

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

FUNÇÕES 'SPLINES' COM REFERÊNCIA ESPECIAL ÀS 'SPLINES'
BI-CÚBICAS E SEU USO NA OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO
APROXIMADA DA EQUAÇÃO DE FREDHOLM DE 2.^a ESPÉCIE

Neide Maria Bertoldi Franco

ORIENTADOR:

Dr. James C. St. C. Sean McKee

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos da
Universidade de São Paulo, para obtenção
do título de "Mestre em Matemática"

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA
SÃO CARLOS

1976

Ao Wilson e aos meus Pais

SPLINE FUNCTIONS WITH PARTICULAR REFERENCE TO BICUBIC
SPLINES AND THEIR USE IN OBTAINING AN APPROXIMATE
SOLUTION TO THE SECOND KIND FREDHOLM EQUATION

Neide Maria Bertoldi Franco

Adviser: Prof. Dr. J.C.St.C. Sean McKee

A B S T R A C T

This thesis is concerned primarily with spline functions and their application to solving a Fredholm integral equation of the second kind with non-degenerate kernel.

Some mathematical preliminaries are introduced at the beginning.

The problem of piecewise linear and cubic interpolation is discussed in one and two dimensions. Many theorems concerning the rates of convergence of these interpolation formulae are given. Bicubic spline interpolation is introduced and the relevant convergence theorems are proved.

A method of solution of the Fredholm integral equation of the second kind with degenerate kernel is described. By approximating a non-degenerate kernel by means of a bicubic approximation (which, if rewritten in a basis function form, is degenerate) leads to an approximate method of obtaining a solution to the Fredholm second kind equation. Convergence results are proved. Numerical results are presented verifying the convergence theorems.

Finally there is an appendix with graphs of the basis functions of the cubic splines in one dimension.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor James Clark St. Clair Sean McKee pela sugestão e orientação do referido trabalho.

Aos Professores Odelar Leite Linhares, Luiz Antonio Favaro e Maximilian Emil Hehl pelas sugestões apresentadas.

Ao Professor Carlos Lazarini que sempre esteve disposto a trocar idéias sobre o assunto proposto através de exposições.

Aos colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, pelo apoio e incentivo, em especial, ao Professor Renato Luiz Garitezi que colaborou na parte de programação.

A Sonia Regina Derigi e José Augusto Evaristo Filho, responsáveis pela datilografia e impressão deste trabalho.

A CAPES e FAPESP pelo constante apoio aos programas de pós-graduação, em especial ao CNPq e FINEP que outorgaram à autora deste trabalho, bolsa de Mestrado de março a junho de 1974 e de julho de 1974 a março de 1975, respectivamente.

Í N D I C E

- CAPÍTULO 0 - INTRODUÇÃO	1
- CAPÍTULO 1 - PRÉ-REQUISITOS MATEMÁTICOS	3
- CAPÍTULO 2 - PROCEDIMENTOS DE INTERPOLAÇÃO POR PEDAÇOS	
2.0 - Preliminares	13
2.1 - Problema em Uma Dimensão	14
I - Procedimento de Interpolação Linear por Pedacos	15
II - Procedimento de Interpolação Spline Cúbica	20
2.2 - Problema em Duas Dimensões	40
I - Procedimento de Interpolação Bilinear por Pedacos ..	41
II - Procedimento de Interpolação Spline Bi-Cúbica	43
2.3 - Análise do Erro	52
- CAPÍTULO 3 - EQUAÇÃO INTEGRAL LINEAR	
- Teoria sobre Equação Integral de Fredholm do Tipo II com Núcleo Degenerado	76
- CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO NUMÉRICA	
4.0 - Preliminares	87
4.1 - Procedimento Computacional	88
4.2 - Listagem e Resultados do Programa Relativo à Aplica- ção Numérica	89
- APENDICE	111
- BIBLIOGRAFIA	115

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é apresentar interpolação *spline* cúbica (em uma dimensão) e interpolação *spline* bi-cúbica (em duas dimensões) e aplicá-las na resolução de equações integrais lineares. Mais especificamente: Dada uma equação integral de Fredholm do tipo II, cujo núcleo é não degenerado, podemos através da interpolação *spline* tornar o núcleo degenerado e assim determinar numericamente a solução da equação integral de Fredholm do tipo II.

As funções *splines* oferecem uma melhor aproximação de funções do que um polinômio envolvendo um número considerável de parâmetros, pois elas tem a propriedade de convergirem, sob certas condições, para a função que interpolam.

As maiores aplicações das funções *splines* são como: funções interpoladoras, aproximação de funcionais lineares (principalmente integral definida); aproximação de solução numérica de equações diferenciais ordinárias, e também a várias outras aplicações, sendo que estas estão sempre relacionadas com o problema de aproximação de funções através de funções de características mais simples.

No capítulo 1, apresentamos algumas notações básicas e resultados matemáticos os quais achamos necessários para a compreensão dos capítulos posteriores.

No capítulo 2, apresentamos procedimentos de interpolação em uma e em duas dimensões, dando maior ênfase ao procedimento de interpolação *spline* cúbica (em uma dimensão) e ao procedimento de interpolação *spline* bi-cúbica (em duas dimensões), pois, como já dissemos anteriormente, será a nossa ferramenta para resolvermos uma equação integral de Fredholm do tipo II. Apresentamos também um limite para o erro que se comete ao se aproximar uma função por uma função *spline*.

A teoria sobre resolução de equação integral de Fredholm do tipo II com núcleo degenerado encontra-se no capítulo 3.

No capítulo 4, encontra-se aplicação numérica.

Ao final, apresentamos uma bibliografia para interessados no problema.

CAPÍTULO 1

PRÉ-REQUISITOS MATEMÁTICOS

Introduziremos algumas notações básicas e resultados matemáticos, os quais serão usados repetidamente neste trabalho.

Seja:

$$I \equiv [0,1] \equiv \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$U \equiv [0,1] \times [0,1] \equiv \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1; \ 0 \leq y \leq 1\}$$

e para cada inteiro positivo t ,

$$D^t \phi(x) \equiv \frac{d\phi}{dx^t}(x); \quad D_x^t \phi(x,y) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^t}(x,y); \quad D_y^t \phi(x,y) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial y^t}(x,y)$$

e

$$R^t \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_t) \mid x_i \text{ é um número real; } 1 \leq x_i \leq t\}$$

isto é; R^t é o t -espaço Euclidiano.

Definição 1.1 - [13]*

Para cada inteiro t não negativo e para cada p ,

* [n] : referência n na bibliografia, ao final.

$1 < p \leq \infty$, seja $PC^{t,p}(a,b)$ o conjunto de todas as funções de valor real $\phi(x)$ tal que:

- i) $\phi(x)$ é $t-1$ vezes continuamente diferenciável,
- ii) existe γ_i ; $0 \leq i \leq s$, com

$$a = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_s < \gamma_{s+1} = b$$
 tal que em cada sub-intervalo aberto (γ_i, γ_{i+1}) ;

$$0 \leq i \leq s, D^{t-1}\phi \text{ é continuamente diferenciável, e}$$
- iii) a norma L_p de $D^t\phi$ é finita; isto é,

$$\|D^t\phi\|_p \equiv \left(\sum_{i=0}^s \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} |D^t\phi(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Para o caso especial de $p=\infty$, exigimos que

$$\|D^t\phi\|_\infty \equiv \max_{0 \leq i \leq s} \sup_{x \in (\gamma_i, \gamma_{i+1})} |D^t\phi(x)| < \infty$$

A menos que estabeleçamos o contrário, a norma L_p da função ϕ de uma variável, $\|\phi\|_p$, significará a norma L_p sobre $I \equiv [0,1]$.

Definição 1.2 - [13]

Para cada inteiro não negativo t e para cada p , $1 \leq p \leq \infty$, seja $PC^{t,p}(U)$ o conjunto de todas as funções de valor real $\phi(x,y)$ tal que:

- i) $\phi(x,y)$ é $t-1$ vezes continuamente diferenciável, isto é,

$$D_x^\ell D_y^k \phi(x,y), \quad 0 \leq \ell+k \leq t-1$$

existe e é contínua,

ii) existem γ_i ; $0 \leq i \leq s$, e μ_j , $0 \leq j \leq r$, com

$$0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_{s+1} = 1 \quad \text{e} \quad 0 = \mu_0 < \dots < \mu_{r+1} = 1$$

tal que em cada sub-retângulo aberto,

$$(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \times (\mu_j, \mu_{j+1}), \quad 0 \leq i \leq s, \quad 0 \leq j \leq r$$

temos

$$D_x^\ell D_y^k \phi, \quad 0 \leq \ell+k \leq t-1$$

continuamente diferenciável, e

iii) para todo $0 \leq \ell+k \leq t$, a norma L_p de $D_x^\ell D_y^k$ é finita, isto é,

$$\|D_x^\ell D_y^k \phi\|_p \equiv \left(\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^r \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} |D_x^\ell D_y^k \phi|^p dy dx \right)^{1/p} < \infty$$

Para o caso especial de $p=\infty$, exigimos que

$$\|D_x^\ell D_y^k \phi\|_\infty \equiv \max_{\substack{0 \leq i \leq s \\ 0 \leq j \leq r}} \sup_{(x,y) \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}) \times (\mu_j, \mu_{j+1})} |D_x^\ell D_y^k \phi(x,y)| < \infty$$

A menos que estabeleçamos o contrário, a norma L_p da função ϕ de duas variáveis, $\|\phi\|_p$, significará a norma L_p sobre $U \equiv [0,1] \times [0,1]$.

Além disso,

$$PC_O^{1,p}(a,b) \equiv \{\phi \in PC^{1,p}(a,b) \mid \phi(a)=\phi(b)=0\}$$

$PC_{\mathcal{O}}^{1,P}(U) \equiv \{ \phi \in PC^{1,P}(U) \mid \phi(x,y) = 0 \text{ para todo } (x,y) \text{ no contorno de } U, \text{ isto é, para } (x,y) \text{ com } x=0 \text{ ou } 1, \text{ ou } y=0 \text{ ou } 1 \}.$

Seja $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$ uma partição geral de I , com os pontos x_i , $0 \leq i \leq N+1$; chamados *pontos de partição*; ou *pontos de malha*; ou *nós*; e seja $\Delta_y: 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{M+1} = 1$ outra tal partição; então $\rho \equiv \Delta x \Delta_y$ é uma partição de U , isto é, ρ consiste de sub-retângulos da forma

$$(x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1}); \quad 0 \leq i \leq N; \quad 0 \leq j \leq M$$

Além disso, seja

$$h \equiv \max_{0 \leq i \leq N} (x_{i+1} - x_i) \quad \text{e} \quad \underline{h} \equiv \min_{0 \leq i \leq N} (x_{i+1} - x_i)$$

que é respectivamente o máximo e o mínimo comprimento das malhas de Δ ; e seja

$$k \equiv \max_{0 \leq j \leq M} (y_{j+1} - y_j) \quad \text{e} \quad \underline{k} \equiv \min_{0 \leq j \leq M} (y_{j+1} - y_j)$$

que é respectivamente o máximo e o mínimo comprimento das malhas de Δ_y ; e seja

$$\rho \equiv \max(h, k) \quad \text{e} \quad \underline{\rho} \equiv \min(h, k)$$

que é respectivamente o máximo e o mínimo comprimento das malhas de $\Delta \times \Delta_y$.

Teorema 1.1 (Teorema de Rolle) - [15]

Seja $f(x)$ contínua em $a \leq x \leq b$ e diferenciável em $a < x < b$. Se $f(a) = f(b)$, então existe no mínimo um pon

to ξ entre a e b tal que $Df(\xi) = 0$.

Teorema 1.2 (Generalização do Teorema de Rolle) - [13]

Se $f \in C^n[a,b]$; $n \geq 1$; isto é, f é $n-1$ vezes continuamente diferenciável em $[a,b]$, e se f tem um zero de ordem pelo menos m_i em x_i ; $1 \leq i \leq k$, onde

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_k = b \text{ e } \sum_{i=1}^k m_i \geq n+1$$

então existe $\xi \in [a,b]$ tal que $D^n f(\xi) = 0$. Além disso, $\xi \in (a,b)$ a menos que $k=1$ e $x_1=a$ ou b ; nesse caso $\xi = x_1$.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Rayleigh-Ritz) - [13]

Se $f \in PC_0^{1,2}(a,b)$ então

$$\pi^2 \int_b^a f^2(x) dx \leq (b-a)^2 \int_b^a (Df(x))^2 dx \quad (1.1)$$

Além disso, a igualdade é válida se e somente se

$$f(x) = a_1 \sin(\pi(b-a)^{-1}(x-a))$$

para algum número real a_1 .

Definição 1.3 - [13]

Dizemos que E é um funcional linear sobre um espaço vetorial $PC^{n+1,1}(a,b)$; $n \geq 0$, se E é uma função de valor real sobre $PC^{n+1,1}(a,b)$, tal que:

$$E(cf) = cE(f) \text{ e } E(f+g) = E(f) + E(g)$$

para todo $f, g \in PC^{n+1,1}(a,b)$.

Teorema 1.4 (Teorema do Núcleo de Peano) - [13]

Se E é um funcional linear sobre $PC^{n+1,1}(a,b)$, $n \geq 0$, e $E(p(x)) = 0$ para todo polinômio p de grau n , então para toda $f \in PC^{n+1,1}(a,b)$

$$E(f) = \frac{1}{n!} E_x \left[\int_a^b D^{n+1} f(t) (x-t)_+^n dt \right] \quad (1.2)$$

onde

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n; & x \geq t \\ 0 & ; \quad x < t \end{cases}$$

e, E_x significa o funcional linear E aplicado a expressão

$$\int_a^b D^{n+1} f(t) (x-t)_+^n dt$$

considerada como função de x .

Teorema 1.5 - [13]

Se f e $g \in PC^{0,2}(I)$, e

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

então

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 = \|f + g\|^2 \quad (1.3)$$

Corolário 1.1 - [13]

Se f e $g \in PC^{k,2}(I)$, $k \geq 0$, e $\langle D^k f, D^k g \rangle = 0$, então

$$\|D^k f\|_2^2 + \|D^k g\|_2^2 = \|D^k f + D^k g\|_2^2 \quad (1.4)$$

Além disso, se $g(x)$ anula-se $n > k$ vezes sobre I (contando multiplicidade) e $\|D^k g\|_2 = 0$, então $g(x) \equiv 0$ sobre I .

Definição 1.4-[4]

Seja $X = (X, \rho)$ um espaço métrico.

A aplicação $T: X \rightarrow X$ é chamada uma *contração* em X se existe um número k , com $0 < k < 1$ tal que, $x, y \in X$; $x \neq y$, implica $\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y)$.

Definição 1.5-[9]

Sejam X, Y espaços topológicos. Então $f: X \rightarrow Y$ é chamado um homeomorfismo se e somente se é bijetiva e bi-continua.

Teorema 1.6 (Perturbação da Identidade) - [8]

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Se $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma contração, então a aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = x + \phi(x)$ é um homeomorfismo de U sobre um aberto do \mathbb{R}^m .

Definição 1.6 - [15]

Seja $f(x)$ função real definida em $I = [a, b]$.

Dizemos que $f(x)$ é *contínua por pedaço* se ela for definida e contínua em todos os pontos de I ou se os pontos de descontinuidade forem em número finito e, além disso, em todo ponto x_0 de descontinuidade existirem

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Fica entendido que se $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ é ponto de descontinuidade exigimos apenas a existência do $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$;

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

Assim se x_0 é ponto de continuidade vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Observação: Notaremos $A \equiv [a_{ij}]$, matriz real $n \times n$.

Definição 1.7 - [15]

Seja A matriz real $(n \times n)$, dizemos que A é diagonalmente dominante se

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

e estritamente diagonalmente dominante se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Teorema 1.7 (Teorema de Gerschgorin) - [6]

Seja $A \equiv [a_{ij}]$ com auto-valores λ , definimos as somas, em valor absoluto, das linhas e colunas por:

$$r_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| ; \quad c_j \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

Então:

- a) cada auto-valor está na união dos círculos R_i ,
 $i = 1, 2, \dots, n$; onde

$$R_i \equiv \{z \mid |z - a_{ii}| \leq r_i\} ;$$

- b) cada auto-valor está na união dos círculos C_j ,
 $j = 1, 2, \dots, n$; onde

$$C_j \equiv \{z \mid |z - a_{jj}| \leq c_j\}$$

- c) cada componente da $\bigcup_i R_i$ ou $\bigcup_j C_j$ contém exatamente tantos auto-valores quantos círculos. (Os auto-valores e os círculos são contados com suas multiplicidades).

Definição 1.8-[5]

Dada uma sequência estritamente crescente de números reais x_1, x_2, \dots, x_N , uma função *spline* $S(x)$, de grau m , com nós x_1, x_2, \dots, x_N é uma função definida em toda reta real satisfazendo as duas seguintes propriedades:

- i) Em cada sub-intervalo (x_i, x_{i+1}) para $i = 0, 1, \dots, N$, (onde $x_0 = -\infty$ e $x_{N+1} = \infty$), $S(x)$ é dada por algum polinômio de grau menor ou igual a m .
- ii) $S(x)$ e suas derivadas de ordem $1, 2, \dots, m-1$, são contínuas em todo domínio da função.

Observações:

- 1) Uma função *spline* é uma função polinomial por pedaços satisfazendo certas condições com relação a continuidade da função e de suas derivadas.
- 2) Em geral, $S(x)$ é dada por diferentes polinomiais em intervalos vizinhos (x_{i-1}, x_i) e (x_i, x_{i+1}) ; muito em bora a definição 1.8 não exija isso. Num caso especial, $S(x)$ pode ser dada por uma única polinomial em toda reta real. Assim, a classe $S_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$ de funções *splines* de grau m , tendo como nós x_1, x_2, \dots, x_N , inclui todas as polinomiais de grau menor ou igual a m .
- 3) Quando $m=0$, a condição ii) da definição 1.8 é não operativa, e a função *spline* de grau zero é uma função escada.
- 4) Para $m>0$ uma função *spline* de grau m pode ser igualmente bem definida como uma função em C^{m-1} cuja m-ésima derivada é uma função escada; ou melhor dizendo, uma função *spline* de grau m é alguma integral indefinida de ordem m de uma função escada.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS DE INTERPOLAÇÃO POR PEDAÇOS

2.0 - Preliminares

Neste capítulo, introduziremos e estudaremos procedimentos de interpolação por pedaços de ordem $2m$, mais precisamente, estudaremos procedimentos de interpolação por pedaços sobre $H^m(\Delta)$, que é o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $2m-1$ em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$, definido por Δ .

Quando $m=1$, obteremos, procedimento de interpolação por pedaços sobre $L(\Delta)$, que é o espaço de todos os polinômios lineares em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$, definido por Δ ; tal procedimento será chamado *Procedimento de Interpolação Linear por Pedaços*.

Quando $m=2$, obteremos procedimentos de interpolação por pedaços sobre $S(\Delta)$, que é o espaço de todos os polinômios cúbicos em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$, definido por Δ ; tal procedimento será chamado *Procedimento de Interpolação Spline Cúbica*.

Esses procedimentos serão estudados em uma e em duas dimensões.

Daremos também um limite para o erro para procedimentos de interpolação por pedaços sobre $H^m(\Delta)$, na norma L_2 e na norma L_∞ .

2.1 - Problema em uma Dimensão

Dado $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$ e os números reais $\{f_i^j\}_{i=0, j=0}^{N+1, m-1}$, um procedimento de interpolação fornece uma função, $g(x)$, tal que, $g(x)$ está definida para todo $x \in I$, e $D^j g(x_i) = f_i^j$; $0 \leq i \leq N+1$, $0 \leq j \leq m-1$

Um bom procedimento é aquele que produz uma função g , a qual é fácil de se avaliar e tal que se $f_i^j = D^j f(x_i)$, $0 \leq i \leq N+1$, $0 \leq j \leq m-1$, onde $f(x)$ é uma função regular, então $g(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$.

Começaremos com duas definições básicas:

Definição 2.1.1 - [13]

Para cada inteiro positivo m , e cada partição Δ , de I , seja $H^m(\Delta)$ o espaço vetorial de todos os polinômios por pedaços, p , de grau $2m-1$ com respeito a Δ , tal que $p \in C^{m-1}(I)$, isto é:

$H^m(\Delta) \equiv \{p(x) \in C^{m-1}(I) \mid p(x) \text{ é um polinômio de grau } 2m-1 \text{ em cada sub-intervalo } [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq N, \text{ definido por } \Delta\}$

Definição 2.1.2 - [13]

Dado

$$f^m \equiv \{f_0^0, f_0^1, \dots, f_0^{m-1}, f_1^0, \dots, f_{N+1}^0, f_{N+1}^1, \dots, f_{N+1}^{m-1}\}$$

seja $V_{H^m(\Delta)} f^m$ com o único elemento, $h(x)$, em $H^m(\Delta)$ tal que $D^j h(x_i) = f_i^j$, $0 \leq i \leq N+1$, $0 \leq j \leq m-1$.

Mostraremos agora que a aplicação $V_{H^m(\Delta)}$ está bem definida para todo $m \geq 1$.

De fato, se $h(x) \in H^m(\Delta)$ - interpolante da f acima, então $e(x) = V_{H^m(\Delta)} f^m - h(x)$ é um polinômio de grau $2m-1$

em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$, e

$$e(x_i) = D^j e(x_i) = e(x_{i+1}) = D^j e(x_{i+1}) = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1,$$

$1 \leq j \leq m-1$ os quais implicam que $e(x) = c(x-x_i)^m(x-x_{i+1})^m$ para alguma constante c e todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Mas desde que $e(x)$ é um polinômio de grau $2m-1$ em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$, c deve ser zero e assim $e(x) \equiv 0$ para todo $x \in I$.

Quando $m=1$, obtemos o:

I - Procedimento de Interpolação Linear por Pedaco

Dado $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$ e $N+2$

números reais, $\{f_i\}_{i=0}^{N+1}$, um procedimento de interpolação pro

duz uma função, $g(x)$, tal que $g(x)$ está definida para todo $x \in I$, e $g(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq N+1$.

O procedimento clássico devido a Lagrange é fazer $g(x)$ ser um polinômio único de grau N , $P_N(x)$; definido pelas condições de interpolação:

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} f_i \ell_i(x) \quad (2.1.1)$$

onde

$$\ell_i(x) \equiv \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N+1} (x-x_j)(x_i-x_j)^{-1} \quad (2.1.2)$$

Contudo, é bem conhecido o resultado de Runge que a interpolação de Lagrange não é um bom procedimento. De fato, existem funções analíticas em I , isto é,

$f(x) = \left[(10x-5)^2 + 1 \right]^{-1}$ para a qual a sequência, $\{P_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$, do polinômio de interpolação de Lagrange, definido com respeito a malhas uniformes, diverge.

Para vencer esta dificuldade, introduzimos o procedimento de interpolação linear por pedaços.

Primeiro duas definições:

Definição 2.1.3 - [13]

Dado Δ ; seja $L(\Delta)$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas, polinômios lineares por pedaços com respeito a Δ ; isto é

$L(\Delta) \equiv \{p(x) \in C(I) \mid p(x) \text{ é um polinômio linear em cada sub-intervalo } [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq N, \text{ definido por } \Delta\}.$

As funções em $L(\Delta)$ são algumas vezes chamadas função elemento finito linear ou funções lineares embutidas.

Definição 2.1.4 - [13]

Dado $f \equiv (f_0, f_1, \dots, f_{N+1}) \in R^{N+2}$, seja $v_{L(\Delta)} f$, o interpolador $L(\Delta)$ da f , com um único elemento $\ell(x)$, em $L(\Delta)$ tal que $\ell(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq N+1$.

Este procedimento está bem definido.

De fato, em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; $0 \leq i \leq N$; $v_{L(\Delta)} f$ é igual a um polinômio linear $a_i x + b_i$ o qual deve ser determinado pelas duas seguintes condições:

$$a_i x_i + b_i = f_i \quad \text{e} \quad a_i x_{i+1} + b_i = f_{i+1} \quad (2.1.3)$$

Para mostrar que existe uma única solução para (2.1.3), é suficiente mostrar que o caso homogêneo de $f_i = f_{i+1} = 0$ tem somente a solução $a_i = b_i = 0$. Contudo, isso é óbvio, desde que $x_i \neq x_{i+1}$.

Podemos expressar o interpolador $L(\Delta)$ como

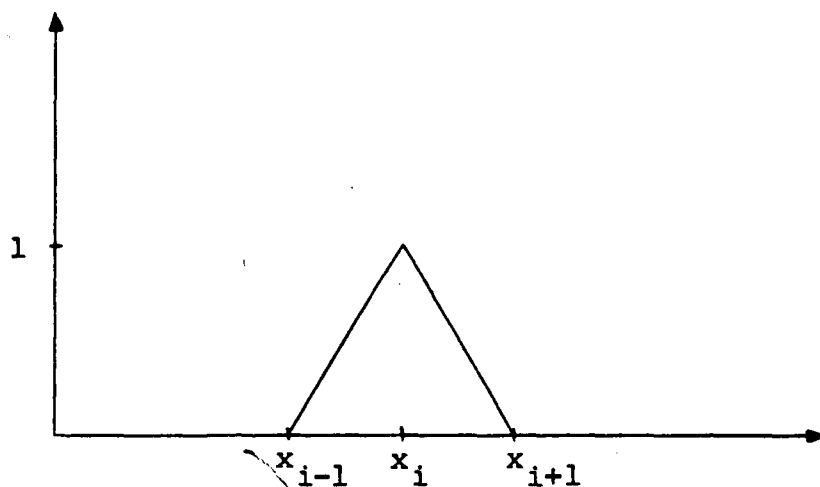
$$v_{L(\Delta)} f = \sum_{i=0}^{N+1} f_i \ell_i(x) \quad (2.1.4)$$

onde $\ell_i(x)$ é o único elemento em $L(\Delta)$ tal que

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq N+1$$

(δ_{ij} é a função delta de Kronecker). O gráfico de $\ell_i(x)$;

$1 \leq i \leq N$ é dado por:



Além disso;

$$l_0(x) \equiv \begin{cases} (x_1 - x)x_1^{-1} & ; \quad 0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & ; \quad x_1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$l_i(x) \equiv \begin{cases} (x - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})^{-1} & ; \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)(x_{i+1} - x_i)^{-1} & ; \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & ; \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \quad \text{ou} \\ & \quad x_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e

$$l_{N+1}(x) \equiv \begin{cases} (x - x_N)(1 - x_N)^{-1} & ; \quad x_N \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad 0 \leq x \leq x_N \end{cases}$$

No caso especial de uma partição uniforme com malhas de comprimento $h = (N+1)^{-1}$, a função básica $l_i(x)$, $0 \leq i \leq N+1$, pode ser expressa em termos de uma função básica

padrão, $L(x)$. De fato, se

$$L(x) \equiv \begin{cases} 1+x & ; \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} - [-1,1] \end{cases}$$

então

$$\ell_i(x) = L(h^{-1}x - i) \quad ; \quad 0 \leq i \leq N+1$$

Outrossim, a aplicação $V_{L(\Delta)}$ é *local* no sentido

que se $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$, então $V_{L(\Delta)}f(x)$ depende somente de f_i e f_{i+1} . Se $f(x)$ está definida para todo $x \in I$, temos $V_{L(\Delta)}f \equiv V_{L(\Delta)}\mathbf{f}$ onde $\mathbf{f} \equiv (f(x_0), f(x_1) \dots f(x_{N+1}))$.

Alguns valores simples de $V_{L(\Delta)}f(x)$ requer somente 3 multiplicações e 4 adições. De fato, se $x \in [x_i, x_{i+1}]$; $0 \leq i \leq N$, então

$$V_L f(x) = (x_{i+1} - x_i)^{-1} \left[f_i(x_{i+1} - x) + f_{i+1}(x - x_i) \right]$$

Daremos agora uma idéia do comportamento do erro. Consideremos uma função simples $f(x) = x^2$. Se

$$e_i(x) = f(x) - V_{L(\Delta)}f(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \quad 0 \leq i \leq N, \text{ então}$$

$$e_i(x) = x^2 - x_i^2(x_{i+1} - x)(x_{i+1} - x_i)^{-1} - x_{i+1}^2(x - x_i)(x_{i+1} - x_i)^{-1}$$

Além disso, é verificado facilmente que

$$-\frac{1}{4} (x_{i+1} - x_i)^2 \leq e_i(x) \leq 0$$

para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$, com o mínimo sendo atingido quando $x = \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1})$.

Assim $\|f - v_{L(\Delta)} f\|_{\infty} \leq \frac{1}{4} h^2$; o que mostra que para $f(x)=x^2$ o procedimento de interpolação linear por pedaços é de 2ª ordem, isto é, o expoente de h no limite do erro é 2.

Usando esse limite podemos calcular a seguinte tabela para partições uniformes $\Delta(h)$:

h	$\dim L(\Delta(h))$	$\ x^2 - v_{L(\Delta(h))} x^2\ _{\infty}$
1	2	0,25
10^{-1}	12	$0,25 \times 10^{-2}$
10^{-2}	102	$0,25 \times 10^{-4}$
10^{-3}	1002	$0,25 \times 10^{-6}$

Este procedimento é de 2ª ordem para todas as funções suficientemente regulares.

Quando $m=2$ obtemos o:

II - Procedimento de Interpolação Spline Cúbica

Veremos agora, o procedimento de interpolação spline cúbica, os quais é de 4ª ordem.

Esse procedimento de interpolação *spline* é um melhoramento sobre o procedimento de interpolação cúbica de Hermite por pedaços, no sentido que produz uma interpolação mais regular, isto é, o interpolante *spline* é uma função $\in C^2(I)$, enquanto que o interpolante cúbico de Hermite por pedaços é somente uma função $\in C^1(I)$. Além disso, o interpolante *spline* depende (aproximadamente) da metade dos parâmetros do interpolante cúbico de Hermite por pedaços [13].

Começaremos com uma definição básica de *spline* cúbica, devido originariamente a Schoenberg.

Definição 2.1.5 - [13]

Dado Δ , seja o espaço das *splines* cúbicas com respeito a Δ , $S(\Delta)$; o espaço vetorial de todos os polinômios cúbicos por pedaços, duas vezes continuamente diferenciável em I , com respeito a Δ , isto é,

$$S(\Delta) \equiv \{p(x) \in C^2(I) \mid p(x) \text{ é um polinômio cúbico em cada sub-intervalo } [x_i, x_{i+1}], 0 \leq i \leq N \text{ definido por } \Delta\}.$$

Claramente, o polinômio cúbico de Hermite por pedaços $h(x) \in C^1$, isto é, $h(x) \in H(\Delta)$ é uma função *spline* se e somente se $h \in C^2(I)$. Reciprocamente, toda função *spline* cúbica $s(x) \in H(\Delta)$ e temos portanto a inclusão $S(\Delta) \subset H(\Delta)$. Além disso, a dimensão de $S(\Delta)$ é $N+4$, enquanto que a dimensão de $H(\Delta)$ é $2N+4$. Assim podemos representar toda função *spline* cúbica $s(x)$ em termos das funções base

$\{h_i(x), h_i^1(x)\}_{i=0}^{N+1}$ de $H(\Delta)$ muito embora essas funções base não pertençam a $S(\Delta)$. De fato, temos

$$s(x) = \sum_{i=0}^{N+1} (s(x_i)h_i(x) + Ds(x_i)h_i^1(x))$$

É natural definir o seguinte procedimento de interpolação *spline* cúbica. Ahlberg, Nilson e Walsh, referem-se a esse procedimento como procedimento do tipo I.

Definição 2.1.6 - [13]

Dado $f \equiv \{f_0, \dots, f_{N+1}, f_0^1, f_{N+1}^1\} \in R^{n+3}$, seja $V_{S(\Delta)} f$, o interpolador $S(\Delta)$ da f , com uma única *spline*, $s(x)$, em $S(\Delta)$ tal que $s(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq N+1$, e $Ds(x_i) = f_i^1$, $i = 0$ e $N+1$.

Teorema 2.1.1 - [2]

Para cada conjunto $\{f_0, f_1, \dots, f_{N+1}, f_0^1, f_{N+1}^1\}$ de valores, existe exatamente uma $s(x) \in S(\Delta)$ tal que

$$s(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq N+1 \quad ; \quad Ds(x_0) = f_0^1 \quad ; \quad Ds(x_{N+1}) = f_{N+1}^1$$

(2.1.5)

Prova: Primeiramente lembramos os seguintes resultados.

Lema 2.1.1 - [2]

Existe exatamente um polinômio cúbico

$c(x) = \sum_{m=0}^3 \alpha_m (x-a)^m$ os quais assume os valores dados de $c(x)$ e

$Dc(x)$ nos pontos extremos de qualquer intervalo $[a, b]$; $a \neq b$.

Este polinômio é:

$$c(x) = c(a) + Dc(a)(x-a)$$

$$+ \left[3 \frac{c(b) - c(a)}{(b-a)^2} - \frac{Dc(b) + 2Dc(a)}{(b-a)} \right] \cdot (x-a)^2$$

$$+ \left[- 2 \frac{c(b) - c(a)}{(b-a)^3} + \frac{Dc(b) + Dc(a)}{(b-a)^2} \right] (x-a)^3 \quad (2.1.6)$$

A primeira afirmação segue do fato de que o determinante da matriz que relaciona $c(a)$, $Dc(a)$; $c(b)$, $Dc(b)$ e os quatro coeficientes α_m é $(b-a)^{-4} \neq 0$; para $b \neq a$. A equação (2.1.6) segue então por inspeção.

Corolário 2.1.1-[2]

Se f_i e f_i^1 são dados para $0 \leq i \leq N+1$, então existe exatamente um polinômio cúbico por pedaço $h(x) \in C^1$, com nós x_0, x_1, \dots, x_{N+1} , os quais satisfaz $h(x_i) = f_i$,

$$Dh(x_i) = f_i^1 ; \quad 0 \leq i \leq N+1$$

Lema 2.1.2 - [13]

Seja $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ para algum $1 \leq i \leq N$ e $p(x)$

e $q(x)$ dois polinômios cúbicos satisfazendo

$$p(x_i) = q(x_i) = f_i \quad \text{e} \quad Dp(x_i) = Dq(x_i) = f_i^1$$

Então $D^2p(x_i) = D^2q(x_i)$ se e somente se

$$\begin{aligned} & \Delta x_i Dp(x_{i-1}) + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})f_i^1 + \Delta x_{i-1} Dq(x_{i+1}) \\ &= 3 \left[\Delta x_{i-1} (\Delta x_i)^{-1} (q(x_{i+1}) - f_i) + \Delta x_i (\Delta x_{i-1})^{-1} (f_i^1 - p(x_{i-1})) \right] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

onde $\Delta x_{i-1} \equiv x_i - x_{i-1}$ e $\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i$.

Prova

Para $x_{i-1} < x < x_i$ construímos $p(x)$ do seguinte modo:

$$p(x) = p(x_{i-1})h_{i-1}(x) + p(x_i)h_i(x) + Dp(x_{i-1})h_{i-1}^1(x) + Dp(x_i)h_i^1(x)$$

onde $h_{i-1}, h_i, h_{i-1}^1, h_i^1$ são as funções base do interpolante cúbico de Hermite por pedaços [13].

Portanto temos:

$$\begin{aligned} p(x) = & p(x_{i-1}) \left[\frac{3(x-x_i)^2}{(x_i-x_{i-1})^2} + \frac{2(x-x_i)^3}{(x_i-x_{i-1})^3} \right] + p(x_i) \left[1 - \frac{3(x-x_i)^2}{(x_i-x_{i-1})^2} \right. \\ & \left. - \frac{2(x-x_i)^3}{(x_i-x_{i-1})^3} \right] + Dp(x_{i-1}) \left[\frac{(x-x_i)^2}{(x_i-x_{i-1})} + \frac{(x-x_i)^3}{(x_i-x_{i-1})^2} \right] \\ & + Dp(x_i) \left[(x-x_i) + \frac{2(x-x_i)^2}{(x_i-x_{i-1})} + \frac{(x-x_i)^3}{(x_i-x_{i-1})^2} \right] \end{aligned}$$

agrupando convenientemente podemos escrever $p(x)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} p(x) = & p(x_i) + Dp(x_i)(x-x_i) + \left[3(p(x_{i-1}) - p(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-2} \right. \\ & + (Dp(x_{i-1}) + 2Dp(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-1} \left. \right] (x-x_i)^2 \\ & + \left[2(p(x_{i-1}) - p(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-3} \right. \\ & + (Dp(x_{i-1}) + Dp(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-2} \left. \right] (x-x_i)^3 \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} D^2 p(x) = & 6(p(x_{i-1}) - p(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-2} + 2(Dp(x_{i-1}) \\ & + 2Dp(x_i)(x_i-x_{i-1})^{-1} + 12(p(x_{i-1}) \\ & - p(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-3}(x-x_i) + 6(Dp(x_{i-1}) \\ & - Dp(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-2}(x-x_i) \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} D^2 p(x_i) = & 2 \left[3(p(x_{i-1}) - p(x_i))(x_i-x_{i-1})^{-2} \right. \\ & + Dp(x_{i-1}) + 2Dp(x_i)(x_i-x_{i-1})^{-1} \left. \right] \end{aligned}$$

Semelhantemente, para $x_i < x < x_{i+1}$, construímos

$q(x)$ do seguinte modo:

$$q(x) = q(x_i) h_i(x) + q(x_{i+1}) h_{i+1}(x) + Dq(x_i) h_i^1(x) + Dq(x_{i+1}) h_{i+1}^1(x)$$

e assim obtemos:

$$\begin{aligned} q(x) = & q(x_i) + Dq(x_i)(x-x_i) + \left[3(q(x_{i+1}) - q(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-2} \right. \\ & \left. + (Dq(x_{i+1}) + 2Dq(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-1} \right] (x-x_i)^2 \\ & + \left[2(q(x_{i+1}) - q(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-3} \right. \\ & \left. + (Dq(x_{i+1}) + Dq(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-2} \right] (x-x_i)^3 \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} D^2q(x) = & 6(q(x_{i+1}) - q(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-2} \\ & + 2(Dq(x_{i+1}) + 2Dq(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-1} \\ & + 12(q(x_{i+1}) - q(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-1}(x-x_i) \\ & + 6(Dq(x_{i+1}) + Dq(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-2}(x-x_i) \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} D^2q(x_i) = & 2 \left[3(q(x_{i+1}) - q(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-2} \right. \\ & \left. + (Dq(x_{i+1}) + 2Dq(x_i))(x_i-x_{i+1})^{-1} \right] \end{aligned}$$

Assim temos a igualdade se e somente se

$$\begin{aligned} & 3(p(x_{i-1}) - p(x_i))(x_i - x_{i-1})^{-2} + (Dp(x_{i-1}) + 2Dp(x_i))(x_i - x_{i-1})^{-1} \\ &= 3(q(x_{i+1}) - q(x_i))(x_i - x_{i+1})^{-2} + (Dq(x_{i+1}) \\ &+ 2Dq(x_i))(x_i - x_{i+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Mas $\Delta x_{i-1} \equiv x_i - x_{i-1}$ e $\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i$; assim

$$\begin{aligned} & 3(p(x_{i-1}) - p(x_i))(\Delta x_{i-1})^{-2} + (Dp(x_{i-1}) + 2Dp(x_i))(\Delta x_{i-1})^{-1} \\ &= 3(q(x_{i+1}) - q(x_i))(\Delta x_i)^{-2} - (Dq(x_{i+1}) - 2Dq(x_i))(\Delta x_i)^{-1} \\ &\Rightarrow 3p(x_{i-1})(\Delta x_i)^2 - 3p(x_i)(\Delta x_i)^2 + Dp(x_{i-1})(\Delta x_i)^2(\Delta x_{i-1}) \\ &+ 2Dp(x_i)(\Delta x_i)^2(\Delta x_{i-1}) = 3q(x_{i+1})(\Delta x_{i-1})^2 - 3q(x_i)(\Delta x_{i-1})^2 \\ &- Dq(x_{i+1})\Delta x_i(\Delta x_{i-1})^2 - 2Dq(x_i)\Delta x_i(\Delta x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

dividindo-se ambos os membros por $(\Delta x_{i-1})(\Delta x_i)$ temos

$$\begin{aligned} & 3p(x_{i-1})(\Delta x_{i-1})^{-1}\Delta x_i - 3p(x_i)(\Delta x_{i-1})^{-1}\Delta x_i + Dp(x_{i-1})\Delta x_i \\ &+ 2Dp(x_i)\Delta x_i = \\ &= 3q(x_{i+1})(\Delta x_i)^{-1}\Delta x_{i-1} - 3q(x_i)\Delta x_{i-1}(\Delta x_i)^{-1} \\ &- Dq(x_{i+1})\Delta x_{i-1} - 2Dq(x_i)\Delta x_{i-1}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} & Dp(x_{i-1})\Delta x_i + 2Dp(x_i)\Delta x_i + Dq(x_{i+1})\Delta x_{i-1} + 2Dq(x_i)\Delta x_{i-1} \\ &= 3q(x_{i+1})(\Delta x_i)^{-1}\Delta x_{i-1} - 3q(x_i)\Delta x_{i-1}(\Delta x_i)^{-1} \\ &- 3p(x_{i-1})(\Delta x_{i-1})^{-1}\Delta x_i + 3p(x_i)(\Delta x_{i-1})^{-1}\Delta x_i \end{aligned}$$

Como por hipótese $p(x_i) = q(x_i) = f_i$ e

$Dp(x_i) = Dq(x_i) = f_i^1$, temos:

$$\begin{aligned} & Dp(x_{i-1})\Delta x_i + 2f_i^1\Delta x_i + Dq(x_{i+1})\Delta x_{i-1} + 2f_i^1\Delta x_{i-1} \\ &= 3q(x_{i+1})(\Delta x_i)^{-1}\Delta x_{i-1} - 3f_i\Delta x_{i-1}(\Delta x_i)^{-1} \\ &- 3p(x_{i-1})(\Delta x_{i-1})^{-1}\Delta x_i + 3f_i(\Delta x_{i-1})^{-1}\Delta x_i \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} & \Delta x_i Dp(x_{i-1}) + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})f_i^1 + \Delta x_{i-1} Dq(x_{i+1}) \\ &= 3 \left[\Delta x_{i-1}(\Delta x_i)^{-1}(q(x_{i+1}) - f_i) + \Delta x_i(\Delta x_{i-1})^{-1}(f_i - p(x_{i-1})) \right] \end{aligned}$$

Podemos agora provar que o procedimento de interpolação *spline* está bem definido.

Teorema 2.1.2 - [2]

Seja $h(x)$ um polinômio cúbico por pedaço de classe C^1 .

Dado $h(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq N+1$ e $f_0^1 \equiv Dh(0)$, $f_{N+1}^1 \equiv Dh(1)$, existe exatamente um conjunto de valores $f_i^1 \equiv Dh(x_i)$, $1 \leq i \leq N$, tal que $h \in S(\Delta)$, isto é, $h \in C^2$.

Prova

Pelo Lema 2.1.2 a continuidade da $D^2h(x)$ é equivalente ao conjunto de N equações lineares

$$\begin{aligned} \Delta x_i f_{i-1}^1 + 2 (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) f_i^1 + \Delta x_{i-1} f_{i+1}^1 \\ = 3 \left[\Delta x_{i-1} (\Delta x_i)^{-1} \Delta f_i + \Delta x_i (\Delta x_{i-1})^{-1} \Delta f_{i-1} \right], \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

$1 \leq i \leq N$; onde $\Delta x_j \equiv x_{j+1} - x_j$ e $\Delta f_j \equiv f_{j+1} - f_j$; $0 \leq j \leq N$; para as N incógnitas f_i^1 ; $1 \leq i \leq N$. As equações lineares

(2.1.8) podem ser reescritas na forma:

$$Bf^1 = k \quad (2.1.9)$$

$$\text{onde } B \equiv \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} \equiv \begin{cases} 2 (\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) & ; \quad 1 \leq j=i \leq N \\ \Delta x_i & ; \quad 1 \leq j=i-1 \leq N-1 \\ \Delta x_{i-1} & ; \quad 2 \leq j=i+1 \leq N \\ 0 & ; \quad \text{no resto} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

isto é, B é uma matriz tridiagonal e $K = [k_i]$

$$k_i \equiv \begin{cases} 3 \left[\Delta x_0 (\Delta x_1)^{-1} \Delta f_1 + \Delta x_1 (\Delta x_0)^{-1} \Delta f_0 \right] - \Delta x_1 Dh(0), \\ \quad \text{para } i = 1 \\ 3 \left[\Delta x_{i-1} (\Delta x_i)^{-1} \Delta f_i + \Delta x_i (\Delta x_{i-1})^{-1} \Delta f_{i-1} \right] ; \quad 1 \leq i \leq N \\ 3 \left[\Delta x_{N-1} (\Delta x_N)^{-1} \Delta f_N + \Delta x_N (\Delta x_{N-1})^{-1} \Delta f_{N-1} \right] - \Delta x_{N-1} Dh(1), \\ \quad \text{para } i = N \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Notemos que para $\Delta x_i = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = h$; a matriz

B e o vetor K_i ; podem ser escritos como:

$$b_{ij} \equiv \begin{cases} 4 h & ; \quad 1 \leq j=i \leq N \\ h & ; \quad 1 \leq j=i-1 \leq N-1 \\ h & ; \quad 2 \leq j=i+1 \leq N \\ 0 & ; \quad \text{no resto} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

e

$$K_i \equiv \begin{cases} 3 \left[\Delta f_1 + \Delta f_0 \right] - hDh(0) & ; i = 1 \\ 3 \left[\Delta f_i + \Delta f_{i-1} \right] & ; 1 < i < N \\ 3 \left[\Delta f_N + \Delta f_{N-1} \right] - hDh(1) & ; i = N \end{cases} \quad (2.1.13)$$

e ainda o vetor K_i pode ser escrito na forma matricial, como segue:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & 0 & 3 & 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N+1} \\ Dh(0) \\ Dh(1) \end{pmatrix} \quad (2.1.14)$$

Observação:

Escrevemos o vetor K_i na forma matricial para facilitar a programação.

A matriz tridiagonal B, do sistema linear é estritamente diagonalmente dominante e portanto pelo Teorema de Gerschgorin (Teorema 1.7) tem somente auto-valores não nulos, e assim B é não singular. As N equações em (2.1.8) são portanto lineares

mente independentes e portanto determinam f_i^1 ; $1 \leq i \leq N$, única mente.

O Corolário 2.1.1 e o Teorema 2.1.2 implicam no Teorema 2.1.1, o que conclui a prova.

Os Lemas 2.1.1 e 2.1.2 podem ser usados para plane -
jar um eficiente esquema computacional para o cálculo de função
interpoladora $V_{S(\Delta)}f$, dado f_i , $0 \leq i \leq N+1$, f_0^1 e f_{N+1}^1
onde $f \in C^1(I)$. Neste esquema calculamos os valores f_i^1 ,
 $1 \leq i \leq N$, pelas equações (2.1.8); ou seja, resolvemos o sistema
(2.1.9) para f^1 e escrevemos

$$V_{S(\Delta)}f = \sum_{i=0}^{N+1} f_i h_i(x) + f_0^1 h_0^1(x) + \sum_{i=1}^N f_i^1 h_i^1(x) + f_{N+1}^1 h_{N+1}^1(x)$$

Para construirmos a matriz B , primeiramente calcu-
lamos e armazenamos Δx_i , $0 \leq i \leq N$, os quais requerem $N+1$ o-
perações aritméticas, em seguida calculamos $2(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})$,
 $1 \leq i \leq N$, os quais requerem $2N$ operações, num total, portan-
to, de $3N+1$ operações, onde contamos ambos, adição e multipli-
cação, como operações. Para construir o vetor K , primeiramente
calculamos $\Delta f_i \equiv f_{i+1} - f_i$, $0 \leq i \leq N$, os quais requerem $N+1$
operações e então calculamos as expressões dadas em (2.1.11) as
requerem $6N+4$ operações, num total de $7N+5$ operações. Final -
mente, resolvemos o sistema linear (2.1.9) pelo método de Elimin-
nação de Gauss para matriz tridiagonal o qual requer $5N-1$ operações.

Assim é requerido um total de $15N+5$ operações arit-
méticas para se calcular o vetor f^1 . Ademais, com esse tipo de

representação de $V_{S(\Delta)} f$, uma avaliação simples de $V_{S(\Delta)} f(x)$ requer na maioria somente 20 operações aritméticas.

O Teorema 2.1.1. tem como consequência

Corolário 2.1.2 - [2]

$S(\Delta)$ é um espaço vetorial de dimensão $N+4$.

Prova

A equação (2.1.5) determina para cada $s(x) \in S(\Delta)$ um único vetor $\{f_0, f_1, \dots, f_{N+1}, f_0^1, f_{N+1}^1\}$. O Teorema 2.1.1, mostra que a equação (2.1.5) determina, reciprocamente uma única $s(x) \in S(\Delta)$ para cada vetor $\{f_0, f_1, \dots, f_{N+1}, f_0^1, f_{N+1}^1\}$.

Corolário 2.1.3 - [2]

O conjunto $\phi_i(x) \in S(\Delta)$, $0 \leq i \leq N+3$, definida pelas condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases} ; \quad D\phi_j(x_0) = D\phi_j(x_{N+1}) = 0; \\ \hspace{25em} 0 \leq i, j \leq N+1 \\ \phi_{N+2}(x_i) = \phi_{N+3}(x_i) = 0 ; \hspace{15em} 0 \leq i \leq N+1 \\ D\phi_{N+2}(x_0) = D\phi_{N+3}(x_{N+1}) = 1 ; \quad D\phi_{N+2}(x_{N+1}) = D\phi_{N+3}(x_0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.15)$$

é uma base para o espaço vetorial $S(\Delta)$.

Assim pelo Teorema 2.1.1 e Corolário 2.1.3, temos que uma *spline* cúbica, $s(x)$, se exprime como:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{N+1} f_i \phi_i(x) + f_0^1 \phi_{N+2}^1(x) + f_{N+1}^1 \phi_{N+3}^1(x)$$

Apresentaremos agora as expressões dessas funções bases, $\phi_i(x)$, $0 \leq i \leq N+3$.

Para melhor esclarecimento, notemos que os elementos $c_{i,j}$ que aparecem nas expressões das funções bases são obtidos pelo produto da inversa da matriz dada em (2.1.12) pela matriz dada em (2.1.14).

Assim, obtemos as fórmulas: (2.1.16)

Para $x \in [x_0, x_1]$; temos:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \{1 - (\frac{3}{h^2} + \frac{c_{1,i+1}}{h})x^2 + (\frac{2}{h^3} + \frac{c_{1,i+1}}{h^2})x^3\} & ; i = 0 \\ \{(\frac{3}{h^2} - \frac{c_{1,i+1}}{h})x^2 + (-\frac{2}{h^3} + \frac{c_{1,i+1}}{h^2})x^3\} & ; i = 1 \\ \{-\frac{c_{1,i+1}}{h}x^2 + \frac{c_{1,i+1}}{h^2}x^3\} & ; 0 \leq i \leq N+3 ; \text{ para } i \neq 0, i \neq 1 \text{ e } i \neq N+2 \\ \{x - (\frac{c_{1,i+1}}{h} + \frac{2}{h})x^2 + (\frac{c_{1,i+1}}{h^2} + \frac{1}{h^2})x^3\} & ; i = N+2 \end{cases}$$

Para $x \in [x_k, x_{k+1}]$; $1 \leq k \leq N-1$

$\phi_i(x) =$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-c_{k,i+1}(kh) + \left(\frac{c_{k+1,i+1}}{h} + \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) (kh)^2 \right. \\ & \left. - \left(\frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh)^3 \right] + \left[c_{k,i+1} \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{c_{k+1,i+1}}{h} + \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) (kh) \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh)^2 \right] x + \left[- \left(\frac{c_{k+1,i+1}}{h} + \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) \right. \\ & \left. - 3 \left(\frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh) \right] x^2 + \left[\frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right] x^3 \} ; \quad 0 \leq i \leq N+3 ; \quad \text{para } i \neq k \text{ e } i \neq k+1 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 - c_{k,i+1}(kh) - \left(\frac{3}{h^2} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h} + \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) (kh)^2 \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh)^3 \right] + \left[c_{k,i+1} + 2 \left(\frac{3}{h^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{k+1,i+1}}{h} + \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) (kh) + 3 \left(\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) \right. \\ & \left. \cdot (kh)^2 \right] x + \left[- \left(\frac{3}{h^2} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h} + \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) - 3 \left(\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh) \right] x^2 + \left[\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right] x^3 \} ; \quad i=k \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-c_{k,i+1}(kh) + \left(\frac{3}{h^2} - \frac{c_{k+1,i+1}}{h} - \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) (kh)^2 \right. \\ & \left. - \left(-\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh)^3 \right] + \left[c_{k,i+1} \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{3}{h^2} - \frac{c_{k+1,i+1}}{h} - \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) (kh) + 3 \left(-\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh)^2 \right] x + \left[\left(\frac{3}{h^2} - \frac{c_{k+1,i+1}}{h} - \frac{2c_{k,i+1}}{h} \right) - 3 \left(-\frac{2}{h^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right) (kh) \right] x^2 + \left[-\frac{2}{h^3} + \frac{c_{k+1,i+1}}{h^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_{k,i+1}}{h^2} \right] x^3 \} ; \quad i = k+1 \end{aligned} \right.$$

Para $x \in [x_N, x_{N+1}]$, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-c_{N,i+1} (Nh) - \left(\frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh)^2 - \left(\frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^3 \right] \\ & + \left[c_{N,i+1} + \left(\frac{4c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh) + \left(\frac{3c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^2 \right] x \\ & + \left[-\frac{2c_{N,i+1}}{h} - \left(\frac{3c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh) \right] x^2 + \left[\frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right] x^3 \}; \\ & 0 \leq i \leq N+3; \text{ para } i \neq N; i \neq N+1 \text{ e } i \neq N+3 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 - c_{N,i+1} (Nh) - \left(\frac{3}{h^2} + \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh)^2 - \left(\frac{2}{h^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^3 \right] + \left[c_{N,i+1} + 2 \left(\frac{3}{h^2} + \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh) \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{2}{h^3} + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^2 \right] x + \left[- \left(\frac{3}{h^2} + \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) - 3 \left(\frac{2}{h^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh) \right] x^2 + \left[\frac{2}{h^3} + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right] x^3 \}; \quad i = N \end{aligned} \right.$$

$\phi_i(x) =$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-c_{N,i+1} (Nh) + \left(\frac{3}{h^2} - \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh)^2 - \left(-\frac{2}{h^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^3 \right] + \left[c_{N,i+1} - 2 \left(\frac{3}{h^2} - \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh) \right. \\ & \left. + 3 \left(-\frac{2}{h^3} + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^2 \right] x + \left[\left(\frac{3}{h^2} - \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) - 3 \left(-\frac{2}{h^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh) \right] x^2 + \left[-\frac{2}{h^3} + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right] x^3 \}; \quad i = N+1 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-c_{N,i+1} (Nh) - \left(\frac{1}{h} + \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh)^2 - \left(\frac{1}{h^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^3 \right] + \left[c_{N,i+1} + 2 \left(\frac{1}{h} + \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) (Nh) + 3 \left(\frac{1}{h^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh)^2 \right] x + \left[- \left(\frac{1}{h} + \frac{2c_{N,i+1}}{h} \right) - 3 \left(\frac{1}{h^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right) (Nh) \right] x^2 + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{c_{N,i+1}}{h^2} \right] x^3 \}; \quad i = N+3 \end{aligned} \right.$$

Observações:

- 1) As fórmulas (2.1.16) podem ser obtidas da seguinte maneira:

Seja E^{-1} a inversa da matriz dada em (2.1.12) e seja D a matriz dada em (2.1.14). Temos então que o sistema (2.1.19) se escreve:

$$f^1 = (E^{-1}D)f \Rightarrow f^1 = Cf.$$

Substituindo-se os valores de f^1 em (2.1.16), sem efetuar o produto Cf , e agrupando-se convenientemente, obtemos as funções bases $\phi_i(x)$.

- 2) Os gráficos das funções bases sobre 5 pontos encontram-se no Apêndice deste trabalho.

Examinemos agora, como podemos desenvolver a aplicação interpolação $\tilde{V}_{S(\Delta)}$ em $S(\Delta)$, as quais usam somente $N+2$ valores $f \equiv (f_0, f_1, \dots, f_{N+1})$ como em $V_{L(\Delta)}$. Nossa idéia é usar localmente polinômios cúbicos na interpolação de Lagrange em ambos os fins dos intervalos para valores aproximados, nos quais supomos que $f_0^1 = Df(0)$ e $f_{N+1}^1 = Df(1)$, os quais serão usados para se calcular aproximações para $V_{S(\Delta)}f$.

Mais precisamente, se $N \geq 2$, isto é, se Δ tem no mínimo dois pontos interiores, definimos

$$P_0(x) \equiv \sum_{i=0}^3 \eta_{0,i}(x) f_i$$

e

$$P_{N-2}(x) \equiv \sum_{i=0}^3 \eta_{N-2,i}(x) f_{N-2+i}$$

onde

$$\eta_{k,i}(x) \equiv \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (x - x_{k+j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 (x_{k+i} - x_{k+j})}$$

para $k = 0$ e $k = N-2$. Aproximamos as derivadas $f_0^1 \equiv Df(0)$

e $f_{N+1}^1 \equiv Df(1)$ do seguinte modo:

$$Df(0) \equiv DP_0(x) \quad \text{e} \quad Df(1) \equiv DP_{N-2}(x) \quad (2.1.17)$$

Usando essas aproximações das derivadas, então calculamos o interpolante *spline* cúbico como antes.

A aplicação interpolação $V_{S(\Delta)} f$ é *não local*, isto é, $V_{S(\Delta)} f(x)$ depende de todos os valores f_i , $0 \leq i \leq N+1$, f_0^1 e f_{N+1}^1 .

Daremos agora uma idéia do comportamento do erro neste procedimento, consideremos uma função simples $f(x) = e^x$. Para o caso especial de $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 1$, o sistema linear (2.1.9) se reduz a uma equação linear a uma incógnita:

$$(b_{11} \quad b_{12}) \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \end{pmatrix} = k_1$$

onde

$$b_{11} = 2(\Delta x_1 + \Delta x_0) = 2$$

$$b_{12} = \Delta x_0 = 1/2$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \left[\Delta x_0 (\Delta x_1)^{-1} \Delta c_1 + \Delta x_1 (\Delta x_0)^{-1} \Delta c_0 \right] - \Delta x_1 Dh(0) \\ &= 3(c_2 - c_0) - \frac{1}{2} Dh(0) \end{aligned}$$

portanto:

$$2c_1^1 + \frac{1}{2} c_2^1 = 3(c_2 - c_0) - \frac{1}{2} Dh(0)$$

$$\text{mas } c_1 \equiv h(x_1) = f_1 = e^{x_1}; \quad Dh(x_1) = f_1^1 = e^{x_1}$$

$$\text{portanto: } c_2 = e; \quad c_0 = 1; \quad Dh(0) = 1$$

$$\text{e } c_2^1 = Dh(x_2) = e$$

$$\text{portanto: } 2c_1^1 + \frac{1}{2} e = 3(e - 1) - \frac{1}{2}$$

$$\text{portanto: } c_1^1 = \frac{3}{2} (e - 1) - \frac{1}{4} (1 + e) = \frac{5}{4}e - \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{e } v_{S(0,1/2,1)} e^x &= h_0(x) + h_0^1(x) + e^{1/2} h_1(x) + \left(\frac{5}{4}e - \frac{7}{4}\right) h_1^1(x) + e h_2(x) \\ &\quad + e h_2^{(1)}(x). \end{aligned}$$

Para partições uniformes $\Delta(h)$ com mais nós, te -

mos a seguinte tabela:

h	$\dim S(\Delta(h))$	$\ e^x - v_{S(\Delta(h))} e^x\ _\infty$
1/4	7	$0,26 \times 10^{-4}$
1/5	8	$0,11 \times 10^{-4}$
1/6	9	$0,53 \times 10^{-5}$
1/7	10	$0,29 \times 10^{-5}$
1/8	11	$0,17 \times 10^{-5}$

Desde que o erro aparentemente descrece de um fator aproximadamente $16 = 2^4$, quando temos o mesmo comprimento da malha, temos que o procedimento de interpolação *spline* é de 4ª ordem para $f(x) = e^x$.

Esse procedimento de interpolação é de 4ª ordem para funções suficientemente regulares.

2.2 - Problema em Duas Dimensões

Veremos agora procedimentos de interpolação em duas dimensões análogo ao procedimento de interpolação em uma dimensão.

1 - Interpolação Bilinear por Pedacos

Seja $L(\rho) \equiv L(\Delta) \otimes L(\Delta_y)$ (o produto tensorial), isto é, $L(\rho)$ é o espaço linear de dimensão $(N+2)(M+2)$ de todas as funções da forma

$$\ell(x,y) = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{M+1} c_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y)$$

Claramente $L(\rho)$ pode ser caracterizado como o espaço vetorial de todos os polinômios bilineares por pedacos, contínuos com respeito a ρ . De fato, se $\phi(x,y)$ é uma tal função, então para cada $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M$, e $(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \phi(x_i, y_j) \ell_i(x) \ell_j(y) + \phi(x_{i+1}, y_j) \ell_{i+1}(x) \ell_j(y) \\ &+ \phi(x_i, y_{j+1}) \ell_i(x) \ell_{j+1}(y) + \phi(x_{i+1}, y_{j+1}) \ell_{i+1}(x) \ell_{j+1}(y) \end{aligned}$$

Assim

$$\phi(x,y) = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{M+1} \phi(x_i, y_j) \ell_i(x) \ell_j(y)$$

e portanto $\phi \in L(\rho)$.

Dado o vetor $f \equiv \{f_{ij}\}_{i=0, j=0}^{N+1, M+1}$; definimos

$$v_{L(\rho)} f \equiv \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{M+1} f_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y) \tag{2.2.1}$$

como a aplicação interpolação em $L(\rho)$. Se $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, $0 \leq i \leq N+1$, $0 \leq j \leq M+1$, onde $f(x, y)$ está definida para todo $(x, y) \in R$, podemos notar $V_{L(\rho)} f$ por $V_{L(\rho)} f$.

Daremos agora uma caracterização de $V_{L(\rho)} f$ em termos do esquema da interpolação em uma dimensão.

Teorema 2.2.1 - [13]

Se $f(x, y)$ está definida para todo $(x, y) \in U$, então

$$V_{L(\rho)} f = V_{L(\Delta_Y)} V_{L(\Delta)} f = V_{L(\Delta)} V_{L(\Delta_Y)} f \quad (2.2.2)$$

Prova

Provaremos somente a 1ª igualdade de (2.2.2) a segunda é provada de maneira semelhante. Por definição:

$$\begin{aligned} V_{L(\Delta_Y)} V_{L(\Delta)} f &= V_{L(\Delta_Y)} \left[\sum_{i=0}^{N+1} f(x_i, y) \ell_i(x) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{M+1} \left(\sum_{i=0}^{N+1} f(x_i, y_j) \ell_i(x) \right) \ell_j(y) \\ &= \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{M+1} f(x_i, y_j) \ell_i(x) \ell_j(y) \\ &= V_{L(\rho)} f \end{aligned}$$

11 - Interpolação Spline Bi-Cúbica

Falaremos agora sobre a interpolação *spline* bi-cúbica.

Para o espaço vetorial $S(\Delta_y)$ de dimensão $M+4$ seja $\{\psi_j(y)\}$, $0 \leq j \leq M+3$, a base definida no Corolário 2.1.3 do Teorema 2.1.1. Consideremos o produto tensorial

$S(\rho) \equiv S(\Delta) \otimes S(\Delta_y)$. $S(\rho)$ é o espaço vetorial de dimensão $(N+4)(M+4)$ de todas as funções da forma

$$s(x,y) = \sum_{m=0}^{N+3} \sum_{n=0}^{M+3} \beta_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (2.2.3)$$

As funções ϕ_m e ψ_n são cúbicas por pedaços e de classe C^2 em $U \equiv [0,1] \times [0,1]$. Além disso, qualquer produto ou combinação linear de ϕ_m e ψ_n é bi-cúbica por pedaço e de classe C^2 , isto é, $s(x,y) \in C^2$ em U para qualquer escolha dos coeficientes β_{mn} . Reciprocamente, toda função, as quais é um polinômio bi-cúbico em cada retângulo

$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, e é de classe C^2 em U , está em $S(\rho)$.

Teorema 2.2.2 - [2]

Seja dado os valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ij} = f(x_i, y_j) \quad ; \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq M+1 \\ f_{ij}^{1,0} = D_x f(x_i, y_j) \quad ; \quad i = 0, N+1 \quad ; \quad 0 \leq j \leq M+1 \\ f_{ij}^{0,1} = D_y f(x_i, y_j) \quad ; \quad 0 \leq i \leq N+1 \quad ; \quad j = 0, M+1 \\ f_{ij}^{1,1} = D_x D_y f(x_i, y_j) \quad ; \quad i = 0, N+1 \quad ; \quad j = 0, M+1 \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Então existe exatamente uma função bi-cúbica por pe daço $s(x, y)$ da forma (2.2.3) as quais satisfaz (2.2.4).

Prova

As equações (2.1.15) (e suas análogas para $\psi_n(y)$), implicam que, para funções da forma (2.2.3), as equações (2.2.4) são equivalentes a:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ij} = f(x_i, y_j) = \sum_{m=0}^{N+3} \sum_{n=0}^{M+3} \beta_{mn} \phi_m(x_i) \psi_n(y_j) = \beta_{ij} \quad ; \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq N+1 \\ 0 \leq j \leq M+1 \end{cases} \\ \\ f_{ij}^{1,0} = D_x f(x_i, y_j) = \sum_{m=0}^{N+3} \sum_{n=0}^{M+3} \beta_{mn} D \phi_m(x_i) \psi_n(y_j) = \begin{cases} \beta_{N+2,j} & ; i=0 \\ \beta_{N+3,j} & ; i=N+1 \end{cases} \\ \quad \text{para } 0 \leq j \leq M+1 \\ \\ f_{ij}^{0,1} = D_y f(x_i, y_j) = \sum_{m=0}^{N+3} \sum_{n=0}^{M+3} \beta_{mn} \phi_m(x_i) D \psi_n(y_j) = \begin{cases} \beta_{i,M+2} & ; j=0 \\ \beta_{i,M+3} & ; j=M+1 \end{cases} \\ \quad \text{para } 0 \leq i \leq M+1 \\ \\ f_{ij}^{1,1} = D_x D_y f(x_i, y_j) = \sum_{m=0}^{N+3} \sum_{n=0}^{M+3} \beta_{mn} D \phi_m(x_i) D \psi_n(y_j) = \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{N+2,M+2} \quad ; i=0 \quad ; j=0 \\ \beta_{N+2,M+3} \quad ; i=0 \quad ; j=M+1 \\ \beta_{N+3,M+2} \quad ; i=N+1 \quad ; j=0 \\ \beta_{N+3,M+3} \quad ; i=N+1 \quad ; j=M+1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

Desde que β_{mn} ocorre exatamente uma vez no último membro das $(N+4)(M+4)$ equações precedentes, e cada uma dessas equações são equivalentes a uma das $(N+4)(M+4)$ condições (2.2.4), o teorema segue.

No teorema anterior a existência e unicidade da função bi-cúbica $s(x,y) \in C^2$ da forma (2.2.3) satisfazendo as condições (2.2.4) está provada.

Dado o vetor:

$$f \equiv \{f_{ij}, f_{0,j}^{1,0}, f_{N+1,j}^{1,0}, f_{i,0}^{0,1}, f_{i,M+1}^{0,1}, f_{0,0}^{1,1}, f_{0,M+1}^{1,1}, f_{N+1,1}^{1,1}, f_{N+1,M+1}^{1,1}\} \quad \text{para } 0 \leq i \leq N+1; \quad 0 \leq j \leq M+1; \text{ definimos:}$$

$$\begin{aligned} V_{S(\rho)} f &= \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{M+1} f_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y) \\ &+ \sum_{j=0}^{M+1} (f_{0,j}^{1,0} \phi_{N+2}(x) + f_{N+1,j}^{1,0} \phi_{N+3}(x)) \psi_j(y) \\ &+ \sum_{i=0}^{N+1} (f_{i,0}^{0,1} \psi_{M+2}(y) + f_{i,M+1}^{0,1} \psi_{M+3}(y)) \phi_i(x) \\ &+ f_{0,0}^{1,1} \phi_{N+2}(x) \psi_{M+2}(y) + f_{0,M+1}^{1,1} \phi_{N+2}(x) \psi_{M+3}(y) \\ &+ f_{N+1,0}^{1,1} \phi_{N+3}(x) \psi_{M+2}(y) + f_{N+1,M+1}^{1,1} \phi_{N+3}(x) \psi_{M+3}(y) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

como sendo a aplicação interpolação em $S(\rho)$

Se $f_{i,j} \equiv f(x_i, y_j)$; $f_{0,j}^{1,0} \equiv D_x f(0, y_j)$; $f_{N+1,j}^{1,0} \equiv D_x f(1, y_j)$;

$f_{i,0}^{0,1} \equiv D_y f(x_i, 0)$; $f_{i,M+1}^{0,1} \equiv D_y f(x_i, 1)$; $f_{0,0}^{1,1} \equiv D_x D_y f(0, 0)$

$f_{0,M+1}^{1,1} \equiv D_x D_y f(0, 1)$; $f_{N+1,0}^{1,1} \equiv D_x D_y f(1, 0)$ e

$f_{N+1,M+1}^{1,1} \equiv D_x D_y f(1, 1)$ para todo $0 \leq i \leq N+1$ e $0 \leq j \leq M+1$,

onde $f(x,y)$, $D_x f(x,y)$, $D_y f(x,y)$, $D_x D_y f(x,y)$ estão definidas para todo $(x,y) \in U$, podemos notar $V_{S(\rho)} f$ por $V_{S(\rho)} f$.

Daremos agora uma caracterização de $V_{S(\rho)} f$ em termos do esquema de interpolação em uma dimensão.

Teorema 2.2.3 - [13]

Se $f \in C^2(U)$ então:

$$V_{S(\rho)} f = V_{S(\Delta_y)} V_{S(\Delta)} f = V_{S(\Delta)} V_{S(\Delta_y)} f \quad (2.2.7)$$

Prova

Provaremos somente a 1ª igualdade de (2.2.7) a 2ª é provada de maneira semelhante. Por definição:

$$\begin{aligned}
 v_{S(\Delta_Y)} v_{S(\Delta)} f &= v_{S(\Delta_Y)} \left[\sum_{i=0}^{N+1} f(x_i, y) \phi_i(x) + D_x f(0, y) \phi_{N+2}(x) \right. \\
 &\quad \left. + D_y f(1, y) \phi_{N+3}(x) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^{M+1} \left[\sum_{i=0}^{N+1} f(x_i, y_j) \phi_i(x) + D_x f(0, y_j) \phi_{N+2}(x) \right. \\
 &\quad \left. + D_y f(1, y_j) \phi_{N+3}(x) \right] \psi_j(y) \\
 &\quad + \left[\sum_{i=0}^{N+1} D_y f(x_i, 0) \phi_i(x) + D_x D_y f(0, 0) \phi_{N+2}(x) \right. \\
 &\quad \left. + D_x D_y f(1, 0) \phi_{N+3}(x) \right] \psi_{N+2}(y) \\
 &\quad + \left[\sum_{i=0}^{N+1} D_y f(x_i, 1) \phi_i(x) + D_x D_y f(0, 1) \phi_{N+2}(x) \right. \\
 &\quad \left. + D_x D_y f(1, 1) \phi_{N+3}(x) \right] \psi_{N+3}(y) \\
 &= v_{S(\rho)} f.
 \end{aligned}$$

O procedimento em duas dimensões é análogo ao procedimento em uma dimensão para interpolação *spline* cúbica.

As equações relevantes são deduzidas nos seguintes dois lemas.

Por definição, a função interpoladora $v_{S(\rho)} f$ é igual a um polinômio bi-cúbico

$$c_{ij}(x, y) = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 \gamma_{mn}^{ij} (x - x_{i-1})^m (y - y_{j-1})^n \quad (2.2.8)$$

em cada sub-retângulo $U_{ij} \equiv \{(x,y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$
 $1 \leq i \leq N+1 ; 1 \leq j \leq M+1.$

Lema 2.2.1 - [2]

Seja $f_{ij}; f_{i,j}^{1,0}; f_{i,j}^{0,1}; f_{i,j}^{1,1}$ dado nos quatro vértices de cada sub-retângulo U_{ij} .

Então existe exatamente um polinômio bi-cúbico $c_{ij}(x,y)$ (2.2.8) os quais assumem os valores dados.

A matriz $\Gamma_{ij} = [\gamma_{mn}^{ij}]$ dos coeficientes em (2.2.8) é dada em termos da matriz K_{ij} de valores dados pela equação matricial

$$A(\Delta x_{i-1}) Q_{ij} A(\Delta y_{j-1}) = \Gamma_{ij} \quad (2.2.9)$$

onde

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} B_{i-1,j-1} & \vdots & B_{i-1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i,j-1} & \vdots & B_{i,j} \end{pmatrix}$$

com

$$B_{mn} = \begin{pmatrix} f(x_m, y_n) & D_y f(x_m, y_n) \\ D_x f(x_m, y_n) & D_x D_y f(x_m, y_n) \end{pmatrix}$$

e a matriz $A(h)$ é definida por

$$A(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{h^2} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{h^2} & -\frac{1}{h} \\ \frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^3} & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$$

Prova

A primeira parte do Lema é o caso especial de $N+1 = M+1 = 1$ do Teorema 2.2.2. Desde que a equação (2.2.9) é linear em Q_{ij} , a segunda parte do Lema pode ser verificada por cálculos mostrando sua exatidão para as dezesseis funções base $(x-x_{i-1})^m(y-y_{j-1})^n$; $m, n=0, 1, 2, 3$.

Lema 2.2.2 - [2]

Se os valores (2.2.4) são dados, então para $s(x, y)$ da forma (2.2.3), os valores $f_{i,j}^{1,0} = D_x f(x_i, y_j)$; ($1 \leq i \leq N$; $0 \leq j \leq M+1$); $f_{ij}^{0,1} = D_y f(x_i, y_j)$; ($0 \leq i \leq N+1$; $1 \leq j \leq M$) e $f_{ij}^{1,1} = D_x D_y f(x_i, y_j)$; ($1 \leq i \leq N$; $j = 0, M+1$, e $i = 0, N+1$, $1 \leq j \leq M$) são unicamente determinados pelo seguinte sistema de $2N+M+8$ equações lineares:

$$\begin{aligned} & \Delta x_{i-1} f_{i+1,j}^{1,0} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) f_{ij}^{1,0} + \Delta x_i f_{i-1,j}^{1,0} \\ & = 3 \left[\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} (f_{ij} - f_{i-1,j}) \right]; \quad 1 \leq i \leq N \\ & \quad 0 \leq j \leq M+1 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} & \Delta x_{i-1} f_{i+1,j}^{1,1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) f_{i,j}^{1,1} + \Delta x_i f_{i-1,j}^{1,1} \\ &= 3 \left[\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} (f_{i+1,j}^{0,1} - f_{i,j}^{0,1}) + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} (f_{i,j}^{0,1} - f_{i-1,j}^{0,1}) \right] ; \quad 1 \leq i \leq N \\ & \quad j=0, M+1 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} & \Delta y_{j-1} f_{i,j+1}^{0,1} + 2(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j) f_{i,j}^{0,1} + \Delta y_j f_{i,j-1}^{0,1} \\ &= 3 \left[\frac{\Delta y_{j-1}}{\Delta y_j} (f_{i,j+1} - f_{i,j}) + \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j-1}} (f_{i,j} - f_{i,j-1}) \right] ; \quad 0 \leq i \leq N+1 \\ & \quad 1 \leq j \leq M \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} & \Delta y_{j-1} f_{i,j+1}^{1,1} + 2(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j) f_{i,j}^{1,1} + \Delta y_j f_{i,j-1}^{1,1} \\ &= 3 \left[\frac{\Delta y_{j-1}}{\Delta y_j} (f_{i,j+1}^{1,0} - f_{i,j}^{1,0}) + \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j-1}} (f_{i,j}^{1,0} - f_{i,j-1}^{1,0}) \right] ; \quad 0 \leq i \leq N+1 \\ & \quad 1 \leq j \leq M \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Prova

Ao longo de cada malha $y=y_j$; $0 \leq j \leq M+1$

$$s(x, y) = p_j(x) \in S(\Delta) \quad ; \quad D_x f(x, y_j) = Dp_j(x)$$

Pelo Teorema 2.1.2, os números

$Dp_j(x_i) = D_x f(x_i, y_j) = f_{ij}^{1,0}$, $1 \leq i \leq N$, são unicamente determinados se $p_j(x_i)$, $0 \leq i \leq N+1$, $Dp_j(x_0)$ e $Dp_j(x_{N+1})$ são conhecidos. Desde que $p_j(x_i) = f_{ij}$, $0 \leq i \leq N+1$,

$Dp_j(x_0) = D_x f(x_0, y_j)$; e $Dp_j(x_{N+1}) = D_x f(x_{N+1}, y_j)$ são dados para $0 \leq j \leq M+1$, segue pelo Teorema 2.1.2 que $f_{i,j}^{1,0}$ ($1 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M+1$) é unicamente determinado pelos $M+2$ conjuntos de N equações (2.2.10); dado os valores (2.2.4). Por razão semelhante as equações (2.2.12) determinam $f_{i,j}^{0,1}$ ($0 \leq i \leq N+1$; $1 \leq j \leq N$); unicamente dados os valores (2.2.4).

Ao longo de cada malha $y=y_j$; $j=0, M+1$

$$D_y f(x, y_j) = \sum_{m=0}^{N+3} (\phi_m(x) \sum_{n=0}^{M+3} \beta_{mn} D\psi_n(y)) = q_j(x) \in S(\Delta) \quad e$$

$D_x D_y f(x, y_j) = Dq_j(x)$. Desde que $Dq_j(x_i) = f_{i,j}^{1,1}$, $i=0, N+1$; e $q_j(x_i) = f_{i,j}^{0,1}$; $0 \leq i \leq N+1$, é dado para $j=0, M+1$; as equações (2.2.11) determinam $f_{i,j}^{1,1}$ ($1 \leq i \leq N$; $j=0, M+1$), unicamente, dado os valores (2.2.4). Finalmente, para cada $0 \leq i \leq N+1$, $D_x f(x_i, y) = z_i(y) \in S(\Delta_y)$, $D_x D_y f(x_i, y) = Dz_i(y)$.

Para cada $0 \leq i \leq N+1$, $z_i(y_j) = D_x f(x_i, y_j) = f_{i,j}^{1,0}$, $0 \leq j \leq M+1$, é dado ou é unicamente determinado por (2.2.10) ; e $Dz_i(y_j) = D_x D_y f(x_i, y_j)$, $j=0, M+1$ é dado ou pode ser unicamente determinado por (2.2.11). Lembrando o Teorema 2.1.2 concluímos que $f_{i,j}^{1,1}$ ($0 \leq i \leq N+1$; $1 \leq j \leq M$), é unicamente determinado pelas equações (2.2.13) com (2.2.10) e (2.2.11), dado os valores (2.2.4). Isto prova o Lema 2.2.2.

2.3 - Análise do Erro

Nesta seção, daremos um limite do erro para procedimentos de interpolação introduzidas nas seções 2.1 e 2.2.

No caso de problemas em uma dimensão, nossa análise é baseada sobre a caracterização da interpolação de funções de grau $2m-1$ por pedaços como a solução de um problema variacional simples.

Agora relatamos e provamos essa caracterização variacional de $V_{H^m(\Delta)} f$.

Teorema 2.3.1

Seja Δ e $f^m \equiv \{f_0^0, f_0^1, \dots, f_0^{m-1}, f_1^0, \dots, f_{N+1}^0, \dots, f_{n+1}^{m-1}\}$ dados e $V \equiv \{\omega \in PC^{m,2}(I) \mid D^j \omega(x_i) = f_i^j, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq m-1\}$.

O problema variacional de determinar as funções $p \in V$ as quais minimizam $\|D^m p\|_2$ sobre todo $p \in V$ tem uma única solução $V_{H^m(\Delta)} f$.

Prova

Primeiramente, mostraremos que $p \in V$ é uma solução do problema variacional se e somente se

$$\langle D^m p, D^m \delta \rangle_2 = 0 \quad (2.3.1)$$

para todo

$\delta \in V_0 \equiv \{\omega \in PC^{m,2}(I) \mid D^j_\omega(x_i) = 0, 0 < i < N+1, 0 \leq j \leq m-1\}$, isto é, se e somente se p é uma solução da equação de Euler generalizada (2.3.1).

De fato, se $p \in V$, então $p + \alpha\delta \in V$ para todo número real α e todo $\delta \in V_0$.

Além disso, se p é uma solução do problema variacional, a função

$$G(\alpha) \equiv ||D^m(p + \alpha\delta)||_2^2 = \langle D^m p, D^m p \rangle_2 + 2\alpha \langle D^m p, D^m \delta \rangle_2 + \alpha^2 \langle D^m \delta, D^m \delta \rangle_2 \quad (2.3.2)$$

é minimizada para $\alpha = 0$. Assim, por cálculo,

$$\frac{dG}{d\alpha} = 2 \langle D^m p, D^m \delta \rangle_2 + 2\alpha \langle D^m \delta, D^m \delta \rangle_2 = 0$$

$$\text{Assim, } \frac{dG(0)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \langle D^m p, D^m \delta \rangle_2 = 0 \text{ e obtemos (2.3.1).}$$

Reciprocamente, se $p \in V$ é uma solução de (2.3.1) e $\omega \in V$, então $\omega - p \in V_0$ e $\langle D^m p, D^m \omega - D^m p \rangle_2 = 0$.

Assim, pelo Corolário 1.6 temos:

$$||D^m(\omega - p)||_2^2 + ||D^m p||_2^2 = ||D^m p + D^m \omega - D^m p||_2^2$$

$$\Rightarrow ||D^m(\omega - p)||_2^2 + ||D^m p||_2^2 = ||D^m \omega||_2^2$$

Portanto:

$$||D^m p||_2^2 \leq ||D^m \omega||_2^2 \quad \text{nara todo } \omega \in V \quad (2.3.3)$$

e p é uma solução do problema variacional.

Além disso, temos a igualdade em (2.3.3) se e somente se $||D^m(\omega-p)||_2^2 = ||D^m\omega - D^mp||_2^2 = 0$ ou usando a desigualdade de Rayleigh-Ritz (Teorema 1.1.3), se e somente se

$$\pi^m ||\omega-p||_2^2 \leq ||D^m(\omega-p)||_2^2 = 0$$

ou $\omega = p$. Assim o problema variacional e a equação de Euler generalizada (2.3.1) tem no máximo uma solução.

Em segundo lugar, completaremos a prova mostrando que $v_{H^m(\Delta)} f$ é a solução da equação de Euler generalizada (2.3.1). Se $\delta \in V_0$, então por sucessivas integrações por partes, temos:

$$\begin{aligned} \langle D^m v_{H^m f}, D^m \delta \rangle_2 &= \int_0^1 D^m v_{H^m f}(x) \cdot D^m \delta(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^m v_{H^m f}(x) \cdot D^m \delta(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^N \left[D^m v_{H^m f}(x) \cdot D^{m-1} \delta(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &\quad - \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{m+1} v_{H^m f}(x) \cdot D^{m-1} \delta(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^N \left[D^m v_{H^m f}(x) \cdot D^{m-1} \delta(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &\quad - \sum_{i=0}^N \left[D^{m+1} v_{H^m f}(x) \cdot D^{m-2} \delta(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned}$$

Assim, $\langle D^m v_{H^m f}, D^m \delta \rangle = 0$, desde que as primeiras so mas se anulam devido ao fato de $D^j \delta(x_i) = 0$; $0 \leq i \leq N+1$; $0 \leq j \leq m-1$; e a última soma se anula porque $v_{H^m f}(x)$ é um polinômio de grau $2m-1$ em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$.

A Identidade Fundamental [1].

Seja $v_{H^m f}(x)$ uma *spline* polinomial de grau $2m-1$ em cada malha $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$ e seja $f(x) \in PC^{m,2}(a,b)$. Temos a identidade

$$\begin{aligned} & \int_a^b \{D^m f(x) - D^m v_{H^m f}(x)\}^2 dx = \\ & = \int_a^b \{D^m f(x)\}^2 dx - 2 \int_a^b \{D^m f(x) - D^m v_{H^m f}(x)\} D^m v_{H^m f}(x) dx \\ & - \int_a^b \{D^m v_{H^m f}(x)\}^2 dx, \end{aligned}$$

na qual a segunda integral do membro direito pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \{D^m f(x) - D^m v_{H^m f}(x)\} D^m v_{H^m f}(x) dx \\ & = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{D^m f(x) - D^m v_{H^m f}(x)\} \cdot D^m v_{H^m f}(x) dx. \end{aligned}$$

Em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ podemos integrar por partes m vezes; assim

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{D^m f(x) - D^m v_{H^m} f(x)\} D^m v_{H^m} f(x) dx = \\
 & = \sum_{i=0}^N D^m v_{H^m} f(x) \{D^{m-1} f(x) - D^{m-1} v_{H^m} f(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & - \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{D^{m-1} f(x) - D^{m-1} v_{H^m} f(x)\} D^{m+1} v_{H^m} f(x) dx \\
 & = \sum_{i=0}^N D^m v_{H^m} f(x) \{D^{m-1} f(x) - D^{m-1} v_{H^m} f(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & - \sum_{i=0}^N D^{m+1} v_{H^m} f(x) \{D^{m-2} f(x) - D^{m-2} v_{H^m} f(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & + \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} [D^{m-2} f(x) - D^{m-2} v_{H^m} f(x)] D^{m+2} v_{H^m} f(x) dx \\
 & = \dots \\
 & = \sum_{i=0}^N D^m v_{H^m} f(x) \{D^{m-1} f(x) - D^{m-1} v_{H^m} f(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & - \sum_{i=0}^N D^{m+1} v_{H^m} f(x) \{D^{m-2} f(x) - D^{m-2} v_{H^m} f(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^N D^{2m-1} v_{H^m f}(x) \{D^0 f(x) - D^0 v_{H^m f}(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & + (-1)^m \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{D^0 f(x) - D^0 v_{H^m f}(x)\} D^{2m} v_{H^m f}(x) dx
 \end{aligned}$$

onde a última parcela se anula, desde que, $v_{H^m f}(x)$ é uma *spline* polinomial de grau $2m-1$.

Portanto:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{D^m f(x) - D^m v_{H^m f}(x)\} D^m v_{H^m f}(x) dx = \\
 & = \sum_{\alpha=1}^m (-1)^{\alpha+1} \{D^{m-\alpha} f(x) - D^{m-\alpha} v_{H^m f}(x)\} D^{m+\alpha-1} v_{H^m f}(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b \{D^m f(x) - D^m v_{H^m f}(x)\}^2 dx = \int_a^b \{D^m f(x)\}^2 dx \\
 & - 2 \sum_{\alpha=1}^{m-1} (-1)^{\alpha+1} \{D^{m-\alpha} f(x) - D^{m-\alpha} v_{H^m f}(x)\} D^{m+\alpha-1} v_{H^m f}(x) \Big|_a^b \\
 & - 2 \sum_{i=0}^N (-1)^{m+1} \{f(x) - v_{H^m f}(x)\} D^{2m-1} v_{H^m f}(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 & - \int_a^b \{D^m v_{H^m f}(x)\}^2 dx \tag{2.3.4}
 \end{aligned}$$

Na obtenção de (2.3.4), usamos a continuidade de

$$\{D^{m-\alpha} f(x) - D^{m-\alpha} v_{H^m f}(x)\} D^{m+\alpha-1} v_{H^m f}(x) \quad \text{em} \quad [a, b]$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, m-1$.

Não impusemos nenhuma outra exigência além de $V_{H^m} f(x)$ ser uma *spline* polinomial de grau $2m-1$ e $f(x) \in PC^{m,2}(a,b)$.

A equação (2.3.4) é a *identidade fundamental* para uma *spline* polinomial simples de grau $2m-1$ sobre a malha Δ .

Como Corolário da equação (2.3.1) do Teorema 2.3.1 obtemos a chamada *Primeira Relação Integral*

Corolário 2.3.1

Se $f \in PC^{m,2}(I)$ e $V_{H^m} f \equiv V_{H^m} f^m$ onde

$$f_1^j \equiv D^j f(x_1) \quad \text{e} \quad D^j V_{H^m} f(x_1) \equiv f_1^j ; \quad 0 \leq i \leq N+1 ; \quad 0 \leq j \leq m-1$$

então

$$\|D^m V_{H^m} f\|_2^2 + \|D^m V_{H^m} f - D^m f\|_2^2 = \|D^m f\|_2^2 \quad (2.3.5)$$

O resultado segue imediatamente da identidade fundamental: (equação (2.3.4)).

Usando o mesmo tipo de integração por partes podemos provar o seguintes resultado:

Teorema 2.3.2

Se $g \in PC^{2m,2}(I)$; $g(x_i) = f_i$ e $D^j g(x_i) = f_i^j$
para $0 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq m-1$, então

$$\|D^m(g - v_{H^m} f)\|_2^2 = \langle g - v_{H^m} f, D^{2m} g \rangle_2 \quad (2.3.6)$$

Para o caso especial em que $f_i = f(x_i)$ e
 $f_i^j = D^j f(x_i)$ para $0 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq m-1$ e $g = f$ obtemos a chamada *Segunda Relação Integral*.

Prova

$$\begin{aligned} \|D^m(g - v_{H^m} f)\|_2^2 &= \int_a^b [D^m(g(x) - v_{H^m} f(x))]^2 dx \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} [D^m(g(x) - v_{H^m} f(x))]^2 dx \end{aligned}$$

integrando por partes m vezes; obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} [D^m(g(x) - v_{H^m} f(x))]^2 dx &= \\ &= \sum_{\alpha=1}^m (-1)^{\alpha+1} \{D^{m-\alpha} g(x) - D^{m-\alpha} v_{H^m} f(x)\} \{D^{m+\alpha-1} g(x) \\ &\quad - D^{m+\alpha-1} v_{H^m} f(x)\} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^m \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{g(x) - v_{H^m f}(x)\} \{D^{2m}g(x) - D^{2m}v_{H^m f}(x)\} dx \\
 & = (-1)^m \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{g(x) - v_{H^m f}(x)\} D^{2m}g(x) dx
 \end{aligned}$$

pelo fato de $D^{2m}v_{H^m f}(x) = 0$, pois, $v_{H^m f}(x)$ é um polinômio de grau $2m-1$, e as primeiras somas se anulam devido às condições:

$$D^j g(x_i) - D^j v_{H^m f}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq m-1; \quad 0 \leq i \leq N+1$$

e assim o resultado segue:

Teorema 2.3.3

Se $f \in PC^{m,2}(I)$, então

$$\|D^j(f - v_{H^m f})\|_2 \leq \pi^{j-m} h^{m-j} \|D^m f\|_2; \quad 0 \leq j \leq m. \quad (2.3.7)$$

Prova

Para o caso em que $j = m$; obtemos

$$\|D^m(f - v_{H^m f})\|_2 \leq \|D^m f\|_2 \quad (2.3.8)$$

que segue diretamente da *Primeira Relação Integral*, (equação (2.3.5)).

Para o caso em que $0 \leq j \leq m-1$, notemos que

$$D^j f(x_i) - D^j v_{H^m f}(x_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1$$

e aplicando a desigualdade de Rayleig-Ritz (Teorema 1.3) para:

1) $j = m-1$, temos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^{m-1}(f(x) - v_{H^m f}(x)))^2 dx \leq \pi^{-2} h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^m(f(x) - v_{H^m f}(x)))^2 dx \quad (2.3.9)$$

para todo $0 \leq i \leq N$.

Somando-se ambos os membros da desigualdade (2.3.9) com respeito a i de 0 até N e tomando-se a raiz quadrada de ambos os membros da desigualdade resultante, obtemos

$$\|D^{m-1}(f - v_{H^m f})\|_2 \leq \pi^{-1} h \|D^m(f - v_{H^m f})\|_2$$

usando agora a desigualdade (2.3.8) para limitar o lado direito da desigualdade acima obtemos

$$\|D^{m-1}(f - v_{H^m f})\|_2 \leq \pi^{-1} h \|D^m f\|_2, \quad \text{portanto (2.3.7) é válida}$$

para $j = m-1$.

2) $j = m-2$, temos: (usaremos duas vezes a desigualdade de Rayleigh-Ritz).

$$\begin{aligned} & \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^{m-2}(f(x) - v_{H^m} f(x)))^2 dx \\ & \leq \pi^{-2} h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^{m-1}(f(x) - v_{H^m} f(x)))^2 dx \\ & \leq \pi^{-4} h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^m(f(x) - v_{H^m} f(x)))^2 dx \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito para $j = m-1$, obtemos:

$$||D^{m-2}(f - v_{H^m} f)||_2 \leq \pi^{-2} h^2 ||D^m f||_2$$

e assim (2.3.7) é válida para $j = m-2$.

E assim sucessivamente, obtemos:

m) $j = 0$ (usando m vezes a desigualdade de Rayleigh-Ritz).

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - v_{H^m} f(x))^2 dx \leq \pi^{-2m} h^{2m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^m(f(x) - v_{H^m} f(x)))^2 dx$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$||f - v_{H^m} f||_2 \leq \pi^{-m} h^m ||D^m f||_2$$

e assim (2.3.7) é válida para $0 \leq j \leq m$.

Teorema 2.3.4

Se $f \in PC^{2m,2}(I)$ então

$$\|D^j(f - \nu_{H^m} f)\|_2 \leq \pi^{j-2m} h^{2m-j} \|D^{2m} f\|_2 \quad ; \quad 0 \leq j \leq m \quad (2.3.10)$$

Prova

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz à *Segunda Relação Integral* (equação (2.3.6)), temos

$$\|D^m(f - \nu_{H^m} f)\|_2^2 \leq \|D^{2m} f\|_2 \|f - \nu_{H^m} f\|_2 \quad (2.3.11)$$

Pelo Teorema 2.3.3, temos que

$$\|f - \nu_{H^m} f\|_2 \leq \pi^{-m} h^m \|D^m(f - \nu_{H^m} f)\|_2$$

Usando essa desigualdade para limitar o lado direito de (2.3.11), obtemos:

$$\|D^m(f - \nu_{H^m} f)\|_2^2 \leq \pi^{-m} h^m \|D^{2m} f\|_2 \|D^m(f - \nu_{H^m} f)\|_2$$

$$\|D^m(f - \nu_{H^m} f)\|_2 \leq \pi^{-m} h^m \|D^{2m} f\|_2 \quad (2.3.12)$$

Assim, a desigualdade (2.3.10) é válida para $j = m$.

Do Teorema 2.3.3, temos que, para $j = m-1$

$$\|D^{m-1}(f - \nu_{H^m} f)\|_2 \leq \pi^{-1} h \|D^m(f - \nu_{H^m} f)\|_2$$

Usando agora a desigualdade (2.3.12) para limitar o lado direito da desigualdade acima obtemos

$$\|D^{m-1}(f - v_{H^m}f)\|_2 \leq \pi^{-(m+1)} h^{m+1} \|D^{2m}f\|_2$$

e assim a desigualdade (2.3.11) é válida.

E assim, sucessivamente obtemos as demais desigualdades; para $j = 0$, temos pelo Teorema 2.3.3 que

$$\|f - v_{H^m}f\|_2 \leq \pi^{-m} h^m \|D^m(f - v_{H^m}f)\|_2, \text{ e usando a desigualdade}$$

de (2.3.12), obtemos

$$\|f - v_{H^m}f\|_2 \leq \pi^{-2m} h^{2m} \|D^{2m}f\|_2$$

e assim a desigualdade (2.3.10) é válida para todo $0 \leq j \leq m$.

Daremos agora um limite para o erro na norma L_∞ .

Teorema 2.3.5

Se $f \in PC^{2m,\infty}(I)$, então existe uma constante positiva, C , tal que

$$\|f - v_{H^m}f\|_\infty \leq C h^{2m} \|D^{2m}f\|_\infty$$

Prova

Para i fixo, $0 \leq i \leq N$, seja

$$\omega(x) \equiv (x-x_i)(x-x_{i+1}).$$

Para cada $x \in [x_i, x_{i+1}]$, existe $\xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$

tal que

$$e(x) \equiv f(x) - \nu_{H^m} f(x) \equiv \frac{1}{(2m)!} D^{2m} f(\xi_x) \omega^m(x)$$

De fato, se $x = x_i$ ou $x = x_{i+1}$, qualquer ponto ξ_x satisfaz.

Por outro lado, para \tilde{x} fixo, escolhemos λ tal que

$$\theta(\tilde{x}) \equiv e(\tilde{x}) - \lambda \omega^m(\tilde{x}) = 0$$

Mas, contando a multiplicidade, $\theta(x)$ tem $2m+1$ zeros em $[x_i, x_{i+1}]$ e portanto pelo Teorema de Rolle (Teorema 1.2) existe um ponto $\xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que:

$$D^{2m} \theta(\xi_x) = 0$$

mas

$$D^{2m} \theta(\xi_x) = D^{2m}(f - \nu_{H^m} f) - \lambda D^{2m} g = 0$$

onde

$$g = \omega^m = (x-x_i)^m (x-x_{i+1})^m$$

mas

$$D^{2m}(f - \nu_{H^m} f) = D^{2m} f - D^{2m} \nu_{H^m} f = D^{2m} f$$

desde que $\nu_{H^m} f$ é um polinômio de grau $2m-1$ em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; $0 \leq i \leq N$.

Então

$$D^{2m} \theta(\xi_x) = D^{2m} f(\xi_x) - \lambda D^{2m} g = 0$$

mas

$$D^{2m}g = D^{2m}[(x-x_i)^m(x-x_{i+1})^m] = (2m)!$$

portanto

$$\lambda = \frac{1}{(2m)!} D^{2m}f(\xi_x)$$

Assim,

$$\max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |e(x)| \leq \frac{1}{(2m)!} \|D^{2m}f\|_{\infty} \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |\omega^m(x)|$$

$$\text{Calculemos agora } \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |\omega^m(x)|$$

$$Dg(x) = D\omega^m(x) = D[(x-x_i)^m(x-x_{i+1})^m] = 0$$

$$\Rightarrow Dg(x) = m(x-x_i)^{m-1}(x-x_{i+1})^m + m(x-x_i)^m(x-x_{i+1})^{m-1} = 0$$

Para $x \neq x_i$ e $x \neq x_{i+1}$, temos:

$$Dg(x) = \frac{m(x-x_i)^{m-1}(x-x_{i+1})^m + m(x-x_i)^m(x-x_{i+1})^{m-1}}{m(x-x_i)^{m-1}(x-x_{i+1})^{m-1}} = 0$$

$$\Rightarrow Dg(x) = (x-x_{i+1}) + (x-x_i) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Portanto

$$\max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |\omega^m(x)| = \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |(x-x_i)^m(x-x_{i+1})^m| =$$

$$= \left[\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x_i \right)^m \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x_{i+1} \right)^m \right]$$

$$= \left[\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^m \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right)^m \right] = \left[\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^{2m} \right] = \frac{h^{2m}}{2^{2m}}$$

Assim

$$\max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |e(x)| \leq \frac{1}{(2m)!} \|D^{2m}f\|_{\infty} \frac{h^{2m}}{2^{2m}}$$

portanto

$$\|f - V_{H^m} f\|_{\infty} \leq \frac{h^{2m}}{2^{2m} (2m)!} \|D^{2m}f\|_{\infty}$$

portanto

$$\|f - V_{H^m} f\|_{\infty} \leq C h^{2m} \|D^{2m}f\|_{\infty}$$

onde

$$C = \frac{1}{2^{2m} (2m)!}$$

Teorema 2.3.6

Se $f \in PC^{m,\infty}(I)$, então existe uma constante positiva, C , tal que

$$\|f - V_{H^m} f\|_{\infty} \leq C h^m \|D^m f\|_{\infty}$$

Prova

Para i fixo, $0 \leq i \leq N$, seja

$$\omega(x) \equiv (x-x_i)(x-x_{i+1}).$$

Para cada $x \in [x_i, x_{i+1}]$, existe $\xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que

$$e(x) \equiv f(x) - V_{H^m} f(x) \equiv \frac{1}{m!} D^m f(\xi_x) \omega^{\frac{m}{2}}(x)$$

De fato, se $x = x_i$ ou $x = x_{i+1}$ qualquer ponto ξ_x satisfaz. Por outro lado, para \tilde{x} fixo, escolhemos λ tal que:

$$\theta(\tilde{x}) \equiv e(\tilde{x}) - \lambda \omega^{\frac{m}{2}}(\tilde{x}) = 0$$

Mas, contando a multiplicidade, $\theta(x)$ tem $m+1$ zeros em $[x_i, x_{i+1}]$ e portanto pelo Teorema 1.2 (Generalização do Teorema de Rolle), existe um ponto $\xi_x \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que

$$D^m \theta(\xi_x) = 0.$$

mas

$$D^m \theta(\xi_x) = D^m(f - V_{H^m} f) - \lambda D^m g = 0$$

$$\text{onde } g = \omega^{\frac{m}{2}} = (x-x_i)^{\frac{m}{2}} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}}$$

mas

$$D^m(f - V_{H^m} f) = D^m f - D^m V_{H^m} f = D^m f$$

desde que $V_{H^m} f$ é um polinômio de grau $m-1$ em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N$

Então

$$D^m \theta(\xi_x) = D^m f(\xi_x) - \lambda D^m g = 0$$

mas

$$D^m g = D^m \left[(x-x_i)^{\frac{m}{2}} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}} \right] = m!$$

portanto

$$\lambda = \frac{1}{m!} D^m f(\xi_x)$$

Assim

$$\max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |e(x)| \leq \frac{1}{m!} \|D^m f\|_{\infty} \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left| \omega^{\frac{m}{2}}(x) \right|$$

$$\text{Calculemos agora } \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left| \omega^{\frac{m}{2}}(x) \right|$$

$$Dg(x) = D\omega^{\frac{m}{2}}(x) = D \left[(x-x_i)^{\frac{m}{2}} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow Dg(x) = \frac{m}{2}(x-x_i)^{\frac{m}{2}-1} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}} + \frac{m}{2}(x-x_i)^{\frac{m}{2}} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}-1} = 0$$

Para $x \neq x_i$ e $x \neq x_{i+1}$

$$Dg(x) = \frac{\frac{m}{2}(x-x_i)^{\frac{m}{2}-1} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}} + \frac{m}{2}(x-x_i)^{\frac{m}{2}} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}-1}}{\frac{m}{2}(x-x_i)^{\frac{m}{2}-1} (x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}-1}} = 0$$

$$\Rightarrow Dg(x) = (x-x_{i+1}) + (x-x_i) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

portanto

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |\omega^{\frac{m}{2}}(x)| &= \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |(x-x_i)^{\frac{m}{2}}(x-x_{i+1})^{\frac{m}{2}}| \\ &= \left[\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x_i \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x_{i+1} \right)^{\frac{m}{2}} \right] \\ &= \left[\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right)^{\frac{m}{2}} \right] = \left[\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^m \right] \\ &= \frac{h^m}{2^m} \end{aligned}$$

Assim

$$\max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |e(x)| \leq \frac{1}{m!} \|D^m f\|_{\infty} \frac{h^m}{2^m}$$

Como $e(x) = f(x) - V_{H^m} f(x)$; obtemos:

$$\|f - V_{H^m} f\|_{\infty} \leq \frac{1}{m!} \frac{h^m}{2^m} \|D^m f\|_{\infty}$$

portanto

$$\|f - V_{H^m} f\|_{\infty} \leq C h^m \|D^m f\|_{\infty}$$

onde $C = \frac{1}{2^{2m}(m)!}$

Teorema 2.3.7

Seja $V_{H^m(\rho)} = V_{H^m(\Delta)} V_{H^m(\Delta_Y)}$.

Se $f \in PC^{2m,\infty}(U)$, então existe uma constante positiva, C , tal que:

$$||f - V_{H^m(\rho)} f||_{\infty} \leq C(h^{2m} ||D_x^{2m} f||_{\infty} + h^m k^m ||D_x^m D_y^m f||_{\infty} + k^{2m} ||D_y^{2m} f||_{\infty})$$

Prova

Temos

$$\begin{aligned} ||f - V_{H^m(\rho)} f||_{\infty} &= ||f - V_{H^m(\Delta)} f + V_{H^m(\Delta)} f - V_{H^m(\rho)} f||_{\infty} \\ &\leq ||f - V_{H^m(\Delta)} f||_{\infty} + ||V_{H^m(\Delta)} (f - V_{H^m(\Delta_Y)} f)||_{\infty} \\ &\leq ||f - V_{H^m(\Delta)} f||_{\infty} + ||V_{H^m(\Delta)} (f - V_{H^m(\Delta_Y)} f)||_{\infty} \\ &\quad - (f - V_{H^m(\Delta_Y)} f)||_{\infty} + ||f - V_{H^m(\Delta_Y)} f||_{\infty} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Pelo Teorema 2.3.5, temos:

$$||f - V_{H^m(\Delta)} f||_{\infty} \leq \frac{1}{2^{2m}(2m)!} h^{2m} ||D_x^{2m} f||_{\infty} \quad (2.3.14)$$

e

$$\|f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f\|_\infty \leq \frac{1}{2^{2m}(2m)!} k^{2m} \|D_Y^{2m} f\|_\infty \quad (2.3.15)$$

Consideremos agora,

$$\|\nu_{H^m(\Delta)}(f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f) - (f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f)\|_\infty$$

Seja $g = f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f$; portanto $g \in PC^{m,\infty}(I_X)$.

Pelo Teorema 2.3.6, temos:

$$\|\nu_{H^m(\Delta)} g - g\|_\infty \leq \frac{1}{2^m(m)!} h^m \|D_X^m g\|_\infty$$

portanto

$$\begin{aligned} & \|\nu_{H^m(\Delta)}(f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f) - (f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f)\|_\infty \\ & \leq \frac{1}{2^m(m)!} h^m \|D_X^m (f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f)\|_\infty \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

mas

$$D_X^m (f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f) = D_X^m f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} D_X^m f$$

$$\text{desde que } D_X^m \nu_{H^m(\Delta_Y)} f = \nu_{H^m(\Delta_Y)} D_X^m f$$

Seja $z = D_X^m f$, portanto $z \in PC^{m,\infty}(I_Y)$

então

$$||D_x^m f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} D_x^m f||_\infty = ||z - \nu_{H^m(\Delta_Y)} z||_\infty$$

usando o Teorema 2.3.6, temos:

$$||z - \nu_{H^m(\Delta_Y)} z||_\infty \leq \frac{1}{2^m(m)!} k^m ||D_Y^m z||_\infty$$

portanto

$$||D_x^m f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} D_x^m f||_\infty \leq \frac{1}{2^m(m)!} k^m ||D_Y^m D_x^m f||_\infty$$

Substituindo em (2.3.16), obtemos:

$$||\nu_{H^m(\Delta)} (f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f) - (f - \nu_{H^m(\Delta_Y)} f)||_\infty$$

$$\leq \frac{1}{2^m(m)!} h^m \frac{1}{2^m(m)!} k^m ||D_x^m D_Y^m f||_\infty$$

$$\leq \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} h^m k^m ||D_x^m D_Y^m f||_\infty \quad (2.3.17)$$

Substituindo agora (2.3.14), (2.3.15) e (2.3.17) em (2.3.13), temos que

$$||f - \nu_{H^m(\rho)} f||_\infty \leq \frac{1}{2^{2m}(2m)!} h^{2m} ||D_x^{2m} f||_\infty$$

$$+ \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} h^m k^m ||D_x^m D_Y^m f||_\infty + \frac{1}{2^{2m}(2m)!} k^{2m} ||D_Y^{2m} f||_\infty$$

Mas $(m!)^2 < (2m)!$, assim

$$\begin{aligned} ||f - v_{H^m(\rho)} f||_{\infty} &\leq \frac{1}{2^{2m} (m!)^2} \left[h^{2m} ||D_x^{2m} f||_{\infty} + h^m k^m ||D_x^m D_y^m f||_{\infty} \right. \\ &\quad \left. + k^{2m} ||D_y^{2m} f||_{\infty} \right] \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} ||f - v_{H^m(\rho)} f||_{\infty} &\leq C \left[h^{2m} ||D_x^{2m} f||_{\infty} + h^m k^m ||D_x^m D_y^m f||_{\infty} \right. \\ &\quad \left. + k^{2m} ||D_y^{2m} f||_{\infty} \right] \end{aligned}$$

onde $C = \frac{1}{2^{2m} (m!)^2}$

CAPÍTULO 3

EQUAÇÃO INTEGRAL LINEAR

Neste capítulo discutiremos o método do núcleo de de generado para aproximação de soluções da equação integral de Fredholm do tipo II. Em particular, consideraremos o uso de po linômios de duas variáveis por pedaços para aproximarmos o núcleo.

A equação integral de Fredholm do tipo II é da forma

$$u(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy + f(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

onde $K(x,y)$ e $f(x)$ são funções contínuas de valor real dadas e u é a função incógnita.

O núcleo $K(x,y)$ é dito ser degenerado se tem a forma:

$$K(x,y) = \sum_{\ell=0}^{N+3} \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \phi_{\ell}(x) \psi_k(y) \quad (3.2)$$

onde ϕ_{ℓ} e ψ_k são funções contínuas de valor real.

O operador com núcleo do tipo (3.2) transforma to da função $u \in L_2([0,1],R)$ [espaço de Hilbert das funções definidas em $[0,1]$ com valores reais de quadrado integrável segundo Lebesgue], na soma:

$$\sum_{\ell=0}^{N+3} \phi_{\ell}(x) \int_0^1 \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) u(y) dy$$

isto é, num elemento do sub-espço de dimensão finita gerado pelas funções ϕ_{ℓ} , $\ell = 0, 1, \dots, N+3$.

Notemos que na expressão (3.2) as funções $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N+3}$ podem ser consideradas linearmente independentes. Com efeito, se não fosse assim, poderíamos, exprimindo cada uma das funções ϕ_{ℓ} como combinação linear das independentes, representar esse mesmo núcleo $K(x, y)$ como uma soma de um número menor de somandos do tipo $\tilde{\phi}_j(x), \tilde{\psi}_t(y)$ de maneira que as funções $\tilde{\phi}_j(x)$ sejam sempre linearmente independentes.

Busquemos, pois, a solução da equação (3.1) com núcleo degenerado (3.2) onde as funções $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N+3}$ são linearmente independentes.

Substituindo em (3.1), $K(x, y)$ pela soma correspondente obtemos:

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{N+3} \phi_{\ell}(x) \int_0^1 \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) u(y) dy + f(x) \quad (3.3)$$

ou

$$u(x) = f(x) + \sum_{\ell=0}^{N+3} a_{\ell} \phi_{\ell}(x) \quad (3.4)$$

onde

$$a_{\ell} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{N+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) u(y) dy \quad (3.5)$$

A equação (3.4) determina a estrutura de $u(x)$, e resta somente determinar o vetor coeficiente α .

Substituindo (3.4) em (3.1) temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N+3} \alpha_i \phi_i(x) + f(x) &= \\ &= \sum_{\ell=0}^{N+3} \phi_{\ell}(x) \int_0^1 \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) \left[\sum_{j=0}^{N+3} \alpha_j \phi_j(y) + f(y) \right] dy + f(x) \end{aligned}$$

ou

$$\sum_{i=0}^{N+3} \alpha_i \phi_i(x) = \sum_{\ell=0}^{N+3} \phi_{\ell}(x) \int_0^1 \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) \left[\sum_{j=0}^{N+3} \alpha_j \phi_j(y) + f(y) \right] dy \quad (3.6)$$

portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N+3} \alpha_i \phi_i(x) &= \sum_{\ell=0}^{N+3} \phi_{\ell}(x) \left[\int_0^1 \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) \sum_{j=0}^{N+3} \alpha_j \phi_j(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \sum_{k=0}^{M+3} \beta_{\ell k} \psi_k(y) f(y) dy \right] \end{aligned}$$

Como as funções ϕ_i são, por suposição, linearmente independente, esta igualdade implica na igualdade dos respectivos coeficientes de $\phi_i(x)$. Portanto para $0 \leq i \leq n$ temos

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{M+3} \int_0^1 \beta_{ik} \psi_k(y) \sum_{j=0}^{N+3} \alpha_j \phi_j(y) dy + \sum_{k=0}^{M+3} \int_0^1 \beta_{ik} \psi_k(y) f(y) dy \quad (3.7)$$

Fazendo

$$b_{ij} \equiv \sum_{k=0}^{M+3} \int_0^1 \beta_{ik} \psi_k(y) \phi_j(y) dy \quad ; \quad 0 \leq i, j \leq N+3 \quad (3.8)$$

e

$$K_i \equiv \sum_{k=0}^{M+3} \int_0^1 \beta_{ik} \psi_k(y) f(y) dy \quad ; \quad 0 \leq i \leq N+3 \quad (3.9)$$

obtemos:

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{M+3} b_{ij} \alpha_j + K_i \quad ; \quad 0 \leq i \leq N+3 \quad (3.10)$$

Temos assim obtido para os coeficientes de α_i um sistema de equações lineares; o qual podemos colocar na forma matricial

$$A\alpha = K \quad (3.11)$$

$$\text{onde } A = I - B \quad ; \quad B = [b_{ij}] \quad ; \quad K = [K_i]$$

Resolvendo, obtemos a função

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{N+3} \alpha_{\ell} \phi_{\ell}(x) + f(x) \quad (3.12)$$

Esta função satisfaz a equação integral (3.1) já que todos os passos, mediante os quais passamos da equação (3.1) ao sistema (3.10) podem ser realizados em ordem contrária.

Logo, a resolução de uma equação integral de núcleo degenerado se reduz à resolução do correspondente sistema (3.11) de equações algébricas lineares.

Para sistemas de equações lineares são bem conhecidas as condições de existência e unicidade de solução.

1. Um sistema de equações algébricas lineares

$$Tx = y \quad (T = [a_{ik}] ; \quad x = (x_1, \dots, x_n) ; \quad y = (y_1, \dots, y_n))$$

tem solução quando e somente quando, o vetor y é ortogonal a toda solução do sistema homogêneo conjugado

$$T^*z = 0 \quad (T^* = [a_{ki}]).$$

2. Se o determinante da matriz T é diferente de zero, a equação $Tx = y$ tem solução única qualquer que seja y . Por outro lado, se o determinante de T é igual a zero, a equação homogênea $Tx = 0$ tem soluções não nulas.

3. Como a matriz T e a matriz T^* possuem o mesmo posto, os sistemas homogêneos $Tx = 0$ e $T^*z = 0$ tem o mesmo número de soluções linearmente independentes.

Devido a relação que, como vimos, existe entre equações integrais de núcleo degenerado e sistemas de equações algébricas lineares, essas proposições podem ser consideradas como teoremas referentes a solução de equações integrais degeneradas.

Em geral, $K(x,y)$ é não degenerado, mas podemos aproximá-lo por um polinômio de duas variáveis por pedaços, $P(x,y)$, o qual é degenerado. Neste trabalho, nos concentraremos na aproximação do núcleo por interpolação. Entretanto, é claro que podemos ter boas aproximações pela técnica dos mínimos quadrados. Além disso, em problemas nos quais $K(x,y)$ é determinado experimentalmente, esta última técnica é preferível.

Primeiramente estudaremos a questão da não singularidade da matriz A para o núcleo degenerado $P(x,y)$ aproximando $K(x,y)$. Se reescrevemos (3.1) na forma de operador como

$$(I - K)u = f \quad (3.13)$$

e a equação integral aproximada (a qual se reduz a (3.11) como

$$(I - P)\bar{u} = f \quad (3.14)$$

então mostramos que se $\|K - P\|_{\infty} \equiv \max_{0 \leq x, y \leq 1} |K(x,y) - P(x,y)|$ é

suficientemente pequeno, e se $I - K$ é inversível, isto é,

$(I - K)u = f$ tem uma única solução $u(x) \in C[0,1]$ para todo

$f \in C[0,1]$, e se lá existe uma constante positiva, a qual de

notaremos por $\|(I - K)^{-1}\|_{\infty}$, independente da f , tal que

$\|u\|_{\infty} \leq \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$ para todo $f \in C[0,1]$ então $I - P$ é inversível.

(Observação: A Teoria acima encontra-se em [7] e [13]).

Teorema 3.1

Se $I - K$ é inversível e $K(x,y) \in PC^{2m,\infty}(U)$, então existe uma constante positiva, C , tal que se

$$q_{h,k}^m \equiv C(h^{2m} \|D_x^{2m} K\|_\infty + h^m k^m \|D_x^m D_y^m K\|_\infty + k^{2m} \|D_y^{2m} K\|_\infty) \times \\ \times \|(I - K)^{-1}\|_\infty < 1,$$

então $I - V_{H^m(\rho)} K$ é inversível e

$$\|u - \bar{u}_{H^m}\|_\infty \leq q_{h,k}^m (1 - q_{h,k}^m)^{-1} \|u\|_\infty$$

isto é, temos um esquema de aproximação de ordem $2m$.

Prova

Temos que $K(x,y) \in PC^{2m,\infty}(U)$, então pelo Teorema 2.3.7, existe uma constante positiva, C , tal que

$$\|K - V_{H^m(\rho)} K\|_\infty \leq C(h^{2m} \|D_x^{2m} K\|_\infty + h^m k^m \|D_x^m D_y^m K\|_\infty \\ + k^{2m} \|D_y^{2m} K\|_\infty)$$

Se $I - K$ é inversível e se

$$\|K - V_{H^m(\rho)} K\|_\infty \|(I - K)^{-1}\|_\infty \equiv q_{h,k}^m < 1$$

então devemos provar que $I - V_{H^m(\rho)} K$ é inversível.

De fato, devemos mostrar que para toda

$f \in C[0,1]$, $(I - V_{H^m(\rho)} K)u = f$ tem uma única solução em

$C[0,1]$. Seja $g \in C[0,1]$ tal que $(I - K)g = f$ e $\|g\|_{\infty} \leq \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$. Então, é suficiente considerar

$$(I - K)^{-1}(I - V_{H^m(\rho)}K)u = g$$

e mostrar que esta tem uma única solução.

Mas

$$\begin{aligned} (I - K)^{-1}(I - V_{H^m(\rho)}K) &= \\ &= I - (I - K)^{-1} [(I - K) - (I - V_{H^m(\rho)}K)] \\ &= I - (I - K)^{-1}(V_{H^m(\rho)}K - K) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\|(I - K)^{-1}(K - V_{H^m(\rho)}K)\|_{\infty} \leq \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|K - V_{H^m(\rho)}K\|_{\infty} \equiv q_{h,k}^m < 1$$

Assim, se $W \equiv (I - K)^{-1}(V_{H^m(\rho)}K - K)$, queremos resolver $(I - W)u = g$ ou $u = Wu + g \equiv V(u)$ onde V satisfaz

$$\|V(u) - V(z)\|_{\infty} = \|W(u - z)\|_{\infty} \leq q_{h,k}^m \|u - z\|_{\infty}$$

e portanto pela Definição 1.4, $W = (I - K)^{-1}(V_{H^m(\rho)}K - K)$

é uma aplicação contração em $C[0,1]$.

Assim, pelo Teorema 1.6 (Perturbação da identidade)

$$(I - K)^{-1}(I - V_{H^m(\rho)}K) = I - (I - K)^{-1}(V_{H^m(\rho)}K - K)$$

é um homeomorfismo porque $(I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}K - K)$ é uma contração.

Portanto

$(I - K)^{-1}(I - \nu_{H^m(\rho)}K)$ é inversível, e

então

$$u = [(I - K)^{-1}(I - \nu_{H^m(\rho)}K)]^{-1} g$$

Mas

$$g = (I - K)^{-1}f$$

Assim

$$u = [(I - K)^{-1}(I - \nu_{H^m(\rho)}K)]^{-1} (I - K)^{-1}f$$

$$\Rightarrow \|u\|_{\infty} = \|[(I - K)^{-1}(I - \nu_{H^m(\rho)}K)]^{-1} (I - K)^{-1}f\|_{\infty}$$

$$\leq \|[(I - K)^{-1}(I - \nu_{H^m(\rho)}K)]^{-1}\|_{\infty} \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$$

$$= \|[I - (I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}K - K)]^{-1}\|_{\infty} \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|f\|_{\infty} (*)$$

$$\text{mas } \|(I - A)^{-1}\|_{\infty} \leq (1 - \|A\|_{\infty})^{-1} \quad (\text{ver [3] }).$$

$$\text{portanto } (*) \leq (1 - \|(I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}K - K)\|_{\infty})^{-1} \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$$

mas

$$\|(I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}K - K)\|_{\infty} \leq \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|\nu_{H^m(\rho)}K - K\|_{\infty} \equiv q_{h,k}^m < 1$$

portanto

$$\leq (1 - q_{h,k}^m)^{-1} \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$$

então

$$\|u\|_{\infty} < M ; \quad M = \text{constante}, \quad \forall f$$

portanto

$I - V_{H^m(\rho)} K$ é inversível

Agora provemos que:

$$\|u - \bar{u}_{H^m}\|_{\infty} \leq q_{h,k}^m (1 - q_{h,k}^m)^{-1} \|u\|_{\infty}$$

Temos

$$\begin{aligned} \bar{u}_{H^m} &= (I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1} f = (I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1} (I - K)u \\ &= (I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1} [(I - V_{H^m(\rho)} K) + (V_{H^m(\rho)} K - K)]u \\ &= u + (I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1} (V_{H^m(\rho)} K - K)u \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_{H^m} - u\|_{\infty} &= \|(I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1} (V_{H^m(\rho)} K - K)u\|_{\infty} \\ &\leq \|(I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1} (V_{H^m(\rho)} K - K)\|_{\infty} \|u\|_{\infty} \end{aligned}$$

mas,

$$(I - K)^{-1} (I - V_{H^m(\rho)} K) = I - (I - K)^{-1} (V_{H^m(\rho)} K - K)$$

$$\Rightarrow (I - K)^{-1} = [I - (I - K)^{-1} (V_{H^m(\rho)} K - K)] (I - V_{H^m(\rho)} K)^{-1}$$

$$\Rightarrow [I - (I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)]^{-1}(I - K)^{-1} = (I - \nu_{H^m(\rho)}^K)^{-1}$$

portanto

$$\begin{aligned} \|(I - \nu_{H^m(\rho)}^K)^{-1}\|_{\infty} &= \|[I - (I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)]^{-1}(I - K)^{-1}\|_{\infty} \\ &\leq \|[I - (I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)]^{-1}\|_{\infty} \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}_{H^m}\|_{\infty} &\leq \|(I - \nu_{H^m(\rho)}^K)^{-1}\|_{\infty} \|\nu_{H^m(\rho)}^K - K\|_{\infty} \|u\|_{\infty} \\ &\leq \|[I - (I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)]^{-1}\|_{\infty} \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \times \\ &\quad \times \|\nu_{H^m(\rho)}^K - K\|_{\infty} \|u\|_{\infty} \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \|[I - (I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)]^{-1}\|_{\infty} \\ \leq (1 - \|(I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)\|_{\infty})^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\|(I - K)^{-1}(\nu_{H^m(\rho)}^K - K)\|_{\infty} \leq \|(I - K)^{-1}\|_{\infty} \|\nu_{H^m(\rho)}^K - K\|_{\infty} \equiv q_{h,k}^m < 1$$

portanto

$$\|u - \bar{u}_{H^m}\|_{\infty} \leq (1 - q_{h,k}^m)^{-1} q_{h,k}^m \|u\|_{\infty}$$

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO NUMÉRICA

4.0 - Preliminares

Neste capítulo resolveremos uma equação integral de Fredholm do tipo II.

Seja

$$u(x) = \int_0^1 (1 + \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y) u(y) dy + f(x); \quad 0 \leq x \leq 1$$

onde

$$f(x) = \sin \pi x - \frac{2}{\pi} (1 + \cos^2 \pi x) - \frac{2}{3\pi}$$

cujas solução analítica é $u(x) = \sin \pi x$.

Para resolvermos esta equação, utilizando a teoria do capítulo 3, o núcleo deve ser degenerado mas nessa equação o núcleo $K(x,y) = 1 + \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y$ é não degenerado. Para transformá-lo em degenerado, utilizaremos função *spline* bi-cúbica e assim o núcleo terá a forma (3.2).

A solução da equação através de função *spline*, juntamente com os valores da solução exata, serão tabelados pelo programa ao final.

Construiremos graficamente a solução através de fun

ção *spline* juntamente com a solução exata, permitindo assim melhor avaliação da eficiência do algoritmo.

4.1 - Procedimento Computacional

Dado o número de intervalos, calcular:

- 1 - Os valores $K_{ij} = K(x_i, y_j)$; $P_{ij} = D_x K(x_i, y_j)$;
 $Q_{ij} = D_y K(x_i, y_j)$; $S_{ij} = D_x D_y K(x_i, y_j)$ a partir dos valores dados em (2.2.4).
- 2 - Os valores de P_{ij} , Q_{ij} , S_{ij} nos pontos de malhas não dados em (2.2.4), usando as equações (2.2.10) - (2.2.13).
- 3 - A inversa da matriz dada em (2.1.12).
- 4 - O produto da matriz inversa, obtida no item 3), pela matriz dada em (2.1.14).

Obs:- Os elementos dessa matriz produto formarão os elementos da função base.
- 5 - As funções base $\phi_i(x)$ dadas em (2.1.16).
- 6 - O valor de $f(x)$ em todos os pontos x_i .
- 7 - A partir de (2.2.5) os valores β_{ij} .
- 8 - A partir de (3.8) os valores de b_{ij} , onde $[b_{ij}] \equiv B$.

9 - A partir de (3.9) os valores de K_i ; onde $[K_i] \equiv K$.

Observação: Os elementos b_{ij} do item 8 e os elementos K_i do item 9 serão calculados através da regra de Simpson 1/3 generalizada.

10 - A solução do sistema $(I-B)\alpha = K$.

11 - O tabelamento da solução dada por (3.12).

4.2 - Listagem e Resultados do Programa Relativo à Aplicação Numérica.

// JOB T

NEIDE

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 0016 0016 0000

V2 M10 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// * C.P.D. - E.E.S.C. - U.S.P.

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
  SUBROUTINE FTDIA(TDG,N,H)
  DIMENSION TDG(9,9)
  DO 2 I = 1,N
  DO 1 J = 1,N
1   TDG(I,J) = 0.
2   TDG(I,I) = 4.*H
  DO 3 I = 2,N
  TDG(I-1,I) = H
3   TDG(I,I-1) = H
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR FTDIA
COMMON 0 VARIABLES 4 PROGRAM 112

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA FTDIA
CART ID 0016 DB ADDR 55A6 DB CNT 0008

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
  SUBROUTINE EGSTI(TI,TDG,N)
  DIMENSION TDG(9,9),TI(9)
  DO 1 I = 2,N
1   TI(I) = TI(I)-TDG(I,I-1)*TI(I-1)/TDG(I-1,I-1)
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR EGSTI
COMMON 0 VARIABLES 6 PROGRAM 68

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0007 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA EGSTI
CART ID 0016 DB ADDR 55AE DB CNT 0006

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
  SUBROUTINE RSTEG(TI,N1,A,H,X,Y,J)
  DIMENSION TI(9),A(13,13)
  DO 1 I = 1,N1
1   TI(I) = 3.*(A(I+2,J)-A(I,J))
  TI(1) = TI(1)-H*X
  TI(N1) = TI(N1)-H*Y
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

```
EXTENDED PRECISION
CORE REQUIREMENTS FOR RSTEG
COMMON      0  VARIABLES      4  PROGRAM      100
RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0008 (HEX)
END OF COMPILATION
// DUP
*STORE      WS  UA  RSTEG
CART ID 0016  DB ADDR 55B4  DB CNT  0008
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE RSTGE (TI,N1,A,H,X,Y,I)
      DIMENSION TI(9),A(13,13)
      DO 1 J = 1,N1
1      TI(J) = 3.*(A(I,J+2)-A(I,J))
      TI(1) = TI(1) -H*X
      TI(N1) = TI(N1) -H*Y
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

```
CORE REQUIREMENTS FOR RSTGE
COMMON      0  VARIABLES      4  PROGRAM      100
RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0008 (HEX)
END OF COMPILATION
// DUP
*STORE      WS  UA  RSTGE
CART ID 0016  DB ADDR 55BC  DB CNT  0008
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE SCEGS(TI,N1,TDG,V)
      DIMENSION TI(9),TDG(9,9),V(9)
      CALL EGST1(TI,TDG,N1)
      V(N1) = TI(N1)/TDG(N1,N1)
      IF ( N1-1)3,3,1
1      N2 = N1-1
      DO 2 I = 1,N2
      K = N1-I
2      V(K) = (TI(K) - TDG(K,K+1)*V(K+1))/TDG(K,K)
3      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

```
CORE REQUIREMENTS FOR SCEGS
COMMON      0  VARIABLES      8  PROGRAM      130
RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0009 (HEX)
END OF COMPILATION
// DUP
*STORE      WS  UA  SCEGS
CART ID 0016  DB ADDR 55C4  DB CNT  0009
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
      FUNCTION VPFI(V,X)
      REAL V(4)
      VPFI = V(1)
      DO 1 I = 2,4
```



```
1 VPFI = VPFI+V(I)*X**(I-1)
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR VPFI
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 56

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000B (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```
*STORE WS UA VPFI
CART ID 0016 DB ADDR 55CD DB CNT 0005
```

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```
FUNCTION SXXM1(H,V,W,X,NINT)
  REAL V(4),W(4)
  JDEI(I) = 2*(I-1/2*2)
  N = 2*NINT
  HL = H/N
  S = 0.
  SXXM1 = VPFI(V,X+H)*VPFI(W,X+H)+VPFI(V,X)*VPFI(W,X)
  M = N-1
  DO 1 I = 1,M
    G = HL*I+X
    1 S = S+VPFI(V,G)*VPFI(W,G)*(JDEI(I)+2)
  SXXM1 = (SXXM1+S)*HL/3.
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SXXM1
COMMON 0 VARIABLES 30 PROGRAM 182

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 003D (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```
*STORE WS UA SXXM1
CART ID 0016 DB ADDR 55D2 DB CNT 000E
```

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```
FUNCTION CKTPZ(J,H,X,V,F,L)
  REAL V(4),F(201)
  JDEI(I) = 2*(I-1/2*2)
  N = 2*J
  S = 0.
  M = N-1
  HL = H/N
  DO 1 I = 1,M
    G = X+HL*I
    K = I+L
    1 S = S+VPFI(V,G)*F(K)*(JDEI(I)+2)
  CKTPZ = S
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR CKTPZ
COMMON 0 VARIABLES 20 PROGRAM 128

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0030 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA CKTPZ
CART ID 0016 DB ADDR 55EG DB CNT 000A

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```
SUBROUTINE DECOM(A,N,M)
  REAL A(13,14)
  L = N-1
  DO 9 K = 1,L
    XMAX = 0.
    IMAX = 0
    DO 2 I = K,N
      IF(XMAX-ABS(A(I,K)))1,2,2
1    XMAX = ABS(A(I,K))
      IMAX = I
2    CONTINUE
    IF(IMAX)3,3,5
3    WRITE(5,4)
4    FORMAT(///,5X,'MATRIZ DO SISTEMA (3,11) E SINGULAR')
    CALL EXIT
5    IF(IMAX-K)6,8,6
6    DO 7 J = K,M
      Z = A(K,J)
      A(K,J) = A(IMAX,J)
      A(IMAX,J) = Z
7    CONTINUE
8    L1 = K+1
    DO 9 I = L1,N
      PIVOT = -A(I,K)/A(K,K)
      DO 9 J = L1,M
9    A(I,J) = A(I,J)+A(K,J)*PIVOT
    RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR DECOM

COMMON 0 VARIABLES 18 PROGRAM 272

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0030 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA DECOM
CART ID 0016 DB ADDR 55EA DB CNT 0012

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```
SUBROUTINE SOLUC(A,ALFA,N,M)
  REAL A(13,14),ALFA(13)
  L = N-1
  ALFA(N) = A(N,M)/A(N,N)
  DO 2 K = 1,L
    I = N-K
    J1 = I+1
    S = 0.
    DO 1 J = J1,N
1    S = S+A(I,J)*ALFA(J)
2    ALFA(I) = (A(I,M)-S)/A(I,I)
  RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SOLUC

COMMON 0 VARIABLES 12 PROGRAM 162

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0010 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

#STORE WS UA SOLUC
CART ID 0016 DB ADDR 55FC DB CNT 000C

// FOR

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)

*LIST SOURCE PROGRAM

```
REAL KIJ(13,13),PIJ(13,13),QIJ(13,13),SIJ(13,13),TDG(9,9)
REAL EINV(9,9),MTZD(9,13),MTZC(9,13),M3D(4,12,10)
REAL NH,NH2,NH3,KH,KH2,KH3
REAL TI(9),V(9),BETA(13,13),FXI(201),MTZB(13,14),KI(13)
REAL ALFA(13)
EQUIVALENCE (K,KINT),(BETA(1),KI(1))
FKIJ(X) = COS(3.141592654*X)**2
PI = 3.141592654
READ(2,1) NINT
1  FORMAT(I3)
   H = 1./NINT
   N = NINT+1
   DO 2 I = 1,N
   DO 2 J = 1,N
2  KIJ(I,J) = 1.+FKIJ(H*(I-1))+FKIJ(H*(J-1))
   DO 3 I = 1,N,NINT
   SIJ(I,I) = 0.
   DO 3 J = 1,N
   PIX = PI*H*(I-1)
   PIJ(I,J) = -2.*PI*COS(PIX)*SIN(PIX)
3  QIJ(J,I) = -2.*PI*COS(PIX)*SIN(PIX)
   SIJ(I,N) = 0.
   SIJ(N,I) = 0.
   N1 = N-2
   N2 = NINT*NINT
   ISAL = -4032
   WRITE(5,4)ISAL
4  FORMAT(A1,49('*'))
   WRITE(5,5)N2
5  FORMAT(' ',47X,' ',/, ' * RESOLUCAO DE UMA EQUACAO INTEGRAL DE FRE
FDHOLM * ',/, ' ',7X,'DO TIPO II USANDO SPLINE BICUBICA',7X,' ',/, '
F ',47X,' ',/, ' ',47(' '), ' ',/, ' ',47X,' ',/, ' ',9X,'TABELA SOB
FRE ',15,' RETANGULOS',9X,' ',/, ' ',47X,' ')
   ISAL = 16448
   WRITE(5,4)ISAL
   CALL FTDIA(TDG,N1,H)
   DO 6 I = 2,N1
6  TDG(I,I) = TDG(I,I)-TDG(I,I-1)*TDG(I-1,I)/TDG(I-1,I-1)
   DO 7 J = 1,N
   CALL RSTEG(TI,N1,KIJ,H,PIJ(1,J),PIJ(N,J),J)
7  CALL SCEGS(TI,N1,TDG,PIJ(2,J))
   DO 8 J = 1,N,NINT
   CALL RSTEG(TI,N1,QIJ,H,SIJ(1,J),SIJ(N,J),J)
8  CALL SCEGS(TI,N1,TDG,SIJ(2,J))
   N2 = N1-1
   DO 9 I = 1,N
   CALL RSTGE(TI,N1,KIJ,H,QIJ(I,1),QIJ(I,N),I)
   CALL SCEGS(TI,N1,TDG,V)
   DO 9 J = 1,N2
9  QIJ(I,J+1) = V(J)
   DO 10 I = 1,N
   CALL RSTGE(TI,N1,PIJ,H,PIJ(I,1),PIJ(I,N),I)
   CALL SCEGS(TI,N1,TDG,V)
   DO 10 J = 1,N2
10 SIJ(I,J+1) = V(J)
   DO 12 I = 1,N1
   DO 11 J = 1,N1
11 TI(J) = 0.
   TI(I) = 1.
12 CALL SCEGS(TI,N1,TDG,EINV(1,I))
   N4 = N1+4
   DO 14 I = 1,N1
   DO 13 J = 1,N4
13 MTZD(I,J) = 0.
   MTZD(I,I) = -3.
   MTZD(I,I+2) = 3.
   MTZD(I,N1+3) = -H
14 MTZD(N1,N4) = -H
   HH = H*H
   HHH = HH*H
   DO 16 I = 1,N1
```

```

DO 16 J = 1,N4
PROD = 0.
DO 15 K = 1,N1
15 PROC = PROD + EINV(I,K)*MTZD(K,J)
16 MTZC(1,J) = PROD
DO 38 KINT = 1,NINT
IF(KINT-1)17,17,24
17 DO 23 I = 1,N4
IF(I-2)18,19,20
18 M3D(1,I,KINT) = 1.
M3D(2,I,KINT) = 0.
M3D(3,I,KINT) = -3./HH-MTZC(1,1)/H
M3D(4,I,KINT) = 2./HHH+MTZC(1,1)/HH
GO TO 23
19 M3D(1,I,KINT) = 0.
M3D(2,I,KINT) = 0.
M3D(3,I,KINT) = 3./HH-MTZC(1,2)/H
M3D(4,I,KINT) = -2./HHH+MTZC(1,2)/HH
GO TO 23
20 IF(I-N4+1)22,21,22
21 M3D(1,I,KINT) = 0.
M3D(2,I,KINT) = 1.
M3D(3,I,KINT) = -2./H-MTZC(1,I)/H
M3D(4,I,KINT) = 1./HH+MTZC(1,I)/HH
GO TO 23
22 M3D(1,I,KINT) = 0.
M3D(2,I,KINT) = 0.
M3D(3,I,KINT) = -MTZC(1,I)/H
M3D(4,I,KINT) = MTZC(1,I)/HH
23 CONTINUE
GO TO 38
24 IF(KINT-NINT)32,25,25
25 DO 31 I = 1,N4
NH = N1*H
NH2 = NH*NH
NH3 = NH2*NH
IF (I-N1-1)27,26,28
26 TRM = 1.-MTZC(N1,I)*NH
TRM = TRM-(3./HH+2.*MTZC(N1,I)/H)*NH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-(2./HHH+MTZC(N1,I)/HH)*NH3
TRM = MTZC(N1,I)+2.*(3./HH+2.*MTZC(N1,I)/H)*NH
M3D(2,I,KINT) = TRM+3.*(2./HHH+MTZC(N1,I)/HH)*NH2
TRM = -(3./HH+2.*MTZC(N1,I)/H)
M3D(3,I,KINT) = TRM-3.*(2./HHH+MTZC(N1,I)/HH)*NH
M3D(4,I,KINT) = 2./HHH+MTZC(N1,I)/HH
GO TO 31
27 TRM = -MTZC(N1,I)*NH-(2.*MTZC(N1,I)/H)*NH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-MTZC(N1,I)/HH*NH3
TRM = MTZC(N1,I)+(4.*MTZC(N1,I)/H)*NH
M3D(2,I,KINT) = TRM+(3.*MTZC(N1,I)/HH)*NH2
M3D(3,I,KINT) = -2.*MTZC(N1,I)/H-(3.*MTZC(N1,I)/HH)*NH
M3D(4,I,KINT) = MTZC(N1,I)/HH
GO TO 31
28 IF(I-N-1)29,27,30
29 TRM = -MTZC(N1,I)*NH+(3./HH-2.*MTZC(N1,I)/H)*NH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-(-2./HHH+MTZC(N1,I)/HH)*NH3
TRM = MTZC(N1,I)-2.*(3./HH-2.*MTZC(N1,I)/H)*NH
M3D(2,I,KINT) = TRM+3.*(-2./HHH+MTZC(N1,I)/HH)*NH2
TRM = 3./HH-2.*MTZC(N1,I)/H
M3D(3,I,KINT) = TRM-3.*(-2./HHH+MTZC(N1,I)/HH)*NH
M3D(4,I,KINT) = -2./HHH+MTZC(N1,I)/HH
GO TO 31
30 TRM = -MTZC(N1,I)*NH-(1./H+2.*MTZC(N1,I)/H)*NH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-(1./HH+MTZC(N1,I)/HH)*NH3
TRM = MTZC(N1,I)+2.*(1./H+2.*MTZC(N1,I)/H)*NH
M3D(2,I,KINT) = TRM+3.*(1./HH+MTZC(N1,I)/HH)*NH2
TRM = -(1./H+2.*MTZC(N1,I)/H)
M3D(3,I,KINT) = TRM-3.*(1./HH+MTZC(N1,I)/HH)*NH
M3D(4,I,KINT) = 1./HH+MTZC(N1,I)/HH
31 CONTINUE
GO TO 38
32 KH = (K-1)*H
KH2 = KH*KH
KH3 = KH2*KH
DO 37 I = 1,N4
IF(I-KINT)36,33,34
33 TRM = 1.-MTZC(K-1,I)*KH
TRM = TRM-(3./HH+MTZC(K,I)/H+2.*MTZC(K-1,I)/H)*KH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-(2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH3
TRM = MTZC(K-1,I)+2.*(3./HH+MTZC(K,I)/H+2.*MTZC(K-1,I)/H)*KH
M3D(2,I,KINT) = TRM+3.*(2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH2
TRM = -(3./HH+MTZC(K,I)/H+2.*MTZC(K-1,I)/H)
M3D(3,I,KINT) = TRM-3.*(2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH

```

```

M3D(4,I,KINT) = 2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH
GO TO 37
34 IF(I-KINT-1)36,35,36
35 TRM = -MTZC(K-1,I)*KH
TRM = TRM+(3./HH-MTZC(K,I)/H-2.*MTZC(K-1,I)/H)*KH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-(-2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH3
TRM = MTZC(K-1,I)-2.*(3./HH-MTZC(K,I)/H-2.*MTZC(K-1,I)/H)*KH
M3D(2,I,KINT) = TRM+3.*(-2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH2
TRM = 3./HH-MTZC(K,I)/H-2.*MTZC(K-1,I)/H
M3D(3,I,KINT) = TRM-3.*(-2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH
M3D(4,I,KINT) = -2./HHH+MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH
GO TO 37
36 TRM = -MTZC(K-1,I)*KH-(MTZC(K,I)/H+2.*MTZC(K-1,I)/H)*KH2
M3D(1,I,KINT) = TRM-(MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH3
TRM = MTZC(K-1,I)+2.*(MTZC(K,I)/H+2.*MTZC(K-1,I)/H)*KH
M3D(2,I,KINT) = TRM+3.*(MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH2
TRM = -(MTZC(K,I)/H+2.*MTZC(K-1,I)/H)
M3D(3,I,KINT) = TRM-3.*(MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH)*KH
M3D(4,I,KINT) = MTZC(K,I)/HH+MTZC(K-1,I)/HH
37 CONTINUE
38 CONTINUE
NINTI = 2*NINT
CTE1 = 2./PI
CTE2 = CTE1/3.
M = N+(NINTI-1)*NINT
HL = H/NINTI
DO 39 I = 1,M
X = (I-1)*HL*PI
39 FXI(I) = SIN(X)-CTE1*(1.+COS(X)**2)-CTE2
DO 40 I = 1,N
BETA(N+1,I) = PIJ(1,I)
BETA(N4,I) = PIJ(N,I)
BETA(I,N+1) = QIJ(1,1)
40 BETA(I,N4) = QIJ(1,N)
BETA(N+1,N+1) = SIJ(1,1)
BETA(N+1,N4) = SIJ(1,N)
BETA(N4,N+1) = SIJ(N,1)
BETA(N4,N4) = SIJ(N,N)
DO 43 I = 1,N4
DO 43 J = 1,N4
SINTE = 0.
DO 42 K = 1,N4
SINTI = 0.
DO 41 L = 1,NINT
41 SINTI = SINTI+SXXM1(H,M3D(1,K,L),M3D(1,J,L),H*(L-1),NINT)
42 SINTE = SINTE + SINTI*BETA(I,K)
43 MTZB(I,J) = SINTE
DO 46 I = 1,N4
SINTE = 0.
DO 45 K = 1,N4
SINTI = 0.
M = 1
DO 44 L = 1,NINT
M1 = M+NINTI
SINTI = SINTI+VPFI(M3D(1,K,L),H*(L-1))*FXI(M)
SINTI = SINTI+VPFI(M3D(1,K,L),H*L)*FXI(M1)
SINTI = SINTI+CKTPZ(NINT,H,H*(L-1),M3D(1,K,L),FXI,M)
44 M = M+NINTI
45 SINTE = SINTE+SINTI*BETA(I,K)*HL/3.
46 KI(I) = SINTE
DO 48 I = 1,N4
DO 47 J = 1,N4
47 MTZB(I,J) = -MTZB(I,J)
48 MTZB(I,I) = MTZB(I,I)+1.
N5 = N4+1
DO 49 L1 = 1,N4
49 MTZB(L1,N5) = KI(L1)
CALL DECOM(MTZB,N4,N5)
CALL SOLUC(MTZB,ALFA,N4,N5)
K = 1
CALL SCALE(15./2.54,15./2.54,0.,0.)
WRITE(5,50)
50 FORMAT('1',10X,'X',13X,'SOLUCAO EXATA',7X,'SOLUCAO SPLINE',8X,'DIF
FERENCA',/,80('='),/)
I1 = -2
DO 55 I = 1,1001
X = (I-1)*0.001
IF(X-K*H)52,51,51
51 K = K+1
52 P = SIN(PI*X)-CTE1*(1.+COS(PI*X)**2)-CTE2
DO 54 L = 1,N4
Q = M3D(1,L,K)
DO 53 J = 2,4

```

```

53 Q = Q+M3D(J,L,K)*X**(J-1)
54 P = P+ALFA(L)*Q
   Q = SIN(PI*X)
   R = ABS(Q-P)
   CALL EPLLOT (11,x,P)
   I1 = 0
55 WRITE(5,56)X,Q,P,R
56 FORMAT(4(3X,E17.10))
   CALL EGRID(1,0.,0.,0.05,20)
   CALL EPLLOT(2,0.,1.)
   CALL POINT(5)
   CALL EGRID(0,0.,0.,0.1,10)
   CALL EPLLOT(2,1.,0.)
   CALL POINT(2)
   CALL EPLLOT(1,1.,0.)
   CALL ECHAR(0.,1.03,.5/2.54,.5/2.54,0.)
   WRITE(7,57)
57 FORMAT('SOLUCAO SPLINE')
   CALL ECHAR(1.-.25/15.,-1.5/20.,.5/2.54,.5/2.54,0.)
   WRITE(7,58)
58 FORMAT('X')
   R = .99
   Q = -1.8/15.
   P = 1.
   DO 60 I = 1,11
     CALL ECHAR(Q,R,.3/2.54,.3/2.54,0.)
     WRITE(7,59)P
59   FORMAT(F5.2)
     P = P-0.0999999
60   R = R-0.0999999
     R = -0.0333
     Q = -.04
     P = 0.
     DO 61 I = 1,11
       CALL ECHAR(Q,R,.3/2.54,.3/2.54,0.)
       WRITE(7,59)P
61     P = P+0.1000001
       Q = Q+0.1000001
       WRITE(5,62)
       WRITE(5,63)
62     FORMAT(///)
63     FORMAT(' *FIM DO TRABALHO *')
       CALL EXIT
       END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 6046 PROGRAM 4242

END OF COMPILATION

// XEQ

```

*****
*
* RESOLUCAO DE UMA EQUACAO INTEGRAL DE FREDHOLM *
* DO TIPO II USANDO SPLINE BICUBICA *
*
*=====
*
* TABELA SOBRE 100 RETANGULOS *
*
*****

```

X	SOLUCAO EXATA	SOLUCAO SPLINE	DIFERENCA
0.0000000000E-00	0.0000000000E-00	-0.8259899921E-05	0.8259899921E-05
0.1000000001E-02	0.3141587489E-02	0.3133122452E-02	0.8465036451E-05
0.2000000002E-02	0.6283143977E-02	0.6274081630E-02	0.9062347096E-05
0.2999999999E-02	0.9424638436E-02	0.9414606098E-02	0.1003233775E-04
0.4000000004E-02	0.1256603990E-01	0.1255469179E-01	0.1134810009E-04
0.5000000001E-02	0.1570731732E-01	0.1569433184E-01	0.1298547432E-04
0.5999999999E-02	0.1884843972E-01	0.1883351468E-01	0.1492504089E-04
0.7000000001E-02	0.2198937609E-01	0.2197223252E-01	0.1714356769E-04
0.8000000008E-02	0.2513009547E-01	0.2511047659E-01	0.1961887757E-04
0.9000000001E-02	0.2827056677E-01	0.2824823720E-01	0.2232956468E-04
0.1000000000E-01	0.3141075912E-01	0.3138550018E-01	0.2525892342E-04
0.1100000000E-01	0.3455064141E-01	0.3452226033E-01	0.2838106595E-04
0.1199999999E-01	0.3769018268E-01	0.3765850527E-01	0.3167742400E-04
0.1300000000E-01	0.4082935200E-01	0.4079421884E-01	0.3513315463E-04
0.1400000000E-01	0.4396811836E-01	0.4392939413E-01	0.3872421807E-04
0.1499999999E-01	0.4710645072E-01	0.4706401375E-01	0.4243696460E-04
0.1600000001E-01	0.5024431824E-01	0.5019806596E-01	0.4625227305E-04
0.1700000001E-01	0.5338168975E-01	0.5333153737E-01	0.5015236096E-04
0.1800000000E-01	0.5651853447E-01	0.5646441332E-01	0.5412113389E-04
0.1900000002E-01	0.5965482145E-01	0.5959667773E-01	0.5814371982E-04
0.2000000000E-01	0.6279051955E-01	0.6272831853E-01	0.6220105578E-04
0.2099999999E-01	0.6592559794E-01	0.6585931521E-01	0.6628269335E-04
0.2200000001E-01	0.6906002579E-01	0.6898965826E-01	0.7036753237E-04
0.2300000000E-01	0.7219377194E-01	0.7211932545E-01	0.7444649241E-04
0.2399999999E-01	0.7532680555E-01	0.7524830001E-01	0.7850554544E-04
0.2500000001E-01	0.7845909573E-01	0.7837656445E-01	0.8253130371E-04
0.2600000000E-01	0.8159061163E-01	0.8150410317E-01	0.8650845856E-04
0.2699999998E-01	0.8472132211E-01	0.8463089473E-01	0.9042740575E-04
0.2800000000E-01	0.8785119658E-01	0.8775691999E-01	0.9427662013E-04
0.2899999999E-01	0.9098020390E-01	0.9088216070E-01	0.9804317969E-04
0.2999999999E-01	0.9410831335E-01	0.9400659447E-01	0.1017188770E-03
0.3100000000E-01	0.9723549394E-01	0.9713020635E-01	0.1052875887E-03
0.3200000003E-01	0.1003617148E-00	0.1002529691E-00	0.1087457640E-03
0.3300000002E-01	0.1034869452E-00	0.1033748612E-00	0.1120839152E-03
0.3400000002E-01	0.1066111542E-00	0.1064958646E-00	0.1152895857E-03
0.3500000000E-01	0.1097343110E-00	0.1096159539E-00	0.1183571294E-03
0.3600000000E-01	0.1128563848E-00	0.1127351076E-00	0.1212772913E-03
0.3699999998E-01	0.1159773447E-00	0.1158532999E-00	0.1240447746E-03
0.3800000004E-01	0.1190971601E-00	0.1189705101E-00	0.1266500331E-03
0.3900000001E-01	0.1222157999E-00	0.1220867127E-00	0.1290872461E-03
0.4000000000E-01	0.1253332336E-00	0.1252018840E-00	0.1313496615E-03
0.4100000001E-01	0.1284494302E-00	0.1283159941E-00	0.1334360569E-03
0.4199999998E-01	0.1315643591E-00	0.1314290175E-00	0.1353415428E-03
0.4299999999E-01	0.1346779894E-00	0.1345409343E-00	0.1370550600E-03
0.4400000002E-01	0.1377902909E-00	0.1376517138E-00	0.1385770739E-03
0.4500000002E-01	0.1409012320E-00	0.1407613272E-00	0.1399047906E-03
0.4600000000E-01	0.1440107826E-00	0.1438697497E-00	0.1410328551E-03
0.4699999999E-01	0.1471189118E-00	0.1469769487E-00	0.1419631300E-03
0.4799999999E-01	0.1502255892E-00	0.1500829041E-00	0.1426850214E-03
0.4899999996E-01	0.1533307837E-00	0.1531875779E-00	0.1432057471E-03
0.5000000003E-01	0.1564344651E-00	0.1562909429E-00	0.1435222803E-03
0.5100000000E-01	0.1595366024E-00	0.1593929710E-00	0.1436314780E-03
0.5200000001E-01	0.1626371651E-00	0.1624936330E-00	0.1435321756E-03
0.5299999999E-01	0.1657361229E-00	0.1655928959E-00	0.1432269347E-03
0.5399999997E-01	0.1688334447E-00	0.1686907275E-00	0.1427171520E-03
0.5499999997E-01	0.1719291002E-00	0.1717870967E-00	0.1420036425E-03
0.5600000001E-01	0.1750230590E-00	0.1748819728E-00	0.1410861734E-03
0.5700000001E-01	0.1781152902E-00	0.1779753217E-00	0.1399684699E-03
0.5799999998E-01	0.1812057637E-00	0.1810671109E-00	0.1386528603E-03
0.5899999999E-01	0.1842944486E-00	0.1841573034E-00	0.1371451655E-03
0.5999999998E-01	0.1873813146E-00	0.1872458695E-00	0.1354450361E-03
0.6099999995E-01	0.1904663312E-00	0.1903327714E-00	0.1335598063E-03
0.6200000001E-01	0.1935494681E-00	0.1934179795E-00	0.1314885449E-03
0.6300000002E-01	0.1966306946E-00	0.1965014545E-00	0.1292400995E-03
0.6400000007E-01	0.1997099806E-00	0.1995831586E-00	0.1268220368E-03
0.6500000003E-01	0.2027872953E-00	0.2026630588E-00	0.1242365689E-03
0.6600000004E-01	0.2058626086E-00	0.2057411170E-00	0.1214916119E-03
0.6699999998E-01	0.2089358904E-00	0.2088172967E-00	0.1185936854E-03
0.6800000005E-01	0.2120071098E-00	0.2118915577E-00	0.1155521023E-03
0.6899999998E-01	0.2150762369E-00	0.2149638690E-00	0.1123677939E-03
0.7000000000E-01	0.2181432414E-00	0.2180341844E-00	0.1090569422E-03
0.7100000005E-01	0.2212080928E-00	0.2211024724E-00	0.1056204783E-03
0.7200000001E-01	0.2242707608E-00	0.2241686830E-00	0.1020778437E-03
0.7300000003E-01	0.2273312159E-00	0.2272327874E-00	0.9842845616E-04
0.7399999996E-01	0.2303894265E-00	0.2302947384E-00	0.9468814829E-04
0.7500000004E-01	0.2334453639E-00	0.2333545007E-00	0.9086320650E-04
0.7600000008E-01	0.2364989972E-00	0.2364120330E-00	0.8696422455E-04
0.7699999999E-01	0.2395502959E-00	0.2394672863E-00	0.8300959603E-04
0.7800000003E-01	0.2425992308E-00	0.2425202236E-00	0.7900723730E-04
0.7899999999E-01	0.2456457709E-00	0.2455708085E-00	0.7496238691E-04
0.8000000001E-01	0.2486898872E-00	0.2486189895E-00	0.7089774598E-04

0.80999999994E-01	0.2517315488E 00	0.2516647279E 00	0.6682076497E-04
0.82000000002E-01	0.2547707257E 00	0.2547079762E 00	0.6274948833E-04
0.83000000007E-01	0.2578073884E 00	0.2577486977E 00	0.5869078454E-04
0.83999999997E-01	0.2608415063E 00	0.2607868438E 00	0.5466258157E-04
0.85000000002E-01	0.2638730502E 00	0.2638223663E 00	0.5068397153E-04
0.85999999998E-01	0.2669019892E 00	0.2668552289E 00	0.4676030953E-04
0.86999999999E-01	0.2699282946E 00	0.2698853798E 00	0.4291487861E-04
0.88000000000E-01	0.2729519358E 00	0.2729127747E 00	0.3916118296E-04
0.89000000000E-01	0.2759728825E 00	0.2759373645E 00	0.3551808188E-04
0.90000000005E-01	0.2789911063E 00	0.2789591079E 00	0.3199838104E-04
0.90999999995E-01	0.2820065757E 00	0.2819779533E 00	0.2862233669E-04
0.92000000000E-01	0.2850192626E 00	0.2849938537E 00	0.2540904099E-04
0.92999999996E-01	0.2880291360E 00	0.2880067605E 00	0.2237549053E-04
0.93999999998E-01	0.2910361668E 00	0.2910166310E 00	0.1953565517E-04
0.95000000003E-01	0.2940403253E 00	0.2940234150E 00	0.1691025683E-04
0.95999999999E-01	0.2970415815E 00	0.2970270587E 00	0.1452281140E-04
0.97000000003E-01	0.3000399066E 00	0.3000275157E 00	0.1239078120E-04
0.97999999993E-01	0.3030352697E 00	0.3030247315E 00	0.1053814776E-04
0.99000000001E-01	0.3060276423E 00	0.3060186675E 00	0.8974689997E-05
0.10000000000E 00	0.3090169944E 00	0.3090092560E 00	0.7738359279E-05
0.10099999999E 00	0.3120032966E 00	0.3119964625E 00	0.6834045056E-05
0.10200000000E 00	0.3149865198E 00	0.3149802698E 00	0.6249872971E-05
0.10299999999E 00	0.3179666338E 00	0.3179606787E 00	0.5955109376E-05
0.10400000000E 00	0.3209436101E 00	0.3209376543E 00	0.5955807868E-05
0.10500000000E 00	0.3239174186E 00	0.3239112017E 00	0.6216811019E-05
0.10599999999E 00	0.3268880298E 00	0.3268812914E 00	0.6738351661E-05
0.10700000000E 00	0.3298554151E 00	0.3298479336E 00	0.7481547076E-05
0.10799999999E 00	0.3328195444E 00	0.3328110927E 00	0.8451752371E-05
0.10899999999E 00	0.3357803893E 00	0.3357707601E 00	0.9629176936E-05
0.10999999999E 00	0.3387379201E 00	0.3387269325E 00	0.1098774374E-04
0.11100000000E 00	0.3416921079E 00	0.3416795766E 00	0.1253141090E-04
0.11200000000E 00	0.3446429234E 00	0.3446287140E 00	0.1420942135E-04
0.11299999999E 00	0.3475903370E 00	0.3475742796E 00	0.1605739818E-04
0.11400000000E 00	0.3505343203E 00	0.3505163030E 00	0.1801736654E-04
0.11499999999E 00	0.3534748438E 00	0.3534547486E 00	0.2009514720E-04
0.11599999999E 00	0.3564118788E 00	0.3563895794E 00	0.2229935491E-04
0.11700000000E 00	0.3593453962E 00	0.3593208232E 00	0.2457317898E-04
0.11799999999E 00	0.3622753666E 00	0.3622484196E 00	0.2694712022E-04
0.11900000000E 00	0.3652017620E 00	0.3651723983E 00	0.2936366946E-04
0.11999999999E 00	0.3681245528E 00	0.3680926928E 00	0.3186007965E-04
0.12100000000E 00	0.3710437102E 00	0.3710093094E 00	0.3440096047E-04
0.12199999999E 00	0.3739592056E 00	0.3739222275E 00	0.3697816285E-04
0.12299999999E 00	0.3768710102E 00	0.3768314442E 00	0.3956607547E-04
0.12400000000E 00	0.3797790955E 00	0.3797369216E 00	0.4217401149E-04
0.12499999999E 00	0.3826834321E 00	0.3826386567E 00	0.4477542827E-04
0.12600000000E 00	0.3855839923E 00	0.3855365733E 00	0.4741898742E-04
0.12699999999E 00	0.3884807460E 00	0.3884307504E 00	0.4999549130E-04
0.12800000001E 00	0.3913736671E 00	0.3913210884E 00	0.5257874730E-04
0.12900000001E 00	0.3942627244E 00	0.3942076106E 00	0.5511380734E-04
0.13000000000E 00	0.3971478905E 00	0.3970902359E 00	0.5765445533E-04
0.13099999999E 00	0.4000291366E 00	0.3999690307E 00	0.6010592917E-04
0.13200000000E 00	0.4029064354E 00	0.4028439159E 00	0.6251945168E-04
0.13300000000E 00	0.4057797577E 00	0.4057148805E 00	0.6487732761E-04
0.13399999999E 00	0.4086490746E 00	0.4085819042E 00	0.6717047662E-04
0.13500000001E 00	0.4115143588E 00	0.4114449593E 00	0.6939959720E-04
0.13600000001E 00	0.4143755806E 00	0.4143040437E 00	0.7153698248E-04
0.13700000000E 00	0.4172327135E 00	0.4171591232E 00	0.7359031596E-04
0.13799999999E 00	0.4200857279E 00	0.4200101584E 00	0.7556960923E-04
0.13900000000E 00	0.4229345972E 00	0.4228571477E 00	0.7744948385E-04
0.14000000000E 00	0.4257792917E 00	0.4257000733E 00	0.7921829825E-04
0.14099999999E 00	0.4286197836E 00	0.4285389112E 00	0.8087232714E-04
0.14200000001E 00	0.4314560460E 00	0.4313735776E 00	0.8246838123E-04
0.14300000000E 00	0.4342880488E 00	0.4342041211E 00	0.8392776368E-04
0.14400000000E 00	0.43711157669E 00	0.4370304872E 00	0.8527957839E-04
0.14499999999E 00	0.4399391695E 00	0.4398526574E 00	0.8651195102E-04
0.14600000000E 00	0.4427582311E 00	0.4426706243E 00	0.8760695354E-04
0.14699999999E 00	0.4455729217E 00	0.4454843142E 00	0.8860765964E-04
0.14799999999E 00	0.4483832160E 00	0.4482937568E 00	0.8945935411E-04
0.14900000000E 00	0.4511890846E 00	0.4510988686E 00	0.9021605370E-04
0.15000000000E 00	0.4539904997E 00	0.4538996833E 00	0.9081652396E-04
0.15100000000E 00	0.4567874341E 00	0.4566961158E 00	0.9131827397E-04
0.15200000001E 00	0.4595798610E 00	0.4594881869E 00	0.9167403919E-04
0.15300000000E 00	0.4623677514E 00	0.4622758359E 00	0.9191548460E-04
0.15399999999E 00	0.4651510773E 00	0.4650590803E 00	0.9199697532E-04
0.15499999999E 00	0.4679298137E 00	0.4678378200E 00	0.9199371569E-04
0.15600000000E 00	0.4707039322E 00	0.4706120991E 00	0.9183306255E-04
0.15700000000E 00	0.4734734043E 00	0.4733818487E 00	0.9155552842E-04
0.15799999999E 00	0.4762382030E 00	0.4761470855E 00	0.9111757395E-04
0.15900000001E 00	0.4789983022E 00	0.4789076813E 00	0.9062094622E-04
0.16000000000E 00	0.4817536741E 00	0.4816637543E 00	0.8991989312E-04
0.16099999999E 00	0.4845042912E 00	0.4844151379E 00	0.8915318184E-04
0.16199999998E 00	0.4872501253E 00	0.4871618740E 00	0.8825119593E-04
0.16300000000E 00	0.4899911519E 00	0.4899039341E 00	0.8721789353E-04
0.16400000000E 00	0.4927273414E 00	0.4926412873E 00	0.8605397314E-04
0.16499999999E 00	0.4954586684E 00	0.4953738668E 00	0.8480157711E-04

0.16600000001E 00	0.4981851053E 00	0.4981016905E 00	0.8341483777E-04
0.16700000000E 00	0.5009066257E 00	0.5008246670E 00	0.8195871492E-04
0.1679999999E 00	0.5036232019E 00	0.5035428446E 00	0.8035730579E-04
0.16900000001E 00	0.5063348077E 00	0.5062561435E 00	0.7866416135E-04
0.17000000000E 00	0.5090414162E 00	0.5089645588E 00	0.7685739555E-04
0.17100000000E 00	0.5117430004E 00	0.5116680080E 00	0.7499242207E-04
0.1719999999E 00	0.5144395339E 00	0.5143665296E 00	0.7300451403E-04
0.17300000001E 00	0.5171309907E 00	0.5170600414E 00	0.7094908514E-04
0.1739999999E 00	0.5198173427E 00	0.5197485089E 00	0.6883358591E-04
0.1749999999E 00	0.5224985647E 00	0.5224319673E 00	0.6659748038E-04
0.17600000000E 00	0.5251746305E 00	0.5251103227E 00	0.6430782383E-04
0.17700000000E 00	0.5278455123E 00	0.5277835407E 00	0.6197160118E-04
0.17800000000E 00	0.5305111848E 00	0.5304515825E 00	0.5960231651E-04
0.1789999999E 00	0.5331716209E 00	0.5331144970E 00	0.5712360146E-04
0.18000000001E 00	0.5358267955E 00	0.5357721238E 00	0.5467142912E-04
0.1809999999E 00	0.5384766811E 00	0.5384245994E 00	0.5208142104E-04
0.1819999999E 00	0.5411212525E 00	0.5410717215E 00	0.4953099418E-04
0.18300000000E 00	0.5437604838E 00	0.5437135698E 00	0.4691397775E-04
0.18400000000E 00	0.5463943472E 00	0.5463500099E 00	0.4433747383E-04
0.1849999999E 00	0.5490228182E 00	0.5489811431E 00	0.4167482259E-04
0.1859999999E 00	0.5516458705E 00	0.5516068735E 00	0.3899680454E-04
0.18700000000E 00	0.5542634790E 00	0.5542270864E 00	0.3639282662E-04
0.1879999999E 00	0.5568756163E 00	0.5568418200E 00	0.3379629929E-04
0.1889999998E 00	0.5594822582E 00	0.5594510678E 00	0.3119045872E-04
0.19000000000E 00	0.5620833786E 00	0.5620547549E 00	0.2862373368E-04
0.19100000000E 00	0.5646789504E 00	0.5646528494E 00	0.2610078082E-04
0.1919999999E 00	0.5672689497E 00	0.5672453620E 00	0.2358760686E-04
0.19300000001E 00	0.5698533502E 00	0.5698322129E 00	0.2113729716E-04
0.19400000000E 00	0.5724321261E 00	0.5724133204E 00	0.1880573110E-04
0.1949999999E 00	0.5750052526E 00	0.5749887526E 00	0.1649977640E-04
0.1959999998E 00	0.5775727035E 00	0.5775584417E 00	0.1426180825E-04
0.19700000000E 00	0.5801344548E 00	0.5801223453E 00	0.1210952178E-04
0.19800000000E 00	0.5826904801E 00	0.5826804072E 00	0.1007318497E-04
0.1989999999E 00	0.5852407542E 00	0.5852325789E 00	0.8175615228E-05
0.20000000001E 00	0.5877852523E 00	0.5877789023E 00	0.6350222978E-05
0.20100000000E 00	0.5903239496E 00	0.5903192246E 00	0.4725065085E-05
0.2019999999E 00	0.5928568202E 00	0.5928537030E 00	0.3117136659E-05
0.2029999998E 00	0.5953838396E 00	0.5953821183E 00	0.1721549780E-05
0.20400000000E 00	0.5979049834E 00	0.5979045894E 00	0.3939494492E-06
0.20500000000E 00	0.6004202254E 00	0.6004210389E 00	0.8135102693E-06
0.2059999999E 00	0.6029295420E 00	0.6029314885E 00	0.1946464182E-05
0.20700000001E 00	0.6054329078E 00	0.6054358396E 00	0.2931803466E-05
0.20800000000E 00	0.6079302974E 00	0.6079341417E 00	0.3844033930E-05
0.2089999999E 00	0.6104216880E 00	0.6104263754E 00	0.4687346521E-05
0.21000000000E 00	0.6129070543E 00	0.6129124306E 00	0.5376059565E-05
0.21100000000E 00	0.6153863708E 00	0.6153923780E 00	0.6007496271E-05
0.2119999999E 00	0.6178596131E 00	0.6178662134E 00	0.6600283089E-05
0.2129999999E 00	0.6203267581E 00	0.6203338271E 00	0.7069204006E-05
0.21400000000E 00	0.6227877805E 00	0.6227952281E 00	0.7447320971E-05
0.21500000000E 00	0.6252426567E 00	0.6252504806E 00	0.7824040956E-05
0.2159999998E 00	0.6276913611E 00	0.6276993991E 00	0.8037779487E-05
0.21700000000E 00	0.6301338714E 00	0.6301421339E 00	0.8262228227E-05
0.2179999999E 00	0.6325701624E 00	0.6325785911E 00	0.8428469307E-05
0.2189999999E 00	0.6350002093E 00	0.6350087688E 00	0.8559320129E-05
0.2199999999E 00	0.6374239898E 00	0.6374325535E 00	0.8563511080E-05
0.22100000000E 00	0.6398414794E 00	0.6398500078E 00	0.8528586484E-05
0.22200000000E 00	0.6422526536E 00	0.6422610650E 00	0.8411705501E-05
0.2229999998E 00	0.6446574889E 00	0.6446658468E 00	0.8357688791E-05
0.22400000000E 00	0.6470559616E 00	0.6470641100E 00	0.8148141212E-05
0.2249999999E 00	0.6494448048E 00	0.6494559829E 00	0.7933937020E-05
0.2259999999E 00	0.6518337258E 00	0.6518414444E 00	0.7718801505E-05
0.22700000001E 00	0.6542129695E 00	0.6542203810E 00	0.7411465052E-05
0.22800000000E 00	0.6565857557E 00	0.6565928445E 00	0.7088761780E-05
0.2289999999E 00	0.6589520624E 00	0.6589587905E 00	0.6727874282E-05
0.2299999998E 00	0.6613118655E 00	0.6613182318E 00	0.6366521123E-05
0.23100000000E 00	0.6636651421E 00	0.6636710879E 00	0.5946028981E-05
0.2319999999E 00	0.6660118678E 00	0.6660173581E 00	0.5490612242E-05
0.2329999999E 00	0.6683520204E 00	0.6683570244E 00	0.5003996196E-05
0.23400000001E 00	0.6706855767E 00	0.6706900531E 00	0.4476401958E-05
0.23500000000E 00	0.6730125139E 00	0.6730164748E 00	0.3960914913E-05
0.2359999999E 00	0.6753328081E 00	0.6753362438E 00	0.3435648979E-05
0.2369999998E 00	0.6776464371E 00	0.6776493331E 00	0.2895947547E-05
0.23800000000E 00	0.6799533790E 00	0.6799557132E 00	0.2333894373E-05
0.2389999999E 00	0.6822536094E 00	0.6822553323E 00	0.1722946763E-05
0.2399999999E 00	0.6845471058E 00	0.6845482278E 00	0.1121778042E-05
0.24100000000E 00	0.6868338468E 00	0.6868343437E 00	0.4968605940E-06
0.24200000000E 00	0.6891138085E 00	0.6891136078E 00	0.2007000149E-06
0.2429999999E 00	0.6913869690E 00	0.6913861653E 00	0.8037313823E-06
0.2439999998E 00	0.6936533059E 00	0.6936518293E 00	0.1476611942E-05
0.2449999999E 00	0.6959127970E 00	0.6959106419E 00	0.2155080439E-05
0.2459999999E 00	0.6981654192E 00	0.6981626490E 00	0.2770218999E-05
0.2469999999E 00	0.7004111506E 00	0.7004077027E 00	0.3448221834E-05
0.24800000000E 00	0.7026499707E 00	0.7026458445E 00	0.4126224670E-05
0.24900000000E 00	0.7048818538E 00	0.7048770308E 00	0.4823319617E-05
0.2499999999E 00	0.7071067814E 00	0.7071012717E 00	0.5509704354E-05

0.25100000001E 00	0.7093247300E 00	0.7093185309E 00	0.6199348721E-05
0.25200000000E 00	0.7115356777E 00	0.7115288411E 00	0.6836839023E-05
0.25300000000E 00	0.7137396025E 00	0.7137321354E 00	0.7466878745E-05
0.2539999999E 00	0.7159364826E 00	0.7159282071E 00	0.8275266743E-05
0.25500000001E 00	0.7181262983E 00	0.7181174119E 00	0.8886680014E-05
0.25600000002E 00	0.7203090251E 00	0.7202995305E 00	0.9494833655E-05
0.25700000000E 00	0.7224846424E 00	0.7224743366E 00	0.1030554995E-04
0.25800000002E 00	0.7246531310E 00	0.7246422320E 00	0.1089880243E-04
0.2589999999E 00	0.7268144653E 00	0.7268030561E 00	0.1140916720E-04
0.26000000001E 00	0.7289686275E 00	0.7289564691E 00	0.1215841621E-04
0.26100000002E 00	0.7311155949E 00	0.7311029254E 00	0.1266971231E-04
0.2619999999E 00	0.7332553460E 00	0.7332419364E 00	0.1340964809E-04
0.26300000001E 00	0.7353878603E 00	0.7353739817E 00	0.1387856901E-04
0.26400000001E 00	0.7375131172E 00	0.7374986258E 00	0.1449137926E-04
0.2649999998E 00	0.7396310945E 00	0.7396160396E 00	0.1505482942E-04
0.26600000000E 00	0.7417417734E 00	0.7417262208E 00	0.1555262134E-04
0.26700000002E 00	0.7438451300E 00	0.7438290340E 00	0.1609604807E-04
0.2679999999E 00	0.7459411451E 00	0.7459246211E 00	0.1652399079E-04
0.26900000000E 00	0.7480297989E 00	0.7480128805E 00	0.1691840590E-04
0.27000000002E 00	0.7501110699E 00	0.7500936868E 00	0.1738313586E-04
0.27100000000E 00	0.7521849363E 00	0.7521671783E 00	0.1775799320E-04
0.27200000002E 00	0.7542513811E 00	0.7542333109E 00	0.1806998626E-04
0.2729999999E 00	0.7563103798E 00	0.7562919817E 00	0.1839781181E-04
0.27400000000E 00	0.7583619155E 00	0.7583431771E 00	0.1873867587E-04
0.27500000002E 00	0.7604059658E 00	0.7603869212E 00	0.1904461534E-04
0.2759999999E 00	0.7624425110E 00	0.7624233891E 00	0.1912191511E-04
0.27700000001E 00	0.7644715313E 00	0.7644521738E 00	0.1935753972E-04
0.27800000001E 00	0.7664930073E 00	0.7664735314E 00	0.1947581769E-04
0.2789999998E 00	0.7685069169E 00	0.7684874397E 00	0.1947721467E-04
0.28000000000E 00	0.7705132425E 00	0.7704936238E 00	0.1961877570E-04
0.28100000001E 00	0.7725119641E 00	0.7724925121E 00	0.1945206896E-04
0.2819999998E 00	0.7745030603E 00	0.7744836539E 00	0.1940643416E-04
0.28300000000E 00	0.7764865129E 00	0.7764671363E 00	0.1937663184E-04
0.28400000002E 00	0.7784623024E 00	0.7784432484E 00	0.1905392856E-04
0.28500000000E 00	0.7804304067E 00	0.7804114837E 00	0.1892307774E-04
0.28600000001E 00	0.7823908103E 00	0.7823723440E 00	0.1846626402E-04
0.28700000003E 00	0.7843434929E 00	0.7843254113E 00	0.1808162780E-04
0.28800000000E 00	0.7862884323E 00	0.7862708601E 00	0.1757219435E-04
0.28900000002E 00	0.7882256121E 00	0.7882086490E 00	0.1696310938E-04
0.2899999999E 00	0.7901550119E 00	0.7901386318E 00	0.1638010145E-04
0.29100000000E 00	0.7920766144E 00	0.7920609738E 00	0.1564063133E-04
0.29200000001E 00	0.7939903994E 00	0.7939756221E 00	0.1477729529E-04
0.2929999998E 00	0.7958963464E 00	0.7958823463E 00	0.1400010661E-04
0.2939999999E 00	0.7977944393E 00	0.7977814581E 00	0.1298123971E-04
0.29500000001E 00	0.7996846591E 00	0.7996729663E 00	0.1169275493E-04
0.2959999998E 00	0.8015669849E 00	0.8015563075E 00	0.1067761332E-04
0.29700000000E 00	0.8034414001E 00	0.8034321812E 00	0.9219162173E-05
0.29800000001E 00	0.8053078863E 00	0.8052999884E 00	0.7897615439E-05
0.2989999999E 00	0.8071664231E 00	0.8071600850E 00	0.6338115785E-05
0.30000000001E 00	0.8090169948E 00	0.8090123310E 00	0.4663597795E-05
0.30100000003E 00	0.8108595809E 00	0.8108566747E 00	0.2906192095E-05
0.30200000000E 00	0.8126941646E 00	0.8126931979E 00	0.9667128333E-06
0.30300000001E 00	0.8145207273E 00	0.8145217737E 00	0.1046340913E-05
0.30400000003E 00	0.8163392513E 00	0.8163422623E 00	0.3010965885E-05
0.30500000000E 00	0.8181497179E 00	0.8181551049E 00	0.5386769775E-05
0.30600000000E 00	0.8199521093E 00	0.8199599871E 00	0.7877592004E-05
0.3069999997E 00	0.8217464077E 00	0.8217565093E 00	0.1010159031E-04
0.3079999999E 00	0.8235325976E 00	0.8235451641E 00	0.1256633550E-04
0.30900000001E 00	0.8253106584E 00	0.8253256541E 00	0.1499569044E-04
0.3099999998E 00	0.8270805745E 00	0.8270981779E 00	0.1760339365E-04
0.3109999999E 00	0.8288423274E 00	0.8288623308E 00	0.2000341193E-04
0.31200000001E 00	0.8306595900E 00	0.8306185207E 00	0.2262089402E-04
0.3129999999E 00	0.8323412737E 00	0.8323666106E 00	0.2533663065E-04
0.31400000001E 00	0.8340784334E 00	0.8341064881E 00	0.2805469559E-04
0.31500000002E 00	0.8358073621E 00	0.8358378964E 00	0.3053434195E-04
0.3159999999E 00	0.8375280401E 00	0.8375613107E 00	0.3327056768E-04
0.31700000001E 00	0.8392404527E 00	0.8392764616E 00	0.3600865605E-04
0.31800000003E 00	0.8409445830E 00	0.8409831870E 00	0.3860378642E-04
0.31900000000E 00	0.8426404125E 00	0.8426813932E 00	0.4098052163E-04
0.32000000000E 00	0.8443279264E 00	0.8443714955E 00	0.4356913271E-04
0.32100000002E 00	0.8460071065E 00	0.8460531120E 00	0.4600547256E-04
0.3219999999E 00	0.8476779363E 00	0.8477265706E 00	0.4863341305E-04
0.32300000000E 00	0.8493404011E 00	0.8493912883E 00	0.5088699985E-04
0.3239999997E 00	0.8509944824E 00	0.8510478092E 00	0.5332706500E-04
0.3249999999E 00	0.8526401647E 00	0.8526958650E 00	0.5570054057E-04
0.32600000001E 00	0.8542774326E 00	0.8543351839E 00	0.5775131288E-04
0.3269999999E 00	0.8559062683E 00	0.8559662711E 00	0.6000278521E-04
0.32800000000E 00	0.8575266569E 00	0.8575886052E 00	0.6194831809E-04
0.32900000002E 00	0.8591385816E 00	0.8592024089E 00	0.6382726138E-04
0.3299999999E 00	0.8607420267E 00	0.8608078125E 00	0.6578583278E-04
0.33100000001E 00	0.8623369778E 00	0.8624044808E 00	0.6750272592E-04
0.33200000002E 00	0.8639234178E 00	0.8639926274E 00	0.6920937457E-04
0.3329999999E 00	0.8655013297E 00	0.8655720981E 00	0.7076840856E-04
0.33400000000E 00	0.8670707014E 00	0.8671431131E 00	0.7241172724E-04
0.33500000001E 00	0.8686315154E 00	0.8687053290E 00	0.7381383338E-04

0.3359999998E 00	0.8701837542E 00	0.8702587978E 00	0.7504364484E-04
0.3370000000E 00	0.8717274067E 00	0.8718036178E 00	0.7621105768E-04
0.3380000000E 00	0.8732624552E 00	0.8733397135E 00	0.7725832992E-04
0.3389999999E 00	0.8747888845E 00	0.8748669819E 00	0.7809745153E-04
0.3400000000E 00	0.8763066807E 00	0.8763855125E 00	0.7883179941E-04
0.3409999998E 00	0.8778158274E 00	0.8778953140E 00	0.7948651915E-04
0.3420000000E 00	0.8793163101E 00	0.8793962267E 00	0.7991679018E-04
0.3430000000E 00	0.8808081157E 00	0.8808884143E 00	0.8029863244E-04
0.3439999999E 00	0.8822912264E 00	0.8823720128E 00	0.8078664546E-04
0.3450000000E 00	0.8837656299E 00	0.8838464973E 00	0.8086720487E-04
0.3460000000E 00	0.8852313121E 00	0.8853122538E 00	0.8094171067E-04
0.3469999999E 00	0.8866882552E 00	0.8867691233E 00	0.8086813622E-04
0.3479999999E 00	0.8881364490E 00	0.8882170096E 00	0.8056079977E-04
0.3490000001E 00	0.8895758767E 00	0.8896560552E 00	0.8017849185E-04
0.3499999998E 00	0.8910065242E 00	0.8910863324E 00	0.7980829113E-04
0.3510000000E 00	0.8924283781E 00	0.8925075172E 00	0.7913913586E-04
0.3520000001E 00	0.8938414256E 00	0.8939196958E 00	0.7827021187E-04
0.3529999998E 00	0.8952456486E 00	0.8953230904E 00	0.7744180044E-04
0.3540000000E 00	0.8966410378E 00	0.8967173881E 00	0.7635029038E-04
0.3550000000E 00	0.8980275760E 00	0.8981029517E 00	0.7537566131E-04
0.3560000000E 00	0.8994052517E 00	0.8994793412E 00	0.7408950486E-04
0.3570000001E 00	0.9007740509E 00	0.9008466128E 00	0.7256167015E-04
0.3579999998E 00	0.9021339598E 00	0.9022055284E 00	0.7156841462E-04
0.3590000000E 00	0.9034849654E 00	0.9035549066E 00	0.6994139411E-04
0.3600000000E 00	0.9048270534E 00	0.9048952744E 00	0.6822124129E-04
0.3609999999E 00	0.9061602107E 00	0.9062264203E 00	0.6620958453E-04
0.3619999999E 00	0.9074844249E 00	0.9075488960E 00	0.6447127097E-04
0.3630000001E 00	0.9087996832E 00	0.9088622052E 00	0.6252201279E-04
0.3639999998E 00	0.9101059704E 00	0.9101663834E 00	0.6041303279E-04
0.3649999999E 00	0.9114032767E 00	0.9114618168E 00	0.5854014310E-04
0.3660000001E 00	0.9126915880E 00	0.9127478713E 00	0.5628308285E-04
0.3669999998E 00	0.9139708902E 00	0.9140247206E 00	0.5383044484E-04
0.3680000000E 00	0.9152411730E 00	0.9152926940E 00	0.5152076485E-04
0.3690000002E 00	0.9165024233E 00	0.9165516765E 00	0.4925346006E-04
0.3699999999E 00	0.9177546266E 00	0.9178011780E 00	0.4655169327E-04
0.3710000001E 00	0.9189977725E 00	0.9190418981E 00	0.4412559796E-04
0.3719999998E 00	0.9202318475E 00	0.9202733081E 00	0.4146061840E-04
0.3730000000E 00	0.9214568415E 00	0.9214958031E 00	0.3896187993E-04
0.3740000001E 00	0.9226727397E 00	0.9227091714E 00	0.3643147650E-04
0.3749999998E 00	0.9238795326E 00	0.9239131843E 00	0.3365147861E-04
0.3759999999E 00	0.9250772071E 00	0.9251084395E 00	0.3123236824E-04
0.3770000000E 00	0.9262657517E 00	0.9262943703E 00	0.2861861140E-04
0.3779999997E 00	0.9274451532E 00	0.9274711336E 00	0.2598017455E-04
0.3789999999E 00	0.9286154021E 00	0.9286388540E 00	0.2345209942E-04
0.3800000001E 00	0.9297764867E 00	0.9297973038E 00	0.2081738786E-04
0.3809999998E 00	0.9309283937E 00	0.9309468001E 00	0.1840619371E-04
0.3820000000E 00	0.9320711125E 00	0.9320871634E 00	0.1605087892E-04
0.3830000002E 00	0.9332046327E 00	0.9332180810E 00	0.1344829798E-04
0.3839999999E 00	0.9343289420E 00	0.9343403966E 00	0.1145433635E-04
0.3850000001E 00	0.9354440313E 00	0.9354529452E 00	0.8913688368E-05
0.3860000002E 00	0.9365498877E 00	0.9365570684E 00	0.7180962715E-05
0.3869999999E 00	0.9376464996E 00	0.9376516982E 00	0.5198642615E-05
0.3880000001E 00	0.9387338578E 00	0.9387369421E 00	0.3084540368E-05
0.3889999997E 00	0.9398119521E 00	0.9398133971E 00	0.1444946975E-05
0.3899999998E 00	0.9408807696E 00	0.9408809451E 00	0.1755543054E-06
0.3910000000E 00	0.9419403017E 00	0.9419386901E 00	0.1611653716E-05
0.3919999997E 00	0.9429905365E 00	0.9429879493E 00	0.2587214114E-05
0.3929999999E 00	0.9440314644E 00	0.9440279558E 00	0.3508757801E-05
0.3940000000E 00	0.9450630757E 00	0.9450588482E 00	0.4227273169E-05
0.3949999997E 00	0.9460853596E 00	0.9460807298E 00	0.4629604521E-05
0.3960000000E 00	0.9470983049E 00	0.9470933906E 00	0.4914589229E-05
0.3970000002E 00	0.9481019040E 00	0.9480967926E 00	0.5111098293E-05
0.3979999999E 00	0.9490961448E 00	0.9490912461E 00	0.4898756746E-05
0.3990000000E 00	0.9500810194E 00	0.9500767225E 00	0.4296656701E-05
0.4000000002E 00	0.9510565171E 00	0.9510532547E 00	0.3262422980E-05
0.4009999999E 00	0.9520226267E 00	0.9520205759E 00	0.2050772311E-05
0.4020000001E 00	0.9529793425E 00	0.9529786803E 00	0.6621703509E-06
0.4030000001E 00	0.9539266515E 00	0.9539278249E 00	0.1173466444E-05
0.4039999998E 00	0.9548645452E 00	0.9548679082E 00	0.3363005818E-05
0.4050000000E 00	0.9557930154E 00	0.9557989086E 00	0.5893409255E-05
0.4059999997E 00	0.9567120517E 00	0.9567203691E 00	0.8317176259E-05
0.4069999998E 00	0.9576216458E 00	0.9576329439E 00	0.1129833982E-04
0.4080000000E 00	0.9585217896E 00	0.9585356533E 00	0.1386366785E-04
0.4089999997E 00	0.9594124727E 00	0.9594295965E 00	0.1712376253E-04
0.4100000000E 00	0.9602936867E 00	0.9603141956E 00	0.2050912009E-04
0.4110000001E 00	0.9611654223E 00	0.9611899687E 00	0.2454640345E-04
0.4119999998E 00	0.9620276712E 00	0.9620555900E 00	0.2791872249E-04
0.4130000000E 00	0.9628804274E 00	0.9629120221E 00	0.3159465272E-04
0.4140000002E 00	0.9637236788E 00	0.9637594975E 00	0.3581866624E-04
0.4149999999E 00	0.9645574190E 00	0.9645969483E 00	0.3952905538E-04
0.4160000000E 00	0.9653816395E 00	0.9654250401E 00	0.4340056332E-04
0.4170000001E 00	0.9661963318E 00	0.9662439010E 00	0.4756916317E-04
0.4179999998E 00	0.9670014879E 00	0.9670527202E 00	0.5123205485E-04
0.4189999999E 00	0.9677971012E 00	0.9678524043E 00	0.5530333150E-04
0.4200000001E 00	0.9685831614E 00	0.9686427183E 00	0.5955668170E-04

0.4209999998E 00	0.9693596630E 00	0.9694235990E 00	0.6393622615E-04
0.4220000000E 00	0.9701265976E 00	0.9701944102E 00	0.6781239071E-04
0.4229999997E 00	0.9708839568E 00	0.9709557571E 00	0.7180031397E-04
0.4239999999E 00	0.9716317334E 00	0.9717070742E 00	0.7534073671E-04
0.4250000001E 00	0.9723699209E 00	0.9724497664E 00	0.7984554403E-04
0.4259999998E 00	0.9730985115E 00	0.9731823005E 00	0.8378922944E-04
0.4270000000E 00	0.9738174979E 00	0.9739046816E 00	0.8718343457E-04
0.4280000001E 00	0.9745268735E 00	0.9746176351E 00	0.9076157590E-04
0.4289999998E 00	0.9752266299E 00	0.9753211766E 00	0.9454647084E-04
0.4300000000E 00	0.9759167626E 00	0.9760148175E 00	0.9805522864E-04
0.4310000000E 00	0.9765972620E 00	0.9766985767E 00	0.1013143920E-03
0.4319999997E 00	0.9772681235E 00	0.9773725960E 00	0.1044725068E-03
0.4329999999E 00	0.9779293404E 00	0.9780368062E 00	0.1074657776E-03
0.4340000001E 00	0.9785809046E 00	0.9786910135E 00	0.1101088710E-03
0.4349999998E 00	0.9792228103E 00	0.9793358414E 00	0.1130308956E-03
0.4359999999E 00	0.9798550528E 00	0.9799706833E 00	0.1156306826E-03
0.4370000001E 00	0.9804776243E 00	0.9805956976E 00	0.1180735417E-03
0.4379999999E 00	0.9810905184E 00	0.9812110343E 00	0.1205159352E-03
0.4390000001E 00	0.9816937283E 00	0.9818160035E 00	0.1222752035E-03
0.4399999998E 00	0.9822871250E 00	0.9824115037E 00	0.1242528671E-03
0.4409999999E 00	0.9828710784E 00	0.9829971648E 00	0.1260861755E-03
0.4420000001E 00	0.9834452061E 00	0.9835727065E 00	0.1275003889E-03
0.4429999998E 00	0.9840096258E 00	0.9841382033E 00	0.1285774634E-03
0.4440000000E 00	0.9845643355E 00	0.9846943037E 00	0.1299679280E-03
0.4450000000E 00	0.9851093259E 00	0.9852399320E 00	0.1306058840E-03
0.4459999997E 00	0.9856445952E 00	0.9857761499E 00	0.1315544361E-03
0.4469999999E 00	0.9861701370E 00	0.9863022067E 00	0.1320699230E-03
0.4480000000E 00	0.9866859451E 00	0.9868181953E 00	0.1322501340E-03
0.4489999997E 00	0.9871920139E 00	0.9873241866E 00	0.1321728342E-03
0.4499999999E 00	0.9876883407E 00	0.9878207573E 00	0.1324163750E-03
0.4510000001E 00	0.9881749195E 00	0.9883071163E 00	0.1321965829E-03
0.4519999999E 00	0.9886517454E 00	0.9887835320E 00	0.1317863353E-03
0.4530000000E 00	0.9891188133E 00	0.9892496876E 00	0.1308745705E-03
0.4540000000E 00	0.9895761196E 00	0.9897059383E 00	0.1298189164E-03
0.4549999999E 00	0.9900236581E 00	0.9901526335E 00	0.1289751382E-03
0.4560000001E 00	0.9904614265E 00	0.9905887823E 00	0.1273560339E-03
0.4569999998E 00	0.9908894186E 00	0.9910149718E 00	0.1255534590E-03
0.4579999999E 00	0.9913076316E 00	0.9914318299E 00	0.1241983846E-03
0.4590000000E 00	0.9917160603E 00	0.9918379210E 00	0.1218607650E-03
0.4599999997E 00	0.9921147017E 00	0.9922351115E 00	0.1204097644E-03
0.4609999998E 00	0.9925035515E 00	0.9926213277E 00	0.1177764498E-03
0.4620000000E 00	0.9928822604E 00	0.9929984137E 00	0.1158094965E-03
0.4629999997E 00	0.9932518599E 00	0.9933647406E 00	0.1128809527E-03
0.4639999999E 00	0.9936113110E 00	0.9937213442E 00	0.1100329683E-03
0.4650000000E 00	0.9939609565E 00	0.9940680502E 00	0.1070937142E-03
0.4659999998E 00	0.9943007905E 00	0.9944050488E 00	0.1042583026E-03
0.4670000000E 00	0.9946308131E 00	0.9947315880E 00	0.1007746905E-03
0.4680000002E 00	0.9949510176E 00	0.9950486721E 00	0.9765429430E-04
0.4689999999E 00	0.9952614032E 00	0.9953552682E 00	0.9386474272E-04
0.4700000000E 00	0.9955619652E 00	0.9956527310E 00	0.9076576688E-04
0.4709999997E 00	0.9958527018E 00	0.9959395977E 00	0.8689565592E-04
0.4719999999E 00	0.9961336094E 00	0.9962166203E 00	0.8301110943E-04
0.4729999999E 00	0.9964046864E 00	0.9964837746E 00	0.7908791309E-04
0.4739999996E 00	0.9966659280E 00	0.9967411104E 00	0.7518241187E-04
0.4749999998E 00	0.9969173341E 00	0.9969886338E 00	0.7129972809E-04
0.4760000000E 00	0.9971589006E 00	0.9972263313E 00	0.6743101411E-04
0.4769999997E 00	0.9973906257E 00	0.9974541002E 00	0.6347475581E-04
0.4779999998E 00	0.9976125068E 00	0.9976716623E 00	0.5915574732E-04
0.4790000000E 00	0.9978245417E 00	0.9978794716E 00	0.5492987115E-04
0.4799999998E 00	0.9980267293E 00	0.9980775541E 00	0.5082506689E-04
0.4810000000E 00	0.9982190658E 00	0.9982661879E 00	0.4712212833E-04
0.4820000001E 00	0.9984015510E 00	0.9984445911E 00	0.4304014149E-04
0.4829999998E 00	0.9985741812E 00	0.9986131591E 00	0.3897817809E-04
0.4840000000E 00	0.9987369566E 00	0.9987719610E 00	0.3500422467E-04
0.4850000002E 00	0.9988898751E 00	0.9989208579E 00	0.3098277379E-04
0.4859999999E 00	0.9990329358E 00	0.9990605311E 00	0.2759555356E-04
0.4869999999E 00	0.9991661352E 00	0.9991901249E 00	0.2398947255E-04
0.4879999996E 00	0.9992894730E 00	0.9993100257E 00	0.2055242659E-04
0.4889999998E 00	0.9994029493E 00	0.9994200158E 00	0.1706648619E-04
0.4899999999E 00	0.9995065608E 00	0.9995205111E 00	0.1395028085E-04
0.4909999996E 00	0.9996003087E 00	0.9996114054E 00	0.1109670848E-04
0.4919999998E 00	0.9996841899E 00	0.9996926167E 00	0.8426606662E-05
0.4930000000E 00	0.9997582049E 00	0.9997642931E 00	0.6088055673E-05
0.4939999998E 00	0.9998223525E 00	0.9998262019E 00	0.3849156204E-05
0.4949999999E 00	0.9998766330E 00	0.9998784470E 00	0.1814216376E-05
0.4960000001E 00	0.9999210450E 00	0.9999208615E 00	0.1834705473E-06
0.4969999998E 00	0.9999555875E 00	0.9999542976E 00	0.1289881766E-05
0.4980000000E 00	0.9999802613E 00	0.9999781090E 00	0.2152286471E-05
0.4990000001E 00	0.9999950656E 00	0.9999923142E 00	0.2751126887E-05
0.4999999998E 00	0.1000000000E 01	0.9999971527E 00	0.2847984434E-05
0.5010000003E 00	0.9999950665E 00	0.9999922732E 00	0.2793036403E-05
0.5020000003E 00	0.9999802613E 00	0.9999780312E 00	0.2230051906E-05
0.5030000002E 00	0.9999555884E 00	0.9999540185E 00	0.1570209861E-05
0.5040000001E 00	0.9999210450E 00	0.9999213747E 00	0.3296881916E-06
0.5050000001E 00	0.9998766330E 00	0.9998780968E 00	0.1464039088E-05

0.50600000000E 00	0.9998223534E 00	0.9998262866E 00	0.3932975236E-05
0.507000000004E 00	0.9997582049E 00	0.9997643225E 00	0.6117392334E-05
0.50799999999E 00	0.9996841899E 00	0.9996916323E 00	0.7442198697E-05
0.509000000003E 00	0.9996003077E 00	0.9996115204E 00	0.1121265814E-04
0.510000000002E 00	0.9995065617E 00	0.9995206419E 00	0.1408020035E-04
0.511000000001E 00	0.9994029493E 00	0.9994193252E 00	0.1637591050E-04
0.512000000005E 00	0.9992894730E 00	0.9993094343E 00	0.1996103675E-04
0.513000000000E 00	0.9991661342E 00	0.9991904248E 00	0.2429028974E-04
0.514000000001E 00	0.9990329358E 00	0.9990607183E 00	0.2778274939E-04
0.515000000001E 00	0.9988898751E 00	0.9989205510E 00	0.3067590299E-04
0.516000000005E 00	0.9987369566E 00	0.9987720001E 00	0.3504334021E-04
0.517000000004E 00	0.9985741812E 00	0.9986120532E 00	0.3787223252E-04
0.51799999999E 00	0.9984015501E 00	0.9984446433E 00	0.4309322687E-04
0.51899999998E 00	0.9982190667E 00	0.9982665665E 00	0.4749977965E-04
0.520000000002E 00	0.9980267293E 00	0.9980768652E 00	0.5013588818E-04
0.521000000001E 00	0.9978245426E 00	0.9978794604E 00	0.5491776396E-04
0.522000000005E 00	0.9976125068E 00	0.9976721378E 00	0.5963118751E-04
0.523000000005E 00	0.9973906257E 00	0.9974535703E 00	0.6294483324E-04
0.52399999999E 00	0.9971589015E 00	0.9972257521E 00	0.6685080012E-04
0.52499999999E 00	0.9969173350E 00	0.9969881998E 00	0.7086480042E-04
0.526000000003E 00	0.9966659289E 00	0.9967412929E 00	0.7536400198E-04
0.527000000002E 00	0.9964046864E 00	0.9964841299E 00	0.7944321268E-04
0.528000000003E 00	0.9961336103E 00	0.9962163455E 00	0.8273543795E-04
0.52899999998E 00	0.9958527027E 00	0.9959390198E 00	0.8631683891E-04
0.52999999997E 00	0.9955619652E 00	0.9956526104E 00	0.9064516061E-04
0.531000000001E 00	0.9952614032E 00	0.9953548533E 00	0.9344983854E-04
0.532000000001E 00	0.9949510176E 00	0.9950479385E 00	0.9692087775E-04
0.533000000005E 00	0.9946308131E 00	0.9947318539E 00	0.1010405831E-03
0.534000000004E 00	0.9943007915E 00	0.9944047802E 00	0.1039886847E-03
0.53499999999E 00	0.9939609565E 00	0.9940675394E 00	0.1065828838E-03
0.53599999998E 00	0.9936113110E 00	0.9937218457E 00	0.1105344855E-03
0.537000000002E 00	0.9932518599E 00	0.9933641902E 00	0.1123305410E-03
0.538000000001E 00	0.9928826063E 00	0.9929978386E 00	0.1152325422E-03
0.539000000005E 00	0.9925035515E 00	0.9926218432E 00	0.1182919369E-03
0.540000000005E 00	0.9921147017E 00	0.9922343362E 00	0.1196344383E-03
0.54099999999E 00	0.9917160612E 00	0.9918381106E 00	0.1220493578E-03
0.542000000001E 00	0.9913076325E 00	0.9914320567E 00	0.1244242304E-03
0.543000000000E 00	0.9908894195E 00	0.9910148107E 00	0.1253914089E-03
0.544000000004E 00	0.9904614265E 00	0.9905891758E 00	0.1277495177E-03
0.545000000003E 00	0.9900236581E 00	0.9901519354E 00	0.1282771119E-03
0.54599999998E 00	0.9895761196E 00	0.9897051663E 00	0.1290468500E-03
0.54699999997E 00	0.9891188142E 00	0.9892494194E 00	0.1306054183E-03
0.548000000001E 00	0.9886517454E 00	0.9887838677E 00	0.1321220771E-03
0.549000000001E 00	0.9881749195E 00	0.9883058692E 00	0.1309495420E-03
0.550000000005E 00	0.9876883416E 00	0.9878205542E 00	0.1322124155E-03
0.551000000004E 00	0.9871920149E 00	0.9873247104E 00	0.1326957718E-03
0.55199999999E 00	0.9866859451E 00	0.9868179839E 00	0.1320387238E-03
0.55299999998E 00	0.9861701370E 00	0.9863019031E 00	0.1317663119E-03
0.554000000002E 00	0.9856445961E 00	0.9857761429E 00	0.1315465198E-03
0.555000000001E 00	0.9851093268E 00	0.9852396554E 00	0.1303283499E-03
0.556000000003E 00	0.9845643355E 00	0.9846944843E 00	0.1301486046E-03
0.557000000007E 00	0.9840096258E 00	0.9841390887E 00	0.1294626855E-03
0.55799999997E 00	0.9834452061E 00	0.9835724802E 00	0.1272740775E-03
0.559000000001E 00	0.9828710784E 00	0.9829970032E 00	0.1259245911E-03
0.560000000000E 00	0.9822872518E 00	0.9824119936E 00	0.1247418114E-03
0.561000000004E 00	0.9816937292E 00	0.9818165129E 00	0.1227837057E-03
0.562000000003E 00	0.9810905184E 00	0.9812102385E 00	0.1197201200E-03
0.56299999998E 00	0.9804776252E 00	0.9805959621E 00	0.1183371060E-03
0.56399999997E 00	0.9798550538E 00	0.9799705534E 00	0.1154998318E-03
0.565000000001E 00	0.9792228112E 00	0.9793362093E 00	0.1133978367E-03
0.566000000001E 00	0.9785809055E 00	0.9786911995E 00	0.1102937386E-03
0.567000000005E 00	0.9779293404E 00	0.9780363433E 00	0.1070029103E-03
0.568000000004E 00	0.9772681244E 00	0.9773722891E 00	0.1041647047E-03
0.56899999999E 00	0.9765972630E 00	0.9766987736E 00	0.1015104353E-03
0.570000000000E 00	0.9759167635E 00	0.9760135584E 00	0.9679514923E-04
0.57099999999E 00	0.9752266309E 00	0.9753211212E 00	0.9449012583E-04
0.572000000003E 00	0.9745268744E 00	0.9746179135E 00	0.9103911003E-04
0.573000000003E 00	0.9738174979E 00	0.9739044436E 00	0.8694548168E-04
0.574000000007E 00	0.9730985125E 00	0.9731819587E 00	0.8344650274E-04
0.57499999997E 00	0.9723699218E 00	0.9724500156E 00	0.8009374147E-04
0.576000000001E 00	0.9716317343E 00	0.9717073643E 00	0.7562991240E-04
0.577000000000E 00	0.9708839568E 00	0.9709555960E 00	0.7163919514E-04
0.578000000004E 00	0.9701265976E 00	0.9701944000E 00	0.6780214613E-04
0.579000000003E 00	0.9693596630E 00	0.9694231245E 00	0.6346171730E-04
0.57999999998E 00	0.9685831624E 00	0.9686433179E 00	0.6015552212E-04
0.58099999997E 00	0.9677971021E 00	0.9678530674E 00	0.5596550185E-04
0.582000000001E 00	0.9670014888E 00	0.9670536050E 00	0.5211587998E-04
0.583000000001E 00	0.9661963318E 00	0.9662437394E 00	0.4740757871E-04
0.584000000002E 00	0.9653816395E 00	0.9654251215E 00	0.4348205406E-04
0.585000000006E 00	0.9645574199E 00	0.9645965050E 00	0.3908481451E-04
0.58599999996E 00	0.9637236797E 00	0.9637597275E 00	0.3604777160E-04
0.587000000000E 00	0.9628804284E 00	0.9629118544E 00	0.3142608333E-04
0.58799999999E 00	0.9620276731E 00	0.9620547974E 00	0.2712430433E-04
0.589000000003E 00	0.9611654232E 00	0.9611897349E 00	0.2431171016E-04
0.590000000003E 00	0.9602936867E 00	0.9603150859E 00	0.2139946447E-04

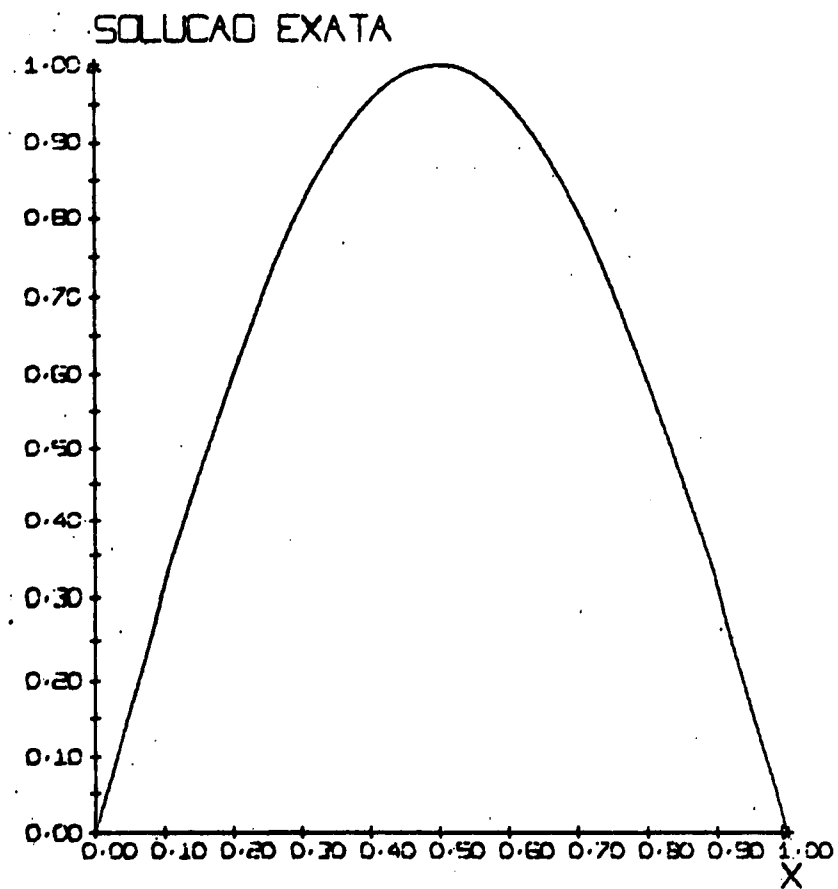
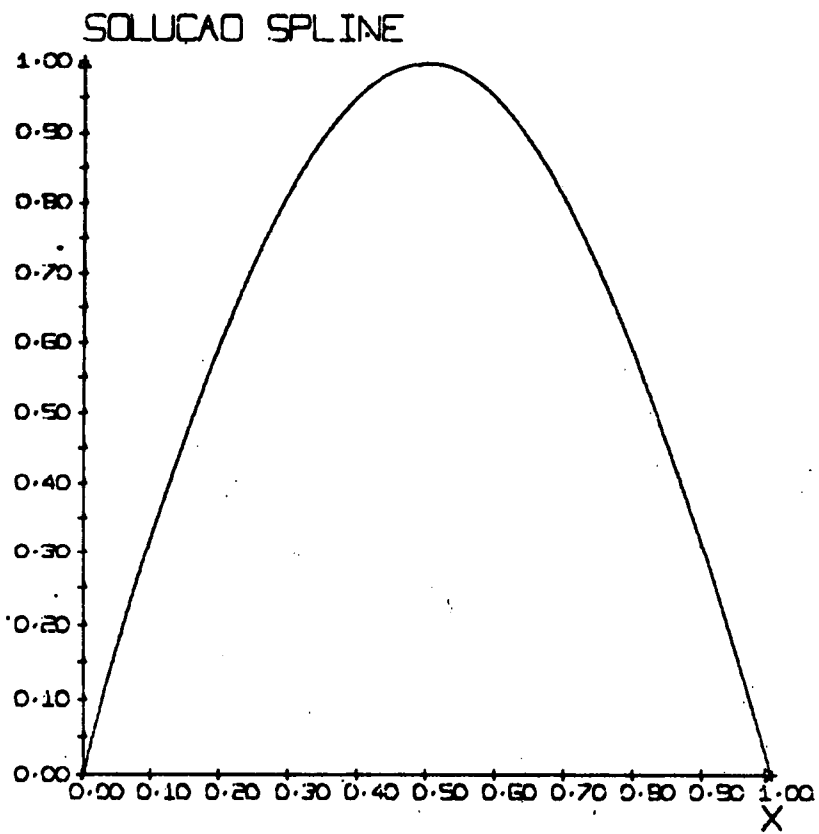
0.59100000007E 00	0.9594124727E 00	0.9594300277E 00	0.1755496488E-04
0.5919999997E 00	0.9585217905E 00	0.9585357971E 00	0.1400662586E-04
0.59300000001E 00	0.9576216477E 00	0.9576331065E 00	0.1145899296E-04
0.59400000000E 00	0.9567120526E 00	0.9567207933E 00	0.8740462369E-05
0.59500000004E 00	0.9557930163E 00	0.9557991237E 00	0.6107613447E-05
0.59600000003E 00	0.9548645452E 00	0.9548677271E 00	0.3181863577E-05
0.5969999998E 00	0.9539266524E 00	0.9539276373E 00	0.9848736235E-06
0.5979999999E 00	0.9529793425E 00	0.9529790491E 00	0.2933666112E-06
0.5989999999E 00	0.9520226276E 00	0.9520200954E 00	0.2532266082E-05
0.60000000003E 00	0.9510565171E 00	0.9510526149E 00	0.3902241591E-05
0.60100000002E 00	0.9500810203E 00	0.9500774741E 00	0.3546010704E-05
0.60200000006E 00	0.9490961458E 00	0.9490916363E 00	0.4509463909E-05
0.6029999996E 00	0.9481019049E 00	0.9480977619E 00	0.4142988476E-05
0.60400000000E 00	0.9470983068E 00	0.9470947280E 00	0.3579072656E-05
0.6049999999E 00	0.9460853596E 00	0.9460809533E 00	0.4406087104E-05
0.60600000003E 00	0.9450630766E 00	0.9450593134E 00	0.3763008864E-05
0.60700000003E 00	0.9440314644E 00	0.9440293314E 00	0.2133194358E-05
0.60800000007E 00	0.9429905365E 00	0.9429888513E 00	0.1685228199E-05
0.6089999997E 00	0.9419403017E 00	0.9419406345E 00	0.3329478206E-06
0.61000000001E 00	0.9408807705E 00	0.9408823160E 00	0.1545529813E-05
0.61100000000E 00	0.9398119521E 00	0.9398139894E 00	0.2037268133E-05
0.61200000001E 00	0.9387338587E 00	0.9387380005E 00	0.4142057154E-05
0.61300000005E 00	0.9376465005E 00	0.9376532030E 00	0.6702728573E-05
0.6139999995E 00	0.9365498886E 00	0.9365582331E 00	0.8344650275E-05
0.6149999999E 00	0.9354440323E 00	0.9354540037E 00	0.9971205152E-05
0.6159999999E 00	0.9343289439E 00	0.9343412031E 00	0.1225899905E-04
0.61700000003E 00	0.9332046336E 00	0.9332202852E 00	0.1565134154E-04
0.61800000002E 00	0.9320711144E 00	0.9320883355E 00	0.1722108574E-04
0.61900000006E 00	0.9309283946E 00	0.9309475498E 00	0.1915497706E-04
0.6199999996E 00	0.9297764876E 00	0.9297976610E 00	0.2117361874E-04
0.62100000000E 00	0.9286154031E 00	0.9286398435E 00	0.2444069833E-04
0.6219999999E 00	0.9274451541E 00	0.9274703862E 00	0.2523185686E-04
0.62300000003E 00	0.9262657517E 00	0.9262948085E 00	0.2905679868E-04
0.62400000003E 00	0.9250772080E 00	0.9251100588E 00	0.3285100687E-04
0.62500000004E 00	0.9238795326E 00	0.9239145421E 00	0.3500934693E-04
0.6259999999E 00	0.9226727406E 00	0.9227097716E 00	0.3703078259E-04
0.6269999998E 00	0.9214568424E 00	0.9214972602E 00	0.4041800279E-04
0.62800000002E 00	0.9202318484E 00	0.9202734939E 00	0.4164548595E-04
0.62900000001E 00	0.9189977725E 00	0.9190423311E 00	0.4455866296E-04
0.63000000005E 00	0.9177546266E 00	0.9178026695E 00	0.4804320636E-04
0.6309999995E 00	0.9165024242E 00	0.9165520993E 00	0.4967534918E-04
0.6319999999E 00	0.9152411748E 00	0.9152935219E 00	0.5234684797E-04
0.6329999999E 00	0.9139708920E 00	0.9140266284E 00	0.5573639650E-04
0.63400000003E 00	0.9126915889E 00	0.9127486946E 00	0.5710544068E-04
0.63500000002E 00	0.9114032785E 00	0.9114630462E 00	0.5976762625E-04
0.63600000006E 00	0.9101059723E 00	0.9101653269E 00	0.5935458470E-04
0.6369999996E 00	0.9087996841E 00	0.9088633353E 00	0.6365124144E-04
0.63800000000E 00	0.9074844259E 00	0.9075502101E 00	0.6578443580E-04
0.63900000001E 00	0.9061602116E 00	0.9062270857E 00	0.6687408321E-04
0.64000000001E 00	0.9048270534E 00	0.9048971282E 00	0.7007503887E-04
0.64100000005E 00	0.9034849654E 00	0.9035555366E 00	0.7057143383E-04
0.64200000004E 00	0.9021339598E 00	0.9022076549E 00	0.7369508975E-04
0.6429999999E 00	0.9007740519E 00	0.9008482561E 00	0.7420405751E-04
0.6439999998E 00	0.8994052535E 00	0.8994817086E 00	0.7645506420E-04
0.64500000002E 00	0.8980275769E 00	0.8981036837E 00	0.7610674956E-04
0.64600000001E 00	0.8966410378E 00	0.8967196918E 00	0.7865391677E-04
0.64700000005E 00	0.8952456496E 00	0.8953247969E 00	0.7914751773E-04
0.6479999995E 00	0.8938414265E 00	0.8939210157E 00	0.7958943029E-04
0.6489999999E 00	0.8924283799E 00	0.8925076164E 00	0.7923645907E-04
0.6499999999E 00	0.8910065251E 00	0.8910876926E 00	0.8116755643E-04
0.65100000003E 00	0.8895758776E 00	0.8896573681E 00	0.8149025970E-04
0.65200000002E 00	0.8881364499E 00	0.8882177551E 00	0.8130539217E-04
0.65300000003E 00	0.8866882561E 00	0.8867701180E 00	0.8186185738E-04
0.6539999998E 00	0.8852313139E 00	0.8853136880E 00	0.8237408479E-04
0.6549999997E 00	0.8837656318E 00	0.8838468145E 00	0.8118245759E-04
0.65600000001E 00	0.8822912282E 00	0.8823722591E 00	0.8103111764E-04
0.65700000001E 00	0.8808081166E 00	0.8808888315E 00	0.8071493365E-04
0.65800000005E 00	0.8793163110E 00	0.8793976372E 00	0.8132634692E-04
0.65900000004E 00	0.8778158274E 00	0.8778957545E 00	0.7992703476E-04
0.6599999999E 00	0.8763066816E 00	0.8763852410E 00	0.7855938753E-04
0.6609999998E 00	0.8747888864E 00	0.8748681303E 00	0.7924390965E-04
0.66200000002E 00	0.8732624561E 00	0.8733403212E 00	0.7786508658E-04
0.66300000001E 00	0.8717274076E 00	0.8718043060E 00	0.7689837374E-04
0.66400000005E 00	0.8701837561E 00	0.8702600370E 00	0.7628090685E-04
0.6649999995E 00	0.8686315163E 00	0.8687061101E 00	0.7459381600E-04
0.6659999999E 00	0.8670707033E 00	0.8671447969E 00	0.7409369581E-04
0.66700000001E 00	0.8655013316E 00	0.8655737736E 00	0.7244199520E-04
0.66800000000E 00	0.8639234188E 00	0.8639930204E 00	0.6960146134E-04
0.66900000004E 00	0.8623369787E 00	0.8624067429E 00	0.6976397713E-04
0.67000000003E 00	0.8607420285E 00	0.8608093364E 00	0.6730807953E-04
0.6709999998E 00	0.8591385835E 00	0.8592054771E 00	0.6689364096E-04
0.6719999997E 00	0.8575266588E 00	0.8575901612E 00	0.6350269549E-04
0.67300000001E 00	0.8559062692E 00	0.8559692006E 00	0.6293132906E-04
0.67400000001E 00	0.8542774326E 00	0.8543371811E 00	0.5974853415E-04
0.67500000005E 00	0.8526401657E 00	0.8526970790E 00	0.5691358823E-04

0.6760000004E 00	0.8509944824E 00	0.8510492318E 00	0.5474966022E-04
0.6769999999E 00	0.8493404020E 00	0.8493917935E 00	0.5139131101E-04
0.6779999998E 00	0.8476779372E 00	0.8477290843E 00	0.5114683885E-04
0.6790000002E 00	0.8460071065E 00	0.8460544296E 00	0.4732329401E-04
0.6800000001E 00	0.8443279273E 00	0.8443731570E 00	0.4522968086E-04
0.6810000003E 00	0.8426404125E 00	0.8426842759E 00	0.4386343064E-04
0.6819999997E 00	0.8409445849E 00	0.8409848229E 00	0.4023779186E-04
0.6829999997E 00	0.8392404546E 00	0.8392765016E 00	0.3604684027E-04
0.6840000001E 00	0.8375280420E 00	0.8375632551E 00	0.3521284092E-04
0.6850000000E 00	0.8358073621E 00	0.8358396210E 00	0.3225868572E-04
0.6860000004E 00	0.8340784343E 00	0.8341086991E 00	0.3026472406E-04
0.6870000003E 00	0.8323412747E 00	0.8323689266E 00	0.2765189857E-04
0.6879999998E 00	0.8305959019E 00	0.8306192974E 00	0.2339575441E-04
0.6889999997E 00	0.8288423283E 00	0.8288639951E 00	0.2166675405E-04
0.6900000001E 00	0.8270805755E 00	0.8270986264E 00	0.1805089415E-04
0.6910000001E 00	0.8253106602E 00	0.8253260322E 00	0.1537194476E-04
0.6920000005E 00	0.8235325985E 00	0.8235476566E 00	0.1505808905E-04
0.6930000004E 00	0.8217464096E 00	0.8217585312E 00	0.1212162897E-04
0.6939999999E 00	0.8199521112E 00	0.8199606437E 00	0.8532311774E-05
0.6950000000E 00	0.8181497189E 00	0.8181556633E 00	0.5944166336E-05
0.6959999999E 00	0.8163392522E 00	0.8163436593E 00	0.4407018426E-05
0.6970000003E 00	0.8145207283E 00	0.8145220854E 00	0.1356936992E-05
0.6980000003E 00	0.8126941656E 00	0.8126947886E 00	0.6230548028E-06
0.6989999997E 00	0.8108595828E 00	0.8108581248E 00	0.1457985491E-05
0.6999999997E 00	0.8090169967E 00	0.8090138367E 00	0.3159977497E-05
0.7010000001E 00	0.8071664250E 00	0.8071587912E 00	0.7634051151E-05
0.7020000000E 00	0.8053078872E 00	0.8052982641E 00	0.9622890509E-05
0.7030000004E 00	0.8034414011E 00	0.8034327991E 00	0.8602160967E-05
0.7040000003E 00	0.8015669859E 00	0.8015556612E 00	0.1132488251E-04
0.7049999998E 00	0.7996846609E 00	0.7996713547E 00	0.1330627129E-04
0.7059999997E 00	0.7977944412E 00	0.7977802287E 00	0.1421244815E-04
0.7070000001E 00	0.7958963483E 00	0.7958808818E 00	0.1546647401E-04
0.7080000001E 00	0.7939904003E 00	0.7939726233E 00	0.1777708531E-04
0.7090000002E 00	0.7920766153E 00	0.7920588259E 00	0.1778919251E-04
0.7100000006E 00	0.7901550137E 00	0.7901366688E 00	0.1834472642E-04
0.7109999996E 00	0.7882256140E 00	0.7882072872E 00	0.1832703129E-04
0.7120000000E 00	0.7862884341E 00	0.7862717430E 00	0.1669116319E-04
0.7129999999E 00	0.7843434929E 00	0.7843232937E 00	0.2019898967E-04
0.7140000003E 00	0.7823908121E 00	0.7823693342E 00	0.2147769556E-04
0.7150000003E 00	0.7804304077E 00	0.7804104865E 00	0.1992145554E-04
0.7159999997E 00	0.7784623042E 00	0.7784411122E 00	0.2119224519E-04
0.7169999997E 00	0.7764865148E 00	0.7764630401E 00	0.2347445116E-04
0.7180000001E 00	0.7745030622E 00	0.7744807298E 00	0.2233218403E-04
0.7190000000E 00	0.7725119651E 00	0.7724911512E 00	0.2081412823E-04
0.7200000004E 00	0.7705132444E 00	0.7704935604E 00	0.1968396828E-04
0.7210000003E 00	0.7685069178E 00	0.7684865093E 00	0.2040853725E-04
0.7219999998E 00	0.7664930091E 00	0.7664730150E 00	0.1999409870E-04
0.7229999999E 00	0.7644715332E 00	0.7644501621E 00	0.2137105913E-04
0.7239999999E 00	0.7624425512E 00	0.7624211320E 00	0.2138083802E-04
0.7250000003E 00	0.7604059667E 00	0.7603817163E 00	0.2425024287E-04
0.7260000002E 00	0.7583619165E 00	0.7583415119E 00	0.2040481196E-04
0.7269999997E 00	0.7563103835E 00	0.7562931105E 00	0.1727277414E-04
0.7279999996E 00	0.7542513830E 00	0.7542334711E 00	0.1791166143E-04
0.7290000000E 00	0.7521849391E 00	0.7521658295E 00	0.1910980792E-04
0.7299999999E 00	0.7501110718E 00	0.7500923494E 00	0.1872237773E-04
0.7310000003E 00	0.7480297998E 00	0.7480094598E 00	0.2034008504E-04
0.7320000003E 00	0.7459411469E 00	0.7459222630E 00	0.1888396219E-04
0.7329999997E 00	0.7438451328E 00	0.7438293781E 00	0.1575471834E-04
0.7339999997E 00	0.7417417753E 00	0.7417260070E 00	0.1576822252E-04
0.7350000001E 00	0.7396310963E 00	0.7396134808E 00	0.1761550085E-04
0.7360000000E 00	0.7375131191E 00	0.7374973248E 00	0.1579429955E-04
0.7370000001E 00	0.7353878621E 00	0.7353715412E 00	0.1632096247E-04
0.7380000005E 00	0.7332553470E 00	0.7332404109E 00	0.1493608579E-04
0.7389999995E 00	0.7311155977E 00	0.7311010141E 00	0.1458358020E-04
0.7399999999E 00	0.7289686293E 00	0.7289557459E 00	0.1288345084E-04
0.7409999999E 00	0.7268144672E 00	0.7267997323E 00	0.1473492012E-04
0.7420000003E 00	0.7246531320E 00	0.7246434376E 00	0.9694136686E-05
0.7430000002E 00	0.7224846442E 00	0.7224733885E 00	0.1075863838E-04
0.7439999997E 00	0.7203090279E 00	0.7202977889E 00	0.9239185608E-05
0.7449999996E 00	0.7181263002E 00	0.7181185886E 00	0.7711816586E-05
0.7460000000E 00	0.7159364854E 00	0.7159262571E 00	0.1022825018E-04
0.7469999999E 00	0.7137396044E 00	0.7137304097E 00	0.9194482124E-05
0.7480000003E 00	0.7115356787E 00	0.7115264616E 00	0.9217299528E-05
0.7490000003E 00	0.7093247300E 00	0.7093161742E 00	0.8556060500E-05
0.7499999997E 00	0.7071067837E 00	0.7071009387E 00	0.5844980481E-05
0.7509999999E 00	0.7048818562E 00	0.7048758391E 00	0.6017275158E-05
0.7519999998E 00	0.7026499721E 00	0.7026443188E 00	0.5653128031E-05
0.7530000002E 00	0.7004111525E 00	0.7004090072E 00	0.2145301552E-05
0.7540000001E 00	0.6981654202E 00	0.6981620814E 00	0.3338791431E-05
0.7550000005E 00	0.6959127974E 00	0.6959095760E 00	0.3221444787E-05
0.7559999995E 00	0.6936533083E 00	0.6936510503E 00	0.2257991583E-05
0.7569999999E 00	0.6913869713E 00	0.6913821417E 00	0.4829373214E-05
0.7579999999E 00	0.6891138104E 00	0.6891101680E 00	0.3642402591E-05
0.7590000003E 00	0.6868338477E 00	0.6868366564E 00	0.2808403225E-05
0.7600000002E 00	0.6845471067E 00	0.6845469544E 00	0.1522712410E-06

0.7609999997E 00	G.6822536117E 00	0.6822556629E 00	0.2051237972E-05
0.7619999996E 00	0.6799533809E 00	0.6799562100E 00	0.2828892322E-05
0.7630000000E 00	0.6776464395E 00	0.6776490402E 00	0.2600718291E-05
0.7640000001E 00	0.6753328100E 00	0.6753351006E 00	0.2290587874E-05
0.7650000001E 00	0.6730125148E 00	0.6730150429E 00	0.2528075130E-05
0.7660000005E 00	0.6706855776E 00	0.6706889658E 00	0.3388151528E-05
0.7669999995E 00	0.6683520227E 00	0.6683566765E 00	0.4653818908E-05
0.7679999999E 00	0.6660118701E 00	0.6660160413E 00	0.4171393815E-05
0.7689999998E 00	0.6636651440E 00	0.6636694343E 00	0.4290603104E-05
0.7700000002E 00	0.6613118669E 00	0.6613162136E 00	0.4346948120E-05
0.7710000001E 00	0.6589520634E 00	0.6589569258E 00	0.4862435165E-05
0.7720000005E 00	0.6565857566E 00	0.6565936075E 00	0.7850583649E-05
0.7729999995E 00	0.6542129719E 00	0.6542199917E 00	0.7019843909E-05
0.7739999999E 00	0.6518337277E 00	0.6518384132E 00	0.4685483876E-05
0.7749999999E 00	0.6494480501E 00	0.6494537421E 00	0.5691777918E-05
0.7760000003E 00	0.6470559630E 00	0.6470611097E 00	0.5146488550E-05
0.7770000002E 00	0.6446574898E 00	0.6446640386E 00	0.6548594686E-05
0.7779999994E 00	0.6422526563E 00	0.6422606874E 00	0.8031260229E-05
0.7789999998E 00	0.6398414818E 00	0.6398483701E 00	0.6888527426E-05
0.7799999997E 00	G.6374239916E 00	0.6374332678E 00	0.9275972850E-05
0.7810000001E 00	0.6350002111E 00	0.6350084107E 00	0.8199363954E-05
0.7820000001E 00	0.6325701633E 00	0.6325789128E 00	0.8749309934E-05
0.7830000005E 00	0.6301338723E 00	0.6301429481E 00	0.9075738496E-05
0.7839999995E 00	0.6276913643E 00	0.6276970545E 00	0.5689915273E-05
0.7849999999E 00	0.6252426591E 00	0.6252473229E 00	0.4664063457E-05
0.7859999998E 00	0.6227877824E 00	0.6227935063E 00	0.5723908547E-05
0.7870000002E 00	0.6203267595E 00	0.6203314727E 00	0.4713423553E-05
0.7880000001E 00	0.6178596140E 00	0.6178637817E 00	0.4167668524E-05
0.7890000005E 00	0.6153863712E 00	0.6153904446E 00	0.4073604944E-05
0.7899999995E 00	0.6129070566E 00	0.6129105596E 00	0.3502704204E-05
0.7909999999E 00	0.6104216903E 00	0.6104240997E 00	0.2409331502E-05
0.7920000001E 00	0.6079302998E 00	0.6079340761E 00	0.3776047380E-05
0.7930000000E 00	0.6054329092E 00	0.6054343346E 00	0.1425389201E-05
0.7940000004E 00	0.6029295434E 00	0.6029280121E 00	0.1531094313E-05
0.7949999994E 00	0.6004202282E 00	0.6004206473E 00	0.4190951587E-06
0.7959999998E 00	0.5979049857E 00	0.5979047524E 00	0.2332963050E-06
0.7969999997E 00	0.5953838420E 00	0.5953792987E 00	0.4543457183E-05
0.7980000001E 00	0.5928568220E 00	0.5928516089E 00	0.5213078114E-05
0.7990000001E 00	0.5903239506E 00	0.5903176744E 00	0.6276182833E-05
0.8000000005E 00	0.5877852533E 00	0.5877780576E 00	0.7195863876E-05
0.8009999995E 00	0.5852407570E 00	0.5852326455E 00	0.8111819632E-05
0.8019999999E 00	0.5826904824E 00	0.5826793331E 00	0.1114932820E-04
0.8029999998E 00	0.5801344567E 00	0.5801224780E 00	0.1197867096E-04
0.8040000002E 00	0.5775727054E 00	0.5775588576E 00	0.1384783536E-04
0.8050000001E 00	0.5750052535E 00	0.5749845230E 00	0.2073030920E-04
0.8060000003E 00	0.5724321266E 00	0.5724113618E 00	0.2076476813E-04
0.8069999997E 00	0.5698533526E 00	0.5698283780E 00	0.2497434617E-04
0.8079999997E 00	0.5672689520E 00	0.5672411818E 00	0.2777017654E-04
0.8090000001E 00	0.5646789523E 00	0.5646516839E 00	0.2726819367E-04
0.8100000000E 00	0.5620833795E 00	0.5620511083E 00	0.3227125856E-04
0.8110000004E 00	0.5594822592E 00	0.5594482654E 00	0.3399373967E-04
0.8119999994E 00	0.5568756195E 00	0.5568363431E 00	0.3927666696E-04
0.8129999998E 00	0.5542634814E 00	0.5542273081E 00	0.3617350014E-04
0.8139999997E 00	0.5516458733E 00	0.5516064092E 00	0.3946386280E-04
0.8150000001E 00	0.5490228200E 00	0.5489789762E 00	0.4384387287E-04
0.8160000001E 00	0.5463943481E 00	0.5463468991E 00	0.4744902255E-04
0.8170000005E 00	0.5437604838E 00	0.5437132411E 00	0.4724273462E-04
0.8179999995E 00	0.5411212553E 00	0.5410713653E 00	0.4989001902E-04
0.8189999999E 00	0.5384766834E 00	0.5384205121E 00	0.5617132414E-04
0.8200000000E 00	0.5358267973E 00	0.5357695096E 00	0.5728751423E-04
0.8209999999E 00	0.5331716227E 00	0.5331134120E 00	0.5821045490E-04
0.8220000003E 00	0.5305111857E 00	0.5304509836E 00	0.6020208824E-04
0.8230000003E 00	0.5278455133E 00	0.5277822946E 00	0.6321864208E-04
0.8239999997E 00	0.5251746329E 00	0.5251105374E 00	0.6409548228E-04
0.8249999997E 00	0.5224985671E 00	0.5224320227E 00	0.6654439502E-04
0.8260000001E 00	0.5198173450E 00	0.5197449820E 00	0.7236283281E-04
0.8270000000E 00	0.5171309916E 00	0.5170592844E 00	0.7170718171E-04
0.8280000004E 00	0.5144395348E 00	0.5143664472E 00	0.7308786743E-04
0.8289999994E 00	0.5117430037E 00	0.5116650173E 00	0.7798615851E-04
0.8299999998E 00	0.5090414190E 00	0.5089640007E 00	0.7741805174E-04
0.8309999997E 00	0.5063348095E 00	0.5062563200E 00	0.7848953836E-04
0.8320000001E 00	0.5036232033E 00	0.5035388406E 00	0.8436292415E-04
0.8330000001E 00	0.5009066266E 00	0.5008226439E 00	0.8398294454E-04
0.8340000002E 00	0.4981851063E 00	0.4981000301E 00	0.8507631724E-04
0.8349999997E 00	0.4954586717E 00	0.4953712394E 00	0.8743209772E-04
0.8359999996E 00	0.4927273442E 00	0.4926409402E 00	0.8640391760E-04
0.8370000000E 00	0.4899911538E 00	0.4899016374E 00	0.8951639765E-04
0.8379999999E 00	0.4872501272E 00	0.4871620528E 00	0.8807424464E-04
0.8390000003E 00	0.4845042921E 00	0.4844132850E 00	0.9100697940E-04
0.8400000003E 00	0.4817536750E 00	0.4816621097E 00	0.9156530731E-04
0.8409999997E 00	0.4789983055E 00	0.4789039021E 00	0.9440351286E-04
0.8419999997E 00	0.4762382057E 00	0.4761490173E 00	0.8918857210E-04
0.8430000001E 00	0.4734732406E 00	0.4733782591E 00	0.9514763956E-04
0.8440000000E 00	0.4707039336E 00	0.4706072451E 00	0.9668851276E-04
0.8450000004E 00	0.4679298151E 00	0.4678391454E 00	0.9066984063E-04

0.8459999994E 00	0.4651510810E 00	0.4650561999E 00	0.9488128131E-04
0.8469999998E 00	0.4623677537E 00	0.4622748645E 00	0.9288918235E-04
0.8479999999E 00	0.4595798628E 00	0.4594833727E 00	0.9649014108E-04
0.8489999999E 00	0.4567874360E 00	0.4566894720E 00	0.9796395903E-04
0.8500000003E 00	0.4539905011E 00	0.4538978266E 00	0.9267451247E-04
0.8510000002E 00	0.4511890856E 00	0.4510952098E 00	0.9387591859E-04
0.8519999997E 00	0.4483832193E 00	0.4482911017E 00	0.9211758157E-04
0.8529999996E 00	0.4455729250E 00	0.4454840060E 00	0.8891895419E-04
0.8540000000E 00	0.4427582335E 00	0.4426659846E 00	0.9224889808E-04
0.8549999999E 00	0.4399391718E 00	0.4398511389E 00	0.8803280076E-04
0.8560000003E 00	0.4371157683E 00	0.4370296287E 00	0.8613942199E-04
0.8570000003E 00	0.4342880502E 00	0.4342002955E 00	0.8775480097E-04
0.8579999997E 00	0.4314560488E 00	0.4313728831E 00	0.8316570898E-04
0.8589999997E 00	0.4286197863E 00	0.4285356334E 00	0.8415291091E-04
0.8600000001E 00	0.4257792936E 00	0.4256979974E 00	0.8129607894E-04
0.8610000000E 00	0.4229345986E 00	0.4228547618E 00	0.7983669644E-04
0.8620000001E 00	0.4200857293E 00	0.4200064663E 00	0.7926300173E-04
0.8629999996E 00	0.4172327168E 00	0.4171557307E 00	0.7698591807E-04
0.8639999995E 00	0.4143755838E 00	0.4143036914E 00	0.7189251488E-04
0.8649999999E 00	0.4115143606E 00	0.4114404295E 00	0.7393118009E-04
0.8659999999E 00	0.4086490764E 00	0.4085778945E 00	0.7118191578E-04
0.8670000003E 00	0.4057797591E 00	0.4057159663E 00	0.6379280247E-04
0.8680000002E 00	0.4029064368E 00	0.4028429726E 00	0.6346404558E-04
0.8689999997E 00	0.4000291404E 00	0.3999679120E 00	0.6122840576E-04
0.8699999996E 00	0.3971478933E 00	0.3970859398E 00	0.6195344036E-04
0.8710000000E 00	0.3942627267E 00	0.3942053697E 00	0.5735689778E-04
0.8719999999E 00	0.3913736685E 00	0.3913206441E 00	0.5302438516E-04
0.8730000003E 00	0.3884807479E 00	0.3884280195E 00	0.5272822458E-04
0.8740000003E 00	0.3855839928E 00	0.3855355827E 00	0.4841014745E-04
0.8749999997E 00	0.3826834352E 00	0.3826349898E 00	0.4844553771E-04
0.8759999999E 00	0.3797790980E 00	0.3797323962E 00	0.4670186903E-04
0.8769999998E 00	0.3768710123E 00	0.3768293320E 00	0.4168041053E-04
0.8780000002E 00	0.3739592075E 00	0.3739179184E 00	0.4128902223E-04
0.8790000001E 00	0.3710437114E 00	0.3710065203E 00	0.3719120290E-04
0.8799999996E 00	0.3681245561E 00	0.3680961809E 00	0.2837507055E-04
0.8809999995E 00	0.3652017648E 00	0.3651717364E 00	0.3002840096E-04
0.8819999999E 00	0.3622753689E 00	0.3622483116E 00	0.2705748195E-04
0.8829999999E 00	0.3593453979E 00	0.3593209780E 00	0.2441997641E-04
0.8840000003E 00	0.3564118802E 00	0.3563880748E 00	0.2380530352E-04
0.8850000002E 00	0.3534748448E 00	0.3534499874E 00	0.2485723236E-04
0.8859999997E 00	0.3505343233E 00	0.3505125499E 00	0.2177339048E-04
0.8869999996E 00	0.3475903396E 00	0.3475722331E 00	0.1810654068E-04
0.8880000000E 00	0.3446429253E 00	0.3446306358E 00	0.1228949987E-04
0.8890000001E 00	0.3416921095E 00	0.3416793515E 00	0.1275818795E-04
0.8900000001E 00	0.3387379215E 00	0.3387256269E 00	0.1229462214E-04
0.8910000005E 00	0.3357803900E 00	0.3357701948E 00	0.1019518823E-04
0.8919999995E 00	0.3328195475E 00	0.3328107611E 00	0.8786330006E-05
0.8929999999E 00	0.3298554174E 00	0.3298458688E 00	0.9548617533E-05
0.8939999998E 00	0.3268880319E 00	0.3268790600E 00	0.8971896029E-05
0.8950000002E 00	0.3239174197E 00	0.3239113768E 00	0.6042886528E-05
0.8960000001E 00	0.3209436110E 00	0.3209370727E 00	0.6538350138E-05
0.8969999996E 00	0.3179666373E 00	0.3179613641E 00	0.5273148421E-05
0.8979999995E 00	0.3149865226E 00	0.3149803830E 00	0.6139511246E-05
0.8989999999E 00	0.3120032992E 00	0.3119948984E 00	0.8400762460E-05
0.8999999999E 00	0.3090169962E 00	0.3090101474E 00	0.6848946217E-05
0.9010000003E 00	0.3060276437E 00	0.3060235977E 00	0.4045898098E-05
0.9020000002E 00	0.3030352704E 00	0.3030248116E 00	0.1045875252E-04
0.9029999994E 00	0.3000399096E 00	0.3000311100E 00	0.8799601353E-05
0.9039999998E 00	0.2970415843E 00	0.2970313595E 00	0.1022475772E-04
0.9049999997E 00	0.2940403276E 00	0.2940226595E 00	0.1766812057E-04
0.9060000001E 00	0.2910361686E 00	0.2910194824E 00	0.1668627376E-04
0.9070000001E 00	0.2880291374E 00	0.2880095174E 00	0.1961993987E-04
0.9080000005E 00	0.2850192633E 00	0.2849967363E 00	0.2252706328E-04
0.9089999995E 00	0.2820065789E 00	0.2819818313E 00	0.2474780196E-04
0.9099999999E 00	0.2789911088E 00	0.2789665091E 00	0.2459972167E-04
0.9109999998E 00	0.2759728848E 00	0.2759374309E 00	0.3545405347E-04
0.9120000002E 00	0.2729519370E 00	0.2729159557E 00	0.3598141488E-04
0.9130000001E 00	0.2699282956E 00	0.2698854485E 00	0.4284712490E-04
0.9139999996E 00	0.2669019927E 00	0.2668585478E 00	0.4344503399E-04
0.9149999995E 00	0.2638730527E 00	0.2638285785E 00	0.4447437825E-04
0.9159999999E 00	0.2608415086E 00	0.2607882947E 00	0.5321390929E-04
0.9170000001E 00	0.2578073902E 00	0.2577504602E 00	0.5693011920E-04
0.9180000000E 00	0.2547707271E 00	0.2547103930E 00	0.6033410321E-04
0.9190000004E 00	0.2517315497E 00	0.2516632913E 00	0.6825826139E-04
0.9199999994E 00	0.2486898903E 00	0.2486239852E 00	0.6590504207E-04
0.9209999998E 00	0.2456457740E 00	0.2455742908E 00	0.7148319861E-04
0.9219999997E 00	0.2425992329E 00	0.2425227705E 00	0.7696240217E-04
0.9230000001E 00	0.2395502977E 00	0.2394719842E 00	0.7831351837E-04
0.9240000001E 00	0.2364989981E 00	0.2364150608E 00	0.8393730976E-04
0.9249999995E 00	0.2334453674E 00	0.2333584965E 00	0.8687097587E-04
0.9259999995E 00	0.2303894298E 00	0.2302951799E 00	0.9424984460E-04
0.9269999999E 00	0.2273312182E 00	0.2272377480E 00	0.9347009478E-04
0.9279999998E 00	0.2242707629E 00	0.2241784773E 00	0.9228568532E-04
0.9290000002E 00	0.2212080945E 00	0.2211050071E 00	0.1030873973E-03
0.9300000001E 00	0.2181432425E 00	0.2180345003E 00	0.1087421552E-03

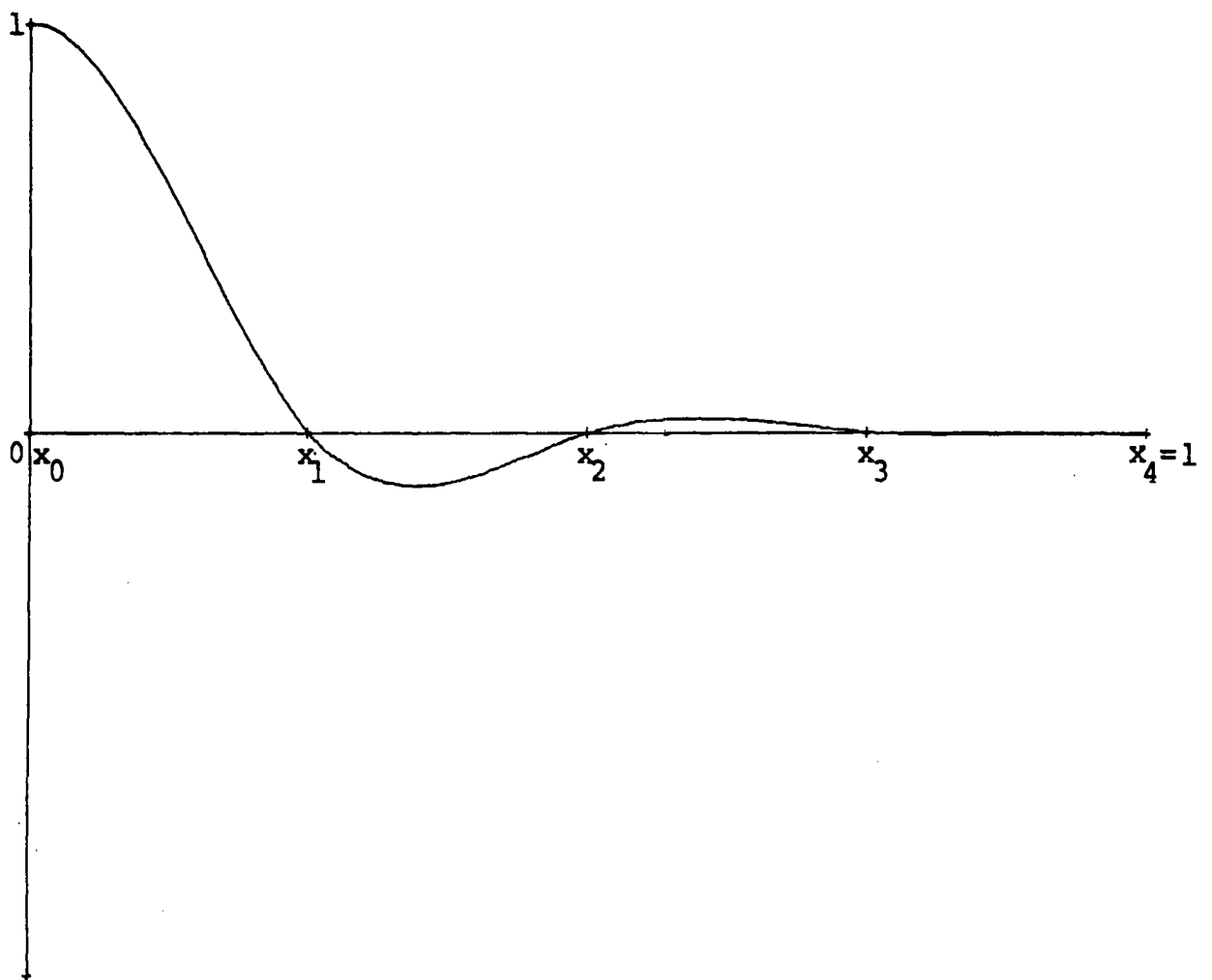
0.9309999994E 00	0.2150762404E 00	0.2149626073E 00	0.1136329956E-03
0.9319999997E 00	0.2120071126E 00	0.2118974944E 00	0.1096182969E-03
0.9329999997E 00	0.2089358927E 00	0.2088220888E 00	0.1138038933E-03
0.9340000001E 00	0.2058626107E 00	0.2057441064E 00	0.1185042784E-03
0.9350000000E 00	0.2027872967E 00	0.2026676709E 00	0.1196258236E-03
0.9360000004E 00	0.1997099813E 00	0.1995930388E 00	0.1169424504E-03
0.9369999994E 00	0.1966306978E 00	0.1965061306E 00	0.1245671884E-03
0.9379999998E 00	0.1935494709E 00	0.1934262501E 00	0.1232207288E-03
0.9389999997E 00	0.1904663334E 00	0.1903346042E 00	0.1317291755E-03
0.9400000001E 00	0.1873813163E 00	0.1872482706E 00	0.1330457163E-03
0.9410000001E 00	0.1842944499E 00	0.1841663444E 00	0.1281053993E-03
0.9419999995E 00	0.1812057673E 00	0.1810699697E 00	0.1357975417E-03
0.9429999995E 00	0.1781152934E 00	0.1779834117E 00	0.1318816795E-03
0.9439999999E 00	0.1750230615E 00	0.1748835772E 00	0.1394844150E-03
0.9450000000E 00	0.1719291022E 00	0.1717909315E 00	0.1381707845E-03
0.9459999999E 00	0.1688334463E 00	0.1686978331E 00	0.1356131398E-03
0.9470000003E 00	0.1657361239E 00	0.1655945127E 00	0.1416112064E-03
0.9479999993E 00	0.1626371686E 00	0.1624996961E 00	0.1386427322E-03
0.9489999997E 00	0.1595366054E 00	0.1593979626E 00	0.1381312032E-03
0.9499999997E 00	0.1564344674E 00	0.1562963362E 00	0.1408470562E-03
0.9510000001E 00	0.1533307857E 00	0.1531899386E 00	0.1398934983E-03
0.9520000000E 00	0.1502255906E 00	0.1500856970E 00	0.1362055774E-03
0.9530000004E 00	0.1471189127E 00	0.1469827072E 00	0.1351365355E-03
0.9539999994E 00	0.1440107859E 00	0.1438756493E 00	0.1385720681E-03
0.9549999998E 00	0.1409012346E 00	0.1407626626E 00	0.1375976718E-03
0.9559999997E 00	0.1377902930E 00	0.1376526953E 00	0.1346970676E-03
0.9570000001E 00	0.1346779912E 00	0.1345432942E 00	0.1306050691E-03
0.9580000001E 00	0.1315643604E 00	0.1314337553E 00	0.1327053179E-03
0.9589999993E 00	0.1284494338E 00	0.1283167285E 00	0.1290021465E-03
0.9599999997E 00	0.1253332366E 00	0.1252042345E 00	0.1318013529E-03
0.9609999996E 00	0.1222158024E 00	0.1220840011E 00	0.1239936101E-03
0.9620000000E 00	0.1190971622E 00	0.1189731686E 00	0.1201810083E-03
0.9629999999E 00	0.1159773464E 00	0.1158571653E 00	0.1223707806E-03
0.9640000003E 00	0.1128563859E 00	0.1127340151E 00	0.1136744395E-03
0.9649999993E 00	0.1097343145E 00	0.1096206401E 00	0.1192822820E-03
0.9659999997E 00	0.1066111572E 00	0.1064918749E 00	0.1066856785E-03
0.9669999997E 00	0.1034869476E 00	0.1033802619E 00	0.1046822872E-03
0.9680000001E 00	0.1003617167E 00	0.1002570345E 00	0.1015235321E-03
0.9690000000E 00	0.9723549534E-01	0.9713397180E-01	0.1007829560E-03
0.9700000004E 00	0.9410831422E-01	0.9400753123E-01	0.1001437777E-03
0.9709999994E 00	0.9098020722E-01	0.9088006342E-01	0.9248958676E-04
0.9719999998E 00	0.8785119932E-01	0.8775870976E-01	0.8341978545E-04
0.9729999999E 00	0.8472132438E-01	0.8463790462E-01	0.8439819802E-04
0.9739999999E 00	0.8159061332E-01	0.8150621512E-01	0.7931404985E-04
0.9750000003E 00	0.7845909695E-01	0.7837978293E-01	0.8134398382E-04
0.9759999993E 00	0.7532680922E-01	0.7524546521E-01	0.7233727964E-04
0.9769999997E 00	0.7219377497E-01	0.7212143769E-01	0.6813346416E-04
0.9779999996E 00	0.6906002835E-01	0.6899189492E-01	0.6360741107E-04
0.9790000000E 00	0.6592560000E-01	0.6586119926E-01	0.5614996193E-04
0.9799999999E 00	0.6279052107E-01	0.6273437113E-01	0.5060137486E-04
0.9810000003E 00	0.5965482244E-01	0.5960422106E-01	0.5212053659E-04
0.9819999993E 00	0.5651853796E-01	0.5646641741E-01	0.4458246988E-04
0.9829999997E 00	0.5338169271E-01	0.5333711023E-01	0.4760868617E-04
0.9839999997E 00	0.5024432063E-01	0.5019671193E-01	0.3967931846E-04
0.9850000001E 00	0.4710645265E-01	0.4706677331E-01	0.3148338876E-04
0.9860000000E 00	0.4396811973E-01	0.4393663634E-01	0.3079490856E-04
0.9870000001E 00	0.4082935287E-01	0.4079855795E-01	0.2593453974E-04
0.9879999996E 00	0.3769018597E-01	0.3766425144E-01	0.2541733557E-04
0.9889999995E 00	0.3455064418E-01	0.3452522683E-01	0.2312299331E-04
0.9899999999E 00	0.3141076133E-01	0.3138763832E-01	0.1680362040E-04
0.9909999999E 00	0.2827056848E-01	0.2825376485E-01	0.1582672123E-04
0.9920000003E 00	0.2513009667E-01	0.2511426994E-01	0.9808383776E-05
0.9929999993E 00	0.2198937971E-01	0.2197957134E-01	0.1176852675E-04
0.9939999997E 00	0.1884844282E-01	0.1883667429E-01	0.9256691562E-05
0.9949999996E 00	0.1570731990E-01	0.1569806320E-01	0.1410189725E-04
0.9960000000E 00	0.1256604195E-01	0.1255194005E-01	0.9504263299E-05
0.9969999999E 00	0.9424639993E-02	0.9415135729E-02	0.6193826271E-05
0.9980000003E 00	0.6283145003E-02	0.6276951176E-02	0.2218013834E-05
0.9989999993E 00	0.3141590930E-02	0.3139372917E-02	0.3779438877E-05
0.9999999997E 00	0.2925836162E-08	-0.3776513041E-05	



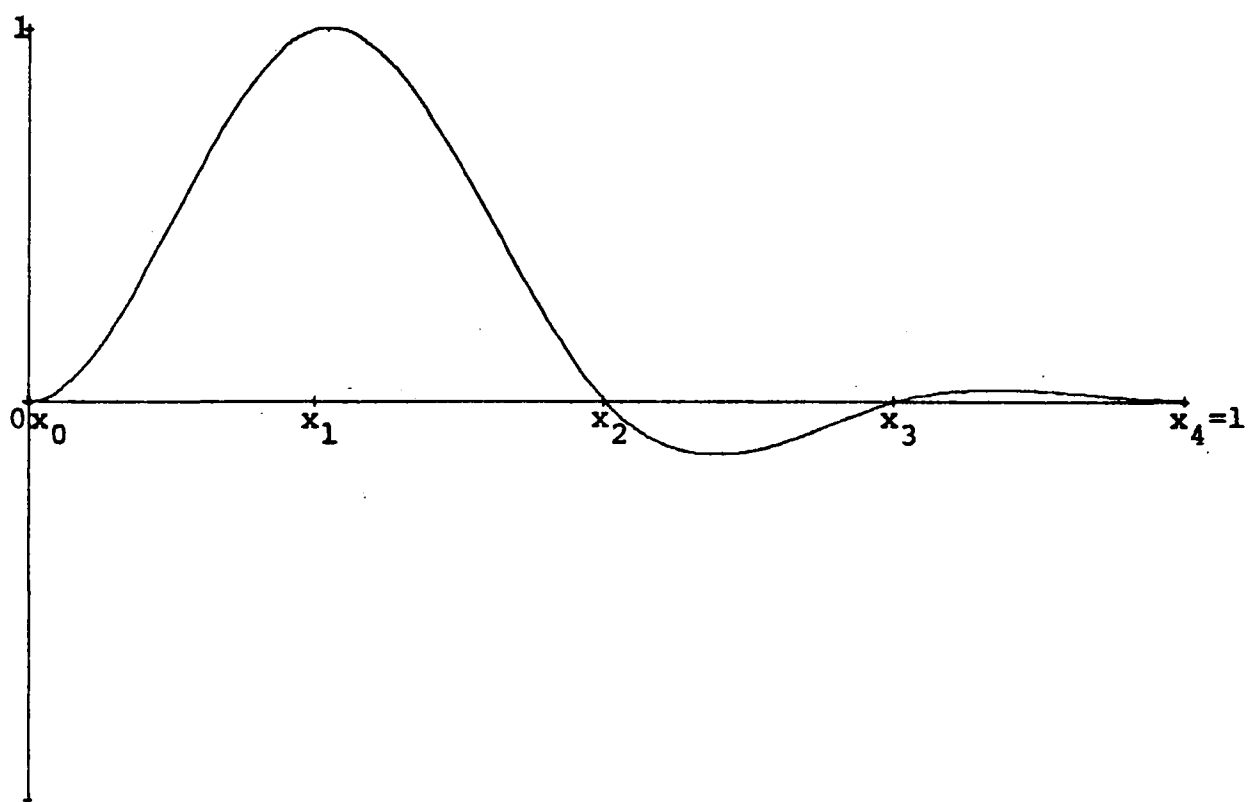
APÊNDICE

Nesta seção apresentaremos os gráficos das funções base para $0 \leq i \leq 6$ definidas no Corolário 2.1.3.

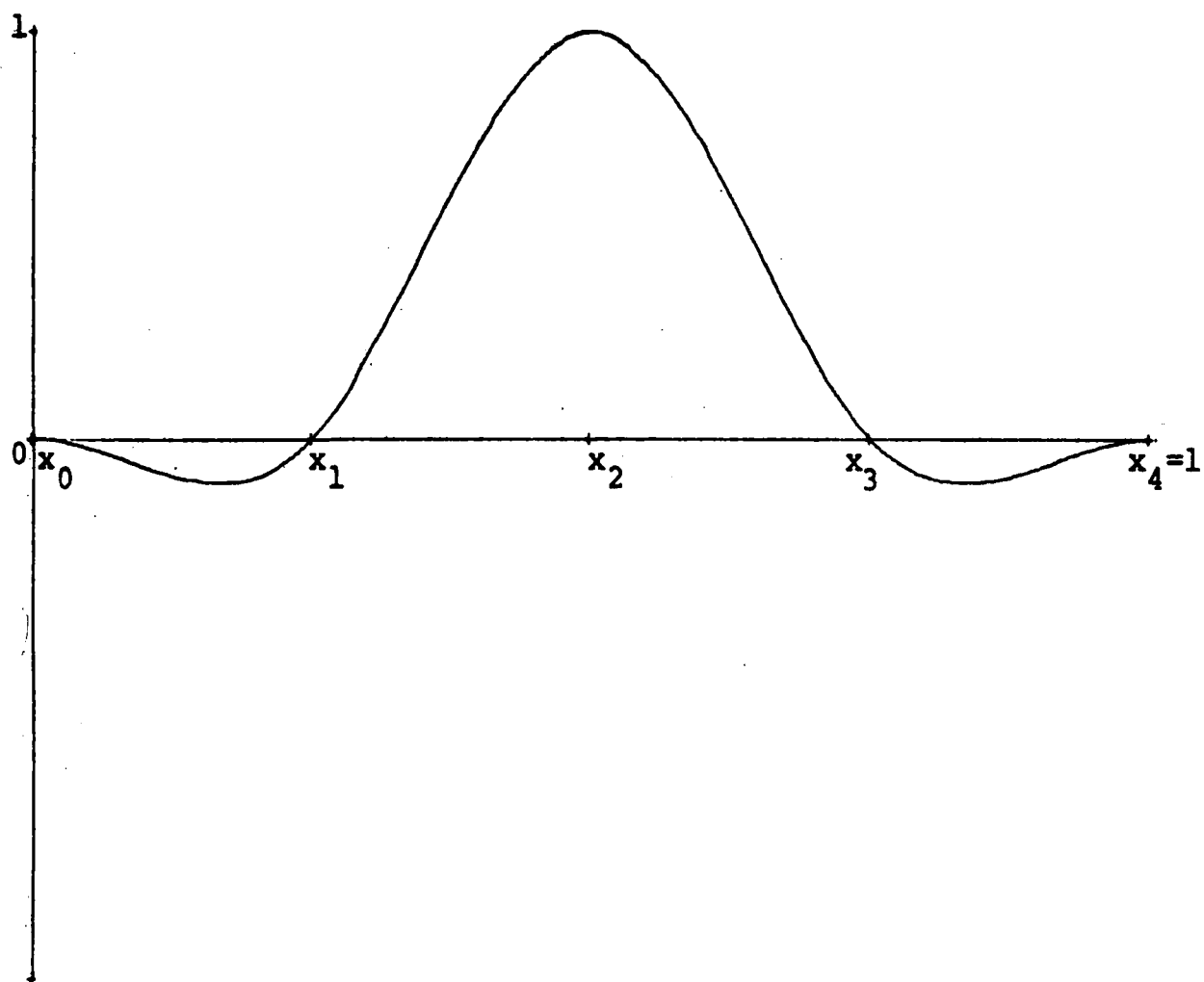
O gráfico de $\phi_0(x)$ é dado por:



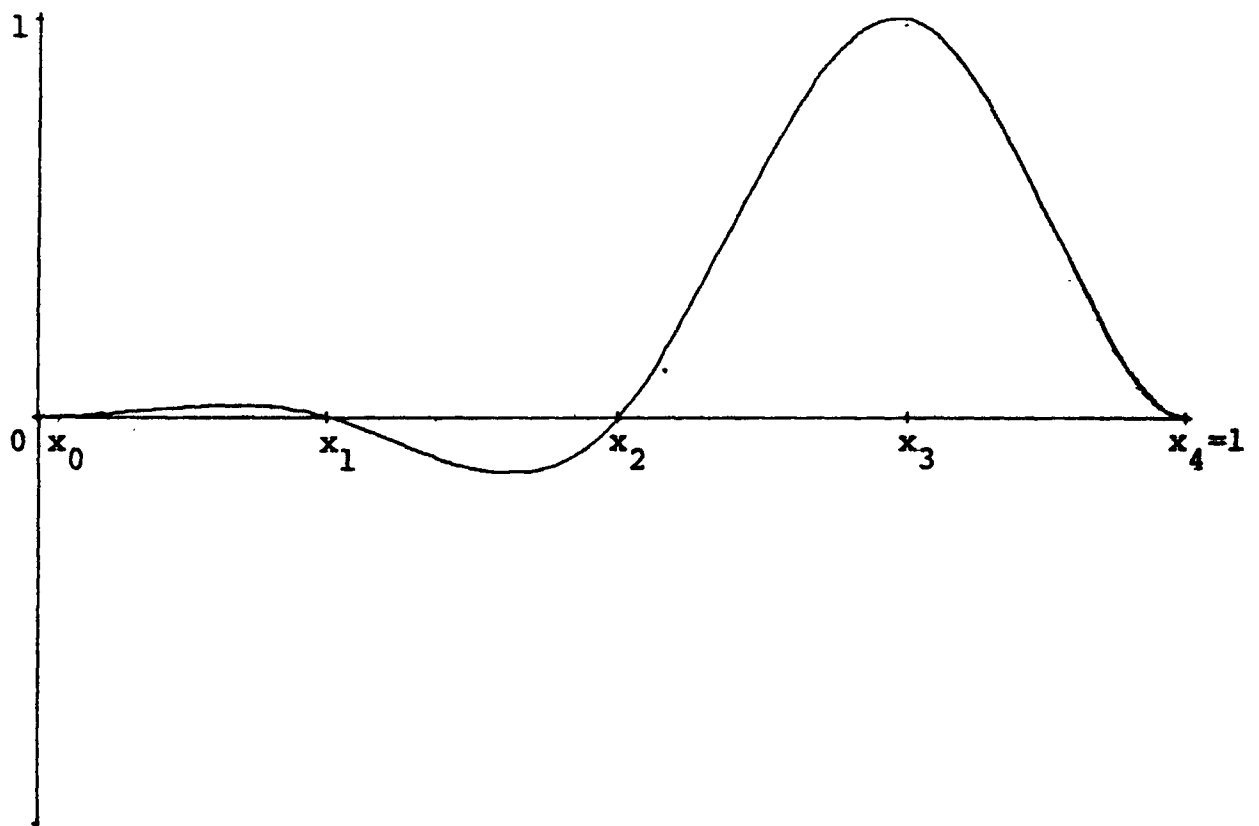
o de $\phi_1(x)$ é dado por:



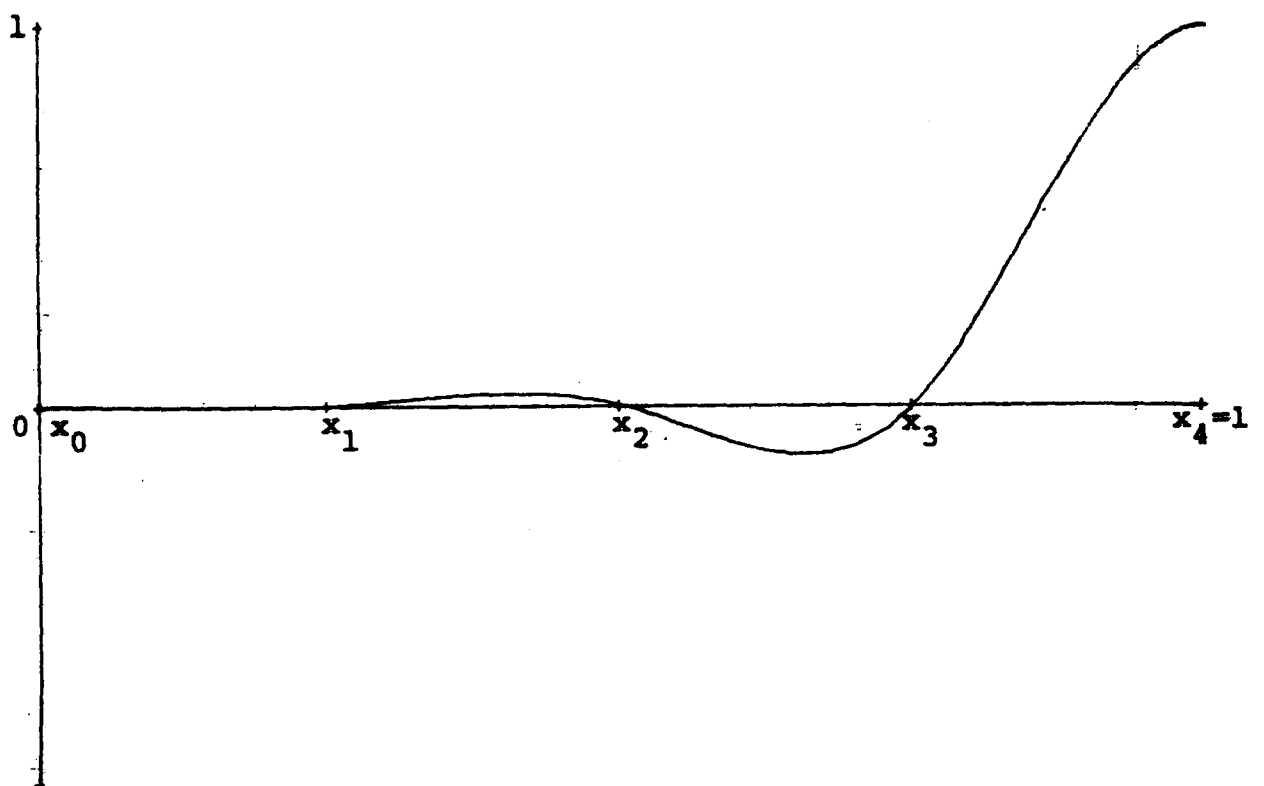
o de $\phi_2(x)$ é dado por:



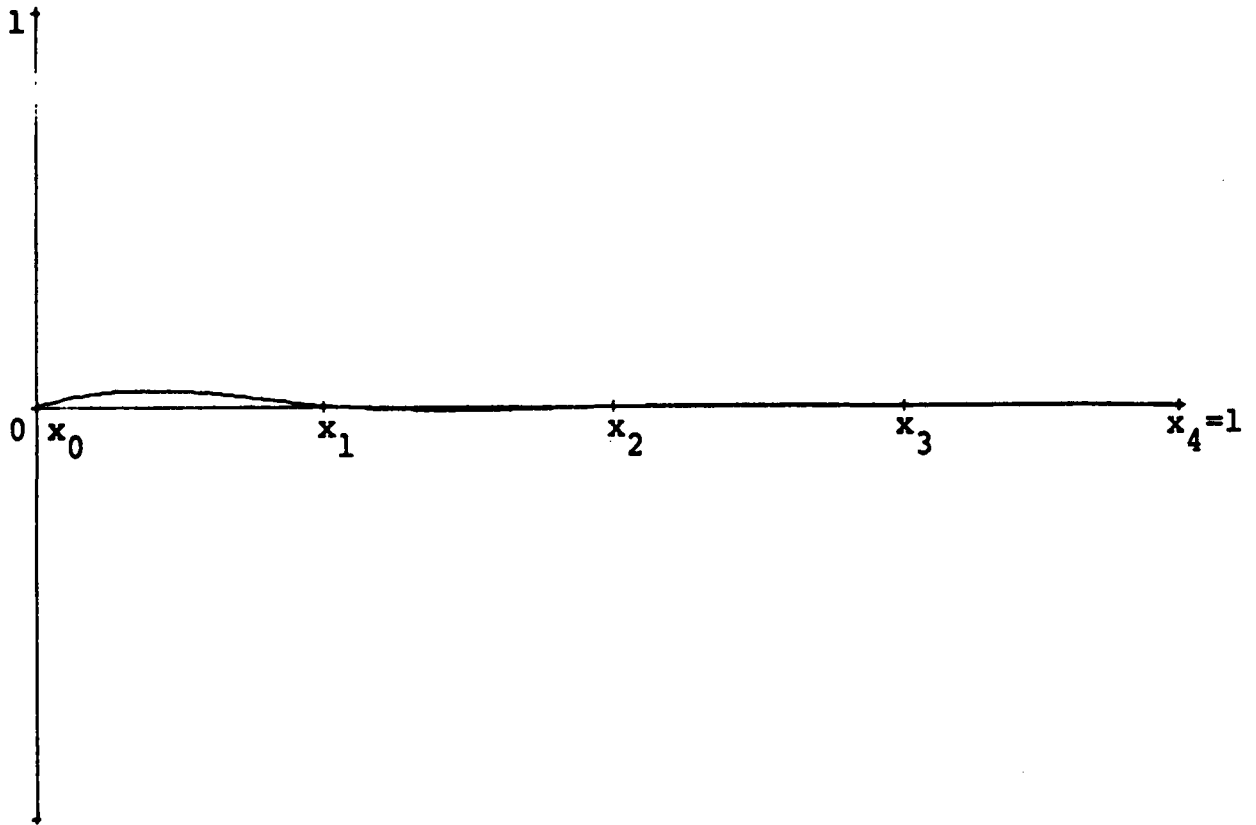
o de $\phi_3(x)$ é dado por:



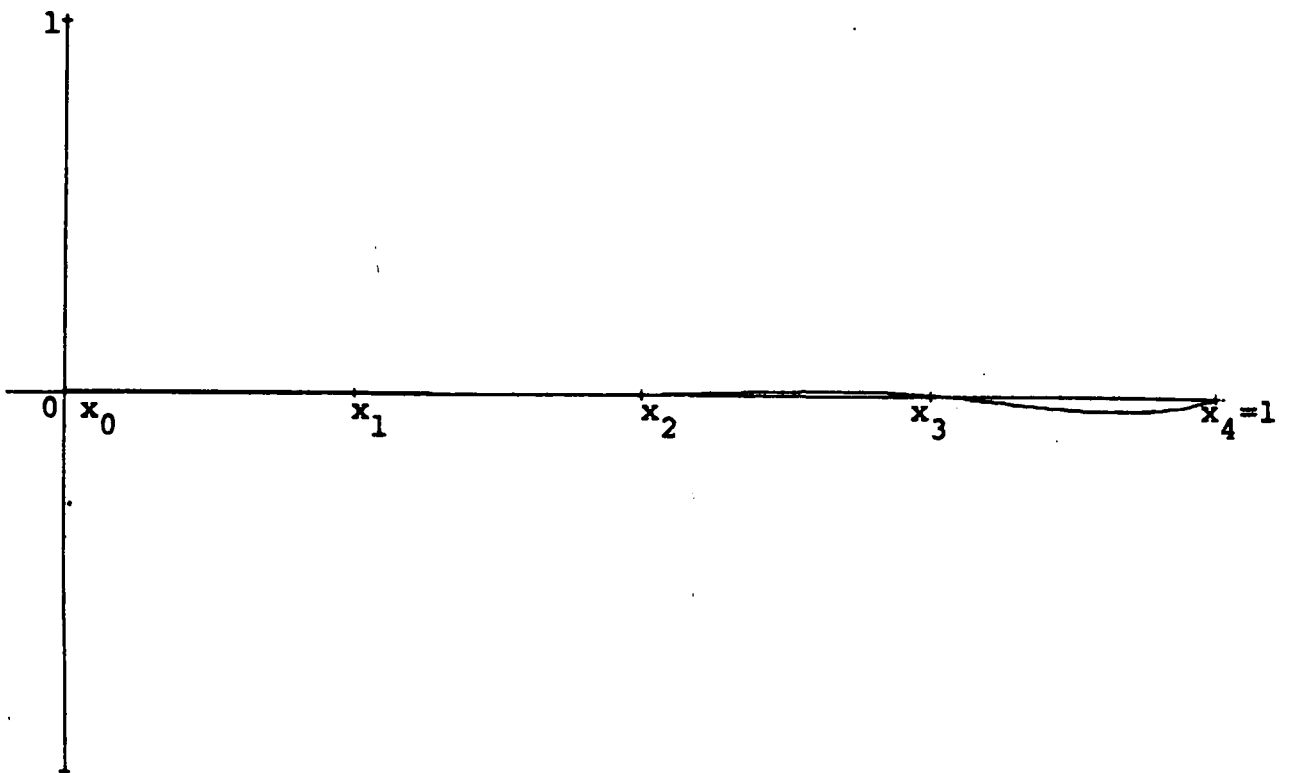
o de $\phi_4(x)$ é dado por:



o de $\phi_5(x)$ é dado por:



o de $\phi_6(x)$ é dado por:



BIBLIOGRAFIA

- 1 - Ahlberg, Nilson & Walsh - The Theory of Splines and Their Applications - New York - Academic Press, 1969.
- 2 - De Boor, Carl - Bicubic Spline Interpolation - J. Math. and Physics 41, 212 - 218, 1962.
- 3 - Fox, L. - An Introduction to Numerical Linear Algebra - Oxford University Press, 1964.
- 4 - Goffman & Pedrick - First Course in Functional Analysis Prentice - Hall, 1965.
- 5 - Greville, T.N.E. - Theory and Applications of Spline Functions - New York - Academic Press, 1969.
- 6 - Isaacson, Eugene & Keller, Herbert Bishop - Analysis of Numerical Methods - New York - John Wiley & Sons, 1966.
- 7 - Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. - Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional - Moscou - Editorial Mir, 1972.

- 8 - Lima, Elon Lages - Análise no Espaço R^n - Editora Universidade de Brasília, 1970.
- 9 - Maddox - Elements of Functional Analysis - Cambridge at the University Press, 1970.
- 10 - Schoenberg, I.J. - Spline Functions, Convex Curves and Mechanical Quadrature - Bulletin of the American Math. Society - 44, 352 - 357, 1958.
- 11 - Schoenberg, I.J., & Curry, H.B. - On Pólya Frequency Functions IV - J. Anal. Math. - 17, 71 - 107, 1966.
- 12 - Schoenberg, I.J., & Whitney, A. - On Pólya Frequency Functions III - Trans. Amer. Math. Soc. - 74, 246 - 259, 1953.
- 13 - Schultz, Martin H. - Spline Analysis - Prentice - Hall, 1973.
- 14 - Varga, Schultz & Birkhoff - Piecewise Hermite Interpolation in one and two Variables with Applications to Partial Differential Equations - Numerische Mathematik - 11, 232 - 256, 1968.
- 15 - Young & Gregory - A Survey of Numerical Mathematics - Volume I - Addison Wesley Publishing Company, 1973.