I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

APLICAÇÕES EM ESTABILIDADE DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE SCHAUDER-TYCHONOFF

Sandra Maria Semensato de Godoy

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

APLICAÇÕES EM ESTABILIDADE DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE SCHAUDER-TYCHONOFF

Sandra Maria Semensato de Godoy

Orientador: Prof. Dr. Nelson Onuchic

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

SÃO CARLOS
1980

A meus pais

e ao Godoy

APPLICATIONS IN STABILITY OF SCHAUDER-TYCHONOFF'S FIXED POINT THEOREM

Sandra Maria Semensato de Godoy

Adviser: Prof. Dr. Nelson Onuchic

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the behavior in the future of the solutions of a class of Ordinary Differential Equations (specifically boundedness and stability properties).

The basic tool used here in attacking the mentioned problems is provided by a special case of the Schauder-Tychonoff's Fixed Point Theorem, (for additional comments see [Coppel, W. A., [1]]).

Somos profundamente gratos

Ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, cuja orientação segura e confiança em nós depositada, fizeram com que este trabalho chegasse a sua plena realização.

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio, pela atenção e disponibilidade com que sempre nos atendeu e oportunas sugestões apresentadas para com este trabalho.

A todos colegas do ICMSC-USP, pela amizade e grande apoio nos momentos difíceis.

À FAPESP, cujo auxílio, através de bolsas, possibilitou a realização dos cursos de Pós-Graduação.

A todos que colaboraram de alguma forma na realização deste trabalho.

Este trabalho foi patrocinado, parcialmente, pelas Instituições: CAPES, CNPq, FAPESP.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I 1

PRELIMINARES 1

I.1. O Teorema de Schauder-Tychonoff 1

I.2. Soluções Limitadas 6

I.3. Estabilidade 11

CAPÍTULO II 23

APLICAÇÕES 23

II.1. Operadores Integrais 23

II.2. Sobre Existência 33

II.3. Sobre Limitação 36

II.4. Sobre a Estabilidade de um Ponto Crítico 44

II.5. Sobre a Estabilidade Assintótica de um Ponto Crítico . 46

II.6. Sobre a Estabilidade Uniforme de um Ponto Crítico ... 50

II.7. Sobre a Estabilidade Equiassintótica de um Ponto Crítico 53

II.8. Sobre a Estabilidade Assintótica Uniforme de um Ponto Crítico 56

II.9. Sobre a Estabilidade Exponencial de um Ponto Crítico. 58

BIBLIOGRAFIA 61

INTRODUÇÃO

O Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff é usado aqui para reduzir o estudo de limitação e estabilidade de certos Sistemas n-Dimensionais de Equações Diferenciais Ordinárias, ao estudo das correspondentes propriedades de Equações Diferenciais Ordinárias Escalares Associadas. Desta maneira, freqüentemente, nós obtemos uma variedade de resultados do sistema de Equações Diferenciais Ordinárias dado, e, ainda, esclarecemos alguns destes resultados.

Teoremas de Ponto Fixo têm sido usados para estudar estabilidade de sistemas de equações diferenciais. Com o Teorema de Schauder-Tychonoff, obtemos uma significativa classe de resultados, de maneira bem simples, usando-se a técnica de comparação entre as soluções do sistema de Equações Diferenciais Ordinárias dado e a correspondente equação escalar.

No Capítulo I, demonstramos o Teorema de Schauder-Tychonoff, aqui apresentado de uma forma muito conveniente para aplicações em Análise. Damos as definições e resultados básicos, que serão utilizados nas aplicações.

Começamos o nosso estudo no Capítulo II. Em II.1, consideramos três tipos de sistemas n-dimensionais, aos quais associamos determinados operadores integrais, e mostramos que tais operadores satisfazem às hipóteses do Teorema de Schauder-Tychonoff.

Em II.2, estudamos o problema da existência de solução para o sistema $\dot{x} = f(t,x)$, onde f satisfaz determinadas condições. O parágrafo II.3, consta de resultados sobre limitação, considerados por Arnold Stokes em [6]. De II.4 a II.9, estabelecemos diversos resultados sobre diferentes tipos de estabilidade, todos provados, usando-se como principal ferramenta o Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

I.1. O Teorema de Schauder-Tychonoff

Apresentaremos aqui uma formulação particular do Teorema de Schauder-Tychonoff que continuaremos chamando de Teorema de Schauder-Tychonoff, e como veremos, é muito conveniente em aplicações da Análise.

Para comentários sobre o assunto em apreço, ver [1].

Denotaremos por $||\cdot||$ uma norma no $\mathbb{R}^n$.

Definição:

Uma família F de funções definidas em um intervalo I e assumindo valores no $\mathbb{R}^n$, é dita *equicontínua* num ponto t_o de I, se para cada $\varepsilon > 0$, existe um correspondente $\delta = \delta(\varepsilon, t_o) > 0$, tal que para todas as funções f em F, temos

$$||f(t)-f(t_o)|| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |t-t_o| < \delta.$$

Temos que cada elemento de uma família equicontínua num ponto, é uma função contínua nesse ponto. Também, uma família de funções diferenciáveis é equicontínua em todo ponto do intervalo I, se as derivadas são uniformemente limitadas em I. Isto segue do Teorema do Valor Médio.

Uma propriedade importante das funções equicontínuas é apresentada no teorema abaixo, que pode ser considerado uma ge-

neralização do Teorema de Bolzano-Weirstrass ao espaço das funções contínuas.

Teorema 1.1.1. (Ascoli):

Seja F uma família de funções que são limitadas e equicontínuas em todo ponto de um intervalo I. Então, toda seqüência $\{f_n\}$ de funções em F, contém uma subseqüência que é uniformemente convergente em cada subintervalo compacto de I.

Para uma prova do Teorema de Ascoli, ver [1].

Seja B^n a bola fechada do $\mathbb{R}^n$, isto é,

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| \leq 1\}$.

Teorema 1.1.2. (Brower):

Se $f : B^n \to B^n$ for contínua, então f possui um ponto fixo.

Para uma prova do Teorema de Brower, ver [2].

Apresentaremos a seguir, um caso especial do Teorema de Schauder-Tychonoff (extensão do Teorema de Brower ao espaço das funções contínuas) que será utilizado, entre muitas outras aplicações, para deduzir a existência de soluções em equações diferenciais ordinárias, satisfazendo determinadas propriedades.

Teorema 1.1.3. (Schauder-Tychonoff):

Seja C(I) o conjunto de todas as funções $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ que são contínuas em um intervalo I. Seja F o subconjunto formado pelas funções x(t) tais que,

$$||x(t)|| \leq \mu(t), \quad t \in I,$$

onde $\mu(t)$ é função contínua, positiva e fixa. Seja $T : F \to F$ aplicação com as seguintes propriedades:

i) T é contínua no sentido que, se $x_n \in F$ $(n=1,2,\ldots)$ e $x_n \to x$ uniformemente em todo subintervalo compacto de I, então $Tx_n \to Tx$ uniformemente em todo subintervalo compacto de I.

ii) As funções no conjunto imagem TF são equicontínuas e limitadas em todo ponto de I.

Nessas condições, a aplicaçõ T tem pelo menos um ponto fixo em F.

Prova:

Sem perda de generalidade, podemos supor $I = [0,\infty)$.

Sejam dados $n\nu+1$ vetores ξ_m $(m=0,1,\ldots,n\nu)$ situados na bola fechada unitária $||\xi|| \leq 1$, e definamos uma função contínua $h(t) = h(t,\xi_o,\ldots,\xi_{n\nu})$ da seguinte forma:

$$h(m/n) = \xi_m, \quad m = 0,1,\ldots,n\nu$$

$$h(t) = \text{interpolação linear nos outros pontos de } [0,\nu]$$

$$h(t) = \xi_{n\nu}, \quad t \geq \nu.$$

Dessa maneira, a função $x(t) = \mu(t)h(t)$ pertence a F, pois $||x(t)|| \leq \mu(t)$, uma vez que $||h(t)|| \leq 1$, para todo t em I.

Seja $x^*(t) = T(x(t))$ e

$$x^*(m/n) = \mu(m/n)\xi^*_m.$$

Desta forma, $\xi_m^* = \dfrac{x^*(m/n)}{\mu(m/n)}$.

Portanto,

$$||\xi_m^*|| = ||\frac{x^*(m/n)}{\mu(m/n)}|| \leq \frac{\mu(m/n)}{\mu(m/n)} = 1 \quad (\text{pois } x^* \in F)$$

Assim, ξ_m^* está situado na bola fechada unitária $||\xi|| \leq 1$, e assim temos uma aplicação $\xi_m \to \xi_m^*$ da bola fechada unitária em si própria. Tal aplicação é contínua. De fato:

$$\xi_m = h(m/n) = \frac{x(m/n)}{\mu(m/n)};$$

$$\frac{x^*(m/n)}{\mu(m/n)} = \xi_m^*$$

e a aplicação $x(m/n) \to x^*(m/n)$ é contínua.

Então, pelo teorema do ponto fixo de Brower, esta aplicação tem um ponto fixo $(\tilde{\xi}_o,\ldots,\tilde{\xi}_{n\nu})$.

A aplicação correspondente $x_{n\nu}(t) = \mu(t)h(t,\tilde{\xi}_o,\ldots,\tilde{\xi}_{n\nu})$ tem a propriedade que sua imagem $y_{n\nu} = T(x_{n\nu})$ assume os mesmos valores nos pontos $t = m/n$, $(m=0,1,\ldots,n\nu)$. De fato,

$$x_{n\nu}(m/n) = \mu(m/n)h(m/n) = \mu(m/n)\tilde{\xi}_m,$$

$$T(x_{n\nu}(m/n)) = y_{n\nu}(m/n) = \mu(m/n)\xi_m^* = \mu(m/n)\tilde{\xi}_m.$$

Seja ν_o um inteiro positivo fixo.

Segue da hipótese (ii) que as funções $\dfrac{y_{n\nu}}{\mu}$ são equicontínuas em todo ponto de I, e então são uniformemente equicontínuas no intervalo $[0,\nu_o]$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,\nu_o) > 0$, tal que se $t, t' \in [0,\nu_o]$,

$$|t-t'| < \delta \quad \text{implica} \quad ||\frac{y_{n\nu}(t)}{\mu(t)} - \frac{y_{n\nu}(t')}{\mu(t')}|| < \varepsilon.$$

Dividimos o intervalo $[0,\nu_o]$ em n partes com $n > \frac{1}{\delta}$. Então, $\nu \geq \nu_o$,

$$\left|\left|\frac{y_{n\nu}(t)}{\mu(t)} - \tilde{\xi}_m\right|\right| < \varepsilon, \ \frac{m}{n} \leq t \leq \frac{m+1}{n}, \quad (m=0,1,\ldots,n\nu_o-1).$$

Como $h(t,\tilde{\xi}_o,\ldots,\tilde{\xi}_{n\nu})$ é formada por interpolações lineares, temos que

$$\left|\left|\frac{x_{n\nu}(t)}{\mu(t)} - \tilde{\xi}_m\right|\right| < \varepsilon, \ \frac{m}{n} \leq t \leq \frac{m+1}{n}, \ (m=0,1,\ldots,n\nu_o-1),$$

para $\nu \geq \nu_o$ e $n > \frac{1}{\delta}$.

Portanto,

$$||y_{n\nu}(t)-x_{n\nu}(t)|| < 2\varepsilon\mu(t), \ 0 \leq t \leq \nu_o, \ \nu \geq \nu_o \ \text{e} \ n > \frac{1}{\delta}.$$

Assim, $y_{n\nu}(t) \to x_{n\nu}(t)$ uniformemente, $t \in [0,\nu_o]$, $n,\nu \to \infty$.

Por outro lado, $(y_{n\nu})$ é uma seqüência de funções equicontínuas e limitadas em todo ponto de I, e portanto, pelo Teorema de Ascoli, existe subseqüência $(y_{n_i\nu_i})$, $n_i < n_{i+1}$, $\nu_i < \nu_{i+1}$, tal que $y_{n_i\nu_i} \to x$ uniformemente em qualquer subintervalo compacto de I, quando $i \to \infty$.

Assim, $x_{n_i\nu_i} \to x$ uniformemente em qualquer subintervalo compacto de I.

Como T é contínua, temos que, $y_{n_i\nu_i} = Tx_{n_i\nu_i} \to Tx$.

Então $x = Tx$ é um ponto fixo de T.

I.2. Soluções Limitadas

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1}$$

onde x e $f(t,x)$ são vetores n-dimensionais, f é uma função contínua em $J \times \mathbb{R}^n$, onde $J = [0,\infty)$, e por todo ponto $(t_o,x_o) \in J \times \mathbb{R}^n$, passa uma única solução $x(t,t_o,x_o)$ de (1).

Definição:

Uma solução $x(t) = x(t,t_o,x_o)$ de (1) é *limitada*, se existe $K > 0$ tal que

$$||x(t)|| \leq K, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o.$$

Definição:

As soluções de (1) são *ultimamente limitadas*, se existe um $B > 0$ e um $T > 0$, tal que para toda solução $x(t,t_o,x_o)$ de (1), $||x(t,t_o,x_o)|| \leq B$, para todo $t \geq t_o + T$, onde B é independente da solução particular, enquanto que T pode depender de cada solução.

A expressão "ultimamente limitada", nós usaremos aqui significando "ultimately bounded".

Nas aplicações que faremos sobre existência de soluções limitadas ou ultimamente limitadas, utilizaremos os resultados abaixo:

Lema I.2.1:

Seja $b(t)$ contínua e não negativa para $0 \leq t < \infty$ e seja $G(t) = \int_t^{t+1} b(s)ds$. Então,

$$\int_{t_o}^{t} b(s)ds \leq \int_{t_o-1}^{t} G(s)ds, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o \geq 1.$$

Prova:

$$\int_{t_o-1}^{t} G(s)ds = \int_{t_o-1}^{t} [\int_{s}^{s+1} b(u)du]ds \geq$$

$$\geq \int_{t_o}^{t} [\int_{r-1}^{r} b(u)dr]du = \int_{t_o}^{t} b(u)du.$$

Lema I.2.2:

Nas mesmas condições do Lema I.2.1., temos que,

$$\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} b(s)ds \leq \int_{t_o-1}^{t} e^{\sigma(s+1)} G(s)ds,$$

para todo $\sigma \geq 0$, $t \geq t_o \geq 1$.

Prova:

Usando o Lema I.2.1.

$$\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} b(s)ds \leq \int_{t_o-1}^{t} [\int_{s}^{s+1} e^{\sigma u} b(u)du]ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o-1}^{t} [e^{\sigma(s+1)} \int_{s}^{s+1} b(u)du]ds = \int_{t_o-1}^{t} e^{\sigma(s+1)} G(s)ds,$$

para todo $\sigma > 0$, para todo $t \geq t_o \geq 1$.

Lema I.2.3:

Seja $b(t)$ contínua e não negativa para $0 \leq t < \infty$, com

$\int_t^{t+1} b(s)ds \to 0$, quando $t \to \infty$. Então, para todo $\sigma > 0$, temos que,

$$e^{-\sigma t}\int_o^t e^{\sigma s} b(s)ds \to 0, \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Prova:

Definamos $G(t) = \int_t^{t+1} b(s)ds$.

De acordo com o Lema I.2.2., temos que,

$$e^{-\sigma t}\int_1^t e^{\sigma s} b(s)ds \le e^{-\sigma t}\int_o^t e^{\sigma(s+1)} G(s)ds,$$

para todo $\sigma > 0$, para todo $t \ge t_o \ge 1$.

Se a integral do segundo membro for limitada, a prova está completa.

Caso contrário, por L'Hospital, temos que:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}\int_o^t e^{\sigma(s+1)} G(s)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{\sigma(t+1)} G(t)}{\sigma e^{\sigma t}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{\sigma} G(t)}{\sigma} = 0.$$

O Lema está provado.

Observamos que a recíproca deste lema é verdadeira.

Lema I.2.4:

Seja $c(t)$ uma função escalar contínua e positiva com $\int_t^{t+1} c(s)ds$ limitada em $[0,\infty)$. Então, dado $\sigma > 0$, existe $A = A(\sigma) > 0$, tal que, $e^{-\sigma t}\int_{t_o}^t e^{\sigma s} c(s)ds < A$, para todo $t \ge t_o \ge 0$.

Prova:

Seja $t_o \geq 1$ um número real qualquer.

Como $c(t)$ é uma função escalar contínua e positiva para $t \geq 0$, então, de acordo com o Lema I.2.2., podemos escrever que:

$$\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} c(s)ds \leq \int_{t_o-1}^{t} e^{\sigma(s+1)} [\int_{s}^{s+1} c(\delta)d\delta]ds$$

para todo $t \geq t_o$.

Segue-se que,

$$(2) \qquad e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} c(s)ds \leq e^{-\sigma t}\int_{t_o-1}^{t} [e^{\sigma(s+1)}\int_{s}^{s+1} c(\delta)d\delta]ds \leq$$

$$\leq e^{-\sigma t}\int_{o}^{t} [e^{\sigma(s+1)}\int_{s}^{s+1} c(\delta)d\delta]ds.$$

Por hipótese $\int_{t}^{t+1} c(s)ds$ é limitada em $[0,\infty)$. Logo, existe uma constante real $K > 0$, tal que $\int_{t}^{t+1} c(\delta)d\delta \leq K$, para todo $t \geq 0$.

Levando este resultado para (2), vem que

$$e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} c(s)ds \leq Ke^{-\sigma t}\int_{o}^{t} e^{\sigma(s+1)}ds = Ke^{-\sigma t}\int_{o}^{t} e^{\sigma s}e^{\sigma}ds =$$

$$= Ke^{-\sigma t}e^{\sigma}\int_{o}^{t} e^{\sigma s}ds = Ke^{-\sigma t}e^{\sigma}\frac{1}{\sigma}[e^{\sigma t}-1] =$$

$$= K\frac{1}{\sigma}e^{\sigma} - Ke^{-\sigma t}e^{\sigma}\frac{1}{\sigma} \leq K\frac{1}{\sigma}e^{\sigma}$$

para todo $t \geq t_o$.

Assim:

$$e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds \le \frac{K}{\sigma}e^{\sigma}, \quad \text{para todo} \quad t \ge t_o.$$

Tomando $A = \frac{K}{\sigma}e^{\sigma} > 0$, ficamos com:

$$e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds < A, \quad \text{para todo} \quad t \ge t_o \ge 1.$$

Suponhamos agora que $0 \le t_o < 1$.

Para $t_o \le t \le 1$, temos que:

$$e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds \le e^{-\sigma t}\int_{o}^{1} e^{\sigma s}c(s)ds$$

Como $\int_{o}^{1} e^{\sigma s}c(s)ds = \gamma$ para algum $\gamma > 0$, obtemos:

$$(3) \qquad e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds \le \gamma e^{-\sigma t} \le \gamma,$$

para todo t, $t_o \le t \le 1$.

Para $t \ge 1$, temos:

$$e^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds \le e^{-\sigma t}\int_{o}^{1} e^{\sigma s}c(s)ds$$

$$+ e^{-\sigma t}\int_{1}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds \le e^{-\sigma t}\gamma + e^{-\sigma t}\int_{1}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds \le$$

$$\le \gamma + e^{-\sigma t}\int_{1}^{t} e^{\sigma s}c(s)ds.$$

De acordo com a primeira parte, existe um $A_1 = A_1(\sigma) > 0$, tal que:

$$e^{-\sigma t}\int_1^t e^{\sigma s}c(s)ds < A_1, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1.$$

Daí, existe $A = \gamma + A_1$, tal que:

$$(4) \qquad e^{-\sigma t}\int_{t_o}^t e^{\sigma s}c(s)ds < A, \quad \text{para todo} \quad t \geq 1.$$

De (3) e (4) concluimos que:

$$e^{-\sigma t}\int_{t_o}^t e^{\sigma s}c(s)ds < A, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o.$$

I.3. Estabilidade

Consideremos o sistema de equações diferenciais (1), onde x e $f(t,x)$ são vetores n-dimensionais. Suponhamos que $f(t,x)$ seja contínua em (t,x) sobre $J \times D$, onde $J = [0,\infty)$ e D seja uma região do R^n, e que satisfaça alguma condição de unicidade em relação ao Problema do Valor Inicial.

Seja $\psi(t)$ uma solução de (1) que permanece em D.

Consideremos a seguinte mudança de variáveis:

$$y = x - \psi(t).$$

Então, (1) torna-se

$$(5) \qquad \dot{y} = F(t,y) = f(t,y+\psi(t)) - f(t,\psi(t))$$

Assim, $F(t,0) = 0$ e a solução $y(t) = 0$ de (5) corresponde à solução $\psi(t)$ de (1).

Desta maneira, discutir a estabilidade da solução $\psi(t)$

de (1) é equivalente a discutir a estabilidade da solução nula de (5). Por esta razão, nós assumiremos, sem perda de generalidade que $f(t,0) = 0$ e que D é a região:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq \eta\}, \qquad 0 < \eta \leq \infty.$$

As definições abaixo, sobre estabilidade, são dadas em relação ao ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1).

Estabilidade:

Dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon,t_o) > 0$ tal que se $||x_o|| \leq \delta$ então $||x(t,t_o,x_o|| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_o$.

Estabilidade Uniforme:

Dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se $||x_o|| \leq \delta$ então $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_o$.

Estabilidade Assintótica:

$x = 0$ é estável e a todo $t_o \geq 0$ corresponde $\delta_o = \delta_o(t_o) > 0$ tal que se $||x_o|| \leq \delta_o$ então $x(t,t_o,x_o) \to 0$ com $t \to \infty$.

Estabilidade Equiassintótica:

Dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$ existem $\delta = \delta(t_o) > 0$ e $T = T(\varepsilon,t_o)$ de modo que se $||x_o|| \leq \delta$, então, $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_o + T(\varepsilon,t_o)$.

Uma formulação equivalente é dada como segue:

Existe um $\delta_o > 0$ e, dado $\varepsilon > 0$, existe um $T(\varepsilon)>0$, tal que se $||x_o|| \leq \delta_o$ e $t \geq T(\varepsilon)$, então $||x(t,0,x_o)|| \leq \varepsilon$.

Estabilidade Assintótica Uniforme:

$x = 0$ é uniformemente estável e existe $\delta_o > 0$, tal que a todo $\varepsilon > 0$, corresponde $T(\varepsilon) \geq 0$ de modo que se $||x_o|| \leq \delta_o$ então $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_o + T(\varepsilon)$.

Estabilidade Exponencial:

Existe $\lambda > 0$, e dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que $||x_o|| \leq \delta(\varepsilon)$ implica $||x(t,t_o,x_o)|| \leq \varepsilon e^{-\lambda(t-t_o)}$, para todo $t \geq t_o$.

Veremos em seguida, alguns resultados sobre estabilidade, que serão utilizados nas aplicações do próximo capítulo.

Lema 1.3.1:

Consideremos a equação

$$\dot{u} = -\alpha u + b(t)u,$$

onde $b(t)$ é contínua, não negativa para $t \geq 0$, $\alpha > 0$, $u \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que:

$$\limsup_{(t,v)\to(\infty,\infty)} \frac{1}{v}\int_t^{t+v} b(s)ds < \alpha.$$

Nessas condições, a solução $u = 0$ da equação acima é uniformemente assintoticamente estável.

Prova:

Temos que

$$u(t+t_o,t_o,u_o) = u_o e^{[-\alpha t + \int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds]} =$$

$$= u_o e^{-t[\alpha - t^{-1}\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds]}$$

Seja $\varepsilon > 0$ escolhido de modo que

$$\limsup_{(t,v)\to(\infty,\infty)} \frac{1}{v}\int_t^{t+v} b(s)ds = \tilde{\alpha} < \alpha-\varepsilon$$

e escolhemos $T_o > 0$ e $T > 0$ tais que

$$t^{-1}\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds \le \alpha-\varepsilon,$$

para todo $t \ge T$ e $t_o \ge T_o$.

Seja K tal que

$$\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds \le K, \quad \text{para todo } t_o \ge T_o, \quad 0 \le t \le T.$$

Assim para $0 \le t \le T$, $t_o \ge T_o$, temos que

$$|u(t+t_o,t_o,u_o| = |u_o| e^{-t[\alpha - t^{-1}\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds]} \le$$

$$\le |u_o| e^{-t[\alpha - Kt^{-1}]} \le |u_o| e^K.$$

Para $t \geq T$, $t_o \geq T_o$, temos que:

$$|u(t+t_o,t_o,u_o)| = |u_o| e^{-t[\alpha - t^{-1}\int_{t_o}^{t} b(s)ds]} \leq$$

$$\leq |u_o| e^{-t[\alpha-\alpha+\varepsilon]} = |u_o| e^{-t\varepsilon}.$$

Portanto, para $t \geq 0$, $t_o \geq T_o$, temos que

$$|u(t+t_o,t_o,u_o)| \leq |u_o| e^{\varepsilon T} e^{K} e^{-\varepsilon t}.$$

Assim, a solução $u = 0$ de $\dot{u} = -\alpha u + b(t)u$ é uniformemente assintoticamente estável para $t_o \geq T_o$.

Do teorema da continuidade em relação às condições iniciais, segue que a solução $u = 0$ do sistema acima é uniformemente assintoticamente estável.

Consideremos as equações escalares

(6) $\dot{v} = g(t)v$

(7) $\dot{u} = g(t)u + ct^{\nu}|u|^{1+a}$

onde $g(t)$ é contínua para $t \geq 0$, e, a, ν, c, constantes positivas.

Lema 1.3.2:

Seja a solução $v = 0$ de (6) exponencialmente estável. Então, a solução $u = 0$ de (7) é equiassintoticamente estável.

Prova:

Para cada $s \geq 0$, seja $v(t,s)$ a solução de (6) tal que $v(s,s) = 1$. Então, a solução $u(t) = u(t,t_o,u_o)$ de (7) é tal que

$$u(t) = v(t,t_o)u_o + \int_{t_o}^{t} v(t,s)cs^{\nu}|u(s)|^{1+a}ds$$

Como a solução $v = 0$ de (6) é exponencialmente estável, existem constantes positivas σ e B, tais que $||v(t,s)|| \leq Be^{-\sigma(t-s)}$, $t \geq s \geq 0$.

Seja $\eta > 0$ tal que $cB\eta < \sigma$

Seja P tal que $B^a e^{-a\beta t} t^{\nu} \leq P$, onde $\beta = \sigma - c\eta B$. Seja também $\delta = \delta(t_o)$, satisfazendo $\delta < \eta$, $\delta^a t_o^{\nu} < \eta$ e $P\delta^a e^{a\beta t_o} < \eta$.

Para cada real u_o tal que $|u_o| < \delta$, $t \geq t_o \geq 0$

$$|u(t)| \leq Be^{-\sigma(t-t_o)}|u_o| + Be^{-\sigma t}\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}cs^{\nu}|u(s)|^{1+a}ds$$

Portanto,

$$e^{\sigma t}|u(t)| \leq Be^{\sigma t_o}|u_o| + B\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}cs^{\nu}|u(s)||u(s)|^{a}ds$$

Afirmamos que $|u(t)|^a t^{\nu} < \eta$, para todo $t \geq t_o$.

De fato: Observemos primeiramente que esta desigualdade é válida em t_o pois $|u(t_o)| < \delta$, e por hipótese $\delta^a t_o^{\nu} < \eta$.

Suponhamos agora, por um momento, que $|u(t)|^a t^{\nu} < \eta$ não ocorra para todo $t \geq t_o$.

Então, existe $\tau > 0$, tal que $|u(t)|^a t^{\nu} < \eta$, para todo $t_o \leq t < \tau$ e $|u(\tau)|^a \tau^{\nu} = \eta$.

Logo,

$$e^{\sigma t}|u(t)| \le Be^{\sigma t_o}|u_o| + B\int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}|u(s)|c\eta ds,$$

para $t_o \le t \le \tau$.

Pela Desigualdade de Gronwall,

$$e^{\sigma t}|u(t)| \le Be^{\sigma t_o}|u_o|e^{cB\eta(t-t_o)}, \; t_o \le t \le \tau.$$

Portanto,

$$|u(t)| \le Be^{t_o(\sigma-cB\eta)}e^{t(cB\eta-\sigma)}|u_o| =$$

$$= Be^{-\beta(t-t_o)}|u_o|, \quad t_o \le t \le \tau.$$

Logo,

$$|u(t)|^a t^\nu \le B^a|u_o|^a e^{a\beta t_o}e^{-a\beta t}t^\nu \le \delta^a e^{a\beta t_o}B^a e^{-a\beta t}t^\nu \le$$

$$\le \delta^a e^{a\beta t_o}P < \eta, \quad t_o \le t \le \tau.$$

Chegamos assim, a uma contradição, pois concluimos $|u(t)|^a t^\nu < \eta$, para $t_o \le t \le \tau$.

Usando a afirmação provada acima, concluimos da mesma maneira, que

$$|u(t)| \le Be^{-\beta(t-t_o)}|u_o|, \text{ para todo } t \ge t_o.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $T = T(\varepsilon)$, tal que $\eta Be^{-\beta T} < \varepsilon$.

Então, para $t \ge t_o + T$ e $|u_o| < \delta$,

$$|u(t)| \leq Be^{-\beta(t-t_o)}|u_o| < Be^{-\beta(t-t_o)}\delta < \eta Be^{-\beta T} < \varepsilon.$$

O Lema está provado.

Lema I.3.3:

O sistema $\dot{x} = A(t)x$, onde $A(t)$ é uma matriz contínua $n \times n$, é uniformemente estável, se e somente se, existe constante $K > 0$ tal que $||X(t)X^{-1}(s)|| \leq K$, para todo $t \geq s \geq 0$, onde $X(t)$ é matriz fundamental para o sistema dado.

Prova:

Lembremos que se $X(t)$ e $Y(t)$ são duas matrizes fundamentais para $\dot{x} = A(t)x$, então $Y(t)Y^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s)$. Logo, podemos sempre escolher uma $X(t)$ conveniente.

Vamos supor que exista constante $K > 0$ tal que $||X(t)X^{-1}(s)|| \leq K$, $0 \leq s \leq t$, e vamos mostrar que a solução nula é uniformemente estável.

Temos que qualquer solução $x(t)$ de $\dot{x} = A(t)x$, é dada na forma:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_o)x(t_o).$$

Portanto,

$$||x(t)|| \leq ||X(t)X^{-1}(t_o)||\,||x(t_o)|| \leq K||x(t_o)||,$$

onde K não depende de t_o.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, temos que $||x(t)|| \leq \varepsilon$, se $||x(t_o)|| \leq \delta$, e assim, a solução nula de $\dot{x} = A(t)x$ é uniformemente estável.

Reciprocamente, se o sistema dado for uniformemente estável, e portanto a solução nula, uniformemente estável, dado $\varepsilon = 1$ e s existe δ independente de s, tal que se

$$||x(s)|| \leq \delta \quad \text{então} \quad ||x(t)|| \leq 1, \quad \text{para todo} \quad t \geq s.$$

Escolhendo $X(t)$ tal que $X(s) = I$ = matriz identidade, e chamando $x^j(t)$ a coluna j de $X(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, vem que

$$||\tfrac{\delta}{2}x^j(s)|| = \tfrac{\delta}{2}||x^j(s)|| = \tfrac{\delta}{2} < \delta$$

Logo:

$$||\tfrac{\delta}{2}x^j(t)|| \leq 1$$

Portanto:

$$||x^j(t)|| \leq \tfrac{2}{\delta} \quad \text{e como} \quad ||x^j(s)|| = 1, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

temos que,

$$\frac{2}{\delta} \geq ||x^j(t)|| = ||X(t)X^{-1}(s)x^j(s)|| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ||(X(t)X^{-1}(s))_{i,j}||,$$

para todo $t \geq s$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Assim,

$$||X(t)X^{-1}(s)|| \leq \frac{2n}{\delta}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

O Lema está provado.

Lema 1.3.4:

Se a solução nula de $\dot{x} = A(t)x$ for uniformemente assintoticamente estável, então ela será exponencialmente estável.

Prova:

De acordo com a hipótese, existe um $\delta_o > 0$, e para cada $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \delta_o$ corresponde um $T > 0$, tal que se,

$$||x_1|| < \delta_o, \quad \text{então} \quad ||x(t,t_1,x_1)|| < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_1 + T$.

Agora, para t_1 fixo, temos que $X(t)X^{-1}(t_1)x_1$ é uma solução. Assim, $||x(t,t_1,x_1)|| = ||X(t)X^{-1}(t_1)x_1|| < \varepsilon$, quando $||x_1|| < \delta_o$.

Desta forma, temos então $||X(t)X^{-1}(t_1)|| < \varepsilon\delta_o^{-1}$, para todo $t \geq t_1 + T$.

Ponhamos $\theta = \varepsilon\delta_o^{-1}$. Assim, temos que,

$$||X(t+T)X^{-1}(t_1)|| \leq \theta < 1, \quad \text{para} \quad t \geq t_1.$$

Da estabilidade uniforme, segue que existe uma constante $K > 0$, tal que,

$$||X(t+h)X^{-1}(t)|| \leq K, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o, \quad 0 \leq h \leq T.$$

Para $t \geq t_1$, nós podemos escrever que,
$t_1 + nT \leq t \leq t_1 + (n+1)T$, para algum inteiro n não negativo.

Assim,

$$||X(t)X^{-1}(t_1)|| \leq ||X(t)X^{-1}(t_1+nT)||\,||X(t_1+nT)X^{-1}(t_1)|| \leq$$

$$\leq K||X(t_1+nT)X^{-1}(t_1+(n-1)T)|| \ldots ||X(t_1+T)X^{-1}(t_1)|| \leq K\theta^n.$$

Então, se nós pusermos $\alpha = -T^{-1}\log\theta$, teremos $\alpha > 0$ e

$$||X(t)X^{-1}(t_1)|| \leq \theta^{-1}Ke^{-(n+1)\alpha T} < \theta^{-1}Ke^{-\alpha(t-t_1)},$$

para todo $t \geq t_1 \geq t_o$.

Desta maneira, o Lema está provado.

CAPÍTULO II

APLICAÇÕES

II.1. Operadores Integrais

Consideremos três tipos de sistemas n-dimensionais:

(1) $\dot{x} = f(t,x)$

(2) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ *onde* $||X(t)X^{-1}(s)|| \leq K,\ K>0,\ t \geq s \geq 0$

(3) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ *onde* $||X(t)X^{-1}(s)|| \leq Ke^{-\sigma(t-s)},\ K>0,$
$\sigma > 0,\ t \geq s \geq 0$

onde $X(t)$ representa a matriz principal de soluções do sistema $\dot{x} = A(t)x$, isto é, $X(t)$ é matriz fundamental tal que $X(0) = I$ = matriz identidade. Suponhamos $A(t)$ contínua para $t \in J = [0,\infty)$, $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ contínua com $||f(t,x)|| \leq$ $\leq G(t,||x||)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, onde $G(t,r)$ é contínua por partes, positiva para $t \geq 0$, $r \geq 0$ e não decrescente em r para t fixo. D é uma região do $\mathbb{R}^n$. Suponhamos também que por todo ponto $(t_o,x_o) \in J \times D$ passe uma única solução $x(t,t_o,x_o)$ de (1), que dependa continuamente de (t,t_o,x_o).

Ao sistema (1) nós associaremos o operador integral:

(4) $$T_b(x)(t) = b + \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds, \quad t_o \geq 0, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

e aos sistemas (2) e (3) nós associaremos o operador integral:

(5) $$T_b(x)(t) = X(t)X^{-1}(t_o)b + \int_{t_o}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s))ds,$$

$t_o \geq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Observemos primeiramente, que pontos fixos destes operadores, correspondem a soluções das respectivas equações associadas, que passam por b em $t = t_o$.

Mostremos agora, que tais operadores satisfazem às hipóteses (i) e (ii) do Teorema de Schauder-Tychonoff.

Tomemos primeiramente o *sistema (1)*.

Condição (i):

Sejam $x, x_n \in F$ com $x_n \to x$ uniformemente nos compactos de $I = [t_o,\infty)$.

Sejam dados $\varepsilon > 0$ e $A \subset I$, A compacto. Seja $a > 0$ tal que $[t_o,a] \supset A$.

Para $t \in [t_o,a]$, temos que $x(t)$ estará num compacto D_o do $\mathbb{R}^n$. Como $f(t,x)$ é uniformemente contínua em $[t_o,a] \times D_o$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se x e x' pertencem a D_o,

$$||x-x'|| \leq \delta \Longrightarrow ||f(t,x)-f(t,x')|| \leq \frac{\varepsilon}{(a-t_o)},$$

para todo $t \in [t_o,a]$.

Como $x_n \to x$ uniformemente em $[t_o,a]$, temos que dado $\delta > 0$, existe $n_o = n_o(\delta)$ tal que para todo $n \geq n_o$, $||x_n(t)-x(t)|| \leq \delta$, para todo $t \in [t_o,a]$.

Podemos supor ainda que $x_n(t) \in D_o$, para $n \geq n_o$, $t \in [t_o,a]$.

Assim,

$$||T_b(x_n)(t)-T_b(x)(t)|| =$$

$$= ||\int_{t_o}^{t} f(s,x_n(s))ds - \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds|| \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{t} ||f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{a} ||f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{a} \frac{\varepsilon}{(a-t_o)} ds \leq \varepsilon, \quad \text{para} \quad n \geq n_o.$$

Assim, $Tx_n \to Tx$ uniformemente em $[t_o,a]$, portanto em A, e a conclusão segue.

Condição (ii):

Mostremos que as funções no conjunto imagem TF são equicontínuas em todo ponto de I. Temos que,

$$T_b(x)(t) = b + \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds$$

é o operador integral associado a (1). Vemos que $T_b(x)$ é solução da equação diferencial $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$ por b em $t = t_o$. Portanto, a sua derivada é contínua em I.

Dado $t_1 \in I$ seja $A = [t_o,t_1+1]$.

Temos que,

$$||f(t,x(t))|| \leq G(t,||x(t)||) \leq G(t,\mu(t)) \leq M,$$

para todo $t \in A$.

Portanto, $||(T_b(x))^{\bullet}(t)|| \leq M$, para todo $x(t) \in F$, para todo $t \in A$, donde segue a equicontinuidade em t_1.

Mostremos que as funções no conjunto imagem TF são limitadas em todo ponto de I.

Temos, para cada $t \in I$,

$$||T_b(x)(t)|| \leq ||b|| + \int_{t_o}^{t} ||f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq ||b|| + \int_{t_o}^{t} G(s,||x(s)||)ds \leq$$

$$\leq ||b|| + \int_{t_o}^{t} G(s,\mu(s))ds = M(t),$$

para todo $x \in F$.

Passemos agora ao *sistema (2)*.

Condição (i):

Sejam $x, x_n \in F$ com $x_n \to x$ uniformemente nos compactos de I.

Sejam dados $\varepsilon > 0$, $A \subset I$, A compacto. Seja $a > 0$, tal que $[t_o,a] \supset A$.

Para $t \in [t_o,a]$, temos que $x(t)$ estará num compacto D_o do $\mathbb{R}^n$. Como $f(t,x)$ é uniformemente contínua em $[t_o,a] \times D_o$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se x e x' pertencem a D_o,

$$||x-x'|| \leq \delta \Longrightarrow ||f(t,x)-f(t,x')|| \leq \frac{\varepsilon}{K(a-t_o)},$$

para todo $t \in [t_o,a]$.

Como $x_n \to x$ uniformemente em $[t_o,a]$, temos que dado $\delta > 0$, existe $n_o = n_o(\delta)$, tal que para todo $n \geq n_o$, $||x_n(t)-x(t)|| \leq \delta$, para todo $t \in [t_o,a]$.

Podemos ainda supor que $x_n(t) \in D_o$, para $n \geq n_o$, $t \in [t_o,a]$.

Desta maneira, temos:

$$||T_b(x_n)(t)-T_b(x)(t)|| =$$

$$\leq ||\int_{t_o}^{t} (X(t)X^{-1}(s))(f(s,x_n(s))-f(s,x(s))ds|| \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{t} ||X(t)X^{-1}(s)||||f(s,x_n(s))-f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq K\int_{t_o}^{a} ||f(s,x_n(s))-f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq K\frac{\varepsilon(a-t_o)}{K(a-t_o)} = \varepsilon, \quad \text{para} \quad n \geq n_o.$$

Assim, $Tx_n \to Tx$ uniformemente em $[t_o,a]$, portanto em A, e a conclusão segue.

Condição (ii):

Temos que,

$$T_b(x)(t) = X(t)X^{-1}(t_o)b + \int_{t_o}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s))ds,$$

é o operador integral associado a (2).

Tal operador, é solução da seguinte equação diferencial:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + f(t,x(t)).$$

De fato:

$$(T_b(x))^{\cdot}(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t_o)b + X(t)X^{-1}(t)f(t,x(t))$$

$$+ \dot{X}(t)[\int_{t_o}^{t} X^{-1}(s)f(s,x(s))ds] =$$

$$= A(t)X(t)X^{-1}(t_o)b + f(t,x(t))$$

$$+ A(t)X(t)\int_{t_o}^{t} X^{-1}(s)f(s,x(s))ds =$$

$$= A(t)[X(t)X^{-1}(t_o)b + \int_{t_o}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s))ds]$$

$$+ f(t,x(t)) = A(t)T_b(x)(t) + f(t,x(t)).$$

Portanto, a sua derivada é contínua em I.

Dado $t_1 \in I$, seja $A = [t_o, t_1+1]$.

Temos assim, como foi feito anteriormente, que

$$||(T_b(x)(t)|| \leq M, \text{ para todo } x \in F, \text{ para todo } t \in A$$

e portanto temos a equicontinuidade em t_1.

Mostremos agora, que as funções no conjunto imagem TF são limitadas em todo ponto de I.

Temos, para cada $t \in I$,

$$||T_b(x)(t)|| \leq ||X(t)X^{-1}(t_o)||||b||$$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||X(t)X^{-1}(s)||||f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq K||b|| + \int_{t_o}^{t} KG(s,\mu(s))ds = M(t),$$

para todo $x \in F$.

Finalmente, consideremos o *sistema (3)*.

Condição (i):

Sejam $x, x_n \in F$ com $x_n \to x$ uniformemente nos compactos de I.

Sejam dados $\varepsilon > 0$ e $A \subset I$, A compacto. Seja $a > 0$, tal que $[t_o, a] \supset A$.

Para $t \in [t_o, a]$, temos que $x(t)$ estará num compacto D_o do $\mathbb{R}^n$. Como $f(t,x)$ é uniformemente contínua em $[t_o, a] \times D_o$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se x e x' pertencem a D_o,

$$||x-x'|| \leq \delta \Longrightarrow ||f(t,x)-f(t,x')|| \leq \frac{\varepsilon}{K(a-t_o)}$$

para todo $t \in [t_o, a]$.

Como $x_n \to x$ uniformemente em $[t_o, a]$, temos que dado $\delta > 0$, existe $n_o = n_o(\delta)$ tal que para todo $n \geq n_o$, $||x_n(t)-x(t)|| \leq \delta$, para todo $t \in [t_o, a]$.

Assim,

$$||T_b(x_n)(t)-T_b(x)(t)|| =$$

$$= ||\int_{t_o}^{t} (X(t)X^{-1}(s))(f(s,x_n(s))-f(s,x(s)))ds|| \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{t} ||X(t)X^{-1}(s)||\,||f(s,x_n(s))-f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{a} Ke^{-\sigma(t-s)}||f(s,x_n(s))-f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{a} K||f(s,x_n(s))-f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{a} K\frac{\varepsilon}{K(a-t_o)}ds \leq \varepsilon, \quad \text{para} \quad n \geq n_o.$$

Portanto, $Tx_n \to Tx$ uniformemente em $[t_o, a]$, e então em A, seguindo a conclusão.

Condição (ii):

Para mostrarmos que as funções no conjunto imagem TF são equicontínuas em todo ponto de I, procedemos da mesma maneira como para o sistema (2).

Mostremos então que as funções no conjunto imagem TF são limitadas em todo ponto de I. Para cada $t \in I$,

$$||T_b(x)(t)|| \leq ||X(t)X^{-1}(t_o)||\,||b||$$

$$+ \int_{t_o}^{t} ||X(t)X^{-1}(s)||\,||f(s,x(s))||ds \leq Ke^{-\sigma(t-t_o)}||b||$$

$$+ \int_{t_o}^{t} Ke^{-\sigma(t-s)}G(s,\mu(s))ds = M(t), \quad \text{para todo} \quad x \in F.$$

Desta forma, temos que os operadores (4) e (5) satisfazem às hipóteses (i) e (ii) do Teorema de Schauder-Tychonoff.

Daremos agora condições suficientes para que $T_b(F) \subset F$, para cada um dos operadores T_b considerados acima.

Para o *sistema (1)*.

Temos que:

$$||T_b(x)(t)|| \leq ||b|| + \int_{t_o}^{t} ||f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq ||b|| + \int_{t_o}^{t} G(s,||x(s)||)ds \leq ||b|| + \int_{t_o}^{t} G(s,\mu(s))ds$$

Então, para o operador integral associado a (1), $T_b(F) \subset F$, se μ satisfizer,

$$(6) \qquad ||b|| + \int_{t_o}^{t} G(s,\mu(s))ds \leq \mu(t), \quad t \geq t_o,$$

e, esta desigualdade estará satisfeita, se μ satisfizer a desigualdade diferencial

$$(7)\qquad \begin{cases} r' \geq G(t,r) \\ r(t_o) \geq ||b|| \end{cases},$$

onde, uma solução de (7) significa uma função $r(t)$ diferenciável, satisfazendo (7), onde G é contínua.

Para o *sistema (2)*.

Da mesma maneira como para o sistema (1), temos que $T_b(F) \subset F$, se μ satisfizer

$$(8)\qquad K||b|| + \int_{t_o}^{t} KG(s,\mu(s))ds \leq \mu(t), \quad t \geq t_o$$

e, esta desigualdade estará satisfeita, se μ satisfizer a desigualdade diferencial

$$(9)\qquad \begin{cases} r' \geq KG(t,r) \\ r(t_o) \geq K||b|| \end{cases}$$

Observamos que as desigualdades diferenciais (7) e (9), podem ser combinadas em:

$$(10)\qquad \begin{cases} r' \geq K_1 G(t,r) \\ r(t_o) \geq K_1||b|| \end{cases},$$

onde $K_1 = 1$ quando consideramos o sistema (1) e $K_1 = K$ quando consideramos o sistema (2).

Para o *sistema (3)*.

Analogamente aos casos anteriores, $T_b(F) \subset F$, se μ satisfizer:

$$(11) \qquad K||b||e^{-\sigma(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} Ke^{-\sigma(t-s)}G(s,\mu(s))ds \leq \mu(t), \quad t \geq t_o.$$

Afirmamos que μ satisfaz (11), se satisfizer a desigualdade diferencial:

$$(12) \qquad \begin{cases} r' \geq -\sigma r + KG(t,r) \\ r(t_o) \geq K||b|| \end{cases}$$

De fato:

$$\dot{r}(t) + \sigma r(t) \geq KG(t,r(t)) \iff$$

$$\iff \dot{r}(t)e^{\sigma t} + \sigma r(t)e^{\sigma t} \geq e^{\sigma t}KG(t,r(t)) \iff$$

$$\iff (r(t)e^{\sigma t})^{\bullet} \geq e^{\sigma t}KG(t,r(t)) \iff$$

$$\iff r(t)e^{\sigma t} \geq r(t_o)e^{\sigma t_o} + \int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}KG(s,r(s))ds \implies$$

$$\implies r(t)e^{\sigma t} \geq K||b||e^{\sigma t_o} + \int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}KG(s,r(s))ds \iff$$

$$\iff r(t) \geq K||b||e^{-\sigma(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} e^{-\sigma(t-s)}KG(s,r(s))ds,$$

para todo $t \geq t_o$.

II.2. Sobre Existência

Teorema II.2.1:

Se f for contínua em $I \times D$, onde I é um intervalo da reta e $D \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, então, para todo $(t_o,x_o) \in I \times D$, existe pelo menos uma solução de (1) passando por (t_o,x_o).

Prova:

Sejam α e β números positivos, tais que o retângulo

$$R(\alpha,\beta) = \{(t,x) : t \in I_\alpha, \ ||x-x_o|| \leq \beta\} \subset I \times D,$$

onde $\quad I_\alpha = I_\alpha(t_o) = \{t : |t-t_o| \leq \alpha\} \subset I.$

Seja $M = \sup \{||f(t,x)||, \ (t,x) \in R(\alpha,\beta)\}$.

Escolhamos $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, tais que $0 < \bar{\alpha} \leq \alpha$, $0 < \bar{\beta} \leq \beta$ e tais que $M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$.

Seja

$$F = F(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = \{\phi \in C(I_{\bar{\alpha}},\mathbb{R}^n), \ \phi(t_o) = x_o, \ ||\phi(t)-x_o|| \leq \bar{\beta}, \ t \in I_{\bar{\alpha}}\}$$

Definamos $T\phi$ pela relação

$$T\phi(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,\phi(s))ds, \quad t \in I_{\bar{\alpha}}, \quad \phi \in F.$$

Encontrar uma solução de (1) por (t_o,x_o) é encontrar um ponto fixo de T.

Mostremos primeiramente que $T(F) \subset F$. Temos que:

$$T\phi \in C(I_{\bar{\alpha}},R^n), \quad T(\phi(t_o)) = x_o \quad e$$

$$||T\phi(t)-x_o|| \leq |\int_{t_o}^{t} ||f(s,\phi(s))||ds| \leq$$

$$\leq M|t-t_o| \leq M\bar{\alpha} \leq \bar{\beta},$$

para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$.

Mostremos que as funções no conjunto imagem TF são equicontínuas e limitadas em todo ponto de $I_{\bar{\alpha}}$.

Temos que,

$$||T\phi(t)-T\phi(\bar{t})|| \leq |\int_{\bar{t}}^{t} ||f(s,\phi(s))||ds| \leq M|t-\bar{t}|,$$

para todo t, $\bar{t} \in I_{\bar{\alpha}}$, e portanto, as funções no conjunto imagem TF são equicontínuas em todo ponto de $I_{\bar{\alpha}}$.

Também, $||T\phi(t)|| \leq ||x_o|| + M|t-t_o|$, para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$, e portanto, as funções no conjunto imagem TF são limitadas em todo ponto de $I_{\bar{\alpha}}$.

Mostremos que T é contínuo no seguinte sentido: "se $\phi_n \in F$, $(n = 1, 2, \ldots)$ e $\phi_n \to \phi$ uniformemente em $I_{\bar{\alpha}}$, então $T\phi_n \to T\phi$ uniformemente em $I_{\bar{\alpha}}$".

De fato: f é uniformemente contínua em $R(\alpha,\beta)$, e portanto dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se

$$||x_1-x_2|| \leq \delta, \quad \text{então,} \quad ||f(t,x_1)-f(t,x_2)|| \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}},$$

para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$.

Como $\phi_n \to \phi$ uniformemente em $I_{\bar{\alpha}}$, dado $\delta > 0$ existe $n_o = n_o(\delta)$ tal que para todo $n \geq n_o$, $||\phi_n(t)-\phi(t)|| \leq \delta$, para todo $t \in I_{\bar{\alpha}}$.

Desta forma, temos que $||f(t,\phi_n(t))-f(t,\phi(t))|| \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}}$, para todo $n \geq n_o$.

Agora,

$$||T\phi_n(t)-T\phi(t)|| \leq \left|\int_{t_o}^{t} ||f(s,\phi_n(s))-f(s,\phi(s))||ds\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}}|t-t_o| \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}}\bar{\alpha} = \varepsilon,$$

e, portanto, $T\phi_n \to T\phi$ uniformemente em $I_{\bar{\alpha}}$.

Desta maneira, o operador T satisfaz às hipóteses do Teorema de Schauder-Tychonoff, e, portanto, T tem um ponto fixo. Assim, temos uma solução de (1) por (t_o,x_o). O Teorema está provado.

Consideraremos agora o sistema (1) e $D = \mathbb{R}^n$.

Teorema II.2.2:

Se a equação $\dot{r} = G(t,r)$ possui a propriedade que para qualquer $r_o > 0$, existe uma solução definida em $[t_o,\infty)$ passando por r_o em $t = t_o \geq 0$, então para um vetor arbitrário $b \in \mathbb{R}^n$, existe uma solução de (1) definida em $[t_o,\infty)$ que passa por b em $t = t_o$.

Prova:

Seja $b \in \mathbb{R}^n$ e seja $\mu(t)$ uma solução de $\dot{r} = G(t,r)$ com $\mu(t_o) \geq ||b||$ definida em $[t_o,\infty)$.

Então, $\mu(t)$ satisfaz (7), e, portanto, o operador T_b associado a (1) é tal que $T_b(F) \subset F$.

Assim, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, temos que T_b tem um ponto fixo em F, e, portanto, existe uma solução de (1) definida em $[t_o,\infty)$, passando por b em $t = t_o$.

Corolário II.2.1:

Suponhamos que $||f(t,x)|| \leq M(t)L(||x||)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, onde M e L são contínuas por partes positivas, e L é não decrescente. Se $\int_{r_o}^{\infty} \frac{1}{L(s)} ds = \infty$, $r_o > 0$, então, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, existe uma solução de (1) por b em $t = 0$, definida em $[0,\infty)$.

Prova:

Consideremos a equação

$$\dot{r} = M(t)L(r), \quad r(0) = r_o$$

Esta equação tem solução implícita dada por

$$\int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds = \int_{o}^{t} M(s)ds$$

Seja $\psi(r) = \int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds.$

Tal função é estritamente crescente e sua imagem é $[0,\infty)$. Assim, a função inversa ψ^{-1} existe e está definida em $[0,\infty)$.

Portanto, a solução da equação é

$$r(t) = \psi^{-1}(\psi(r(t))) = \psi^{-1}(\int_{o}^{t} M(s)ds)$$

que está definida em $[0,\infty)$.

O resultado segue agora do Teorema (II.2.2.).

II.3. Sobre Limitação

Nós consideraremos aqui as equações (1) ou (2) e assumiremos que $D = \mathbb{R}^n$.

Teorema II.3.1:

Se a equação $\dot{r} = K_1 G(t,r)$ possui a propriedade que para qualquer $r_o > 0$, existe uma solução definida e limitada em $[t_o,\infty)$, passando por r_o em $t = t_o$, então para todo $b \in \mathbb{R}^n$, existe uma solução limitada de (1) ou (2) definida em $[t_o,\infty)$ e que passa por b em $t = t_o$.

Prova:

Seja $b \in \mathbb{R}^n$ e seja $\mu(t)$ uma solução limitada de $\dot{r} = K_1 G(t,r)$ com $\mu(t_o) \geq K_1||b||$ definida em $[t_o,\infty)$.

Temos que $\mu(t)$ satisfaz (10), e, portanto, o operador T_b associado a (1) ou (2), é tal que $T_b(F) \subset F$.

Então, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, T_b tem um ponto fixo em F, portanto, existe uma solução limitada de (1) ou (2) definida em $[t_o,\infty)$ e passando por b em $t = t_o$.

Corolário II.3.1:

Suponhamos que $||f(t,x)|| \leq M(t)L(||x||)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, onde M e L são contínuas por partes, positivas, e L é não decrescente. Se $\int_{r_o}^{\infty} \frac{1}{L(s)} ds = \infty$, $r_o > 0$ e $\int_o^{\infty} M(s)ds < \infty$, então, para todo $b \in \mathbb{R}^n$ existe uma solução limitada de (1) ou (2) definida em $[0,\infty)$ e passando por b em $t = 0$.

Prova:

Pelo Corolário (II.2.1.), temos que para todo $r_o > 0$ e existe uma solução de $\dot{r} = M(t)L(r)$ definida em $[0,\infty)$ e passando por r_o em $t = 0$. Tal solução é dada por

$$r(t) = \psi^{-1}\left(\int_o^t M(s)ds\right), \quad t \in [0,\infty).$$

Como $\int_0^\infty M(s)ds < \infty$, temos que $r(t)$ é limitada, e o Corolário está provado.

Consideraremos agora o sistema (3) e $D = \mathbb{R}^n$.

Teorema II.3.2:

Se G for tal que para toda condição inicial r_o, existe uma solução da desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$ passando por r_o em $t = t_o$ que é ultimamente limitada, então, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, existe uma solução de (3), passando por b em $t = t_o$ que é ultimamente limitada.

Prova:

Seja $b \in \mathbb{R}^n$ e seja $\mu(t)$ uma solução ultimamente limitada da desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$, satisfazendo $\mu(t_o) \geq K||b||$.

Dessa maneira, $\mu(t)$ satisfaz (12) e, portanto, o operador T_b associado a (3) é tal que $T_b(F) \subset F$.

Então, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, tal operador tem um ponto fixo em F, isto é, existe uma solução ultimamente limitada de (3) passando por b em $t = t_o$.

Corolário II.3.2:

Dado $\varepsilon > 0$, suponhamos que exista $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que $||f(t,x)|| \leq N$, para $||x|| \leq R$, $t \geq 0$ e $||f(t,x)|| \leq \varepsilon||x||$, para $||x|| \geq R$, $t \geq 0$. Então, todas as soluções de (3) são ultimamente limitadas.

Prova:

Seja

$$G(t,r) = \begin{cases} N & , \quad r \leq R \\ \varepsilon r & , \quad r > R \end{cases}$$

e seja $b \in \mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema (II.3.2.), se nós provarmos que para ε suficientemente pequeno, existe solução ultimamente limitada para $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$ passando por r_o em $t = t_o$, onde $r_o \geq K||b||$, teremos provado o Corolário.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{\sigma}{K}$ e β, $0 < \beta < 1$.

Seja $\mu(t) = K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t} + \frac{NK}{\sigma}$.

Pela nossa escolha de ε, $\mu(t) \to \frac{NK}{\sigma}$, quando $t \to \infty$, e, portanto, μ é ultimamente limitada. Claramente, $\mu(t_o) \geq K||b||$. Portanto, resta-nos mostrar que μ satisfaz a desigualdade diferencial

$$\dot{\mu}(t) \geq -\sigma\mu(t) + K \begin{cases} N & , \quad \mu(t) \leq R \\ \varepsilon\mu(t) & , \quad \mu(t) \geq R \end{cases}$$

Mas,

$$\dot{\mu}(t) = \beta(\varepsilon K-\sigma)K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t}$$

$$\dot{\mu}(t)+\sigma\mu(t) = \beta(\varepsilon K-\sigma)K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t}$$

$$+ \sigma(K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t} + \frac{NK}{\sigma}) =$$

$$= K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t}[\beta\varepsilon K + \sigma(1-\beta)] + NK$$

Portanto,

(13) $$\dot{\mu}(t)+\sigma\mu(t) = K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t}[\beta\varepsilon K + \sigma(1-\beta)] + NK$$

Agora, pela nossa escolha de β, temos que

$$\mu(t) + \sigma\mu(t) \geq NK$$

e, portanto, uma parte da desigualdade já está satisfeita.

Agora,

$$K\mu(t) = K^2||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t} + \frac{NK^2}{\sigma}.$$

Logo, devemos provar que

$$\dot{\mu}(t) \geq -\sigma\mu(t) + \varepsilon(K^2||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t}) + \varepsilon\frac{NK^2}{\sigma},$$

ou seja,

$$\dot{\mu}(t) \geq -\sigma\mu(t) + K||b||e^{\beta(\varepsilon K-\sigma)t}(\varepsilon K) + \frac{\varepsilon K}{\sigma}NK$$

Comparando esta expressão com (13) vemos que esta desigualdade estará satisfeita se

(14)
(a) $\beta\varepsilon K + \sigma(1-\beta) \geq \varepsilon K$

(b) $NK \geq \frac{\varepsilon K}{\sigma}NK$

De (14 a), $\sigma(1-\beta) \geq \varepsilon K(1-\beta) \Longleftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\sigma}{K}$.

De (14 b), $\varepsilon K \leq \sigma \Longleftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\sigma}{K}$.

Como tomamos $0 < \varepsilon < \frac{\sigma}{K}$, temos satisfeitas as hipóteses do Teorema (II.3.2.) e o Corolário está provado.

Consideremos a equação

$$\dot{u} = -\alpha u + b(t)u$$

onde $b(t)$ é contínua, não negativa para $t \geq 0$, $\alpha > 0$.

Consideremos também a condição

$$\limsup_{(t,v)\to(\infty,\infty)} \frac{1}{v}\int_t^{t+v} b(s)ds < \alpha. \tag{15}$$

Corolário II.3.3:

Consideremos o sistema (3) com $f(t,x) = h(t,x)+g(t,x)$, onde:

(i) $||h(t,x)|| \leq b(t)||x||$, $x \in D$, $t \geq 0$,

onde $b(t)$ satisfaz a condição (15) com $0 < \alpha < \frac{\sigma}{K}$;

(ii) $||g(t,x)|| \leq c(t)$, $t \geq 0$, $x \in D$,

onde $\int_t^{t+1} c(s)ds$ é limitada em $[0,\infty)$.

Então, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, existe uma solução de (3) passando por b em $t = t_o$, que é ultimamente limitada, isto é, existe uma constante positiva L tal que dado $\delta > 0$, existe $T = T(\delta)$, tal que se $||b|| \leq \delta$ então $||x(t,t_o,b)|| \leq L$, para todo $t \geq t_o + T(\delta)$ e onde $x(t,t_o,b)$ é a solução de (3) passando por b em $t = t_o$.

Prova:

Temos que,

$$||f(t,x)|| \leq ||h(t,x)||+||g(t,x)|| \leq b(t)||x|| + c(t).$$

Portanto,

$$||f(t,x)|| \leq G(t,||x||), \quad \text{onde} \quad G(t,r) = b(t)r + c(t).$$

Pelo Teorema (II.3.2.) basta provarmos que a equação $\dot{r} = -\sigma r + KG(t,r)$ possui uma solução ultimamente limitada passando por r_o em $t = t_o$, para todo $r_o > 0$.

Consideremos então, a equação diferencial escalar,

$$\dot{r} = -\sigma r + Kb(t)r + Kc(t), \quad r(t_o) = r_o.$$

Por hipótese, $b(t)$ satisfaz (15) com $0 < \alpha < \frac{\sigma}{K}$.

Logo,

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ v\to\infty}} \sup \frac{1}{v}\int_t^{t+v} Kb(s)ds < K\alpha < \sigma$$

Assim, pelo Lema (I.3.1.) podemos afirmar que a solução $v = 0$ da equação $\dot{v} = -\sigma v + Kb(t)v$ é uniformemente assintoticamente estável. Como esta equação é linear, então $v = 0$ é exponencialmente estável conforme o Lema (I.3.4.).

Indiquemos com $v(t,s)$ a solução da equação $\dot{v} = -\sigma v + Kb(t)v$ tal que $v(s,s) = 1$.

Como $v = 0$ é exponencialmente estável, existem constantes $\rho > 0$ e $R > 0$, tais que para todo $s \geq 0$, a solução $v(t,s)$ da equação mencionada satisfaz:

$$|v(t,s)| \leq Re^{-\rho(t-s)},$$

para todo $t \geq s \geq 0$.

Agora, de acordo com a fórmula da variação das constantes, a solução $r(t,t_o,r_o)$ da equação

$$\dot{r} = -\sigma r + Kb(t)r + Kc(t)$$

é dada por:

$$r(t,t_o,r_o) = v(t,t_o)r_o + \int_{t_o}^{t} v(t,s)Kc(s)ds, \quad t \geq t_o$$

ou

$$r(t,t_o,r_o) = v(t,t_o)r_o + K\int_{t_o}^{t} v(t,s)c(s)ds, \quad t \geq t_o$$

Segue então que:

$$|r(t,t_o,r_o)| \leq Re^{-\rho(t-t_o)}|r_o| + K\int_{t_o}^{t} Re^{-\rho(t-s)}c(s)ds,$$

$t \geq t_o$.

Por hipótese, $c(t)$ é uma função escalar, contínua e positiva, com $\int_{t}^{t+1} c(s)ds$ limitada em $[0,\infty)$. Portanto, do Lema (I.2.4.), existe um $A = A(\rho) > 0$, tal que para $t_o \geq 0$, temos,

$$e^{-\rho t}\int_{t_o}^{t} e^{\rho s}c(s)ds < A, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o$$

ou,

$$\int_{t_o}^{t} e^{-\rho(t-s)}c(s)ds < A, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o.$$

Assim,

$$|r(t,t_o,r_o)| \leq Re^{-\rho(t-t_o)}|r_o| + KRA, \quad t \geq t_o.$$

Portanto, dado $\delta > 0$, se $|r_o| \leq \delta$, então,

$$|r(t,t_o,r_o)| \leq Re^{-\rho(t-t_o)}\delta + KRA, \quad t \geq t_o.$$

Tomemos agora $T = T(\delta) > 0$ tal que $Re^{-\rho T}\delta < 1$ e seja $L = 1 + KRA$.

Assim para $t \geq t_o + T$, temos que $Re^{-\rho(t-t_o)}\delta \leq Re^{-\rho T}\delta < 1$ e, portanto,

$$|r(t,t_o,r_o)| \leq 1 + KRA = L, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o + T.$$

O resultado segue agora do Teorema (II.3.2.).

II.4. Sobre a Estabilidade de um Ponto Crítico

Suponhamos que (1) ou (2) possui um ponto crítico na origem, isto é, $f(t,0) = 0$, $t \geq 0$, e nós desejamos examinar a estabilidade deste ponto crítico.

Aqui, $D = \{x \in \mathbb{R}^n, \ ||x|| \leq \eta\}$, $\eta > 0$.

Teorema II.4.1:

Se a equação $\dot{r} = K_1G(t,r)$ possui um ponto crítico estável na origem, então (1) ou (2) possui um ponto crítico estável na origem.

Prova:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$, tal que se $0 < r_o \leq K_1\delta$, então toda solução de $\dot{r} = K_1G(t,r)$ que passa por r_o em $t = t_o$ é limitada pelo mínimo $\{\varepsilon,\eta\}$, $t \geq 0$.

Seja $b \in \mathbb{R}^n$, $||b|| \leq \delta$, e seja $\mu(t)$ uma solução de $\dot{r} = K_1G(t,r)$, com $\mu(t_o) = K_1\delta$.

Assim, o operador T_b associado a (1) ou (2) é tal que $T_b(F) \subset F$, e portanto, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, T_b possui um ponto fixo em F, isto é, existe solução $x(t)$ de (1) ou (2) passando por b em $t = t_o$, limitada pelo mínimo $\{\varepsilon,\eta\}$.

Corolário II.4.1:

Seja $||f(t,x)|| \leq M(t)L(||x||)$, $t \geq 0$, $||x|| \leq \eta$, onde M e L são contínuas, e para $r > 0$, L é positiva e não-decrescente. Se $L(0) = 0$, e $\lim_{r_o \to 0^+} \int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds = \infty$ para r suficientemente pequeno e positivo e $\int_o^\infty M(s)ds < \infty$, então (1) ou (2) possui um ponto crítico estável na origem.

Prova:

Pelo Teorema (II.4.1.) temos que se a equação

$$\dot{r} = K_1 M(t) L(r)$$

possui um ponto crítico estável na origem, o resultado segue.

A solução de $\dot{r} = K_1 M(t) L(r)$, $r(0) = r_o$, é dada implicitamente por $\int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds = \int_o^t K_1 M(s) ds$.

Agora, por hipótese $\lim_{r_o \to 0^+} \int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds = \infty$, e portanto, dado $K > 0$, existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(K)$ tal que se $0 < r_o \leq \bar{\delta}$ então $\int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds > K$. Tomemos $K = \int_o^\infty K_1 M(s) ds < \infty$.

Então, existe $\delta > 0$, tal que se $r_o \leq \delta$, então

$$\int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds > \int_o^\infty K_1 M(s) ds.$$

Logo,

$$\int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds > \int_{o}^{t} K_1 M(s) ds, \quad \text{para todo} \quad r > 0,$$

para todo $t \geq 0$ e $|r_o| \leq \delta$.

Seja $\psi(r) = \int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds$.

Como L é positiva então ψ é crescente, e sua inversa ψ^{-1} também é crescente.

Logo, $r = \psi^{-1}(\psi(r)) = \psi^{-1}(\int_{r_o}^{r} \frac{1}{L(s)} ds) = \psi^{-1}(\int_{o}^{t} K_1 M(s) ds)$.

Dado $\varepsilon > 0$, temos que,

$$\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{1}{L(s)} ds > \int_{o}^{t} K_1 M(s) ds, \quad t \geq 0$$

Assim,

$$\varepsilon = \psi^{-1}(\int_{r_o}^{\varepsilon} \frac{1}{L(s)} ds) > \psi^{-1}(\int_{o}^{t} K_1 M(s) ds) = r$$

Portanto, $r(t) < \varepsilon$, $t \geq 0$.

II.5. Sobre a Estabilidade Assintótica de um Ponto Crítico

Consideraremos (3) e assumiremos que (3) possui um ponto crítico na origem, isto é, $f(t,0) = 0$.

Aqui, $D = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| < \eta\}$, $0 < \eta \leq \infty$

Teorema II.5.1:

Se a desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$ possui um ponto crítico assintoticamente estável na origem, então (3) possui um ponto crítico assintoticamente estável na origem.

Prova:

A origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$. Então, existe $\delta > 0$, tal que se $0 < r_o \leq K\delta$, toda solução da desigualdade diferencial acima que passa por r_o em $t = 0$, tende a zero quando $t \to \infty$, e é limitada por η, para todo $t \geq 0$.

Seja $b \in \mathbb{R}^n$, $||b|| \leq \delta$ e seja $\mu(t)$ uma solução da desigualdade considerada com $\mu(0) = K\delta$. Nessas condições, o operador T_b associado a (3) é tal que $T_b(F) \subset F$, e portanto, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, T_b tem um ponto fixo em F, isto é, existe solução $x(t)$ de (3) passando por b em $t = 0$, com $||x(t)|| \leq \mu(t)$, $t \geq 0$. Como $\mu(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, vem que $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Assim, (3) possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável na origem.

Corolário II.5.1:

Suponhamos que para qualquer $\varepsilon_o > 0$, exista $\delta > 0$ tal que $||f(t,x)|| \leq \varepsilon_o ||x||$, $t \geq 0$, $||x|| < \delta$.

Então em (3) a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Prova:

Segue como corolário imediato do teorema acima.

Corolário II.5.2:

Suponhamos que para qualquer $\varepsilon_o > 0$, exista $T(\varepsilon_o)$ tal que

$$||f(t,x)|| \leq \begin{cases} k||x|| + t^b||x||^{1+a}, & 0 \leq t \leq T(\varepsilon_o) \\ \varepsilon_o||x|| + t^b||x||^{1+a}, & t \geq T(\varepsilon_o) \end{cases}$$

para $||x|| \leq \eta$, onde k, $b \geq 0$, $a > 0$, $\varepsilon_o < \frac{\sigma}{K}$.

Então, em (3) a origem é assintoticamente estável.

Prova:

Vamos mostrar que para $\varepsilon_o < \frac{\sigma}{K}$, existe solução $\mu(t)$ da desigualdade diferencial

$$\dot{r} \geq -\sigma r + K \begin{cases} kr + t^b r^{1+a}, & 0 \leq t \leq T_1 \\ \varepsilon_o r + t^b r^{1+a}, & t \geq T_1 \end{cases}$$

onde $T_1 \geq T(\varepsilon_o)$ com $\mu(t)$ limitada por η e tendendo a zero quando $t \to \infty$.

Para $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq t \leq T_1$, temos que

$$-\sigma r + K(kr+t^b r^{1+a}) \leq -\sigma r + Kkr + KT_1^b r =$$

$$= (-\sigma + Kk + KT_1^b)r = cr$$

Então, nós podemos achar uma solução para a desigualdade sobre $[0,T_1]$ para qualquer T_1, com um limitante arbitrariamente pequeno sobre $[0,T_1]$ simplesmente escolhendo $\mu(0)$ suficientemente pequeno. Então, nós podemos assumir $\mu(t) \leq \eta$ sobre $[0,T_1]$.

Seja $\mu_o = \mu(T_1)$.

Precisamos agora, definir $\mu(t)$ para $t \geq T_1$.

Escolhamos β, tal que $0 < \beta < 1$. Tomemos $T_1 \geq T(\varepsilon_o)$ e seja $\mu(t) = \mu_o e^{\beta(\varepsilon_o K-\sigma)(t-T_1)}$.

Pela nossa escolha de ε_o, $\mu(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Também $\mu_o \leq \eta$ implica $\mu(t) \leq \eta$, $t \geq T_1$.

Vamos mostrar que para T_1 suficientemente grande e μ_o suficientemente pequeno, $\mu(t)$ satisfaz a desigualdade diferencial,

$$\dot{r} \geq -\sigma r + \varepsilon_o K r + K t^b r^{1+a}, \quad t \geq T_1.$$

Agora,

$$\dot{\mu}(t) - (\varepsilon_o K-\sigma)\mu(t) = (\beta-1)(\varepsilon_o K-\sigma)\mu_o e^{\beta(\varepsilon_o K-\sigma)(t-T_1)} =$$

$$= \alpha\mu(t),$$

onde $\alpha = (\beta-1)(\varepsilon_o K-\sigma) > 0$ pela nossa escolha de β e ε.

Assim, nós devemos mostrar que,

$$\alpha\mu(t) \geq K t^b \mu(t)^{1+a},$$

ou, como μ é positiva,

$$\alpha \geq K t^b \mu(t)^a.$$

Mas,

$$K t^b \mu(t)^a = K t^b \mu_o^a e^{a\beta(\varepsilon_o K-\sigma)(t-T_1)} =$$

$$= K\mu_o^a e^{-a\beta(\varepsilon_o K-\sigma)T_1} t^b e^{a\beta(\varepsilon_o K-\sigma)t}$$

Agora, escolhamos T_1 suficientemente grande, tal que $t^b e^{a\beta(\varepsilon_o K-\sigma)t} < \sqrt{\alpha}$, $t \geq T_1$ e μ_o suficientemente pequeno tal que $\mu_o^a K e^{-a\beta(\varepsilon_o K-\sigma)T_1} < \sqrt{\alpha}$.

Claramente, ambas as condições podem ser satisfeitas, e o corolário está provado.

II.6. Sobre a Estabilidade Uniforme de um Ponto Crítico

Teorema II.6.1:

Se a desigualdade $\dot{r} \geq KG(t,r)$ possui um ponto crítico uniformemente estável na origem, então toda solução de (2) limitada no futuro é uniformemente estável.

Prova:

Mostremos primeiramente que é suficiente provar que a solução nula de (2) é uniformemente estável.

De fato:

Seja $\psi(t)$ uma solução de (2), limitada no futuro. Consideremos a seguinte mudança de variáveis: $\omega = x - \psi(t)$. Então (2) torna-se:

$$\dot{\omega} = A(t)\omega + F(t,\omega),$$

onde,

$$F(t,\omega) = f(t,\omega+\psi(t)) - f(t,\psi(t)),$$

pois,

$$\dot{\omega}(t) = \dot{x}(t)-\dot{\psi}(t) = A(t)x(t)+f(t,x(t)) - A(t)\psi(t)-f(t,\psi(t)) =$$

$$= A(t)[x(t)-\psi(t)] + f(t,\omega(t)+\psi(t)) - f(t,\psi(t)) =$$

$$= A(t)\omega(t) + F(t,\omega(t))$$

Temos que $F(t,0) = 0$ e

$$||F(t,\omega)|| = ||f(t,\omega+\psi(t)) - f(t,\psi(t))|| \leq \bar{G}(t,||\omega||)$$

onde $\bar{G}(t,\omega) = G(t,\omega + ||\psi(t)||) + G(t,||\psi(t)||)$.

Assim, F satisfaz hipóteses semelhantes às de f. Vamos provar então que a solução nula de (2) é uniformemente estável.

Da hipótese, temos que dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se,

$$|r_o| \leq K\delta, \quad \text{então} \quad |r(t,t_o,r_o)| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_o$.

Seja $b \in \mathbb{R}^n$, $||b|| \leq \delta$ e seja $\mu(t)$ uma solução da desigualdade diferencial $\dot{r} \geq KG(t,r)$, tal que $\mu(t_o) = K\delta$.

Assim, $\mu(t)$ satisfaz (9), e o operador T_b associado a (2) é tal que $T_b(F) \subset F$. Pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, T_b tem um ponto fixo em F, isto é, existe solução $x(t)$ de (2) passando por b em $t = t_o$, satisfazendo

$$||x(t)|| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o,$$

e portanto, a solução nula de (2) é uniformemente estável.

Corolário II.6.1:

Suponhamos que para todo H positivo, exista uma função escalar contínua $h_H(t)$, $0 \leq t < \infty$, com $\int_o^\infty h_H(t) < \infty$ e tal que $||f(t,x)|| \leq h_H(t)$, para todo $t \geq 0$, $||x|| \leq H$.

Então, toda solução de (2), limitada no futuro, é uniformemente estável.

Prova:

Como no teorema anterior, é suficiente provarmos que a solução nula de (2) é uniformemente estável.

Como para todo $H > 0$, existe uma função escalar contínua $h_H(t)$, $0 \leq t < \infty$ com $\int_0^\infty h_H(t) < \infty$, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, existe $T = T(\varepsilon) > 0$, tais que,

$$|\mu_o| < \sigma \Longrightarrow |\mu_o| + K\int^\infty h_\varepsilon(s)ds < \varepsilon$$

Portanto, se $\mu(t)$ for solução do problema

$$\begin{cases} \dot{r} = Kh_\varepsilon(t) \\ r(t_o) = r_o \end{cases}$$

temos que, $|r_o| < \sigma \Longrightarrow |\mu(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geq T$.

Pelo teorema da continuidade em relação às condições iniciais, dado $\sigma > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $|r_o| < \delta$, então $|\mu(t)| < \sigma$, para todo $t_o \leq t \leq T$. Portanto, $|\mu(t)| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_o$.

Corolário II.6.2:

Suponhamos que $||f(t,x)|| \leq h(t)||x||$ com $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$, para todo $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Então o sistema (2) é uniformemente estável, isto é, todas as soluções são uniformemente estáveis.

Prova:

Mostremos que todas as soluções $x(t)$ de (2) são limitadas.

Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$. Portanto, $||X(t)X^{-1}(t_o)|| \leq K$, para todo $t \geq t_o$.

Se $x(t)$ for solução de (2) com $x(0) = x_o$, então,

$$x(t) = X(t)X^{-1}(0)x_o + X(t)\int_o^t X^{-1}(s)f(s,x(s))ds$$

Logo,

$$||x(t)|| \leq ||X(t)X^{-1}(0)||\,||x_o||$$

$$+ \int_o^t ||X(t)X^{-1}(s)||\,||f(s,x(s))||ds \leq$$

$$\leq K||x_o|| + K\int_o^t h(s)||x(s)||ds$$

Pela desigualdade de Gronwall, vem que:

$$||x(t)|| \leq K||x_o||\exp(K\int_o^t h(s))ds \leq$$

$$\leq K||x_o||\exp(K\int_o^\infty h(s))ds = L, \quad t \geq 0.$$

Pelo teorema anterior, temos então que todas as soluções de (2) são uniformemente estáveis.

II.7. Sobre a Estabilidade Equiassintótica de um Ponto Crítico

Teorema II.7.1:

Se a desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$ possui um ponto de equilíbrio equiassintoticamente estável na origem, então a

equação (3) possui um ponto de equilíbrio equiassintoticamente estável na origem.

Prova:

De acordo com a hipótese, temos que dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $\delta_o = \delta_o(t_o)$ e $T = T(\varepsilon,t_o) \geq 0$ tais que se

$$|r_o| \leq K\delta_o, \quad \text{então} \quad |r(t,t_o,r_o| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_o + T(\varepsilon,t_o)$.

Consideremos $b \in \mathbb{R}^n$, $||b|| \leq \delta_o$ e seja $\mu(t)$ uma solução da desigualdade diferencial acima, com $\mu(t_o) = K\delta_o$.

Assim, $\mu(t)$ satisfaz (12) e o operador T_b associado a (3) é tal que $T_b(F) \subset F$. Portanto, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, T_b tem um ponto fixo em F, isto é, existe solução $x(t)$ de (3) passando por b em $t = t_o$, satisfazendo $||x(t)|| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_o + T(\varepsilon,t_o)$, e assim, (3) possui um ponto de equilíbrio equiassintoticamente estável na origem.

Corolário II.7.1:

Consideremos o sistema (3), com $f(t,x) = h(t,x)+g(t,x)$, onde:

i) $||h(t,x)|| \leq b(t)||x||$, $x \in D$, $t \geq 0$, onde $b(t)$ satisfaz a condição (15) com $0 < \alpha < \frac{\sigma}{K}$.

ii) Existem constantes positivas a, ν, L de modo que $||g(t,x)|| \leq Lt^{\nu}||x||^{1+a}$, $x \in D$, $t \geq 0$.

Nessas condições a solução $x = 0$ de (3) é equiassintoticamente estável.

Prova:

Temos que,

$$||f(t,x)|| \leq ||h(t,x)|| + ||g(t,x)|| \leq$$

$$\leq b(t)||x|| + Lt^{\nu}||x||^{1+a}$$

Assim, $||f(t,x)|| \leq G(t,||x||)$, onde $G(t,r) = b(t)r + Lt^{\nu}|r|^{1+a}$.

De acordo com o teorema anterior, basta provarmos que a equação

$$\dot{r} = -\sigma r + K[b(t)r + Lt^{\nu}|r|^{1+a}],$$

ou,

$$\dot{r} = [-\sigma + Kb(t)]r + KLt^{\nu}|r|^{1+a},$$

possui um ponto de equilíbrio equiassintoticamente estável na origem.

Seja $\dot{v} = [-\sigma + Kb(t)]v$, ou

(16) $\dot{v} = g(t)v$ onde $g(t) = -\sigma + Kb(t)$

Como por hipótese $b(t)$ satisfaz (15), temos pelos Lemas (I.3.1.) e (I.3.4.), que a solução $v = 0$ de (16) é exponencialmente estável. Pelo Lema (I.3.2.), segue que a solução $r = 0$ de $\dot{r} = g(t)r + KLt^{\nu}|r|^{1+a}$ é equiassintoticamente estável.

Assim, o resultado segue do teorema anterior.

II.8. Sobre a Estabilidade Assintótica Uniforme de um Ponto Crítico

Teorema II.8.1:

Se a desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$ possui um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável na origem, então a equação (3) possui um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável na origem.

Prova:

De acordo com a hipótese, temos que existe $\delta_o > 0$, e dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$, existe $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que se

$$|r_o| \leq K\delta_o, \quad \text{então} \quad |r(t,t_o,r_o)| \leq \varepsilon,$$

para todo $T \geq t_o + T(\varepsilon)$

Seja $b \in \mathbb{R}^n$, $||b|| \leq \delta_o$, e seja $\mu(t)$ uma solução da desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$, tal que $\mu(t_o) = K\delta_o$.

Assim, $\mu(t)$ satisfaz (12) e portanto, o operador T_b associado a (3) é tal que $T_b(F) \subset F$. Portanto, pelo Teorema de Schauder-Tychonoff, T_b tem um ponto fixo em F, isto é, existe solução $x(t)$ de (3) passando por b em $t = t_o$, satisfazendo $||x(t)|| \leq \varepsilon$, para todo $T \geq t_o + T(\varepsilon)$

Assim, (3) possui um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável na origem.

Teorema II.8.2:

Consideremos o sistema (3) com $f(t,x) = h(t,x)+g(t,x)$, onde

i) $||h(t,x)|| \leq b(t)$, $x \in D$, $t \geq 0$, $b(t)$ é contínua, não negativa para $0 \leq t < \infty$ e $\int_t^{t+1} b(s)ds \to 0$, para $t \to \infty$.

ii) $||g(t,x)|| \leq \gamma||x||$, $x \in D$, $t \geq 0$, e γ suficientemente pequeno.

iii) $h(t,0) = 0$, para todo $t \geq 0$.

Nessas condições, a solução $x = 0$ de (3) é uniformemente assintoticamente estável.

Prova:

Temos que,

$$||f(t,x)|| \leq ||h(t,x)|| + ||g(t,x)|| \leq b(t) + \gamma||x||$$

Assim, $||f(t,x)|| \leq G(t,||x||)$ onde $G(t,r) = b(t) + \gamma r$.

Portanto, a equação escalar fica,

$$\dot{r} = -\sigma r + K[b(t) + \gamma r],$$

ou,

$$\dot{r} = -(\sigma - K\gamma)r + Kb(t).$$

Escolhemos γ tal que $L = \sigma - K\gamma > 0$.

Pela Fórmula da Variação das constantes, temos que,

$$r(t,t_o,r_o) = e^{-L(t-t_o)}r_o + \int_{t_o}^{t} e^{-L(t-s)}Kb(s)ds,$$

para todo $t \geq t_o$.

Pela hipótese sobre $b(s)$, podemos usar o Lema (I.2.3.), e portanto, $e^{-Lt}\int_{t_o}^{t} e^{Ls}Kb(s) \to 0$, quando $t \to \infty$.

Como $L > 0$, existe T tal que $e^{-L(t-t_o)} \leq 1$, para todo $t \geq t_o + T$.

Portanto, existe $\delta_o > 0$ tal que dados $\varepsilon > 0$ e $t_o \geq 0$,

$$|r_o| \leq K\delta_o \Longrightarrow |r(t,t_o,r_o)| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_o + T.$$

Análogo ao que foi feito no Teorema anterior, chegamos que existe solução $x(t)$ de (3) passando por b em $t = t_o$, com $||b|| \leq \delta_o$, tal que $||x(t)|| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq t_o + T$.

A prova está completa.

II.9. Sobre a Estabilidade Exponencial de um Ponto Crítico

Teorema II.9.1:

Se a desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$, possui um ponto de equilíbrio exponencialmente estável na origem, então (3) possui um ponto de equilíbrio exponencialmente estável na origem.

Prova:

De acordo com a hipótese, temos que existem constantes positivas δ, R e λ tais que se

$$|r_o| \leq K\delta, \text{ então } |r(t,t_o,r_o)| \leq Re^{-\lambda(t-t_o)}, \; t \geq t_o \geq 0$$

Consideremos $b \in \mathbb{R}^n$, $||b|| \leq \delta$ e seja $\mu(t)$ uma solução da desigualdade $\dot{r} \geq -\sigma r + KG(t,r)$, com $\mu(t_o) = K\delta$.

Assim, $\mu(t)$ satisfaz (12), e portanto, o operador T_b associado a (3) é tal que $T_b(F) \subset F$, isto é, T tem um ponto fixo em F. Desta maneira, existe solução $x(t)$ de (3) passando por b em $t = t_o$, satisfazendo $||x(t)|| \leq Re^{-\lambda(t-t_o)}$, $t \geq t_o \geq 0$.

Assim, (3) possui um ponto de equilíbrio exponencialmente estável na origem.

Corolário II.9.1:

Suponhamos que $||f(t,x)|| \leq b(t)||x||$, $x \in D$, $t \geq 0$, onde $b(t)$ satisfaz (15) com $0 < \alpha < \frac{\sigma}{K}$.

Então a solução $x = 0$ de (3) é exponencialmente estável.

Prova:

Temos por hipótese que $||f(t,x)|| \leq G(t,||x||)$, onde $G(t,r) = b(t)r$.

Pelo Teorema anterior, basta provarmos que a solução $r = 0$ da equação escalar $\dot{r} = -\sigma r + Kb(t)r$ é exponencialmente estável.

Mas, por hipótese, $b(t)$ satisfaz (15) com $0 < \alpha < \frac{\sigma}{K}$ e portanto, pelo Lema (I.3.1.), a solução $r = 0$ de tal equação é uniformemente assintoticamente estável, seguindo então que é exponencialmente estável pelo Lema (I.3.4.).

BIBLIOGRAFIA

[1] - COPPEL, W.A. - *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. D. C. Heath and Company, 1965.

[2] - DUGUNDJI, J. - *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[3] - HALE, J.K. - *Ordinary Differential Equations*. Wiley, New York, 1969.

[4] - ONUCHIC, N. - *Equações Diferenciais com Retardamento no Tempo*. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, MG, 1971.

[5] - ONUCHIC, N. - *On the uniform stability of a perturbed linear system*. Reprinted from the Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 6, nº 3, June 1963.

[6] - STOKES, A.P. - *The applications of a fixed point theorem to a variety of non-linear stability problems*. In "Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations", Vol. 5, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.

[7] - STRAUSS, A. and YORKE, J.A. - *Perturbations theorems for ordinary differential equations*. Reprinted from the Journal of Differential Equations, 1967.

[8] - YOSHIZAWA, T. - *Stability Theory by Liapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, 1966.