

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

**MÉTODOS ITERATIVOS DA ANÁLISE NUMÉRICA
E O TEOREMA DA CONTRAÇÃO**

Sandra Maria Venturelli

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Odelar Leite Linhares

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

Departamento de Ciências de Computação e Estatística

SÃO CARLOS

1976

A meus pais

ITERATIVE METHODS OF THE NUMERICAL ANALYSIS
AND THE "THEOREM OF CONTRACTION"

(Master Dissertation)

Sandra Maria Venturelli

Adviser: Prof. Dr. Odelar Leite Linhares

A B S T R A C T

The purpose of this work is to show that many existing iterative processes of the Numerical Analysis, like those for numerical solution of algebraic and transcendental equations, linear and non linear systems of equations, initial value problem, etc, are particular cases of the "Theorem of Contraction". We will see that these methods, can be seen as a simple determination of the fixed point of the appropriate operator T wich maps some Banach space X into itself.

São Carlos, september, 1976.

AGRADECIMENTOS

Nossos sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Odelar Leite Linhares pela orientação segura e dedicada e pelo constante incentivo que nos tem dado.

Agradecemos também à Profa. Célia Maria Finazzi de Andrade que paciente e cuidadosamente leu este trabalho e conosco colaborou com algumas sugestões.

Ao Prof. Dr. Mario Rameh Saab e ao Prof. Dr. Maximilian Emil Hehl, componentes da banca julgadora deste trabalho, agradecemos as sugestões que nos deram.

Agradecemos ao Prof. Dr. Fernão Stella de Rodrigues Germano pela colaboração em nossos estudos e ao Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa pela ajuda que nos prestou quando assistia nossos seminários sobre este trabalho.

Aos membros do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e aos colegas da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Araraquara agradecemos o constante incentivo.

Nossos agradecimentos são estendidos às entidades CNPq, CAPES, FAPESP e FINEP, pelos auxílios concedidos ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e, em especial à FAPESP que com uma bolsa de Mestrado no período de agosto de 1973 a janeiro de 1974 nos propiciou condições para os estudos iniciais que culminaram neste trabalho.

Agradecemos à Srta. Maria Nazareth F. Gobato e ao Sr. José Augusto Evaristo Filho responsáveis, respectivamente, pela datilografia e impressão deste trabalho.

ÍNDICE

<u>INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 0 - PRÉ-REQUISITOS</u>	3
0.1 - Espaços métricos	3
0.2 - Espaços vetoriais normados	4
0.3 - Normas matriciais	6
0.4 - Alguns tipos especiais de matrizes	10
0.5 - Transformações limitadas	15
0.6 - Diferenciação de transformações	17
0.7 - Algumas definições e considerações sobre proble - mas de valor inicial e métodos lineares de passo múltiplo	20
0.8 - Algumas considerações sobre problemas de valores no contorno para equações diferenciais ordinárias	22
<u>CAPÍTULO 1 - O TEOREMA DA CONTRAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES</u>	25
1.1 - O problema do ponto fixo	25
1.2 - O teorema da contração	27
1.3 - Condições suficientes para que uma função T de \mathbb{R} em \mathbb{R} seja contração	35
1.4 - Condições suficientes para que uma transformação não linear T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n seja contração	41
1.5 - Condições suficientes para que uma transformação afim T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n seja contração	47

<u>CAPÍTULO 2</u> - ALGUNS MÉTODOS ITERATIVOS	51
2.1 - Para a resolução de equações algébricas ou transcendententes	51
2.2 - Para a resolução de sistemas não lineares	58
2.3 - Para a resolução de sistemas lineares	59
2.4 - Para a resolução de problemas de valor inicial e de problemas de valores no contorno para equações diferenciais ordinárias	73
<u>CAPÍTULO 3</u> - CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA QUE AS TRANSFORMAÇÕES T DEFINIDAS EM ALGUNS MÉTODOS ITERATIVOS SEJAM CONTRAÇÕES	77
3.1 - Caso das funções T de \mathbb{R} em \mathbb{R} definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.1	77
3.2 - Caso das transformações T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.2	86
3.3 - Caso das transformações afins T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.3	95
3.4 - Caso das transformações T definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.4	118
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	123

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar que muitos dos métodos iterativos existentes para, por exemplo, solução numérica de equações algébricas ou transcendentes, soluções numéricas de sistemas lineares e não lineares, solução numérica de problemas de valor inicial, etc ... não passam de casos particulares do Teorema da Contração. Este teorema, de grande importância na Análise Matemática, tem, também, grande importância na Análise Numérica pelo fato de ser construtivo. Em suma, pretendemos mostrar que grande parte dos processos da Análise Numérica podem ser vistos como simples determinações do ponto fixo de convenientes aplicações T definidas e tomando valores em algum espaço de Banach X .

No capítulo 0, de pré-requisitos, apresentamos resultados e definições necessárias ao desenvolvimento deste trabalho.

Dedicamos o capítulo 1 ao Teorema da Contração e a suas aplicações na resolução numérica de equações algébricas ou transcendentes e na resolução numérica de sistemas lineares e não lineares. Estabelecemos, também, condições para que as transformações T definidas nos diferentes métodos iterativos para resolução destes problemas sejam contrações sobre algum conjunto fechado $D \subseteq X$, sendo X algum espaço de Banach. Não nos prendemos, no entanto, a nenhum particular método iterativo. Isto o faremos no capítulo 3.

No capítulo 2 apresentamos os seguintes métodos iterativos estacionários:

a) Para resolução de equações algébricas ou transcendentais: método das cordas, método da falsa posição, método de Newton - Raphson e método de Chebyshev por iterações de altas ordens.

b) Para resolução de sistemas não lineares: método de Newton e método de Newton modificado.

c) Para resolução de sistemas lineares: método de Jacobi - Richardson, método de Gauss - Seidel, método de sobreliberação, método de Peaceman - Rachaford e método de Cimmino.

d) Para resolução de problemas de valor inicial e de problemas de valores no contorno para equações diferenciais ordinárias: método iterativo implícito (com vistas ao método predictor-corrector apresentado no capítulo 3) e método de Picard.

No capítulo 3 dedicamo-nos à apresentação de condições suficientes para que as transformações T definidas nos diferentes métodos iterativos apresentados no capítulo 2, sejam contrações sobre algum conjunto fechado $D \subseteq \mathbb{R}$ (ou \mathbb{R}^n).

Ao final apresentamos uma bibliografia de consulta aos interessados no problema. Quando a ela nos referirmos, indicaremos o texto de número n e a página de número m por $([n], \text{ pag. } m)$.

CAPÍTULO 0PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo apresentamos definições e resultados que julgamos necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Por serem clássicas, algumas destas noções talvez fossem dispensáveis. Nós as apresentamos, no entanto, com a finalidade de facilitar a leitura.

0.1 - Espaços métricos

Definição 0.1.1 - Uma métrica em um espaço X é definida pela associação de um número real $d(x,y)$ a cada par de elementos $x,y \in X$ de modo que sejam satisfeitas as condições:

- i) $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,
- ii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$, $x,y,z \in X$.

Observemos que as condições (i) e (ii) implicam em $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in X$.

A um espaço X munido de uma métrica, chamamos *espaço métrico*.

Definição 0.1.2 - Uma sequência de elementos x_n de um espaço métrico X , que denotaremos por $\{x_n\}$, converge para $y \in X$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0$.

Definição 0.1.3 - Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ de um espaço métrico X é de *Cauchy*, se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_{m+p}, x_m) = 0 ;$$

ou seja, se dado $\epsilon > 0$, existe N tal que para $m, p > N$, $d(x_m, x_p) < \epsilon$.

Observemos que, se $\{x_n\}$ é uma sequência de elementos de um espaço métrico X e se x_n converge para $y \in X$, então $\{x_n\}$ é de Cauchy. A recíproca não é, contudo, verdadeira.

Definição 0.1.4 - Dizemos que um espaço métrico X é *completo* se toda sequência de Cauchy em X converge (em X).

0.2 - Espaços vetoriais normados

Definição 0.2.1 - Seja X um espaço vetorial sobre o corpo K . Se a cada elemento $x \in X$ está associado um número real não negativo $\|x\|$, chamado norma de x , satisfazendo às condições:

- i) $\|x\| > 0$, se $x \neq 0$ e $\|0\| = 0$,
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in X$ e $\forall \lambda \in K$,
- iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

então denominamos X de *espaço vetorial normado*.

Se considerarmos $d(x, y) = \|x - y\|$, concluímos que um espaço normado sempre é um espaço métrico. A recíproca, no entanto, não é verdadeira

Denotaremos por \mathbb{R}^n o espaço vetorial real n -dimensional dos vetores colunas x com componentes x_1, x_2, \dots, x_n e, por \mathbb{C}^n o correspondente espaço vetorial complexo.

No \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) existe um número infinito de normas vetoriais. Para ilustrar este fato, basta considerarmos as normas ℓ_p (normas Hölder), as quais são definidas por:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, & p = 1, 2, 3, \dots \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Dentre estas, as mais usadas no \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) são:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{norma } \ell_1 \text{ ou norma soma}).$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{norma } \ell_2 \text{ ou norma euclidiana}).$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{norma } \ell_\infty \text{ ou norma máximo}).$$

Uma outra importante classe de normas são as chamadas *normas elípticas*, definidas por:

$$\|x\| = (x^t B x)^{1/2} \quad (1)$$

onde B é uma arbitrária matriz $(n \times n)$ simétrica e definida positiva (ver definição 0.4.6).

Observemos que (1) é verificada sobre o \mathbb{C}^n se x^t é trocado por x^H e se B é matriz $(n \times n)$ hermitiana e definida positiva.

Definição 0.2.2 - Um espaço de Banach é um espaço vetorial nor

mado e completo.

Teorema 0.2.1 - ([8], pag.71) - Os espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n munidos das normas $\| \cdot \|_p$, $1 \leq p < \infty$, são espaços de Banach para qualquer n inteiro positivo.

Introduzimos abaixo algumas notações usadas neste trabalho.

Denotaremos o conjunto das transformações lineares T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n ou, equivalentemente, o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n , por $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ou, simplesmente, por $L(\mathbb{R}^n)$. Similarmente, denotaremos por $L(\mathbb{C}^n)$ ao conjunto das matrizes complexas quadradas de ordem n .

Denotaremos uma transformação T aplicada no ponto x , indiferentemente, por Tx ou $T(x)$. Denominaremos função a toda transformação T de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

0.3 - Normas Matriciais

Dada uma norma de vetor sobre o \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) podemos definir uma norma de matriz por:

$$\| A \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \max_{\| x \| = 1} \| Ax \| . \quad (2)$$

Definição 0.3.1 - Dizemos que a norma de matriz definida em (2) é subordinada à correspondente norma de vetor.

Uma das principais vantagens em se escolher uma norma de matriz subordinada a uma norma de vetor é que a desigualdade

$$\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \| \quad (3)$$

é satisfeita para todo $A \in L(\mathbb{R}^n)$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 0.3.2 - Uma norma de matriz e uma norma de vetor para as quais a desigualdade (3) é verificada para todo A e x são chamadas *normas consistentes* (alguns autores denominam-nas *compatíveis*).

Antes de apresentarmos algumas normas de matrizes mais usuais, necessitamos definir um novo conceito.

Definição 0.3.3 - A coleção dos n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de $A \in L(\mathbb{C}^n)$ denominamos *espectro* de A e denominamos

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

por *raio espectral* de A .

Teorema 0.3.1 ([11], pag.21) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

e

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \left(\rho(A^t A)\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda_1},$$

onde λ_1 é o maior autovalor, em módulo, de $A^t A$.

Teorema 0.3.2 ([16], pag.767) - Se $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é simétrica,

então

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Uma outra norma de matriz frequentemente usada é a *norma Euclidiana*, definida por

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Ela é também denominada *norma Schur* ou *norma Frobenius*.

É interessante observar que $\|A\|_E$ é consistente com $\|x\|_2$. Entretanto, $\|A\|_E$ não é a norma de matriz subordinada à norma $\|x\|_2$. Na verdade, temos o seguinte resultado:

Teorema 0.3.3 ([16], pag.767) - A norma $\|A\|_E$ não é subordinada a nenhuma norma de vetor.

Em consequência do resultado acima, em muitos trabalhos teóricos, $\|A\|_2$, ao invés de $\|A\|_E$, é usada em conjunção com $\|x\|_2$, uma vez que $\|A\|_2$ é a norma subordinada a $\|x\|_2$. Por outro lado, em trabalhos numéricos e na análise de erros, a norma $\|A\|_E$ é, às vezes preferida. Isto ocorre porque $\|A\|_E$, ao contrário de $\|A\|_2$, é facilmente calculável e porque a norma Euclidiana de $A = (a_{ij})$ é igual à norma Euclidiana de $|A| = (|a_{ij}|)$. As vantagens que mencionamos para a norma $\|A\|_E$ também são válidas para as normas $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$.

Uma outra norma que usamos neste trabalho é a definida como segue:

Se B é alguma matriz não singular então a função

$$\|BAB^{-1}\|_2$$

tem todas as propriedades exigidas de uma norma matricial e podemos considerar a norma $\|\cdot\|_B$ de uma matriz A , em função da norma $\|\cdot\|_2$, como:

$$\|A\|_B = \|BAB^{-1}\|_2.$$

Similarmente, podemos definir a norma vetorial

$$\|x\|_B = \|Bx\|_2.$$

Além disso,

$$\|A\|_B = \max_{\|x\|_B = 1} \|Ax\|_B.$$

Se A é uma matriz simétrica e definida positiva (ver definição 0.4.6) podemos definir a norma $A^{\frac{1}{2}}$ de uma matriz C qualquer por:

$$\|C\|_{A^{\frac{1}{2}}} = \|A^{\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}}\|_2.$$

A existência e a unicidade de $A^{\frac{1}{2}}$ é garantida pelo

Teorema 0.3.4 ([16], pag.755) - Se a matriz simétrica $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é definida positiva então existe uma única matriz simétrica e definida positiva B tal que $B^2=A$. Usualmente, escrevemos

Definição 0.4.2 - Uma matriz A quadrada de ordem n , real ou complexa, é *reduzível* se existe uma matriz de permutação P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

onde, B_{11} e B_{22} são matrizes quadradas.

A matriz A é *irreduzível* se ela não é reduzível.

Na prática, para verificarmos se uma matriz é ou não reduzível, utilizamo-nos de critérios mais simples que o oferecido pela definição. Nós os encontramos, por exemplo, em ([11], pag.103 e seguintes).

Definição 0.4.3 - Uma matriz $A \in L(\mathbb{C}^n)$ é *diagonalmente dominante*, se

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1,2,\dots,n \quad (4)$$

e é *estritamente diagonalmente dominante* se a igualdade em (4) não se verifica para nenhum i .

A matriz A é *irreduzivelmente diagonalmente dominante* se ela é irreduzível, diagonalmente dominante e se a desigualdade se verifica em (4) para pelo menos um i .

Enunciamos a seguir alguns resultados que envolvem a idéia de ordenação parcial.

Definição 0.4.4 - Para vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos a *ordenação parcial* por

$$x \leq y \quad \text{se, e somente se, } x_i \leq y_i, \quad i=1,2,\dots,n,$$

e, similarmente, para matrizes $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$, por

$$A \leq B \quad \text{se, e somente se, } a_{ij} \leq b_{ij}, \quad i,j=1,2,\dots,n.$$

Teorema 0.4.1 - ([11], pag.107) - Seja $B \in L(\mathbb{R}^n)$ não negativa. Então $(I-B)^{-1}$ existe e é não negativa se, e somente se, $\rho(B) < 1$.

Uma particularmente importante classe de matrizes com inversas não negativas é a dada pela definição seguinte.

Definição 0.4.5 - A matriz $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é uma *M-matriz* se $A^{-1} \geq 0$ e $a_{ij} < 0, i \neq j$. Uma M-matriz simétrica é uma *matriz de Stieltjes*.

No próximo resultado apresentamos uma caracterização das M-matrizes.

Teorema 0.4.2 - ([11], pag.108) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $a_{ij} < 0, i \neq j$. Então A é uma M-matriz se, e somente se, $a_{ii} > 0, i = 1,2,\dots,n$, e a matriz $B = I - D^{-1}A$, onde $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ satisfaz $\rho(B) < 1$.

Teorema 0.4.3 - ([11], pag.108) - Sejam $B \in L(\mathbb{R}^n)$ e $C \in L(\mathbb{C}^n)$. Se $|C| \leq B$, então $\rho(C) \leq \rho(B)$.

Não é, em geral, verdade que a soma de M-matrizes é também uma M-matriz. Entretanto, um caso de especial importância é o seguinte:

Teorema 0.4.4 - ([11], pag.109) - Sejam $A \in L(\mathbb{R}^n)$ uma M-matriz e $D \in L(\mathbb{R}^n)$ uma matriz diagonal não negativa. Então $A + D$ é uma M-matriz e $(A + D)^{-1} \leq A^{-1}$.

Teorema 0.4.5 - ([11], pag.109) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ uma matriz de Stieltjes. Então A é definida positiva.

Teorema 0.4.6 - ([11], pag.109) - Seja $B \in L(\mathbb{R}^n)$ irredutível. Se

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq 1, \quad i=1,2,\dots,n$$

e se a desigualdade se verifica para pelo menos um i , então $\rho(B) < 1$.

No próximo resultado apresentamos uma condição suficiente para que uma matriz seja M-matriz.

Teorema 0.4.7 - ([11], pag.110) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ uma matriz estritamente ou irredutivelmente diagonalmente dominante tal que $a_{ij} \leq 0, i \neq j$ e $a_{ii} > 0, i=1,2,\dots,n$. Então A é uma M-matriz.

Consideremos agora, a matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & & & \circ \\ & a_2 & & & \\ -b_2 & & & & \\ & & & & \\ \circ & & & & \\ & & & -b_n & a_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

onde $a_1 > c_1 > 0$, $a_n > b_n > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$, $a_i \geq b_i + c_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. (6)

Teorema 0.4.8 - ([11], pag.110) - Consideremos a matriz (5) satisfazendo (6). Então A é uma M -matriz.

Definição 0.4.6 - Dizemos que a matriz $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é definida não negativa se $x^t Ax \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e, é definida positiva se $x^t Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo.

Alguns autores usam o termo definida semi-positiva ao invés de definida não negativa.

Para matrizes complexas é válida uma definição análoga à anterior desde que troquemos x^t por x^H .

Os autovalores de uma matriz A simétrica são todos reais; os de uma matriz A simétrica ou hermitiana ($A^H = A$) e definida não negativa são todos não negativos e são todos positivos se A é simétrica ou hermitiana e definida positiva.

Teorema 0.4.9 - ([16], pag.736) - Para alguma matriz $A \in L(\mathbb{R}^n)$, a matriz $A \cdot A^t$ é simétrica e definida não negativa. Se A é não singular, então $A \cdot A^t$ é simétrica e definida positiva.

Teorema 0.4.10 - ([11], pag.124) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Então $x^t Ax \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $x^t (A+A^t)x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 0.4.11 - ([11], pag.124) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Então $u^H Au$ é real para cada vetor complexo u se, e somente se, A é simétrica.

Teorema 0.4.12 - ([11], pag.124) - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ simétrica e definida positiva e seja $H \in L(\mathbb{R}^n)$ não singular. Então $H^t AH$ é definida positiva.

Abaixo, definimos uma das mais importantes operações da teoria matricial.

Definição 0.4.7 - Dizemos que duas matrizes $A, B \in L(\mathbb{C}^n)$ são *similares* se existe uma matriz não singular $P \in L(\mathbb{C}^n)$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Uma propriedade básica de matrizes similares é dada pelo

Teorema 0.4.13 - ([11], pag.8) - Se $A, B \in L(\mathbb{C}^n)$ são similares, então A e B têm os mesmos autovalores.

0.5 - Transformações Limitadas

Definição 0.5.1 - Seja X um espaço vetorial com métrica d . Dizemos que a transformação T de X em X é *limitada* num conjunto D de X , se em D ela satisfaz a uma condição de Lipschitz; ou seja, se existe uma constante real positiva

$\alpha < \infty$ tal que para todo $x, y \in D$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \quad (7)$$

Ao ínfimo, ou seja, ao maior dos limitantes inferiores dos números α que satisfazem (7) para $x \neq y$, denominamos *limite* de T em D . Se $D \equiv X$, dizemos que T é limitada em X . Se X é normado, então (7) tem a forma

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|.$$

De acordo com (2), podemos estabelecer que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \quad (8)$$

Podemos provar que $\|T\|$ é o limite em X de uma transformação T .

Para uma transformação linear limitada T temos que

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 0.5.1 - ([8], pag.239) - Sejam X e Y espaços de Banach. O conjunto de todas as transformações lineares limitadas de X em Y é um espaço de Banach para a norma definida em (8).

Definição 0.5.2 - Sejam X e Y espaços vetoriais munidos

de uma métrica d . Dizemos que uma transformação T de $D \subset X$ em Y é *contínua* em $x^* \in D$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx^*, \quad x_n \in D.$$

Está claro que uma transformação limitada numa vizinhança de x^* é contínua em x^* . Para transformações lineares a recíproca também é válida, pelo

Teorema 0.5.2 - ([8], pag.236) - Sejam X e Y espaços de Banach. Uma transformação linear contínua de X em Y é limitada em X .

0.6 - Diferenciação de transformações

A teoria sobre resolução de sistemas não lineares depende de noções de limite e continuidade da transformação T envolvida. Algumas vezes, exigimos também que a transformação T seja diferenciável em algum sentido.

Existem muitas definições para a derivada de uma transformação em espaços de Banach, sendo que, em \mathbb{R} , cada uma delas se reduz à definição usual.

Adotaremos aqui a definição de derivada segundo Frechet e diferencial segundo Frechet, às quais nos referiremos apenas por derivada e diferencial.

Definição 0.6.1 - Sejam X e Y espaços de Banach e seja T uma transformação de X em Y . Dizemos que a transformação T é *diferenciável* em x^* se existe uma transformação linear limita

da T' de X em Y , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(x^*+h) - T(x^*) - T'(x^*)h\|}{\|h\|} = 0.$$

A transformação linear limitada $T'(x^*)$ é chamada *derivada primeira* de T em x^* .

Da desigualdade

$$\|T(x^*+h) - T(x^*)\| \leq \|T(x^*+h) - T(x^*) - T'(x^*)h\| + \|T'(x^*)h\|$$

segue que se T é diferenciável em x^* , então T é contínua em x^* .

Consideremos agora, o espaço de Banach $X \equiv \mathbb{R}^n$ e alguma das normas ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. Podemos representar uma transformação T tal que $Tx=y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, por:

$$T_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Suponhamos que as derivadas parciais

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right|_{x=x^*} = \frac{\partial T_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

existam e sejam finitas no ponto $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Então, a derivada de T é representada pela *matriz Jacobiana*

$$T'(x^*) = \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(x^*) & \partial_2 T_1(x^*) & \dots & \partial_n T_1(x^*) \\ \partial_1 T_2(x^*) & \partial_2 T_2(x^*) & \dots & \partial_n T_2(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 T_n(x^*) & \partial_2 T_n(x^*) & \dots & \partial_n T_n(x^*) \end{pmatrix}$$

onde $\partial_j T_i(x^*) = \partial T_i(x^*) / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Uma das ferramentas básicas da análise não linear é o:

Teorema 0.6.1 - ([13], pag.22) - (Teorema do valor médio). Se T é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe pelo menos um ponto $\xi \in (a, b)$ tal que

$$T(b) - T(a) = (b-a) T'(\xi).$$

Do teorema acima decorre que se $x, y \in [a, b]$, então

$$|T(x) - T(y)| \leq \sup_{a \leq \xi \leq b} |T'(\xi)| \cdot |x - y|$$

conhecida como *desigualdade do valor médio*.

Infelizmente, não podemos estender estes resultados à transformações T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n . Entretanto, para tais transformações, temos

Teorema 0.6.2 ([11], pag.142) - Assumamos que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável sobre um conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Então, para $x, y \in D$,

$$T(y) - T(x) = \int_0^1 T'(x+t(y-x))(y-x) dt.$$

O próximo resultado é o correspondente ao teorema do valor médio, no caso de transformações T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n .

Teorema 0.6.3 ([11], pag.143) - Assumamos que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável sobre o conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Então, para $x, y \in D$,

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|T'(x+t(y-x))\| \cdot \|y-x\|.$$

Este resultado também é válido ([12], pag.69) se T é somente diferenciável em cada ponto de D .

0.7 - Algumas definições e considerações sobre problemas de valor inicial e métodos lineares de passo múltiplo.

Consideremos o problema de valor inicial para uma única equação diferencial de 1ª. ordem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad , \quad y(a) = y_0 \quad (9)$$

O teorema abaixo estabelece condições sobre f que garantem a existência e a unicidade da solução de (9).

Teorema 0.7.1 - ([9], pag.2) - Seja $f(x,y)$ definida e contínua em todos os pontos (x,y) da região D definida por $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < \infty$, a e b finitos. Suponhamos que exista uma constante L tal que, para cada x, y, \bar{y} tal que $(x,y) \in D$ e $(x,\bar{y}) \in D$, tenhamos

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}| .$$

Então, se y_0 é algum número dado, existe uma única solução $y(x)$ do problema de valor inicial (9) , sendo $y(x)$ contínua e diferenciável para todo $(x,y) \in D$.

Pretendemos agora, determinar a solução $y(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, a e b finitos. Suponhamos que f satisfaz as condições estabelecidas no teorema 0.7.1. Consideremos a sequência de pontos $\{x_n\}$ definida por $x_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. O parâmetro h , que assumiremos constante, é denominado *passo*. Uma propriedade essencial da maioria dos métodos computacionais para encontrar a solução de (9) é a de discretização; isto é, procuramos uma solução aproximada, não sobre o intervalo contínuo $a \leq x \leq b$ mas sobre o conjunto discreto de pontos $\{x_n : n = 0, 1, \dots, (b-a)/h\}$. Tomemos y_n como uma aproximação da solução teórica em x_n ; isto é, y_n é aproximação de $y(x_n)$, e tomemos $f_n \equiv f(x_n, y_n)$.

Definição 0.7.1 - Se um método de determinação da sequência $\{y_n\}$ toma a forma de uma relação linear entre y_{n+j} , f_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, s$, nós o chamamos *método linear de passo múltiplo de s passos*.

Consideremos agora, uma classe muito importante de métodos de integração: a classe geral dos métodos lineares de passo múltiplo de s passos

$$\sum_{j=0}^s \gamma_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^s \beta_j f_{n+j} \quad (10)$$

onde γ_j e β_j , $j=0,1,\dots,s$, são constantes. Assumiremos que $\gamma_s=1$ e que γ_0 e β_0 não são ambos nulos.

Então o problema de se determinar a solução $y(x)$ de (9) é transformado no problema de se determinar uma sequência $\{y_n\}$ que satisfaça à equação diferença (10).

Definição 0.7.2 - Se $\beta_s=0$ então o método é *explícito* e, em caso contrário, *implícito*.

Num método explícito, a equação (10) produz o valor y_{n+s} diretamente em função de y_{n+j} e f_{n+j} , $j=0,1,\dots,s-1$, o qual, em cada estágio de cálculo, é sempre bem determinado. No caso de um método implícito, entretanto, devemos resolver uma equação (em geral, não linear) para obter y_{n+s} .

0.8 - Algumas considerações sobre problemas de valores no contorno para equações diferenciais ordinárias.

Consideremos o problema de valores no contorno para uma equação diferencial de 2a. ordem

$$y''(t) = g(t,y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \beta \quad \text{e} \quad y(b) = \gamma \quad (11)$$

onde a função g e as constantes β e γ são dadas.

Suponhamos que este problema de valores no contorno tenha uma única solução; mas, em geral, não há nenhuma "representação fechada" para ela, e é, então, necessário considerarmos métodos que nos deem uma aproximação da solução. Um dos métodos mais comuns é o da diferença finita que descreveremos abaixo.

Primeiramente, dividamos o intervalo $[a, b]$ nos pontos

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b.$$

Para simplificar, suponhamos que os pontos t_i são igualmente espaçados com passo h ; isto é, que $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1 = (b-a)/h$.

Agora, aproximemos $y''(t_i)$ pela diferença dividida de 2a. ordem

$$y(t_i) \approx \frac{1}{h^2} \left[y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1}) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Quando usamos esta aproximação em (11), sabemos que a solução y satisfaz

$$(1/h^2) \left[y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1}) \right] = g(t_i, y(t_i)) + r(t_i, h)$$

para $i=1, 2, \dots, n$, nos pontos t_1, t_2, \dots, t_n . Aqui, $r(t_i, h)$ são os erros introduzidos pela aproximação de $y(t_i)$ segundo a diferença dividida de 2a. ordem. Podemos mostrar ([12], pag.14)

que

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(t_i, h) = 0$$

desde que y seja suficientemente diferenciável.

Agora, desprezemos o termo do erro e definamos aproximações x_1, x_2, \dots, x_n para os valores da solução exata $y(t_i)$ de (11) nos pontos t_1, t_2, \dots, t_n exigindo que as aproximações x_i satisfaçam ao sistema de n equações (em geral, não lineares)

$$f_i(x) \equiv -x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} + h^2 g(t_i, x_i) = 0, \quad (12)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = \beta$ e $x_{n+1} = \gamma$.

Geralmente, também é impossível encontrarmos uma solução explícita da equação (12). Então, usamos algum processo iterativo para determinar uma solução aproximada de (12). No capítulo 2, apresentamos um particular processo iterativo para resolvê-la.

CAPÍTULO 1

O TEOREMA DA CONTRAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES

1.1 - O problema do ponto fixo.

Definição 1.1.1 - Seja X um espaço métrico. Denominamos ponto fixo da transformação $T: X \rightarrow X$ a qualquer ponto $x \in X$ tal que $x = Tx$.

Por exemplo, a transformação $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Tx = x^3$ tem os pontos fixos $x=0$, $x=1$ e $x=-1$.

Observemos que determinar um ponto fixo de uma transformação T é equivalente a obter uma solução da equação $x = Tx$. Se conhecemos um valor $x^{(0)}$ de x (que chamaremos aproximação inicial de x) tal que $Tx^{(0)}$ não seja muito diferente de $x^{(0)}$, é natural que consideremos $x^{(1)} = Tx^{(0)}$ como uma aproximação de $x^{(0)}$ e, que geremos a sequência $\{x^{(k)}\}$ de aproximações sucessivas para o ponto fixo x de T , pelo processo iterativo

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Consideremos, agora, uma equação do tipo

$$f(x) = 0 \quad (14)$$

onde f e x são vetores de mesma dimensão m ; isto é, se $m=1$ temos uma simples equação e, se $m=n$, temos um sistema de n equações.

Em geral, é possível reescrevermos a equação (14) como um problema do ponto fixo do tipo $x = Tx$. Assim, para resolvermos a equação (14), usamos o processo iterativo (13) para gerar aproximações sucessivas da solução que desejamos. Por esse motivo, o processo iterativo (13) é conhecido como método das aproximações sucessivas.

No caso em que f é uma função real de uma variável real, podemos fazer uma interpretação geométrica muito simples para o problema do ponto fixo, pois, neste caso, uma raiz da equação (14) escrita como um problema do ponto fixo do tipo $x = Tx$ é um número x^* no qual a reta $Y = x$ intercepta a curva $y = Tx$. Pode ocorrer, naturalmente, que estas curvas não se interceptem. Isto significa que não há raiz real.

Existem muitas maneiras de expressarmos a equação (14) na forma $x = Tx$. Nem todas, porém, são igualmente satisfatórias para nossas finalidades. Por exemplo, dada a equação

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 = 0 \quad (15)$$

podemos reescrevê-la na forma $x = T(x)$ fazendo, por exemplo,

$$T(x) = \frac{5-x^2}{2} \quad \text{ou} \quad T(x) = \frac{5}{x+2}, \quad \text{para } x \neq -2.$$

Considerando que a função $f(x)$ definida em (15) é contínua e que $f(1)$ e $f(2)$ tem sinais contrários concluimos que a equação (15) tem uma solução (ou raiz) no intervalo $[1, 2]$. Tomando $x^{(0)} = 1$ e, no primeiro caso,

$$x^{(k+1)} = \frac{5 - [x^{(k)}]^2}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

obtemos a sequência

$$x^{(0)} = 1, \quad x^{(1)} = 2, \quad x^{(2)} = 0.5, \quad x^{(3)} = 2.375, \dots$$

que aparentemente diverge da solução desejada.

Tomando-se, agora, $x^{(0)} = 1$ e o processo iterativo

$$x^{(k+1)} = \frac{5}{x^{(k)} + 2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

obtemos a sequência

$$x^{(0)} = 1, \quad x^{(1)} = 1.67, \quad x^{(2)} = 1.36, \quad x^{(3)} = 1.49, \quad x^{(4)} = 1.43, \\ x^{(5)} = 1.46, \quad x^{(6)} = 1.45, \dots$$

que aparentemente converge para a solução desejada.

1.2 - O Teorema da Contração

Consideremos agora as questões de existência, unicidade e construção ou aproximação de pontos fixos de transformações; bem como, o problema de estimativa do erro para as soluções aproximadas. Antes, definamos transformação contração.

Definição 1.2.1 - Seja X em espaço métrico com métrica d . Dizemos que a transformação $T: X \rightarrow X$ é uma *contração* sobre o conjunto fechado $D \subset X$ se:

$$i) Tx \in D \text{ para todo } x \in D. \quad (16)$$

ii) Existe uma constante α , $0 \leq \alpha < 1$ tal que para cada par de pontos $x, y \in D$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot d(x, y). \quad (17)$$

Muitos autores não incluem a condição (i) na definição de uma transformação contração. Para simplificar este trabalho, optamos, sem maiores prejuízos, pela definição acima, encontrada, por exemplo, em ([13], pag.267).

Provemos agora, um resultado que é pouco mais que uma observação.

Teorema 1.2.1 - Seja X um espaço métrico com métrica d . Se $T: X \rightarrow X$ é uma contração sobre $D \subset X$, então T é contínua em D .

Demonstração: Seja dado $\xi > 0$ e seja x um ponto qualquer de D . Então, se $\alpha < 1$, em (17), temos

$$d(Tx, Ty) = \alpha \cdot d(x, y) < \xi,$$

para todo $y \in D$. Logo, T é contínua em x .

Caso contrário; ou seja, se $0 < \alpha < 1$, seja $\delta = \xi / \alpha$ e seja y um ponto qualquer de D tal que $d(x, y) < \delta$. Então

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \cdot \frac{\xi}{\alpha} = \xi,$$

e, novamente, concluímos que T é contínua em x . Como $x \in D$ é qualquer, nos dois casos concluímos que T é contínua em D .

Teorema 1.2.2 - (Teorema da Contração). Seja X um espaço métrico completo com métrica d e, seja $T: X \rightarrow X$ uma contração sobre o conjunto fechado $D \subset X$. Então, a transformação T tem um e um só ponto fixo $x^* \in D$ e a sequência $\{x^{(k)}\}$ definida por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

com $x^{(0)} \in D$ arbitrário, converge para x^* . Além disso, é válida a seguinte estimativa para o erro:

$$d(x^{(k+1)}, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(k+1)}, x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

onde α é o fator de contração de T em D .

Demonstração: Tomemos $x^{(0)} \in D$ e formemos a sequência (18). Por (16), se $x^{(0)} \in D$ então $x^{(k)} \in D$, $k = 0, 1, 2, \dots$; e, por (17), temos que

$$\begin{aligned} d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) &= d(Tx^{(k)}, Tx^{(k-1)}) \leq \alpha d(x^{(k)}, x^{(k-1)}) \leq \dots \\ &\leq \alpha^k d(x^{(1)}, x^{(0)}). \end{aligned} \quad (20)$$

Se $m > (k+1)$, pela desigualdade triangular, concluimos que:

$$\begin{aligned} d(x^{(m)}, x^{(k+1)}) &\leq d(x^{(k+2)}, x^{(k+1)}) + d(x^{(k+3)}, x^{(k+2)}) + \dots + \\ &+ d(x^{(m)}, x^{(m-1)}) \leq d(x^{(k+2)}, x^{(k+1)}) \cdot (1 + \alpha + \dots + \\ &+ \alpha^{m-k-2}); \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(x^{(m)}, x^{(k+1)}) \leq \alpha \cdot d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \quad (21)$$

Usando (20) concluimos que

$$d(x^{(m)}, x^{(k+1)}) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \quad (22)$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{k+1} = 0$, pois $\alpha < 1$, segue, de (22), que a sequência $\{x^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, é de Cauchy e, porque D é fechado, tem um limite x^* em D .

Por outro lado, pela continuidade de T em D , segue que

$$Tx^* = T \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = x^* ;$$

ou seja, que $x^* \in D$ é um ponto fixo de T .

Provemos agora, a unicidade do ponto fixo.

Suponhamos que $x^{**} \neq x^*$ sejam dois pontos fixos de T em D . Temos, então, que

$$0 < d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq \alpha d(x^*, x^{**}) < d(x^*, x^{**}) ,$$

pois $\alpha < 1$. Chegamos então a uma contradição, donde concluímos, que $x^* = x^{**}$; ou seja, que o ponto fixo de T em D é único.

Façamos agora, $m \rightarrow \infty$ em (21). Chegamos a:

$$d(x^*, x^{(k+1)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) ,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

No importante caso especial em que $D = X = \mathbb{R}^n$, tal que a transformação T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n , o teorema 1.2.2 proporciona-nos um *teorema de convergência global*; isto é, para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ definida em (18) converge para o único ponto fixo x^* de T no \mathbb{R}^n . Este é o caso, como veremos no capítulo 3, da maioria das transformações T dos métodos iterativos para resolução de sistemas lineares. Observemos que, aqui, a condição (i) da definição de contração é desnecessária. O objetivo desta condição naquela definição prende-se ao fato que, daqui por diante, quando esta belecemos que T é uma transformação contração sobre um conjunto fechado D contido em um espaço de Banach então, pelo teorema 1.2.2, poderemos concluir que o processo iterativo (18) converge para o único ponto fixo x^* de T em D , desde que a aproximação inicial $x^{(0)}$ pertença a D . Se a condição (i) não constasse da definição de transformação contração, teríamos, na

demonstração e aplicação do teorema 1.2.2, que demonstrar que dado $x^{(0)} \in D$ então cada $x^{(k)}$, $k=1,2,\dots$, pertenceria a D .

Se apenas assumirmos que T satisfaz a condição (ii) da definição de contração sobre somente uma parte de X , nossos resultados não nos respondem se para um dado $x^{(0)}$ o processo iterativo (18) será convergente. Discutiremos, agora, um resultado potencialmente útil a este respeito.

Teorema 1.2.3 - Seja X um espaço métrico completo com métrica d . Seja $T: X \rightarrow X$ satisfazendo

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

para todo $x, y \in D \subset X$, com $0 \leq \alpha < 1$. Assumamos que $x^{(0)} \in D$ é tal que

$$S \equiv \{x: d(x, Tx^{(0)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(0)}, Tx^{(0)})\} \subset D.$$

Então, T é uma contração sobre S .

Demonstração: Se $x \in S$, então

$$\begin{aligned} d(Tx, Tx^{(0)}) &\leq \alpha d(x, x^{(0)}) \leq \alpha \left[d(x, Tx^{(0)}) + d(Tx^{(0)}, x^{(0)}) \right] \\ &\leq \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \alpha \right) d(x^{(0)}, Tx^{(0)}) \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(0)}, Tx^{(0)}) . \end{aligned}$$

Portanto, $Tx \in S$. Consequentemente, T é uma contração sobre S .

Como ilustração do teorema 1.2.2 consideremos

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 = 0$$

reescrita como um problema do ponto fixo do tipo $x = T(x)$ com

$$T(x) = \frac{5}{x+2}, \quad \text{para } x \neq -2.$$

Temos, então

$$T(x) - T(y) = \frac{-5}{(x+2)(y+2)} (x-y), \quad \text{para } x \neq -2 \text{ e } y \neq -2.$$

No intervalo $D = [1, 2]$, temos

$$|T(x) - T(y)| \leq 0.56 |x - y|.$$

Então, a função T é uma contração sobre $D = [1, 2]$, com fator de contração $\alpha = 0.56$ (calculado em $x = 1$ e $y = 1$), pois, claramente, se $x \in D$ então $T(x) \in D$. Assim, o teorema 1.2.2 garante-nos a existência de um ponto fixo x^* de T em $D = [1, 2]$, para o qual converge a sequência $\{x^{(k)}\}$ definida por

$$x^{(k+1)} = \frac{5}{x^{(k)} + 2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

com $x^{(0)} \in [1, 2]$ arbitrário, como já havíamos previsto na seção 1.1.

Observemos que a estimativa (19) é de grande importância na prática; pois, se o fator de contração α é conhecido então o erro atual $x^{(k)} - x^*$ após o K -ésimo passo da iteração (18) pode ser limitado em função do último passo $x^{(k)} - x^{(k+1)}$. Além disso, suponhamos, por exemplo, que $\alpha = 0.9$ e que pretendemos determinar a solução x^* com um erro inferior a 10^{-4} ; isto é, desejamos que a solução aproximada x^* satisfaça $d(x^{(k+1)}, x^*) \leq 10^{-4}$. Podemos assegurar que isto aconteça desde que iteremos até que $d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq 10^{-5}$, uma vez que, por (19), temos

$$d(x^{(k+1)}, x^*) \leq 9 \cdot d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) < 10^{-4}.$$

O próximo resultado nos dá uma outra estimativa do erro, agora dependendo apenas das duas primeiras aproximações.

Teorema 1.2.4 - Se as condições do teorema 1.2.2 são satisfeitas, uma estimativa do erro é dada por:

$$d(x^{(k+1)}, x^*) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1 - \alpha} d(x^{(1)}, x^{(0)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstração: Basta que em (20) façamos $m \rightarrow \infty$.

No próximo resultado apresentamos uma condição suficiente para que uma transformação T seja contração sobre um conjunto fechado. Usaremos este resultado no capítulo 3, embora, na prática, este não seja de grande utilidade.

Teorema 1.2.5 - Suponhamos que X seja um espaço métrico completo com métrica d e que $D = \{x \in X: d(x, y_0) \leq r\}$ com $y_0 \in X$ fixado. Consideremos a transformação $T: X \rightarrow X$ e suponhamos que para quaisquer par de pontos $x, y \in D$, vale

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (23)$$

e

$$d(Ty_0, y_0) \leq (1 - \alpha)r,$$

com $0 \leq \alpha < 1$. Então T é uma contração sobre D .

Demonstração: Se $x \in D$ então $Tx \in D$, pois

$$d(Tx, y_0) \leq d(Tx, Ty_0) + d(Ty_0, y_0) \leq \alpha d(x, y_0) + (1 - \alpha)r \leq r.$$

Este fato aliado à condição (23) implica que T é uma contração sobre D . ■

1.3 - Condições suficientes para que uma função T de \mathbb{R} em \mathbb{R} seja contração.

Observemos que a função real T de uma variável real definida e assumindo valores em $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ é uma contração sobre I se existe uma constante α , $0 \leq \alpha < 1$, tal que para todo par de pontos $x, y \in I$,

$$|T(x) - T(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Na maioria das vezes, torna-se difícil verificarmos esta condição. Nosso próximo resultado, embora mais restritivo, nos dá uma condição mais prática que nos assegura quando uma função real de uma variável real é uma contração.

Teorema 1.3.1 - Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e seja a função $T: I \rightarrow I$. Se T é contínua e tem derivada primeira contínua em I então $|T'(x)| < 1$, para todo $x \in I$, implica que T é uma contração sobre I .

Demonstração: Sendo T contínua e tendo derivada primeira contínua em I , pelo teorema do valor médio, temos

$$|T(x) - T(y)| \leq |T'(\zeta)| \cdot |x - y| ,$$

com $\zeta \in (x, y)$ para todo $x, y \in I$.

Portanto, se $|T'(x)| \leq \alpha < 1$ para todo $x \in I$, então T é uma contração sobre I .

Como aplicação prática do resultado acima, consideremos, novamente, a equação

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 = 0$$

reescrita como um problema do ponto fixo do tipo $x = T(x)$, com

$$T(x) = \frac{5}{x + 2} , \text{ para } x \neq -2 .$$

Seja $I = [1, 2]$. Para $x \in I$ temos $T(x) \in I$.

Além disso,

$$T'(x) = -\frac{5}{(x+2)^2}.$$

Portanto, para $x \in I$ temos $|T'(x)| < 1$, pois $|T'(1)| = 5/9$. Em consequência, pelo teorema 1.3.1, T é contração sobre I , como já havíamos verificado anteriormente.

Escrevamos, agora, $f(x) = 0$ como um problema do ponto fixo do tipo $x = T(x)$ com

$$T(x) = \frac{5-x^2}{2}.$$

Temos que

$$T'(x) = -x$$

e, portanto, $|T'(x)| < 1$ se, e somente se, $x < 1$. Assim, T não é contração sobre $I = [1, 2]$.

Como outra aplicação prática do resultado anterior e do teorema 1.2.2, resolvamos a equação $f(x) = x - e^{-x} = 0$.

Para $T(x) = e^{-x}$, usando duas decimais exatas, temos que $T(0.4) = 0.67$ e $T(0.7) = 0.50$. Uma vez que T é também uma função decrescente, concluímos que se $x \in [0.4, 0.7]$ então $T(x) \in [0.4, 0.7]$.

Temos ainda que $T'(x) = -e^{-x}$ e, portanto, $|T'(x)| < 0.7$ para todo $x \in [0.4, 0.7]$.

Consequentemente, pelo teorema 1.3.1, a função T é uma contração sobre $[0.4, 0.7]$ com fator de contração

$\alpha = 0.7$; e, o teorema 1.2.2 garante-nos que o processo iterativo

$$x^{(k+1)} = e^{-x^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

converge para a única raiz de $x = e^{-x}$ em $[0.4, 0.7]$, para qualquer $x^{(0)}$ neste intervalo.

De fato, se $x^{(0)} = 0.5$, aplicando o processo iterativo (24) e usando três decimais exatas, obtemos a tabela:

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^{(k)}$	0.5	0.607	0.545	0.580	0.560	0.571	0.565	0.568	0.567	0.567
$x^{(k)} - x^*$	-0.067	0.040	-0.022	0.013	-0.007	0.004	-0.002	0.001	0.000	0.000

Os números $x^{(k)}$ verificam a afirmativa que fizemos de que o processo iterativo (24) é convergente, embora lentamente, para a solução $x^* = 0.567$. Foi usando este valor de x^* que construímos a última linha da tabela acima, para mostrarmos que o erro tende monotonicamente para zero.

As figuras 1 e 2 abaixo ilustram a convergência do processo iterativo

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

para funções T tais que $0 \leq T'(x) < 1$ e $-1 < T'(x) \leq 0$, respectivamente. Observemos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para x^* monotonicamente quando o coeficiente angular é positivo

e converge com valores alternadamente superiores e inferiores a x^* quando T tem coeficiente angular negativo.

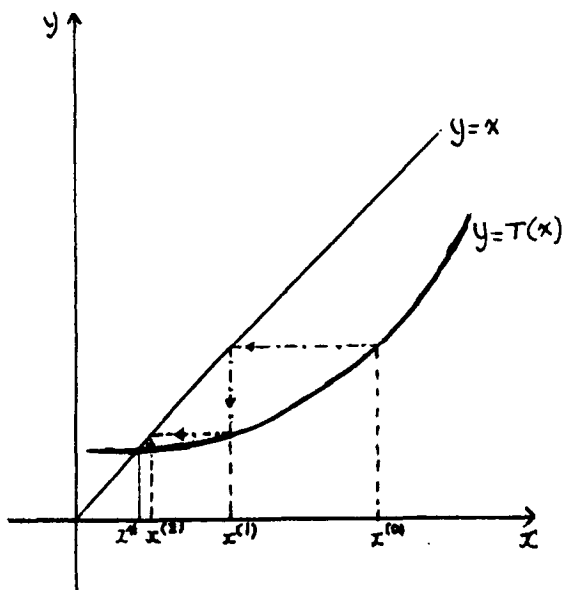


Figura 1.

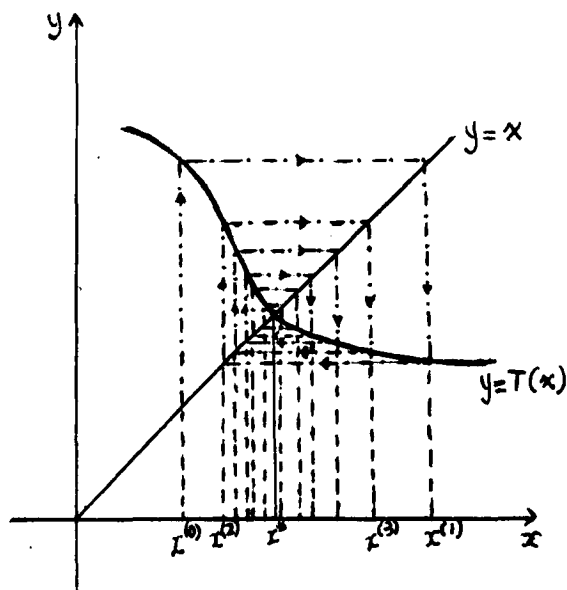


Figura 2.

As figuras 3 e 4 abaixo ilustram a não convergência do processo iterativo

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

para funções T tais que $1 \leq T'(x) < \infty$ e $-\infty < T'(x) \leq -1$, respectivamente.

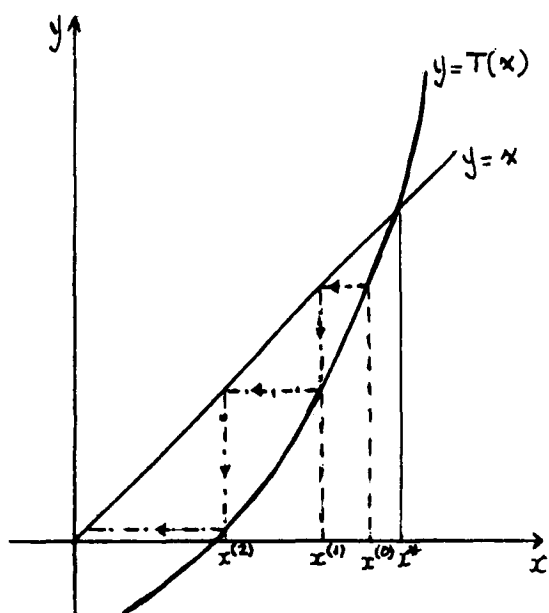


Figura 3.

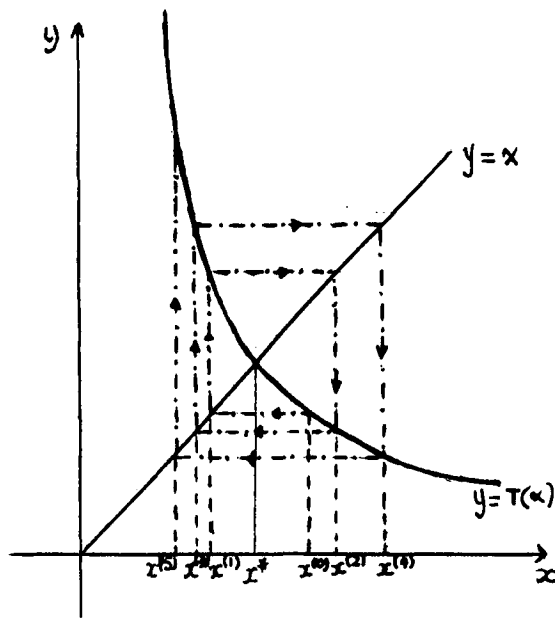


Figura 4.

O próximo resultado, bem como o anterior, terá grande utilidade no capítulo 3, pois nos possibilitará mostrar que as funções T dos métodos iterativos mais usuais para resolução numérica de equações algébricas ou transcendentais são contrações sobre algum intervalo contendo a solução (ou raiz) x^* procurada.

Teorema 1.3.2 - Suponhamos que sobre algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ as funções T e T' são contínuas e que a função T tem um ponto fixo $x^* \in I$ com $|T'(x^*)| < 1$. Então, a função T é uma contração sobre algum subintervalo fechado de I contendo x^* .

Demonstração: Pela continuidade de T' encontramos $\delta > 0$ tal que

$$|T'(x)| \leq \alpha < 1$$

para todo $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset I$.

Além disso,

$$|T(x) - x^*| = |T(x) - T(x^*)| \leq |T'(\zeta)| |x - x^*| \leq \delta, \quad \zeta \in [x, x^*].$$

Concluimos, então que T é uma contração sobre $[x^* - \delta, x^* + \delta] \subset I$.

1.4 - Condições suficientes para que uma transformação não linear T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n seja contração.

Consideremos agora, o problema de resolver o sistema de equações não lineares

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

o qual, usualmente, escrevemos na forma vetorial

$$Fx = 0 \quad (26)$$

onde $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação cujas componentes são f_i ; isto é, $Fx = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^t$.

Observemos que, por simplicidade, assumimos que F está definida sobre todo o \mathbb{R}^n . Isto não é essencial, a menos de generalização, desde que se F está definida somente sobre um subconjunto D , ela pode sempre, de um modo arbitrário, ser estendida ao espaço inteiro.

Inicialmente, escrevamos o sistema (25) na forma equivalente

$$x_i = t_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

ou, na forma

$$x = Tx$$

onde $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação cujas componentes são

$$t_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Suponhamos que seja conhecido que o sistema (27) tenha uma única solução x_i^* , $i=1,2,\dots,n$, num certo conjunto do \mathbb{R}^n . Se certas limitações forem impostas às funções $t_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i=1,2,\dots,n$, podemos determinar a solução x_i^* com uma precisão pré-determinada utilizando o processo iterativo

$$x_i^{(k+1)} = t_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i=1,2,\dots,n; k=0,1,\dots \quad (28)$$

com a aproximação $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ tomada suficientemente próxima da solução x_i^* , $i=1,2,\dots,n$, desejada.

Evidentemente, em lugar das n igualdades (28), podemos escrever o processo iterativo na forma

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Assim, determinar a solução x_i^* , $i=1,2,\dots,n$, do sistema não linear (25) equivale a determinar o ponto fixo $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ da transformação não linear T .

De modo análogo ao teorema 1.3.1, o próximo resultado nos dá uma condição que embora mais restritiva que a definição 1.2.1, facilita-nos verificar quando uma transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma contração. Aqui, como métrica no \mathbb{R}^n , usamos $d(x,y) = \|x-y\|$, para todo $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.4.1 - Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável sobre o conjunto convexo D e tal que para todo $x \in D$, $Tx \in D$.

Se

$$\| T'(x) \| \leq \alpha < 1 \quad (29)$$

para todo $x \in D$, então a transformação T é uma contração sobre D .

Demonstração: A demonstração é análoga à do teorema 1.3.1, bastando aqui considerarmos o teorema do valor médio (teorema 0.6.3) que nos garante que

$$\| Tx - Ty \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| T'(x+t(y-x)) \| \cdot \| x-y \| ,$$

para todo $x, y \in D$. Assim, tomando $\zeta = x+t(y-x)$, $0 \leq t \leq 1$, temos que se

$$\sup_{\zeta \in D} \| T'(\zeta) \| \leq \alpha < 1 ;$$

ou seja, se

$$\| T'(x) \| \leq \alpha < 1 ,$$

para todo $x \in D$, então como se $x \in D$ segue, por hipótese, que $Tx \in D$, concluimos que T é uma contração sobre D .

Na prática, a condição (29) é substituída pela condição

$$\| M \| \leq \alpha < 1$$

onde M é a matriz quadrada de ordem n cujos elementos são

$$m_{ij} = \sup_{x \in D} \left| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x_j} \right|. \quad (30)$$

Está claro que a condição (29) depende da norma considerada. Isto significa que T é uma contração com respeito a alguma norma, podendo não o ser com respeito a uma outra norma. Observemos ainda que escolhendo as normas $\|\cdot\|_p$, com $p=1$ ou $p=\infty$, podemos facilmente calcular o fator de contração α , bastando fazer $\alpha = \|M\|_1$ ou $\alpha = \|M\|_\infty$. Escolhendo a norma Euclidiana, $\alpha = \|M\|_E$ não é facilmente calculável. Entretanto, podemos escrever:

$$\|Tx - Ty\|_E \leq \left(\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2 \right)^{1/2} \cdot \|x - y\|_E$$

tal que, usando $\|\cdot\|_E$, podemos fazer

$$\alpha = \left(\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (31)$$

Como um exemplo prático, apliquemos o teorema 1.4.1, com a condição (30), ao sistema de equações não lineares (32), embora este seja facilmente resolvido pelo método das substituições.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4.8 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Reescrevendo as equações acima como:

$$x_1 = \left(\frac{4.8 - x_2^2}{2} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{2} (3 - x_1) \quad (33)$$

obtemos o sistema (32) na forma de um problema do ponto fixo do tipo $x = Tx$ onde $x = (x_1, x_2)^t$ e $Tx = (t_1(x), t_2(x))^t$.

Denotando por D o conjunto fechado $1 \leq x_1 \leq 2$, $0 \leq x_2 \leq 1$, temos de (33) que se $x \in D$ então $Tx \in D$. Além disso,

$$\frac{\partial t_1(x)}{\partial x_2} = - \frac{x_2}{(9.6 - 2x_2^2)^{1/2}}$$

cujo máximo módulo sobre D ocorre para $x_2 = 1$ com valor $1/\sqrt{7.6}$. Portanto, a matriz M de elementos m_{ij} definidos por (30) é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{7.6} \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos então, $\|M\|_1 = \|M\|_\infty = 1/2$ e, para (31), temos $\alpha = (2.9/7.6)^{1/2}$. Concluimos então que a transformação T é uma contração sobre D sob quaisquer uma das três normas usuais do \mathbb{R}^n . Podemos então, aplicar o teorema 1.2.2. Assim, tomando como aproximação inicial o ponto central de D ; ou se

ja, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^t = (1.5, 0.5)^t$, usando quatro decimais exatas e o processo iterativo

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde

$$x_1^{(k+1)} = \left(\frac{4.8 - (x_2^{(k)})^2}{2} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k)}),$$

obtemos a tabela:

K	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	1.5	1.5083	1.4556	1.4566	1.4498	1.4499	1.4490
$x_2^{(k)}$	0.5	0.75	0.7459	0.7722	0.7717	0.7751	0.7751

De maneira análoga à demonstração do teorema 1.3.2, podemos demonstrar o

Teorema 1.4.2 - Consideremos a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Suponhamos que as transformações T e T' são contínuas sobre algum conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e que a transformação T tem um ponto fixo $x^* \in D$ tal que $\|T'(x^*)\| < 1$. Então a transformação T é uma contração sobre alguma vizinhança fechada de x^* contida em D .

1.5 - Condições suficientes para que uma transformação afim T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n seja contração.

Definição 1.5.1 - Se $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$ então a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $Tx = Hx + b$, $x \in \mathbb{R}^n$ é uma transformação afim do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n .

Consideremos agora, o sistema linear a ser resolvido

$$Ax = b \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

com $A \in L(\mathbb{R}^n)$ não singular e $x, b \in \mathbb{R}^n$.

Se $B \in L(\mathbb{R}^n)$ e $C \in L(\mathbb{R}^n)$ são tais que

$$A = B - C \quad (35)$$

chamamos (35) de uma decomposição de A . Por uma tal decomposição, podemos escrever (34) na forma

$$Bx = Cx + b$$

a qual sugere o processo iterativo

$$Bx^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

com $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Exigindo que B seja não singular, definimos de maneira única, para um dado $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, a se

quência $\{x^{(k)}\}$ por

$$x^{(k+1)} = B^{-1} C x^{(k)} + B^{-1} b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Tal processo iterativo pode ser escrito na forma

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

onde $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a transformação afim $Tx = Hx + s$, com $H = B^{-1}C$ e $s = B^{-1}b$.

Está claro que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema (34) se, e somente se, x^* é ponto fixo da transformação T no \mathbb{R}^n .

Como veremos nos capítulos 2 e 3, pelo princípio da decomposição de A , podemos gerar e analisar a maioria dos métodos iterativos estacionários para a resolução de sistemas de equações lineares; e, uma vez que, pelo mesmo princípio, tais métodos podem ser escritos na forma (36), concluímos que a maioria dos métodos iterativos estacionários para a resolução de sistemas lineares nada mais são que simples problemas do ponto fixo.

Os teoremas seguintes estabelecem critérios sobre a transformação linear H de modo que as transformações a fins definidas na maioria dos métodos iterativos para resolução de sistemas lineares sejam contrações sobre todo o \mathbb{R}^n .

Teorema 1.5.1 - Consideremos a transformação afim $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

definida por $Tx = Hx + s$, com $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$. Então, T é uma contração sobre o \mathbb{R}^n se existe alguma norma sobre o \mathbb{R}^n tal que $\|H\| < 1$.

Demonstração: Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\|Tx - Ty\| = \|Hx - Hy\| \leq \|H\| \cdot \|x - y\|.$$

Portanto, se $\|H\| < 1$ segue que T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Observemos que a condição $\|H\| < 1$ para que a transformação afim $Tx = Hx + s$ seja uma contração sobre o \mathbb{R}^n depende da norma considerada; isto é, a transformação T pode ser contração sobre o \mathbb{R}^n com respeito a uma determinada norma e não o ser com respeito a uma outra norma. Na prática, felizmente, para que possamos aplicar o teorema da convergência global (apresentado na pag. 31 como caso particular do teorema da contração), o que nos importa é saber se existe alguma norma do \mathbb{R}^n com respeito a qual T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n , não sendo de grande interesse a identificação de tal norma.

Vejamos agora uma condição necessária e suficiente para que a transformação afim T seja uma contração sobre o \mathbb{R}^n .

Teorema 1.5.2 - Consideremos a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $Tx = Hx + s$ com $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma norma sobre o \mathbb{R}^n com respeito a qual T é uma contra

ção sobre o \mathbb{R}^n se, e somente se, $\rho(H) < 1$, onde por $\rho(H)$ indicamos o raio espectral de H .

Demonstração: Mostremos que se $\rho(H) < 1$ então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n . Temos que

$$\begin{aligned} \rho(H) < 1 &\leftrightarrow 1 - \rho(H) > 0 \leftrightarrow \exists \xi > 0 \text{ tal que } 0 < \xi < 1 - \rho(H) \\ &\leftrightarrow \rho(H) + \xi < 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema 0.3.6, se $\rho(H) < 1$ então existe uma norma no \mathbb{R}^n tal que $\|H\| < 1$; e, pelo teorema 1.5.1, concluímos que, com respeito a esta norma, T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Agora, pelo teorema 0.3.5, temos que

$$\rho(H) \leq \|H\|$$

qualquer que seja a norma considerada no \mathbb{R}^n . Então, pelo teorema 1.5.1, T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n se existe alguma norma no \mathbb{R}^n tal que

$$\rho(H) \leq \|H\| < 1$$

o que demonstra o teorema.

definida por $Tx = Hx + s$, com $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$. Então, T é uma contração sobre o \mathbb{R}^n se existe alguma norma sobre o \mathbb{R}^n tal que $\|H\| < 1$.

Demonstração: Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\|Tx - Ty\| = \|Hx - Hy\| \leq \|H\| \cdot \|x - y\|.$$

Portanto, se $\|H\| < 1$ segue que T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Observemos que a condição $\|H\| < 1$ para que a transformação afim $Tx = Hx + s$ seja uma contração sobre o \mathbb{R}^n depende da norma considerada; isto é, a transformação T pode ser contração sobre o \mathbb{R}^n com respeito a uma determinada norma e não o ser com respeito a uma outra norma. Na prática, felizmente, para que possamos aplicar o teorema da convergência global (apresentado na pag. 31 como caso particular do teorema da contração), o que nos importa é saber se existe alguma norma do \mathbb{R}^n com respeito a qual T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n , não sendo de grande interesse a identificação de tal norma.

Vejamos agora uma condição necessária e suficiente para que a transformação afim T seja uma contração sobre o \mathbb{R}^n .

Teorema 1.5.2 - Consideremos a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $Tx = Hx + s$ com $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $s \in \mathbb{R}^n$. Então, existe uma norma sobre o \mathbb{R}^n com respeito a qual T é uma contra

ção sobre o \mathbb{R}^n se, e somente se, $\rho(H) < 1$, onde por $\rho(H)$ indicamos o raio espectral de H .

Demonstração: Mostremos que se $\rho(H) < 1$ então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n . Temos que

$$\begin{aligned} \rho(H) < 1 &\leftrightarrow 1 - \rho(H) > 0 \leftrightarrow \exists \xi > 0 \text{ tal que } 0 < \xi < 1 - \rho(H) \\ &\leftrightarrow \rho(H) + \xi < 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema 0.3.6, se $\rho(H) < 1$ então existe uma norma no \mathbb{R}^n tal que $\|H\| < 1$; e, pelo teorema 1.5.1, concluímos que, com respeito a esta norma, T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Agora, pelo teorema 0.3.5, temos que

$$\rho(H) \leq \|H\|$$

qualquer que seja a norma considerada no \mathbb{R}^n . Então, pelo teorema 1.5.1, T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n se existe alguma norma no \mathbb{R}^n tal que

$$\rho(H) \leq \|H\| < 1$$

o que demonstra o teorema.

CAPÍTULO 2ALGUNS MÉTODOS ITERATIVOS

Neste capítulo apresentamos alguns métodos iterativos da Análise Numérica. Aqui mostramos também que as transformações T de tais métodos são resultantes da tentativa de exprimirmos a equação $f(x)=0$ (f e x vetores de mesma dimensão $n>1$) como um problema do ponto fixo do tipo $x=Tx$.

2.1 - Para a resolução de equações algébricas ou transcendent -
tes.

Vejamos agora, particulares transformações da equação algébrica ou transcendente $f(x)=0$ em um problema do ponto fixo do tipo

$$x = T(x) \equiv x - \psi(x) f(x). \quad (37)$$

Está claro que se a equação $f(x)=0$ tem uma raiz x^* e se $\psi(x)$ é contínua numa vizinhança de x^* então a equação (37) também tem uma raiz x^* .

A função $\psi(x)$ pode ser construída tal que a função T seja uma contração sobre uma determinada vizinhança da raiz x^* , a qual é, também, ponto fixo de T .

Descrevemos abaixo, alguns métodos iterativos mais usuais para resolução de equações algébricas ou transcendent. Na verdade, nos três primeiros métodos, apenas apre -

sentamos seus algoritmos. As condições necessárias e suficientes para a aplicação dos mesmos são apresentadas no capítulo 3.

2.1.1 - Método das Cordas

Definamos a função $\psi(x)$ por

$$\psi(x) = \gamma$$

onde γ é uma constante não nula.

Com esta escolha de $\psi(x)$ obtemos a função iteração

$$T(x) = x - \gamma f(x)$$

e o processo iterativo denominado *método das cordas* e definido por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \gamma f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

com a aproximação inicial $x^{(0)}$ escolhida suficientemente próxima da raiz x^* desejada.

2.1.2 - Método da falsa posição

Consideremos a função $\psi(x)$ definida por

$$\psi(x) = \frac{x - x^{(0)}}{f(x) - f(x^{(0)})}$$

Com esta escolha de $\psi(x)$ obtemos

$$x = T(x) \equiv x - \psi(x)f(x) = \frac{x^{(0)}f(x) - xf(x^{(0)})}{f(x) - f(x^{(0)})} .$$

Assim, no processo iterativo

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(0)}f(x^{(k)}) - x^{(k)}f(x^{(0)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(0)})} , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

denominado *método da falsa posição*, a função iteração T é definida por

$$T(x) = \frac{x^{(0)}f(x) - xf(x^{(0)})}{f(x) - f(x^{(0)})} .$$

As aproximações $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ devem ser escolhidas próximas da raiz x^* desejada e devem ser tais que $f(x^{(0)}) \cdot f''(x^{(0)}) > 0$ e $f(x^{(0)}) \cdot f(x^{(1)}) < 0$.

2.1.3 - Método de Newton-Raphson ou método das tangentes

Definamos a função $\psi(x)$ por

$$\psi(x) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Com esta escolha de $\psi(x)$, obtemos a função iteração

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e o processo iterativo denominado *método de Newton-Raphson* e definido por

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sendo necessário, como veremos no capítulo 3, escolhermos a aproximação inicial $x^{(0)}$ próxima da raiz x^* desejada.

Podemos usar o método de Newton-Raphson para de terminar raízes reais ou complexas da equação $f(x) = 0$. No caso de desejarmos determinar uma raiz complexa é necessário a penas que a aproximação inicial $x^{(0)}$ seja um número complexo e não um número real.

2.1.4 - O método de Chebyshev por iterações de alta ordem.

Em 1838, Chebyshev propôs um método de determinação das raízes reais da equação $f(x) = 0$, o qual generalizou muitos métodos desenvolvidos anteriormente. Seu método ba seu-se na representação da função inversa de $f(x)$ pela fórmula de Taylor. Por não ser um método dos mais usados nós o des creveremos menos suscintamente que os anteriores.

Suponhamos que $f(x) = 0$ tenha uma raiz x^* em $[a, b]$. Assumamos que f e suas derivadas de ordem suficientemente altas sejam contínuas em $[a, b]$ e que $f'(x) \neq 0$ em

$[a, b]$. Consequentemente, a função $y = f(x)$ tem uma função inversa $x = F(y)$ em $[c, d]$, sendo $[c, d]$ o contra-domínio dos valores de $f(x)$ para $x \in [a, b]$. A função $F(x)$ tem tantas derivadas contínuas quanto $f(x)$. Desde que

$$x \equiv F(f(x)) \text{ para } x \in [a, b] \text{ e } y \equiv f(F(y)) \text{ para } y \in [c, d], \quad (38)$$

então

$$x^* = F(0) .$$

Se $y \in [c, d]$, a fórmula de Taylor nos dá

$$x^* = F(0) = F(y) + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{F^{(m)}(y)}{m!} y^m + R_{n+1}, \quad (+)$$

onde o termo residual pode ser escrito como

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} y^{n+1}, \text{ com } \zeta \text{ entre } 0 \text{ e } y .$$

Então temos

$$x^* = x + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{F^{(m)}(f(x))}{m!} [f(x)]^m + (-1)^{n+1} \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} [f(x)]^{n+1} .$$

Para simplificar a notação, coloquemos:

(+) Aqui, a fim de evitar confusão, $F^{(m)}(y)$ significa derivada de ordem m da função F no ponto y .

$$F^{(m)}(f(x)) \equiv a_m(x) \quad \text{e} \quad T_n(x) \equiv x + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{a_m(x)}{m!} (f(x))^m .$$

A equação

$$x = T_n(x)$$

é um problema do ponto fixo, desde que

$$T_n(x^*) = x^* + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{a_m(x^*)}{m!} (f(x^*))^m = x^* .$$

Assim, colocando

$$x^{(k+1)} = T_n(x^{(k)}) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

com $x^{(0)} \in [a, b]$, obtemos um processo iterativo de ordem $(n+1)$, pois

$$T_n^{(\ell)}(x^*) = 0 \quad , \quad \text{para} \quad \ell = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad T_n^{(n+1)}(x^*) \neq 0 .$$

Podemos colocar a função $T_n(x)$ em uma forma explícita em função de $f(x)$ e suas derivadas, uma vez que, por (38), temos

$$F'(f(x)) f'(x) = 1$$

$$F''(f(x)) f'^2(x) + F'(f(x)) f''(x) = 0$$

$$F''(f(x))f'(x)^3 + 3F''(f(x))f'(x)f''(x) + F'(f(x))f'''(x) = 0$$

.....

ou

$$a_1(x) f'(x) = 1$$

$$a_2(x) f'^2(x) + a_1(x) f''(x) = 0$$

$$a_3(x) f'^3(x) + 3a_2(x) f'(x)f''(x) + a_1(x) f'''(x) = 0$$

.....

Assim, podemos determinar a sequência $a_1(x)$, $a_2(x), \dots$ e, conseqüentemente, determinar $T_n(x)$.

Se $n = 1$,

$$T_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ e } x^{(k+1)} = T(x^{(k)}) \equiv x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, k=0,1,\dots$$

ou seja, obtemos o método de Newton-Raphson.

Se $n = 2$,

$$T_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)f^2(x)}{2f'^3(x)}$$

e

$$x^{(k+1)} = T(x^{(k)}) \equiv x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - \frac{f''(x^{(k)})f^2(x^{(k)})}{2f'^3(x^{(k)})}, k=0,1,\dots$$

2.2 - Para a resolução de sistemas não lineares

Apresentamos agora, alguns dos métodos iterativos mais usados para a determinação dos elementos $x = x^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem à equação não linear

$$Fx = 0$$

onde $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.2.1 - Método de Newton

Suponhamos que a transformação F seja diferenciável (segundo Frechet) em $D \subset \mathbb{R}^n$ e que a transformação $[F'(x)]^{-1}$ exista em D . Então, uma generalização formal do método de Newton-Raphson (caso de $n=1$) é dado pelo processo iterativo

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a transformação não linear T é definida por

$$Tx = x - [F'(x)]^{-1} F(x)$$

devendo, como veremos no capítulo 3, a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ser escolhida suficientemente próxima da solução $x = x^*$ desejada.

2.2.2 - Método de Newton modificado

A busca da transformação inversa $[F'(x^{(k)})]^{-1}$ pode resultar numa tarefa bastante complexa. Por isso, às vezes, é conveniente empregarmos o chamado método de Newton modificado, o qual é definido pelo processo iterativo

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

com a transformação T definida por

$$Tx = x - [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x)$$

sendo a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ escolhida próxima da solução $x = x^*$ desejada.

Neste caso, em cada passo k , a transformação inversa $[F'(x^{(0)})]^{-1}$ assume sempre o mesmo valor. Embora o método de Newton modificado convirja mais lentamente que o de Newton, aquele resulta ser, com frequência, mais conveniente que este, do ponto de vista do cálculo.

2.3 - Para a resolução de sistemas lineares

Consideremos o sistema linear a ser resolvido

$$Ax = b \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

onde a matriz $A = (a_{ij})$ é real, quadrada de ordem n , não singu

lar e com os elementos diagonais a_{ii} não nulos; e, onde $x, b \in \mathbb{R}^n$.

Definamos as matrizes $-L = [l_{ij}]$ como sendo a parte estritamente triangular inferior de A , $-U = [u_{ij}]$ como sendo a parte estritamente triangular superior de A e $D = [d_{ij}]$ como sendo a diagonal de A ; ou seja,

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se } i \leq j \end{cases}; \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i \geq j \end{cases}; \quad d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (40)$$

Descrevemos abaixo, alguns dos mais importantes métodos iterativos para resolução de sistemas lineares.

2.3.1 - Método dos deslocamentos simultâneos ou Método de Jacobi - Richardson.

Usando as matrizes definidas em (40) podemos escrever o sistema linear (39) como

$$(D - L - U)x = b$$

e, então, temos

$$Dx = (L + U)x + b$$

ou

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b.$$

Assim, neste método, a matriz A é decomposta em $A = B - C$, onde $B = D$ é não singular (pois, por hipótese, todos os a_{ii} são não nulos) e onde $C = L + U$.

Ao processo iterativo estacionário definido por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$Tx = Hx + s = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

com a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrária, denominamos *método iterativo dos deslocamentos simultâneos* ou *método iterativo de Jacobi - Richardson*.

Abandonando a notação matricial, podemos escrever este método na forma

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\},$$

com $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ e $x_i^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário.

Observemos que dividindo cada equação do sistema (39) pelos respectivos elementos diagonais a_{ii} (e isto é possível, pois, por hipótese, $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$) chegamos ao sistema abaixo, o qual é equivalente ao sistema original.

$$\hat{A}x = \hat{b} \quad \text{onde} \quad \hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad \text{e} \quad \hat{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Nesse caso, definimos as matrizes $-\hat{L} = [\hat{l}_{ij}]$ e $\hat{U} = [\hat{u}_{ij}]$ de maneira análoga à feita em (40).

Agora, o método iterativo de Jacobi - Richardson fica resumido a

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$T x = H x + s = (\hat{L} + \hat{U}) x + \hat{b} \quad (41)$$

com $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário.

2.3.2 - Método dos deslocamentos sucessivos ou método de Gauss - Seidel.

Usando a decomposição $A = D - L - U$, podemos escrever o sistema linear (39) como

$$(D - L - U)x = b$$

e, então, temos

$$(D - L)x - Ux = b$$

ou

$$x = (D - L)^{-1} Ux + (D - L)^{-1} b .$$

Assim, neste método, decompos a matriz A na forma $A = B - C$ onde $B = D - L$ é não singular (pois, por hipótese, $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) e onde $C = U$.

Ao processo iterativo estacionário definido por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$Tx = Hx + s = (D-L)^{-1} Ux + (D-L)^{-1} b$$

com a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrária, denominamos *método iterativo dos deslocamentos sucessivos* ou *método iterativo de Gauss - Seidel*.

Abandonando a forma matricial podemos escrevê-lo na forma

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\} ,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ e $x_i^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário.

2.3.3 - Método de sobreliberação ou método SOR.

Este método consiste basicamente numa modificação do método de Gauss - Seidel feita para que a convergência seja acelerada. Este fato é da maior importância para sistemas com um grande número de equações.

Neste método, calculamos o iterado de Gauss-Seidel como antes, por

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\} \quad (42)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 0, 1, 2, \dots$

Mas, tomamos o novo valor de x_i como sendo

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + w(\bar{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

para algum parâmetro real $w \neq 0$.

Denominamos o parâmetro w de *fator de liberação* e o escolhemos de modo que a convergência do processo seja possível. Se $w = 1$ então, claramente, $x_i^{(k+1)}$ é justamente o iterado de Gauss - Seidel.

Para escrevermos o procedimento acima em forma matricial, primeiro substituímos (42) em (43). Temos, então

$$x_i^{(k+1)} = (1-w)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right\},$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 0, 1, 2, \dots$; e, rearranjamos na forma

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + w \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = (1-w)a_{ii}x_i^{(k)} - w \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)},$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 0, 1, 2, \dots$

Assim, usando a decomposição $A = D - L - U$, podemos escrever

$$Dx^{(k+1)} - wLx^{(k+1)} = (1-w)Dx^{(k)} + wUx^{(k)} + wb \quad (44)$$

ou,

$$x^{(k+1)} = (D - wL)^{-1} \left[(1-w)D + wU \right] x^{(k)} + w(D - wL)^{-1}b, \quad (45)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ com $x^{(0)}$ e \mathbb{R}^n arbitrário.

Novamente, é evidente que (45) se reduz à iteração de Gauss - Seidel quando $w=1$.

Portanto, neste método, decomposmos a matriz A em $A = B - C$ onde $B = w^{-1}(D - wL)$ é não singular e onde $C = w^{-1}[(1 - w)D + wU]$.

Ao processo iterativo estacionário definido por

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a transformação afim $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$Tx = Hx + s = (D - wL)^{-1} \left[(1-w)D + wU \right] x + w(D - wL)^{-1}b$$

com a aproximação inicial $x^{(0)}$ e \mathbb{R}^n arbitrária e com

$w \in \mathbb{R} - \{0\}$ denominamos *método de sobreliberação* ou *método* *SOR*.

2.3.4 - O método de Peaceman - Rachaford.

Consideremos agora, uma classe de métodos para resolver o sistema linear (39), os quais são baseados na decomposição da matriz A na soma das três matrizes:

$$A = H_0 + V_0 + \Sigma \quad (46)$$

onde Σ é uma matriz diagonal não negativa e onde H_0, V_0 e Σ satisfazem às seguintes condições:

i) $H_0 + \gamma \Sigma + \delta I$ e $V_0 + \gamma \Sigma + \delta I$ são não singulares para algum $\gamma \geq 0$ e $\delta > 0$.

ii) para quaisquer vetores c e d e para quaisquer constantes $\gamma \geq 0$ e $\delta > 0$, os sistemas

$$(H_0 + \gamma \Sigma + \delta I) x = c \quad \text{e} \quad (V_0 + \gamma \Sigma + \delta I) y = d$$

são "facilmente" resolvidos.

Em muitos casos de interesse H_0 e V_0 ou são matrizes tridiagonais ou são equivalentes a matrizes tridiagonais, satisfazendo, portanto, à condição (ii) acima.

Este tipo de decomposição tem muita aplicação na resolução numérica, pelo método das diferenças finitas, de equa

ções diferenciais de 2a. ordem. Em ([16]), pag.1040) é dado um exemplo da decomposição (46) para um sistema derivado de uma equação diferença de 5 pontos e, um outro exemplo, para o problema de Dirichlet.

Usando a decomposição (46) podemos escrever o sistema (39) na forma

$$(H_0 + V_0 + \Sigma)x = b \quad (47)$$

e considerar as formas equivalentes

$$\begin{cases} (H_0 + \gamma\Sigma + \delta I)x = b - (V_0 + (1-\gamma)\Sigma - \delta I)x \\ (V_0 + \hat{\gamma}\Sigma + \hat{\delta}I)x = b - (H_0 + (1-\hat{\gamma})\Sigma - \hat{\delta}I)x \end{cases} \quad (48)$$

No método Peaceman-Rachaford, selecionamos os parâmetros de iteração positivos δ e $\hat{\delta}$ e determinamos $x^{(k + \frac{1}{2})}$, por

$$(H_0 + \gamma\Sigma + \delta I)x^{(k + \frac{1}{2})} = b - (V_0 + (1-\gamma)\Sigma - \delta I)x^{(k)}$$

e, então, determinamos $x^{(k+1)}$ por

$$(V_0 + \hat{\gamma}\Sigma + \hat{\delta}I)x^{(k + \frac{1}{2})} = b - (H_0 + (1-\hat{\gamma})\Sigma - \hat{\delta}I)x^{(k + \frac{1}{2})}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots$

Para simplificar, consideremos o caso especial onde

$$\gamma = \hat{\gamma} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \hat{\delta}$$

e denotemos

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \Sigma \quad \text{e} \quad V = V_0 + \frac{1}{2} \Sigma .$$

É evidente que H e V satisfazem às condições:

- i) $H + \delta I$ e $V + \delta I$ são não singulares para algum $\delta > 0$
- ii) para quaisquer vetores c e d e para $\delta > 0$ os sistemas

$$(H + \delta I)x = c \quad \text{e} \quad (V + \delta I)y = d$$

são "facilmente" resolvidos.

Podemos, então, escrever (47) na forma $(H + V)x = b$ e, (48) na forma

$$\begin{cases} (H + \delta I)x^{(k + \frac{1}{2})} = b - (V - \delta I)x^{(k)} \\ (V + \delta I)x^{(k + 1)} = b - (H - \delta I)x^{(k + \frac{1}{2})} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ou seja, como

$$\begin{cases} x^{(k + \frac{1}{2})} = (H + \delta I)^{-1}(\delta I - V)x^{(k)} + (H + \delta I)^{-1}b \\ x^{(k + 1)} = (V + \delta I)^{-1}(\delta I - H)x^{(k + \frac{1}{2})} + (V + \delta I)^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (49)$$

Podemos escrever a iteração (49) na forma

$$x^{(k+1)} = B^{-1}Cx^{(k)} + B^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

bastando fazer

$$B = (2\delta)^{-1}(H+\delta I)(V+\delta I) \quad \text{e} \quad C = (2\delta)^{-1}(H-\delta I)(V-\delta I).$$

De fato, pois

$$B-C = (2\delta)^{-1}(HV+\delta H + \delta V + \delta^2 I) - (2\delta)^{-1}(HV-\delta H-\delta V+\delta^2 I) = HV = A$$

Afirmamos que $(H-\delta I)$ e $(H+\delta I)^{-1}$ comutam. De fato, pois

$$(H-\delta I)^{-1}(H-\delta I) = (H+\delta I)(H+\delta I)^{-1} \quad (50)$$

Multiplicando, à esquerda, ambos os membros da expressão (50) por $(H+\delta I)^{-1}(H-\delta I)$ e usando o fato que $(H+\delta I)$ comuta com $(H-\delta I)$ (verificação direta), obtemos

$$(H+\delta I)^{-1}(H-\delta I) = (H-\delta I)(H+\delta I)^{-1}$$

o que demonstra a afirmação acima.

Temos, então

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= (V + \delta I)^{-1} (H - \delta I) (H + \delta I)^{-1} (V - \delta I) x^{(k)} \\
&\quad + (V + \delta I)^{-1} \left\{ (\delta I - H) (H + \delta I)^{-1} + I \right\} b \\
&= B^{-1} C x^{(k)} + (V + \delta I)^{-1} \left\{ \delta I - H + \delta I + H \right\} (H + \delta I)^{-1} b \\
&= B^{-1} C x^{(k)} + B^{-1} b, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Ao processo iterativo estacionário

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$T x = H_\delta x + s$$

com
$$H_\delta = B^{-1} C = (V + \delta I)^{-1} (H - \delta I) (H + \delta I)^{-1} (V - \delta I)$$

e
$$s = B^{-1} b = 2\delta (V + \delta I)^{-1} (H + \delta I)^{-1} b$$

com a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrária, denominamos método de Peaceman - Rachaford.

2.3.5 - Método de Cimmino

Em 1930, Cimmino, um matemático italiano, sugeriu um método iterativo para a resolução de sistemas lineares $Ax = b$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, A não singular. Embora simples, este método não é muito popular. Sua grande vantagem é que o

mesmo converge incondicionalmente, como provaremos no capítulo 3.

Cimmino estabeleceu seu método baseado em um argumento geométrico ([10], pag.63).

Na forma de componentes escrevemos seu processo iterativo como

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{p=1}^n a_{ij} a_{ip} x_p^{(k)} - b_i}{\sum_{p=1}^n a_{ip}^2}$$

com $j=1,2,\dots,n$, $k=0,1,2,\dots$ e $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário.

Mais tarde, Cesari estabeleceu o mesmo método independente do argumento geométrico de Cimmino. Seu procedimento é o seguinte:

Dado $Ax=b$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$ não singular e $b \in \mathbb{R}^n$, denotemos

$$[a_i]^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Denotando por $G = (g_{ij})$ a matriz cujos elementos são

$$g_{ij} = \begin{cases} 1/[a_i] & , \text{ se } i=j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad (51)$$

podemos escrever o sistema $Ax=b$ como

$$A^t G^t G A x = A^t G^t G b$$

ou

$$A^t G^2 A x = A^t G^2 b$$

ou

$$0 = - \frac{2}{n+1} A^t G^2 A x + \frac{2}{n+1} A^t G^2 b$$

ou

$$x = \left(I - \frac{2}{n+1} A^t G^2 A \right) x + \frac{2}{n+1} A^t G^2 b$$

Obtemos então o processo iterativo

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$T x = H x + s = \left(I - \frac{2}{n+1} A^t G^2 A \right) x + \frac{2}{n+1} A^t G^2 b$$

com a aproximação inicial $x^{(0)}$ e \mathbb{R}^n arbitrária. Este é o método denominado *método de Cimmino*.

2.4 - Para a resolução de problemas de valor inicial e de problemas de valores no contorno para equações diferenciais ordinárias.

2.4.1 - Método iterativo de Picard.

Consideremos o sistema de equações

$$f_i(x) \equiv -x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} + h^2 g(x_i) = 0; \quad i=1, \dots, n; \quad x_0 = \beta; \quad x_n = \gamma \quad (52)$$

o qual, como discutimos em 0.8, é um sistema discreto análogo ao problema de valores no contorno para equações diferenciais ordinárias

$$y''(t) = g(y(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \beta, \quad y(b) = \gamma$$

onde β e γ são constantes dadas e g é uma função dada que assumiremos ser duas vezes continuamente diferenciável e satisfazendo

$$0 \leq g'(s) \leq \gamma, \quad -\infty < s < +\infty.$$

Podemos escrever o sistema (52) na forma compacta

$$Fx = Ax + \phi x = 0 \quad (53)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix}
 2 & -1 & & & & & & & \bigcirc \\
 -1 & 2 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & \bigcirc & & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & & & & & -2
 \end{pmatrix} \quad \text{e } \phi x = \begin{pmatrix}
 h^2 g(x_1) + \beta \\
 h^2 g(x_2) \\
 \vdots \\
 h^2 g(x_{n-1}) \\
 h^2 g(x_n) + \gamma
 \end{pmatrix} \quad (54)$$

O método iterativo de Picard para resolver o sistema (53) é definido por

$$x^{(k+1)} = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda x^{(k)} - \phi x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

para algum aceitável λ , ou seja, neste método iterativo a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

é definida por

$$Tx = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda x - \phi x).$$

Observemos que x^* é ponto fixo de T se, e somente se, x^* é solução de (53).

2.4.2 - Suponhamos que tencionamos usar um método linear implícito de s passos para resolver o problema de valor inicial

$$Y' = f(x, Y(x)) , \quad a \leq x \leq b , \quad Y(a) = y_0 \quad (55)$$

Como vimos em 0.7 , em cada passo devemos resolver para Y_{n+s} , a equação

$$y_{n+s} = h\beta_s f(x_{n+s}, y_{n+s}) + \sum_{j=0}^{s-1} (h\beta_j f_{n+j} - \gamma_j f_{n+j})$$

que representaremos por

$$y_{n+s} = h\beta_s f(x_{n+s}, y_{n+s}) + g \quad (56)$$

onde g é então uma conhecida função dos valores Y_{n+j} e f_{n+j} , $j=0,1,\dots,s-1$, previamente calculados. As condições iniciais suplementares $Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+s-1}$ devem ser calculadas por algum mecanismo auxiliar, usualmente, um método de um passo.

Quando a equação (55) é linear, então (56) é também linear em y_{n+s} e não há problema em resolvê-la. Entretanto, em geral, (55) é não linear e, assim, quase sempre não temos condições de resolvê-la em relação a y_{n+s} de uma forma exata. Podemos determinar a solução y_{n+s} pelo processo iterativo

$$y_{n+s}^{(k+1)} = T y_{n+s}^{(k)} , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (57)$$

onde a transformação T é tal que

$$y_{n+s}^{(k+1)} = h\beta_s \cdot f(x_{n+s}, y_{n+s}^{(k)}) + \sum_{j=0}^{s-1} (h\beta_j f_{n+j} - \gamma_j f_{n+j}) \quad (58)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ e $y_{n+s}^{(0)}$ arbitrário.

que f seja monótona decrescente bastando, neste caso, considerarmos $-f$ em lugar de f , uma vez que f e $-f$ tem a mesma raiz x^* em $[a,b]$.

Concluimos então que o teorema 3.1.1 garante -nos, grosseiramente falando, que podemos calcular raízes desde que possamos isolar um intervalo no qual a função seja monótona e mude de sinal.

Observemos ainda que no teorema 3.1.1 outras i terações poderiam ser definidas. Por exemplo, poderíamos tomar $T(x) = x - \lambda f(x)$, com $0 < \lambda \leq \gamma$. Ainda neste caso, a conclusão do citado teorema continuaria válida.

Teorema 3.1.2 - Suponhamos que $f(x)$ seja uma função real de uma variável real e que x^* seja uma raiz da equação $f(x) = 0$. Suponhamos que $f(x)$ e suas derivadas primeira e segunda sejam contínuas no intervalo $I = \{x: |x - x^*| \leq r\}$ e, que nem $f'(x)$ nem $f''(x)$ mudam de sinal em I ; ou seja, suponhamos que em I , $f(x)$ muda de sinal apenas em x^* e que x^* seja uma raiz simples de $f(x) = 0$. Tomemos $x^{(0)} \in I$. Então existe um subintervalo $I_1 = \{x: |x - x^*| \leq r_1\} \subset I$, sobre o qual a função iteração T do método da falsa posição é uma contração.

Demonstração: No método da falsa posição, a função iteração T é definida por

$$T(x) = \frac{x^{(0)} f(x) - x f(x^{(0)})}{f(x) - f(x^{(0)})} \quad (59)$$

Como, por hipótese, f e suas derivadas primeira e segunda são contínuas em I , temos pela fórmula de Taylor que:

$$f(x) = f(x^*) + (x-x^*)f'(x^*) + \frac{(x-x^*)^2}{2} f''(\xi), \quad \text{com}$$

$\xi \in (x^*, x)$.

Fazendo $x = x^{(0)}$, temos

$$f(x^{(0)}) + (x^* - x^{(0)})f'(x^*) = \frac{(x^{(0)} - x^*)^2}{2} f''(\xi). \quad (60)$$

Por outro lado, derivando (59), obtemos

$$T'(x) = \frac{[x^{(0)}f'(x) - f(x^{(0)})][f(x) - f(x^{(0)})] - [x^{(0)}f(x) - xf(x^{(0)})] \cdot f'(x)}{[f(x) - f(x^{(0)})]^2}.$$

Fazendo $x = x^*$ e lembrando que $f(x^*) = 0$, concluimos que

$$T'(x^*) = \frac{f(x^{(0)}) + (x^* - x^{(0)})f'(x^*)}{f(x^{(0)})}. \quad (61)$$

Substituindo (60) em (61), obtemos

$$T'(x^*) = \frac{(x^{(0)} - x^*)^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f(x^{(0)})}.$$

Portanto, se $x^{(0)}$ é tomado bastante próximo de x^* , então $T'(x^*)$ é um número bastante pequeno e, portanto existe um subintervalo $I_1 = \{x: |x - x^*| \leq r_1\} \subset I$, para o

qual

$$|T'(x)| \leq \alpha < 1 .$$

Desde que se $x \in I_1$ então $T(x) \in I_1$, pois

$$|T(x) - x^*| = |T(x) - T(x^*)| \leq |T'(\xi)| |x - x^*|, \quad \xi \in [x, x^*],$$

segue, pelo teorema 1.4.1, que T é uma contração sobre I_1 .

Teorema 3.1.3 - Seja x^* uma raiz da equação $f(x)=0$, sendo f uma função contínua com derivadas primeira e segunda contínuas e limitadas num intervalo I_1 contendo x^* . Seja, ainda, $f'(x^*) \neq 0$. Então, existe um subintervalo fechado I de I_1 , contendo x^* , sobre o qual a função T do método de Newton - Raphson é uma contração.

Demonstração: Neste método a função iteração T é definida por

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (62)$$

Em primeiro lugar, está claro que se $f'(x^*) \neq 0$ então x^* é raiz de $f(x)=0$ se, e somente se, x^* é ponto fixo de T .

Se $f'(x^*)=0$, segue da continuidade, que existe um intervalo fechado $I_2 \subset I_1$ e contendo x^* onde $f'(x) \neq 0$.

Derivando (62), obtemos

$$T'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Podemos então concluir que em I_2 , T e T' são contínuas. Por outro lado, desde que $f(x^*) = 0$ segue que $T'(x^*) = 0$. Concluimos então, pelo teorema 1.3.2, que existe um subintervalo I de I_2 , contendo x^* , sobre o qual T é uma contração.

Os teoremas 3.1.2 e 3.1.3, aliados ao teorema 1.2.2 (teorema da contração) afirmam, essencialmente, que o método da falsa posição e o método de Newton-Raphson convergem para a raiz x^* , desde que as aproximações iniciais $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ no caso do primeiro método, e $x^{(0)}$ no segundo, sejam escolhidas nos intervalos de contração; ou seja, desde que as aproximações iniciais sejam escolhidas suficientemente próximas da raiz x^* . Esta é uma desvantagem encontrada na aplicação destes métodos, pois, em geral, é difícil decidir a respeito de uma aproximação inicial adequada. Caso esta não esteja suficientemente próxima da raiz, os métodos mencionados poderão divergir ou convergir para uma outra raiz. A nos ajudar temos que para o método de Newton - Raphson qualquer escolha de $x^{(0)}$ que satisfaça a desigualdade:

$$|T'(x)| = \frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} < 1,$$

por exemplo, conduzirá a uma iteração convergente.

Apresentamos agora um exemplo com o qual verifi-

camos, na prática, o teorema 3.1.3.

Se o método de Newton - Raphson é aplicado à função

$$f(x) = x^2 - \beta$$

ou seja, se pretendemos determinar, pelo método de Newton - Raphson, as raízes quadradas de β , obtemos a familiar fórmula

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left(x^{(k)} + \frac{\beta}{x^{(k)}} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (63)$$

Mostremos agora que, dado β , existe um intervalo $I = [a, b]$ tal que sobre ele a função T do método (63) é uma contração.

Escolhamos a e b tais que satisfaçam às condições:

$$0 < a^2 < \beta < b^2; \quad b > \frac{a^2 + \beta}{2a} \quad \text{e} \quad 3a^2 > \beta. \quad (64)$$

Por exemplo, $a = \beta/2$ e $b > 3a$, que satisfazem às condições (64), pois

$$\frac{4}{3} < \beta < 4 \quad \text{e} \quad 3a = \frac{3a^3}{a^2} > \frac{a\beta}{a} = \frac{2\beta}{2a} > \frac{a^2 + \beta}{2a}.$$

Verificamos que $x \in [a, b]$ implica que $T(x) \in [a, b]$, mostrando que os valores máximo e mínimo de T sobre $[a, b]$, pertencem a $[a, b]$. De fato, pois

$$T(x) = \frac{x^2 + \beta}{2x}$$

e, então

$$T'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{x^2}\right) \quad \text{e} \quad T''(x) = \frac{\beta}{x^3} > 0 .$$

Portanto, $T'(\sqrt{\beta}) = 0$ e $T(\sqrt{\beta}) = \sqrt{\beta} \in [a, b]$.

Evidentemente, o máximo de T deve ocorrer nos pontos finais a ou b , pois T somente se anula uma vez.

Mas

$$T(a) = \frac{a^2 + \beta}{2a} < b \quad \text{e} \quad T(b) = \frac{b^2 + \beta}{2b} < b .$$

Além disso, temos que $-\frac{\beta}{a^2} > -3$ implica que

$$-1 < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{a^2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{x^2}\right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{b^2}\right) < \frac{1}{2} ;$$

ou seja, $|T'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$.

Concluimos então que existe um intervalo $[a, b]$ (o qual é facilmente determinado pelas condições (64)) tal que sobre ele T é uma contração.

Observemos que aqui, uma fácil escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$ é

$$x^{(0)} = \beta + 1 > \sqrt{\beta} ,$$

uma vez que, se $a = \sqrt{\beta}/2$ e $b = \max\{3a, \beta + 1\}$, então $x^{(0)} \in [a, b]$.

Teorema 3.1.4 - Suponhamos que $f(x)=0$ tenha uma raiz x^* em $[a,b]$, que f e suas derivadas de ordem suficientemente altas sejam contínuas em $[a,b]$ e que $f'(x) \neq 0$ em $[a,b]$. Tomemos $x^{(0)} \in [a,b]$. Então existe um subintervalo $I = \{x: |x-x^*| \leq r\}$ contido em $[a,b]$ sobre o qual a função iteração T_n definida no método de Chebyshev por

$$T_n(x) = x + \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{a_m(x)}{m!} [f(x)]^m$$

é uma contração.

Demonstração: Na descrição deste método, vimos que o mesmo é de ordem $n+1$; ou seja, que

$$T_n^{(l)}(x^*) = 0 \quad \text{para } l=1,2,\dots,n \quad \text{e} \quad T_n^{(n+1)}(x^*) \neq 0$$

Portanto, como $n \geq 1$ temos

$$T_n'(x^*) = 0$$

e pelo teorema 1.3.2, concluímos que T_n é uma contração sobre $I = \{x: |x-x^*| \leq r\} \subset [a,b]$.

Lembremos que, como vimos na descrição do método de Chebyshev feita no capítulo 2, quando $n=1$ este método reduz-se ao método de Newton - Raphson. Assim, a tese do teorema 3.1.3; ou seja, a afirmação de que existe um intervalo fechado contendo x^* tal que sobre ele a função T do método de Newton - Raphson é uma contração, poderia ser verificada como

consequência do teorema 3.1.4.

3.2 - Caso das transformações T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.2.

Teorema 3.2.1 - Assumamos que $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução x^* de $Fx=0$ e que $F'(x^*)$ é não singular. Então, a transformação T do método de Newton definida por $Tx = x - [F'(x)]^{-1}F(x)$ é uma contração sobre alguma vizinhança fechada de x^* .

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $F'(x)$ é não singular para todo x numa vizinhança de x^* . Seja $\beta = \|F'(x^*)^{-1}\|$ e tomemos ξ satisfazendo $0 < \xi < (2\beta)^{-1}$. Pela continuidade de F' em x^* temos que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|F'(x) - F'(x^*)\| < \xi$$

enquanto $x \in S = \{x: \|x - x^*\| \leq \delta_1\}$.

Então o Lema da Perturbação (ou Lema de Banach) ([11], pag.32) garante-nos que $F'(x)$ é não singular e que

$$\|[F'(x)]^{-1}\| < \frac{\beta}{1 - \beta\xi} < 2\beta, \quad x \in S.$$

Portanto, T está bem definida para todo $x \in S$; ou seja, se $x \in S$ então $Tx \in S$.

Mostremos agora que T é diferenciável em x^* e que

$$T'(x^*) = I - [F'(x^*)^{-1}] F'(x^*) . \quad (65)$$

De fato, pois como F é diferenciável em x^* , podemos assumir que δ_1 é escolhido suficientemente pequeno tal que

$$\| Fx - Fx^* - F'(x^*)(x-x^*) \| \leq \xi \| x-x^* \|$$

para todo $x \in S$.

Claramente, $x^* = Tx^*$ e podemos, então, para todo $x \in S$, fazer a estimativa:

$$\begin{aligned} & \| Tx - Tx^* - (I - [F'(x^*)]^{-1} F'(x^*)) (x-x^*) \| = \\ & = \| [F'(x^*)]^{-1} F'(x^*) (x-x^*) - [F'(x^*)]^{-1} F(x) \| \\ & \leq \| [F'(x^*)]^{-1} [F(x) - F(x^*) - F'(x^*) (x-x^*)] \| + \\ & \quad + \| [F'(x^*)]^{-1} [F'(x^*) - F'(x)] [F'(x^*)]^{-1} F'(x^*) (x-x^*) \| \\ & \leq (2\beta\xi + 2\beta^2\xi \| F'(x^*) \|) \cdot \| x-x^* \| . \end{aligned} \quad (66)$$

Como ξ é arbitrário e $\| F'(x^*) \|$ e β são constantes, (66) mostra que T é diferenciável em x^* e que (65) se verifica.

Mas, por (65), temos que

$$|T'(x^*)| = 0$$

e então, a conclusão deste teorema decorre do teorema 1.4.2.

Teorema 3.2.2 - Consideremos a equação $Fx=0$ com $F:R^n \rightarrow R^n$ e $x \in R^n$. Suponhamos que F seja diferenciável em $D \subset R^n$ e que exista $[F'(x^{(0)})]^{-1}$ num ponto $x^{(0)} \in D$. Suponhamos que sejam válidas as condições:

$$\| [F'(x^{(0)})]^{-1} \| = \beta$$

$$\| [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x^{(0)}) \| = \eta$$

$$\| F'(x) - F'(y) \| \leq L \| x-y \| , \text{ para todo } x, y \in D,$$

onde β, η e L são constantes positivas e tais que $h = \beta L \eta \leq \frac{1}{4}$. Seja t_0 a menor das raízes da equação $ht^2 - t + 1 = 0$ e seja $t^* = t_0 \cdot \eta$. Consideremos a bola fechada $\bar{B}(x^{(0)}, t^*) = \{x: \| x - x^{(0)} \| \leq t^*\} \subset D$, cujo centro $x^{(0)}$ tomaremos como aproximação inicial da solução x^* de $Fx=0$. Consideremos a transformação T do método de Newton modificado. Então a transformação T é uma contração sobre a bola fechada $\bar{B}(x^{(0)}, t^*)$.

Demonstração: Consideremos no R^n a transformação T do método de Newton modificado, a qual é definida por

$$Tx = x - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x)$$

e mostremos, inicialmente, que esta transforma a bola fechada $\bar{B}(x^{(0)}, t^*)$ em si mesma. De fato, pois

$$\begin{aligned}
Tx - x^{(0)} &= x - x^{(0)} - [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x) \\
&= [F'(x^{(0)})]^{-1} \{F'(x^{(0)})(x-x^{(0)}) - F(x) + F(x^{(0)})\} - \\
&\quad - [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x^{(0)})
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|Tx - x^{(0)}\| &\leq \| [F'(x^{(0)})]^{-1} \| \cdot \| F'(x^{(0)})(x-x^{(0)}) - \\
&\quad - F(x) + F(x^{(0)}) \| + \| [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x^{(0)}) \| .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Tx - x^{(0)}\| \leq \beta \cdot \| F'(x^{(0)})(x-x^{(0)}) - F(x) + F(x^{(0)}) \| + \eta . \quad (67)$$

Consideremos a transformação auxiliar

$$\phi(x) = F(x) - F(x^{(0)}) - F'(x^{(0)})(x-x^{(0)}) .$$

Esta transformação é diferenciável pois, por hipótese, F é diferenciável; e, sua derivada é igual a:

$$\phi'(x) = F'(x) - F'(x^{(0)}) .$$

Se $\|x-x^{(0)}\| \leq t_0$, $\eta = t^*$, então

$$\|\phi'(x)\| = \|F'(x) - F'(x^{(0)})\| \leq L \|x-x^{(0)}\| \leq L \cdot t_0 \cdot \eta .$$

Pelo teorema do valor médio, temos que

$$\|\phi(x)\| = \|\phi(x) - \phi(x^{(0)})\| = \|\phi'(\xi)\| \cdot \|x - x^{(0)}\| \leq L \cdot t_0^2 \cdot \eta^2, \quad (68)$$

com $\xi \in (x, x^{(0)})$.

Assim, se $\|x - x^{(0)}\| \leq t_0 \cdot \eta = t^*$, por (67) e (68), segue que

$$\begin{aligned} \|Tx - x^{(0)}\| &\leq \beta \|\phi(x)\| + \eta \leq \beta \cdot L t_0^2 \eta^2 + \eta = \eta(\beta L t_0^2 \eta + 1) \\ &= \eta(h t_0^2 + 1). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, t_0 é uma raiz da equação $ht^2 - t + 1 = 0$ temos que $h t_0^2 + 1 = t_0$. Portanto,

$$\|Tx - x^{(0)}\| \leq t_0 \eta = t^*$$

o que significa que T transforma a bola $\bar{B}(x^{(0)}, t^*)$, em si mesma.

Além disso, para quaisquer $x, y \in \bar{B}(x^{(0)}, t^*)$, pelo teorema do valor médio, temos que

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T'(x)\| \|x_1 - x_2\|, \quad \text{com } x \in [x_1, x_2]. \quad (69)$$

Para $\|x - x^{(0)}\| \leq t_0 \eta = t^*$, temos

$$T'(x) = I - [F'(x^{(0)})]^{-1} F'(x) = [F'(x^{(0)})]^{-1} [F'(x^{(0)}) - F'(x)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|T'(x)\| &\leq \| (F'(x^{(0)}))^{-1} \| \cdot \| F'(x^{(0)}) - F'(x) \| \\ &\leq \beta L \| x^{(0)} - x \| \leq \beta L t_0 . \end{aligned}$$

Mas t_0 é, por hipótese, a menor das raízes da equação $ht^2 - t + 1 = 0$; ou seja,

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} .$$

Portanto,

$$\|T'(x)\| \leq \beta L t_0 = h t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2} = \alpha < \frac{1}{2} . \quad (70)$$

Substituindo (70) em (69), temos

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| , \quad \text{com } \alpha = \frac{1}{2} .$$

Logo, T é uma contração sobre a bola $\bar{B}(x^{(0)}, t^*)$.

Observemos que o método de Newton, bem como o de Newton modificado, pode ser usado para determinar os elementos $x^* \in X$ que satisfazem à equação operador

$$Fx = 0$$

onde $F: X \rightarrow Y$ com X e Y espaços de Banach quaisquer.

Em tais espaços genéricos (e não apenas no \mathbb{R}^n), podemos estender o teorema anterior palavra por palavra.

No próximo teorema utilizaremos o teorema 1.2.5 para estabelecer condições suficientes, menos rigorosas que as do teorema anterior, para que a transformação T do método de Newton modificado seja uma contração sobre uma vizinhança da solução $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ do sistema não linear $Fx=0$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.3 - Assumamos que $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja continuamente diferenciável sobre um conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ e contendo a solução x^* do sistema não linear $Fx=0$; e, que $F'(x)$ seja não singular numa certa vizinhança da solução x^* . Então, a transformação T do método de Newton modificado definida por

$$Tx = x - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x) \quad (71)$$

é uma contração sobre uma vizinhança da solução x^* se $x^{(0)}$ é tomada suficientemente próxima de x^* .

Demonstração: Pelo teorema 0.6.2 temos que

$$F(z) - F(y) = \int_0^1 F'(y+t(z-y))(z-y) dt. \quad (72)$$

Esta igualdade é equivalente a

$$f_i(z) - f_i(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(y+t(z-y))(z_j - y_j) dt.$$

Façamos

$$G_{ij}(y, z) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(y + t(z-y))$$

e

$$G(y, z) = \begin{pmatrix} G_{11}(y, z) & G_{12}(y, z) & \dots & G_{1n}(y, z) \\ G_{21}(y, z) & G_{22}(y, z) & \dots & G_{2n}(y, z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{n1}(y, z) & G_{n2}(y, z) & \dots & G_{nn}(y, z) \end{pmatrix}$$

Podemos, então, escrever (72) como

$$F(z) - F(y) = G(y, z)(z-y).$$

Obviamente, se $y=z=x$, temos

$$G_{ij}(x, x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \quad G(x, x) = F'(x).$$

Pela definição da transformação T , podemos escrever

$$\begin{aligned} T(z) - T(y) &= z - y - \left[F'(x^{(0)}) \right]^{-1} \left[F(z) - F(y) \right] \\ &= z - y - \left[F'(x^{(0)}) \right]^{-1} \cdot G(z, y) \cdot (z - y) \\ &= \left[I - \left[F'(x^{(0)}) \right]^{-1} G(z, y) \right] \cdot (z - y). \end{aligned}$$

Como a matriz $G(z,y)$ é uma função contínua de seus argumentos e como, se $x^{(0)}=y=z$ então $G(x^{(0)},x^{(0)}) = F'(x^{(0)})$, temos que se z e y estão próximos de $x^{(0)}$ então as matrizes $G(z,y)$ e $F'(x^{(0)})$ estão próximas uma da outra. Logo, a matriz $I - [F'(x^{(0)})]^{-1} G(z,y)$ está próxima da matriz nula; isto é, para um certo $\alpha < 1$, podemos encontrar $r > 0$ tal que se

$$d(y, x^{(0)}) = \|y - x^{(0)}\|_1 \leq r \quad \text{e} \quad d(z, x^{(0)}) \leq r$$

então vale a desigualdade

$$\|I - [F'(x^{(0)})]^{-1} G(z,y)\|_1 \leq \alpha.$$

Podemos então escrever que

$$\begin{aligned} \|T(z) - T(y)\|_1 &\leq \|I - [F'(x^{(0)})]^{-1} G(z,y)\|_1 \cdot \|z - y\|_1 \\ &\leq \alpha \|z - y\|_1, \quad \alpha < 1 \end{aligned} \tag{73}$$

Por outro lado, de (71), temos que

$$\|T(x^{(0)}) - x^{(0)}\|_1 \leq \| [F'(x^{(0)})]^{-1} \|_1 \cdot \|F(x^{(0)})\|_1$$

e, se $x^{(0)}$ é tomado suficientemente próximo da solução x^* ; ou seja, se $d(x^{(0)}, x^*) \leq r$, nós satisfazemos à desigualdade

$$\|T(x^{(0)}) - x^{(0)}\|_1 \leq (1-\alpha)r. \tag{74}$$

Assim, como são válidas as desigualdades (73) e (74), o teorema 1.2.5 garante-nos que T é uma contração na vizinhança $d(x, x^{(0)}) = \|x - x^{(0)}\|_1 \leq r$. —

Observemos que se no método de Newton - Raphson não era trivial a determinação de uma aproximação inicial $x^{(0)}$, no caso n -dimensional esta determinação é bem mais difícil. A importância dos teoremas 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 está na garantia que eles nos dão da existência de uma vizinhança fechada de uma solução x^* , na qual as transformações T dos métodos de Newton ou de Newton modificado são contrações, permitindo-nos assim termos também uma estimativa do erro.

3.3 - Caso das transformações afins T do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^n definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.3.

Em nossos próximos resultados, estabelecemos condições sobre a transformação $H \in L(\mathbb{R}^n)$ ou sobre a transformação $A \in L(\mathbb{R}^n)$ do sistema linear $Ax=b$, de modo que as transformações afins $Tx = Hx+b$, $b \in \mathbb{R}^n$, definidas nos diferentes métodos iterativos apresentados no capítulo 2 sejam contrações sobre todo o \mathbb{R}^n . Lembremos que uma vez demonstrado que, sob determinadas condições, tais transformações T são contrações sobre todo o \mathbb{R}^n então, pelo teorema da convergência global (estabelecido na pag. 31 como caso particular do Teorema da Contração), teremos demonstrado que sob estas condições, aqueles métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares convergem para o único ponto fixo $x^* \in \mathbb{R}^n$ de T ,

qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ considerada; ou seja, convergem para a única solução $x^* \in \mathbb{R}^n$ do sistema $Ax=b$ com $A \in L(\mathbb{R}^n)$ não singular e $x, b \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.1 - Se $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é estritamente diagonalmente dominante então a transformação T do método de Jacobi-Richardson é uma contração sobre o \mathbb{R}^n , segundo a norma $\|\cdot\|_\infty$ (ou $\|\cdot\|_1$).

Demonstração: Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_\infty &= \|D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b - D^{-1}(L+U)y - D^{-1}b\|_\infty = \\ &= \|D^{-1}(L+U)(x-y)\|_\infty \\ &\leq \|D^{-1}(L+U)\|_\infty \cdot \|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$ então, pelo teorema 1.5.1, concluímos que T é uma contração sobre o \mathbb{R}^n .

Considerando que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & & \\ & 1/a_{22} & & \\ & & \bigcirc & \\ & & & \bigcirc \\ & & & & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

e lembrando a definição de $\|\cdot\|_\infty$, obtemos

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} . \quad (75)$$

Como, por hipótese, a matriz A é estritamente diagonalmente dominante, então

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (76)$$

Substituindo (76) em (75), concluímos que $\alpha = \|H\|_{\infty} < 1$, o que pelo, teorema 1.5.1, nos garante este teorema.

Se em lugar da norma $\|\cdot\|_{\infty}$, escolhermos a norma $\|\cdot\|_1$, teremos ao invés de (75), a desigualdade

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}$$

e, então, ao invés de (76), precisaríamos ter

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, se a matriz A tiver todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 (o que sempre é possível conseguirmos, (ver 2.3.1)), podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.3.2 - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Se a soma dos valores absolutos dos elementos de cada linha (coluna), exceto os da diagonal principal, for menor que a unidade, então a transformação T do método de Jacobi-Richardson, definida em (41) por

$$Tx = (\hat{L} + \hat{U})x + \hat{b}$$

é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n , segundo a norma $\|\cdot\|_\infty$ (ou $\|\cdot\|_1$).

Observemos que para um sistema de matriz estritamente diagonalmente dominante, uma vez que

$$\alpha = \|H\|_\infty = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < 1,$$

obtemos de (18) a seguinte estimativa do erro da iteração de Jacobi - Richardson:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$$

onde x_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$, são as componentes da solução x^* .

Esta estimativa é válida também no caso da iteração de Gauss-Seidel se A é estritamente diagonalmente dominante e $\alpha = \|H\|_\infty = \|(D-L)^{-1}U\|_\infty$.

A transformação T do método de Gauss-Seidel, também é uma contração sobre o \mathbb{R}^n se forem satisfeitas as condições do teorema 3.3.1. Mas uma demonstração análoga à daquele teorema é, neste caso, muito difícil. Nós o demonstraremos

adiante (teorema 3.3.5), usando uma outra linha de demonstração.

Definição 3.3.1 - Sejam $A, B, C \in L(\mathbb{R}^n)$. Então $A = B - C$ é uma decomposição regular de A se $C \geq 0$ e B é não singular com $B^{-1}C \geq 0$.

Teorema 3.3.3 - (Teorema da decomposição regular). Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ não singular com $A^{-1} \geq 0$. Seja $A = B - C$ uma decomposição regular de A . Então $\rho(B^{-1}C) < 1$.

Demonstração: Tomemos $H = B^{-1}C$. Então $H \geq 0$ e pelas relações

$$(I + H + H^2 + \dots + H^m)(I - H) = I - H^{m+1}, \quad B^{-1} = (I - H)A^{-1},$$

temos, pois $A^{-1} \geq 0$, que

$$0 \leq (I + H + \dots + H^m)B^{-1} = (I - H^{m+1})A^{-1} \leq A^{-1} \quad \text{para todo } m \geq 0.$$

Como $B^{-1} \geq 0$, cada linha de B^{-1} deve conter pelo menos um elemento positivo. Segue, portanto, que os elementos de $I + H + \dots + H^m$ são limitados superiormente, quando $m \rightarrow \infty$.

Então, como $H \geq 0$, a soma converge e, consequentemente, $\lim_{K \rightarrow \infty} H^K = 0$.

Então, o teorema 0.3.7 garante-nos que

$$\rho(H) = \rho(B^{-1}C) < 1 ,$$

o que demonstra o teorema.

Como uma consequência imediata deste teorema estabelecemos o

Teorema 3.3.4 - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ uma M-matriz e seja $b \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual as transformações T dos métodos de Jacobi - Richardson e de Gauss - Seidel são contrações sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: Como, por hipótese, A é uma M-matriz então ela é não singular e $A^{-1} \geq 0$. Mais ainda, as matrizes L e U definidas em (40) são não negativas e, pelo teorema 0.4.2, temos que $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ é não negativa e não singular. Então,

$$(D-L)^{-1} = \left\{ I + D^{-1}L + (D^{-1}L)^2 + \dots + (D^{-1}L)^n \right\} D^{-1} \geq 0 .$$

Observemos que a expansão em série acima é finita, pois L é uma matriz estritamente triangular inferior.

Portanto, a decomposição de A em $A = (D-L) - U = B - C$ no método de Gauss-Seidel é regular; assim como, também é regular a decomposição de A em $A = D - (L+U) = B - C$ no método de Jacobi - Richardson.

Assim, pelo teorema 3.3.3, concluímos que

$$\rho\{(D-L)^{-1}U\} < 1 \quad \text{e} \quad \rho\{D^{-1}(L+U)\} < 1 .$$

O teorema 1.5.2 conclui este teorema.

O próximo teorema, ao contrário do anterior, não se fixa nos sinais dos elementos de A . É, portanto, um teorema que pode ser estendido ao \mathbb{C}^n .

Teorema 3.3.5 - (Teorema da dominância diagonal). Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ estritamente ou irredutivelmente diagonalmente dominante. Então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual as transformações T dos métodos de Jacobi - Richardson e de Gauss - Seidel são contrações sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: Denotaremos por $|B|$ a matriz cujos elementos são os valores absolutos dos elementos de B . Façamos em A a decomposição $A = D - L - U$. Claramente, a matriz $\tilde{A} = |D| - |L| - |U|$ é, como A , estritamente ou irredutivelmente diagonalmente dominante.

Assim, pelo teorema 0.4.7, a matriz \tilde{A} é uma M -matriz e, então, como foi mostrado no teorema 3.3.4, temos

$$\rho\{|D|^{-1}(|L|+|U|)\} < 1 \quad \text{e} \quad \rho\{(|D|-|L|)^{-1}|U|\} < 1.$$

Mas

$$|D^{-1}(L+U)| \leq |D|^{-1}(|L|+|U|).$$

e

$$|(D-L)^{-1}U| \leq (|D|-|L|)^{-1}|U|.$$

Então, por comparação com o teorema 0.4.3, concluimos que

$$\rho\{D^{-1}(L+U)\} \leq \rho\{|D|^{-1}(|L|+|U|)\} < 1$$

e

$$\rho\{(D-L)^{-1}U\} \leq \rho\{(|D|-|L|)^{-1}|U|\} < 1.$$

A conclusão do teorema segue então, do teorema 1.5.2. ■

Teorema 3.3.6 - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ simétrica e definida positiva e seja $b \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação T do método de Gauss-Seidel é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: No método de Gauss-Seidel, a transformação T é definida por

$$Tx = Hx + s \equiv (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b.$$

Tomemos λ como sendo um autovalor qualquer de $H = (D-L)^{-1}U$. Então existe $z \neq 0$ tal que $(D-L)^{-1}Uz = \lambda z$.

Portanto, temos que

$$Uz = \lambda(D-L)z. \quad (77)$$

Como $A = D - L - U$, então

$$Az = (D - L - U)z = (D - L)z - Uz = (1 - \lambda)(D - L)z \quad (78)$$

Portanto,

$$\bar{z} = (1 - \bar{\lambda})(D - L)\bar{z} \quad \text{e} \quad \bar{z}^t A = (1 - \bar{\lambda})\bar{z}^t (D - U)$$

pois $L^t = U$, uma vez que, por hipótese, A é simétrica. Temos então que

$$\bar{z}^t Az = (1 - \bar{\lambda})\bar{z}^t Dz - (1 - \bar{\lambda})\bar{z}^t Uz .$$

Assim, por (77), temos que

$$\bar{z}^t Az = (1 - \bar{\lambda})\bar{z}^t Dz - (1 - \bar{\lambda})\lambda \bar{z}^t (D - L)z . \quad (79)$$

Mas, de (78), concluímos que

$$\bar{z}^t Az = (1 - \lambda)\bar{z}^t (D - L)z ,$$

ou seja,

$$\frac{(1 - \bar{\lambda})\lambda}{1 - \lambda} \bar{z}^t Az = (1 - \bar{\lambda})\lambda \bar{z}^t (D - L)z . \quad (80)$$

Substituindo (80) em (79), obtemos

$$\bar{z}^t Az = (1 - \bar{\lambda})\bar{z}^t Dz - \frac{(1 - \bar{\lambda})}{1 - \lambda} \bar{z}^t Az .$$

Portanto,

$$\left[\left(1 + \frac{(1-\bar{\lambda})\lambda}{1-\lambda} \right) \bar{z}^t Az \right] = (1-\bar{\lambda}) \bar{z}^t Dz ;$$

ou seja,

$$(1-|\lambda|^2) \bar{z}^t Az = |1-\lambda|^2 \bar{z}^t Dz. \quad (81)$$

Como, por hipótese, A é definida positiva então $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então, para todo $z \neq 0$, temos

$$\bar{z}^t Az > 0 \quad e \quad \bar{z}^t Dz > 0 .$$

Segue de (81) que

$$1 - |\lambda|^2 \geq 0 .$$

Por (81), observamos que a igualdade na expressão acima se verifica se, e somente se, $|1-\lambda| = 0$; isto é, se, e somente se, $\lambda = 1$. Entretanto, neste caso, por (78), teríamos $Az=0$. Então teríamos $\bar{z}^t Az=0$ o que contraria a hipótese de A ser definida positiva. Portanto,

$$1 - |\lambda|^2 > 0$$

donde,

$$\rho(H) < 1 ,$$

e, a conclusão do teorema decorre do teorema 1.5.2. ████

Uma demonstração alternativa do teorema acima pode ser dada em função da norma $A^{\frac{1}{2}}$ de H , a qual é definida por

$$\|H\|_{A^{\frac{1}{2}}} = \|A^{\frac{1}{2}} H A^{-\frac{1}{2}}\|_2 .$$

Demonstração 2: Temos que

$$H = (D-L)^{-1}U = I - (D-L)^{-1}(D-L-U) = I - (D-L)^{-1}A.$$

Portanto,

$$H' = A^{\frac{1}{2}} H A^{-\frac{1}{2}} = I - A^{\frac{1}{2}} (D-L)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \quad e$$

$$(H')^t = I - A^{\frac{1}{2}} (D-U)^{-1} A^{\frac{1}{2}} ,$$

pois, como A é simétrica, temos $L^t = U$.

Então

$$\begin{aligned} H' (H')^t &= I - A^{\frac{1}{2}} (D-L)^{-1} \{D-U+D-L-A\} (D-U)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \\ &= I - A^{\frac{1}{2}} (D-L)^{-1} D (D-U)^{-1} A^{\frac{1}{2}} \\ &= I - \left\{ A^{\frac{1}{2}} (D-L)^{-1} D^{\frac{1}{2}} \right\} \left\{ A^{\frac{1}{2}} (D-L)^{-1} D^{\frac{1}{2}} \right\}^t . \end{aligned}$$

Assim, como $H'(H')^t$ é o produto de uma matriz não singular por sua transposta, temos que $I-H'(H')^t$ é simétrica e definida positiva. Portanto, todos os autovalores de $H'(H')^t$ são menores que a unidade. Além disso, pelo teorema 0.4.9, a matriz $H'(H')^t$ é simétrica e definida não negativa. Em consequência, seus autovalores são todos não negativos, e

$$\rho(H'(H')^t) = \|H\|_{A^2}^2 < 1$$

e, então

$$\|H\|_{A^2} < 1.$$

Assim, pelo teorema 1.5.1, concluímos que sob as condições impostas, a transformação T do método de Gauss-Seidel é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n segundo a norma $\|\cdot\|_{A^2}$.

Em contraste com a transformação T do método de Gauss-Seidel, não é verdade que a transformação T do método de Jacobi-Richardson sempre é uma contração se a matriz $A \in L(\mathbb{R}^n)$ do sistema $Ax=b$, $b \in \mathbb{R}^n$, é simétrica e definida positiva. Podemos observar este fato, com a seguinte matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (82)$$

a qual é definida positiva para todos os valores de a no intervalo $-1/2 < a < 1$.

Como os autovalores da matriz

$$H = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$$

são raízes do polinômio característico $P(\lambda) = -(\lambda+2a)(\lambda-a)^2$, temos

$$\rho(H) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\lambda_i| = 2|a|.$$

Portanto, $\rho(H) < 1$ se, e somente se, $-1/2 < a < 1/2$; e, em consequência, para uma matriz do tipo (82), existe uma norma no \mathbb{R}^n segundo a qual a transformação T do método de Jacobi-Richardson é uma contração se, e somente se, $-1/2 < a < 1/2$.

Assim, para o método de Jacobi-Richardson não existe um critério geral análogo ao teorema 3.3.6.

Embora não ofereça interesse prático, podemos estabelecer o

Teorema 3.3.7 - Se $A \in L(\mathbb{R}^2)$ é simétrica e definida positiva então existe uma norma no \mathbb{R}^2 segundo a qual a transformação T do método de Jacobi-Richardson é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^2 .

O critério seguinte depende apenas dos autova-

lores da matriz A do sistema $Ax=b$ onde $A \in L(\mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.8 - Uma condição necessária e suficiente para que exista uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação T do método de Jacobi - Richardson definida em (41) por

$$Tx = Hx + s = (\hat{L} + \hat{U})x + \hat{b}$$

seja uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n é que os autovalores da matriz A pertençam ao intervalo $(0,2)$.

Demonstração: Sejam λ_i e γ_i , $i=1,2,\dots,n$ os autovalores das matrizes $H = (\hat{L} + \hat{U})$ e A , respectivamente.

Pelo teorema 1.5.2 basta mostrarmos que $\rho(H) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1$ se, e somente se, $0 < \gamma_i < 2$. De fato, pois

$$\det(A - \gamma_i I) = 0 \Rightarrow \det(I - \hat{L} - \hat{U} - \gamma_i I) = 0 \Rightarrow \det(H - (1 - \gamma_i)I) = 0.$$

Portanto,

$$\lambda_i = 1 - \gamma_i$$

e

$$\rho(H) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \gamma_i < 1 \Leftrightarrow 0 < \gamma_i < 2,$$

e o teorema está demonstrado,

Observemos que a aplicação prática do teorema an

terior é limitada, pois, em geral, desconhecemos os autovalores da matriz A . Além disso, não é frequente que todos os autovalores de uma matriz pertençam ao intervalo $(0,2)$.

Os próximos resultados referem-se à transformação T do método de sobreliberação (SOR).

Teorema 3.3.9 - (Teorema de Kahn). Assumamos que $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tenha elementos diagonais não nulos. Consideremos a transformação H_W do método de sobreliberação; ou seja, consideremos

$$H_W = (D - WL)^{-1} [(1 - W)D + WU] .$$

Então

$$\rho(H_W) \geq |W - 1| .$$

Demonstração: Desde que a matriz L é estritamente triangular inferior, temos que

$$\det D^{-1} = \det (D - WL)^{-1}$$

e, portanto,

$$\det H_W = \det (D - WL)^{-1} \cdot \det [(1 - W)D + WU]$$

$$= \det [(1 - W)I + WD^{-1}U] = \det [(1 - W)I]$$

$$= (1 - W)^n ,$$

uma vez que $D^{-1}U$ é estritamente triangular superior. Mas ,

como $\det H_W$ é o produto dos autovalores de H_W , temos

$$\rho(H_W) \geq |W-1|$$

o que demonstra este teorema. ■

Como consequência deste teorema, temos o

Teorema 3.3.10 - Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ com elementos diagonais não nulos e seja $b \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação T do método de sobreliberação (SOR) é uma contração sobre o \mathbb{R}^n se $0 < W < 2$.

Demonstração: Pelo teorema 1.5.2, para que exista uma norma no \mathbb{R}^n segundo a qual T é uma contração é necessário que $\rho(H_W) < 1$. Usando o teorema de Kahn, concluímos que para que isto aconteça, é necessário que $|W-1| < 1$; ou seja, que $0 < W < 2$; o que demonstra este teorema. ■

Adiante, provaremos que para uma importante classe de matrizes - as matrizes simétricas e definidas positivas - esta é também uma condição suficiente para que a transformação afim T do método de sobreliberação (SOR) seja uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Definição 3.3.2 - Sejam $A, B, C \in L(\mathbb{R}^n)$. Então $A = B - C$ é uma decomposição P -regular de A se B é não singular e $B + C$ é definida positiva.

A definição acima não exige que A e/ou $P = B + C$.

sejam simétricas. Ao contrário, ela exige apenas que $x^t P x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, o que é equivalente a exigir que a parte simétrica de P , definida por $\frac{1}{2} (P+P^t)$ seja definida positiva (teorema 0.4.10).

Teorema 3.3.11 - (Teorema de Stein) - Seja $Q \in L(\mathbb{R}^n)$ e assumamos que $A \in L(\mathbb{R}^n)$ é uma matriz simétrica e definida positiva tal que $A-Q^t A Q$ é definida positiva. Então $\rho(Q) < 1$.

Demonstração: Seja λ algum autovalor de Q e $u \neq 0$ um correspondente autovetor. Pelo teorema 0.4.11 temos que $u^H A u$ e $u^H (A-Q^t A Q) u$ são reais e positivos. Portanto,

$$u^H A u > u^H Q^t A Q u = (\lambda u)^H A (\lambda u) = |\lambda|^2 u^H A u .$$

Então, $|\lambda|^2 < 1$; o que demonstra o teorema.

Teorema 3.3.12 - (Teorema da decomposição P-regular). Sejam $A \in L(\mathbb{R}^n)$ simétrica e definida positiva e $A=B-C$ uma decomposição P-regular de A . Então $\rho(B^{-1}C) < 1$.

Demonstração: Pelo teorema 3.3.11 é suficiente mostrar que

$$Q = A - (B^{-1}C)^t A B^{-1}C$$

é definida positiva.

Desde que $B^{-1}C = I - B^{-1}A$, temos

$$Q = (B^{-1}A)^t A + A B^{-1}A - (B^{-1}A)^t A B^{-1}A = (B^{-1}A)^t (B+B^t-A) B^{-1}A .$$

Mas, $B+B^t-A = B^t+C$ é definida positiva, uma vez que $B+C$ é, por hipótese, definida positiva.

Portanto, pelo teorema 0.4.12, Q é definida positiva. A conclusão deste teorema decorre do teorema 3.3.11.

Para o método SOR, o teorema 3.3.12 se reduz ao importante resultado que segue; o qual nos dá uma condição suficiente para que a transformação afim T deste método seja uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Teorema 3.3.13 - (Teorema de Ostrowski - Reich) - Sejam $A \in L(\mathbb{R}^n)$ uma matriz simétrica e definida positiva e $b \in \mathbb{R}^n$. Assumamos que $0 < w < 2$. Então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação T do método de sobreliberação (SOR) é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: Neste método a matriz A é decomposta em

$$A = B - C = W^{-1}(D-WL) - W^{-1} \left[(1-W)D + WL^t \right], \text{ pois } U=L^t.$$

Como os elementos diagonais de A são positivos, então D é definida positiva e $D-WL$ é não singular. Além disso, a parte simétrica de $B+C$ é

$$B+B^t-A = 2W^{-1}D - L - L^t + L - D + L^t = W^{-1}(2-w)D.$$

Como, por hipótese, $0 < w < 2$ então a parte simétrica de $B+C$ é definida positiva. Assim, pelo teorema 3.3.12, temos que

$$\rho(B^{-1}C) = \rho(H_W) < 1$$

e a conclusão deste teorema decorre do teorema 1.5.2.

Uma vez que o método SOR transforma-se no método de Gauss-Seidel quando $W=1$, novamente concluímos a validade do teorema 3.3.6 que agora pode ser estabelecido como corolário do teorema 3.3.13.

Vejamos agora, condições suficientes para que a transformação T do método de Peaceman-Rachaford seja uma contração sobre o \mathbb{R}^n .

Teorema 3.3.14 - Sejam $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $V \in L(\mathbb{R}^n)$ matrizes simétricas e definidas positivas. Seja $b \in \mathbb{R}^n$. Se $\delta > 0$, então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação a fim T do método de Peaceman - Rachaford é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: Neste método a transformação T é definida por

$$Tx = H_\delta x + s \quad \text{com} \quad H_\delta = (V + \delta I)^{-1} (H - \delta I) (H + \delta I)^{-1} (V - \delta I)$$

$$\text{e} \quad s = 2\delta (V + \delta I)^{-1} (H + \delta I)^{-1} b.$$

Evidentemente H_δ é similar à matriz \tilde{H}_δ onde

$$\tilde{H}_\delta = (V+\delta I)H_\delta (V+\delta I)^{-1} = (H-\delta I)(H+\delta I)^{-1}(V-\delta I)(V+\delta I)^{-1}$$

e, então

$$\|\tilde{H}_\delta\|_2 \leq \|(H-\delta I)(H+\delta I)^{-1}\|_2 \cdot \|(V-\delta I)(V+\delta I)^{-1}\|_2 .$$

Como H e V são simétricas e como $H-\delta I$ comu-
ta com $(H+\delta I)^{-1}$, temos

$$\|(H-\delta I)(H+\delta I)^{-1}\|_2 = \rho((H-\delta I)(H+\delta I)^{-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\lambda_i - \delta}{\lambda_i + \delta} \right|$$

onde λ_i são os autovalores de A .

Mas, como H é simétrica e definida positiva, seus autovalores são positivos. Portanto,

$$\|(H-\delta I)(H+\delta I)^{-1}\|_2 < 1 .$$

Similarmente,

$$\|(V-\delta I)(V+\delta I)^{-1}\|_2 < 1 .$$

e então,

$$\rho(H_\delta) = \rho(\tilde{H}_\delta) \leq \|\tilde{H}_\delta\|_2 < 1 .$$

A conclusão do teorema decorre do teorema 1.5.2.

No teorema anterior exigimos que H e V fossem simétricas e definidas positivas. Mostraremos agora que

mesmo que estas condições não sejam satisfeitas a conclusão continua válida.

Teorema 3.3.15 - Sejam $H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $V \in L(\mathbb{R}^n)$. Se existe uma matriz $P \in L(\mathbb{R}^n)$ não singular tal que $\hat{H} = P^{-1}HP$ e $\hat{V} = P^{-1}VP$ sejam matrizes simétricas e definidas positivas e se $\delta > 0$ então existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação afim T do método de Peaceman - Rachaford é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: Como na demonstração do teorema 3.3.14, H_δ é similar a \tilde{H}_δ . Por sua vez, \tilde{H}_δ é similar a

$$\hat{H}_\delta = P^{-1}\tilde{H}_\delta P = (\hat{H} - \delta I)(\hat{H} + \delta I)^{-1}(\hat{V} - \delta I)(\hat{V} + \delta I)^{-1}.$$

Entretanto, temos que

$$\rho(H_\delta) = \rho(\hat{H}_\delta) \leq \|(\hat{H} - \delta I)(\hat{H} + \delta I)^{-1}\|_2 \cdot \|(\hat{V} - \delta I)(\hat{V} + \delta I)^{-1}\|_2 < 1,$$

pois \hat{H} e \hat{V} são, por hipótese, matrizes simétricas e definidas positivas. Novamente, o teorema 1.5.2 conclui este teorema.

Como uma aplicação do resultado acima, suponhamos que para alguma matriz simétrica e definida positiva Q , as matrizes QH e QV sejam simétricas e definidas positivas. Então, $\rho(T_\delta) < 1$; pois se tomarmos $P = Q^{\frac{1}{2}}$, teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H} = Q \frac{1}{2} H Q \frac{-1}{2} = Q \frac{-1}{2} (QH) Q \frac{-1}{2} \\ \hat{V} = Q \frac{1}{2} V Q \frac{-1}{2} = Q \frac{1}{2} (QV) Q \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

Então, como QH e QV são simétricas e definidas positivas, segue que \hat{H} e \hat{V} também o são.

No próximo teorema demonstramos que o método de Cimmino é incondicionalmente convergente.

Teorema 3.3.16 - Existe uma norma no \mathbb{R}^n com respeito a qual a transformação afim T do método de Cimmino definida por

$$Tx = Hx + s = \left(I - \frac{2}{n+1} A^t G^2 A \right) x + \frac{2}{n+1} A^t G^2 b$$

é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Demonstração: Pelo teorema 1.5.2, basta mostrarmos que $\rho(H) < 1$. Primeiramente, observemos que $A^t G^2 A = A^t G^t G A = (GA)^t GA$ é simétrica e definida positiva, uma vez que GA é não singular. Portanto, se λ_i é um autovalor de $A^t G^2 A$ então $\lambda_i > 0$. Tome mos γ_i como sendo algum autovalor de H . Temos então que

$$\det(\gamma_i I - \left[I - \frac{2}{n+1} A^t G^2 A \right]) = 0,$$

ou

$$\det\left(-\frac{n+1}{2} [1 - \gamma_i] - A^t G^2 A\right) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{n+1}{2}(1-\gamma_i) = \lambda_i ;$$

ou seja,

$$\gamma_i = 1 - \frac{2\lambda_i}{n+1} .$$

Mas

$$\rho(H) = \max_{1 \leq i \leq n} |\gamma_i| < 1 \leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2\lambda_i}{n+1} < 1 \leftrightarrow 0 < \lambda_i < n+1 \quad (83)$$

Observemos que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A^t G^2 A) \quad \text{e} \quad \lambda_i > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Então

$$\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i < \text{tr}(A^t G^2 A) = \text{tr}(G^2 A^t A) .$$

Mas, de (51) segue que

$$(G^2 A^t A)_{ij} = \sum_{K=1}^n \frac{a_{Ki} a_{Kj}}{(a_K)^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^t G^2 A) &= \sum_{i=1}^n (A^t G^2 A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{K=1}^n \frac{a_{Ki}^2}{(a_K)^2} = \\ &= \sum_{K=1}^n \frac{1}{(a_K)^2} \sum_{i=1}^n a_{Ki}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(a_K)^2}{(a_K)^2} = n . \end{aligned}$$

Então,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i < \operatorname{tr}(A^t G^2 A) = n < n+1 .$$

Segue que $\lambda_i < n+1$ e, então, por (83), $\rho(H) < 1$; o que demonstra o teorema.

3.4 - Caso das transformações T definidas nos métodos iterativos apresentados em 2.4.

Demonstraremos agora que para um aceitável λ , a transformação T do método de Picard para resolver o sistema $Fx = Ax + \phi x$ definido em (53) é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n .

Teorema 3.4.1 - Suponhamos que $A \in L(\mathbb{R}^n)$ e $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são definidas por (54), onde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e satisfaz

$$0 \leq g'(s) \leq \gamma, \quad -\infty < s < +\infty .$$

Então, a transformação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ do método de

Picard para a resolução do sistema $Fx = Ax + \phi x$, definida por

$$Tx = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda x - \phi x)$$

é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n , com respeito à norma $\|\cdot\|_2$, se $\lambda = h^2 \gamma / 2$.

Demonstração: Pelos teoremas 0.4.8 e 0.4.5, A é simétrica e definida positiva e, como $\lambda > 0$, segue que $A + \lambda I$ é também simétrica e definida positiva. Além disso, T é continuamente diferenciável no \mathbb{R}^n , e

$$T'(x) = (A + \lambda I)^{-1} (\lambda I - \phi'(x)).$$

Consequentemente, temos que

$$\|T'(x)\|_2 \leq \|A + \lambda I\|_2^{-1} \cdot \|\lambda I - \phi'(x)\|_2 \leq \frac{\lambda}{\mu + \lambda} < 1,$$

onde, $\mu > 0$ é o menor autovalor de A .

Portanto, o teorema 1.4.1 assegura-nos que T é uma contração sobre todo o \mathbb{R}^n , com respeito a $\|\cdot\|_2$.

Teorema 3.4.2 - Suponhamos que a função $f(x, y)$ do problema de valor inicial (55) satisfaz à condição de Lipschitz com respeito a y em \mathbb{R} ; ou seja, que

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|$$

para todo $y, \bar{y} \in \mathbb{R}$, com $L > 0$.