{P}$  e como em (5.3) considere  $g_i : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$f_{P_i}(u, \bar{u}, re^{it}, re^{-it}) = r^{k_i s_i + n_i} g_i \left( \frac{u}{r^{k_i}}, \frac{\bar{u}}{r^{k_i}}, e^{it} \right). \quad (6.5)$$

Seja  $n_i$  o menor expoente de  $r := |v|$  em  $f_{P_i}$  e  $s_i$  o maior expoente de  $R$  em  $f_{P_i}$ . Podemos ver agora que (6.4) segue de  $f$  por considerarmos  $f_i : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  via

$$f_i(w, \bar{w}, r, e^{it}) = g_i(w, \bar{w}, e^{it}) + \sum_{v+\mu \notin \Delta(P_i; f)} r^{-k_i s_i - n_i} M_{v, \mu}(r^{k_i} w, r^{k_i} \bar{w}, re^{it}, re^{-it}), \quad (6.6)$$

onde  $g_i$  vem de (6.5), e a soma no lado direito varia em todos os monômios  $M_{v, \mu}$  de  $f$  que estão acima da 1-face  $\Delta(P_i; f)$ . Em particular,

$$\text{rdeg}_{P_i}(M_{v, \mu}) > d(P_i; f). \quad (6.7)$$

É importante lembrar que mesmo que  $r$  e  $t$  são inicialmente interpretados como o módulo e o argumento da variável complexa  $v$ , eles são considerados como parâmetros independentes; isto é, mesmo quando  $r = 0$  a variável  $t$  deve ainda variar de 0 a  $2\pi$ .

Para provar a propriedade adicional escrevemos  $M_{v, \mu}(Re^{i\varphi}, Re^{-i\varphi}, re^{it}, re^{-it})$  como  $c(t, \varphi) R^a r^b$ . Da Desigualdade (6.7) temos que  $ak_i + b > k_i s_i + n_i$  e assim

$$ak_i + b - k_i s_i - n_i > 0. \quad (6.8)$$

Note que o lado esquerdo de (6.8) é o grau na variável  $r$  do monômio

$$r^{-k_i s_i - n_i} M_{v, \mu}(r^{k_i} w, r^{k_i} \bar{w}, re^{it}, re^{-it}),$$

e conseqüentemente este é precisamente a condição de que o monômio é divisível por  $r$ , assim que  $f_i(u, \bar{u}, 0, e^{it}) = g_i(u, \bar{u}, e^{it})$ . Portanto, podemos ver  $f_i$  como uma deformação a  $r$ -parâmetro de  $g_i$  cuja diferença  $f_i - g_i \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ , para qualquer valor de  $t \in [0, 2\pi]$ .  $\square$

<sup>1</sup> Equivalentemente a classe de isotopia da trança afim  $B_i$  é vista como a classe de  $B_i$  no espaço  $\mathbb{C}^* \times [0, 2\pi]$ .

### 6.1.1 Enlaçamento de um polinômio semiholomorfo NDI

Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio bordo  $u$ -semiholomorfo NDI e tome  $\mathcal{P} = \{P_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  uma sequência de vetores de pesos associados as 1-faces de  $\Gamma(f)$ . Defina  $B_1$  como a trança formada pelas raízes complexas da função  $g_1$  associada ao polinômio complexo  $f_{P_1}$  como na Equação (6.5), e  $B_i, i = 2, \dots, N$ , a trança formada pelas raízes complexas não nulas da função  $g_i$ .

**Teorema 11.** Nas condições anteriores, o polinômio semiholomorfo  $f$  tem uma singularidade fracamente isolada na origem. Mais ainda, o enlaçamento  $L_f$  é isotópico ao fecho da trança  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$ , se  $f$  é  $u$ -conveniente. Se  $f$  não for  $u$ -conveniente, então o enlaçamento da singularidade é  $B^o(B_1, B_2, \dots, B_N)$ .

*Demonstração.* O fato que  $f$  tem uma singularidade fracamente isolada segue de [Proposição 8](#). Agora, para qualquer  $P_i = (p_{i,1}, p_{i,2}) \in \mathcal{P}$  considere  $k_i = \frac{p_{i,1}}{p_{i,2}}, n_i$  e  $s_i$ , como no [Lema 5](#) e tome  $m_i$  o menor expoente de  $R := |u|$  em  $f_{P_i}$ .

Dado que  $f$  é semiholomorfo os expoentes de  $|u|$  coincidem com os expoentes de  $u$  e assim a Decomposição (6.4) de  $f$  deve ser escrita como

$$f(u, re^{it}, re^{-it}) = r^{k_i s_i + n_i} f_i \left( \frac{u}{r^{k_i}}, r, e^{it} \right).$$

Para  $(u_*, r_* e^{it_*}) \in \mathbb{C}^{*2}$ , temos que

$$f_i(u_*, r_*, e^{it_*}) = 0 \text{ se e somente se } f(r_*^{k_i} u_*, r_* e^{it_*}, r_* e^{-it_*}) = 0.$$

Adicionalmente, como cada  $g_i$  associado a  $f_{P_i}$  é  $u$ -semiholomorfo com grau em  $u$  estritamente maior que  $m_i$ , então  $f$  é *true*.

Agora, já que cada  $f_{P_i}$  é ND, segue que no conjunto de zeros de  $f_{P_i}$  em  $\mathbb{C}^{*2}$  o Jacobiano real  $Jf_{P_i}$  tem posto maximal. Assim, pelo [Corolário 1](#) as raízes complexas não-nulas de  $g_i$  são todas simples, para todos os valores de  $t$ .

Isto significa que as raízes complexas não nulas  $u_{i,\ell}(t), \ell = 1, 2, \dots, s_i - m_i$ , de  $g_i$  traçam uma trança  $B_i$  de  $s_i - m_i$  fios, quando  $t$  varia de 0 a  $2\pi$ . Assim, temos  $f_i(u_{i,\ell}(t), 0, t) = 0$  e esses são os únicos zeros de  $f_{P_i}$  em  $r = 0$  com  $u$ -coordenada não nula. Devemos aplicar então o Teorema da função implícita (ou, usar a continuidade das raízes de um polinômio em termos dos seus coeficientes) para encontrar vizinhança tubular disjuntas das tranças  $B_i$  em  $\mathbb{C}^* \times S^1$ , nas quais as raízes de  $f_i$  permanecem simples e estão parametrizadas por  $r$  e  $t$  enquanto  $r$  seja escolhido suficientemente pequeno. Em particular, para qualquer valor pequeno suficiente de  $f$  as raízes de  $f_i$  formam uma trança  $B_i(r)$  que é isotópica a  $B_i$ , onde variando  $r$  permite uma isotopia de tranças começando desde  $B_i(0) = B_i$  em  $r = 0$ .

Recordemos que se  $B_i(r)$  é parametrizada por  $(u_{i,\ell}(r,t), r, t)$ , isto é,  $f_i(u_{i,\ell}(r,t), r, e^{it}) = 0$ , então

$$f(r^{k_i} u_{i,\ell}(r,t), re^{it}, re^{-it}) = 0. \quad (6.9)$$

Portanto, se  $r$  é suficientemente pequeno,  $(r^{k_i} u_{i,\ell}(r,t), re^{it}, re^{-it}) \neq (r^{k_j} u_{j,\ell'}(r,t), re^{it}, re^{-it})$  para todo  $i \neq j$  e  $\ell = 1, 2, \dots, s_i - m_i$ ,  $\ell' = 1, 2, \dots, s_j - m_j$ . Em adição, uma vez que  $f$  é semiholomorfo e ND para qualquer vértice não extremo, temos  $u_{i,\ell}(r,t) \neq 0$  para todo  $i \neq 1$ ,  $t$  e suficientemente pequeno  $r$ . Note também que, mesmo que existem raízes  $u_{1,\ell}(r,t) = 0$  os argumentos anteriores também se mantêm nas raízes nulas, porque NDI no vetor de pesos  $P_1$  implica que  $u_{1,\ell}(r,t) = 0$  é uma raiz simples de  $g_1$ .

Para finalizar, veja que para qualquer valor fixo de  $r$  e  $t$ , o polinômio  $f$  é um polinômio complexo em  $u$  de grau  $s_N$ , onde  $N$  é o índice correspondente à 1-face do bordo de Newton com  $k_N \leq k_i$  para todo  $i$ . Assim, para valores pequenos de  $r$  temos encontrados as  $s_N$  raízes de  $f(\bullet, re^{it}, re^{-it})$  via Equação (6.9), assim  $f$  não pode ter mais zeros na vizinhança da origem, isto é

$$V_f \cap D_\rho^4 = \bigcup_{i,\ell} \{(r^{k_i} u_{i,\ell}(r,t), re^{it}) \in \mathbb{C}^2 : r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t \in [0, 2\pi]\} \cap D_\rho^4. \quad (6.10)$$

Se  $f$  é  $u$ -conveniente,  $f(u, 0) = u^{s_N}$  (possivelmente vezes uma constante), assim que a origem é o único zero de  $f$  com  $v = 0$ .

Portanto, já que as raízes complexas de  $f(\bullet, re^{it})$  são simples para suficientemente pequeno  $r$ , segue que a origem é uma singularidade fracamente isolada de  $f$  e por Definição 23 o correspondente enlaçamento é o fecho de  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$ . Agora, a isotopia com  $L_{f,\rho}$ , para pequeno  $\rho$ , pode ser construída analogamente como em Proposição 3. O número de fios  $S_i$  em Definição 23 é  $s_i - m_i = s_i - s_{i-1}$  com  $s_0 = 0$ .

Se  $f$  não é  $u$ -conveniente, o conjunto  $\{v = 0\}$  é parte de  $V_f$ . Devido a  $f$  ser NDI, esses zeros são pontos regulares de  $f$  e a origem é ainda fracamente isolada de  $f$ . O enlaçamento da singularidade é formado pela união do fecho de  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  (com a isotopia entre as projeções de  $V_f \cap (\mathbb{C} \times \rho S^1)$  em  $S_\rho^3$  e  $V_f \cap S_\rho^3$  como no caso prévio) e  $\{v = 0\}$ , o qual é o eixo de trançamento de  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$ . Pela definição, esta união é  $B^\circ(B_1, B_2, \dots, B_N)$ .  $\square$

## 6.2 Enlaçamentos aninhados e polinômios mistos

Para generalizar o resultado anterior para o caso misto devemos notar que os diferentes  $g_i$ s em (6.4) não são necessariamente holomorfos na variável  $u$ . Assim quando  $g_i$  for um polinômio misto na variável  $u$  e  $\bar{u}$  o número de zeros de  $g_i(\bullet, e^{it})$  deve variar com  $t$  e o Teorema fundamental da Álgebra não é mais aplicável. Assim os zeros de  $g_i$  no toro aberto  $\mathbb{C} \times S^1$  não são no geral o fecho de uma trança, mas sim um enlaçamento  $L$  (possivelmente vazio!) em  $\mathbb{C} \times S^1$ .

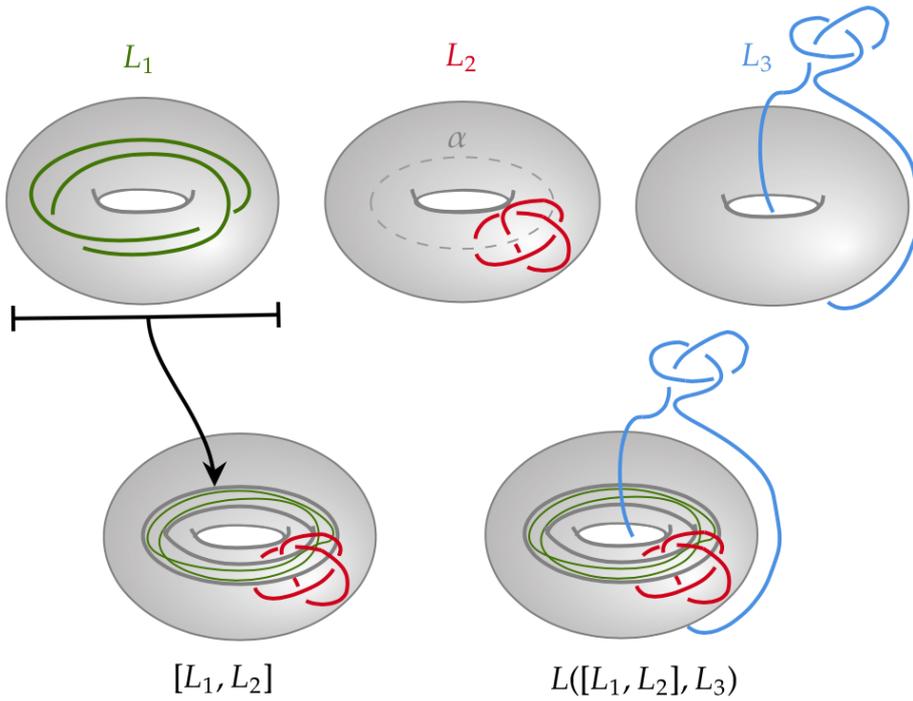


Figura 25 – Na parte superior: enlaçamentos  $L_1$  em  $\mathbb{C} \times S^1$ ,  $L_2$  em  $\mathbb{C}^* \times S^1$ , e  $L_3$  no toro complemento  $S^1 \times \mathbb{C}$ . Na parte inferior: os enlaçamentos  $[L_1, L_2]$  e  $L([L_1, L_2], L_3)$

**Definição 24.** Seja  $(L_1, L_2, \dots, L_{N-1})$  uma sequência de (possivelmente vazio) enlaçamentos, onde cada  $L_i$  (não vazio) é parametrizado por

$$\bigcup_{j=1}^{M_i} \{(u_{i,j}(\tau), e^{i u_{i,j}(\tau)}) : \tau \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times S^1, \quad (6.11)$$

onde  $j = 1, 2, \dots, M_i$  estão indexado as  $M_i$  componentes de  $L_i$  e  $z_{i,j}(\tau) \neq 0$  para todo  $i \neq 1, j$  e  $\tau$ . Definimos  $[L_1, L_2, \dots, L_{N-1}]$  o enlaçamento dada por

$$\bigcup_{i=1}^{N-1} \bigcup_{j=1}^{M_i} \{(\varepsilon^{k_i} u_{i,j}(\tau), e^{i u_{i,j}(\tau)}) : \tau \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times S^1, \quad (6.12)$$

para algum  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e uma sequência de números reais estritamente positivo  $k_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ .

Esta construção é análoga à [Definição 23](#), mas com  $\mathbb{C} \times S^1$  em lugar de  $\mathbb{C} \times [0, 2\pi]$ . Em particular, se todo  $L_i$  é o fecho de uma trança  $B_i$ , então  $[L_1, L_2, \dots, L_{N-1}] = B(B_1, B_2, \dots, B_{N-1})$ .

**Definição 25.** Seja  $K_1$  um enlaçamento em  $\mathbb{C} \times S^1$  que é ou vazio ou parametrizado por

$$\bigcup_{j=1}^M \{(u_j(\tau), e^{i u_j(\tau)}) : \tau \in [0, 2\pi]\} \quad (6.13)$$

e  $K_2$  um enlaçamento em  $S^1 \times \mathbb{C}$  que é vazio ou parametrizado por

$$\bigcup_{j=1}^{M'} \{(e^{i \phi_j(\tau)}, v_j(\tau)) : \tau \in [0, 2\pi]\}. \quad (6.14)$$

Definimos o enlaçamento  $\widetilde{K}_i$ ,  $i = 1, 2$ , em  $S^3$ , o qual é vazio se  $K_i$  é vazio ou parametrizado por

$$\bigcup_{j=1}^M \left\{ \left( \varepsilon u_j(\tau), \sqrt{1 - \varepsilon^2 |u_j(\tau)|^2} e^{it_j(\tau)} \right) : \tau \in [0, 2\pi] \right\} \quad (6.15)$$

e

$$\bigcup_{j=1}^{M'} \left\{ \left( \sqrt{1 - \varepsilon^2 |v_j(\tau)|^2} e^{i\varphi_j(\tau)}, \varepsilon v_j(\tau) \right) : \tau \in [0, 2\pi] \right\}, \quad (6.16)$$

para algum pequeno  $\varepsilon > 0$ , respectivamente.

Então escrevemos  $L(K_1, K_2)$  pelo enlaçamento em  $S^3$  dado por  $\widetilde{K}_1 \cup \widetilde{K}_2$ .

A [Figura 25](#) mostra as construções em [Definição 24](#) e [25](#). Enquanto eles são dados em termos das parametrizações dos enlaçamentos  $L_i$ , o tipo de enlaçamento  $L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$  somente depende da classe de isotopia de  $L_1$  em  $\mathbb{C} \times S^1$  e das classes de isotopias dos  $L_i$ s com  $i \in \{2, 3, \dots, N-1\}$  em  $\mathbb{C}^* \times S^1$  e a classe de isotopia de  $L_N$  em  $S^1 \times \mathbb{C}$ .

A relação dos enlaçamentos no toro sólido e em  $S^3$  pode ser entendido na [Subseção 2.2.2](#). A [Definição 25](#) interpreta o toro sólido  $\mathbb{C} \times S^1$  contendo  $K_1$  como o toro sólido em  $S^3$  com núcleo  $\{0\} \times S^1$ . Enquanto o toro sólido complemento  $S^1 \times \mathbb{C}$  contendo  $K_2$ .

Existe uma relação entre [Definição 23](#), [24](#) e [25](#). Se  $K_2$  não intersecta o núcleo de seu toro sólido, isto é,  $v_j(\tau) \neq 0$  para todo  $\tau \in [0, 2\pi]$  e todo  $j = 1, 2, \dots, M'$ , então  $K_2$  pode também ser interpretado como um enlaçamento em  $\mathbb{C} \times S^1$  via

$$\bigcup_{j=1}^{M'} \{(u_j(\tau), e^{it_j(\tau)}) : \tau \in [0, 2\pi]\}, \quad (6.17)$$

onde  $|u_j(\tau)| = \sqrt{1 - \varepsilon |v_j(\tau)|^2}$ ,  $\arg(u_j(\tau)) = \varphi_j(\tau)$  e  $t_j(\tau) = \arg(v_j(\tau))$ . Neste caso  $L(K_1, K_2)$  é igual a  $[K_1, K_2]$  interpretado como o enlaçamento em  $\mathbb{C} \times S^1 \subset S^3$ .

Em particular, se  $K_2$  não intersecta os núcleos de seu toro sólido  $S^1 \times \mathbb{C}$  e forma uma trança geométrica  $B_N$  em  $\mathbb{C} \times S^1$ , então  $L([B_1, B_2, \dots, B_{N-1}], B_N) = B(B_1, B_2, \dots, B_{N-1}, B_N) = [B_1, B_2, \dots, B_{N-1}, B_N]$  para qualquer sequência de tranças geométricas fechadas  $B_1, B_2, \dots, B_{N-1}$ .

Se  $K_2$  contém uma componente que é igual ao núcleo  $(e^{i\varphi}, 0)$  e a componente restante de  $K_2$  (interpretada como enlaçamento em  $\mathbb{C} \times S^1$ ) forma uma trança geométrica fechada  $B_N$ , temos  $L([B_1, B_2, \dots, B_{N-1}], K_2) = B^o(B_1, B_2, \dots, B_{N-1}, B_N)$ .

A [Definição 24](#) e [25](#) nos permite construir enlaçamentos a partir de uma sequência de enlaçamentos dados de uma forma que generaliza o comportamento aninhado das tranças da [Definição 23](#). Porém, eles permitem lidar com enlaçamentos no toro sólido que não são fechos de tranças e com enlaçamentos  $K_2 \subset S^1 \times \mathbb{C}$  que intersectam o núcleo do toro sólido.

Note que podemos definir analogamente à construção da [Definição 24](#) para enlaçamentos no toro sólido  $S^1 \times \mathbb{C}$  o qual produz para qualquer sequência de enlaçamentos  $L_1, L_2, \dots, L_N$  em

$S^1 \times \mathbb{C}$  um enlaçamento  $[L_1, L_2, \dots, L_N]$  em  $S^1 \times \mathbb{C}$ . Então o enlaçamento

$$L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$$

poderia ser equivalentemente representado por

$$L([L_1, L_2, \dots, L_k], [L_N, L_{N-1}, \dots, L_{k+1}]),$$

para qualquer  $k = 2, 3, \dots, N-1$ . Note que a ordem no segundo colchete é invertido. Isto é porque [Definição 24](#) arranja os enlaçamentos  $L_i$  tal que as  $u$ -coordenadas de  $L_i$  são estritamente decrescente como aquelas de  $L_j$  para todo  $j > i$  e uma pequena  $u$ -coordenada correspondente a grandes  $v$ -coordenadas em  $S^3$ .

### 6.2.1 Enlaçamentos de polinômios mistos NDI com bordo nice

Uma propriedade essencial satisfeita pelos polinômios bordo semiholomorfos NDI que é necessária para obter um resultado análogo ao anterior é a seguinte.

**Definição 26.** Dizemos que o polinômio misto  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é *nice* se para todo vértice não extremo  $\Delta$  de  $\Gamma(f)$ ,  $V_{f_\Delta} \cap \mathbb{C}^{*2} = \emptyset$ .

**Observação 8.** Note que  $f$  é ND num vértice  $\Delta$  não extremo que é *nice* já que a condição ND segue do fato que  $V_{f_\Delta} \cap \mathbb{C}^{*2}$  é vazio. A recíproca não vale no geral pois  $f(z, \bar{z}) = (v^2 - \bar{v}^2)u\bar{u} + (i+1)v\bar{v}(u^2 + \bar{u}^2)$  fornece um exemplo de um vértice ND que não é *nice*.

No caso particular quando  $f_\Delta$  for semiholomorfo e ND então este é *nice*. De fato, como  $f_\Delta$  é semiholomorfo e associado a um vértice não extremo então para a variável  $v = re^{it}$  o polinômio  $f_\Delta(u, re^{it}) = r^n u^m \Phi(e^{it})$ , onde  $n, m$  são inteiros positivos. Uma vez que  $f$  não é *nice* em  $\Delta$  existe  $t_* \in [0, 2\pi]$  tal que  $f_\Delta(u, re^{it_*}) = 0$  para todo  $u$  e  $r$ , mais ainda  $(f_\Delta)_u(u, re^{it_*}) = 0$ . Portanto pelo Item-(ii) na [Proposição 2](#)  $(u, re^{it_*}) \in \Sigma_{f_\Delta} \cap V_{f_\Delta}$ , o qual contradiz ND. Assim  $f$  no [Teorema 11](#) é *nice*.

Todo polinômio  $g_i$  é divisível por  $R^{m_i}$ , tal que  $g_i(0, 0, e^{it}) = 0$  para todo  $t$ . A condição de ser *nice* garante que para todo valor de  $t$ , as raízes em  $u = 0$  tem ordem  $m_i$  para todo valor de  $t$ , ou seja, os zero de  $\frac{g_i}{R^{m_i}}$  tem  $u$ -coordenada não nula.

Se  $g_i$  é semiholomorfa esta condição fica mais simples. Isto significa que  $\frac{g_i}{u^{m_i}}(0, 0, e^{it}) \neq 0$ . Note que neste caso  $g_i$  é divisível por  $u^{m_i}$ . Mais ainda, o grau de  $g_i$  com respeito a  $u$  não depende de  $t$ , assim que as raízes de  $g_i(\bullet, e^{it})$  traçam uma trança quando  $t$  varia de 0 a  $2\pi$ .

Compare isto com ([OKA, 2010](#), Theorem 34), quando  $f$  tem vértices simples. Os polinômios que tem somente vértices simples no bordo de Newton se vem imediatamente que são *nice*.

Defina  $L_1$  como o enlaçamento formado pelas raízes complexas da função  $g_1$  na variável  $u, \bar{u}$  associada ao polinômio complexo  $f_{P_1}$ , como na Equação (6.5),  $L_i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , o

enlaçamento formado pelos zeros complexos não nulos da função  $g_i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , e  $L_N$  o enlaçamento formado pelas raízes complexas na variável  $v$  de uma função  $h$  associada a  $f_{P_N}$  como na Decomposição (5.3) feita a partir da variável  $u = Re^{\varphi it}$  em lugar de  $v = re^{it}$ .

**Lema 6.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto NDI com um bordo *nice*, com  $N > 1$ . Então, o enlaçamento da singularidade  $L_f$  contém  $L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$  como um sub-enlaçamento.

*Demonstração.* Novamente a prova segue a ideia da Teorema 11. Considere  $f_i : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^1$  como na Equação (6.4) e novamente temos  $f_i(u, \bar{u}, 0, e^{it}) = g_i(u, e^{it})$  e a não-degeneração de  $f_{P_i}$  implica que podemos evocar o Teorema da função implícita. Porém, já que  $g_i$  não é mais necessariamente holomorfo, isto requer uma explicação adicional. Temos que o Jacobiano real  $Jf_{P_i}$  of  $f_{P_i}$  tem posto máximo para qualquer zero de  $f_{P_i}$  in  $\mathbb{C}^{*2}$ . Podemos escolher coordenadas locais  $(x, y, \tau, r)$  tal que  $\partial\tau$  é a direção ao longo dos zeros  $L_i$  de  $g_i$ . Já que  $f_{P_i}$  é radialmente homogênea pesada e  $g_i$  não depende em  $r$ , isto é,  $f_{P_i}$  depende em  $r$  somente via escalonamento. Logo a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(g_i)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(g_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(g_i)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(g_i)}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

tem posto máximo.

Portanto, pelo Teorema da função implícita, enquanto  $r$  é escolhido suficientemente pequeno, os zeros de  $g_i$  são parametrizados por  $r$  e  $\tau$ , isto é,  $(x_{i,\ell}(r, \tau), y_{i,\ell}(r, \tau))$ , onde  $\ell$  enumera as componentes conexas dos zero de  $g_i$ . Em particular, variar  $r$  permite uma isotopia explícita entre  $L_i$ , os zeros de  $g_i$ , e  $L'_i(r)$ , os zeros de  $f_i$  próximos de  $L_i$  num valor fixado de  $r$ , com  $L'_i(0) = L_i$ . Podemos reescrever a parametrização dos enlaçamentos em termos das coordenadas usuais e obtemos  $(u_{i,\ell}(r, \tau), re^{it_{i,\ell}(r, \tau)})$ .

Novamente obtemos os cones dos  $L_i$ s como zeros de  $f$ , onde o escalonamento das  $u$ -coordenadas (o “finura” do cone) para cada  $i$  depende do vetor de pesos  $P_i$  via  $k_i = \frac{P_{i,1}}{P_{i,2}}$ . Para ser preciso,

$$f(r^{k_i} u_{i,\ell}(r, \tau), r^{k_i} \overline{u_{i,\ell}(r, \tau)}, re^{it_{i,\ell}(r, \tau)}, re^{-it_{i,\ell}(r, \tau)}) = 0, \quad (6.19)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, M_i$ ,  $\tau \in S^1$  e suficientemente pequeno  $r \geq 0$ . Da mesma forma, para  $i = N$  obtemos

$$f(Re^{i\varphi_\ell(R, \tau)}, Re^{-i\varphi_\ell(R, \tau)}, R^{1/k_N} v_\ell(r, \tau), R^{1/k_N} \overline{v_\ell(r, \tau)}) = 0, \quad (6.20)$$

para  $R > 0$  suficientemente pequeno, com  $\ell = 1, 2, \dots, M'$  passando por todas as  $M'$  componentes de  $L_N$ .

Portanto  $L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$  é um sub-enlaçamento da singularidade de  $f$ .  $\square$

Recordemos que  $g_i(u, e^{it})$  poderia potencialmente não se anular para todo  $u \in \mathbb{C}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , neste caso  $L_i$  é o enlaçamento vazio.

**Teorema 12.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  e  $L_i, i = 1, 2, \dots, N, N > 1$ , como no Lema 6. Então o enlaçamento da singularidade é igual a  $L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$ .

*Demonstração.* Tome  $\rho > 0$  suficientemente pequeno e note que o conjunto  $V_f \cap D_\rho^4 \setminus \{0\}$ , o qual é o cone do enlaçamento da singularidade, é um conjunto semi-algébrico. Portanto qualquer componente conexa também é um conjunto semi-algébrico. Podemos assim aplicar o Lema da Seleção da Curva para cada uma das suas componentes conexas.

Suponha agora que o enlaçamento da singularidade tem uma componente  $K$  além de  $L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$  e diferente das curvas  $\{(0, e^{it}) : t \in [0, 2\pi]\}$  e  $\{(e^{i\varphi}, 0) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ . Então pelo Lema da Seleção da Curva existe um caminho real-analítico  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}^2$  com  $\gamma(0) = 0$  e  $\gamma(\tau)$  numa componente conexa de  $V_f \cap D_\rho^4 \setminus \{0\}$  correspondente a  $K$ . Escreva  $u_*(\tau)$  e  $v_*(\tau)$  as  $u$ - e  $v$ -coordenada do caminho. Segue que  $u_*(\tau)$  e  $v_*(\tau)$  são funções analíticas de  $\tau$ .

Já que a curva pertence a  $\mathbb{C}^{*2} \cup \{O\}$  nenhuma das duas series se anulam completamente. Tome  $k$  o quociente das ordens das series de potência, isto é, se  $u_*(\tau) = a_j \tau^j + \text{h.o.t.}$  e  $v_*(\tau) = b_{j'} \tau^{j'} + \text{h.o.t.}$ , então  $k = \frac{j}{j'}$ . Note que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u_*(\tau) / |v_*(\tau)|^k = \frac{a_j}{|b_{j'}|^k}$$

é finito e bem definido.

Se  $k = k_i$  para alguma 1-face  $P_i$  do bordo de Newton, então  $\left(\frac{u_*(\tau)}{|v_*(\tau)|^{k_i}}, v_*(\tau)\right)$  é uma raiz de  $f_i$  para cada  $\tau \in [0, \varepsilon]$ . Em particular,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} |u_*(\tau) / |v_*(\tau)|^{k_i} = \frac{a_j}{|b_{j'}|^{k_i}}$  é uma raiz de  $g_i$  com  $u$ -coordenada não nula. Portanto, esta pertence a  $L_i$  e o caminho  $(u_*(\tau), v_*(\tau))$  pertence à componente de  $V_f \cap D_\rho^4 \setminus \{0\}$  correspondente ao  $L_i$ , o qual é uma contradição.

Portanto,  $k \neq k_i$  para qualquer 1-face  $P_i$  do bordo de Newton de  $f$ . Neste caso, isto corresponde ao vetor de pesos de algum vértice  $\Delta$  do bordo de Newton, digamos com coordenadas  $(m, n)$ . Assuma que  $k_1 > k > k_N$ . Então, devemos definir  $f_\Delta$  via

$$f(u, \bar{u}, re^{it}, re^{-it}) = r^{km+n} f_{(m,n)} \left( \frac{u}{r^k}, \frac{\bar{u}}{r^k}, r, e^{it} \right). \quad (6.21)$$

A curva  $\left(\frac{u_*(\tau)}{|v_*(\tau)|^k}, v_*(\tau)\right)$  está em  $V_{f_{(m,n)}}$ . Segue que o valor limite

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u_*(\tau) / |v_*(\tau)|^k = \frac{a_j}{|b_{j'}|^k}$$

é uma  $u$ -coordenada não-nula de uma raiz de  $f_{(m,n)}(u, \bar{u}, 0, e^{it})$ . Já que

$$f_\Delta(u, \bar{u}, v, \bar{v}) = r^{km+n} f_{(m,n)} \left( \frac{u}{r^k}, \frac{\bar{u}}{r^k}, 0, e^{it} \right),$$

isto implica que existiria uma correspondente raiz de  $f_\Delta$  em  $\mathbb{C}^{*2}$ , o qual contradiz que  $f$  tem um bordo de Newton nice.

Para  $k > k_1$  e  $k < k_N$ , obtemos uma raiz da forma  $(0, v^*)$  e  $(u^*, 0)$ , respectivamente. As quais na sua vez vão ser raízes de  $f_{P_1}$  e  $f_{P_N}$ , e assim pertencem aos enlaçamentos  $L_1$  e  $L_N$ .

Suponha que exista outra componente de  $V_f \cap D_\rho^4 \setminus \{0\}$  que está contida em  $\{v = 0\}$ . Então já que todos os pontos de  $V_f \cap D_\rho^4 \setminus \{0\}$  são regulares, este conjunto é uma variedade 2-dimensional. Em outras palavras, para  $v = 0$  as raízes de  $f(u, \bar{u}, 0, e^{i0})$  são um conjunto 2-dimensional de  $\mathbb{C}$ . Mas isto significa que  $f(u, \bar{u}, 0, e^{i0}) = 0$  para todo  $u \in \mathbb{C}$ . Logo,  $f$  não é  $u$ -conveniente, e  $\{(u, 0) : u \in \mathbb{C}\}$  é parte de  $L_N$ .

Similarmente, se existe outra componente com  $u = 0$ , então  $f$  não é  $v$ -conveniente e a correspondente componente é uma componente de  $L_1$ . Portanto, o enlaçamento da singularidade é  $L([L_1, L_2, \dots, L_{N-1}], L_N)$ .  $\square$

Se  $N = 1$ , isto é, quando a parte principal de Newton  $f_\Gamma$  é radialmente homogêneo pesado e NDI. Então o enlaçamento não é necessariamente isotópico a um enlaçamento associado aos zeros de  $g : \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  nem a um enlaçamento associado aos zeros de  $h : S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Isto acontece quando os zeros de  $f_\Gamma$  intersectam ambos  $\{(0, v) : v \in \mathbb{C}\}$  e  $\{(u, 0) : u \in \mathbb{C}\}$ . Porém, com suas devidas adaptações é possível construir uma isotopia tomando  $L_f$  a  $L_{f_\Gamma}$ .

**Corolário 3.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto, cuja parte principal de Newton  $f_\Gamma$  é semiholomorfa e NDI. Então o enlaçamento  $L_f$  é isotópico a  $L_{f_\Gamma}$ .

*Demonstração.* Visto que  $f$  é NDI e seus vértices extremos são semiholomorfos  $f$  tem um bordo *nice*. Pelo Teorema 12 o enlaçamento  $L_f$  é isotópico a  $L_{f_\Gamma}$ . Note que por si só  $f_\Gamma$  tem singularidade fracamente isolada e pelo Teorema 11 o seu enlaçamento  $L_{f_\Gamma}$  é isotópico ao fecho de um trança aninhada do tipo  $B(B_1, B_2, \dots, B_N)$  se  $f$  é  $u$ -conveniente ou  $B^o(B_1, B_2, \dots, B_N)$  se  $f$  não for  $u$ -conveniente.  $\square$

## 6.2.2 Aplicações

**Corolário 4.** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto NDI com um bordo *nice*. Então o número de componentes do enlaçamento de sua singularidade (fracamente isolada) é igual à soma dos números de componentes de  $L_i$  (mais 1 se e somente se  $f$  não é  $u$ -conveniente).

Em particular, se um nó  $K$  é o enlaçamento de uma singularidade fracamente isolada de um polinômio misto *true* que é NDI com um bordo *nice*, então o bordo de Newton de  $f$  tem exatamente uma 1-face. Portanto, existe um polinômio radialmente homogêneo pesado com uma singularidade fracamente isolada tendo  $K$  como o enlaçamento desta singularidade.

Compare este com (OKA, 2010, Theorem 43) onde o autor calcula o número de componentes do enlaçamento com a soma de números de componentes de  $L_i$  (somado em  $i$ ) sob a suposição de que todo vértice de  $\Gamma(f)$  são simples, ou seja, os vértices são formados por um único monômio misto.

Outra aplicação do [Teorema 12](#) tem um resultado análogo em ([OKA, 2018](#), Theorem 35) para a classe de polinômios mistos FND e não CO com uma singularidade isolada.

**Corolário 5.** Se a parte principal de Newton de um polinômio misto  $f$  é NDI, tem bordo nice e não é CO, então para cada polinômio misto  $M_1(v, \bar{v})$  e  $M_2(u, \bar{u})$  satisfazendo que o menor expoente na variável  $|v|$  de  $M_1$  e variável  $|u|$  de  $M_2$  é maior que  $d(P_1; f)/p_{1,2}$  e  $d(P_N; f)/p_{N,1}$  respectivamente, temos que  $f + M_1 + M_2$  é uma realização fraca de  $L_f$ .

*Demonstração.* Suponha que  $f$  não é  $v$ -conveniente. Assim,  $L_0 := S^3_p \cap \{u = 0\}$  é uma componente de enlaçamento de  $L_f$ . Tome  $h = f + M_1$ , onde  $M_1$  é uma soma de monômios o quais satisfazem que o expoente em variável  $|v|$  é maior que  $d(P_1; f)/p_{1,2}$ . Então  $\mathcal{P}(h) = \{P_0\} \cup \mathcal{P}(f)$  onde  $k_0 > k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Note que existe  $d > 0$  satisfazendo

$$h_{P_0}(u, \bar{u}, re^{it}, re^{-it}) = r^d(\phi_1(e^{it}, e^{-it})u + \phi_2(e^{it}, e^{-it})\bar{u} + r^{-d}(M_1)_{P_0}(re^{it}, re^{-it})),$$

onde  $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-d}(M_1)_{P_0}(re^{it}, re^{-it}) = 0$ . Por NDI-(i) temos que  $(u = 0, e^{it})$  é um ponto regular de  $\phi_1(e^{it}, e^{-it})u + \phi_2(e^{it}, e^{-it})\bar{u}$  então o enlaçamento associado a  $h_{P_0}$  é isotópico a  $L_0$ . As outras componentes de  $L_h$  são isotópicas aquelas de  $L_f$ , já que a deformação de  $M_1$  vista em cada  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  é acima de  $\Delta(P_i; f)$ . Fazendo o mesmo procedimento se  $f$  não é  $u$ -conveniente então temos que  $f(u, \bar{u}, v, \bar{v}) + M_1(v, \bar{v}) + M_2(u, \bar{u})$  é um polinômio misto CO e realização fraca de  $L_f$ .  $\square$

**Observação 9.** O [Corolário 5](#) fornece uma condição geométrica para tornar um polinômio misto NDI e nice em conveniente (CO).

## REALIZAÇÕES FORTES MISTAS

O estudo de realizações de enlaçamentos tem sido explorado por vários autores (PERRON, 1981/82; RUDOLPH, 1987; PICHON, 2005; BODE, 2022b; B. DENNIS M. R.; P., 2017; DENNIS; BODE, 2017a; BODE; DENNIS, 2019; BODE, 2022a; BODE, 2019) a partir de várias técnicas diferentes. Por exemplo em (PERRON, 1981/82) foi mostrado como encontrar uma realização forte do nó da figura oito explorando uma parametrização de uma curva lemniscata. Esta mesma ideia foi utilizada em (BODE *et al.*, 2017) onde os autores realizaram vários enlaçamentos, como o nó de trevo, enlaçamentos de Hopf, nó da figura oito e os anéis Borromeanos. Em Pichon (PICHON, 2005) foi utilizado o produto  $f \cdot \bar{g}$  onde  $f$  e  $g$  são funções holomorfas para produzir novos exemplos de enlaçamento algébrico reais. Neste trabalho vamos utilizar a ação polar (RUAS; SEADE; VERJOVSKY, 2002) com o intuito de encontrar novas realizações a partir de outras dadas.

### 7.1 Ação polar e produtos mistos

Seja  $M_{v,\mu} = z^v \bar{z}^\mu$  um monômio misto onde  $v = (v_1, v_2)$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  e  $P = (p_1, p_2)$  um vetor de pesos. Definimos o grau polar de  $M_{v,\mu}$ ,  $\text{pdeg}_P M_{v,\mu}$  com respeito a  $P$  por

$$\text{pdeg}_P M_{v,\mu} = \sum_{j=1}^2 p_j (v_j - \mu_j).$$

**Definição 27.** (OKA, 2010) Dizemos que  $f(z, \bar{z}) = \sum_{v,\mu} c_{v,\mu} z^v \bar{z}^\mu$  é um polinômio misto *homogêneo pesado polar* do tipo pesado polar  $(Q; d_p)$  se  $\text{pdeg}_Q z^v \bar{z}^\mu = d_p$  para cada  $(v, \mu)$  com  $c_{v,\mu} \neq 0$ . Se  $f$  é ambos radialmente e polar homogêneo pesado do tipo pesado radial  $(P; d_r)$  e do tipo pesado polar  $(Q; d_p)$  então dizemos que  $f$  é um polinômio misto *homogêneo pesado*.

Se  $d_p \neq 0$  então  $f$  é chamado um polinômio *homogêneo pesado polar não nulo*. Mais ainda, se para um inteiro positivo  $s$ , o produto  $x^s \cdot f(z, \bar{z})$  tem um grau polar não nulo então  $f$  é chamado *homogêneo pesado polar não nulo  $x^s$ -compatível*, onde  $x \in \{u, v, \bar{u}, \bar{v}\}$ .

No caso em que para todo vetor de pesos  $P$  o polinômio misto  $f_P$  seja homogêneo pesado com grau polar não nulo, as duas condições ND e FND coincidem. Em particular, elas coincidem para polinômios holomorfos. Classes de polinômios mistos onde estas duas noções coincidem têm sido estudadas em (BLANLCEIL; OKA, 2015; INABA; KAWASHIMA; OKA, 2018; OKA, 2008; OKA, 2010; OKA, 2015). Uma propriedade bastante conhecida e útil sobre polinômios mistos homogêneos é a seguinte cuja prova pode ser encontrada em (SAITO; TAKASHIMIZU, 2021).

**Lema 7.** (SAITO; TAKASHIMIZU, 2021) Seja  $f$  um polinômio misto homogêneo pesado com vetores de pesos radial  $P$  e polar  $Q$ . Se  $f$  é ND para  $\Delta(P)$  e  $f_{\Delta(P)} = f$  tem grau polar não nulo, então  $f : \mathbb{C}^{*2} \rightarrow \mathbb{C}$  não tem pontos críticos.

**Definição 28.** Um polinômio misto  $f$  é chamado de *homogêneo pesado polar não nulo  $x^s$ -compatível do tipo face* se para cada 1-face  $\Delta$ ,  $f_{\Delta}(z, \bar{z})$  é um polinômio homogêneo pesado polar não nulo  $x^s$ -compatível. Neste caso para abreviar chamaremos simplesmente de  *$x^s$ -compatível polar*.

Assim, já que para cada face  $\Delta$  de um polinômio  $x^s$ -compatível polar a correspondente função face  $f_{\Delta}(z, \bar{z})$  é polar e radialmente homogêneo pesada com graus não-nulos, temos.

**Lema 8.** Seja  $f$  um polinômio misto  $x^s$ -compatível então  $x^s f$  é ND se e somente se  $x^s f$  é FND.

### 7.1.1 Produtos de polinômios mistos

Para um polinômio misto  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  considere o conjunto de 1-faces de  $\Gamma(f)$ ,  $\mathcal{P}(f) = \{P_1, P_2, \dots, P_{N_f}\}$  como em (5.1) e ordenados como em (5.2)

Dado  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  onde  $p$  e  $q$  são polinômios mistos, para todo vetor de pesos  $P$   $f_P = p_P \cdot q_P$  e o conjunto  $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(p) \cup \mathcal{P}(q)$ . Assim, podemos ver que:

1. Se  $P_{N_p} \succ Q_1$  então, as funções face de  $f$  são

$$\begin{aligned} f_P(z, \bar{z}) &= p_P(z, \bar{z}) \cdot q_Q(z, \bar{z}), \text{ para } P \succeq P_{N_p} \text{ e fixo } Q \succ Q_1, \text{ e} \\ f_Q(z, \bar{z}) &= p_P(z, \bar{z}) \cdot q_Q(z, \bar{z}), \text{ para } Q \preceq Q_1 \text{ e fixo } P \prec P_{N_p}. \end{aligned}$$

2. Se  $Q_{N_q} \succ P_1$  então, as funções face de  $f$  são

$$\begin{aligned} f_P(z, \bar{z}) &= p_P(z, \bar{z}) \cdot q_Q(z, \bar{z}), \text{ para } P \preceq P_{N_p} \text{ e fixo } Q \prec Q_1 \text{ e} \\ f_Q(z, \bar{z}) &= p_P(z, \bar{z}) \cdot q_Q(z, \bar{z}), \text{ para } Q \succeq Q_1 \text{ e fixo } P \succ P_{N_p}. \end{aligned}$$

3. Para um natural  $k$ , podemos considerar  $f_k(z, \bar{z}) = p_k(u, v, \bar{v}) \cdot q(z, \bar{z})$  onde  $p_k$  é um polinômio misto  $u$ -semiholomorfo conveniente e radialmente homogêneo pesado do tipo radial  $(2ks + ms, s; d_r)$  definido como

$$p_k(u, v, \bar{v}) = r^{2ks+ms} g\left(\frac{u}{r^{2k+m}}, e^{it}\right), \quad (7.1)$$

onde  $\mathcal{P}(p_k) = \{P_1 = (2ks + ms, s)\}$ . Assim, podemos provar que  $P_1 \succ Q_1$  para um natural  $k$  suficientemente grande e um vetor de pesos fixo  $Q_0 \succ Q_1$  as funções face de  $f_k$  são:

$$\begin{cases} (f_k)_P(z, \bar{z}) = p_k(0, v, \bar{v}) \cdot q_{Q_0}(z, \bar{z}), & P \succ P_1 \\ (f_k)_{P_1}(z, \bar{z}) = p_k(u, v, \bar{v}) \cdot q_{Q_0}(z, \bar{z}), & P = P_1 \\ (f_k)_P(z, \bar{z}) = u^s q_P(z, \bar{z}), & P \prec P_1. \end{cases} \quad (7.2)$$

## 7.2 Construção de realizações fortes de enlaçamentos na 3-esfera.

Seja  $f(u, v, \bar{v}) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio  $u$ -semiholomorfo radialmente homogêneo pesado do tipo  $(p_1, p_2; d_r)$ .

Como vimos em (4.7) um ponto singular de  $f$  é dado por  $(c(r, t), re^{it})$  onde  $c(r, t)$  é um ponto crítico na variável  $u$  de  $f_u$ , isto é,  $f_u(c(r, t), re^{it}) = 0$ , tal que  $s_{3,f}(c(r, t), re^{it}) = 0$ . Pela Decomposição (4.28) em  $f_u$  temos que  $c(r, t) = r^k c(t)$  onde  $(c(t), e^{it})$  é uma raiz de  $g_u$ . Pelo Item-(ii) da Observação 3 se  $g$  tem raízes simples então a menos de uma pequena deformação dos coeficientes podemos supor que  $v(r, t) = f(c(r, t), re^{it})$  é suave e  $v(1, t)$  é um valor crítico de  $g(\bullet, e^{it})$ . Com isto se  $r \neq 0$  então pela Proposição 1 já que  $f$  é radialmente homogêneo pesado

$$s_{3,f}(c(r, t), re^{it}) = 0 \iff \frac{\partial \arg(v(1, t))}{\partial t} = 0.$$

Defina então

$$\sigma(f) := \left\{ m \in \mathbb{Z} : \frac{\partial \arg(v(1, t))}{\partial t} + m \neq 0, t \in [0, 2\pi], \forall v(1, t) \neq 0 \text{ de } f \right\}.$$

Se  $f$  é ND para  $P$  e supondo que  $f_u$  não tem raízes não nulas múltiplas  $(c(r, t), re^{it})$ , isto é,  $c(r, t) \neq 0$ , então

$$s_{3,f}(c(r, t), re^{it}) = 0 \iff 0 \notin \sigma(f).$$

Neste capítulo vamos supor que os polinômios radialmente homogêneos que são ND satisfazem que as raízes não nulas em  $u$ ,  $(c(r, t), re^{it})$  de  $f_u$  são simples.

**Observação 10.** Analogamente, pode-se considerar  $p$  acima como um polinômio  $\bar{u}$ -semiholomorfo em lugar de  $u$ -semiholomorfo. Em tal caso definimos  $\sigma(p, \bar{u}) := -\sigma(\bar{p}, u)$ . Similarmente, quando  $p$  é um polinômio  $v$ -semiholomorfo,  $\bar{v}$ -semiholomorfo, sem raízes múltiplas em  $v$ , respectivamente  $\bar{v}$ , se define  $\sigma(p, v)$ , respectivamente  $\sigma(p, \bar{v})$ .

**Exemplo 9.** Considere o polinômio semiholomorfo dado por  $f_\omega(u, v, \bar{v}) = p_\omega(u, v, \bar{v})(u^2 + v^3)$  onde  $p_\omega$  é uma realização fraca do fecho da trança  $\sigma_1^2$  de 2-fios  $p_\omega(u, v, \bar{v}) = u^2 - 2\omega(v\bar{v})u + \omega^2(v\bar{v})^2 - (v\bar{v})v^2$ . Note que  $f_\omega$  é uma realização forte de  $L_{f_0}$  para todo  $\omega \in \mathbb{C}$ .

A derivada parcial de  $f_\omega$  com respeito à variável  $u$  é dada por

$$(f_\omega)_u(u, v, \bar{v}) = 4u^3 - 6\omega(v\bar{v})u^2 + (2\omega^2(v\bar{v})^2 - 2(v\bar{v})v^2 + 2v^3)u - 2\omega(v\bar{v})v^3.$$

Queremos estudar a condição FNDP-(i) de  $f$ . Note que as funções face de  $f_u$  são:

(1) Para os vértices:

$$(f_u)_{\Delta_1}(u, v, \bar{v}) = -2\omega(v\bar{v})v^3, (f_u)_{\Delta_2}(u, v, \bar{v}) = 2v^3u \text{ e } (f_u)_{\Delta_3}(u, v, \bar{v}) = 4u^3,$$

(2) Para as 1-face:  $(f_u)_{P_1}(u, v, \bar{v}) = 2v^3u - 2\omega(v\bar{v})v^3$  e  $(f_u)_{P_2}(u, v, \bar{v}) = 4u^3 + 2v^3u$ .

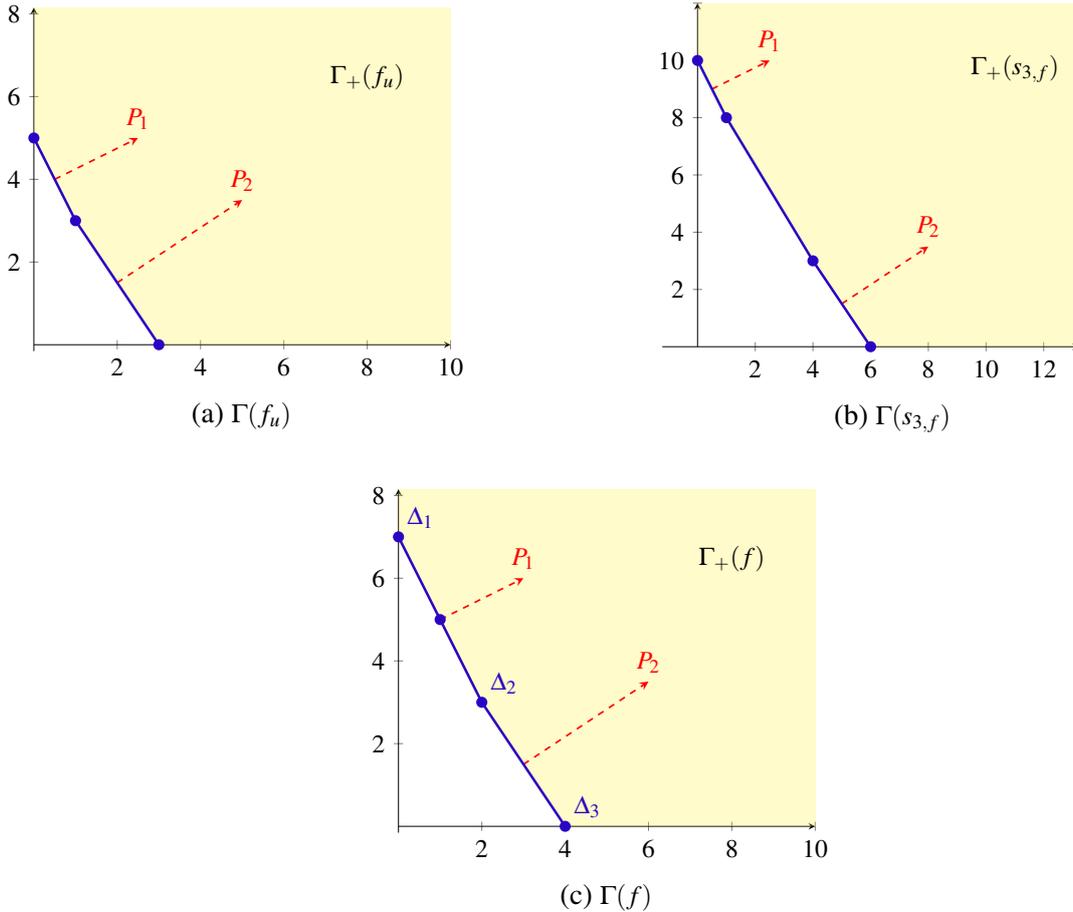


Figura 26 – Bordos de Newton de  $f$ ,  $f_u$  e  $s_{3,f}$

Podemos ver que nos vértices as funções face de  $f_u$  não têm solução em  $\mathbb{C}^{*2}$  então  $f$  satisfaz FNDP-(ii) para os vértices.

Para provar que  $f$  satisfaz FNDP-(ii) para  $P_1$  e  $P_2$ , note que pelo [Lema 2](#) temos  $(s_{3,f})_{P_j} = s_{3,f_{P_j}}$  e  $(f_u)_{P_j} = (f_{P_j})_u$  para  $j = 1, 2$ . Porém, as funções face relativas à  $P_1$  e  $P_2$  são:

$$f_{P_1}(u, v, \bar{v}) = v^3 p_\omega(u, v, \bar{v}) \text{ e } f_{P_2}(u, v, \bar{v}) = u^2(u^2 + v^3).$$

Podemos verificar que  $0 \in \sigma(f_{P_j})$ ,  $j = 1, 2$ , o qual implica que  $(s_{3,f})_{P_j}$  e  $(f_u)_{P_j}$ ,  $j = 1, 2$ , não têm raízes comuns em  $\mathbb{C}^{*2}$ . Portanto,  $f$  é um polinômio misto FNDP. Note que  $f$  também é FNDI.

Seja  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  onde  $q$  é um polinômio misto CO e homogêneo pesado polar não nulo do tipo face. Então, colocando  $z = (Re^{i\varphi}, re^{it})$ , segue que:

$$\begin{cases} q_Q(z, \bar{z}) = c_1 r^{n(q)} e^{n_q i t} & \text{se } Q \succ Q_1 \\ q_Q(z, \bar{z}) = c_2 R^{m(q)} e^{m_q i \varphi} & \text{se } Q \prec Q_N \end{cases}$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ ,  $(m(q), 0)$  e  $(0, n(q))$  são as interseções de  $\Gamma(q)$  com o  $u$ -eixo e  $v$ -eixo, respectivamente,  $n_q$  e  $m_q$  são inteiros não nulos com  $n(q) - |n_q|$  e  $m(q) - |m_q|$  inteiros não negativos pares.

Com as notações anteriores podemos enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 13.** Seja  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto satisfazendo NDI onde para  $x \in \{u, v, \bar{u}, \bar{v}\}$  temos que  $p$  é  $x$ -semi-holomorfa com  $\deg_x p = s$ , e  $q$  é polar  $x^s$ -compatível. Então,

- (i) Se  $x = u$  ou  $\bar{u}$ ,  $n_q \in \cap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P, x)$  e  $P_{N_p} \succ Q_1$ . Então,  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ .
- (ii) Se  $x = v$  ou  $\bar{v}$ ,  $m_q \in \cap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P, x)$  e  $Q_{N_q} \succ P_1$ . Então,  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ .

*Demonstração.* Seja  $x = u$ , pelo [Proposição 13](#) é suficiente provar que  $f$  é FNDI. Na [Subseção 7.1.1](#) vimos que a condição  $P_{N_p} \succ Q_1$  implica que as funções face de  $f$  relativas a um vetor de pesos em  $\mathcal{P}(f)$  são:

$$f_Q(z, \bar{z}) = u^s q_Q(z, \bar{z}) \text{ e } f_P(z, \bar{z}) = c r^{n(q)} e^{n_q i t} p_P(z, \bar{z}) \text{ para } Q \in \mathcal{P}(q) \text{ e } P \in \mathcal{P}(p).$$

Veamos que  $f$  satisfaz FNDI-(ii). Seja  $\Delta$  um vértice não extremo de  $\Gamma(f)$  então  $f$  satisfaz NDI-(ii) para  $\Delta$  por hipótese, assim já que  $f_\Delta$  é um polinômio ND que é homogêneo pesado polar não nulo ou semi-holomorfo temos em ambos casos que isto implica que  $f$  satisfaz FNDI-(ii) para  $\Delta$ . Para as 1-faces temos que  $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(p) \cup \mathcal{P}(q)$  assim para as funções face  $f_Q$ ,  $Q \in \mathcal{P}(q)$ ,  $f_Q(z, \bar{z}) = u^s q_Q(z, \bar{z})$  é polinômio homogêneo pesado polar não nulo. Assim, já que  $q$  é ND então  $f$  satisfaz FNDI-(ii) para  $Q$ , e para funções face com  $P \in \mathcal{P}(p)$ , já que  $f$  é ND para  $P$  então  $f_P(z, \bar{z}) = c_1 r^{n(q)} e^{n_q i t} p_P(z, \bar{z})$  não tem pontos críticos em  $\mathbb{C}^{*2}$  se e somente se para  $z = (c(r, t), re^{it})$ ,  $\bar{z} = (0, re^{-it})$

$$\frac{\partial \arg(f_P(z, \bar{z}))}{\partial t} = n_q + \frac{\partial \arg(v(r, t))}{\partial t} \neq 0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad r > 0, \quad (7.3)$$

onde  $c(r, t) \neq 0$  e  $v(r, t) = p_P(c(r, t), re^{it}, re^{-it}) \neq 0$  são respectivamente, as raízes críticas não nulas e valores críticos não nulos associados a  $p_P(z, \bar{z})$ . Agora a [Condição \(7.3\)](#) segue de  $n_q \in \sigma(p_P(z, \bar{z}), u)$  assim  $f$  satisfaz FNDI-(ii) para  $P$ .

A condição FNDI-(i) para  $f_{P_1}$  segue provando [\(7.3\)](#) diretamente de NDI-(i) para  $f_{P_1}$  e  $n_q \in \sigma(p_{P_1}, x)$  e FNDI-(i) para  $f_{Q_N}$  segue de NDI-(i) para  $f_{Q_N}$  e o fato que  $q$  é polar  $x^s$ -compatível.

O caso  $x = \bar{u}$  segue no mesmo caminho como  $x = u$ .

O caso  $x \in \{v, \bar{v}\}$  segue analogamente por considerar a função face de  $f$  como  $f_Q(z, \bar{z}) = v^s q_Q(z, \bar{z})$  e  $f_P(z, \bar{z}) = c R^{m(q)} e^{m_q i \varphi} p_P(z, \bar{z})$ . □

Seja  $f = p \cdot \bar{q}$ , onde  $p$  e  $q$  polinômios holomorfos satisfazendo ND e CO sem fatores em comum, então podemos aplicar nosso Teorema 13 para concluir que  $f$  é uma realização forte do enlaçamento  $L_f$ . Por tal motivo podemos pensar o Teorema 13 como uma possível generalização da família de realizações fortes em (PICHON, 2005).

**Exemplo 10.** Seguindo o Exemplo 5 e considerando a parametrização de Fourier  $(F_C(t), G_C(t)) = (a \cos(t), b \sin(2t))$  de  $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ , onde  $a, b$  são números reais positivos, temos que uma realização forte do nó da figura oito é dado por

$$p_k(u, v, \bar{v}) = u^3 - \frac{3}{4}(v \cdot \bar{v})^k u \left( b^2 - a^2 - ab \left( \frac{v^2}{v \cdot \bar{v}} - \frac{\bar{v}^2}{v \cdot \bar{v}} \right) \right) - \frac{1}{8}(v \cdot \bar{v})^{3k} \cdot \left( a^3 \left( \frac{v^2}{v \cdot \bar{v}} + \frac{\bar{v}^2}{v \cdot \bar{v}} \right) + b^3 \left( \frac{v^4}{(v \cdot \bar{v})^2} - \frac{\bar{v}^4}{(v \cdot \bar{v})^2} \right) + 3ab^2 \left( \frac{v^2}{v \cdot \bar{v}} + \frac{\bar{v}^2}{v \cdot \bar{v}} \right) \right).$$

Para  $k$  grande e  $a \neq b$  temos  $P_1 \succ Q_1$ ,  $P_1 \in \mathcal{P}(p)$  e  $Q_1 \in \mathcal{P}(q)$ , onde  $q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ .

Se  $q$  é semiholomorfo e conveniente polar  $u^3$ -compatível satisfazendo  $n_q \in \sigma(p)$  então pelo Teorema 13 o polinômio misto  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma realização forte de  $L_f$ . Em particular,  $q(u, v) = u^2 + v^n$  com  $n$  suficientemente grande satisfaz esta condição.

Note que  $f$  é um polinômio que não é ND e assim  $f$  não é FND. De fato, tome  $P \succ P_1$  então a função face  $f_P(z, \bar{z}) = f_P(v, \bar{v})$  se anula num ponto  $re^{it_*}$ , com  $t_*$  sendo uma altura onde os fios do nó da figura oito parametrizados por  $(F_C(2t), G_C(2t))$  intersecta a  $\{u = 0\} \times S^1$ . Pelo Item-(ii) da Proposição 2 segue que  $(u, re^{it_*}) \in \Sigma_{f_P} \cap V_{f_P}$ . Portanto  $f$  não é ND.

**Teorema 14.** Seja  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto que satisfaz NDI, onde  $p$  é um polinômio  $x$ -semiholomorfo mônico com  $\deg_x p = s_p$ , onde  $x \in \{u, \bar{u}\}$  e  $q$  um polinômio  $y$ -semiholomorfo mônico com  $\deg_y q = s_q$ , onde  $y \in \{v, \bar{v}\}$ . Se  $s_q \in \cap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P(z, \bar{z}), x)$  e  $s_p \in \cap_{Q \in \mathcal{P}(q)} \sigma(q_Q(z, \bar{z}), y)$  e  $P_{N_p} \succ Q_1$ , então  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ .

*Demonstração.* Pela condição  $P_{N_p} \succ Q_1$  temos que as funções face de  $f$  são:

$$f_Q(z, \bar{z}) = x^{s_p} q_Q(z, \bar{z}) \text{ e } f_P(z, \bar{z}) = y^{s_q} p_P(z, \bar{z}), \text{ para } Q \in \mathcal{P}(q) \text{ e } P \in \mathcal{P}(p).$$

Então, considerando  $s_q \in \cap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P, x)$  e  $s_p \in \cap_{Q \in \mathcal{P}(q)} \sigma(q_Q, y)$ , o resultado segue por adaptar a prova do Teorema 13 para este caso.  $\square$

Tome  $p = f_{1,k_1} f_{2,k_2}$ , onde  $f_{j,k_j}$ ,  $j = 1, 2$  são polinômios  $x$ -semiholomorfos CO e radialmente homogêneos pesados definida como (7.1), de tipo radial  $(2k_j s_j + m_j s_j, s_j; d_j)$  com  $\deg_x f_{j,k_j} = s_j$  e  $x \in \{u, \bar{u}\}$ . Note que  $p$  é um polinômio  $x$ -semiholomorfo e  $\deg_x p = s_1 s_2 = s$ . Escolhendo  $k'_j$ s suficientemente grandes podemos considerar  $(2k_1 s_1 + m_1 s_1, s_1) \succ (2k_2 s_2 + m_2 s_2, s_2) \succ Q$ , para qualquer vetor de pesos positivo  $Q$ .

**Corolário 6.** Seja  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  polinômio misto que satisfaz NDI, onde  $p$  é um produto de polinômios  $x$ -semiholomorfos radialmente homogêneos pesados definidos anteriormente, onde  $x \in \{u, \bar{u}, v, \bar{v}\}$  e  $q$  um polinômio misto polar  $x^s$ -compatível. Temos que:

- (i) Se  $x = u$  ou  $\bar{u}$ ,  $n_q \in \cap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P, x)$ , então para inteiros suficientemente grandes  $k_j$ s o polinômio misto  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ .
- (ii) Se  $x = v$  ou  $\bar{v}$ ,  $m_q \in \cap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P, x)$ , então para inteiros suficientemente grandes  $k_j$ s o polinômio misto  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ .

*Demonstração.* (i) Considere  $x = u$ . Já que  $p$  é um produto de polinômios  $x$ -semiholomorfos e radialmente homogêneos pesados  $p_{j,k_j}$ ,  $j = 1, 2$  de tipo radial  $(2k_j s_j + m_j s_j, s_j; d_j)$ , temos que uma sequência de vetores de pesos  $P(p)$  e  $P_{\ell_p-1} = (2k_2 s_2 + m_2 s_2, s_2)$ . Note que podemos escolher  $k_j$ s tal que a sequência de vetores de pesos  $Q(q)$  satisfaz  $P_{\ell_p-1} \succ Q_2$ . Então, por (i) em [Teorema 13](#) o resultado segue. O caso  $x = \bar{u}$  segue no mesmo caminho.

(ii) O caso  $x \in \{v, \bar{v}\}$  segue analogamente aplicando (ii) em [Teorema 13](#), considerando o tipo radial de  $p_{j,k_j}$  sendo  $(s_j, 2k_j s_j + m_j s_j; d_j)$  para inteiros suficientemente grandes  $k_j$ s,  $Q_{\ell_q-1} \succ P_2 = (s_1, 2k_1 s_1 + m_1 s_1)$ .

□

**Observação 11.** (i) O resultado anterior pode ser generalizado para uma família do tipo  $p = f_{1,k_1} f_{2,k_2} \dots f_{l,k_l}$  fazendo modificações apropriadas.

- (ii) Se consideramos o polinômio  $p_k$  como (4.27) associado a uma trança quadrada, o qual é  $u$ -semiholomorfo CO e radialmente homogêneo pesado do tipo radial  $(2ks + ms, s; d_r)$ , com  $\deg_u p_{k,\omega} = s$ , então o polinômio dado por

$$p_{k,\omega}(u, v, \bar{v}) := r^{2ks+ms} g \left( \frac{u}{r^{2k+m}} + \omega, e^{it} \right)$$

é também uma realização fraca do fecho de uma trança quadrada. Podemos provar também que existe um número complexo  $\omega$  tal que

$$\frac{\partial \arg(p_{k,\omega}(0, v, 0, \bar{v}))}{\partial t} \in (-1, 1).$$

Portanto,  $\cap_{P \in N^+} \sigma((p_{k,\omega})_P) = \sigma(p_{k,\omega}) \setminus \{0\}$ . Mais ainda,  $p_{k,\omega}(z, \bar{z})$  é ND.

Com estas notações e definições podemos provar o seguinte resultado:

**Corolário 7.** Seja  $p_{k,\omega}$  como acima e  $q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto polar  $u^s$ -compatível ND e CO. Se  $n_q \in \sigma(p_{k,\omega})$  então existem um inteiro  $k$  tal que  $f_{k,\omega} = p_{k,\omega} \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é FNDI. Mais ainda, para  $|\omega| \gg 1$ ,  $f_{k,\omega}$  é um polinômio misto FND.

*Demonstração.* Tomando  $k > 0$  grande suficiente podemos considerar  $P_1 \succ Q_1$ . Pelo [Teorema 13](#) segue que  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ . Mais ainda se  $\omega$  é grande suficiente pelo Item-(ii) em [Observação 11](#), podemos ver que  $f$  é FND para todo  $P \succ P_1$ , então  $f$  é FND. □

**Observação 12.** (i) Tomando  $p_{k,\omega}$  na realização do nó da figura oito no [Exemplo 10](#). Pelo Item-(ii) na [Observação 11](#) podemos escolher  $\omega$  suficientemente grande de tal forma que o problema de não ter ND para o vértice extremo se remova. Fazendo assim que  $f_\omega = p_{k,\omega} \cdot q$  nas hipóteses do [Exemplo 10](#) seja FND.

(ii) Note que  $p_{k,\omega}$  é um polinômio misto para todo  $\omega \in \mathbb{C}$  só no caso onde este é construído como (4.27) associado a uma trança quadrada. Assim este truque de adicionar  $\omega$  não funciona no geral para polinômios semiholomorfos e radialmente homogêneos pesados. Consequentemente, a família de polinômios que satisfazem FNDI é uma família consideravelmente maior daquela que satisfaz FND.

**Exemplo 11.** Considere  $q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dado por  $q(z, \bar{z}) = u^2 + v^n$ , onde  $L_q$  é o fecho da trança de 2 fios  $B_2 = \sigma_1^n$ , e  $p_k$  uma realização fraca como em (4.27) do fecho de  $B_1 = B^2 = (\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2)^2$ <sup>1</sup>, e  $g$  em (4.27) é construída a partir da parametrização  $(F_B(t), G_B(t))$  e é dada por

$$g(u, e^{it}) = \prod_{j=1}^3 \left( u - \left( F_B \left( \frac{t+2\pi j}{3} \right) + i \left( G_B \left( \frac{t+2\pi j}{3} \right) \right) \right) \right)^2.$$

Assim a função  $u$ -semiholomorfa associada ao quadrado  $B_1$  é:

$$\begin{aligned} g(u, e^{2it}) = & u^3 + \frac{1}{64} u \left( -15 + 12e^{-2it} - 36e^{2it} + 66e^{-4it} - 66e^{4it} + 36e^{-6it} - 36e^{6it} \right) \\ & + \frac{1}{512} \left( 748e^{-2it} - 4e^{2it} + 460e^{-4it} + 52e^{4it} + 102e^{-6it} + 186e^{6it} + 384 \right. \\ & \left. + 44e^{-8it} + 172e^{8it} + 27e^{-10it} + 27e^{10it} \right). \end{aligned}$$

Então para o polinômio misto  $p_k$  temos que  $\sigma(p_k) = \mathbb{Z} \setminus \{\mathbb{Z} \cap (-24, 4)\}$ . Tome  $f_{k,n}(z, \bar{z}) = p_k(z, \bar{z}) \cdot (u^2 + v^n)$ , vemos que existe  $\omega$  tal que  $(f_{k,n})_u(0, v, \bar{v}) \neq 0$ , para todo  $v \in \mathbb{C}^*$ . Portanto pelo [Corolário 7](#) concluímos que para  $n > 3$  e um inteiro grande  $k$ , o polinômio misto  $f_{k,n}(z, \bar{z})$  é uma realização forte de  $L_{f_{k,n}}$ .

Por exemplo, para  $n = 5$  a [Figura 27](#) representa a trança aninhada de 5-fios  $B(B_1, B_2)$  que fecha no enlaçamento isotópico a  $L_{f_{k,5}}$ .

<sup>1</sup> Quadrado do nó  $5_2$  ([Figura 18-\(b\)](#)) construído como em ([BODE, 2019](#); [DENNIS; BODE, 2017a](#)).

<sup>2</sup> O exemplo de  $g$  em ([DENNIS; BODE, 2017b](#)) associado a trança  $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2$  é dado por  $(F_B(-t), G_B(-t))$ . Contudo, o tipo do fecho da trança não muda por esta variação, somente mudando a leitura da trança.

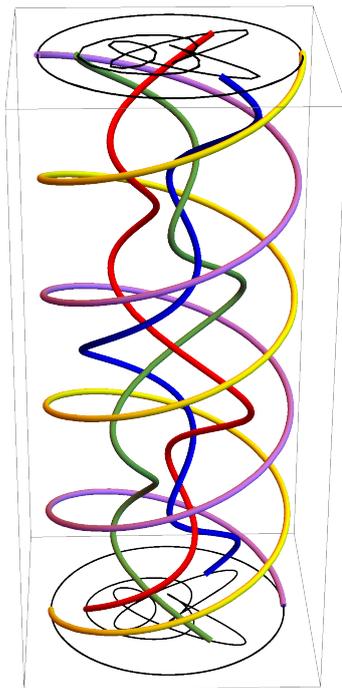


Figura 27 – Representação de  $L_{f_{k,5,5}}$  com  $(u, t) \in \mathbb{C} \times [0, 2\pi]$  quando  $v = r_0 e^{it}$  e  $r_0 \ll 1$

Um argumento análogo pode ser feito para  $h_{k,n}(z, \bar{z}) = p_k(z, \bar{z}) \cdot (\bar{u}^5 + \bar{v}^n)$ . Então para  $k$  grande suficiente e  $n > 25$ . O polinômio misto  $h_{k,n}(z, \bar{z})$  é uma realização forte de  $L_{k,n}$ .

Seja  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um polinômio misto com  $p$  um polinômio  $u$ -semiholomorfo NDI e  $q$  um polinômio holomorfo ND e CO. Suponha que  $P_{N_p} \succ Q_1$  onde  $P_{N_p} \in \mathcal{P}(p)$  e  $Q_1 \in \mathcal{P}(q)$ .

**Corolário 8.** Seja  $f = p \cdot q : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  como acima. Se  $n_q \in \bigcap_{P \in \mathcal{P}(p)} \sigma(p_P)$  então  $f$  é uma realização forte de  $L_f$ .

*Demonstração.* Segue diretamente do Teorema 13 uma vez que os polinômios holomorfos são polar  $u^s$ -compatíveis para todo  $s$ . □



## REFERÊNCIAS

---

- A'CAMPO, N. Le nombre de Lefschetz d'une monodromie. **Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 76 = Indag. Math.**, v. 35, p. 113–118, 1973. Citado na página 55.
- AKBULUT, S.; KING, H. All knots are algebraic. **Comment. Math. Helv.**, v. 56, n. 3, p. 339–351, 1981. Citado nas páginas 25 e 53.
- ALEXANDER, J. A lemma on a system of knotted curves. **Proc. Nat. Acad. Sci. USA**, v. 9, p. 93–95., 1923. Citado nas páginas 26 e 37.
- ARAÚJO DOS SANTOS, R. N. Equivalence of real Milnor fibrations for quasi-homogeneous singularities. **Rocky Mountain J. Math.**, v. 42, n. 2, p. 439–449, 2012. Citado na página 63.
- ARAÚJO DOS SANTOS, R. N.; BODE, B.; SANCHEZ QUICENO, E. L. **Links of singularities of inner non-degenerate mixed functions**. [S.l.]: arXiv.2208.11655, 2022. Citado nas páginas 26, 73 e 97.
- ARAÚJO DOS SANTOS, R. N.; CHEN, Y.; TIBĂR, M. Singular open book structures from real mappings. **Cent. Eur. J. Math.**, v. 11, n. 5, p. 817–828, 2013. Citado na página 56.
- ARAÚJO DOS SANTOS, R. N.; SAEKI, O.; SOUZA, T. O. Algebraic knots associated with Milnor fibrations. **J. Singul.**, v. 25, p. 30–53, 2022. Citado na página 24.
- ARAÚJO DOS SANTOS, R. N.; SANCHEZ QUICENO, E. L. **On real algebraic links in the 3-sphere associated with mixed polynomials**. [S.l.]: arXiv:2011.11206, 2020. Citado na página 26.
- ARAÚJO DOS SANTOS, R. N.; TIBĂR, M. Real map germs and higher open book structures. **Geom. Dedicata**, v. 147, p. 177–185, 2010. Citado na página 88.
- ARTIN, E. Theorie der Zöpfe. **Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg**, v. 4, n. 1, p. 47–72, 1925. Citado nas páginas 30 e 32.
- B. DENNIS M. R., F. D. B.; P., K. R. Knotted fields and explicit fibrations for lemniscate knots. **Proc. R. Soc. A.**, 2017. Citado na página 109.
- BELL, M. **The monodromies of homogeneous links**. [S.l.]: arXiv:1207.0161, 2012. Citado na página 49.
- BENEDETTI, R.; SHIOTA, M. On real algebraic links in  $S^3$ . **Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)**, v. 1, n. 3, p. 585–609, 1998. Citado nas páginas 25 e 53.
- BIRMAN, J. S. **Braids, links, and mapping class groups**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. ix+228 p. (Annals of Mathematics Studies, No. 82). Citado nas páginas 32 e 49.
- BLANLŒIL, V.; OKA, M. Topology of strongly polar weighted homogeneous links. **SUT J. Math.**, v. 51, n. 1, p. 119–128, 2015. Citado na página 110.

- BLANLÈIL, V.; SAEKI, O. Cobordism of algebraic knots defined by Brieskorn polynomials. **Tokyo J. Math.**, v. 34, n. 2, p. 429–443, 2011. Citado na página 24.
- BOCHNAK, J.; COSTE, M.; ROY, M.-F. **Real algebraic geometry**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1998. v. 36. x+430 p. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], v. 36). Translated from the 1987 French original, Revised by the authors. ISBN 3-540-64663-9. Citado na página 47.
- BODE, B. **Knotted fields and real algebraic links**. Tese (Doutorado) — School of Physics, University of Bristol, 2018. Citado nas páginas 37, 62, 63 e 84.
- BODE, B. Constructing links of isolated singularities of polynomials  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . **J. Knot Theory Ramifications**, v. 28, n. 1, p. 1950009, 21, 2019. Citado nas páginas 25, 50, 65, 69, 109 e 116.
- \_\_\_\_\_. Twisting and satellite operations on p-fibered braids. **Communications in Analysis and Geometry**, 2021. Citado nas páginas 50 e 60.
- \_\_\_\_\_. **All links are semiholomorphic**. [S.l.]: arXiv:2211.12329, 2022. Citado nas páginas 25, 27, 39, 42, 58 e 109.
- \_\_\_\_\_. **Closures of T-homogeneous braids are real algebraic**. [S.l.]: arXiv:2211.15394, 2022. Citado na página 109.
- BODE, B.; DENNIS, M. R. Constructing a polynomial whose nodal set is any prescribed knot or link. **J. Knot Theory Ramifications**, v. 28, n. 1, p. 1850082, 31, 2019. Citado nas páginas 25, 26, 37, 39, 60, 61, 65 e 109.
- BODE, B.; DENNIS, M. R.; FOSTER, D.; KING, R. P. Knotted fields and explicit fibrations for lemniscate knots. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 473, n. 2202, p. 20160829, 2017. Citado nas páginas 37, 39 e 109.
- BODE, B.; SANCHEZ QUICENO, E. L. **Inner and Partial non-degeneracy of mixed functions**. [S.l.]: arXiv:2306.02905, 2023. Citado nas páginas 26 e 73.
- BOILEAU, M.; OREVKOV, S. Quasi-positivité d'une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe. **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.**, v. 332, n. 9, p. 825–830, 2001. Citado na página 62.
- BRIESKORN, E.; KNÖRRER, H. Local investigations. In: \_\_\_\_\_. **Plane Algebraic Curves**. Basel: Birkhäuser Basel, 1986. p. 325–575. Citado nas páginas 25, 52 e 53.
- CHEN, Y. Milnor fibration at infinity for mixed polynomials. **Cent. Eur. J. Math.**, v. 12, n. 1, p. 28–38, 2014. Citado nas páginas 55, 56 e 95.
- CISNEROS-MOLINA, J. L. Join theorem for polar weighted homogeneous singularities. In: **Singularities II**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, (Contemp. Math., v. 475). p. 43–59. Citado na página 55.
- DENNIS, M. R.; BODE, B. Constructing a polynomial whose nodal set is the three-twist knot  $5_2$ . **J. Phys. A**, v. 50, n. 26, p. 265204, 18, 2017. Citado nas páginas 37, 39, 109 e 116.
- \_\_\_\_\_. Constructing a polynomial whose nodal set is the three-twist knot  $5_2$ . **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 50, n. 26, p. 265204, jun 2017. Citado nas páginas 39, 45 e 116.

- DENNIS, M. R.; KING, R. P.; JACK, B.; O'HOLLERAN, K.; PADGETT, M. J. Isolated optical vortex knots. **Nature Physics**, v. 6, n. 2, p. 118–121, 2010. Citado nas páginas 37 e 39.
- EISENBUD, D.; NEUMANN, W. **Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985. v. 110. vii+173 p. (Annals of Mathematics Studies, v. 110). Citado na página 53.
- EYRAL, C.; OKA, M. Whitney regularity and Thom condition for families of non-isolated mixed singularities. **J. Math. Soc. Japan**, v. 70, n. 4, p. 1305–1336, 2018. Citado na página 85.
- FUKUI, T.; YOSHINAGA, E. The modified analytic trivialization of family of real analytic functions. **Invent. Math.**, v. 82, n. 3, p. 467–477, 1985. Citado na página 28.
- HIRSCH, M. W. Isotopy. In: \_\_\_\_\_. **Differential Topology**. New York, NY: Springer New York, 1976. p. 177–187. Citado na página 30.
- INABA, K.; KAWASHIMA, M.; OKA, M. Topology of mixed hypersurfaces of cyclic type. **J. Math. Soc. Japan**, v. 70, n. 1, p. 387–402, 2018. Citado na página 110.
- KASSEL, C.; TURAEV, V. **Braid groups**. New York: Springer-Verlag, 2008. Citado nas páginas 30 e 32.
- KAWAUCHI, A. **A survey of knot theory**. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. xxii+420 p. Translated and revised from the 1990 Japanese original by the author. Citado na página 30.
- KING, H. C. Topological type of isolated critical points. **Ann. of Math. (2)**, v. 107, n. 2, p. 385–397, 1978. Citado nas páginas 23 e 28.
- KOUCHNIRENKO, A. G. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. **Invent. Math.**, v. 32, n. 1, p. 1–31, 1976. Citado na página 73.
- LOOIJENGA, E. A note on polynomial isolated singularities. **Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74=Indag. Math.**, v. 33, p. 418–421, 1971. Citado nas páginas 25, 26, 47 e 54.
- MILNOR, J. **Singular points of complex hypersurfaces**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968. iii+122 p. (Annals of Mathematics Studies, No. 61). Citado nas páginas 23, 26, 47, 48 e 51.
- MONDAL, P. **How many zeroes? Counting Solutions of Systems of Polynomials via Toric Geometry at Infinity**. Cham: Springer, 2021. Citado na página 73.
- OKA, M. Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces. **Kodai Math. J.**, v. 31, n. 2, p. 163–182, 2008. ISSN 0386-5991. Citado nas páginas 55, 56 e 110.
- \_\_\_\_\_. Non-degenerate mixed functions. **Kodai Math. J.**, v. 33, n. 1, p. 1–62, 2010. Citado nas páginas 26, 27, 28, 55, 56, 58, 73, 74, 76, 84, 85, 91, 104, 107, 109 e 110.
- \_\_\_\_\_. On mixed Brieskorn variety. In: **Topology of algebraic varieties and singularities**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, (Contemp. Math., v. 538). p. 389–399. Citado nas páginas 55 e 84.
- \_\_\_\_\_. Mixed functions of strongly polar weighted homogeneous face type. In: **Singularities in geometry and topology 2011**. [S.l.]: Math. Soc. Japan, Tokyo, 2015, (Adv. Stud. Pure Math., v. 66). p. 173–202. Citado na página 110.

- \_\_\_\_\_. Łojasiewicz exponents of non-degenerate holomorphic and mixed functions. **Kodai Mathematical Journal**, Tokyo Institute of Technology, Department of Mathematics, v. 41, n. 3, p. 620–651, 2018. Citado na página 108.
- PERRON, B. Le nœud “huit” est algébrique réel. **Invent. Math.**, v. 65, n. 3, p. 441–451, 1981/82. Citado nas páginas 26, 55 e 109.
- \_\_\_\_\_. Conjugaison topologique des germes de fonctions holomorphes à singularité isolée en dimension trois. **Invent. Math.**, v. 82, n. 1, p. 27–35, 1985. Citado na página 23.
- PICHON, A. Real analytic germs  $f\bar{g}$  and open-book decompositions of the 3-sphere. **Internat. J. Math.**, v. 16, n. 1, p. 1–12, 2005. Citado nas páginas 26, 28, 55, 109 e 114.
- PICHON, A.; SEADE, J. Real singularities and open-book decompositions of the 3-sphere. **Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)**, v. 12, n. 2, p. 245–265, 2003. Citado na página 55.
- \_\_\_\_\_. Fibred multilinks and singularities  $f\bar{g}$ . **Math. Ann.**, v. 342, n. 3, p. 487–514, 2008. Citado na página 55.
- RIBEIRO, M. F. **Singular Milnor fibrations**. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, University of São Paulo, 2018. Citado nas páginas 56 e 95.
- ROLFSEN, D. **Knots and links**. [S.l.]: Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. v. 7. xiv+439 p. (Mathematics Lecture Series, v. 7). Corrected reprint of the 1976 original. Citado nas páginas 30, 49 e 52.
- RUAS, M. A. S.; SEADE, J.; VERJOVSKY, A. On real singularities with a Milnor fibration. In: **Trends in singularities**. [S.l.]: Birkhäuser, Basel, 2002, (Trends Math.). p. 191–213. Citado nas páginas 55 e 109.
- RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. Third. [S.l.]: McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976. x+342 p. (International Series in Pure and Applied Mathematics). Citado na página 38.
- RUDOLPH, L. Algebraic functions and closed braids. **Topology**, v. 22, n. 2, p. 191–202, 1983. Citado na página 62.
- \_\_\_\_\_. Isolated critical points of mappings from  $R^4$  to  $R^2$  and a natural splitting of the Milnor number of a classical fibered link. I. Basic theory; examples. **Comment. Math. Helv.**, v. 62, n. 4, p. 630–645, 1987. Citado nas páginas 26, 55, 57 e 109.
- SAEKI, O. Knotted homology spheres defined by weighted homogeneous polynomials. **J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.**, v. 34, n. 1, p. 43–50, 1987. Citado na página 24.
- \_\_\_\_\_. Topological types of complex isolated hypersurface singularities. **Kodai Math. J.**, v. 12, n. 1, p. 23–29, 1989. Citado na página 23.
- SAITO, S.; TAKASHIMIZU, K. **A note on Newton non-degeneracy of mixed weighted homogeneous polynomials**. [S.l.]: arXiv:2107.08691, 2021. Citado na página 110.
- SEADE, J. Fibred links and a construction of real singularities via complex geometry. **Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)**, v. 27, n. 2, p. 199–215, 1996. Citado na página 55.

\_\_\_\_\_. Open book decompositions associated to holomorphic vector fields. **Bol. Soc. Mat. Mexicana** (3), v. 3, n. 2, p. 323–335, 1997. Citado na página 55.

STALLINGS, J. On fibering certain 3-manifolds. In: **Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)**. [S.l.]: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962. p. 95–100. Citado na página 49.

STALLINGS, J. R. Constructions of fibred knots and links. In: **Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2**. [S.l.]: Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978. (Proc. Sympos. Pure Math., XXXII), p. 55–60. Citado nas páginas 25 e 49.

WALL, C. T. C. Newton polytopes and non-degeneracy. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)**, v. 509, p. 1–19, 1999. Citado na página 73.

YOSHINAGA, E.; SUZUKI, M. On the topological types of singularities of Brieskorn-Pham type. **Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I**, n. 25, p. 37–43, 1978. Citado na página 24.

