

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Algumas subvariedades em espaços produto warped

Verônica Santana Reis

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Verônica Santana Reis

Algumas subvariedades em espaços produto warped

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fernando Manfio

USP – São Carlos
Agosto de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S232a Santana Reis, Verônica
Algumas subvariedades em espaços produto warped /
Verônica Santana Reis; orientador Fernando Manfio. --
São Carlos, 2023.
67 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. . I. Manfio, Fernando, orient. II. Título.

Verônica Santana Reis

Submanifolds into warped product spaces

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fernando Manfio

USP – São Carlos
August 2023

A minha mãe Deusa

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me conceder saúde e me amparar nos momentos mais difíceis.

Ao Fernando Manfio pela orientação feita com paciência e disponibilidade de horários para as reuniões. Bem como para corrigir o trabalho.

Aos membros da banca examinadora por terem aceitado o convite.

Ao pessoal da secretaria do ICMC e os professores por toda assistência durante estes anos.

Aos amigos que fiz no doutorado em especial a Amanda Vitória, Amanda Monteiro, Castelo, Denilson, Estela, Igor, Raphael, Raquel, Reji e Tiago.

Á minha família pelo apoio incondicional nos momentos que mais precisei em especial Deusa, Douglas(in memoriam), Lais e Roberto. A meu cunhado Joao Carlos. E as minhas primas Ani, Aldenoura, Daniela e Danília. As minhas tias que me apoiaram incondicionalmente.

Aos professores Ronaldo Lima e Feliciano pelas valiosas discussões que os permitiram fazer o capítulo tres e quatro respectivamente.

A professora Débora Lopes pelas palavras de incentivo para terminar este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

*“Mesmo quando tudo pede um pouco mais de calma
Até quando o corpo pedi um pouco mais de alma
A vida não para
Enquanto o tempo acelera e pedi pressa.
Eu me recuso faço hora vou na valsa.
A vida é tão rara”
(Trecho da música paciência de Lenine)*

RESUMO

REIS, V. S. **Algumas subvariedades em espaços produto warped**. 2023. 67 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho estudamos duas classes de subvariedades no espaço produto warped $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, onde $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ denota o espaço de forma de curvatura seccional constante e igual a ε . Inicialmente, definimos hipersuperfícies do tipo helicoides em $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, obtendo exemplos explícitos de tais hipersuperfícies. Além disso, estudamos as propriedades fundamentais que são preservadas pelos helicoides e obtemos caracterizações e resultados de classificação local para tais hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Estudamos também superfícies com curvatura média paralela na conexão normal em $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Obtemos um teorema de redução de codimensão neste ambiente e, como aplicação, obtemos um teorema do tipo Alencar-do Carmo-Tribuzy para superfícies em $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ com curvatura média paralela.

Palavras-chave: Espaço produto warped, hipersuperfícies helicoidais, superfícies de curvatura média paralela..

ABSTRACT

REIS, V. S. **Submanifolds into warped product spaces**. 2023. 67 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work we study two class of submanifolds in the warped product space $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, where $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ denotes the space form with constant sectional curvature ε . We define helicoidal hypersurfaces into $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ and we obtain some explicit examples of such hypersurfaces. Moreover, we study the fundamental properties of the helicoids and we got characterizations and local results of classification for such hypersurfaces. On the second class, we study surfaces with parallel mean curvature in the normal connection of $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. We obtain a theorem of reduction of codimension for this ambient space and, as application, we got a version of Alencar-do Carmo-Tribuzy's theorem for surfaces into $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ with parallel mean curvature.

Keywords: Warped product space, helicoidal hypersurfaces, surfaces with parallel mean curvature.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espaço warped folheado pelas fibras e pelas folhas	24
Figura 2 – Helicoide de $(0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$, plotagem da aplicação 3.13 para $a = 1$	38
Figura 3 – Plotando a aplicação 3.14, para $a = 1$	39
Figura 4 – Helicoide do modelo do semi-espço superior $a = 10$	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PRELIMINARES	21
2.1	Imersões isométricas	21
2.1.1	<i>Equações fundamentais</i>	21
2.2	Variedades produto warped	24
2.2.1	<i>Propriedades do produto warped</i>	25
2.2.2	<i>Hipersuperfícies em espaço warped</i>	26
2.3	Um Teorema fundamental para subvariedades no produto warped $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_c^n$	27
3	HELICOIDES NO PRODUTO WARPED	31
3.1	Lemas básicos	31
3.2	Helicoides em $I \times_{\rho} M^n$	34
3.3	Helicoide horizontal como gráfico	41
3.4	Hipersuperfície com uma direção especial	45
4	SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA PARALELA NO PRO- DUTO WARPED $I \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$	51
4.1	Fatos básicos	52
4.2	Subvariedades com fibrado normal flat	53
4.3	Redução de codimensão de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$	54
4.4	Aplicações	58
4.4.1	<i>Um teorema do tipo Alencar–do Carmo–Tribuzy</i>	58
4.4.2	<i>Resultado de semi espaço via redução de codimensão</i>	63
	REFERÊNCIAS	65

INTRODUÇÃO

A teoria de subvariedades manifestou-se com uma consequência do estudo de curvas e superfícies do espaço euclidiano com os métodos do cálculo diferencial. Foi estudada há muitos anos em (SPIVAK, 1979). Um teorema fundamental devido a Nash (NASH, 1956) afirma que toda variedade Riemanniana pode ser isometricamente imerso no espaço euclidiano para alguns suficientemente grandes codimensão. Melhorias no resultado de Nash foram dadas por Gromov–Rokhlin (GROMOV; ROKHLIN, 1970) e por Gromov (GROMOV, 2013). Para uma discussão completa do assunto, nos referimos a Han–Hong (HAN; HONG, 2006).

Trabalhos mais recentes também traz uma versão para o teorema fundamental em espaço de forma (DAJCZER; TOJEIRO, 2019). A prova do teorema fundamental de subvariedades dada neste livro aparece em Lira–Tojeiro–Vitório (LIRA; TOJEIRO; VITÓRIO, 2010) e inspirou-se no dado por Jacobowitz (JACOBOWITZ, 1982). Para outras provas deste resultado, nos referimos a (EISENHART, 1964). Para outras versões do teorema fundamental de subvariedades para outros espaços ambientes consulte (FILHO, 2012) e (ORTEGA; LAWN, 2014).

O objetivo principal desta tese será estudar duas classes de subvariedades no produto warped. A hipersuperfícies helicoidais e as superfícies de curvatura média paralela. A abordagem do primeiro objetivo é a de (LIMA; ROITMAN, 2021) que se inspirou nos trabalhos de (ALARCÓN; ALBUJER; CABALLERO, 2016). O segundo objetivo vem da teoria mais antiga de estudar redução de codimensão, agora no produto warped. Vamos generalizar a Proposição 4.2 baseado nos procedimentos de (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014). A proposição 4.2 é frequentemente chamada de teorema de Erbacher, embora este fato elementar tenha sido usado desde muito antes; por exemplo, ver Allendoerfer (ALLEENDOERFER, 1939). Uma versão deste resultado para subvariedades de um espaço simétrico foi provada por Di Scala-Vittone (SCALA; VITTONI, 2014). Veja também (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014) para o caso de subvariedades de um produto de duas formas espaciais. Um outro resultado que buscamos generalizar para produto warped é o Teorema 4.3 sobre redução de codimensão, são devidos a Dajczer (DAJCZER, 1982).

Sob a hipótese mais restritiva de fibrado normal plano o Teorema 4.3 já era conhecido desde a época de Lagrange (CARTAN, 1925). Versões do Teorema 4.3 para subvariedades de $Q_c^n \times \mathbb{R}$ e, mais geralmente, para subvariedades de qualquer produto de duas formas espaciais, foram provadas por Mendonça-Tojeiro [(MENDONÇA; TOJEIRO, 2013), (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014)].

O estudo de uma teoria de subvariedades em espaços produto do tipo $M^n \times \mathbb{R}$ e, mais geralmente, em um produto warped $\mathbb{R} \times_\rho M^n$, onde M^n denota uma variedade Riemanniana n -dimensional, tem despertado a atenção de vários geométricos nos últimos anos. As contribuições recentes (DANIEL, 2009), (LIRA; TOJEIRO; VITÓRIO, 2010), (PICCIONE; TAUSK, 2008), (FILHO; VITÓRIO, 2017), com as quais foi possível obter teoremas do tipo Bonnet para imersões isométricas em espaços mais gerais, permitiram vislumbrar uma teoria para subvariedades em tais espaços. Quando M^n é um espaço de forma Q_ε^n , ênfase tem sido dada às superfícies mínimas e, mais geralmente, as superfícies de curvatura média constante em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, com os trabalhos pioneiros de Abresch-Rosenberg (ABRESCH; ROSENBERG, 2004), Rosenberg (ROSENBERG, 2002), dentre outros. A luz da teoria de subvariedades em espaços de forma, e inspirados pelos resultados clássicos nela obtidos, algumas classes importantes de subvariedades em espaços produto $Q_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ e, mais geralmente, em espaços produto warped $\mathbb{R} \times_\rho Q_\varepsilon^n$, têm sido estudadas na última década.

No capítulo 2 apresentamos os preliminares começando com a definição de imersão isométrica para definir subvariedade. Colocamos também as formulas fundamentais e um estudo sobre os espaços produto warped. As hipersuperfícies neste produto e as propriedades. Finalizamos o capítulo com o teorema fundamental das subvariedades mas sem demonstrá-lo.

No capítulo 3 trazemos resultados análogos ao trabalho do (LIMA; ROITMAN, 2021) sobre helicoides em espaço do tipo warped. Nos questionamos: Dada uma hipersuperfície $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times_\rho M$ é possível definir os helicoides do warped? Bem como obter exemplos explícitos deles e estudar as propriedades fundamentais preservadas pelos mesmos em ambientes do tipo $\mathbb{R} \times_\rho Q_\varepsilon^n$? Como principal resultado desta parte podemos citar 3.11 e 3.21 que traz as caracterizações locais para tais hipersuperfícies em $\mathbb{R} \times_\rho Q_\varepsilon^n$.

No capítulo 4 estudamos as superfícies de curvatura média paralela em produto warped $I \times_\rho Q_\varepsilon^n$. Nesta parte nosso objetivo foi dar uma definição para redução de codimensão em $I \times_\rho Q_\varepsilon^n$, $I \subset \mathbb{R}$ e apresentar a aplicação deste conceito para obter um resultado do tipo teorema de Alencar, do Carmo, Tribuzy [(MENDONÇA; TOJEIRO, 2014), seção 5.1] e um resultado de semi espaço via redução de codimensão. O ponto-chave é que, para tais espaços as equações de Gauss, Codazzi mudam.

PRELIMINARES

Neste capítulo iremos somente recapitular alguns fatos básicos da teoria das imersões isométricas. Todos os resultados serão apresentados sem demonstração, mas seguem a abordagem do excelente livro (DAJCZER; TOJEIRO, 2019) e as referências lá contidas.

2.1 Imersões isométricas

Sejam M^n e \tilde{M}^m variedades diferenciáveis de dimensão n e m respectivamente. Uma aplicação diferenciável $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ é chamado de *imersão* se a diferencial $f_*(x) : T_xM \rightarrow T_{f(x)}\tilde{M}$ é injetora para todos os pontos $x \in M^n$. O número $p = m - n$ é chamado de *codimensão* de f . Uma imersão $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ entre variedades riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{M}}$ é uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle f_*(x)X, f_*(x)Y \rangle_{\tilde{M}}$$

para todo $x \in M^n$ e $X, Y \in T_xM$.

2.1.1 Equações fundamentais

Dado $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ imersão isométrica denotaremos

- $f^*T\tilde{M} = \cup_{x \in M} (T_{f(x)}\tilde{M})$ é o fibrado induzido.
- $N_fM(x) = (f_*T_xM)^\perp$ é o espaço normal de f em x
- $N_fM = \cup_{x \in M} N_fM(x)$ é o espaço normal de f .
- $\Gamma(E)$ é o conjunto de seções e $\mathcal{X}(M)$ conjunto de campos de M .
- $\hat{\nabla}_X(Z \circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X}Z$ é a conexão induzida de $\tilde{\nabla}$ de \tilde{M} em f^*TM .

Em relação a decomposição ortogonal $f^*TM = f_*TM \oplus N_fM$, dados campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, podemos escrever

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T + (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\perp \quad (2.1)$$

A equação

$$\nabla_X Y = f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T$$

define uma conexão compatível e sem torção em TM , logo coincide com a conexão de Levi Civita de M^n , e a aplicação

$$\alpha^f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \Gamma(N_fM) \quad (2.2)$$

definida por

$$\alpha^f(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\perp \quad (2.3)$$

é chamado de *segunda forma fundamental* de f . Disso decorre a primeira fórmula básica da teoria de subvariedades conhecida como *fórmula de Gauss*

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha^f(X, Y), \quad (2.4)$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Um cálculo simples mostra que a componente de $\tilde{\nabla}_X \xi$ é $-f_*A_\xi X$, e a componente normal

$$\nabla_X^\perp \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp,$$

de $\nabla_X^\perp \xi$ define uma conexão compatível em TM^\perp , chamada a *conexão normal* de f . Isso nos dá a segunda fórmula básica, conhecida como *fórmula de Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_*A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi \quad (2.5)$$

Denotando por R e \tilde{R} os tensores de curvatura de M^n e M^m , respectivamente, decorre das fórmulas de Gauss e Weingarten as clássicas equações de Gauss, Codazzi e Ricci, que são dadas respectivamente por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \quad (2.6)$$

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z), \quad (2.7)$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle. \quad (2.8)$$

Quando $\tilde{M}^m = \mathbb{Q}_\varepsilon^m$ é um espaço de forma, isto é, \mathbb{Q}_ε^m é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante igual a ε , as equações (2.6)-(2.8) tornam-se

$$R(X, Y)Z = c(X \wedge Y)Z + A_{\alpha(Y, Z)}X - A_{\alpha(X, Z)}Y, \quad (2.9)$$

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z), \quad (2.10)$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle, \quad (2.11)$$

onde

$$X \wedge Y = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y,$$

e

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Observação 2.1. Quando o ambiente é um espaço de forma \mathbb{Q}_ε^m , as equações (2.9)-(2.11) são equações intrínsecas que relacionam o tensor de curvatura de M^n , a segunda forma fundamental de f e o tensor de curvatura da conexão normal. O conhecido *teorema fundamental das subvariedades* garante que tais equações são também condições suficientes para a existência de uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n em \mathbb{Q}_ε^m .

Dados uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ e um ponto $x \in M^n$, o vetor curvatura média de f em x , denotado por $H(x)$ é definido pondo

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha(X_j, X_j),$$

em termos de uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $T_x M$. Um cálculo simples mostra que o vetor $H(x)$ independe da escolha da base. Quando $H(x) = 0$, diremos que f é uma *imersão mínima* em x .

Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ é *totalmente geodésica* em $x \in M^n$ se a segunda forma fundamental α de f se anula em x . Se α é identicamente zero, então f é chamada de imersão isométrica *totalmente geodésica*.

Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ é *umbílica* em $x \in M^n$ se existe $\eta \in N^f M(x)$ tal que

$$\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta$$

para todo $X, Y \in T_x M$. Claramente, neste caso η é o vetor curvatura média $H(x)$ de f em x . Equivalentemente, f é umbílica em x se

$$A_\xi = \langle H(x), \xi \rangle I$$

para todo $\xi \in N^f M(x)$. Uma subvariedade é chamada umbílica se é umbílica em todo ponto. Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ tem vetor curvatura média paralelo se

$$\nabla_X^\perp H = 0$$

para todo $x \in M^n$ e $X \in T_x M$.

2.2 Variedades produto warped

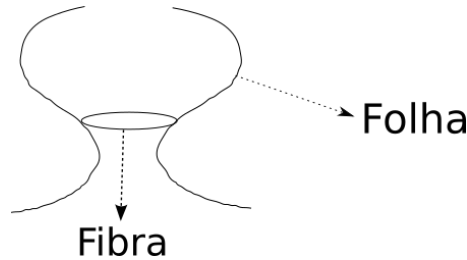
Nesta seção fazemos uma breve revisão de conceitos de produto warped. Sugerimos (O'NEILL, 1983) e (CHEN, 2013) para aqueles interessados em uma leitura mais detalhada dessa teoria.

Sejam (B, g_B) e (F, g_F) duas variedades Riemannianas, e uma função diferenciável $f : B \rightarrow (0, \infty)$. A variedade produto $B \times F$, munida da métrica

$$g := \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F),$$

é chamada de *produto warped* com *base* B e *fibra* F , e denotada por $B \times_f F$ (ver Figura 1). A

Figura 1 – Espaço warped folheado pelas fibras e pelas folhas



função f é usualmente chamada de *função warping*.

Exemplo 2.2. As superfícies de rotação, que não interceptam o eixo de rotação, são exemplos simples de um produto warped, onde B é uma curva geratriz da superfície, F é um paralelo da superfície e $f(b)$ é a distância de $b \in B$ ao eixo de rotação.

Dado um produto warped $B \times_f F$, as folhas $B \times \{q\}$ e as fibras $\{p\} \times F$ são subvariedades de $B \times_f F$ e a métrica produto warped é caracterizada por:

- (1) Para cada $q \in F$, a aplicação $\pi_B|_{(B \times \{q\})}$ é uma isometria sobre B ;
- (2) Para cada $p \in B$, a aplicação $\pi_F|_{(\{p\} \times F)}$ é uma homotetia sobre F com fator $1/f(p)$.
- (3) Para cada $(p, q) \in B \times F$, a folha $B \times \{q\}$ e a fibra $\{p\} \times F$ são ortogonais em (p, q) .

Observação 2.3. No presente trabalho usaremos ρ para denotar a função warping, B será a variedade 1-dimensional \mathbb{R} e F uma variedade n -dimensional M^n mas nos exemplos ela será na maioria das vezes um dos espaços de forma.

Lema 2.4. Seja $\mathcal{F}(B)$ o espaço das funções em B . Se $h \in \mathcal{F}(B)$ então o gradiente do levantamento $h \circ \pi$ de h para $M = B \times_f F$ é o levantamento para M do gradiente de h em B .

2.2.1 Propriedades do produto warped

Nesta seção apresentamos resultados de (O'NEILL, 1983) que contém as propriedades básicas da conexão de Levi Civita, do tensor de curvatura e do tensor de Ricci. Elas são frequentemente usadas nos resultados do capítulo 3.

Proposição 2.5. Seja $\mathcal{L}(B)$ o conjunto dos levantamentos de B em $M = B \times_f F$ se $X, Y \in \mathcal{B}$ e $V, W \in \mathcal{F}$ vale:

- (1) $D_X Y \in \mathcal{B}$ é o levantamento de $D_X Y$ em B .
- (2) $D_X V = D_V X = \left(\frac{Xf}{f} \right) V$
- (3) $\text{nor} D_V W = II(V, W) = - \left(\frac{\langle V, W \rangle}{f} \right) \text{grad}(f)$
- (4) $\text{tan} D_V W \in \mathcal{F}$ é o levantamento de $\nabla_V W$ em F .

Demonstração. (O'NEILL, 1983, página 206, Proposição 35) □

Corolário 2.6. As folhas $B \times \{q\}$ são totalmente geodésicas e as fibras $\{p\} \times F$ são totalmente umbílicas.

Demonstração. (O'NEILL, 1983, página 207, Corolário 36) □

Proposição 2.7. Seja $M = B \times_f F$ o produto warped com tensor de curvatura riemanniana R . Se $X, Y, Z \in \mathcal{B}$ e $U, V, W \in \mathcal{F}$ então

- (1) $R_{XY} Z \in \mathcal{B}$ é o levantamento de ${}^B R_{XY} Z$ em B .
- (2) $R_{YX} Z = \left(\frac{H^f(X, Y)}{f} \right) V$
- (3) $R_{XY} V = R_{VW} X = 0$
- (4) $R_{XV} W = \left(\frac{\langle V, W \rangle}{f} \right) D_X(\text{grad}(f))$
- (5) $R_{VW} U = {}^F R_{VW} U - \left(\frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} \right) \{ \langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V \}$

Demonstração. (O'NEILL, 1983, página 210, Proposição 42) □

Corolário 2.8. Em $M = B \times_f F$ com $d = \dim F > 1$ sejam X, Y horizontais e V, W verticais então

- (1) $\text{Ric}(X, Y) = {}^B \text{Ric}(X, Y) - (d/f) H^f(X, Y)$
- (2) $\text{Ric}(X, V) = 0$

(3) $Ric(V, W) = {}^F Ric(V, W) - \langle V, W \rangle f^\sharp$ onde

$$f^\sharp = \frac{\Delta f}{f} + (d-1) \frac{\langle grad(f), grad(f) \rangle}{f^2}$$

e Ric é o tensor de Ricci de M e ${}^B Ric$ o levantamento da curvatura de Ricci de B e ${}^F Ric$ o levantamento da curvatura de Ricci de F .

Demonstração. (O'NEILL, 1983, página 211, Corolário) □

2.2.2 Hipersuperfícies em espaço warped

Dada uma variedade Riemanniana orientada M^n , considere o espaço $\mathbb{R} \times M$ munido da métrica produto usual

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + f(t)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_M. \quad (2.12)$$

Denotaremos por $\pi_{\mathbb{R}}$ a projeção de $\mathbb{R} \times M$ sobre o primeiro fator, e por ∂_t o gradiente de $\pi_{\mathbb{R}}$ com respeito a métrica produto warped em (2.12). Observe que ∂_t é um campo vetorial paralelo na conexão de $\mathbb{R} \times M$.

Considere uma hipersuperfície orientável $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Denotemos por A o operador de forma de g relativo a um campo unitário N , normal a g , ou seja,

$$AX = -\tilde{\nabla}_X N,$$

para todo $X \in TM$, onde $\tilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $M^n \times \mathbb{R}$. Seguindo a notação de (LIMA; ROITMAN, 2021), a função altura ξ e a função ângulo Θ de Σ são definidas pondo

$$\xi = \pi_{\mathbb{R}}|_{\Sigma} \quad \text{e} \quad \Theta = \langle N, \partial_t \rangle. \quad (2.13)$$

Da definição para as funções ξ e Θ em (2.13), e usando o fato que ∂_t é paralelo na conexão de $M \times \mathbb{R}$, decorrem as seguintes identidades:

$$\nabla \xi = \partial_t - \Theta N \quad \text{e} \quad \nabla \Theta = -A \nabla \xi.$$

Note que $\Theta \in [-1, 1]$ e um ponto $x \in \Sigma$ é ponto crítico para ξ se, e somente se, $\Theta^2(x) = 1$. Neste caso, diremos que x é um *ponto vertical* para Σ .

Dada uma hipersuperfície orientável $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f M^n$, denotemos por ξ a função altura e Θ a função ângulo, dadas como em (2.13). O lema seguinte é uma relação útil para o nosso trabalho e usa as relações da conexão deste espaço.

Lema 2.9. Valem as seguintes propriedades:

- (i) $\tilde{\nabla}_X \partial_t = \phi(X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t)$, para todo $X \in T(\mathbb{R} \times_f M)$ e $\phi = f'/f$

$$(ii) \nabla \Theta = -A \nabla \xi - \phi \Theta \nabla \xi.$$

$$(iii) \tilde{\nabla}_V W = \nabla_V W - \phi \langle V, W \rangle \partial_t$$

Demonstração. Dado um campo vetorial $X \in T(\mathbb{R} \times_f M)$, suas componentes vertical e horizontal são dadas por

$$X_v = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \quad e \quad X_h = \langle X, \partial_t \rangle \partial_t,$$

respectivamente. Usando agora as relações da conexão

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_h} \partial_t &= \langle X, \partial_t \rangle \tilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0 \\ \tilde{\nabla}_{X_v} \partial_t &= \phi X_v = \phi (X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

concluimos que

$$\tilde{\nabla}_X \partial_t = \tilde{\nabla}_{X_v} \partial_t = \phi (X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t),$$

provando o item (i). Para o item (ii), seja $X \in T\Sigma$. Pela compatibilidade da métrica e usando o item (i), tem-se

$$\begin{aligned} X(\Theta) &= \langle \tilde{\nabla}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= -\langle AX, \partial_t \rangle - \phi \Theta \langle \partial_t, X \rangle \\ &= -\langle A \nabla \xi, X \rangle - \phi \Theta \langle \nabla \xi, X \rangle \end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo $X \in T\Sigma$ e, portanto, $\nabla \Theta = -A \nabla \xi - \phi \Theta \nabla \xi$. O item (iii) segue de (O'NEILL, 1983). \square

A seguir apresentaremos a definição de semiespaço superior e inferior que podem ser encontrados em (MIRANDOLA, 2009).

Definição 2.10. Seja $I \times_{\rho} M^n$ o produto warped onde $I \subseteq \mathbb{R}$. O subconjunto $\tilde{I} \times M$, onde $\tilde{I} = I \cap [A, \infty)$ (resp. $\tilde{I} = I \cap (-\infty, A]$, para algum $A \in I$ é chamado de semiespaço superior (resp. inferior) de $I \times_{\rho} M^n$.

Exemplo 2.11. Considere o produto warped $(0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$, onde \mathbb{S}^2 é a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . Este espaço é interessante pois é isométrico ao $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. O subconjunto $[1, \infty) \times \mathbb{S}^2$ é semi-espaço superior de $(0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$. Tal espaço não contém semiespaço inferior.

2.3 Um Teorema fundamental para subvariedades no produto warped $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_c^n$

Nesta seção iremos recapitular um teorema fundamental para subvariedades, quando o espaço ambiente é um produto warped $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_c^n$. Seguiremos a abordagem de (FILHO, 2012), que difere daquela de (ORTEGA; LAWN, 2014), a qual faz uso das técnicas do referencial móvel.

Proposição 2.12. Para todo $v \in TM$ temos

$$\alpha(v, X) + \nabla_v^\perp \rho = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla_v X - A_\rho v = \phi v \quad (2.17)$$

onde $\nabla, \nabla^\perp, \alpha$ e A_ρ denotam a conexão de Levi Civita em M , a conexão normal induzida em M , a segunda forma fundamental da imersão $x(M)$ e o operador de forma associado a α , respectivamente.

Demonstração. (FILHO, 2012, página 34) □

Proposição 2.13. Para todo $v \in TM$, $\mathbb{R} \times_f F$ espaço warped temos

$$\alpha(v, X) + \nabla_v^\perp \rho = -\frac{f'(h)}{f(h)} \langle v, X \rangle \rho \quad (2.18)$$

$$\nabla_v X - A_\rho v = \frac{f'(h)}{f(h)} (v - \langle v, X \rangle X) \quad (2.19)$$

onde $\nabla, \nabla^\perp, \alpha$ e A_ρ denotam a conexão de Levi Civita em M , a conexão normal induzida em M , a segunda forma fundamental da imersão $x(M)$ e o endomorfismo de Weingarten associado a α , respectivamente.

Demonstração. (FILHO, 2012, página 46) □

Proposição 2.14. Seja $x : M^k \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana k -dimensional M^k no produto warped $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f F^n$, onde F^n é uma variedade riemanniana n -dimensional com curvatura seccional constante igual a c . Seja ρ uma seção de TM^\perp e X a projeção canônica de ∂_t em TM , tal que $\partial_t = X + \rho$. Sejam $U, V, W, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi, \eta \in TM^\perp$. Então, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para a imersão x , são as seguintes:

- **Equação de Gauss**

$$\begin{aligned} \langle R(U, V)W, Z \rangle &= \left(\frac{c}{f(h)^2} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)} \right)^2 \right) [\langle W, V \rangle \langle U, Z \rangle - \langle W, U \rangle \langle V, Z \rangle] \\ &+ \left(\frac{c}{f(h)^2} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)} \right)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)} \right) [\langle V, Z \rangle \langle W, X \rangle \langle U, X \rangle \\ &- \langle U, Z \rangle \langle W, X \rangle \langle V, X \rangle + \langle W, U \rangle \langle V, X \rangle \langle Z, X \rangle \\ &- \langle W, V \rangle \langle U, X \rangle \langle Z, X \rangle] - \langle \alpha(U, W), \alpha(V, Z) \rangle + \langle \alpha(U, Z), \alpha(V, W) \rangle \end{aligned}$$

- **Equação de Codazzi**

$$\begin{aligned} (\nabla_U^\perp \alpha)(V, W) - (\nabla_V^\perp \alpha)(U, W) &= \left(\frac{c}{f(h)^2} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)} \right)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)} \right) \\ &* [\langle W, U \rangle \langle V, X \rangle - \langle W, V \rangle \langle U, X \rangle] \rho \end{aligned} \quad (2.20)$$

• **Equação de Ricci**

(2.21)

$$\langle R^{\perp}(U, V)\xi, \eta \rangle = \langle [A_{\xi}, A_{\eta}]U, V \rangle$$

Seja $(M^k, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ uma variedade riemanniana k -dimensional, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sua métrica e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial riemanniano de posto $l = n - k$, com conexão compatível ∇' . Sejam $h \in C^{\infty}(M)$, $\rho \in \Gamma(E)$ e α' uma seção simétrica no fibrado dos homomorfismos $\text{Hom}(TM \times TM, E)$. Defina para cada seção local ξ de E , a aplicação $A'_{\xi} : TM \rightarrow TM$ por

$$\langle A'_{\xi}U, V \rangle = \langle \alpha'(U, V), \xi \rangle \quad U, V \in TM$$

As equações de compatibilidade para subvariedades de $\mathbb{R} \times_f F^n$, da proposição 2.14, sugere introduzir a seguinte definição:

Definição 2.15. Dizemos que $(\langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla, \nabla', \alpha', \rho, h)$ satisfaz as equações de compatibilidade para $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f F^n$, onde F^n é uma variedade riemanniana e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva e suave, se

$$|X|^2 + |\rho|^2 = 1, \quad X = \nabla h$$

e para todo $U, V, W, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi, \eta \in E$, as seguintes equações valem

$$\alpha(V, X) + \nabla_V^{\perp} \rho = -\frac{f'(h)}{f(h)} \langle V, X \rangle \rho \quad (2.22)$$

$$\nabla_V X - A_{\rho} V = \frac{f'(h)}{f(h)} (V - \langle V, X \rangle X) \quad (2.23)$$

$$\langle R(U, V)W, Z \rangle = \left(\frac{c}{f(h)^2} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)} \right)^2 \right) [\langle W, V \rangle \langle U, Z \rangle - \langle W, U \rangle \langle V, Z \rangle] \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & + \left(\frac{c}{f(h)^2} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)} \right)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)} \right) [\langle V, Z \rangle \langle W, X \rangle \langle U, X \rangle \\ & - \langle U, Z \rangle \langle W, X \rangle \langle V, X \rangle + \langle W, U \rangle \langle V, X \rangle \langle Z, X \rangle \\ & - \langle W, V \rangle \langle U, X \rangle \langle Z, X \rangle] - \langle \alpha(U, W), \alpha(V, Z) \rangle + \langle \alpha(U, Z), \alpha(V, W) \rangle \\ (\nabla_U^{\perp} \alpha)(V, W) - (\nabla_V^{\perp} \alpha)(U, W) & = \left(\frac{c}{f(h)^2} - \left(\frac{f'(h)}{f(h)} \right)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)} \right) \\ & * [\langle W, U \rangle \langle V, X \rangle - \langle W, V \rangle \langle U, X \rangle] \rho \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\langle R^{\perp}(U, V)\xi, \eta \rangle = \langle [A_{\xi}, A_{\eta}]U, V \rangle \quad (2.26)$$

Teorema 2.16. Seja $(M^k, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ uma variedade riemanniana simplesmente conexa k -dimensional, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sua métrica e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Assuma que $(\langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla, \nabla', \alpha', \rho, h)$ satisfaz as equações de compatibilidade para $\mathbb{R} \times_f S^n$, com $-1 < f' < 1$. Então existe uma imersão isométrica $g : M^k \rightarrow \mathbb{R} \times_f S^n$ e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\tilde{g} : E \rightarrow TM^{\perp}$ ao longo de g , tal que

para todo $U, V \in TM$ e toda seção local $\xi, \eta \in E$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{g}(\xi), \tilde{g}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{g}\alpha'(U, V) &= \alpha(U, V) \\ \tilde{g}\nabla'_U \xi &= \nabla_U^\perp \xi\end{aligned}$$

onde ∇^\perp e α são a conexão normal e a segunda forma fundamental de $g(M) \subset \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, respectivamente. Além disso, a imersão é única, a menos de isometrias globais na variedade $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$.

Demonstração. (FILHO, 2012, página 50)

□

HELICOIDES NO PRODUTO WARPED

Neste capítulo generalizamos a definição de helicoides em produto warped, inspirados em (LIMA; ROITMAN, 2021). Para isso apresentamos alguns lemas e corolários do (MIRANDOLA, 2009) que serão utilizados no capítulo. Apresentamos também exemplos dos helicoides em $I \times_{\rho} M^n$ e estudamos as hipersuperfícies com uma direção especial.

3.1 Lemas básicos

Dados um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e uma variedade Riemanniana completa M^n , o produto warped $I \times_{\rho} M^n$ é conformemente difeomorfo a um subconjunto aberto do produto $M^n \times \mathbb{R}$. Mais precisamente, seja $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva da função $\frac{1}{\rho} : I \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, F é um difeomorfismo crescente sobre um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$, e a aplicação $\varphi : I \times_{\rho} M^n \rightarrow M^n \times J$, definida por

$$\varphi(s, x) = (x, F(s)), \quad (3.1)$$

é um difeomorfismo conforme entre $I \times_{\rho} M^n$ e $M^n \times J$, com fator conforme $\lambda = \rho \circ \pi_I$, onde $\pi_I : I \times_{\rho} M^n \rightarrow I$ denota a projeção sobre o primeiro fator. Ou seja, a métrica induzida por φ é $\lambda^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$. Sua inversa

$$\psi = \varphi^{-1} : M^n \times J \rightarrow I \times_{\rho} M^n$$

é dada por

$$\psi(x, t) = (G(t), x),$$

onde $G = F^{-1}$, de modo que $G'(t) = \rho(G(t))$, para todo $t \in J$. Para mais detalhes ver (MANFIO; TOJEIRO; VEKEN, 2020).

Exemplo 3.1. A função $\rho(u) = e^{-u}$ é derivável e positiva. Além disso, $F(u) = -e^{-u}$ é uma primitiva para $\rho(u)$. Assim, a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times_{e^{-u}} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é um difeomorfismo conforme dado em (3.1). Ou seja, o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} admite um modelo como produto warped $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{e^{-u}} \mathbb{R}^n$.

Dada uma hipersuperfície $f : (\Sigma^n, g) \rightarrow I \times_\rho M^n$ considere a composta

$$\tilde{f} = \varphi \circ f : \Sigma^n \rightarrow M^n \times J, \quad (3.2)$$

onde φ é o difeomorfismo conforme dado em (3.1). A aplicação \tilde{f} é uma imersão isométrica cuja métrica induzida \tilde{g} satisfaz $\tilde{g} = \frac{1}{\rho \circ \xi} g$, onde $\xi = \pi_I \circ f$ denota a função altura de f .

A proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em (MIRANDOLA, 2009), nos dá uma relação entre os operadores de forma de f e de \tilde{f} .

Proposição 3.2. Sejam A, \tilde{A} os operadores de forma de $f : (\Sigma, g) \rightarrow I \times_\rho M^n$ e $\tilde{f} : (\Sigma, \tilde{g}) \rightarrow J \times M$, respectivamente. Se N e \tilde{N} denotam os campos normais unitários a f e \tilde{f} , respectivamente, valem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \varphi_*(\rho \circ \xi)N, \\ \tilde{A} &= (\rho \circ \xi)(A + \phi \langle \partial_t, N \rangle I), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde I denota o operador identidade e $\phi = \rho' / \rho$.

Corolário 3.3. Se H e \tilde{H} denotam as curvaturas média de f e \tilde{f} , respectivamente, tem-se

$$\tilde{H} = (\rho \circ \xi)(H + \phi \langle \partial_t, N \rangle).$$

Decorre diretamente do Corolário 3.3 o seguinte

Corolário 3.4. A hipersuperfície $\tilde{f} = \varphi \circ f$ é mínima se, e somente se, a curvatura média H de f satisfaz $H = -\phi \langle \partial_t, N \rangle$.

Para cada $t \in I$, denotemos por M_t o slice vertical $M_t = \{t\} \times_\rho M^n$ do produto warped $I \times_\rho M^n$. Note que todo slice vertical M_t é uma hipersuperfície umbílica de $I \times_\rho M^n$, cuja função direção umbílica é $\rho'(t) / \rho(t)$ (BISHOP; O'NEILL, 1969). Dada uma hipersuperfície $f : \Sigma^n \rightarrow I \times_\rho M^n$, considere o conjunto

$$\Sigma_t = M_t \cap \Sigma \quad (3.4)$$

A proposição seguinte analisa o caso quando a interseção (3.4) é transversal.

Proposição 3.5. Se a hipersuperfície Σ^n intercepta transversalmente o slice M_t , então Σ_t é uma hipersuperfície de M_t , cujo campo unitário normal a Σ_t , é dado por

$$\eta = \bar{\phi}(N - \Theta \partial_t),$$

onde $\bar{\phi} = -\rho(1 - \Theta^2)^{-1/2}$ e N é o campo unitário, normal a Σ^n

Demonstração. Seja Σ^n uma hipersuperfície orientada em $I \times_\rho M^n$, com campo normal unitário N , e que intercepta transversalmente o slice vertical M_t . Assim, em cada ponto $p \in \Sigma_t$, o espaço tangente $T_p\Sigma$ se decompõe como soma ortogonal

$$T_p\Sigma = T_p\Sigma_t \oplus \text{span}\{T\}.$$

Além disso, o campo $N - \Theta\partial_t$ é tangente a M_t e ortogonal a Σ_t , de modo que Σ_t também é orientável. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ é a métrica Riemanniana de M^n , temos:

$$\begin{aligned} \rho^2 \langle (N - \Theta\partial_t), (N - \Theta\partial_t) \rangle_M &= \langle (N - \Theta\partial_t), (N - \Theta\partial_t) \rangle \\ &= 1 - \Theta^2 = \|T\|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, um campo unitário, normal a Σ_t em $M_t = \{t\} \times M^n$, é dado por

$$\eta = \bar{\phi}(N - \Theta\partial_t),$$

como queríamos. Por fim Σ_t é uma hipersuperfície de M_t . De fato, pelo teorema da dimensão

$$\begin{aligned} \dim(T_p\Sigma \cap T_pM_t) &= \dim T_p\Sigma + \dim T_pM_t - \dim(T_p\Sigma + T_pM_t) = \\ &= \dim T_p\Sigma + \dim T_pM_t - \dim T_p(M \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Então,

$$\dim \Sigma_t = \dim(\Sigma \cap M_t) = 2\dim M - \dim M - 1 = \dim M - 1,$$

provando que Σ_t é hipersuperfície de M_t . □

Nas condições da Proposição 3.5, ou seja, quando Σ_t é uma hipersuperfície de M_t diremos que Σ_t é uma *seção vertical* da hipersuperfície Σ^n . O lema seguinte nos dá uma expressão da curvatura média de Σ_t

Lema 3.6. Seja Σ_t uma seção vertical de uma hipersuperfície Σ^n em $\mathbb{R} \times_\rho M^n$. Então a curvatura média H_{Σ_t} de Σ_t é dada por

$$H_{\Sigma_t} = \frac{1}{n-1} \bar{\phi} \rho^{-2} (nH - \langle AT, T \rangle + \phi \Theta (n-1)), \quad (3.6)$$

onde $\phi = \rho'/\rho$ e $\bar{\phi} = -\rho(1 - \Theta^2)^{-1/2}$.

Demonstração. Decorre de (LIMA; MANFIO; SANTOS, 2022, Lema 1) que o operador de forma A_η de Σ_t , associado ao campo normal unitário η , satisfaz a seguinte igualdade

$$\langle A_\eta V, W \rangle = \bar{\phi} (\langle AV, W \rangle + \phi \Theta \langle V, W \rangle), \quad (3.7)$$

para quaisquer $V, W \in T\Sigma_t \subset T\Sigma$. Considere um referencial ortonormal $\{V_1, \dots, V_{n-1}, T\}$ em Σ^n tal que V_1, \dots, V_{n-1} são tangentes a Σ_t e $T = \nabla \xi / \|\nabla \xi\|$. Decorre de (3.7) que

$$\begin{aligned}
H_{\Sigma_t} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle A_\eta V_i, V_i \rangle_t = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \rho^{-2} \langle A_\eta V_i, V_i \rangle & (3.8) \\
&= \frac{\rho^{-2}}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\phi} (\langle AV_i, V_i \rangle + \Theta \phi \langle V_i, V_i \rangle),
\end{aligned}$$

mas $nH = \sum_{i=1}^{n-1} \langle AV_i, V_i \rangle + \langle AT, T \rangle$ e então

$$\frac{\rho^{-2}}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\phi} (\langle AV_i, V_i \rangle + \Theta \phi \langle V_i, V_i \rangle) = \frac{\bar{\phi} \rho^{-2}}{n-1} (nH - \langle AT, T \rangle + \phi \Theta (n-1)). \quad (3.9)$$

Portanto,

$$(n-1)H_{\Sigma_t} = \bar{\phi} \rho^{-2} (nH - \langle AT, T \rangle + \phi \Theta (n-1)).$$

□

3.2 Helicoides em $I \times_\rho M^n$

Motivados pela noção de hipersuperfícies helicoidais em espaços produto $M^n \times \mathbb{R}$, introduzidas por (LIMA; ROITMAN, 2021), introduzimos nesta seção a noção de hipersuperfície helicoidal no produto warped $I \times_\rho M^n$.

Definição 3.7. Considere uma hipersuperfície Σ de $I \times_\rho M^n$ sem pontos verticais, cuja função ângulo é não constante. Suponha que Σ não está totalmente contida em um dos semiespaços de $I \times_\rho M^n$. Dizemos que Σ é um helicoides horizontal se satisfaz as seguintes condições

- (1) Toda seção vertical Σ_t é uma hipersuperfície mínima em $\{t\} \times_\rho M$.
- (2) A função altura ξ satisfaz $\alpha(\nabla \xi, \nabla \xi) = -\phi \|\nabla \xi\|^2 \partial_t$.

Observação 3.8. O caso em que Σ^n está contida em um dos semiespaços de $I \times_\rho M^n$ é de interesse mais particular. Por exemplo, nos trabalhos (MIRANDOLA, 2009, Teorema 1.1) e (LIMA *et al.*, 2018) os autores estabelecem condições que garantem quando uma hipersuperfície em $I \times_\rho M^n$, contida em um dos semiespaços, é um slice. Dessa forma, a Definição 3.7 exclui o caso trivial de Σ^n ser um slice.

Observação 3.9. A Definição 3.7 estende aquela de (LIMA; ROITMAN, 2021). De fato, a função ρ ser constante igual a 1 significa que $\phi = 0$ e $\nabla \xi$ é uma direção assintótica. Observamos também que a minimalidade das seções verticais foram preservadas e $\alpha(\nabla \xi, \nabla \xi) = -\phi \|\nabla \xi\|^2 \partial_t$

se e somente se $\langle A\nabla\xi, \nabla\xi \rangle = \langle \alpha(\nabla\xi, \nabla\xi), N \rangle = -\phi \|\nabla\xi\|^2 \langle \partial_t, N \rangle = -\phi \|\nabla\xi\|^2 \Theta$. Como no produto warped vale a relação $\nabla\Theta = -(A + \phi\Theta)\nabla\xi$ segue que

$$\langle \nabla\Theta, \nabla\xi \rangle = -\langle A\nabla\xi, \nabla\xi \rangle - \phi\Theta \|\nabla\xi\|^2 = 0.$$

Portanto permanece a interpretação feita no artigo, ou seja, neste caso Θ é constante ao longo de toda trajetória $\gamma(s)$ de $\nabla\xi$. Além disso, $\langle \nabla\xi, \partial_t \rangle = 1 - \Theta^2$, o que diz que a direção tangente $\gamma'(s)$ faz um ângulo constante com a direção vertical ∂_t . Portanto, considerando o conceito de hélice em \mathbb{R}^3 como a curva que forma um ângulo constante com uma direção dada, podemos estender para curvas em $\mathbb{R} \times M$ e concluir que as trajetórias de $\nabla\xi$ em um helicóide horizontal em $\mathbb{R} \times_{\rho} M$ são *vertical hélices*.

Exemplo 3.10. Este exemplo contém os exemplos dos únicos helicóides horizontais mínimos na métrica warped, ou seja, $\rho(t) = c$ onde c é uma constante estritamente positiva. A construção deste helicóide será feita por meio do difeomorfismo conforme τ a partir do helicóide usual de \mathbb{R}^3 . Por definição

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{c} du = \frac{1}{c}t$$

com $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ logo $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ é conforme a \mathbb{R}^3 pelo difeomorfismo

$$\tau(t, x) = \left(\frac{1}{c}t, x \right),$$

sua inversa é $\tau^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ dada por $\tau^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (cx_1, x_2, x_3)$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização do helicóide usual do \mathbb{R}^3 , mínima neste espaço

$$\varphi(x, y) = (ay, x \cos(y), x \sin(y)), a > 0$$

então do Corolário 3.4, a imersão $\varphi_2 := \tau^{-1} \circ \varphi$ tem curvatura média $H = -\phi\Theta = 0$, pois neste caso $\phi = 0$. Vamos verificar agora que

$$\Sigma = \varphi_2(\mathbb{R}^2) = \{(cay, x \cos(y), x \sin(y))\},$$

satisfaz as condições da definição de helicóide. Por definição as seções são

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \Sigma \cap (\{t\} \times_{\rho} \mathbb{R}^2) = \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 / (t, x_1, x_2) = \varphi_2(x, y)\} = \\ &= \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 / t = cay, x_1 = x \cos(y), x_2 = x \sin(y)\} \\ &= \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 / y = t/ca, x_1 = x \cos(y), x_2 = x \sin(y)\} \\ &= \{(t, x \cos(t/ca), x \sin(t/ca)) \in \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

com $t \in \mathbb{R}$ constante e então Σ_t é uma linha reta no $\{t\} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$. São minimais neste espaço pois existe uma homotetia entre $\{t\} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ e \mathbb{R}^2 e a linha reta é minimal em \mathbb{R}^2 . Para verificar a segunda condição é preciso encontrar o normal unitário, a função ângulo entre outros cálculos

$$\begin{aligned} E &= (\rho(t))^2, F = 0, G = (\rho(t))^2 x^2 + (ca)^2 \\ e &= 0, f = \frac{-ac(\rho(t))}{\sqrt{(\rho(t))^2 x^2 + (ca)^2}}, g = 0 \end{aligned}$$

Para calcular o normal na métrica warped basta seguir os seguintes passos: faz o produto vetorial usual em \mathbb{R}^3 , multiplica o primeiro fator do produto usual por $(\rho(t))^2$ tem-se um vetor normal a $\{\varphi_x, \varphi_y\}$. Mais geralmente, seja $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ vetores de \mathbb{R}^3 então

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

é o normal a u e v na métrica euclidiana e

$$u \times_{\rho} v = (\rho^2(u_2v_3 - v_2u_3), u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

é o normal simultaneamente a u e a v na métrica warped. Dessa forma se calcula o normal neste ambiente e ao normalizar também na métrica warped é obtido o seguinte vetor

$$N = \left(\frac{(\rho(t))x}{\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}}, \frac{(ca)\sin(y)}{\rho(t)\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}}, \frac{-(ca)\cos(y)}{\rho(t)\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}} \right).$$

Note que, $\langle N, \varphi_x \rangle = 0 = \langle N, \varphi_y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \left(\frac{(\rho(t))x}{\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}} \right)^2 + (\rho(t))^2 \left(\frac{(ca)\sin(y)}{\rho(t)\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}} \right)^2 + \\ &+ (\rho(t))^2 \left(\frac{-(ca)\cos(y)}{\rho(t)\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

a função ângulo é

$$\Theta(x, y) = \frac{(\rho(t))x}{\sqrt{(\rho(t))^2x^2 + (ca)^2}},$$

veja que a derivada de Θ em relação a y é zero e além disso de geometria riemanniana

$$\nabla \Theta = \frac{1}{E} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \varphi_x + \frac{1}{G} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \varphi_y = \frac{1}{E} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \varphi_x.$$

Portanto como $\langle \varphi_x, \partial_t \rangle = 0$, $\nabla \xi = \partial_t - \Theta N$ segue que $\langle \nabla \Theta, \nabla \xi \rangle = \frac{1}{E} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \langle \varphi_x, \partial_t \rangle = 0$, equivalente a segunda condição e Σ é um helicóide horizontal de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$. Dessa forma obtemos outros exemplos de helicoides segundo a Definição 3.7 em produto warped do tipo $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ mas se a função warping constante eles não são minimais na métrica warped.

Pela motivação do início do capítulo e o Corolário 3.4 as hipersuperfícies minimais do produto riemanniano não geram mínimas do ambiente warped. O resultado a seguir confirma que $H = -\phi \Theta$ é a curvatura média dos helicoides horizontais. Ele é uma caracterização local deste tipo de hipersuperfície.

Teorema 3.11. Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} M^n$, uma hipersuperfície sem pontos verticais e função ângulo não constante. Suponha que Σ não está totalmente contida em um dos semiespaços de $I \times_{\rho} M^n$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) Σ é um helicóide horizontal de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$.
- b) As seções verticais Σ_t são minimais e a curvatura média de Σ é $H = -\phi\Theta$.

Demonstração. Suponha que Σ seja um helicóide horizontal, Então das condições (1) e (2) da Definição 3.7 tem-se

$$\langle AT, T \rangle = \frac{1}{\|\nabla \xi\|^2} \langle A\nabla \xi, \nabla \xi \rangle = -\phi\Theta.$$

Portanto, pelo Lema 3.6, segue que

$$nH - (-\phi\Theta) + \phi\Theta(n-1) = 0,$$

logo $H = -\phi\Theta = \langle -\phi\partial_t, N \rangle$.

Reciprocamente, suponha que $H = -\phi\Theta$ e $H_{\Sigma_t} = 0$. Então, pelo Lema 3.6, tem-se

$$0 = \bar{\phi}\rho^{-2}(-\phi\Theta n - \langle AT, T \rangle + \phi\Theta(n-1)),$$

e, então, $\langle AT, T \rangle = -\phi\Theta$ que é equivalente a condição 2) da Definição 3.7. \square

Exemplo 3.12. Neste exemplo são apresentados helicoides horizontais em $(0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$ com curvatura média $\|H\| \leq 1$. Considere a parametrização $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, obtida por meio de inclusão no \mathbb{R}^4 (LIMA; ROITMAN, 2021, Exemplo 1) dada por

$$\Psi(x, y) = (ay, \cos(x)\cos(y), \cos(x)\sin(y), \sin(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \quad (3.11)$$

e o difeomorfismo conforme

$$\tau : (0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$$

definido por $\tau(s, y) = (\ln(s), y)$ cuja inversa é

$$\tau^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow (0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2,$$

definido por $\tau^{-1}(s, y) = (e^s, y)$. Na notação do Corolário 3.4 denote

$$\varphi := \tau^{-1} \circ \Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$$

e defina $\Sigma = \varphi(\mathbb{R}^2) \subset (0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$ e $\varphi_1 := \tau \circ \varphi = \Psi$ e $\tilde{\Sigma} = \varphi_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Por meio dos Corolários 3.3 e 3.4 e o difeomorfismo conforme obtém-se uma relação entre Σ e $\tilde{\Sigma}$ definidos acima. Este será provado na Proposição 3.13. De acordo com (MANFIO; TOJEIRO; VEKEN, 2020, seção 3.2) o espaço $(0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$ é uma descrição de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ em coordenadas esféricas, dada pela isometria

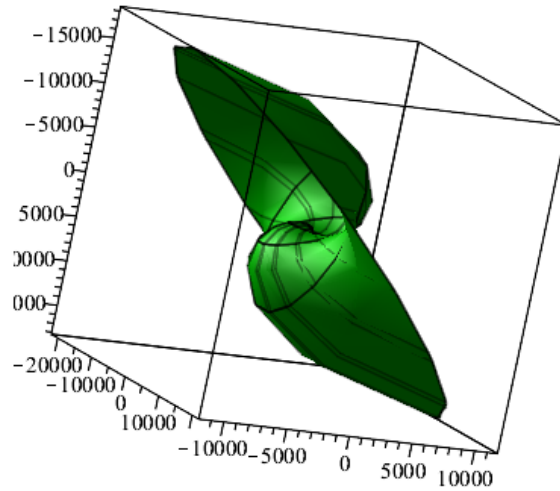
$$\begin{aligned} \varphi_2 : (0, \infty) \times_{id} \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\} \\ (t, x) &\rightarrow tx \end{aligned} \quad (3.12)$$

e então podemos obter uma ilustração, Figura 2, de Σ no $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ descrito pela aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\} \\ (x, y) &\rightarrow \varphi_2 \circ \varphi(x, y) = (e^{ay} \cos(x) \cos(y), e^{ay} \cos(x) \sin(y), e^{ay} \sin(x)) \end{aligned} \quad (3.13)$$

De modo análogo pode-se obter também a ilustração de $\tilde{\Sigma}$, Figura 3, considerando $y \in (0, \infty)$

Figura 2 – Helicoide de $(0, \infty) \times_t \mathbb{S}^2$, plotagem da aplicação 3.13 para $a = 1$



pela aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\} \\ (x, y) &\rightarrow (ay \cos(x) \cos(y), ay \cos(x) \sin(y), a y \sin(x)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

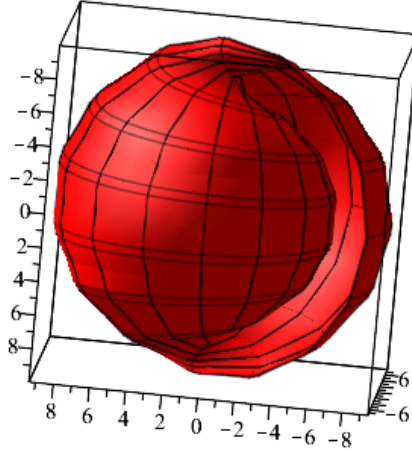
Este exemplo motiva as construções da Proposição 3.13.

Proposição 3.13. Dada uma hipersuperfície $\varphi : \Sigma \rightarrow I \times_{\rho} M^n$ considere o difeomorfismo conforme $\tau : I \times_{\rho} M^n \rightarrow J \times M^n$ dado em 3.1, sejam $\varphi_1 := \tau \circ \varphi$, $\tilde{\Sigma} := \varphi_1(\Sigma) \subset J \times M^n$. Então vale as seguintes propriedades

- (i) O slice $\Sigma_t = \Sigma \cap (\{t\} \times_{\rho} M^n)$ tem curvatura média $H = -\phi \langle \partial_t, N \rangle$ em $\{t\} \times_{\rho} M^n$ se e somente se o slice $\tilde{\Sigma}_{s(t)} := \{s(t)\} \times M^n$ é minimal em $\{s(t)\} \times M$.
- (ii) A hipersuperfície Σ tem curvatura média $-\phi \Theta$ se e somente se $\tilde{\Sigma}$ tem curvatura média zero.

Demonstração. O item (i) decorre do Corolário 3.4 aplicado a $f = \varphi|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow \{t\} \times_{\rho} M$. De fato, a equação do Corolário 3.3 pode ser expressa como

$$\tilde{H} = (\rho \circ \xi)(H + \phi \langle \partial_t, N \rangle) \quad (3.15)$$

Figura 3 – Plotando a aplicação 3.14, para $a = 1$ 

onde neste caso H denota a curvatura de $f : \Sigma_t \rightarrow \{t\} \times_{\rho} M$ e \tilde{H} a curvatura média de $\tau \circ f$. Portanto, da igualdade 3.15 a minimalidade de $\tilde{\Sigma}_{s(t)}$ implica que Σ_t tem curvatura média $H = -\phi \langle \partial_t, N \rangle$ e vale a recíproca.

O item (ii) decorre do Corolário 3.4 aplicado a $\varphi_1 = \tau \circ \varphi$ e $\varphi : \Sigma \rightarrow I \times_{\rho} M^n$. \square

Decorre da Proposição 3.13 que hipersuperfícies helicoidais no sentido de (LIMA; ROITMAN, 2021) correspondem a hipersuperfícies helicoidais no produto warped, mas não a recíproca, visto que as folheações em $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$ são hipersuperfícies umbílicas.

Exemplo 3.14. Neste exemplo são apresentados helicoides horizontais do modelo warped do espaço hiperbólico $\mathbb{R} \times_{e^{-t}} \mathbb{R}^3$. A curvatura média em módulo satisfaz $\|H\| \leq 1$. Considere isometria $\Phi : H^3 \rightarrow \mathbb{R} \times_{e^{-t}} \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(s, y) = (\ln(s), y)$ onde $s \in (0, +\infty)$ e $y \in \mathbb{R}^2$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^3$ dado por

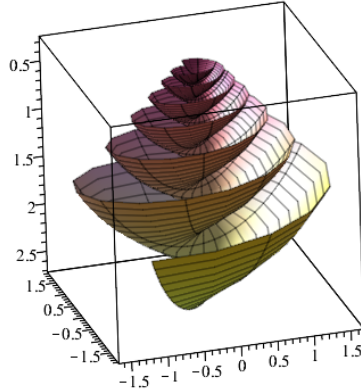
$$\varphi(x, y) = (e^y \operatorname{sech}(x), e^y \tanh(x) \cos(ay), e^y \tanh(x) \sin(ay))$$

a parametrização do helicoides hiperbólico no modelo do semi-espaço superior (ver (WANG, 2015)) e figura 4.

Seja $\varphi_1 = \Phi \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times_{e^{-t}} \mathbb{R}^3$ dado por

$$\varphi_1(x, y) = (\ln(e^y \operatorname{sech}(x)), e^y \tanh(x) \cos(ay), e^y \tanh(x) \sin(ay)).$$

e $\Sigma = \varphi_1(\mathbb{R}^2)$. Esta hipersuperfície é um helicoides do espaço hiperbólico no modelo warped. Do Corolário 3.4 e φ mínima, segue que Σ tem curvatura média $H = -\phi \Theta$, onde Θ é a função ângulo definida em Σ .

Figura 4 – Helicoide do modelo do semi-espaco superior $a = 10$ 

Exemplo 3.15. Neste exemplo obteremos um helicoides de $I \times_{\rho} \mathbb{R}^3$ a partir de um helicoides de $J \times \mathbb{R}^3$. Considere a torção de um plano em \mathbb{R}^4

$$\varphi(x, y, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(ks) & -\sin(ks) & 0 \\ 0 & \sin(ks) & \cos(ks) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ y \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

descrito por $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\varphi(x, y, s) = (as, x \cos(ks), x \sin(ks), y)$$

Escolha uma $\rho : I \rightarrow J$ e a τ correspondente e então $\varphi_1 = \tau^{-1} \circ \varphi$ e $\tilde{\Sigma} := \{\varphi_1(x, y, s)\}$. Segue que $\tilde{\Sigma} := \tau^{-1} \circ \varphi$ é um helicoides horizontal de $J \times \mathbb{R}^3$ e Σ de $I \times_{\rho} M^n$.

Exemplo 3.16. Seja

$$\varphi(x, y, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ 0 & \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \cos(y) \\ x \sin(y) \\ y \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primeiro $\varphi(x, y, s) = (as, x \cos(s + y), x \sin(s + y), y)$, com constante e $a > 0$. Note que $\Sigma_t := \varphi(\mathbb{R}^3) \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^3)$ é mínima de $\{t\} \times \mathbb{R}^3$, porque por definição

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \{(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 / (t, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x, y, s)\} \\ &= \{(t, x \cos((t/a) + y), x \sin((t/a) + y), y) \in \{t\} \times \mathbb{R}^3 / t, x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

com $t \in \mathbb{R}$ constante e então Σ_t é um helicoides no $\{t\} \times \mathbb{R}^3$. Então do Teorema 3.11 segue que estas seções correspondentes pelo difeomorfismo conforme também é minimal em $\{t(s)\} \times_{\rho} \mathbb{R}^3$, onde $t(s)$ é a inversa da função $s : I \rightarrow J$, $J = s(I)$ dada por

$$s(t) = s_0 + \int_0^t \frac{1}{\rho(u)} du,$$

que é equivalente a $s'(t) = \frac{1}{\rho(t)}$. Considere $\tau : I \times_{\rho} \mathbb{R}^4 \rightarrow J \times \mathbb{R}^4$ dado por $\tau(t, x) = (s(t), x)$ e $\tau^{-1}(s, x) = (t(s), x)$ sua inversa. Portanto, esta é uma forma de construir os helicoides horizontais em $I \times_{\rho} \mathbb{R}^4$. Escolha por exemplo, $\rho : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ $\rho(t) = t$, e então uma solução particular de $s'(t) = \frac{1}{t}$ é $s(t) = \ln(t)$ e $s : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ logo

$$\tilde{\Sigma} = \tau^{-1}(\Sigma) = \{(e^{as}, x \cos(s+y), x \sin(s+y), y); (x, y, s) \in \mathbb{R}^3\}$$

é um helicoide horizontal de $(0, +\infty) \times_t \mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.17. Neste exemplo queremos construir helicoides horizontais em $I \times_{\rho} \mathbb{R}^2$, onde I corresponde ao intervalo de definição da função warping, cuja curvatura média não é zero. A ideia é escolher uma função warped e compor com a parametrização do helicoide usual de \mathbb{R}^3 , denotado por Σ . Destacamos duas funções $\rho : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\rho(t) = t$ então $s'(t) = \frac{1}{t}$ é $s(t) = \ln(t)$ e $s : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ logo

$$\tilde{\Sigma} = \tau^{-1}(\Sigma) = \{(e^{ay}, x \cos(y), x \sin(y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

é um helicoide horizontal de $(0, +\infty) \times_t \mathbb{R}^2$, ele não é mínimo na métrica warped. E $\rho : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\rho(t) = \cosh(t)$ então $s'(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$ é $s(t) = \operatorname{arctanh}(\sinh(t))$ e $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sua inversa $t(s) = \sinh(s)$ logo

$$\tilde{\Sigma} = \tau^{-1}(\Sigma) = \{(\sinh(ay), x \cos(y), x \sin(y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

é um helicoide horizontal de $\mathbb{R} \times_{\cosh(t)} \mathbb{R}^2$.

3.3 Helicoide horizontal como gráfico

Nesta seção estudaremos condições para que o gráfico de uma função diferenciável seja um helicoide horizontal.

Dada uma função diferenciável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida num domínio $\Omega \subset M^n$, denotemos por

$$\Sigma = \operatorname{graf}(u) = \{(u(x), x) \in \mathbb{R} \times M^n / x \in \Omega\},$$

o gráfico de u , que será chamado de gráfico horizontal.

Lema 3.18. O campo vetorial N dado por

$$N = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} \left(\partial_t - \frac{1}{\rho^2} \nabla u \right),$$

é unitário e normal a $\Sigma = \operatorname{graf}(u)$, onde ∇u denota o gradiente da função u .

Demonstração. Seja $\varphi(x) = (u(x), x)$ a parametrização usual de Σ , com $x \in \Omega$. Sua diferencial é dada por

$$d_x\varphi(X) = \langle X, \nabla u \rangle \partial_t + X,$$

para quaisquer $x \in \Omega$ e $X \in T\Omega$. Assim,

$$\langle N, d_x\varphi(X) \rangle = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} \left(\langle X, \nabla u \rangle \langle \partial_t, \partial_t \rangle - \rho^2 \frac{1}{\rho^2} \langle X, \nabla u \rangle \right) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} \right)^2 \left(\langle \partial_t, \partial_t \rangle + \rho^2 \frac{1}{\rho^4} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right) = \\ &= \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} \right)^2 \left(\frac{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}{\rho^2} \right) = 1, \end{aligned}$$

□

No próximo lema será exibido uma equação que relaciona o divergente em M com a equação do Lema 3.6.

Lema 3.19. A curvatura média H de $\Sigma = \text{graf}(u) \subset \mathbb{R} \times_\rho M^n$ satisfaz $H = -\phi\Theta$ em $\mathbb{R} \times_\rho M^n$ se, e somente se,

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\rho \sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} \right) = n\Theta\phi + nH = 0 \quad (3.16)$$

Demonstração. Seja $N = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} \left(\partial_t - \frac{1}{\rho^2} \nabla u \right)$ o normal unitário a Σ . Então

$$\frac{\nabla u}{\rho \sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} = \Theta\partial_t - N.$$

Usando as relações da conexão de Levi Civita do produto warped, temos que para todo $X \in TM$

$$\nabla_X(\Theta\partial_t - N) = X(\Theta)\partial_t + \Theta\nabla_X\partial_t - \nabla_XN = X(\Theta)\partial_t + \Theta\tilde{\nabla}_X\partial_t - \tilde{\nabla}_XN,$$

onde $\tilde{\nabla}_XN = \nabla_XN$ e $\tilde{\nabla}_X\partial_t = \nabla_X\partial_t$. Assim,

$$\langle \nabla_X(\Theta\partial_t - N), X \rangle = \phi\Theta\langle X, X \rangle + \langle AX, X \rangle.$$

Considerando um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ definido sobre uma vizinhança V de M temos

$$\begin{aligned} \text{div}(\Theta\partial_t - N) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(\Theta\partial_t - N), e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n (\phi\Theta\langle e_i, e_i \rangle + \langle Ae_i, e_i \rangle) \\ &= n\phi\Theta + nH \end{aligned} \quad (3.17)$$

provando o lema. □

A proposição seguinte será auxiliar no teorema principal desta seção, o que caracteriza helicoides horizontais de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$.

Proposição 3.20. Seja $\Sigma = \text{graf}(u)$ o gráfico de uma função diferenciável u em um domínio $\Omega \subset M$, e seja Σ_t uma seção vertical de Σ . Então valem as seguintes afirmações:

(1) Σ tem função curvatura média $H = -\phi\Theta$ em $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$ se e somente se u satisfaz:

$$0 = \frac{\Delta u}{\rho \sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} - \frac{\|\nabla u\|}{\rho(\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2})^3} \langle \nabla \|\nabla u\|, \nabla u \rangle. \quad (3.18)$$

(2) A curvatura média de Σ_t é dada por:

$$H_{\Sigma_t} = \frac{\Delta u}{\rho \|\nabla u\|} - \frac{\langle \nabla \|\nabla u\|, \nabla u \rangle}{\rho \|\nabla u\|^2}. \quad (3.19)$$

Demonstração. Dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos

$$\text{div}(f\nabla u) = f \Delta u + \langle \nabla f, \nabla u \rangle.$$

Em particular, se $f = \frac{1}{\rho \sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}}$, então o gradiente de f é dado por

$$\nabla f = \frac{-\|\nabla u\| \nabla \|\nabla u\|}{\rho(\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2})^3},$$

logo,

$$\begin{aligned} \text{div}(f\nabla u) &= f \Delta u + \langle \nabla f, \nabla u \rangle \\ &= \frac{\Delta u}{\rho \sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} - \frac{\|\nabla u\|}{\rho(\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2})^3} \langle \nabla \|\nabla u\|, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

Porém do Lema 3.19 tem-se $\text{div}(f\nabla u) = 0$ e isso prova a equação (3.18).

Para o item (2) considere o campo $\eta = -\frac{\nabla u}{\rho \|\nabla u\|}$ que é normal e unitário a Σ_t . Portanto se escolhermos uma base ortonormal de $T\Sigma_t$, $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$, tem-se que

$$H_{\Sigma_t} = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A_{\eta} X_i, X_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} -\langle \nabla_{X_i} \eta, X_i \rangle = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\rho(t) \|\nabla u\|} \right).$$

Por outro lado,

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\rho \|\nabla u\|} \right) = \frac{\Delta u}{\rho \|\nabla u\|} - \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\nabla \|\nabla u\|}{\|\nabla u\|^2}, \nabla u \right\rangle = \frac{\Delta u}{\rho \|\nabla u\|} - \frac{\langle \nabla \|\nabla u\|, \nabla u \rangle}{\rho \|\nabla u\|^2}. \quad (3.20)$$

e isso prova a equação (3.19). \square

O resultado seguinte nos dá condições equivalentes para $\Sigma = \text{graf}(u)$ ser um helicóide horizontal em termos da harmonicidade de u .

Teorema 3.21. Seja $\Sigma = \text{graf}(u)$ o gráfico de uma função diferenciável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida num domínio $\Omega \subset M^n$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- 1) Σ é um helicóide horizontal de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$.
- 2) u é uma função harmônica e $H = -\phi\Theta$.
- 3) u é uma função harmônica e $\langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle = 0$.

Demonstração. Observe que se Σ é um helicóide horizontal de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$, valem as condições (1) e (2) da Definição 3.11. Substituindo estas condições nas equações da Proposição 3.20 segue que Σ é um helicóide horizontal de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$ se, e somente se, o sistema abaixo é satisfeito

$$\begin{cases} \frac{\Delta u}{\rho\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2}} - \frac{\|\nabla u\|}{\rho(\sqrt{\rho^2 + \|\nabla u\|^2})^3} \langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle = 0, \\ \frac{\Delta u}{\rho\|\nabla u\|} - \frac{\langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle}{\rho\|\nabla u\|^2} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Simplificando, obtemos:

$$\Delta u - \frac{\|\nabla u\|}{\rho^2 + \|\nabla u\|^2} \langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle = 0, \quad (3.22)$$

$$\Delta u - \frac{\langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle}{\|\nabla u\|} = 0. \quad (3.23)$$

Subtraindo (3.22) de (3.23) segue que

$$0 = \frac{\rho^2 \langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle}{\|\nabla u\|(\rho^2 + \|\nabla u\|^2)}.$$

Portanto $\langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle = 0$ e $\Delta u = 0$ e u é harmônica. Então estas são as únicas soluções do sistema (3.21).

Prova de 1) \Rightarrow 2) Suponha que vale 1) então já vale a hipótese sobre a curvatura média e o sistema (3.21) é satisfeito e então u é harmônica e é verdadeira a implicação.

Prova de 2) \Rightarrow 1) Se vale 2) vale a hipótese sobre a curvatura média e então só falta verificar que $H_{\Sigma_t} = 0$. Note que da Proposição 3.20 e $\Delta u = 0$ e $H = -\phi\Theta$ segue que o sistema (3.21) é satisfeito e

$$H_{\Sigma_t} = -\frac{\langle \nabla\|\nabla u\|, \nabla u \rangle}{\rho\|\nabla u\|^2},$$

ou seja $H_{\Sigma_t} = 0$. □

3.4 Hipersuperfície com uma direção especial

O objetivo desta seção é caracterizar hipersuperfícies do produto warped $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$ para as quais o campo vetorial $\nabla \xi$ é uma direção principal, a qual foi feita por para $\mathbb{Q}_{\xi}^n \times \mathbb{R}$ e em (LIMA; ROITMAN, 2021) para o caso de $M \times \mathbb{R}$.

Seja $f : \Sigma_0^{n-1} \rightarrow M^n$ uma hipersuperfície orientável e assumamos que existe uma vizinhança \mathcal{U} de Σ_0 em $T\Sigma_0^{\perp}$ sem pontos focais para f , i.e., a restrição da aplicação exponencial $exp_{\Sigma_0}^{\perp} : T\Sigma_0^{\perp} \rightarrow M$ a \mathcal{U} é um difeomorfismo sobre a imagem. De outra forma, denotando por η o campo unitário normal a f , assumimos que existe um intervalo aberto I , com $0 \in I$, tal que para todo $p \in \Sigma_0$, a curva

$$\gamma_p(s) = exp_M(f(p), s\eta(p)), \quad s \in I,$$

é uma geodésica bem definida em M sem pontos conjugados. Em particular, para todo $s \in I$, a aplicação $f_s : \Sigma_0 \rightarrow M$ dada por

$$f_s(p) = \gamma_p(s),$$

é uma imersão de Σ_0 em M , que é dita ser *paralela* a f . Observe que, dado $p \in \Sigma_0$, o espaço tangente $f_{s*}(T_p\Sigma_0)$ de f_s em p é o transporte paralelo de $f_s(T_p\Sigma_0)$ ao longo de γ_p de 0 a s .

Além disso, com a métrica induzida, o normal unitário η_s de f_s em p é $\eta_s(p) = \gamma_p'(s)$. Considere agora a hipersuperfície Σ em $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$ dada por

$$\Sigma = \{(a(s), f_s(p)) : p \in \Sigma_0 \text{ e } s \in I\},$$

onde $a : I \rightarrow a(I) \subset \mathbb{R}$ é um difeomorfismo crescente. A hipersuperfície Σ é usualmente chamada um (a, f_s) -gráfico de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$, cuja função ângulo é dada por

$$\Theta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (a')^2}}.$$

De fato, para todo ponto $x = (a(s), f_s(p)) \in \Sigma$ vale que

$$T_x\Sigma = span\{\partial_s\} \oplus f_{s*}(T_p\Sigma_0), \quad \partial_s = a'(s)\partial_t + \eta_s$$

e então escrevendo $N = b\eta_s + c\partial_t$ segue que na métrica warped

$$\langle N, N \rangle = \rho^2 b^2 + c^2$$

e

$$\langle N, \partial_s \rangle = \langle N, a'(s)\partial_t + \eta_s \rangle = b\rho^2 + a'c.$$

Então o normal unitário a Σ satisfaz

$$\rho^2 b^2 + c^2 = 1$$

e

$$b\rho^2 + a'c = 0.$$

Logo,

$$b = \frac{-a'c}{\rho^2}$$

e

$$\rho^2 \frac{a'^2 c^2}{\rho^4} + c^2 = 1.$$

Assim, $(a'^2 + \rho^2)c^2 = \rho^2$ e

$$c = \frac{\rho}{\sqrt{(a')^2 + \rho^2}}$$

e então

$$b = \frac{-a'}{\rho^2} \frac{\rho}{\sqrt{(a')^2 + \rho^2}} = \frac{-a'}{\rho \sqrt{(a')^2 + \rho^2}}.$$

Portanto, o normal unitário é dado por

$$N = \left(\frac{-a'}{\rho \sqrt{(a')^2 + \rho^2}} \right) \eta_s + \left(\frac{\rho}{\sqrt{(a')^2 + \rho^2}} \right) \partial_t$$

e a função ângulo

$$\Theta = \langle N, \partial_t \rangle = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (a')^2}}.$$

Decorre de (LIMA; ROITMAN, 2021, Teorema 6) que toda hipersuperfície Σ de $M \times \mathbb{R}$, cuja função ângulo é não-nula e tem $\nabla \xi$ como direção principal, é localmente um (f_s, a) -gráfico. O próximo resultado é uma versão para o caso warped.

Teorema 3.22. (a) Todo (f_s, a) -gráfico satisfaz os seguintes propriedades:

- (1) Θ e $\nabla \xi$ nunca se anulam em Σ .
- (2) $\nabla \xi$ é uma direção principal de Σ .
- (3) Θ e a curvatura principal de Σ na direção $\nabla \xi$ são constantes ao longo das seções verticais Σ_t de Σ .

(b) Seja $\Sigma \subset \mathbb{R} \times_{\rho} M^n$ uma hipersuperfície orientável, $\nabla \xi$ uma direção principal e cuja a função ângulo é não-nula então Σ é localmente um (a, f_s) -gráfico de $\mathbb{R} \times_{\rho} M^n$.

Demonstração. Prova de a): A função ângulo é

$$\Theta = \langle N, \partial_t \rangle = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (a')^2}}.$$

ela é não nula pois a função warping é estritamente positiva. Além disso,

$$\langle \nabla \xi, \nabla \xi \rangle = 1 - \Theta^2 = 1 - \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (a')^2}} \right)^2 = \frac{(a')^2}{\rho^2 + (a')^2} \neq 0$$

pois a função $a : I \rightarrow a(I) \subset \mathbb{R}$ é um difeomorfismo crescente. Logo $\nabla \xi$ e Θ nunca se anulam. Agora para a condição (2) reescreva $N = \Theta(\partial_t - a' \rho^{-2} \eta_s)$. Então pela regra de Leibniz

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} N = \frac{\Theta'}{\Theta} N + \tilde{\nabla}_{\partial_s} \partial_t + \Theta a'' \rho^{-2} \eta_s - \Theta a' \rho^{-2} \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta_s$$

Ao olhar separadamente para as expressões $\tilde{\nabla}_{\partial_s} \partial_t$ e $\tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta_s$ por meio das relações

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_V W &= \nabla_V W - \phi \langle V, W \rangle \partial_t \\ \tilde{\nabla}_Y \partial_t &= \phi (Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

que valem para todo $Y \in T(\mathbb{R} \times_{\rho} M^n)$ e V, W campos verticais. Note que como η_s é vertical e $\partial_s = \eta_s + a' \partial_t \in T(\mathbb{R} \times_{\rho} M^n)$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\partial_s} \partial_t &= \phi (\partial_s - a' \partial_t) = \phi (\eta_s + a' \partial_t - a' \partial_t) = \phi \eta_s \\ \tilde{\nabla}_{\partial_s} \eta_s &= \tilde{\nabla}_{\eta_s} \eta_s - a' \tilde{\nabla}_{\partial_t} \eta_s = (\nabla_{\eta_s} \eta_s - \phi \langle \eta_s, \eta_s \rangle \partial_t) - a' (\phi \eta_s) = -\phi \rho^2 \partial_t - \phi a' \eta_s \end{aligned} \quad (3.25)$$

pois como γ uma geodésica de M , segue que $\nabla_{\eta_s} \eta_s = 0$. Assim, substituindo as relações obtidas em (3.25) em (3.24) obtém-se

$$\tilde{\nabla}_{\partial_s} N = \frac{\Theta'}{\Theta} N + \phi \eta_s + \Theta a'' \rho^{-2} \eta_s - \Theta a' \rho^{-2} (-\phi \rho^2 \partial_t - \phi a' \eta_s)$$

Seja $X \in \{\partial_s\}^{\perp} \cap T\Sigma$ então $X \in f_{s*}(T_p \Sigma_0)$, $\langle X, \partial_s \rangle = 0$ e $\langle X, N \rangle = 0$. Portanto $\langle \tilde{\nabla}_{\partial_s} N, X \rangle = 0$. Por este fato segue que ∂_s é uma direção principal de A e além disso na métrica warped

$$\langle \partial_s, \partial_s \rangle = \langle \eta_s + a' \partial_t, \eta_s + a' \partial_t \rangle = \rho^2 + (a')^2 \quad (3.26)$$

$$\langle \partial_t, \partial_s \rangle = \langle \partial_t, \eta_s + a' \partial_t \rangle = a'$$

$$\langle \eta_s, \partial_s \rangle = \langle \eta_s, \eta_s + a' \partial_t \rangle = \rho^2 \quad (3.27)$$

$$\langle N, \partial_s \rangle = \langle \Theta (\partial_t - a' \rho^{-2} \eta_s), \partial_s \rangle = \Theta a' - \Theta a' \rho^{-2} \rho^2 = 0$$

Das relações (3.26) e (3.27) segue que

$$\langle A \partial_s, \partial_s \rangle = \langle -\tilde{\nabla}_{\partial_s} N, \partial_s \rangle = -\frac{\Theta' \langle N, \partial_s \rangle}{\Theta} + \phi \langle \eta_s, \partial_s \rangle + \Theta a'' \rho^{-2} \langle \eta_s, \partial_s \rangle + \phi \Theta a' \rho^{-2} (\rho^2 \langle \partial_t, \partial_s \rangle + a' \langle \eta_s, \partial_s \rangle)$$

Portanto,

$$\langle A \partial_s, \partial_s \rangle = \phi \rho^2 + \Theta a'' + 2\phi \Theta a' a'$$

e o autovalor associado a ∂_s é

$$\lambda = \frac{\langle A \partial_s, \partial_s \rangle}{\langle \partial_s, \partial_s \rangle} = \frac{\langle A \partial_s, \partial_s \rangle}{\rho^2 + (a')^2} = \phi \Theta^2 + \Theta^3 \rho^{-2} a'' + 2\phi \Theta^3 \rho^{-2} a' a'$$

Assim λ é uma função que depende somente de s e de t e portanto ao longo de Σ_t é uma função constante. Com isso, para provar que $\nabla \xi$ é direção principal basta notar que

$$1 - \Theta^2 = \frac{(a')^2}{\rho^2 + (a')^2} = (a')^2 \Theta^2 \rho^{-2}$$

e $N = \Theta(\partial_t - a'\rho^{-2}\eta_s)$. E conseqüentemente

$$\nabla\xi = \partial_t - \Theta N = (a')^2\Theta^2\rho^{-2}\partial_t + a'\Theta^2\rho^{-2}\eta_s = a'\Theta^2\rho^{-2}(\eta_s - a'\partial_t) = a'\Theta^2\rho^{-2}\partial_s$$

Então $\nabla\xi$ é direção principal com curvatura principal

$$\lambda_1 = \frac{\langle A\nabla\xi, \nabla\xi \rangle}{\langle \nabla\xi, \nabla\xi \rangle} = \lambda = \Theta^3\rho^{-2}a'' + \phi\Theta^2 + 2\phi\Theta^3\rho^{-2}a'a' \quad (3.28)$$

Prova de b) Reciprocamente seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície orientável e $\nabla\xi$ o gradiente da função altura. Então $T = \nabla\xi$ é um campo gradiente. Como T é gradiente segue que $\{T\}^\perp$ é integrável. Com esta consequência podemos usar o teorema de Frobenius, ou seja existe um difeomorfismo local

$$\psi : \Sigma_0^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R} \times M^n$$

tal que $\psi(\cdot, t) : \Sigma_0^{n-1} \rightarrow \Sigma$ são folhas de $\{T\}^\perp$ e $\psi(q, \cdot) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ são as curvas integrais de T para todo $q \in \Sigma_0^{n-1}$. Vamos trabalhar para definir as φ_s paralelas a φ e assim escrever localmente Σ como um (a, f_s) gráfico. Consideremos ψ e defina

$$\begin{aligned} \varphi_t : \Sigma_0^{n-1} &\rightarrow M \\ q &\rightarrow \pi_M \circ \psi(q, t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ou seja estamos projetando as curvas integrais de $\{T\}$ em M. Precisamos trabalhar para mostrar que $p \in \Sigma_0^{n-1}$ fixo a curva $\gamma_p(t) = \pi_M \circ \psi(q, t)$ é uma geodésica de M e este fato decorre do seguinte lema geral:

Lema 3.23. Seja T gradiente em M^n . Assuma que $\|T\|$ é constante ao longo de $\{T\}^\perp$. Então as curvas integrais de T são pré-geodésicas de M.

- Hipótese 1: $T = \nabla\xi$ é um campo gradiente
- Hipótese 2: Suponha $X \in \{T\}^\perp$ e $\nabla\xi$ direção principal com $A\nabla\xi = \lambda\nabla\xi$ queremos $X(\|T\|) = 0$. Primeiro veja que

$$X(\Theta) = \langle X, \nabla\Theta \rangle = \langle X, -A\nabla\xi - \phi\Theta\nabla\xi \rangle = -\lambda\langle X, \nabla\xi \rangle - \phi\Theta\langle X, \nabla\xi \rangle$$

Como $\langle X, \nabla\xi \rangle = 0$ para todo $X \in \{T\}^\perp$ segue que $X(\Theta) = 0$. Além disso, $\|\nabla\xi\|^2 = 1 - \Theta^2$ e então $\|\nabla\xi\|^2 + \Theta^2 = 1$. Derivando ambos os lados desta equação segue que

$$2X(\|\nabla\xi\|)\|\nabla\xi\| + 2\Theta X(\Theta) = 0$$

Como $\|\nabla\xi\| \neq 0$ e $X(\Theta) = 0$ obtemos $X(\|T\|) := X(\|\nabla\xi\|) = 0$

Portanto as curvas integrais de T são pré-geodésicas de M. Daqui em diante os passos é reparametrizar $\gamma_p(t)$ pelo comprimento de arco e a função a, diferenciável e positiva, é a inversa do comprimento de arco. Em particular $\psi(p, \cdot)$ as curvas integrais de T

$$\psi'_t(p) = \frac{\nabla\xi(\psi_t(p))}{\|\nabla\xi\|^2} \text{ onde } \psi_t(p) = \psi(p, t)$$

Assim,

$$\|\psi'_t(p)\| = \frac{\sqrt{\langle \nabla \xi(\psi_t(p)), \nabla \xi(\psi_t(p)) \rangle}}{\sqrt{\|\nabla \xi\|^4}} = \frac{1}{\|\nabla \xi\|}$$

e

$$\langle \psi'_t(p), \partial_t \rangle = \left\langle \frac{\nabla \xi(\psi_t(p))}{\|\nabla \xi\|^2}, \partial_t \right\rangle = \left\langle \frac{\partial_t - \Theta N}{\|\nabla \xi\|^2}, \partial_t \right\rangle = \frac{1 - \Theta^2}{\|\nabla \xi\|^2} = 1$$

temos $\gamma'_p = \psi'_t(p) - \langle \psi'_t(p), \partial_t \rangle \partial_t$ que rende

$$\|\gamma'_p\|^2 = \|\psi'_t(p)\|^2 - 2\langle \psi'_t(p), \partial_t \rangle + \langle \psi'_t(p), \partial_t \rangle^2 = \frac{1}{\|\nabla \xi\|^2} - 2 + 1 = \frac{1 - \|\nabla \xi\|^2}{\|\nabla \xi\|^2}$$

Logo,

$$\|\gamma'_p\| = \frac{\sqrt{1 - \|\nabla \xi\|^2}}{\|\nabla \xi\|} \quad (3.30)$$

Seja $s = L_p(t)$ o parâmetro de comprimento de arco de γ_p de um ponto arbitrário $t_0 \in I_0$. Desde que $\|\nabla \xi\|$ é uma função que depende somente de t , segue de 3.30 que o mesmo é verdade para $L_p(t)$. Consequentemente a função $a = L_p^{-1} : I \rightarrow I_0$ depende somente de s e satisfaz $a' > 0$. Escrevendo por abuso de notação $\gamma_p = \gamma_p \circ a$ e $f_s = \varphi_{a(s)}$ têm-se que cada γ_p é o comprimento de arco geodésico de M , então as imersões f_s são paralelas e Σ é um (a, f_s) gráfico. Isso termina a adaptação da prova do teorema 6 de (LIMA; ROITMAN, 2021) para o ambiente warped. \square

Uma classe importante de hipersuperfícies de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_c^n$ tendo $\nabla \xi$ como uma direção principal são as *hipersuperfícies rotacionais*, as quais são obtidas por uma rotação de uma curva plana sobre o eixo $\mathbb{R} \times o, o \in \mathbb{Q}_c^n$. De acordo com (LIMA; ROITMAN, 2021) toda seção horizontal Σ_t de uma hipersuperfície rotacional $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_c^n$ está contida em uma esfera geodésica com centro $(t, o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_c^n$ e faz sentido considerar a seguinte definição de rotacional em produto riemanniano

Definição 3.24. Uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R} \times M$ é chamada de *rotacional* se existe um ponto fixo $o \in M$ tal que toda seção vertical Σ_t está contida em uma esfera geodésica com centro $(t, o) \in \mathbb{R} \times M^n$. Então chamamos $\mathbb{R} \times \{o\}$ de eixo de Σ .

Observação 3.25. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R} \times M$ uma hipersuperfície rotacional com nenhum ponto vertical e função ângulo não nula. Pelo Teorema 3.22, $\nabla \xi$ é uma direção principal de toda rotacional Σ .

No caso warped a definição pode ser considerada a mesma desde que coincida no caso em que a função warping igual a 1. Há algumas considerações a fazer usando a definição do difeomorfismo

$$G : I \rightarrow J = G(I)$$

tal que $G' = 1/\rho$ e o difeomorfismo conforme

$$\begin{aligned} \varphi : I \times_\rho \mathbb{Q}_c^n &\rightarrow J \times \mathbb{Q}_c^n \\ (t, p) &\rightarrow (G(t), p) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Isso junto com [(MANFIO; TOJEIRO; VEKEN, 2020), Lema 3] dá que $\Sigma \subset \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem a T-propriedade se e somente se $\varphi(\Sigma)$ tem a T-propriedade como uma hipersuperfície de $J \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Desde que o difeomorfismo φ fixa o segundo fator $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ vale as seguintes equivalências:

- Σ é rotacional se e somente se $\varphi(\Sigma)$ é rotacional
- $\Sigma_t \subset \Sigma$ é totalmente umbílica em $\{t\} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ se e somente se $\varphi(\Sigma_t) \subset \varphi(\Sigma)$ é totalmente umbílica em $\{G(t)\} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

Mais detalhes sobre as rotacionais em $I \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ pode ser encontrado em (LIMA; MANFIO; SANTOS, 2022, seção 4).

SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA PARALELA NO PRODUTO WARPED $I \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

O estudo de superfícies de curvatura média constante em espaços homogêneos é um problema clássico em geometria e tem atraído a atenção de excelentes matemáticos nas últimas décadas. Em (ALENCAR; CARMO; TRIBUZY, 2007), os autores introduziram a forma real quadrática

$$Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), H \rangle - \varepsilon \langle X, T \rangle \langle Y, T \rangle$$

para uma superfície $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$, como uma generalização para codimensão alta da forma real quadrática de Abresch-Rosenberg definida em (ABRESCH; ROSENBERG, 2004) para superfícies de curvatura média constante, Alencar-do Carmo-Tribuzy provaram que a $(2, 0)$ -parte $Q^{(2,0)}$ de Q é holomorfa para superfícies com vetor curvatura média paralelo. Isso significa que se (u, v) são coordenadas isotermas em Σ^2 , a função complexa

$$Q(Z, Z) = 2\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - \varepsilon \langle Z, T \rangle^2$$

é holomorfa, onde $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(2u + i2v)$ e a métrica em Σ^2 é estendida a uma aplicação \mathbb{C} -bilinear.

Os mesmos autores observaram em (ALENCAR; CARMO; TRIBUZY, 2012) que superfícies com vetor curvatura média paralelo que não estão contidos em slices de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ e para os quais $Q^{(2,0)}$ é nula, pertencem a classe \mathcal{A} , isto é, o campo tangente $\nabla \xi$ é direção principal de todos os operadores de forma de Σ^2 . Eles também provaram que uma superfície $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ com vetor curvatura média paralelo tem $Q^{(2,0)}$ nula se ou Σ^2 é holomorfa a uma esfera ou, se $\varepsilon = -1$, Σ^2 tem curvatura Gaussiana $K \geq 0$ e K não é identicamente nula. O objetivo central deste capítulo é obter uma versão do resultado de (ALENCAR; CARMO; TRIBUZY, 2012) para superfícies com vetor curvatura média paralelo no espaço produto warped $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Motivados pela abordagem introduzida em (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014), o teorema principal deste capítulo seguirá como uma aplicação de um teorema de redução de codimensão para superfícies em $I \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.

4.1 Fatos básicos

Dada uma imersão isométrica $f : \Sigma^m \rightarrow I \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, considere a imersão composta $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i = j \circ \varphi$ é dada em termos do difeomorfismo conforme $\varphi : I \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times J$ dado em (3.1) e j é a inclusão canônica $j : \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$. O campo vetorial $\widehat{\nu} = \pi \circ j$ é unitário e normal a inclusão j , onde $\pi : \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ é a projeção sobre o primeiro fator. O objetivo desta seção é relacionar as segunda forma fundamental de f e \tilde{f} .

Dado um campo $Z \in \mathcal{X}(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R})$, temos:

$$\tilde{\nabla}_Z \widehat{\nu} = \pi_* i_* Z = i_* Z - \langle i_* Z, i_* \partial_t \rangle i_* \partial_t = i_* (Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t),$$

para todo $Z \in T(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R})$ onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada em \mathbb{E}^{n+2} . Consequentemente

$$A_{\widehat{\nu}}^i Z = -Z + \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t. \quad (4.1)$$

Os espaços normais de f e \tilde{f} são relacionados por

$$N^{\tilde{f}} M = i_* N^f M \oplus \text{span}\{\nu\},$$

onde $\nu = \widehat{\nu} \circ f = \pi \circ \tilde{f}$. Denote $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi Civita de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Dado $\xi \in N^f M$ nos obtemos de (4.1) que

$$\tilde{\nabla}_X i_* \xi = \tilde{f}_* A_{\xi}^f X + i_* \nabla_X^{\perp} \xi + \alpha_i(f_* X, \xi). \quad (4.2)$$

De fato pela equação de Gauss

$$\tilde{\nabla}_X i_* \xi = i_* \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_i(f_* X, \xi). \quad (4.3)$$

Da equação de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -f_* A_{\xi}^f X + \nabla_X^{\perp} \xi. \quad (4.4)$$

Logo de (4.3) e (4.4) segue (4.6).

Agora note que $\langle \alpha_i(f_* X, \xi), \widehat{\nu} \rangle = \varepsilon \langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle$. De fato como a imersão i é uma hipersuperfície segue que $\alpha_i(f_* X, \xi) = a\nu$. Dai

$$\langle \alpha_i(f_* X, \xi), \nu \rangle = a \langle \nu, \nu \rangle = \begin{cases} a, & \text{se } \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2}, \\ -a, & \text{se } \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{L}^{n+2}. \end{cases}$$

mas

$$\begin{aligned} \langle \alpha_i(f_* X, \xi), \widehat{\nu} \rangle &= \langle A_{\widehat{\nu}}^i X, \xi \rangle \\ &= \langle -X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, \xi \rangle \\ &= \langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Então segue que para $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ temos $\alpha_i(f_* X, \xi) = a\nu = \varepsilon \langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle \nu$. Assim

$$\tilde{\nabla}_X i_* \xi = \tilde{f}_* A_{\xi}^f X + i_* \nabla_X^{\perp} \xi + \varepsilon \langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle \nu. \quad (4.6)$$

Consequentemente

$$A_{i_*\xi}^{\tilde{f}} = A_{\xi}^f, \quad (4.7)$$

e

$$\tilde{\nabla}_X^\perp i_*\xi = i_*\nabla_X^\perp \xi + \varepsilon \langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle v, \quad (4.8)$$

para todo $\xi \in N^f M$, onde $\tilde{\nabla}^\perp$ é a conexão normal de \tilde{f} . As equações de estrutura no produto warped são

$$\alpha(v, T) + \nabla_v^\perp \eta = -\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \langle v, T \rangle \eta, \quad (4.9)$$

$$\nabla_v T - A_\rho v = \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} (v - \langle v, T \rangle T), \quad (4.10)$$

para todo $v \in TM$, onde $\nabla, \nabla^\perp, \alpha$ e A_ρ denotam a conexão de Levi Civita em M , a conexão normal induzida em M , a segunda forma fundamental da imersão $x(M)$ e o endomorfismo de Weingarten associado a α , respectivamente.

4.2 Subvariedades com fibrado normal flat

Uma classe importante de subvariedades são aquelas para os quais o tensor de curvatura R^\perp do fibrado normal é identicamente nulo, denominadas *subvariedades com fibrado normal flat*. O objetivo desta seção é descrever as propriedades básicas de tais subvariedades no espaço produto warped $I \times_\rho \mathbb{Q}_\varepsilon^n$.

Proposição 4.1. Uma imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ tem fibrado normal flat em $x \in M^m$ se, e somente se, os operadores de forma

$$\{A_\xi; \xi \in T_x M^\perp\},$$

são simultaneamente diagonalizáveis ou, equivalentemente, se e somente se existe uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $T_x M$ tal que

$$\alpha(X_i, X_j) = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Demonstração. Pela equação de Ricci, tem-se:

$$\langle R^\perp(U, V)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]U, V \rangle.$$

Assim, o tensor curvatura normal R^\perp se anula em $x \in M^m$ se, e somente, se todos os operadores de forma $A_\xi, \xi \in N^f M(x)$ comutam. Logo o resultado segue de álgebra linear. \square

Pelo resultado acima, para cada $x \in M^m$ onde $R^{\perp}(x) = 0$ o espaço tangente $T_x M$ se decompõe ortogonalmente como

$$T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_s(x),$$

esta decomposição tem a propriedade que para cada $\xi \in N^f M(x)$ existe um número real $\lambda_i(\xi)$, $1 \leq i \leq s = s(x)$ tal que

$$A_{\xi}|_{E_i(x)} = \lambda_i(\xi)I,$$

e os mapas $\xi \rightarrow \lambda_i(\xi)$ são distintos aos pares. Como tais mapas são lineares, existe um único pares distintos de vetores $\eta_i(x) \in N^f M(x)$, $1 \leq i \leq s$ chamados de *normais principais* de f em x tais que

$$\lambda_i(\xi) = \langle \eta_i(x), \xi \rangle, 1 \leq i \leq s.$$

Portanto,

$$E_i(x) = E_{\eta_i(x)} = \{X \in T_x M; \alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \eta_i(x) \text{ para todo } Y \in T_x M\}$$

e a segunda forma fundamental de f tem a representação simples

$$\alpha(X, Y) = \sum_{i=1}^s \langle X^i, Y^i \rangle \eta_i(x), \quad (4.11)$$

onde $X \rightarrow X^i$ é a projeção ortogonal em $E_i(x)$. Então

$$\langle A_{\xi} X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^s \langle X^i, Y^i \rangle \eta_i(x), \xi \right\rangle = \sum_{i=1}^s \langle X^i, Y^i \rangle \langle \eta_i(x), \xi \rangle,$$

Assim

$$A_{\xi} X^i = \sum_{i=1}^s \langle \eta_i(x), \xi \rangle X^i, \quad (4.12)$$

para todo $X \in T_x M$ e $\xi \in N^f M(x)$.

4.3 Redução de codimensão de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

Um problema básico em teoria de subvariedades consiste em investigar quando a codimensão de uma dada imersão isométrica pode ser reduzida. Em espaços de forma, dizemos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ *reduz a codimensão* a $q < p$ se existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^{n+q}$ em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^{n+p}$ tal que $f(M) \subset \mathbb{Q}_{\varepsilon}^{n+q}$.

Proposição 4.2. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Suponha que existe um subfibrado paralelo L de um subfibrado normal $N_f M$ com $\text{rank } q < p$ tal que $N_1(x) \subset L(x)$ para todo $x \in M^n$. Então a codimensão de f pode ser reduzida a q .

Demonstração. (DAJCZER; TOJEIRO, 2019, página 64, Proposição 2.1) □

Um dos resultados principais com condições necessárias e suficientes para o paralelismo do primeiro fibrado normal.

Teorema 4.3. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^{n+p}$ uma imersão isométrica 1-regular. Então o primeiro fibrado normal N_1 é paralelo se e somente se

- (i) $\nabla^{\perp} R^{\perp}|_{N_1^{\perp}} = 0$,
- (ii) $\nabla^{\perp} H \in \Gamma(N_1)$

Demonstração. (DAJCZER; TOJEIRO, 2019, página 67, Teorema 2.6) □

Seguindo (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014) diremos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ reduz codimensão a 1 se existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^{m+l-1}$ de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tal que $f(M^m) \subset \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^{m+l-1}$. O objetivo desta seção é encontrar condições para que uma dada imersão reduza a codimensão.

Dada uma imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, denotemos por ∇^{\perp} a coexão normal de f e por $N_1(x)$ o primeiro espaço normal de f em $x \in M^m$, isto é, o subespaço de $T_x M^{\perp}$ gerado pela segunda forma fundamental α de f em x .

Lema 4.4. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ uma imersão isométrica. Seja η o campo vetorial normal definido por $\partial_t = f_* T + \eta$. Assuma que $L := N_1 + \text{span}\{\eta\}$ é um sub fibrado de $N^f M$ de rank $l < n + 1 - m$ e que $\nabla^{\perp} N_1 \subset L$. Então f reduz codimensão para l .

Demonstração. Pela equação de estrutura, $\xi \in L$

$$\alpha(X, T) = -\nabla_X^{\perp} \xi + (\rho'/\rho)\langle X, T \rangle \eta,$$

para todo $X \in TM$. Então

$$-\nabla_X^{\perp} \xi + (\rho'/\rho)\langle X, T \rangle \eta \subset N_1 \subset L.$$

Logo $\nabla_X^{\perp} \xi \subset L$, para todo $X \in TM$. Por hipótese $\nabla^{\perp} N_1 \subset L$ então L é subfibrado paralelo de $N^f M$. Assim L^{\perp} também é subfibrado paralelo de $N^f M$. Seja $\tilde{f} = i \circ f$ onde $i : \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ é a composição da inclusão com o difeomorfismo conforme

$$\varphi : \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times J.$$

Dado $\xi \in N_1^{\perp} \cap \{\eta\}^{\perp}$ e como L^{\perp} é subfibrado paralelo temos $\nabla_X^{\perp} \xi \in L^{\perp}$. De (4.8) e $\eta \in L$ temos $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ ou seja

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} i_* \xi &= i_* \nabla_X^{\perp} \xi + \varepsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle v \\ &= i_* \nabla_X^{\perp} \xi \in i_* L^{\perp}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

para quaisquer $i_*\xi \in i_*L^{\perp}$. Então i_*L^{\perp} também é subfibrado paralelo de N^fM . Por outro lado, segue de (4.7) que $i_*L^{\perp} \subset \tilde{N}_1^{\perp}$ onde $\tilde{N}_1^{\perp}(x)$ é o primeiro espaço normal de \tilde{f} em $x \in M^m$. De fato, dado $i_*\xi \in i_*L^{\perp}$, temos que $\xi \in L^{\perp}$, em particular, $\xi \in N_1^{\perp}$, o que implica que $A_{\xi}^f = 0$. Assim,

$$\langle \alpha_{\tilde{f}}(X, Y), i_*\xi \rangle = \langle A_{i_*\xi}^{\tilde{f}}X, Y \rangle = \langle A_{\xi}^fX, Y \rangle = 0.$$

Nós obtemos da fórmula de Weingarten para \tilde{f} que

$$\tilde{\nabla}_X i_*\xi = -\tilde{f}_*A_{i_*\xi}^{\tilde{f}}X + \tilde{\nabla}_X^{\perp} i_*\xi = \tilde{\nabla}_X^{\perp} i_*\xi \in i_*L^{\perp},$$

onde $\tilde{\nabla}$ denota a derivada de \mathbb{E}^{n+2} . Consequentemente i_*L^{\perp} é um subespaço constante de \mathbb{E}^{n+2} , o qual é ortogonal a ∂_t . De fato, dado $\xi \in i_*L^{\perp}$, temos $\langle \xi, f_*T + \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = 0$. Denote por K o complemento ortogonal de i_*L^{\perp} em \mathbb{E}^{n+2} . Então para todo $x_0 \in M^m$ nos temos

$$f(M) \subset \tilde{f}(x_0) + K.$$

Mas como K contém ∂_t e $v(x_0)$ também contém o vetor posição $\tilde{f}(x_0)$. Portanto $\tilde{f}(x_0) + K = K$. Nós concluímos que

$$\tilde{f}(M) \subset (\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n) \cup K = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^{m+l-1}.$$

□

Teorema 4.5. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ uma imersão isométrica. Seja η o campo vetorial normal definido por $\partial_t = f_*T + \eta$. Assuma que $L := N_1 + \text{span}\{\eta\}$ é um subfibrado de N^fM de rank $l < n + 1 - m$. Então $\nabla^{\perp}N_1 \subset L$ se e somente se as seguintes duas condições são afirmativas:

(i) $\nabla^{\perp}R^{\perp}|_{L^{\perp}} = 0$

(ii) $\nabla^{\perp}H \in L$

Demonstração. Suponha que $\nabla^{\perp}N_1 \subset L$. Então como H é o campo vetorial curvatura média segue que (ii) é trivialmente satisfeito. Para provar (i), considere $\xi \in N_1^{\perp}$, temos $A_{\xi} = 0$, então a equação de Ricci nos fornece que

Dado $\xi \in L^{\perp}$ nos temos que $\xi \in N_1^{\perp}$ e que $\nabla_Z^{\perp}\xi \in N_1^{\perp}$ por nossa hipótese. Consequentemente

$$(\nabla_Z R^{\perp})(X, Y, \xi) = (\nabla_Z R^{\perp})(X, Y)\xi - R^{\perp}(\nabla_Z X, Y)\xi - R^{\perp}(X, \nabla_Z Y)\xi - R^{\perp}(X, Y)\nabla_Z^{\perp}\xi = 0. \quad (4.14)$$

Agora suponha (i) e (ii) então é suficiente provar que $\nabla^{\perp}L^{\perp} \subset N_1^{\perp}$. Seja $\xi \in L^{\perp}$. Como $R^{\perp}(X, Y)\xi = 0$ para todo $X, Y \in TM$ nos obtemos de (i) $\nabla^{\perp}R^{\perp}|_{L^{\perp}} = 0$ e equação (4.14) que

$$R^{\perp}(X, Y)\nabla_Z^{\perp}\xi = 0,$$

para todo $X, Y, Z \in TM$. Usando a equação de Ricci novamente, nos obtemos que

$$\left[A_{\nabla_Z^\perp \xi}, A_{\nabla_W^\perp \xi} \right] = 0,$$

para todo $Z, W \in TM$. De fato,

$$0 = \langle R^\perp(X, Y) \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle = \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y) + \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y). \quad (4.15)$$

Fazendo o produto interno de (4.15) por ζ temos

$$0 = \langle \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y), \zeta \rangle + \langle \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y), \zeta \rangle, \zeta \in TM^\perp.$$

Pela definição do operador de forma

$$0 = \langle A_\zeta X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y \rangle + \langle A_\zeta A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y \rangle.$$

Usando que A é auto-adjunto segue que

$$\left[A_{\nabla_W^\perp \xi}, A_{\nabla_Z^\perp \xi} \right] = 0, \text{ para quaisquer } W, Z \in TM.$$

Consequentemente, qualquer $x \in M$ existe uma base ortonormal Z_1, \dots, Z_n de $T_x M$ que diagonaliza simultaneamente todos os operadores de forma $A_{\nabla_Z^\perp \xi} Z \in TM$. Nós mostraremos que

$$\langle \nabla_{Z_k}^\perp \xi, \alpha(Z_i, Z_j) \rangle = 0,$$

para todo $1 \leq i, j, k \leq n$ o que implica que $\nabla_Z^\perp \xi \in N_1^\perp$ para todo $X \in TM$ e $\nabla^\perp L^\perp \subset N_1^\perp$. Da escolha da base Z_1, \dots, Z_n , temos

$$\langle \alpha(Z_i, Z_j), \nabla_{Z_k}^\perp \xi \rangle = \langle A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i, Z_j \rangle = \langle \lambda_{ki} Z_i, Z_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j. \\ \lambda_{ki}, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Segue da equação de Codazzi e o fato de $\xi \in L^\perp \subset \{\eta\}^\perp$, isto é, $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ que

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) - (\nabla_Y A)(X, \xi) = 0. \quad (4.16)$$

Mas por definição

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = \nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \xi} Y. \quad (4.17)$$

Em particular, por $\xi \in N_1^\perp$, temos $(\nabla_X A)(Y, \xi) = -A_{\nabla_X^\perp \xi} Y$. Portanto (4.16) diz que

$$A_{\nabla_{Z_i}^\perp \xi} Z_k = A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i.$$

Então

$$\lambda_{ik} Z_k = \lambda_{ki} Z_i \Rightarrow \lambda_{ik} = 0, \text{ se } i \neq k$$

ou seja, o autovalor λ_{ki} de $A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi}$ correspondente a Z_i desaparece a menos $k = i$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{Z_k}^\perp \xi, \alpha(Z_i, Z_i) \rangle &= \langle A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i, Z_i \rangle \\ &= \langle A_{\nabla_{Z_i}^\perp \xi} Z_k, Z_i \rangle \\ &= 0, \text{ se } i \neq k. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente da hipótese $\nabla^{\perp}H \in L$ e $\xi \in L^{\perp}$ segue que $\langle \nabla_{Z_i}^{\perp}H, \xi \rangle = 0$. Logo da compatibilidade com a métrica

$$Z_i \langle H, \xi \rangle = \langle \nabla_{Z_i}^{\perp}H, \xi \rangle + \langle H, \nabla_{Z_i}^{\perp}\xi \rangle. \quad (4.19)$$

Temos também que $\langle H, \xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in N_1^{\perp}$. Portanto, de (4.18) e (4.19) temos

$$\langle \nabla_{Z_k}^{\perp}\xi, \alpha(Z_i, Z_i) \rangle = n \langle H, \nabla_{Z_i}^{\perp}\xi \rangle = n Z_i \langle H, \xi \rangle = 0.$$

Da equação acima temos $\langle \nabla_Z^{\perp}\xi, \alpha(X, Y) \rangle = 0$ para todos $X, Y, Z \in TM$ e $\xi \in L^{\perp}$. Pela compatibilidade com a métrica

$$\langle \nabla_Z^{\perp}\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_Z^{\perp}\eta \rangle = Z \langle \xi, \eta \rangle.$$

Mas $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ então $\langle \nabla_Z^{\perp}\xi, \eta \rangle = -\langle \xi, \nabla_Z^{\perp}\eta \rangle$. Note que $\alpha(X, T) = -\nabla_X^{\perp}\xi - (\rho'/\rho)\langle X, T \rangle \eta$ então

$$\begin{aligned} -\langle \xi, \nabla_Z^{\perp}\eta \rangle &= -\langle \xi, -\alpha(X, T) - (\rho'/\rho)\langle X, T \rangle \eta \rangle \\ &= \langle A_{\xi}X, T \rangle + (\rho'/\rho)\langle X, T \rangle \langle \eta, \xi \rangle \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

pois $\xi \in N_1^{\perp}$. Assim, $\nabla_Z^{\perp}\xi \in \{\eta\}^{\perp}$. Logo $\nabla_Z^{\perp}\xi \in N_1^{\perp} \cap \{\eta\}^{\perp} = L^{\perp}$. O que mostra que L^{\perp} é paralelo, e conseqüentemente, L também é. E portanto $\nabla^{\perp}N_1 \subset L$. \square

4.4 Aplicações

4.4.1 Um teorema do tipo Alencar–do Carmo–Tribuzy

Nesta seção aplicaremos o Teorema 4.5 para provarmos uma generalização de um resultado devido a Alencar, do Carmo e Tribuzy. Faremos uso do seguinte resultado:

Lema 4.6. [(YAU, 1974)] Seja M^2 uma superfície com vetor curvatura média paralelo em uma variedade N com curvatura seccional constante. Então ou M^2 é uma superfície mínima de uma hipersuperfície umbílica de N ou M^2 encontra-se em uma subvariedade umbílica tridimensional de N com curvatura média constante.

Observação 4.7. Observe que

$$\left(\frac{\varepsilon}{\rho(h)^2} - \left(\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \right)^2 + \frac{\rho''(h)}{\rho(h)} \right) = 0 \Rightarrow \varepsilon = \rho'(h)^2 - \rho''(h)\rho(h) \quad (4.21)$$

- $\varepsilon = 0$. Neste caso as soluções são $\rho(t) = e^{c_1 t + c_2}$ e corresponde ao modelo $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{R}^n$.
- $\varepsilon = 1$. Neste caso as soluções são $\rho(t) = \frac{\sin(\sqrt{c_1}(t + c_2))}{\sqrt{c_1}}$ e corresponde ao modelo $\mathbb{S}^{n+1} - \{S, N\} = (0, \pi) \times_{\rho} \mathbb{S}^n$.

- $\varepsilon = -1$. Neste caso as soluções são $\rho(t) = \cosh(t + c_2)$ e corresponde ao modelo $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{H}^n$.

Portanto quando este termo (4.21) é zero já existe o teorema deste tipo e podemos considerar que este termo não se anula no teorema seguinte.

Teorema 4.8. Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n, n \geq 5$, uma superfície com vetor curvatura média paralelo não nulo. Então, uma das seguintes possibilidades é verdadeira:

- f é uma superfície mínima de uma hipersuperfície umbílica de um slice $\{t\} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.
- f é uma superfície com curvatura média constante em uma subvariedade tridimensional umbílica ou uma totalmente geodésica de um slice $\{t\} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.
- Existe $W \subset M^2$ tal que $f(W)$ está contida em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^m, m \leq 4$, de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.

Demonstração. Como o vetor curvatura média H é paralelo e não nulo, a função $\mu := \|H\|^2$ em M^2 é uma constante não nula em M^2 . Suponhamos primeiro que $A_H = \mu I$ em todo ponto de M^2 . Afirmamos que o campo de vetores T se anula identicamente. Assumamos o contrário, então existe um subconjunto aberto U , onde $T \neq 0$. Escolha um campo de vetores unitários X em U ortogonal a T . Então

$$\langle \alpha(X, T), H \rangle = \langle A_H X, T \rangle = \langle \mu I X, T \rangle = \mu \langle X, T \rangle = 0. \quad (4.22)$$

Pela equação de Codazzi temos

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_T^{\perp} \alpha)(X, X) - (\nabla_X^{\perp} \alpha)(T, X), H \rangle &= \left(\frac{\varepsilon}{\rho(h)^2} - \left(\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \right)^2 + \frac{\rho''(h)}{\rho(h)} \right) \\ &* [\langle X, T \rangle \langle X, T \rangle - \langle X, X \rangle \langle T, T \rangle] \langle \eta, H \rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

mas $\langle X, T \rangle = 0$ e $\|X\| = 1$ e então substituindo em (4.23) obtemos

$$\langle (\nabla_T^{\perp} \alpha)(X, X) - (\nabla_X^{\perp} \alpha)(T, X), H \rangle = - \left(\frac{\varepsilon}{\rho(h)^2} - \left(\frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \right)^2 + \frac{\rho''(h)}{\rho(h)} \right) \|T\|^2 \langle \eta, H \rangle$$

Afirmação: $\langle (\nabla_T^{\perp} \alpha)(X, X) - (\nabla_X^{\perp} \alpha)(T, X), H \rangle = 0$. De fato por definição de $\nabla_T^{\perp} \alpha$ segue que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_T^{\perp} \alpha)(X, X) - (\nabla_X^{\perp} \alpha)(T, X), H \rangle &= \langle \nabla_T^{\perp} \alpha(X, X), H \rangle - \langle \alpha(\nabla_T X, X), H \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_T X), H \rangle \\ &- \langle \nabla_T^{\perp} \alpha(T, X), H \rangle - \langle \alpha(\nabla_X T, X), H \rangle - \langle \alpha(T, \nabla_X X), H \rangle. \end{aligned}$$

- De (4.22) temos

$$\begin{aligned} X \langle \alpha(X, T), H \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \nabla_X^{\perp} \alpha(X, T), H \rangle + \langle \alpha(X, T), \nabla_X^{\perp} H \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_X^{\perp} \alpha(X, T), H \rangle = 0. \end{aligned}$$

- Como μ é constante $T\mu = 0$ assim

$$\begin{aligned} \langle \alpha(X, X), H \rangle &= \langle A_H X, X \rangle = \mu \langle X, X \rangle = \mu \Rightarrow T \langle \alpha(X, X), H \rangle = 0, \\ &\Rightarrow \langle \nabla_T^{\perp} \alpha(X, X), H \rangle + \langle \alpha(X, X), \nabla_T^{\perp} H \rangle = T \langle \alpha(X, X), H \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_T^{\perp} \alpha(X, X), H \rangle = 0. \end{aligned}$$

- Como $\langle X, X \rangle = 1$ temos $T \langle X, X \rangle = 0$ assim

$$\begin{aligned} 0 = T \langle X, X \rangle &= 2 \langle \nabla_T X, X \rangle \Rightarrow \langle \nabla_T X, X \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \alpha(\nabla_T X, X), H \rangle = \langle A_H \nabla_T X, X \rangle = \mu \langle \nabla_T X, X \rangle = 0. \end{aligned}$$

- Como $\langle X, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_X T, X \rangle + \langle \nabla_X X, T \rangle = X \langle X, T \rangle = 0$, assim

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\nabla_X T, X), H \rangle + \langle \alpha(T, \nabla_X X), H \rangle &= \langle A_H \nabla_X T, X \rangle + \langle A_H \nabla_X X, T \rangle \quad (4.24) \\ &= \mu \langle \nabla_X T, X \rangle + \mu \langle \nabla_X X, T \rangle \\ &= \mu (\langle \nabla_X T, X \rangle + \langle \nabla_X X, T \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Isto mostra a afirmação. Neste caso podemos concluir que $\langle \eta, H \rangle = 0$ em U . Então temos

$$\begin{aligned} 0 = T \langle \eta, H \rangle &= \langle \nabla_T^{\perp} \eta, H \rangle + \langle \eta, \nabla_T^{\perp} H \rangle \\ &= \langle -\alpha(T, T) - \frac{\rho'(h)}{\rho(h)} \langle T, T \rangle \eta, H \rangle \\ &= \langle -\alpha(T, T), H \rangle + 0 = -\langle A_H T, T \rangle = -\mu \langle T, T \rangle = -\mu \|T\|^2. \end{aligned}$$

Como μ é uma constante não nula, segue que $T = 0$ em U , o que é uma contradição, o que prova nossa afirmação. Portanto, se $A_H = \mu I$ em todo ponto de M^2 , então $f(M^2)$ está contida em um slice $\{t\} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ de $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ e qualquer uma das possibilidades (i) ou (ii) é verdade pelo Lema 4.6. Assuma agora que $A_H \neq \mu I$ em um subconjunto aberto V de M^2 . Segue-se da equação de Ricci que

$$R^{\perp}(X, Y)H = \alpha(X, A_H Y) - \alpha(A_H X, Y)$$

Por outro lado, uma vez que H é paralelo temos que

$$R^{\perp}(X, Y)H = \nabla_X^{\perp} \nabla_Y^{\perp} H - \nabla_Y^{\perp} \nabla_X^{\perp} H - \nabla_{[X, Y]}^{\perp} H = 0,$$

Consequentemente, como A é auto adjunto segue

$$\begin{aligned} \alpha(X, A_H Y) &= \alpha(A_H X, Y) \\ &\Rightarrow \langle \alpha(X, A_H Y), \zeta \rangle = \langle \alpha(A_H X, Y), \zeta \rangle \\ &\Rightarrow \langle A_{\zeta} X, A_H Y \rangle = \langle A_H X, A_{\zeta} Y \rangle \\ &\Rightarrow \langle X, A_{\zeta} A_H Y \rangle = \langle X, A_H A_{\zeta} Y \rangle, \end{aligned}$$

o que implica que $[A_H, A_{\zeta}] = 0$ para qualquer $x \in M^2$ e cada vetor normal $\zeta \in N_x M$. Então o fato que A_H tem autovalores distintos em V implica que os autovetores de A_H também são autovetores

de A_ζ para qualquer $\zeta \in N_x M, x \in V$. Portanto todos os operadores de forma são diagonalizáveis simultaneamente em qualquer $x \in V$, o qual implica que f tem um fibrado normal flat em V pela equação de Ricci.

Afirmção: O primeiro espaço normal N_1 de f tem no máximo dimensão 2 em qualquer $x \in V$. Sejam $\{X_1, X_2\}$ uma base de $T_x M$. Então escrevendo $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$ e $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2$, temos pela bilinearidade

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y) &= a_1 b_1 \alpha(X_1, X_1) + a_1 b_2 \alpha(X_1, X_2) + a_2 b_1 \alpha(X_2, X_1) + a_2 b_2 \alpha(X_2, X_2) \\ &= a \alpha(X_1, X_1) + b \alpha(X_1, X_2) + c \alpha(X_2, X_2).\end{aligned}$$

Logo $\{\alpha(X_1, X_1), \alpha(X_1, X_2), \alpha(X_2, X_2)\}$ é base de N_1 . Mostraremos agora que $\alpha(X_1, X_2) = 0$. Se $\{X_1, X_2\}$ for base que diagonaliza A_ξ , temos que

$$\begin{aligned}\alpha(X_1, A_\xi X_2) &= \alpha(X_1, \lambda_2 X_2) = \lambda_2 \alpha(X_1, X_2) \\ \alpha(A_\xi X_1, X_2) &= \alpha(\lambda_1 X_1, X_2) = \lambda_1 \alpha(X_1, X_2).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Subtraindo as equações temos que $(\lambda_1 - \lambda_2) \alpha(X_1, X_2) = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ temos que $\alpha(X_1, X_2) = 0$. Isto mostra que $\dim N_1 \leq 2$.

Seja $W \subset V$ um conjunto aberto, onde $L = N_1 + \text{span}\{\eta\}$ tem dimensão constante $l \leq 3$. Segue do Lema 4.4 e do Teorema 4.5 que $f(W)$ encontra-se em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\varepsilon^{2+l-1}$ de $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{Q}_\varepsilon^n$. \square

Lema 4.9. Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ e $\psi : N^n \rightarrow \widehat{N}^n$ um difeomorfismo local conforme, com fator conforme λ . Seja $\widehat{f} = \psi \circ f$ com fator conforme λ então:

$$\text{i) } \alpha^{\widehat{f}}(X, Y) = \psi_* \alpha^f(X, Y) + \alpha^\psi(f_* X, f_* Y).$$

$$\text{ii) } 2H^{\widehat{f}} = 2\psi_* H^f + \sum_{i=1}^2 \alpha^\psi(f_* X_i, f_* X_i).$$

$$\text{iii) } 2\nabla_X^\perp H^{\widehat{f}}(x) = 2X(\psi_*)H^f + 2\psi_* \nabla_X^\perp H^f - \frac{2}{\lambda} \nabla_X^\perp \psi_*(\text{grad } \lambda)^\perp.$$

Prova de i). Sejam $\nabla, \widetilde{\nabla}, \overline{\nabla}$ as conexões de Levi Civita de M^2, N^n e \widehat{N}^n , respectivamente. Usando a fórmula de Gauss para f, \widehat{f} e ψ temos para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $U, V \in \mathcal{X}(N^n)$

$$\widetilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha^f(X, Y)\tag{4.26}$$

$$\overline{\nabla}_U \psi_* V = \psi_* \widetilde{\nabla}_U V + \alpha^\psi(U, V)\tag{4.27}$$

$$\overline{\nabla}_X \widehat{f}_* Y = \widehat{f}_* \nabla_X Y + \alpha^{\widehat{f}}(X, Y).\tag{4.28}$$

Então

$$\begin{aligned}
\alpha^{\hat{f}}(X, Y) &\stackrel{(4.28)}{=} \bar{\nabla}_X \hat{f}_* Y - \hat{f}_* \nabla_X Y, \\
&= \bar{\nabla}_X \psi_*(f_* Y) - \hat{f}_* \nabla_X Y \\
&\stackrel{(4.27)}{=} \psi_* \tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Y + \alpha^{\psi}(f_* X, f_* Y) - \hat{f}_* \nabla_X Y, \\
&\stackrel{(4.26)}{=} \psi_* f_* \tilde{\nabla}_X Y + \psi_* \alpha^f(X, Y) + \alpha^{\psi}(f_* X, f_* Y) - \hat{f}_* \nabla_X Y, \\
&= \psi_* \alpha^f(X, Y) + \alpha^{\psi}(f_* X, f_* Y).
\end{aligned}$$

□

Prova de ii). Por definição

$$2H^{\hat{f}} = \sum_{j=1}^2 \alpha^{\hat{f}}(X_j, X_j) \quad (4.29)$$

$$2H^f = \sum_{j=1}^2 \alpha^f(X_j, X_j) \quad (4.30)$$

$$nH^{\psi} = \sum_{j=1}^n \alpha^{\psi}(X_j, X_j). \quad (4.31)$$

Então do item *i)*

$$\begin{aligned}
2H^{\hat{f}} &= \sum_{i=1}^2 \alpha^{\hat{f}}(X_i, X_i) \quad (4.32) \\
&= \sum_{i=1}^2 \left(\psi_* \alpha^f(X_i, X_i) + \alpha^{\psi}(f_* X_i, f_* X_i) \right) \\
&= 2\psi_* H^f + \sum_{i=1}^2 \alpha^{\psi}(f_* X_i, f_* X_i).
\end{aligned}$$

□

Prova do item iii). Pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned}
2\nabla_X^{\perp} H^{\hat{f}}(x) &= 2\nabla_X^{\perp} \psi_* H^f + \sum_{i=1}^2 \nabla_X^{\perp} \alpha^{\psi}(f_* X_i, f_* X_i) \quad (4.33) \\
&= 2X(\psi_*) H^f + 2\psi_* \nabla_X^{\perp} H^f + \sum_{i=1}^2 \nabla_X^{\perp} \alpha^{\psi}(f_* X_i, f_* X_i).
\end{aligned}$$

□

A seguinte observação nos diz que para refazer o Teorema 4.8 pelo difeomorfismo conforme temos que ter uma hipótese adicional.

Observação 4.10. Suponha que $\widehat{f} = \psi \circ f$ tenha vetor curvatura média paralelo e que

$$2X(\psi_*)H^f + \sum_{i=1}^2 \nabla_X^\perp \alpha^\psi(f_*X_i, f_*X_i) = 0,$$

então uma das possibilidades do Teorema 4.8 acontecem. De fato pelo item iii) do Lema 4.9 segue que f tem vetor curvatura média paralelo. Então podemos usar o Teorema 4.8 e concluir que umas das possibilidades é verdadeira.

4.4.2 Resultado de semi espaço via redução de codimensão

No espaço euclidiano existe um teorema de semiespaço muito famoso chamado de Hoffman e Meeks (HOFFMAN; III, 1990), o qual afirma que se uma superfície mínima propriamente imersa $S \in \mathbb{R}^3$ se encontra em um dos lados de algum plano P , então S deve ser um plano paralelo a P . Estes teoremas tem sido generalizados para espaços de variedades simples, conexas com dimensão 3. Em espaços warped $\mathbb{R} \times_\rho \mathbb{R}^2$ existe o Teorema 4.11 de semiespaço para hipersuperfícies, que se inspira na demonstração de Hoffman e Meeks.

Nesta seção apresentamos o Corolário 4.12 que é consequência dele para codimensão $n - 1$. Em uma situação deste tipo fornecemos condições necessárias para $f(M^2)$ ser um slice totalmente geodésico do espaço warped, usando redução de codimensão.

Teorema 4.11. Seja $\varphi : \Sigma^2 \rightarrow I \times_\rho \mathbb{R}^2$ uma superfície propriamente imersa e seja $\mu \in (0, 1)$. Assuma que a imagem $\varphi(\Sigma^2)$ e a curvatura média H de φ satisfaz:

- (i) $\varphi(\Sigma^2)$ está contido em um semiespaço superior e $|H| \leq \phi \mu$
- (ii) $\varphi(\Sigma^2)$ está contido em um semiespaço inferior e $|H| \leq -\phi \mu$

Então $\varphi(\Sigma^2)$ é um slice totalmente geodésico, ou seja $\varphi(\Sigma^2) = \{t_0\} \times \mathbb{R}^2$ onde $\rho'(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. (MIRANDOLA, 2009, teorema 1.1) □

Corolário 4.12. Seja $f : M^2 \rightarrow I \times_\rho \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Seja η o campo vetorial normal definido por $\partial_t = f_*T + \eta$. Assuma que $L := N_1 + \text{span}\{\eta\}$ é um sub fibrado de N^fM de rank 1 e que $\nabla^\perp N_1 \subset L$. Então assuma que a imagem $f(M^2)$ e a curvatura média H de f satisfaz:

- (i) $f(M^2)$ está contido em um semiespaço superior e $|H| \leq \phi \mu$
- (ii) $f(M^2)$ está contido em um semiespaço inferior e $|H| \leq -\phi \mu$

Então $f(M^2)$ é um slice totalmente geodésico, ou seja $f(M^2) = \{t_0\} \times \mathbb{R}^2$ onde $\rho'(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in I$.

Demonstração. Segue do Lema 4.4 que f reduz codimensão a $l = 2 + 1 - 2$ e então existe $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(M^2) \subset I \times_{\rho} \mathbb{R}^2$. Portanto pelo (MIRANDOLA, 2009, Teorema 1.1) temos o resultado. \square

Observação 4.13. Seja $f : M^2 \rightarrow I \times_{\rho} \mathbb{R}^2$ é uma hipersuperfície então $\text{rank} N_1 = 1$ e $\text{rank} L = 1 = 3 - 2$ e o Corolário 4.12 se resume ao (MIRANDOLA, 2009, Teorema 1.1).

REFERÊNCIAS

ABRESCH, U.; ROSENBERG, H. A hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$. 2004. *Citadonaspginas* 20 e 51.

ALARCÓN, E. M.; ALBUJER, A. L.; CABALLERO, M. Spacelike hypersurfaces in the lorentz-minkowski space with the same riemannian and lorentzian mean curvature. In: SPRINGER. **International Meeting on Lorentzian Geometry**. [S.l.], 2016. p. 1–12. Citado na página 19.

ALENCAR, H.; CARMO, M. D.; TRIBUZY, R. A theorem of hopf and the cauchy-riemann inequality. **Communications in Analysis and Geometry**, International Press of Boston, v. 15, n. 2, p. 283–298, 2007. Citado na página 51.

_____. A hopf theorem for ambient spaces of dimensions higher than three. In: **Manfredo P. do Carmo–Selected Papers**. [S.l.]: Springer, 2012. p. 471–487. Citado na página 51.

ALLEENDOERFER, C. B. Rigidity for spaces of class greater than one. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 61, n. 3, p. 633–644, 1939. Citado na página 19.

BISHOP, R. L.; O’NEILL, B. Manifolds of negative curvature. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 145, p. 1–49, 1969. Citado na página 32.

CARTAN, E. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). In: **Annales scientifiques de l’École normale supérieure**. [S.l.: s.n.], 1925. v. 42, p. 17–88. Citado na página 20.

CHEN, B.-Y. A survey on geometry of warped product submanifolds. **arXiv preprint arXiv:1307.0236**, 2013. Citado na página 24.

DAJCZER, M. Reduction of the codimension of regular isometric immersions. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 179, p. 263–286, 1982. Citado na página 19.

DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. **Submanifold theory beyond an introduction**. [S.l.]: Springer, 2019. Citado nas páginas 19, 21, 54 e 55.

DANIEL, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 361, n. 12, p. 6255–6282, 2009. Citado na página 20.

EISENHART, L. **Riemannian geometry** princeton university press. **Princeton, NJ (2nd printing)**, 1964. Citado na página 19.

FILHO, C. do R.; VITÓRIO, F. A bonnet theorem for submanifolds into rotational hypersurfaces. **Results in Mathematics**, Springer, v. 71, p. 283–294, 2017. Citado na página 20.

FILHO, C. G. d. R. Sobre imersões isométricas em produtos Warped. Universidade Federal de Alagoas, 2012. Citado nas páginas 19, 27, 28 e 30.

- GROMOV, M. **Partial differential relations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 9. Citado na página 19.
- GROMOV, M. L.; ROKHLIN, V. A. Embeddings and immersions in riemannian geometry. **Russian Mathematical Surveys**, IOP Publishing, v. 25, n. 5, p. 1, 1970. Citado na página 19.
- HAN, Q.; HONG, J.-X. **Isometric embedding of Riemannian manifolds in Euclidean spaces**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2006. v. 13. Citado na página 19.
- HOFFMAN, D.; III, W. H. M. The strong halfspace theorem for minimal surfaces. **Inventiones mathematicae**, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, v. 101, n. 1, p. 373–377, 1990. Citado na página 63.
- JACOBOWITZ, H. The gauss-codazzi equations. 1982. Citado na página 19.
- LIMA, H. F. d.; SANTOS, F. R. d.; ARAÚJO, J. G.; VELÁSQUEZ, M. A. L. Parabolicity and uniqueness of complete two-sided hypersurfaces immersed in a riemannian warped product. **Bollettino dell’Unione Matematica Italiana**, Springer, v. 11, p. 363–375, 2018. Citado na página 34.
- LIMA, R. d.; MANFIO, F.; SANTOS, J. d. Einstein hypersurfaces of warped product spaces. **Results in Mathematics**, Springer, v. 77, n. 6, p. 228, 2022. Citado nas páginas 33 e 50.
- LIMA, R. F. de; ROITMAN, P. Helicoids and catenoids in $m \times \mathbb{R}$. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, Springer, v. 200, n. 6, p. 2385–2421, 2021. Citado nas páginas 19, 20, 26, 31, 34, 37, 39, 45, 46 e 49.
- LIRA, J.; TOJEIRO, R.; VITÓRIO, F. A bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms. **Archiv der Mathematik**, Springer, v. 95, p. 469–479, 2010. Citado nas páginas 19 e 20.
- MANFIO, F.; TOJEIRO, R.; VEKEN, J. Van der. Geometry of submanifolds with respect to ambient vector fields. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, Springer, v. 199, n. 6, p. 2197–2225, 2020. Citado nas páginas 31, 37 e 50.
- MENDONÇA, B.; TOJEIRO, R. Submanifolds of products of space forms. **Indiana University Mathematics Journal**, JSTOR, p. 1283–1314, 2013. Citado na página 20.
- _____. Umbilical submanifolds of $sn \times r$. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 66, n. 2, p. 400–428, 2014. Citado nas páginas 19, 20, 51 e 55.
- MIRANDOLA, H. Half-space type theorems in warped product spaces with one-dimensional factor. **Geometriae Dedicata**, Springer, v. 138, n. 1, p. 117–127, 2009. Citado nas páginas 27, 31, 32, 34, 63 e 64.
- NASH, J. The imbedding problem for riemannian manifolds. **Annals of mathematics**, JSTOR, v. 63, n. 1, p. 20–63, 1956. Citado na página 19.
- O’NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. [S.l.]: Academic press, 1983. Citado nas páginas 24, 25, 26 e 27.
- ORTEGA, M.; LAWN, M.-A. A fundamental theorem for hypersurfaces in semi-riemannian warped products. 2014. Citado nas páginas 19 e 27.

PICCIONE, P.; TAUSK, D. V. An existence theorem for g-structure preserving affine immersions. **Indiana University mathematics journal**, JSTOR, p. 1431–1465, 2008. Citado na página 20.

ROSENBERG, H. Minimal surfaces in $m^2 \times \mathbb{R}$. **Illinois Journal of Mathematics**, Duke University Press, v. 46, n. 4, p. 1177–1195, 2002. Citado na página 20.

SCALA, A. J. D.; VITTONI, F. Codimension reduction in symmetric spaces. **Journal of Geometry and Physics**, Elsevier, v. 79, p. 29–33, 2014. Citado na página 19.

SPIVAK, M. A comprehensive introduction to differential geometry, publish or perish. **Inc., Berkeley**, v. 2, 1979. Citado na página 19.

WANG, B. Stability of helicoids in hyperbolic three-dimensional space. **arXiv preprint arXiv:1502.04764**, 2015. Citado na página 39.

YAU, S.-T. Submanifolds with constant mean curvature. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 96, n. 2, p. 346–366, 1974. Citado na página 58.

