

---

Poliedros de Newton e singularidades de  
polinômios

*Jorge Alberto Coripaco Huarcaya*

---

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 04/08/2011

Assinatura:

# Poliedros de Newton e singularidades de polinômios

**Jorge Alberto Coripaco Huarcaya**

***Orientador:* Prof. Dr. Marcelo José Saia**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

**USP – São Carlos**  
**Agosto de 2011**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C798p Coripaco Huarcaya, Jorge Alberto  
Poliedros de Newton e singularidades de polinômios  
/ Jorge Alberto Coripaco Huarcaya; orientador  
Marcelo José Saia -- São Carlos, 2011.  
72 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Número de Milnor de um polinômio. 2. Número de  
Newton de um polinômio. 3. Polinômios cômodos. 4.  
Polinômios Newton não-degenerados no infinito. I.  
Saia, Marcelo José , orient. II. Título.

Minha mãe foi a mulher mais bela que jamais conheci. Todo o que sou, se o devo a minha mãe. Atribuo todos meus sucessos nesta vida ao ensino moral, intelectual e física que recebi dela.

George Washington

# Agradecimentos

---

Primeiramente eu quero agradecer a Deus, por sempre guiar meu caminho e pela força que sempre me deu para alcançar meus objetivos.

À meus queridos pais, Juan de Dios Curipaco e Alejandra Huarcaya de Cruz que sempre me deram seu amor e carinho, pelo apoio e todo o sacrifício que fizeram para que eu continue meus estudos. À meus irmãos Moises, Duly, Betzabe, Efrain, Jose, Juan, Mayra e Issac pela amizade e pelo apoio de forma incondicional durante toda minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Marcelo José Saia, pelo orientação, amizade, ensinamentos e por sempre estar dispuesto em ajudar-me no que fosse preciso para poder concluir meu trabalho.

Agradeço aos meus amigos Karina Arroyo, Raquel Mamani, Elizabeth Salazar, Luis Sanchez, Jose Bravo, Vladimir Dionisio, Eber Chuño,... todos eles tem minha gratidão por todo o apoio

Agradeço aos professores do departamento de Matemática do ICMC, pelos ensinamentos, apoio e motivação as quais muito aprendi.

À CAPES pelo apoio financeiro sim o qual não teria sido possível este trabalho



# Resumo

---

Neste trabalho, estudamos a relação que existe entre o número de Milnor de um polinômio cômodo ou seja, a soma dos números de Milnor dos pontos singulares isolados deste polinômio, com seu número de Newton. Este número é sempre menor ou igual ao número de Newton e a igualdade entre os números é obtida sempre que o polinômio cômodo possui parte principal Newton não-degenerada no infinito.





# Abstract

---

In this work, we study the relation between the Milnor number of a polynomial **cômodo** ie. the sum of Milnor numbers of isolated singular points of polynomial, with the Newton number. This number is always lower than or equal to the Newton number and equality between the numbers is obtained when the polynomial has non-degenerate newtonian principal part at the infinity.



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1	Anéis e Módulos Graduados . . . . .	6
1.2	Filtrações . . . . .	9
1.3	Anel Graduado Associado a uma Filtração Multiplicativa . . . . .	10
1.4	Complexos . . . . .	10
1.5	Construção do Complexo de Koszul . . . . .	12
1.6	Anéis e Módulos Cohen-Macaulay . . . . .	15
1.7	Séries de Hilbert . . . . .	18
1.8	Complexo de Cadeia Celular . . . . .	19
1.9	Grupos de Homologia Relativa . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Poliedro e Filtração de Newton</b>	<b>23</b>
2.1	Densidade do conjunto das partes principais não-degeneradas . . . . .	31
2.2	A Filtração de Newton . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Os Números de Milnor e o Número de Newton de Polinômios</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>Codimensão do ideal <math>\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}</math> e Demonstração do Teorema Principal</b>	<b>45</b>
4.1	Codimensão dos ideais $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$ e $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{-M+1} \rangle_{i=1, \dots, k}$ . . . . .	60
4.2	Demonstração do Teorema Principal . . . . .	64
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>



# Notação

---

- $\mathbb{C}$  corpo dos números Complexos  
 $\mathbb{Z}$  conjunto dos números inteiros  
 $\mathbb{N}$  conjunto dos números inteiros não negativos  
 $\mathbb{R}_+$  conjunto dos números reais não negativos  
 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  o anel dos polinômios  
 $\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}] = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  o anel dos polinômios de Laurent  
 $\mathbb{C}[P]$  anel do semigrupo de  $P$  sobre  $\mathbb{C}$   
 $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$  o ideal gerado pelos elementos  $g_1, \dots, g_k$   
 $\underline{x}$  é a  $k$ -upla  $(x_1, \dots, x_k)$   
 $f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$   
 $F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{-M+1}$   
 $\Gamma_-(f)$  poliedro de Newton da série formal  $f$   
 $\Gamma(f)$  fronteira ou bordo de Newton da série formal  $f$   
 $\tilde{\Gamma}_-(f)$  poliedro de Newton do polinômio  $f$   
 $\tilde{\Gamma}(f)$  fronteira ou bordo de Newton do polinômio  $f$   
 $\Gamma^*(f)$  poliedro de Newton do polinômio de Laurent  $f$   
 $\Gamma^*(f)$  fronteira ou bordo de Newton do polinômio de Laurent  $f$   
 $\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{q \leq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1})$  o anel graduado associado



# Introdução

---

Um importante invariante de um germe analítico  $f : (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  é seu *número de Milnor*  $\mu(f)$ . Este número para uma série formal  $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]$  é dado por

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}. \quad (1)$$

No caso analítico complexo, temos que  $\mu(f) < \infty$  se, e somente se, zero é um ponto singular isolado de  $f$  (ver [16])

Existem outras formas equivalentes de definir o número de Milnor de um germe de função analítica que podem ser encontradas em [16], nós usaremos apenas a definição acima.

O número de Milnor de um germe de função  $f : (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  descreve um número de diferentes aspectos da geometria de  $f$ . Em [22] Lê Dũng Tráng mostra que, para  $k \neq 3$ ,  $\mu$  é um invariante completo do tipo topológico da singularidade. Se dois germes de hipersuperfícies complexas  $V = f^{-1}(0)$  e  $W = g^{-1}(0)$  com singularidades isoladas são homeomorfos, então possuem o mesmo número de Milnor.

Para um polinômio  $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$  denotemos por  $\tilde{\mu}(f)$  a soma dos números de Milnor de todos os pontos singulares isolados de  $f$ . Podemos ver da equação (1) que:

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}. \quad (2)$$

As formulas (1) e (2) nos permitem calcular os números de Milnor de uma forma puramente algébrica.

Apesar da importância do número de Milnor, este em geral é difícil de ser calculado. Kouchnirenko em seu importante artigo: Polyèdres de Newton et nombres de Milnor [12], exhibe uma fórmula que facilita muito o cálculo deste número para germes de funções e polinômios com certas propriedades. Neste artigo Kouchnirenko apresenta um teorema que relaciona a soma dos números de Milnor dos pontos singulares isolados de um polinômio cômodo com o número de Newton o qual é a soma alternada de volumes de

regiões determinadas pelo poliedro de Newton do polinômio no infinito. O objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração detalhada deste teorema.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No Capítulo 1 introduzimos vários conceitos e resultados preliminares de álgebra comutativa e alguns conceitos de topologia algébrica. Para o leitor que estiver familiarizado com estes conceitos, a leitura deste capítulo poderá ser omitida.

No Capítulo 2, introduzimos vários conceitos importantes, dentre os quais podemos destacar o poliedro e fronteira de Newton, polinômios cômodos e polinômios com parte principal Newton não-degenerada. Estes conceitos foram definidos para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent, embora, posteriormente, nos limitamos apenas ao estudo para os polinômios cômodos. Neste capítulo demonstramos que o conjunto das partes principais Newton não-degeneradas é aberto e denso na topologia de Zariski e portanto o conjunto das partes principais degeneradas é uma subvariedade própria na variedade de todas as partes principais que correspondem à fronteira de Newton dada. Na última seção do capítulo, construímos uma filtração no anel  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  e com auxílio desta, construímos o anel graduado associado.

O Capítulo 3, é o capítulo central do nosso trabalho. Neste capítulo enunciamos o teorema principal, Teorema (3.3), o qual relaciona a soma dos números de Milnor dos pontos singulares isolados de um polinômio cômodo com o número de Newton, e enunciamos também os resultados necessários para demonstrá-lo. Além disso, apresentamos em linhas gerais a demonstração deste teorema.

O Capítulo 4 é dedicado às demonstrações dos resultados necessários para a demonstração do teorema principal e também a demonstração detalhada do teorema principal.

Ressaltamos aqui a dissertação de mestrado de Cristina Spohr [5], onde é feito um estudo do caso local, várias definições e resultados descritos nesta dissertação foram utilizados na redação deste trabalho. Agradecemos ao professor João Tomazella, e a Cristina por permitir o uso destes.



---

# Preliminares

---

Como foi observado na introdução, neste capítulo encontramos os pré-requisitos de álgebra comutativa e topologia algébrica. Para o leitor que estiver familiarizado com estes conceitos, a leitura deste capítulo poderá ser omitida.

Por um anel  $R$  entendemos um anel comutativo com unidade ( $1 \neq 0$ ).

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados nas seguintes referências: [1], [4], [13], [15], [18], [19] e [20] e em especial na dissertação de Spohr [5].

Um  $R$ -módulo  $M$  é *Noetheriano*, se qualquer submódulo de  $M$  é finitamente gerado.

**Proposição 1.1:** ([1], pag. 80) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $M$  é Noetheriano;
- b) Qualquer cadeia ascendente de submódulos de  $M$ ,

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots$$

é estacionária, ou seja, existe  $l \geq 1$  tal que  $N_l = N_{l+1} = \cdots$ ;

- c) Qualquer família não vazia de submódulos de  $M$  contém um elemento maximal  $N$ , ou seja, se existe elemento  $P$  da família tal que  $N \subset P$ , então  $N = P$ .

Um  $R$ -módulo  $M$  é *Artiniano*, se qualquer cadeia descendente de submódulos

$$M = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_n \supset \cdots$$

é estacionária.

Diremos que o anel  $R$  é *Noetheriano* (resp. *Artiniano*), se ele é Noetheriano (resp. Artiniano) como um  $R$ -módulo.

Sejam  $I, J$  ideais de um anel  $R$  e consideramos um  $R$ -módulo  $M$ . O seguinte subconjunto de  $R$

$$(I : J) = \{x \in R : xJ \subset I\}$$

é um ideal. No caso de um  $R$ -módulo  $M$ , podemos também definir

$$(I :_M J) = \{x \in M : xJ \subset MI\}.$$

Em particular, se  $I = 0$  temos

$$(0 :_M J) = \{x \in M : xJ = 0\}.$$

Seja  $R$  um anel e  $\mathcal{P} \subset R$  um ideal primo. Uma *cadeia de ideais primos* da forma

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$$

tem comprimento  $n$ . A *altura* de um ideal primo  $\mathcal{P}$  é definida por

$$\text{alt}\mathcal{P} = \text{ht}\mathcal{P} := \sup\{n : \text{existe uma cadeia de comprimento } n\}.$$

A *dimensão de Krull* de um anel  $R$  é dada por

$$\sup\{\text{ht}\mathcal{P} : \mathcal{P} \subset R \text{ primo}\}$$

e a denotamos por  $\dim R$ .

Seja  $M$  um  $R$ -módulo e  $0$  o submódulo nulo de  $M$ . Dizemos que  $M$  é *simples* se ele não contém submódulos distintos de  $0$  e  $M$ .

Uma *cadeia* em um módulo  $M$  é uma sequência  $\{M_i\}$ , com  $1 \leq i \leq n$ , de submódulos de  $M$  tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = 0.$$

Dizemos que  $n$  é o comprimento da cadeia. Uma *série de composição* de  $M$  é uma cadeia maximal, ou seja,  $M_{i-1}/M_i$  é simples, para  $1 \leq i \leq n$ . Sabemos que se  $M$  tem uma série de composição de comprimento  $n$ , então toda série de composição de  $M$  tem comprimento  $n$  (ver [1], pag. 77). Isto nos permite definir o *comprimento* de  $M$  como sendo o comprimento de uma série de composição, denotado por  $L_R(M)$ . Se  $M \neq 0$  e não existe série de composição de  $M$  a  $0$ , então  $L_R(M) = +\infty$ .  $L_R(M) = 0$  se  $M$  é o módulo nulo.

**Teorema 1.2:** (*Teorema da Base de Hilbert*) ([15], pag. 16) *Se  $R$  é um anel Noetheriano, então os anéis  $\mathcal{R}[x_1, \dots, x_k]$  e  $\mathcal{R}[[x_1, \dots, x_k]]$  são Noetherianos.*

**Teorema 1.3:** (*Teorema dos Zeros de Hilbert*) ([9], pag. 21) Seja  $\mathcal{C}$  um corpo algebricamente fechado, e seja  $I \subset \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$  um ideal. Então

$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$$

onde  $V(I)$  é a variedade algébrica do ideal  $I$  e  $\mathcal{I}(V(I))$  é o ideal do conjunto algébrico  $V(I)$ .

**Teorema 1.4:** (*Lema de Nakayama*) ([1], pag. 21) Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado, e  $I$  um ideal de  $R$  contido no radical de Jacobson  $\mathcal{R}$  de  $R$ . Se  $IM = M$ , então  $M = 0$ .

**Corolário 1.5:** ([1], pag. 22) Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado,  $N$  um submódulo de  $M$ , e  $I$  um ideal de  $R$  contido no radical de Jacobson  $\mathcal{R}$  de  $R$ . Se  $M = IM + N$ , então  $M = N$ .

Consideramos um  $\mathcal{C}$ -espaço vetorial  $V$ . Logo temos, em  $V$ , uma estrutura de  $\mathcal{C}$ -módulo.

**Proposição 1.6:** ([1], pag. 78) Para um  $\mathcal{C}$ -espaço vetorial  $V$  as seguintes condições são equivalentes

- a) o  $\mathcal{C}$ -espaço vetorial  $V$  possui dimensão finita;
- b) o  $\mathcal{C}$ -módulo  $V$  possui comprimento finito;
- c) é satisfeita a condição de cadeia ascendente;
- d) é satisfeita a condição de cadeia descendente.

Além disso, se essas condições são satisfeitas temos comprimento igual a dimensão.

Consideramos  $B, C$  e  $E$ ,  $R$ -módulos;  $P$  um  $R$ -módulo livre e  $A$  um submódulo de  $B$ . Um módulo  $P$  é *projetivo* se  $\beta : B \rightarrow C$  é epimorfismo,  $P$  livre e  $\alpha : P \rightarrow C$  aplicação qualquer, então existe  $\gamma : P \rightarrow B$  com  $\alpha = \beta \cdot \gamma$ .

Observamos que um módulo  $M$  é projetivo se, e somente se,  $\text{Hom}(M, \cdot)$  é exato (ver [19], pag. 62).

Um módulo  $E$  é *injetivo* se, para qualquer módulo  $B$  e qualquer submódulo  $A$  de  $B$ , toda aplicação  $f : A \rightarrow E$  pode ser estendida a uma aplicação  $g : B \rightarrow E$ .

Notamos que um módulo  $E$  é injetivo se, e somente se, o functor  $\text{Hom}(\cdot, E)$  é exato (ver [19], pag. 65).

**Definição 1.7:** Uma *resolução injetiva* de um módulo  $M$  é uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \dots$$

em que cada  $E^n$  é injetivo.

**Definição 1.8:** Uma *resolução projetiva* de um módulo  $M$  é uma sequência exata

$$\dots \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

em que cada  $P^n$  é projetivo.

Definimos o functor  $\text{Ext}$  da seguinte maneira

$$\text{Ext}_R^n(C, A) = \ker d_*^n / \text{Im } d_*^{n-1}$$

onde

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d_*^1} E^1 \xrightarrow{d_*^2} E^2 \longrightarrow \dots$$

é uma resolução injetiva escolhida de  $A$ . Ou ainda

$$\text{Ext}_R^n(C, A) = \ker d_{n*} / \text{Im } d_{n-1*}$$

onde

$$\dots \longrightarrow P^2 \xrightarrow{d_{2*}} P^1 \xrightarrow{d_{1*}} P^0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de  $C$ .

Observamos que as definições anteriores independem das resoluções injetiva e projetiva, respectivamente, e além disso, que elas coincidem (ver [19], pag. 185 – 186).

## 1.1 Anéis e Módulos Graduados

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [18].

**Definição 1.9:** Um *monóide graduado* é um par  $(\Gamma, +)$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto não vazio e

$$+ : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

é uma operação binária em  $\Gamma$  satisfazendo:

- a)  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$ , para quaisquer  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ;
- b)  $\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$ , para quaisquer  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ ;
- c) Existe elemento  $0$  (necessariamente único) tal que  $\gamma + 0 = \gamma$ , para todo  $\gamma \in \Gamma$ ;
- d) Se  $\gamma + \gamma_1 = \gamma + \gamma_2$ , onde  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  estão em  $\Gamma$ , então  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

- Exemplo 1.10:** 1) Qualquer grupo abeliano escrito aditivamente é um monóide graduado.
- 2) O conjunto dos inteiros não negativos munido com a adição é um monóide graduado.
- 3) O conjunto das sequências da forma  $(m_1, m_2, \dots, m_p)$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}_+$ , para todo  $i = 1, \dots, p$ , com a seguinte lei de composição

$$(m_1, m_2, \dots, m_p) + (m'_1, m'_2, \dots, m'_p) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2, \dots, m_p + m'_p)$$

é um monóide graduado.

Consideramos um monóide graduado  $\Gamma$  e um anel  $R$ . Lembramos que  $R$  possui estrutura de grupo abeliano com respeito à operação adição.

**Definição 1.11:** Uma  $\Gamma$ -graduação em  $R$  é uma família  $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  de subgrupos do grupo aditivo de  $R$ , satisfazendo:

- a)  $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ ;
- b)  $R_\gamma R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma + \gamma'}$ , para quaisquer  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ .

Lembramos que

$$R_\gamma R_{\gamma'} = \{r_{\gamma_1} \rho_{\gamma'_1} + \dots + r_{\gamma_s} \rho_{\gamma'_s}, \text{ onde } r_{\gamma_j} \in R_\gamma \text{ e } \rho_{\gamma'_j} \in R_{\gamma'}, \text{ para } j = 1, \dots, s\}.$$

Suponhamos que temos uma  $\Gamma$ -graduação em  $R$ . Cada elemento  $r$  de  $R$  tem uma única representação da forma

$$r = \sum_{\gamma} r_\gamma$$

onde  $r_\gamma \in R_\gamma$  e a soma contém somente um número finito de termos não nulos.

**Definição 1.12:** Os elementos de  $R_\gamma$  serão chamados *homogêneos de grau  $\gamma$*  e  $r_\gamma$  é chamada *componente homogênea* de  $r$ , de grau  $\gamma$ .

**Observação 1.13:** 1) O elemento zero do anel  $R$  é homogêneo de grau  $\gamma$ , para todo  $\gamma \in \Gamma$ .

2) Dado um anel  $R$ , podemos sempre obter uma  $\Gamma$ -graduação de  $R$ , pondo  $R_0 = R$  e  $R_\gamma = 0$ , quando  $\gamma \neq 0$ , chamada de  $\Gamma$ -graduação *trivial* em  $R$ .

3) Seja  $R$  um anel  $\Gamma$ -graduado. O elemento identidade de  $R$  é homogêneo de grau zero, e consequentemente  $R_0$  é um subanel de  $R$ .

**Exemplo 1.14:** Seja  $\Gamma = \mathbb{N}$ ,  $R$  um anel e  $R[x_1, \dots, x_k]$  o anel dos polinômios nas indeterminadas  $x_1, \dots, x_k$ . Os conjuntos  $\bar{S}_d = \{\text{polinômios homogêneos de grau } d\} \cup \{0\}$  são subgrupos de  $R[x_1, \dots, x_k]$ , para todo  $d \geq 0$ . Logo

$$R[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \bar{S}_d$$

Seja  $R = \sum_{\gamma} R_{\gamma}$  um anel  $\Gamma$ -graduado e seja  $M$  um  $R$ -módulo. Temos em  $M$  uma estrutura de grupo abeliano aditivo.

**Definição 1.15:** Uma  $\Gamma$ -graduação em  $M$  é uma família  $\{M_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  de subgrupos do grupo aditivo  $M$  que satisfaz:

- a)  $M = \bigoplus_{\gamma} M_{\gamma}$ ;
- b)  $R_{\gamma} M_{\gamma'} \subseteq M_{\gamma+\gamma'}$ , para quaisquer  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ .

Lembramos que

$$R_{\gamma} M_{\gamma'} = \{r_{\gamma_1} m_{\gamma'_1} + \dots + r_{\gamma_n} m_{\gamma'_n} : r_{\gamma_i} \in R_{\gamma}, m_{\gamma'_i} \in M_{\gamma'}, i = 1, \dots, n\}.$$

Seja  $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_{\gamma}$  um módulo  $\Gamma$ -graduado sobre um anel  $\Gamma$ -graduado  $R = \bigoplus_{\gamma} R_{\gamma}$ .

Cada elemento  $m \in M$  tem uma única representação na forma

$$m = \sum_{\gamma} m_{\gamma}$$

onde  $m_{\gamma} \in M_{\gamma}$  e a soma contém somente um número finito de termos não nulos.

**Definição 1.16:** Os elementos de  $M_{\gamma}$  são ditos *homogêneos de grau  $\gamma$*  e  $m_{\gamma}$  é chamada *componente homogênea de grau  $\gamma$*  de  $m$ .

**Observação 1.17:** 1) Notamos que cada  $M_{\gamma}$  é um  $R_0$ -módulo.

2) Sejam  $R$  um anel e  $M$  um  $R$ -módulo. Consideramos  $R$  com a  $\Gamma$ -graduação trivial. Podemos sempre tornar  $M$  um módulo  $\Gamma$ -graduado sobre o anel  $\Gamma$ -graduado  $R$ , fazendo  $M_0 = M$  e  $M_{\gamma} = 0$ , para  $\gamma \neq 0$ .

**Proposição 1.18:** ([18], pag. 115) Se  $K$  é um submódulo de um  $R$ -módulo  $\Gamma$ -graduado  $M = \bigoplus_{\gamma} M_{\gamma}$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a)  $K = \bigoplus_{\gamma} (M_{\gamma} \cap K)$ ;
- b) Se  $y \in K$ , então todas as componentes homogêneas de  $y$  pertencem a  $K$ ;
- c)  $K$  pode ser gerado, como  $R$ -módulo, por elementos homogêneos.

Um submódulo  $K$  que satisfaz uma condição (e portanto todas as propriedades (a), (b) e (c)) da proposição anterior é chamado *submódulo homogêneo* de  $M$ .

Seja  $M = \bigoplus_{\gamma} M_{\gamma}$  um módulo  $\Gamma$ -graduado sobre um anel  $\Gamma$ -graduado  $R = \bigoplus_{\gamma} R_{\gamma}$  e seja  $K$  um submódulo homogêneo de  $M$ . Se escrevermos  $K_{\gamma} = M_{\gamma} \cap K$ , então  $K_{\gamma}$  é um subgrupo do grupo aditivo  $K$ .

A família  $\{K_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  constitui uma  $\Gamma$ -gradação em  $K$ . Chamamos esta graduação de *gradação induzida*.

Ainda assumindo que  $K$  é um submódulo homogêneo de  $M$ , seja

$$\phi : M \longrightarrow M/K$$

a aplicação natural. Ambos  $M$  e  $M/K$  são  $R_0$ -módulos e portanto  $\phi$  é um  $R_0$ -homomorfismo. Colocamos

$$\phi(M_{\gamma}) = (M/K)_{\gamma}. \quad (1.1)$$

Então  $(M/K)_{\gamma}$  é um  $R_0$ -submódulo de  $M/K$  e portanto um subgrupo aditivo de  $M/K$ . Então temos que a família  $\{(M/K)_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  é uma  $\Gamma$ -gradação em  $M/K$ . A  $\Gamma$ -gradação  $\{(M/K)_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$  em  $M/K$  é chamada de *gradação quociente*.

**Teorema 1.19:** ([1], pag. 106) *Seja  $R$  um anel graduado, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $R$  é um anel Noetheriano;
- b)  $R_0$  é Noetheriano e  $R$  é finitamente gerado como  $R_0$ -álgebra.

## 1.2 Filtrações

Seja  $R$  um anel. Uma *filtração* em  $R$  é uma família de ideais  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  satisfazendo  $R_n \supseteq R_{n+1}$ , para todo  $n \geq 0$ .

Seja  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  uma filtração de ideais num anel  $R$ .  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  é uma *filtração multiplicativa* em  $R$  se:

- a)  $R_0 = R$ ;
- b)  $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ , para todo  $m, n \geq 0$ .

**Exemplo 1.20:** Seja  $I$  um ideal em  $R$ . Então  $\{I^n\}_{n \geq 0}$  (as potências do ideal  $I$ ) constitui uma filtração multiplicativa em  $R$ .

## 1.3 Anel Graduado Associado a uma Filtração Multiplicativa

Seja  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  uma filtração multiplicativa em  $R$ . Definimos

$$\text{gr } R = (R_0/R_1) \oplus (R_1/R_2) \oplus (R_2/R_3) \oplus \cdots .$$

Notamos que  $\text{gr } R$  possui uma estrutura de grupo abeliano. Podemos também definir uma estrutura multiplicativa em  $\text{gr } R$  da seguinte maneira

$$\text{gr } R \times \text{gr } R \longrightarrow \text{gr } R$$

$$(\sum_i x_i, \sum_j y_j) \mapsto (\sum_i x_i)(\sum_j y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j.$$

Com estas operações  $\text{gr } R$  se torna um anel.

Os elementos homogêneos de grau  $m$ ,  $m \geq 0$ , do anel  $\text{gr } R$  são os elementos de  $R_m/R_{m+1}$ .

**Observação 1.21:** O elemento identidade em  $\text{gr } R$  é a imagem de  $1_R \in R_0/R_1 = R/R_1$ .

$\text{gr } R$  é dito o *anel graduado associado a filtração multiplicativa*  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  do anel  $R$ .

## 1.4 Complexos

Os resultados desta seção são encontrados em [18].

Um *complexo* de  $R$ -módulos é uma sequência

$$\cdots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \rightarrow \cdots \quad (1.2)$$

de  $R$ -módulos e  $R$ -homomorfismos estendida indefinidamente em ambas as direções, com a propriedade que

$$d_n d_{n+1} = 0 \quad (1.3)$$

para todo  $n$ .

$M_n$  será chamado *módulo componente de grau  $n$*  ou a  *$n$ -ésima componente do complexo*.

$d_n$  será chamado  *$n$ -ésima diferencial* ou  *$n$ -ésimo homomorfismo de bordo*.

Por simplicidade, representamos (1.2) por  $(M, d)$ , ou ainda como  $M$ .

Além disso, a condição dada em (1.3), pode ser escrita como  $d^2 = 0$ .

Vamos agora definir os módulos de homologia de um complexo. Para isto, consideramos um complexo  $(M, d)$  de  $R$ -módulos. Seja

$$Z_n(M) = \ker d_n$$



$$B_n(M) = \text{Im } d_{n+1}$$

Os elementos de  $Z_n(M)$  são chamados os  $n$ -ciclos de  $M$  e os de  $B_n(M)$  os  $n$ -bordos. Segue de (1.3) que para todo  $n \geq 0$ , vale a inclusão abaixo

$$B_n(M) \subseteq Z_n(M).$$

Portanto, podemos definir o seguinte  $R$ -módulo quociente

$$H_n(M) = Z_n(M)/B_n(M) \tag{1.4}$$

que é chamado  $n$ -ésimo módulo de homologia do complexo  $M$ .

**Observação 1.22:** A sequência (1.2) é exata se, e somente se, os módulos de homologia  $H_n(M)$  de  $M$  são nulos, para todo  $n$ .

**Definição 1.23:** Um complexo  $(M, d)$  é *acíclico* se  $H_n(M) = 0$ , para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim um complexo é acíclico se, e somente se, for uma sequência exata.

Sejam  $(M', d')$  e  $(M, d)$  complexos de  $R$ -módulos. Uma aplicação entre os complexos  $(M', d')$  e  $(M, d)$ , é uma família  $\{\phi_n\}$  de  $R$ -homomorfismos

$$\phi_n : M'_n \longrightarrow M_n$$

para todo  $n$ ,  $-\infty < n < \infty$ , tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M'_n & \xrightarrow{d'_n} & M'_{n-1} \\ \phi_n \downarrow & & \downarrow \phi_{n-1} \\ M_n & \xrightarrow{d_n} & M_{n-1} \end{array} \tag{1.5}$$

é comutativo, isto é, tal que

$$\phi_{n-1}d'_n = d_n\phi_n,$$

para todo  $n$ .

Por simplicidade, escrevemos  $\phi : M' \longrightarrow M$ .  $\phi$  é chamado um *isomorfismo de complexos* se  $\phi_n$  é um isomorfismo de  $R$ -módulos, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Seja  $\phi : M' \longrightarrow M$  uma aplicação entre complexos. O fato do diagrama (1.5) ser comutativo implica que

$$\phi_n(Z_n(M')) \subseteq Z_n(M). \tag{1.6}$$

Por outro lado, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & M'_n \\ \phi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ M_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & M_n \end{array}$$

é também comutativo, e portanto temos

$$\phi_n(B_n(M')) \subseteq B_n(M). \quad (1.7)$$

Com base em (1.6) e (1.7),  $\phi_n$  é uma aplicação entre os pares  $(B_n(M'), Z_n(M'))$  e  $(B_n(M), Z_n(M))$ . Logo induz um homomorfismo

$$\phi_n^* : H_n(M') \longrightarrow H_n(M) \quad (1.8)$$

dado por  $\phi_n^*(m + B_n(M')) = \phi_n(m) + B_n(M)$ , onde  $m \in Z_n(M')$ .

Portanto a aplicação  $\phi : M' \longrightarrow M$  de complexos induz homomorfismos

$$H_n(M') \longrightarrow H_n(M)$$

dos módulos de homologia de  $M'$  nos módulos de homologia de  $M$ .

O complexo  $(M, d)$  é chamado um *complexo à esquerda* se  $M_n = 0$ , para todo  $n < 0$ . Portanto um exemplo típico de um complexo à esquerda tem a forma

$$\dots \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

## 1.5 Construção do Complexo de Koszul

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [18].

Seja  $M$  um  $R$ -módulo e  $\gamma_1, \dots, \gamma_s (s \geq 0)$  elementos do anel  $R$ . Vamos construir um complexo de  $R$ -módulos que chamaremos *complexo de Koszul* de  $M$  com respeito a  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ . Denotamos o complexo de Koszul de  $M$  com respeito a  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  por  $K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | R | M)$ , ou por  $K(\underline{\gamma} | M) = K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  se não há dúvidas sobre o anel em questão.

O complexo de Koszul  $K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  tem a forma

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_s(\underline{\gamma} | M) \longrightarrow \dots \longrightarrow K_1(\underline{\gamma} | M) \longrightarrow K_0(\underline{\gamma} | M) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Para  $0 \leq \mu \leq s$ , a  $\mu$ -ésima componente  $K_\mu(\underline{\gamma} | M)$  é a soma direta de  $\binom{s}{\mu}$  cópias de  $M$ , onde  $\binom{s}{\mu}$  é o coeficiente binomial usual. Se  $s = 0$ , então  $K(\cdot | M)$  é simplesmente

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Para  $s \geq 1$  é necessário descrever os homomorfismos de bordo, e para isto introduzimos alguma notação especial. Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_s$  novos símbolos e escrevemos

$$K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) = \bigoplus_{i_1 < i_2 < \dots < i_\mu} MT_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}$$

onde  $i_1, i_2, \dots, i_\mu$  são inteiros que variam  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\mu \leq s$ .

**Exemplo 1.24:** Seja  $s = 3$  e  $\mu = 2$ . Temos que

$$K_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | M) = M \oplus M \oplus M.$$

Mas com a nova notação escrevemos

$$K_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | M) = M_{i_1 < i_2} \oplus M_{i_2 < i_3} \oplus M_{i_1 < i_3}.$$

Portanto, quando  $0 \leq \mu \leq s$ ,  $K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  é efetivamente a soma direta de  $M$ ,  $\binom{s}{\mu}$  cópias, e um elemento de  $K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  tem uma única representação na forma

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_\mu} m_{i_1 i_2 \dots i_\mu} T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}$$

onde  $m_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$  pertence a  $M$ . No caso  $\mu = 0$ , temos que

$$K_0(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) = M.$$

Queremos agora definir um homomorfismo de bordo

$$d_\mu : K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) \longrightarrow K_{\mu-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$$

e observamos que aqui, somente valores de  $\mu$  que satisfazem  $0 \leq \mu \leq s$  é que necessitam consideração. Supomos então que  $\mu$  está nestas condições e sejam  $i_1, i_2, \dots, i_\mu$  inteiros tais que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\mu \leq s$ . Desde que cada elemento de  $K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  é unicamente expresso como uma soma de elementos da forma  $mT_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}$ , colocamos

$$d_\mu(mT_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_\mu}) = \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} m T_{i_1} \dots \widehat{T}_{i_p} \dots T_{i_\mu} \quad (1.9)$$

onde  $\widehat{\phantom{x}}$  sobre  $T_{i_p}$  significa que este fator foi omitido. Notamos que  $d_\mu$  é um homomorfismo de  $R$ -módulos.

Quando  $\mu = 1$ , (1.9) assegura que  $d_1(mT_{i_1}) = \gamma_{i_1} m$ .

É necessário agora mostrar que

$$\dots \longrightarrow K_{\mu+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) \xrightarrow{d_{\mu+1}} K_\mu(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) \xrightarrow{d_\mu} K_{\mu-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) \longrightarrow \dots$$

realmente é um complexo, isto é, precisamos verificar que  $d_{\mu-1}d_\mu = 0$ .

Supomos  $0 \leq \mu - 1 < \mu \leq s$  e queremos verificar que

$$d_{\mu-1}d_\mu(mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_\mu}) = 0. \quad (1.10)$$

Consideramos  $1 \leq p < q \leq \mu$ , então quando calcularmos o lado esquerdo de (1.10) temos que o termo  $\gamma_{i_p}\gamma_{i_q}mT_{i_1}\dots\widehat{T}_{i_p}\dots\widehat{T}_{i_q}\dots T_{i_\mu}$  ocorre duas vezes. Numa ocasião o termo está multiplicado por  $(-1)^{p-1}(-1)^{q-1}$  e na outra por  $(-1)^{p-1}(-1)^{q-2}$ , e daí os dois termos se anulam e consequentemente temos  $d_{\mu-1}d_\mu = 0$ .

Desde que  $K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$  é um complexo, podemos formar seu módulo de homologia. O  $\mu$ -ésimo módulo de homologia será denotado por

$$H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$$

que às vezes abreviaremos para  $H_\mu K(\underline{\gamma}|M) = H_\mu(\underline{\gamma}|M)$ .

Observamos que  $H_\mu K(\underline{\gamma}|M) = 0$ , quando  $\mu > s$  ou  $\mu < 0$ . De fato, pois para  $\mu > s$  ou  $\mu < 0$  temos que  $K_\mu(\underline{\gamma}|M) = 0$ .

Um elemento de  $K_1(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$  tem a forma  $\sum_{i=1}^s m_i T_i$ , onde  $m_i \in M$ , logo por  $d_1(mT_{i_1}) = \gamma_{i_1}m$ , temos

$$d_1(\sum_{i=1}^s m_i T_i) = \gamma_1 m_1 + \dots + \gamma_s m_s.$$

Portanto

$$\text{Im } d_1 = \gamma_1 M + \dots + \gamma_s M.$$

Assim, desde que  $K_{-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = 0$ , temos

$$H_0 K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = M/(\gamma_1 M + \dots + \gamma_s M).$$

Cada elemento de  $K_s(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$  tem a forma  $mT_1 T_2 \dots T_s$ . Por (1.9) temos

$$d_s(mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_s}) = \sum_{p=1}^s (-1)^{p-1} \gamma_{i_p} m T_{i_1} \dots \widehat{T}_{i_p} \dots T_{i_s}.$$

Assim,  $d_s(mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_s}) = 0 \Leftrightarrow \gamma_{i_p}m = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Identificamos  $K_s(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M)$  com  $M$ , assim  $mT_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_s}$  se identifica com  $m$ .

Logo

$$\ker d_s = (0 :_M (\gamma_1 R + \dots + \gamma_s R)).$$

Portanto desde que  $K_{s+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = 0$ , temos

$$H_s K(\gamma_1, \dots, \gamma_s|M) = (0 :_M (\gamma_1 R + \dots + \gamma_s R)).$$

Consideramos elementos  $y_1, \dots, y_n$  do anel  $R$ , que denotamos por  $\underline{y}$ .

**Definição 1.25:** Denotamos por  $K(\underline{y})$  o complexo de Koszul de  $\underline{y}$ . Mais geralmente, se  $M$  é um  $R$ -módulo, então  $K(\underline{y}, M)$  é o complexo  $K(\underline{y}) \otimes_R M$  chamado *complexo de Koszul de  $\underline{y}$  com coeficientes em  $M$* , sua diferencial é denotada por  $d_{\underline{y}, M}$ .

**Definição 1.26:** Os elementos  $\gamma_1, \dots, \gamma_s (s \geq 0)$  formam um *sistema de multiplicidade* em  $M$  ( $M$  um  $R$ -módulo) se o  $R$ -módulo  $M/(\gamma_1 M + \dots + \gamma_s M)$  tem comprimento finito. Quando  $s = 0$ , esta condição significa que  $L_R(M)$  é finito.

**Lema 1.27:** ([18], pag. 369) *Seja  $M$  um  $R$ -módulo Noetheriano e  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  um sistema de multiplicidade em  $M$ . Então cada um dos  $R$ -módulos  $H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  tem comprimento finito.*

Seja  $M$  um  $R$ -módulo Noetheriano e  $\gamma_1, \dots, \gamma_s (s \geq 0)$  um sistema de multiplicidade em  $M$ . Pelo lema anterior, cada módulo de homologia  $H_\mu K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)$  tem comprimento finito. Podemos portanto definir a soma

$$\chi_R(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M) = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} L_R\{H_{\mu} K(\gamma_1, \dots, \gamma_s | M)\}.$$

Para  $s = 0$ , temos  $\chi_R(\cdot | M) = L_R(M)$ .

Suponhamos que  $(M, d)$  é um complexo de  $R$ -módulos tal que todos os módulos componentes tem comprimento finito e no máximo um número finito deles são não nulos, então a soma

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} L_R(M_{\mu})$$

está bem definida e é chamada a *característica de Euler-Poincaré* de  $M$ .

## 1.6 Anéis e Módulos Cohen-Macaulay

Consideramos um anel Noetheriano local  $R$ , com ideal maximal  $\mathcal{M}$ . Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado. O conjunto

$$\text{Ann}(M) = \{a \in R : am = 0, \text{ para todo } m \in M\}$$

é um ideal de  $R$ , chamado o *anulador* de  $M$ .

Definimos a *dimensão* de  $M$ ,  $\dim M$ , como a dimensão de Krull do anel  $R/\text{Ann}(M)$ , assim

$$\dim M = \dim\left(\frac{R}{\text{Ann}(M)}\right).$$

Observamos que, se  $\text{Ann}(M) = 0$ , temos  $\dim M = \dim R$ .

Seja  $(R, \mathcal{M})$  um anel Noetheriano local com dimensão  $r$ , ou seja,  $\dim R = r$ . Dizemos que o conjunto  $\{a_1, \dots, a_r\}$  de elementos em  $\mathcal{M}$  é um *sistema de parâmetros* de  $R$ , se eles geram um ideal  $\mathcal{M}$ -primário.

Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado e  $\dim M = s$ . Dizemos que os elementos  $a_1, \dots, a_s \in \mathcal{M}$  formam um *sistema de parâmetros* em  $M$ , se o  $R$ -módulo

$$\frac{M}{(a_1M + \dots + a_sM)}$$

tem comprimento finito.

Notamos que o número de elementos num sistema de parâmetros de  $M$  deve ser igual a dimensão de  $M$ , por definição.

Dizemos que um elemento  $a \in R$  é  *$M$ -regular* se  $am = 0$  para todo  $m \in M$ ,  $m \neq 0$ , implica  $a = 0$ .

**Definição 1.28:** Seja  $(R, \mathcal{M})$  um anel Noetheriano local, e  $I$  um ideal do anel  $R$ . Uma sequência  $a_1, \dots, a_n \in I$  de elementos de  $R$  é chamada  *$M$ -regular* se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a)  $a_1$  é  $M$ -regular,  $a_2$  é  $(M/a_1M)$ -regular, ...,  $a_n$  é  $(M/(a_1, \dots, a_{n-1})M)$ -regular;
- b)  $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$ .

Observamos que se  $I = \mathcal{M}$  na definição anterior, diremos que  $a_1, \dots, a_n$  é uma  *$M$ -sequência* ou  *$M$ -sequência regular*.

Uma sequência  $M$ -regular  $x_1, \dots, x_n$  em  $I$  é *maximal* quando  $x_1, \dots, x_n, x$  não é uma sequência  $M$ -regular, para todo  $x \in I$ .

Suponhamos que  $M \neq 0$  e  $I = \mathcal{M}$ . Qualquer  $M$ -sequência pode ser estendida a uma  $M$ -sequência maximal. De fato, pois caso contrário, seria possível construir uma sequência infinita  $(a_1, a_2, \dots)$  satisfazendo (a) da definição acima e uma cadeia estritamente ascendente de ideais

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3) \subset \dots$$

o que contradiz o fato de  $R$  ser um anel Noetheriano. Além disso, observamos que todas as sequências maximais tem o mesmo número de elementos e toda  $M$ -sequência pode ser estendida a um sistema de parâmetros (ver [20], pag. 61).

**Definição 1.29:** O número de elementos numa  $M$ -sequência maximal de  $M$  é chamada a *profundidade* de  $M$ , e é denotada por  $\text{depth}_R M$ . Um módulo  $M$  é chamado *módulo Cohen-Macaulay* se

$$\dim M = \text{depth} M.$$

Um anel  $R$  é chamado *anel Cohen-Macaulay* se ele é um módulo Cohen-Macaulay quando visto como um módulo sobre si mesmo.

Definimos *profundidade* de  $I$  em  $M$ , como o número de elementos de uma sequência  $M$ -regular maximal contida em  $I$ , e denotaremos por  $\text{depth}(I, M)$ .

**Teorema 1.30:** ([20], pag. 65) *Se  $M$  é um módulo Cohen-Macaulay, todo sistema de parâmetros de  $M$  é uma  $M$ -sequência. Reciprocamente, se um sistema de parâmetros de  $M$  é uma  $M$ -sequência,  $M$  é um módulo Cohen-Macaulay.*

Outro modo de definirmos a profundidade de um módulo  $M$ , vista por exemplo em [15], é através do functor  $\text{Ext}$ , como segue abaixo.

**Teorema 1.31:** ([15], pag. 130) *Seja  $R$  um anel Noetheriano,  $I$  um ideal de  $R$  e  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado tal que  $M \neq IM$ , então o comprimento de uma  $M$ -sequência maximal em  $I$  é um inteiro bem definido  $n$ , e  $n$  é determinado por  $\text{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$ , se  $i < n$  e  $\text{Ext}_R^n(R/I, M) \neq 0$ . Escrevemos  $n = \text{depth}(I, M)$ , e chamamos  $n$  o  $I$ -depth de  $M$ .*

Assim o teorema anterior toma a forma

$$\text{depth}(I, M) = \inf\{i : \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Em particular, para um anel local Noetheriano  $(R, \mathcal{M}, K)$ , onde  $K = R/\mathcal{M}$ , chamamos  $\text{depth}(\mathcal{M}, M)$  simplesmente o  $\text{depth}$  de  $M$ , e escrevemos  $\text{depth}M$  ou  $\text{depth}_R M$ :

$$\text{depth}M = \inf\{i : \text{Ext}_R^i(K, M) \neq 0\}.$$

**Teorema 1.32:** ([15], pag. 131) *Seja  $R$  um anel Noetheriano,  $I = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$  um ideal de  $R$ , e  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado tal que  $M \neq IM$ . Se*

$$q = \sup\{i : H_i(\underline{y}, M) \neq 0\}$$

*então qualquer  $M$ -sequência maximal em  $I$  tem comprimento  $n - q$ ; onde  $\underline{y}$  denota elementos  $y_1, \dots, y_n \in R$  e  $H_i(\underline{y}, M) = H_i K(\underline{y}, M)$ , ou seja, são os módulos de homologia do complexo de Koszul dos elementos  $y_1, \dots, y_n \in R$ , com coeficientes no  $R$ -módulo  $M$ .*

**Observação 1.33:** O teorema anterior afirma que  $\text{depth}(I, M)$  é o número de termos nulos sucessivos, da esquerda para a direita, na sequência

$$H_n(\underline{y}, M), H_{n-1}(\underline{y}, M), \dots, H_0(\underline{y}, M) = M/IM \neq 0.$$

**Corolário 1.34:** ([15], pag. 131) Nas hipóteses do teorema anterior, temos  $y_1, \dots, y_n$  é uma  $M$ -seqüência se, e somente se,  $\text{depth}(I, M) = n$ .

## 1.7 Séries de Hilbert

Seja  $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$  um anel Noetheriano graduado. Depois do Teorema 1.19 segue que  $R_0$  é Noetheriano e  $R$  é finitamente gerado como uma  $R_0$ -álgebra, digamos por  $y_1, \dots, y_s$  e supomos que estes são homogêneos de graus positivos  $l_1, \dots, l_s$ , respectivamente.

Seja  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$  um  $R$ -módulo graduado finitamente gerado, e portanto Noetheriano. Então podemos dizer que  $M$  é gerado por um número finito de elementos homogêneos, tais como  $m_1, \dots, m_j$  homogêneos de graus  $r_1, \dots, r_j$ , respectivamente.

**Definição 1.35:** Definimos a *série de Hilbert* do módulo  $M$  como

$$p_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_R(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$$

onde  $L_R(M_n)$  é o comprimento do submódulo  $M_n$ .

**Teorema 1.36:** ([1], pag. 117)  $p_M(t)$  é uma função racional em  $t$  da forma

$$f(t) / \prod_{i=1}^s (1 - t^{l_i}), \text{ onde } f(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Logo  $p_M(t)$  possui um polo em  $t = 1$ . Denotaremos por  $d(M)$  a ordem deste polo.

Observamos que  $d(R) = \dim R$  (ver [1], pag. 119), no caso em que  $M = R$ .

Supomos agora que  $M_q$  seja um  $\mathcal{C}$ -espaço vetorial, para todo  $q \geq 0$ . Supomos ainda que  $\dim M_q$  é finita, para todo  $q \geq 0$ .

**Definição 1.37:** Definimos a *série de Poincaré* do  $R$ -módulo graduado  $M$  como a série  $p_M(t) = \sum_{q=0}^{\infty} (\dim M_q) \cdot t^q$ .

Observamos que no caso em que  $M_q$  é  $\mathcal{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita, segue que o comprimento é igual a dimensão, pelo Teorema 1.6, portanto a definição de série de Hilbert e série de Poincaré coincidem.



## 1.8 Complexo de Cadeia Celular

Os resultados das próximas duas seções podem ser encontrados em [13].

**Definição 1.38:** Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Um *simplexo*  $k$ -dimensional, ou  $k$ -simplexo, é o fecho convexo  $\sigma$  de  $k + 1$  pontos linearmente independentes  $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . Escrevemos

$$\sigma = v_0 v_1 \dots v_k.$$

Os pontos  $v_i$  são chamados os *vértices* de  $\sigma$ .

Consideramos agora os seguintes conjuntos

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \partial(E^n).$$

Observamos que  $U^n$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $X^*$  um espaço de Hausdorff e  $X$  um subconjunto fechado de  $X^*$  tal que

$$X^* - X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda^n$$

onde a união anterior é uma união disjunta e cada  $e_\lambda^n$  é um subconjunto aberto, homeomorfo a  $U^n$ . Chamaremos  $e_\lambda^n$  *n-célula* ou *n-célula aberta*.

Para cada índice  $\lambda \in \Lambda$ , existe uma aplicação contínua

$$f_\lambda : E^n \longrightarrow \bar{e}_\lambda^n$$

tal que  $f_\lambda$  aplica  $U^n$  homeomorficamente em  $e_\lambda^n$  e  $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X$ . Esta aplicação chamaremos de *aplicação característica*.

**Definição 1.39:** Uma estrutura de *CW-complexo* em um espaço  $X$  (Hausdorff) é uma seqüência ascendente de subespaços fechados em  $X$

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisfaz as seguintes condições:

- a)  $X^0$  tem topologia discreta;
- b) para  $n > 0$ ,  $X^n$  é obtido de  $X^{n-1}$  colando uma coleção de  $n$ -células de modo que sejam satisfeitas as condições vistas anteriormente.

- c)  $X$  é união dos subespaços  $X^i$ , para  $i \geq 0$ ;  
 d) o espaço  $X$  e os subespaços  $X^q$  tem a topologia fraca: Um subconjunto  $A$  é fechado se, e somente se,  $A \cap \bar{e}^n$  é fechado em  $\bar{e}^n$ , para qualquer  $n$ -célula  $e^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Chamaremos  $X^n$  de  $n$ -esqueleto.

## 1.9 Grupos de Homologia Relativa

Seja  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subespaço de  $X$ . Seja  $C_n(X)$  o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto dos  $n$ -simplexos  $e_\lambda^n$  em  $X$ . Seja  $C_n(X, A)$  o grupo quociente  $C_n(X)/C_n(A)$ . A aplicação de bordo

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

é tal que  $\partial(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$ , portanto induz uma aplicação de bordo quociente

$$\partial : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A).$$

Assim temos uma sequência de aplicações de bordo

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots .$$

Observamos que  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ . Portanto temos um complexo de cadeias. Logo, podemos considerar os grupos de homologia  $\ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$  deste complexo, que serão chamados de *grupos de homologia relativa*  $H_n(X, A)$ .

Observamos que os grupos de homologia relativa  $H_n(X, A)$ , para qualquer par  $(X, A)$ , se encaixam em uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0, \quad (1.11)$$

onde  $\iota_n$  é a aplicação inclusão e  $j_n$  a aplicação quociente.

**Teorema 1.40:** [13] *Seja  $X$  um CW-complexo. Então  $H_q(X^n, X^{n-1})$  é zero para  $q \neq n$  e é abeliano livre para  $q = n$ , com base em correspondência um-a-um com as  $n$ -células de  $X$ .*

Com auxílio da sequência exata longa (1.11) dos pares  $(X^{n+1}, X^n)$ ,  $(X^n, X^{n-1})$  e  $(X^{n-1}, X^{n-2})$ , obtemos a seguinte sequência

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \cdots$$

onde  $d_{n+1}$  e  $d_n$  são definidas como as composições  $j_n \partial_{n+1}$  e  $j_{n-1} \partial_n$ . Como a sequência (1.11) é exata, temos que  $\partial_n j_n = 0$ , e então a composição  $d_n d_{n+1} = 0$ .

Portanto a sequência anterior é um complexo de cadeias, chamado *complexo de cadeia celular* de  $X$ .

Desde que  $H_n(X^n, X^{n-1})$  é livre com base em correspondência com as  $n$ -células de  $X$ , podemos pensar os elementos de  $H_n(X^n, X^{n-1})$  como combinações lineares de  $n$ -células de  $X$ .



# Poliedro e Filtração de Newton

Neste capítulo definimos o poliedro de Newton, bem como germes cômodos. Além disso, definimos uma classe importante de funções, que são os germes com parte principal Newton não-degenerada.

Construímos ainda uma filtração no anel dos polinômios, que chamamos filtração de Newton, associada ao poliedro de Newton no infinito. Com auxílio desta filtração construímos o anel graduado associado, o qual é fundamental para a demonstração do teorema principal.

Observamos que neste capítulo definiremos os conceitos para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent, mas no teorema principal nos limitaremos apenas para polinômios cômodos. Convém ressaltar que existe um teorema semelhante para séries formais que foi feito por Spöhr [5] e polinômios de Laurent.

**Definição 2.1:** I. Para  $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]$  definimos o número de Milnor da série formal  $f$  por:

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

II. Para  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  definimos o número de Milnor do polinômio  $f$  por:

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

III. Para  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$  definimos o número de Milnor do polinômio de Laurent  $f$  por:

$$\mu^*(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

**Definição 2.2:** Seja  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$ , onde  $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$  e  $a_n \in \mathbb{C}$ . Definimos o suporte de  $f$  por:

$$\text{supp } f = \{n \in \mathbb{Z}^k : a_n \neq 0\}.$$

Desde que  $\mathbb{N}^k \subset \mathbb{Z}^k$ , esta definição é aplicável para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent.

**Definição 2.3:** Chamamos a série formal (ou polinômio)  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$  *cômodo*, se para qualquer  $i = 1, \dots, k$  o monômio  $x_i^{n_i}$ , onde  $n_i \geq 1$ , aparece em  $f$  com o coeficiente não nulo.

O polinômio de Laurent  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$  é chamado *cômodo*, se o ponto 0 do espaço  $\mathbb{R}^k$  não pertence a nenhum plano das faces de dimensão  $i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) do poliedro que está no fecho convexo do conjunto  $\text{supp } f \setminus \{0\}$  em  $\mathbb{R}^k$ .

Seja  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ . Definimos *poliedro de Newton*,  $\Gamma_+(f)$ , de uma série formal sendo o fecho convexo em  $\mathbb{R}_+^k$  do conjunto  $\cup(n + \mathbb{R}_+^k)$  onde  $n \in \text{supp } f \setminus \{0\}$ .

Definimos a *fronteira de Newton (bordo)* da série  $f$  na origem como a união das faces compactas do poliedro  $\Gamma_+(f)$ , denotada por  $\Gamma(f)$ .

A *parte principal newtoniana* ou simplesmente *parte principal* da série formal  $f$ , na origem, é definida como sendo o polinômio  $f_0 = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n$ . A união de todos os segmentos de origem 0 e extremo sobre  $\Gamma(f)$  é denotada por  $\Gamma_-(f)$ .

Seja  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo. O fecho convexo do conjunto  $\{0\} \cup \text{supp } f$  em  $\mathbb{R}_+^k$  é denotado por  $\tilde{\Gamma}_-(f)$ .  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é chamado *Poliedro de Newton no infinito* de  $f$ .

Definimos a *fronteira de Newton (bordo)* no infinito do polinômio  $f$  como a união das faces fechadas do poliedro  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  que não passam pela origem, e denotamos por  $\tilde{\Gamma}(f)$ .

Definimos a *parte principal newtoniana* ou simplesmente *parte principal* do polinômio  $f$ , no infinito, como o polinômio:  $\tilde{f}_0 = \sum_{n \in \tilde{\Gamma}(f)} a_n x^n$ .

Seja  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$  um polinômio de Laurent cômodo. O fecho convexo em  $\mathbb{R}^k$  do conjunto  $\text{supp } f \setminus \{0\}$  é denotado por  $\Gamma^*(f)$ . Definimos a *fronteira de Newton* do polinômio de Laurent  $f$ , como sendo

$$\Gamma^*(f) = \partial \Gamma^*(f).$$

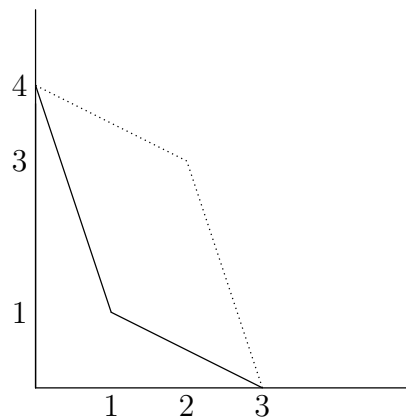
Definimos *parte principal newtoniana* ou simplesmente *parte principal* de  $f$ , como sendo

o polinômio de Laurent

$$f_0^* = \sum_{n \in \Gamma^*(f)} a_n x^n.$$

**Exemplo 2.4:** Seja  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por  $f(x, y) = x^3 + xy + x^2y^3 + y^4$ .

O poliedro de Newton de  $f$ , pensando  $f$  como sendo uma série formal, é dado pela parte ilimitada em  $\mathbb{R}_+^2$ , a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos  $(0, 4)$  a  $(1, 1)$  e  $(1, 1)$  a  $(3, 0)$ . E  $\Gamma_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos mesmos segmentos de reta e estes segmentos de reta formam a fronteira de Newton, como observamos na figura abaixo



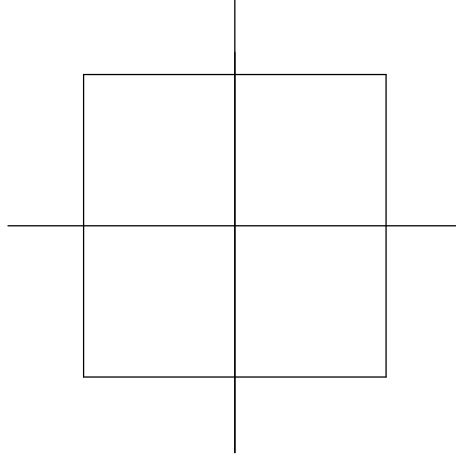
Se pensarmos  $f$  como um polinômio, temos que  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos pontilhados que ligam os pontos  $(0, 4)$  a  $(2, 3)$  e  $(2, 3)$  a  $(3, 0)$ . E estes segmentos pontilhados formam o bordo de Newton do polinômio  $f$ .

**Exemplo 2.5:** Seja  $f \in \mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$  dada por

$$f(x, x^{-1}, y, y^{-1}) = x^2 + x^2y^2 + y^2 + x^{-2} + x^{-2}y^{-2} + y^{-2} + x^{-2}y^2 + x^2y^{-2}.$$

Temos que  $f$  é um polinômio de Laurent cômodo porque o ponto  $0$  do espaço  $\mathbb{R}^2$  não pertence a nenhum plano das faces de dimensão  $0$  e  $1$  e além disso temos que  $\Gamma_-(f)$  é dada pela área em  $\mathbb{R}^2$  limitada pelos segmentos de reta unindo os pontos  $(2, 2)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(-2, -2)$ ,  $(-2, 2)$  e  $(2, 2)$ . E estes segmentos de reta formam a fronteira de Newton do

polinômio de Laurent  $f$ , como podemos ver na figura abaixo:



**Definição 2.6:** Seja  $S$  um poliedro compacto de  $\mathbb{R}_+^k$ . Definimos o *número de Newton*  $\nu(S)$  do poliedro  $S$  pela fórmula

$$\nu(S) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k,$$

onde  $V_k$  é o volume de dimensão  $k$  do poliedro  $S$  e  $V_q$  é a soma dos volumes de dimensão  $q$  das interseções de  $S$  com todos os planos coordenados de dimensão  $q$ , para  $1 \leq q \leq k-1$ .

Observamos que esta definição é válida tanto para séries formais quanto para polinômios.

**Definição 2.7:** Seja  $S$  um poliedro compacto de  $\mathbb{R}^k$ . Definimos

$$\nu^*(S) = k!V_k(S).$$

**Definição 2.8:** Seja  $f$  uma série cômoda, ou um polinômio ou um polinômio de Laurent.

Definimos o *número de Newton* de  $f$  da seguinte maneira:

para  $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ , definimos  $\nu(f) = \nu(\Gamma_-(f))$ ;

para  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ , definimos  $\tilde{\nu}(f) = \nu(\tilde{\Gamma}_-(f))$ ;

para  $f \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ , definimos  $\nu^*(f) = \nu^*(\Gamma_-(f))$ .

**Exemplo 2.9:** Consideramos a série, polinômio e polinômio de Laurent dos exemplos (2.4) e (2.5), ou seja,  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por

$$f(x, y) = x^3 + xy + x^2y^3 + y^4.$$

Então, se pensarmos  $f$  como uma série formal, temos que  $V_2 = \frac{7}{2}$ ,  $V_1 = 3 + 4 = 7$ . Logo,

$$\nu(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 7 + 1 = 1.$$



Se pensarmos  $f$  como um polinômio, temos  $V_2 = \frac{17}{2}$ ,  $V_1 = 3 + 4 = 7$ . Logo,

$$\tilde{\nu}(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 2 \cdot \frac{17}{2} - 7 + 1 = 11.$$

Consideramos  $f \in \mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$  dada por

$$f(x, x^{-1}, y, y^{-1}) = x^2 + x^2y^2 + y^2 + x^{-2} + x^{-2}y^{-2} + y^{-2} + x^{-2}y^2 + x^2y^{-2}$$

como no exemplo (2.5). Então

$$\nu^*(f) = 2!V_2 = 2 \cdot 16 = 32.$$

Introduziremos agora a noção de não-degeneração, para séries formais, polinômios e polinômios de Laurent.

**Definição 2.10:** Sejam  $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$  e  $\Delta$  um subespaço compacto de  $\mathbb{R}^k$ . Definimos

$$g_\Delta = \sum_{n \in (\Delta \cap \mathbb{Z}^k)} a_n x^n.$$

Diremos que a parte principal de uma série (de um polinômio ou de um polinômio de Laurent)  $f$  é *Newton não-degenerada*, se para qualquer face fechada  $\Delta$  da fronteira de Newton os polinômios de Laurent

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

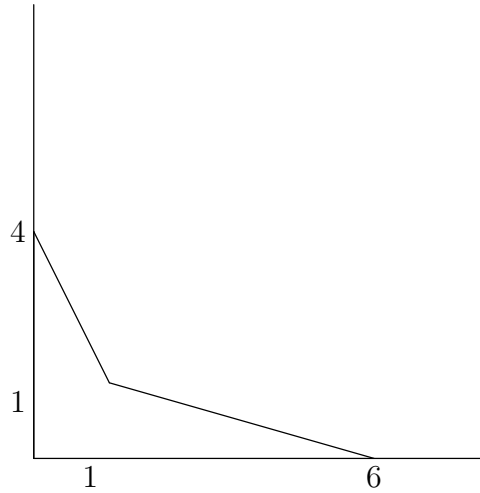
não se anulam simultaneamente sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ .

Se uma série ( polinômio ou polinômio de Laurent) não é Newton não-degenerado, dizemos que a série ( polinômio ou polinômio de Laurent) é *Newton degenerado* ou simplesmente *degenerado*.

**Exemplo 2.11:** Consideramos o polinômio  $f(x, y) = x^6 + xy - 2x^3y^2 + y^4$ .

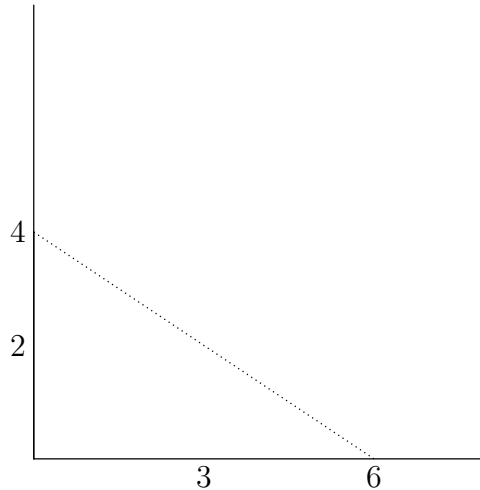
O poliedro de Newton de  $f$ , pensado  $f$  como série formal, é dado pela parte ilimitada em  $\mathbb{R}_+^2$ , a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos  $(0, 4)$  a  $(1, 1)$  e  $(1, 1)$  a  $(6, 0)$ . E  $\Gamma_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos mesmos segmentos de reta e estes segmentos de

reta formam a fronteira de Newton, como observamos na figura abaixo



Notamos que  $f$  é uma série Newton não-degenerada, pois se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_1} = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_1} = 0$ , onde  $\Delta_1$  é a face formada pelos vértices  $(6, 0)$  e  $(1, 1)$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ . E se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_2} = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_2} = 0$ , onde  $\Delta_2$  é a face formada pelos vértices  $(1, 1)$  e  $(0, 4)$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

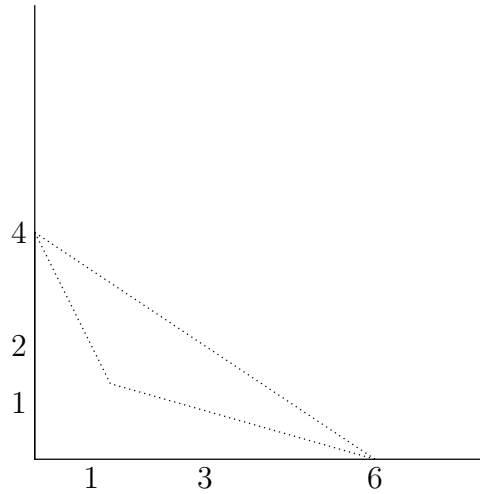
Se pensarmos  $f$  como um polinômio, temos que  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos pontilhados que ligam os pontos  $(0, 4)$  a  $(6, 0)$ . E estes segmentos pontilhados formam o bordo de Newton do polinômio  $f$ , como observamos na figura abaixo



Temos que  $f$  é um polinômio degenerado no infinito, pois na face  $\Delta$  formada pelos vértices  $(0, 4)$  a  $(6, 0)$ , temos  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta} = 6x^3(x^3 - y^2)$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta} = -4y^2(x^3 - y^2)$  tem o polinômio  $x^3 - y^2$  como solução comum.

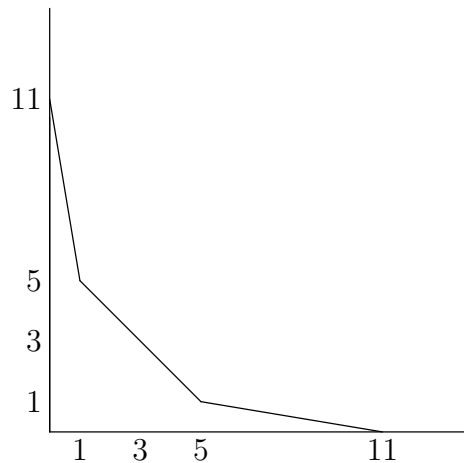
Se pensarmos  $f$  como um polinômio de Laurent, temos que  $\Gamma_*(f)$  é o fecho convexo em  $\mathbb{R}^2$  do conjunto  $\{(6, 0), (0, 4), (1, 1), (3, 2)\}$ . E os segmentos pontilhados formam o bordo

de Newton do polinômio de Laurent  $f$ , como observamos na figura abaixo



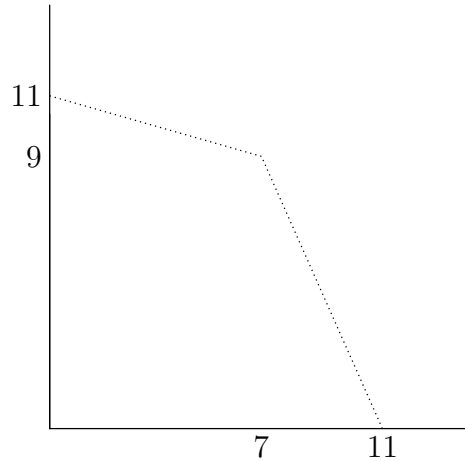
Temos que  $f$  é um polinômio de Laurent cômodo, pois o ponto 0 do espaço  $\mathbb{R}^2$  não pertence a nenhum das faces de dimensão 1 do poliedro  $\Gamma_-^*$ , além disso  $f$  é um polinômio de Laurent degenerado, pois na face  $\Delta_1$  formada pelos vértices  $(0, 4)$  e  $(6, 0)$ , temos  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_\Delta = 6x^3(x^3 - y^2)$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_\Delta = -4y^2(x^3 - y^2)$  tem o polinômio  $x^3 - y^2$  como solução comum.

**Exemplo 2.12:** Consideramos o polinômio  $f(x, y) = x^{11} + x^5y - 2x^3y^3 + x^7y^9 + xy^5 + y^{11}$ . O poliedro de Newton de  $f$ , pensando  $f$  como sendo uma série formal, é dado pela parte ilimitada em  $\mathbb{R}_+^2$ , a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos  $(0, 11)$  a  $(1, 5)$  e  $(1, 5)$  a  $(5, 1)$  e  $(5, 1)$  a  $(11, 0)$ . E  $\Gamma_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos mesmos segmentos de reta e estes segmentos de reta formam a fronteira de Newton, como observamos na figura abaixo



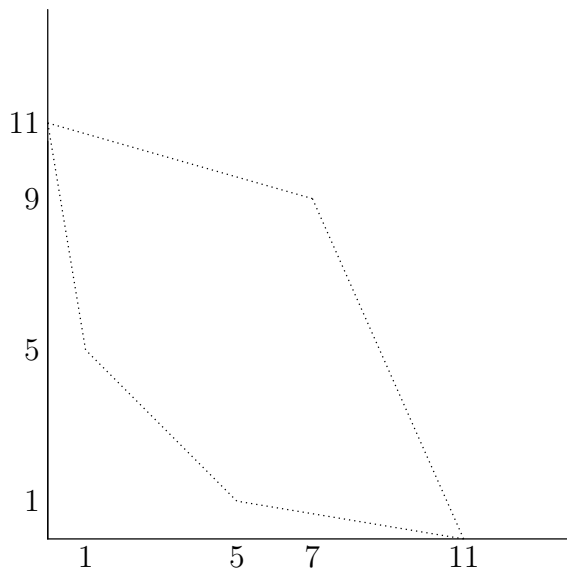
Temos que  $f$  é uma série degenerada na origem, pois na face  $\Delta$  formada pelos vértices  $(5, 1)$ ,  $(1, 5)$ , temos  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_\Delta = xy(x^2 - y^2)(5x^2 - y^2)$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_\Delta = xy(x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2)$  tem o polinômio  $x^2 - y^2$  como solução comum.

Se pensarmos  $f$  como um polinômio, temos que  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos pontilhados que ligam os pontos  $(0, 11)$  a  $(7, 9)$  e  $(7, 9)$  a  $(11, 0)$ . E estes segmentos pontilhados formam o bordo de Newton do polinômio  $f$ , como observamos na figura abaixo



Temos que  $f$  como polinômio é Newton não-degenerada no infinito, pois se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_1} = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_1} = 0$ , onde  $\Delta_1$  é a face formada pelos vértices  $(0, 11)$  e  $(7, 9)$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ . E se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_2} = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_2} = 0$ , onde  $\Delta_2$  é a face formada pelos vértices  $(7, 9)$  e  $(11, 0)$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

Se pensarmos  $f$  como um polinômio de Laurent, temos que  $\Gamma_*(f)$  é o fecho convexo em  $\mathbb{R}^2$  do conjunto  $\{(11, 0), (1, 5), (5, 1), (11, 0), (7, 9)\}$ . E os segmentos pontilhados formam o bordo de Newton do polinômio de Laurent  $f$ , como observamos na figura abaixo



Temos que  $f$  é um polinômio de Laurent cômodo, pois o ponto  $0$  do espaço  $\mathbb{R}^2$  não pertence a nenhum das faces de dimensão 1 do poliedro  $\Gamma_*$ , além disso  $f$  é um polinômio de Laurent degenerado, pois na face  $\Delta$  formada pelos vértices  $(5, 1)$  e  $(1, 5)$ , temos  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta} =$

$xy(x^2 - y^2)(5x^2 - y^2)$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta} = xy(x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2)$  tem o polinômio  $x^2 - y^2$  como solução comum.

## 2.1 Densidade do conjunto das partes principais não-degeneradas

Neste seção mostraremos que o conjunto das partes principais Newton não-degeneradas é aberto e denso, na topologia de Zariski. Portanto, o conjunto das partes principais degeneradas é uma subvariedade algébrica na variedade de todas as partes principais que correspondem a fronteira de Newton dada.

**Observação 2.13:** Consideremos  $\Delta$  um poliedro compacto, convexo, de dimensão  $q$  em  $\mathbb{R}^k$ , cujos vértices pertencem a  $\mathbb{Z}^k$ , para  $q$  entre 0 e  $k - 1$ . Supomos também, que  $\Delta$  não está situado em um subespaço linear de dimensão  $q$ .

Seja  $S$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^k$ . Definimos

$$\mathbb{C}[S] = \{f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^k] : \text{supp } f \subset S\}.$$

**Teorema 2.14:** ([10], pag. 49) (**Teorema de Sard**) *Seja  $f : N \rightarrow P$  uma aplicação suave. O conjunto dos valores regulares de  $f$  é denso em  $P$ .*

**Teorema 2.15:** *Para cada poliedro  $\Delta \subset \mathbb{R}^k$  satisfazendo as hipóteses da observação anterior, existe um subconjunto do espaço  $\mathbb{C}[\Delta]$  aberto e denso na topologia de Zariski, que consiste de todos os polinômios de Laurent  $f \in \mathbb{C}[\Delta]$  tais que os polinômios de Laurent*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

*não se anulam ao mesmo tempo sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ .*

**Demonstração:** Para cada  $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^k]$ , o ideal

$$\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle$$

não depende da escolha da base em  $\mathbb{Z}^k$ .

Escolhendo uma nova base em  $\mathbb{Z}^k$ , pode-se supor que para um certo  $i$  temos:

$$\Delta \subset \{t \in \mathbb{R}^k : t_k = i\}.$$

Substituindo  $x_i$  por  $x_i^d$ ,  $i \leq k - 1$ , para um  $d \in \mathbb{N}$  conveniente, podemos supor que para um  $f \in \mathbb{C}[\Delta]$  temos  $(0, \dots, 0, i) \in \text{supp } f$ .

Então

$$f(x_1, \dots, x_k) = x_k^i g(x_1, \dots, x_{k-1})$$

onde  $g(x_1, \dots, x_{k-1})$  é um polinômio de Laurent nas variáveis  $x_1, \dots, x_{k-1}$ .

Se  $x_k^i g \in \mathbb{C}[\Delta]$ , então para cada  $\alpha \in \mathbb{C}$ , temos  $x_k^i(g - \alpha) \in \mathbb{C}[\Delta]$ . Calculando as derivadas de  $x_k^i(g - \alpha)$ , temos que se

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_k^i (g - \alpha)), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k^i (g - \alpha))$$

se anulam ao mesmo tempo sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , então  $\alpha$  é um valor crítico do polinômio de Laurent  $g(x_1, \dots, x_{k-1})$ . De fato, se as derivadas, vistas anteriormente, se anulam ao mesmo tempo sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , significa que o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_k^i x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ x_k^i x_{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_{k-1}} = 0 \\ i g x_k^i - i \alpha x_k^i = 0 \end{cases}$$

se anula em um ponto  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k) \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , donde temos

$$\begin{cases} \frac{\partial g(\bar{\beta})}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g(\bar{\beta})}{\partial x_{k-1}} = 0 \\ g(\bar{\beta}) - \alpha = 0 \end{cases}$$

onde  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{k-1})$ . Logo  $\alpha$  é um valor crítico de  $g$ .

Mas, pelo Teorema 2.14, o conjunto dos valores regulares de  $g$  é denso. Assim, para cada  $f \in \mathbb{C}[\Delta]$  e para quase todos os  $\alpha \in \mathbb{C}$  os polinômios

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

não podem anular-se ao mesmo tempo sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ . Dado que para cada  $\alpha \in \mathbb{C}$  e cada  $f \in \mathbb{C}[\Delta]$ , temos que  $f - \alpha x_k^i \in \mathbb{C}[\Delta]$  e temos que o conjunto de polinômios da forma  $f - \alpha x_k^i$  satisfaz a propriedade de que as séries

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

não se anulam simultaneamente sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , para quase todos os  $\alpha$  e todos  $f$  e portanto é denso. Além disso este conjunto é aberto uma vez que seu complementar é o conjunto de zeros dos polinômios

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i).$$

Portanto,  $\{f - \alpha x_k^i\}$  com a propriedade de

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

não se anulam simultaneamente sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$  é um conjunto aberto e denso, na topologia de Zariski. ■

Observamos que desta forma o conjunto das partes principais degeneradas é uma subvariedade algébrica própria na variedade de todas as partes principais que correspondem a fronteira de Newton dada.

## 2.2 A Filtração de Newton

Nesta seção introduzimos a filtração de Newton associada a um poliedro de Newton no infinito.

**Definição 2.16:** ( ver [3] ) Um conjunto  $\tilde{\Gamma}_- \subset \mathbb{R}_+^k$  é chamado *Poliedro de Newton no infinito*, se existe algum subconjunto finito  $B \subseteq \mathbb{Z}_+^k$  tal que  $\tilde{\Gamma}_-$  é o fecho convexo em  $\mathbb{R}^k$  de  $B \cup \{0\}$ .

Denotamos por  $\tilde{\Gamma}$  a união das faces fechadas do poliedro  $\tilde{\Gamma}_-$  que não passam pelo origem e é chamado fronteira de Newton.

**Definição 2.17:** Seja  $\tilde{\Gamma}_- \subseteq \mathbb{R}_+^k$  um poliedro de Newton no infinito, dado um vetor  $v \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$ , definimos

$$l(v) = \max\{\langle n, v \rangle : n \in \tilde{\Gamma}_-\}.$$

Uma *face* de  $\tilde{\Gamma}_-$  é um subconjunto da forma

$$\Delta(v) = \{n \in \tilde{\Gamma}_- : \langle n, v \rangle = l(v), \text{ para algum } v \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}\}.$$

**Definição 2.18:** Diremos que um vetor  $v \in \mathbb{Z}_+^k \setminus \{0\}$  é *primitivo* quando  $v$  é o vetor de menor comprimento entre os vetores do conjunto  $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}_+\} \cap \{\mathbb{Z}_+^k \setminus \{0\}\}$ .

Consideramos  $\Delta$  um poliedro compacto, convexo, de dimensão  $q$  em  $\mathbb{R}^k$ , cujos vértices pertencem à  $\mathbb{Z}^k$ , para  $q$  entre 0 e  $k-1$ . Supomos que  $\Delta$  não está situado em um subespaço linear de dimensão  $q$ . Definimos  $C(\Delta)$  como sendo o cone convexo de vértice 0 e de base  $\Delta$ , isto é, a reunião de todas as semi-retas de  $\mathbb{R}^k$  de origem 0 que passam por  $\Delta$ .

Diremos que uma face  $\Delta(v)$  tem dimensão  $d$ ,  $0 \leq d \leq k-1$ , quando o menor subespaço afim que contém  $\Delta(v)$  tem dimensão  $d$ . Para cada poliedro de Newton  $\tilde{\Gamma}_-$  no infinito,

definimos

$$K(\tilde{\Gamma}) = \max\{\dim C(\Delta) : \Delta \text{ é uma face fechada de } \tilde{\Gamma}\}.$$

Supomos que  $\tilde{\Gamma}_- \subseteq \mathbb{R}_+^k$  é um poliedro de Newton no infinito com vértices em  $\mathbb{Z}_+^k$  e tal que  $K(\tilde{\Gamma}) = k$ . Observamos que para cada face de dimensão máxima existe um único vetor primitivo  $v$  tal que  $\Delta = \Delta(v)$ .

Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_r$  os vetores primitivos correspondentes às faces de dimensão  $k-1$  de  $\tilde{\Gamma}$ , tais que  $l(v_j) \neq 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, r$ . Seja  $M$  o mínimo múltiplo comum entre  $l(v_1), l(v_2), \dots, l(v_r)$ , ou qualquer outro múltiplo destes números. Para cada  $j = 1, 2, \dots, r$  consideramos a aplicação linear

$$\phi_{\Delta(v_j)} : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\phi_{\Delta(v_j)}(n) = -\frac{M}{l(v_j)} \langle n, v_j \rangle .$$

Definimos assim a aplicação filtrante associada a  $\tilde{\Gamma}_-$  como a aplicação

$$\phi : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\phi(n) = \min\{\phi_{\Delta(v_j)}(n); j = 1, 2, \dots, r\}.$$

Por definição temos que  $\phi(a) \leq 0$  para todo  $a \in \mathbb{R}_+^k$  e observamos que

$$\phi|_{C(\Delta(v_j))}(n) = \phi_{\Delta(v_j)}(n)$$

para todo  $n \in C(\Delta(v_j))$ , e para  $j = 1, \dots, r$ , ou seja, a aplicação  $\phi$  é linear sobre cada cone  $C(\Delta(v_j))$ .

A aplicação  $\phi$  é tal que

$$\phi(a+b) \geq \phi(a) + \phi(b)$$

para todo  $a, b \in \mathbb{R}_+^k$  e cumpre a igualdade se, e somente se, existe uma face  $\Delta \subseteq \tilde{\Gamma}$  de dimensão máxima tal que  $a, b \in C(\Delta)$ .

Além disso,  $\phi(\mathbb{Z}_+^k) \subseteq \mathbb{Z}_-$  e o valor de  $\phi$  sobre cada ponto de  $\tilde{\Gamma}$  é igual a  $-M$ .

Afirmamos que toda função

$$\phi' : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $\phi'$  é linear sobre cada cone  $C(\Delta(v_j))$  e  $\phi'$  é constante sobre  $\tilde{\Gamma}$  é um múltiplo de  $\phi$ .

De fato queremos mostrar que  $\phi' = \lambda \cdot \phi$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como  $\phi'$  e  $\phi$  são constantes sobre  $\tilde{\Gamma}$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi' = \lambda \cdot \phi$  em  $\tilde{\Gamma}$ .



Agora dado  $n \in \mathbb{R}_+^k$ , então  $n \in C(\Delta(v_j))$  para alguma face  $\Delta(v_j)$ . Logo  $n = \mu \cdot m$ , onde  $m \in \Delta(v_j)$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ , e assim temos

$$\phi(n) = \phi_{C(\Delta(v_j))}(n) = \mu \cdot \phi_{\Delta(v_j)}(m) = \mu \cdot L = \lambda(\mu N) = \lambda(\mu \phi'_{C(\Delta(v_j))}(m)) = \lambda \phi'(n),$$

para todo  $n$  pertencendo a  $\mathbb{R}_+^k$ , onde  $L = \phi'_{\Delta(v_j)}(\tilde{\Gamma})$  e  $N = \phi_{\Delta(v_j)}(\tilde{\Gamma})$ .

**Definição 2.19:** Chamamos *filtração de Newton* induzida por  $\tilde{\Gamma}_-$  a aplicação

$$d : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

dada por

$$d(h) = \min\{\phi(n) : n \in \text{supp}(h)\},$$

quando  $h \neq 0$  e  $d(0) = +\infty$ .

Chamamos também ao número  $d(h)$  como o grau (ou nível) de  $h$  com respeito a  $\tilde{\Gamma}_-$ .

**Observação 2.20:** Temos que  $d$  satisfaz o seguinte

- 1)  $d(1) = 0$ ,  $d(0) = +\infty$
- 2)  $d(f + g) \geq \min\{d(f), d(g)\}$
- 3)  $d(f \cdot g) \geq d(f) + d(g)$

A partir desta função construímos os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$

$$\mathcal{A}_q = \{g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] : d(g) \geq q\} = \{g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] : \phi(\text{supp}(g)) \subseteq [q, +\infty)\} \cup \{0\},$$

para todo  $q \in \mathbb{Z}$

Pelas observações (2) e (3) temos o seguinte

- a)  $\mathcal{A}_q$  são subgrupos aditivos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$
- b)  $\mathcal{A}_q \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}_{q+p}$  para todo  $p, q \in \mathbb{Z}$
- c) Pela definição da função filtrante  $d$  temos  $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C}$  e  $\mathcal{A}_q = \{0\}$  para todo  $q \geq 1$

A partir desta função podemos considerar anel graduado

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{q \leq 0} \left( \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \right) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathbf{A}_q$$

onde  $\mathbf{A}_q = \mathcal{A}_{-q} / \mathcal{A}_{-q+1}$  para todo  $q \geq 0$

Como  $\mathcal{A}_q$  é um grupo aditivo e  $\mathcal{A}_{q+1} \subseteq \mathcal{A}_q$ , para todo  $q \leq 0$ , podemos considerar o quociente  $\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ , que é um subgrupo aditivo induzido pela operação de soma do grupo  $\mathcal{A}_q$ . Assim  $\mathbf{A} = \bigoplus_{q \leq 0} \left( \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \right)$  tem estrutura de grupo aditivo. Logo, resta definirmos uma

multiplicação em  $\mathbf{A}$ . Definimos  $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$ . Observamos que esta operação está bem definida e assim  $\mathbf{A} = \bigoplus_{q \leq 0} \left( \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \right)$  é um anel

Outro anel associado à filtração é o *anel de Rees*. Consideramos o anel graduado

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{q \leq 0} \left( \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \right) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathbf{A}_q,$$

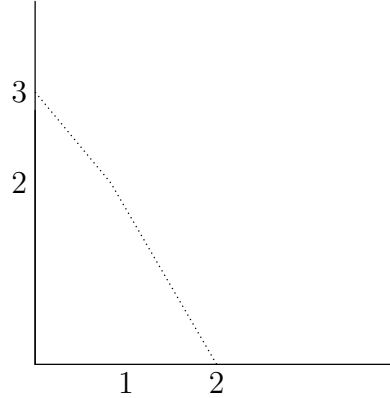
e qualquer  $f \in \mathbf{A}$ , com  $f = \sum_{q \geq 0} \bar{f}_q$ ; onde  $\bar{f}_q \in \mathbf{A}_q = \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ ; para  $q \geq 0$ .  $\bar{f}_q$  é um elemento homogêneo de grau  $q$ . Fazendo

$$\tilde{f} = \sum_{q \leq 0} \bar{f}_q \cdot t^q,$$

temos o anel de Rees

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(d) = \bigoplus_{q \leq 0} \left( \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \right) \cdot t^q \subseteq \mathbf{A}[t].$$

**Exemplo 2.21:** Em  $\mathbb{C}[[x, y]]$  consideramos  $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2y^3$ . Então,  $\text{supp } f = \{(2, 0), (1, 2), (0, 3)\}$ . Logo temos duas faces fechadas de dimensão 1,  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  com vértices em  $\{(2, 0), (1, 2)\}$ ,  $\{(1, 2), (0, 3)\}$ , respectivamente. Temos que  $v_1 = (2, 1)$  e  $v_2 = (1, 1)$  são os vetores primitivos



com respeito a  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , respectivamente, e temos também que  $l(v_1) = 4$  e  $l(v_2) = 3$ . Assim,  $M = \text{mmc}\{l(v_1), l(v_2)\} = 12$ , então

$$\phi(n) = \min\left\{-\left(\frac{12}{4}\right) \langle n, v_1 \rangle, -\left(\frac{12}{3}\right) \langle n, v_2 \rangle\right\}.$$

Vamos construir os subgrupos aditivos  $\mathcal{A}_q$ , para todo  $q \leq 0$ . Segue-se que  $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{A}_{-1} = \mathcal{A}_{-2} = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{A}_{-3} = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{A}_{-4} = \langle y \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-5} = \langle y \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-6} = \langle x, y \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-7} = \langle x, y \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-8} = \langle x, y, y^2 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-9} = \langle x, y, xy, y^2 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-10} = \langle x, y, xy, y^2 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-11} = \langle x, y, xy, y^2 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-12} = \mathcal{A}_{-13} = \langle x, x^2, y, xy, xy^2, y^2, y^3 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-14} = \langle x, x^2, y, xy, xy^2, y^2, y^3 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-15} = \langle x, x^2, y, xy, x^2y, xy^2, y^2, y^3 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-16} = \mathcal{A}_{-17} = \langle x, x^2, y, xy, x^2y, xy^2, xy^3, y^2, y^3, y^4 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-18} = \mathcal{A}_{-19} = \langle x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2, xy^3, y^2, y^3, y^4 \rangle$ ,  $\mathcal{A}_{-20} = \langle x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2, xy^3, y^2, y^3, y^4, y^5 \rangle$ .

$$\mathcal{A}_{-21} = \langle x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y, xy^2, x^2y^2, x^2y^3, xy^3, y^2, y^3, y^4, y^5 \rangle.$$

Assim, obtemos os seguintes subespaços vetoriais:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1 &= \mathbb{C}, & \mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0 &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-2}/\mathcal{A}_{-1} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-3}/\mathcal{A}_{-2} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-4}/\mathcal{A}_{-3} &= \langle y \rangle, \\ \mathcal{A}_{-5}/\mathcal{A}_{-4} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-6}/\mathcal{A}_{-5} &= \langle x \rangle, & \mathcal{A}_{-7}/\mathcal{A}_{-6} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-8}/\mathcal{A}_{-7} &= \langle y^2 \rangle, & \mathcal{A}_{-9}/\mathcal{A}_{-8} &= \langle xy \rangle, \\ \mathcal{A}_{-10}/\mathcal{A}_{-9} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-11}/\mathcal{A}_{-10} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-12}/\mathcal{A}_{-11} &= \langle x^2, xy^2, y^3 \rangle, & \mathcal{A}_{-13}/\mathcal{A}_{-12} &= \langle 0 \rangle, \\ \mathcal{A}_{-14}/\mathcal{A}_{-13} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-15}/\mathcal{A}_{-14} &= \langle x^2y \rangle, & \mathcal{A}_{-16}/\mathcal{A}_{-15} &= \langle xy^3, y^4 \rangle, & \mathcal{A}_{-17}/\mathcal{A}_{-16} &= \langle 0 \rangle, \\ \mathcal{A}_{-18}/\mathcal{A}_{-17} &= \langle x^3, x^2y^2 \rangle, & \mathcal{A}_{-19}/\mathcal{A}_{-18} &= \langle 0 \rangle, & \mathcal{A}_{-20}/\mathcal{A}_{-19} &= \langle y^5 \rangle, & \mathcal{A}_{-21}/\mathcal{A}_{-20} &= \langle x^3y, x^2y^3 \rangle, \dots \end{aligned}$$

Portanto o anel graduado associado a filtração é dado por

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle y \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle x \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle y^2 \rangle \oplus \langle xy \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \langle x^2, xy^2, y^3 \rangle \oplus \dots$$



---

# Os Números de Milnor e o Número de Newton de Polinômios

---

Neste capítulo começamos apresentando o seguinte teorema,

**Teorema 3.1:** *i) O número de Milnor de uma série formal  $f$  é maior ou igual ao número de Newton, ou seja,*

$$\mu(f) \geq \nu(f)$$

*e  $\mu(f) = \infty$  se  $\nu(f) = \infty$ .*

*ii) Se a parte principal  $f_0$  da série  $f$  é Newton não-degenerada então  $\mu(f) = \nu(f)$ .*

Como um polinômio  $f$  pode ser considerado como uma série formal então podemos calcular a soma dos números de milnor dos pontos singulares isolados de  $f$  e esta soma é denotado por  $\tilde{\mu}(f)$ . Nosso objetivo é demonstrar um teorema que relaciona o número  $\tilde{\mu}(f)$  com o número de Newton, antes de afirmar o teorema principal esclareceremos o significado geométrico do número  $\tilde{\mu}$ .

**Teorema 3.2:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  então,  $\tilde{\mu}(f) < \infty$  se, e somente se o número de pontos singulares de  $f$  em  $\mathbb{C}^k$  é finito e neste caso  $\tilde{\mu}(f)$  é igual à soma dos números de Milnor dos pontos singulares de  $f$  em  $\mathbb{C}^k$ .*

Pelo teorema anterior o principal objetivo do nosso trabalho é fornecer uma relação entre a soma dos números de Milnor dos pontos singulares isolados de um polinômio cômico e o número de Newton. Esta relação é dada no seguinte resultado:

**Teorema 3.3:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo. Então*

*i) A soma dos números de Milnor de seus pontos singulares isolados de  $f$  é inferior ou igual a  $\tilde{\nu}(f)$  em particular se  $\tilde{\mu}(f) < +\infty$  então*

$$\tilde{\mu}(f) \leq \tilde{\nu}(f),$$

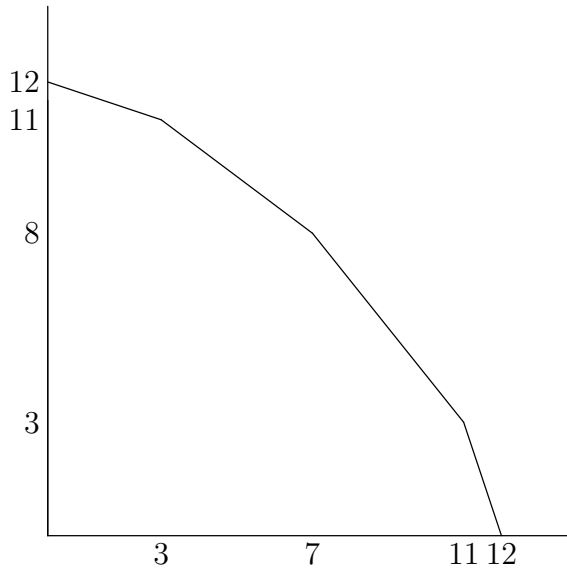
*ii) Se a parte principal newtoniana do polinômio é não-degenerada no infinito (no sentido de 2.10) então*

$$\tilde{\mu}(f) = \tilde{\nu}(f).$$

Esta relação entre o número de Milnor e o número de Newton, dada por Kouchnirenko em Polyèdres de Newton et nombres de Milnor [12], é muito relevante, uma vez que o número de Newton é fácil de ser calculado em dimensões "pequenas", e depende somente do poliedro de Newton do polinômio  $f$ , enquanto que número de Milnor em geral é muito difícil de ser calculado, como observamos no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.4:** Consideramos  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por

$$f(x, y) = x^{12} + x^{11}y^3 + x^7y^8 + x^3y^{11} + y^{12}.$$



Notamos que  $f$  é um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Assim pelo ítem (ii) do teorema anterior, segue que

$$\tilde{\mu}(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1 = 2.96 - 1.24 + 1 = 169,$$

enquanto que o cálculo da soma dos números de Milnor de pontos singulares isolados pela definição, significa calcular a seguinte dimensão

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle 12x^{11} + 11x^{10}y^3 + 7x^6y^8 + 3x^2y^{11}, 3x^{11}y^2 + 8x^7y^7 + 11x^3y^{10} + 12y^{11} \rangle},$$

que não é fácil determinar.

Agora enunciamos os principais resultados necessários para a demonstração do Teorema 3.3 e damos uma idéia geral da demonstração deste resultado. Observamos que a demonstração detalhada do teorema será dada no Capítulo 4.

**Teorema 3.5:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle} = k!V_k$$

onde  $V_k$  é o volume de dimensão  $k$  do poliedro  $\tilde{\Gamma}_-(f)$ .

A demonstração deste teorema é bastante trabalhosa e será apresentada no próximo capítulo.

A seguir enunciaremos e demonstraremos alguns lemas que são essenciais:

**Lema 3.6:** *Se  $g', g'', g_2, \dots, g_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  e  $g_1 = g' \cdot g''$  então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g'', g_2, \dots, g_k \rangle}.$$

**Demonstração:** Observamos primeiramente que no caso de dimensão infinita, vale o resultado.

Assim podemos supor que todas os espaços vetoriais anteriores possuem dimensão finita.

Seja

$$\overline{\mathcal{O}} = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g_2, \dots, g_k \rangle}.$$

Então

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g'g'', g_2, \dots, g_k \rangle} \cong \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/\langle g_2, \dots, g_k \rangle}{\langle g'g'', g_2, \dots, g_k \rangle/\langle g_2, \dots, g_k \rangle} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\langle \overline{g'g''} \rangle}$$

onde  $\overline{g'g''} = g'g'' + \langle g_2, \dots, g_k \rangle$ . Da mesma forma

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle} \cong \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/\langle g_2, \dots, g_k \rangle}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle/\langle g_2, \dots, g_k \rangle} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\langle \overline{g'} \rangle}$$

e

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g'', g_2, \dots, g_k \rangle} \cong \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/\langle g_2, \dots, g_k \rangle}{\langle g'', g_2, \dots, g_k \rangle/\langle g_2, \dots, g_k \rangle} = \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\langle \overline{g''} \rangle}$$

onde  $\overline{g'} = g' + \langle g_2, \dots, g_k \rangle$  e  $\overline{g''} = g'' + \langle g_2, \dots, g_k \rangle$ . Consideramos agora a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \langle \overline{g'} \rangle / \langle \overline{g'g''} \rangle \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{O}} / \langle \overline{g'g''} \rangle \xrightarrow{j} \overline{\mathcal{O}} / \langle \overline{g'} \rangle \longrightarrow 0$$

onde  $\iota$  é a aplicação inclusão, e  $j$  é a aplicação que associa a cada classe  $x + \langle \overline{g'g''} \rangle$ , a classe  $x + \langle \overline{g'} \rangle$ , que está bem definida pois o ideal  $\langle \overline{g'g''} \rangle$  está contido em  $\langle \overline{g'} \rangle$ .

Assim, resta mostrar que  $\langle \overline{g'} \rangle / \langle \overline{g'g''} \rangle \cong \overline{\mathcal{O}} / \langle \overline{g''} \rangle$ . Consideramos o homomorfismo  $\psi : \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \langle \overline{g'} \rangle$  dado por  $\psi(\eta) = \eta \overline{g'}$ , e consideramos o homomorfismo sobrejetor  $\pi : \langle \overline{g'} \rangle \rightarrow \langle \overline{g'} \rangle / \langle \overline{g'g''} \rangle$ . Seja  $\varphi : \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \langle \overline{g'} \rangle / \langle \overline{g'g''} \rangle$ , a aplicação composta  $\pi \circ \psi$ . Observamos que  $\langle \overline{g''} \rangle \subset \ker \varphi$ , assim  $\varphi$  induz uma aplicação

$$\phi : \overline{\mathcal{O}} / \langle \overline{g''} \rangle \rightarrow \langle \overline{g'} \rangle / \langle \overline{g'g''} \rangle$$

da seguinte maneira  $\phi(\overline{\xi}) = \varphi(\xi)$ , que está bem definida pois  $\langle \overline{g''} \rangle \subset \ker \varphi$ , e é um homomorfismo sobrejetor. Além disso,  $\phi$  é injetor, pois se  $\phi(\overline{\xi}) = 0$ , então  $\xi \overline{g'} \in \langle \overline{g'g''} \rangle$ . Logo  $\xi \overline{g'} = m \overline{g'g''}$ . Se  $\overline{g'}$  for não-divisor do zero em  $\overline{\mathcal{O}}$ , então segue que  $\xi \in \langle \overline{g''} \rangle$ . Assim  $\overline{\xi} = 0$ . Portanto  $\phi$  é um isomorfismo.

Observamos que  $\overline{g'}$  é não-divisor do zero em  $\overline{\mathcal{O}}$ , pois a sequência  $g', g_2, \dots, g_k$  é uma sequência regular. De fato, como  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle}$  é finita, então pelo Teorema 1.6,  $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle g', g_2, \dots, g_k \rangle}$  tem comprimento finito, logo por definição  $g', g_2, \dots, g_k$  é um sistema de parâmetros e como  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  é um anel Cohen-Macaulay, temos pelo Teorema 1.30, que  $g', g_2, \dots, g_k$  é uma sequência regular. ■

Seja  $I$  um subconjunto próprio de  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Por  $|I|$  entenderemos o número de elementos em  $I$ . Consideremos o seguinte conjunto

$$\mathbb{R}_{+I} = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k : \text{para qualquer } \alpha \in I, t_\alpha = 0\}$$

e  $\mathbb{N}_I = \mathbb{N}^k \cap \mathbb{R}_{+I}$ . Dado  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$ , seja  $f_I = \sum_{n \in \mathbb{N}_I} a_n x^n$  que é um polinômio de  $k - |I|$  variáveis.

Denotemos o número  $\tilde{\mu}$  do polinômio  $f_I$  por  $\tilde{\mu}_I$ , Caso  $I = \emptyset$ , escrevemos  $\tilde{\mu}_\emptyset = \tilde{\mu}(f)$ , e caso  $I = \{1, 2, \dots, k\}$ , escrevemos  $\tilde{\mu}_{\{1, \dots, k\}} = 1$

**Lema 3.7:** *O número*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] / \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle$$

é igual a uma soma de  $2^k$  termos, a saber  $\sum_{I \in 2^{\{1, \dots, k\}}} \tilde{\mu}_I$ , onde  $2^{\{1, \dots, k\}}$  significa todos os subconjuntos das partes de  $\{1, \dots, k\}$ .

**Demonstração:** Queremos mostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] / \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle = \sum_{I \in 2^{\{1, \dots, k\}}} \tilde{\mu}_I, \quad (3.1)$$



onde  $2^{\{1, \dots, k\}}$  significa todos os subconjuntos das partes de  $\{1, \dots, k\}$ , que são  $2^k$  subconjuntos.

Para mostrar 3.1 vamos usar o princípio de indução em  $k$  (observamos que  $k$  também é a quantidade de termos da forma  $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  além de ser o número de variáveis, de forma que a indução será feita na quantidade de termos da forma  $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ). Para  $k = 1$  temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$$

onde  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \rangle} = \tilde{\mu}_{\{1\}}$  e  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle} = \tilde{\mu}(f) = \tilde{\mu}_{\emptyset}$ , e assim  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x} \rangle}$  se escreve como uma soma de dois elementos.

Observamos que para  $k = 2$  temos:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x, y \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle}$$

onde  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \tilde{\mu}(f) = \tilde{\mu}_{\emptyset}$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]/\langle y \rangle}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, y \rangle/\langle y \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle \frac{\partial f_{\{2\}}}{\partial x} \rangle} = \tilde{\mu}(f_{\{2\}}) = \tilde{\mu}_{\{2\}}$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]/\langle x \rangle}{\langle x, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle/\langle x \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[y]}{\langle \frac{\partial f_{\{1\}}}{\partial y} \rangle} = \tilde{\mu}(f_{\{1\}}) = \tilde{\mu}_{\{1\}}$  e  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x, y \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 = \tilde{\mu}_{\{1, 2\}}$ .

Portanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \tilde{\mu}_{\emptyset} + \tilde{\mu}_{\{2\}} + \tilde{\mu}_{\{1\}} + \tilde{\mu}_{\{1, 2\}} = \sum_{I \in 2^{\{1, 2\}}} \tilde{\mu}_I.$$

Suponhamos por hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para  $k - 1$ , e mostraremos que a afirmação é verdadeira para  $k$ . Agora

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, x_k \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

onde  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, x_k \rangle}$ , por hipótese de indução, é uma soma de  $2^{\{k-1\}}$  termos e da mesma forma  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$ , por hipótese de indução, é uma soma de  $2^{\{k-1\}}$  termos. Assim  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$  é uma soma de  $2^{\{k-1\}} + 2^{\{k-1\}} = 2^{\{k\}}$  termos. Portanto, vale (3.1).

**Lema 3.8:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo, com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Seja  $I$  um subconjunto próprio do conjunto  $\{1, \dots, k\}$ . Então:*

a) *O polinômio  $f_I$  é um polinômio cômodo, com parte principal Newton não-degenerada no infinito;*

b)  $\tilde{\Gamma}_-(f_I) = \tilde{\Gamma}_-(f) \cap \mathbb{R}_{+I}$ .

A demonstração do lema anterior segue imediatamente do fato de  $f_I$  ser o polinômio  $f$  visto com  $k - |I|$  variáveis e deste modo herda as propriedades de  $f$ .

A seguir esboçamos em linhas gerais o ítem (ii) do Teorema (3.3), para polinômios cômodos, com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Com auxílio do Lema (3.7), conseguimos escrever

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \rangle}$$

como uma soma de  $2^k$  termos, onde os termos desta soma são os números de  $\tilde{\mu}$  da função  $f_I$

Por outro lado, pensando  $f$  como uma função de menos variáveis, digamos  $k - |I|$ , onde  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ , pelo Teorema 3.5

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f_I}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \rangle} = (k - |I|)! V_{k-|I|}^I.$$

onde  $V_{k-|I|}^I$  é o volume de dimensão  $k - |I|$  de  $\tilde{\Gamma}_-(f_I)$ . Fazendo somas alternadas destes valores, para todo subconjunto  $I$  de  $\{1, \dots, k\}$ , obtemos

$$k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k,$$

onde

$$V_{k-i} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=i}} V_{k-i}^I,$$

para  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Com isto, conseguimos mostrar que  $\tilde{\mu}(f) = \tilde{\nu}(f)$ .

Para obter a parte (i) do teorema (3.3) usaremos o teorema (2.15). Com o auxílio deste teorema e da semicontinuidade inferior do número  $\tilde{\mu}$ , vamos dar uma idéia da demonstração do ítem (i) do Teorema (3.3). Dado um polinômio cômodo  $f$ , considerando a densidade dos polinômios Newton não-degeneradas conseguimos uma família de polinômios cômodos Newton não-degeneradas a um parâmetro, com a mesma fronteira de Newton, convergindo para  $f$ . Pelo que já provamos cada polinômio desta família é tal que seu número  $\tilde{\mu}$  coincide com o número de Newton. Agora usando a semicontinuidade inferior do número  $\tilde{\mu}$ , temos

$$\tilde{\mu}(f) \leq \tilde{\nu}(f).$$

# Codimensão do ideal $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$ e Demonstração do Teorema Principal

Neste capítulo demonstramos o Teorema 3.5, ou seja, demonstramos que dado um polinômio cômodo, com parte principal Newton não-degenerada no infinito, então

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle = k!V_k$$

onde  $f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , para  $i = 1, \dots, k$ , e  $V_k$  é o volume de dimensão  $k$  de  $\tilde{\Gamma}_-(f)$ .

Para demonstrar este teorema precisamos dos seguintes resultados que serão demonstrados neste capítulo.

**Teorema 4.1:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Então a codimensão do ideal gerado, no anel graduado associado*

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{q \leq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}),$$

*pelos formas iniciais dos polinômios*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

*é igual a  $k!V_k$ . Em outras palavras, temos*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = k!V_k$$

*onde  $F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{-M+1}$ , para  $i = 1, \dots, k$  e  $-M$  é o valor da aplicação  $\phi$  (que define a filtração  $d$ ) sobre cada ponto de  $\tilde{\Gamma}$ .*

**Teorema 4.2:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo, com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Então a codimensão do ideal gerado por  $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  em  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ , é igual a codimensão do ideal gerado pelas formas iniciais de  $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  no anel graduado associado  $\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ . Em outras palavras, temos*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle.$$

Assim pelos Teoremas 4.1 e 4.2, temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] / \langle f_1, \dots, f_k \rangle = k! V_k,$$

o que demonstra o Teorema 3.5.

Começamos demonstrando o Teorema 4.1. Para demonstrar este resultado fazemos um estudo do anel graduado associado.

Claramente  $f \in \mathcal{A}_{-M} \setminus \mathcal{A}_{-M+1}$ . A classe de  $f$  em  $\mathcal{A}_{-M} / \mathcal{A}_{-M+1}$  depende somente da parte principal  $f_0$  do polinômio  $f$  no infinito.

As derivadas do polinômio  $f$  não pertencem a  $\mathcal{A}_{-M}$ , mas os polinômios  $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  pertencem a  $\mathcal{A}_{-M}$  e sua forma inicial, ou seja, a classe  $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  no quociente  $\mathcal{A}_{-M} / \mathcal{A}_{-M+1}$ , depende somente de  $f_0$ . Estas observações seguem da construção da filtração de Newton.

Denotamos a classe em  $\mathbf{A}$  da forma inicial do monômio  $x^n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  por  $\delta_n$ , ou seja,

$$\delta_n = x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \in \mathcal{A}_{\phi(n)} / \mathcal{A}_{\phi(n)+1} = \mathbf{A}_{-\phi(n)},$$

e o elemento  $\delta_n$  no anel  $\mathbf{A}$  será chamado *monômio* de  $\mathbf{A}$ . Considerado como espaço vetorial, temos que a  $\mathbb{C}$ -álgebra  $\mathbf{A}$  é isomorfa ao anel dos polinômios em  $k$  indeterminadas, uma vez que  $\mathbf{A}$  é gerado por monômios (ver [20], pag. 15). Assim para descrevermos a multiplicação em  $\mathbf{A}$  é suficiente definir o produto de monômios.

No Capítulo 2, definimos o polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada. Daremos agora uma formulação equivalente à esta definição. Para fornecer esta condição equivalente, consideramos  $\Delta$  um poliedro compacto, convexo, de dimensão  $q$  em  $\mathbb{R}^k$ , cujos vértices pertencem à  $\mathbb{Z}^k$ , para  $q$  entre 0 e  $k - 1$ . Supomos que  $\Delta$  não está situado em um subespaço linear de dimensão  $q$ . Definimos  $C(\Delta)$  como sendo o cone convexo de vértice 0 e de base  $\Delta$ , isto é, a reunião de todas as semi-retas de  $\mathbb{R}^k$  de origem 0 que passam por  $\Delta$ . Colocamos

$$P(\Delta) = \mathbb{Z}^k \cap C(\Delta).$$

Notamos que  $P(\Delta)$  é um subsemigrupo do semigrupo  $\mathbb{Z}^k$ .

Consideramos agora o conjunto

$$\mathbb{C}[P(\Delta)] = \{f \in \mathbb{C}[x, x^{-1}] : \text{supp}(f) \subset P(\Delta)\}.$$

$\mathbb{C}[P(\Delta)]$  é um subanel unitário do anel  $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . De fato, se  $f, g \in \mathbb{C}[P(\Delta)]$  então  $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp} f \cup \text{supp} g \subset P(\Delta)$  e  $\text{supp}(fg) \subset \text{supp} f + \text{supp} g \subset P(\Delta)$ . Assim segue que  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  é um subanel do anel  $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Além disso,  $\text{supp}(1) = 0 \in P(\Delta)$ , então  $1 \in \mathbb{C}[P(\Delta)]$ . Portanto  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  é um subanel com identidade de  $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ .

Observamos que as derivações

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

do anel  $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$  aplicam o subanel  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  nele mesmo.

**Definição 4.3:** O polinômio de Laurent  $f$  é *não-degenerado* sobre  $\Delta$ , se os elementos

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

do anel  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  geram em  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  um ideal de codimensão finita.

A parte principal é Newton não-degenerada se ela é não-degenerada sobre qualquer face da fronteira newtoniana.

**Observação 4.4:** ([12], pag. 26). A condição de Newton não-degeneração que diz: se para qualquer face fechada  $\Delta$  da fronteira de Newton

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

não se anulam simultaneamente sobre  $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$ , é equivalente a dizer que os elementos

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

do anel  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  geram um ideal de codimensão finita em  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$ .

Usando a definição da filtração de Newton e a definição de multiplicação no anel graduado associado, temos a seguinte fórmula

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} = \begin{cases} \delta_{n_1+n_2}, & \text{se existe uma face } \Delta \subset \tilde{\Gamma} \text{ tal que } n_1 \in P(\Delta), n_2 \in P(\Delta), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Se existir uma face  $\Delta \subset \tilde{\Gamma}$  tal que  $n_1 \in P(\Delta), n_2 \in P(\Delta)$ , então

$$\phi(n_1 + n_2) = \phi(n_1) + \phi(n_2),$$

pois  $\phi$  é linear em  $C(\Delta)$ . Logo

$$\begin{aligned} \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} &= (x^{n_1} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+1})(x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_2)+1}) \\ &= x^{n_1} \cdot x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)+1} \\ &= \delta_{n_1+n_2} \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $n_1 \in C(\Delta_1)$  e  $n_2 \in C(\Delta_2)$ , onde  $\Delta_1 \neq \Delta_2$ , então temos a seguinte desigualdade estrita

$$\phi(n_1 + n_2) > \phi(n_1) + \phi(n_2)$$

o que implica claramente que

$$\phi(n_1 + n_2) \geq \phi(n_1) + \phi(n_2) + 1.$$

Assim, pela desigualdade anterior, temos

$$\mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)} \subset \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1},$$

Logo  $x^{n_1+n_2} \in \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1}$  e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} &= (x^{n_1} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+1})(x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_2)+1}) \\ &= x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= 0 + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para cada face  $\Delta$  da fronteira de Newton  $\tilde{\Gamma}$ , denotamos o anel  $\mathbb{C}[P(\Delta)]$  por  $\mathcal{A}_\Delta$ . Para cada face fechada que não passa pela origem  $\Delta \subset \tilde{\Gamma}$ , a filtração em  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] \supseteq \dots \supseteq \mathcal{A}_{-M-1} \supseteq \mathcal{A}_{-M} \supseteq \mathcal{A}_{-M+1} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{A}_{-2} \supseteq \mathcal{A}_{-1} \supseteq \mathcal{A}_0 \supseteq \{0\}$$

induz uma filtração

$$\mathcal{A}_\Delta \supseteq \dots \supseteq (\mathcal{A}_\Delta)_{-M-1} \supseteq (\mathcal{A}_\Delta)_{-M} \supseteq (\mathcal{A}_\Delta)_{-M+1} \supseteq \dots \supseteq (\mathcal{A}_\Delta)_{-2} \supseteq (\mathcal{A}_\Delta)_{-1} \supseteq (\mathcal{A}_\Delta)_0 \supseteq \{0\}$$

em  $\mathcal{A}_\Delta$ , onde  $(\mathcal{A}_\Delta)_q = \mathcal{A}_\Delta \cap \mathcal{A}_q$ . Assim obtemos um anel graduado

$$\mathbf{A}_\Delta = \bigoplus_{q \leq 0} (\mathcal{A}_\Delta)_q / (\mathcal{A}_\Delta)_{q+1}.$$

Podemos identificar o anel  $\mathbf{A}_\Delta$  com um subanel de  $\mathbf{A}$ .

**Proposição 4.5:** *Para cada face  $\Delta \subseteq \tilde{\Gamma}$ , existe um epimorfismo que respeita a graduação das  $\mathbb{C}$ -álgebras*

$$\pi_{\Delta} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta}$$

e para cada par  $\Delta_1 \subset \Delta$  existe um homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\pi_{\Delta, \Delta_1} : \mathbf{A}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta_1}$$

que respeita a graduação e para a qual

$$\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_{\Delta}.$$

**Demonstração:** Notamos que  $\mathbf{A}$  tem estrutura de  $\mathbb{C}$ -álgebra, pois  $\mathbf{A}$  é isomorfo ao anel dos polinômios em  $k$  indeterminadas, assim dado  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $a \in \mathbf{A}$ ,  $\alpha \cdot a := \phi(\alpha) \cdot a$ , onde  $\phi$  é o homomorfismo bijetor entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ . Analogamente, temos uma estrutura de  $\mathbb{C}$ -álgebra em  $\mathbf{A}_{\Delta}$ . Definimos

$$\pi_{\Delta} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta}$$

de modo que para cada  $\bar{f} = \sum \bar{f}_q \in \mathbf{A}$ ;  $\pi_{\Delta}(\bar{f}) = \pi_{\Delta}(\sum_{q \geq 0} \bar{f}_q) = \sum_{q \geq 0} (\bar{f}_q)_{C(\Delta)}$ . Temos que  $\pi_{\Delta}$  é um homomorfismo sobrejetor, pois dado  $(\bar{f}_q)_{C(\Delta)} \in \mathbf{A}_{\Delta}$ , existe  $\bar{f}_q = f_q + \mathcal{A}_{q+1}$  tal que  $\pi_{\Delta}(\bar{f}) = (\bar{f}_q)_{C(\Delta)}$ .

Dados  $\Delta_1 \subset \Delta$ , pelo demonstrado acima existem  $\pi_{\Delta}$  e  $\pi_{\Delta_1}$ , de modo que dado  $f \in \mathbf{A}$ , temos  $\pi_{\Delta}(f) = (f)_{C(\Delta)}$  e  $\pi_{\Delta_1}(f) = (f)_{C(\Delta_1)}$ . Definimos

$$\pi_{\Delta, \Delta_1} : \mathbf{A}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta_1}$$

por  $\pi_{\Delta, \Delta_1}((f)_{C(\Delta)}) = (f)_{C(\Delta_1)}$ . Observamos que  $\pi_{\Delta, \Delta_1}$  é um homomorfismo e além disso,  $\pi_{\Delta_1}(f) = (f)_{C(\Delta_1)} = \pi_{\Delta, \Delta_1}((f)_{C(\Delta)}) = (\pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_{\Delta})(f)$ , para todo  $f \in \mathbf{A}$ . Portanto  $\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_{\Delta}$ . ■

Lembramos que  $F_1, \dots, F_k$  são as formas iniciais dos polinômios  $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  respectivamente, isto é,

$$F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{-M+1} \in \mathcal{A}_{-M} / \mathcal{A}_{-M+1} = \mathbf{A}_M.$$

A condição de Newton não-degeneração é equivalente a seguinte condição: para cada face  $\Delta$  da fronteira de Newton  $\tilde{\Gamma}$ , os elementos homogêneos  $\pi_{\Delta} F_1, \dots, \pi_{\Delta} F_k$  do anel graduado  $\mathbf{A}_{\Delta}$ , geram em  $\mathbf{A}_{\Delta}$  um ideal de codimensão finita (ver [4] pag. 61).

Dado o homomorfismo sobrejetor  $\pi_{\Delta} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta}$ , introduzimos uma estrutura de  $\mathbf{A}$ -módulo no anel  $\mathbf{A}_{\Delta}$  como segue: dado  $f \in \mathbf{A}$  e  $g \in \mathbf{A}_{\Delta}$ , definimos  $f \cdot g := \pi_{\Delta}(f) \cdot g$ .

Isto nos permite trabalhar com o anel  $\mathbf{A}_\Delta$  no lugar do anel  $\mathbf{A}$ . Seja  $I$  o conjunto formado pelas faces de maior dimensão da fronteira de Newton  $\tilde{\Gamma}$ . Através da fórmula (4.1) temos que o anel  $\mathbf{A}$  é, em alguns casos, isomorfo à soma direta  $\bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_\Delta$ . De fato, a aplicação

$$\bigoplus_{\Delta \in I} \pi_\Delta : \mathbf{A} \longrightarrow \bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_\Delta$$

é injetora, pois dado  $f \in \mathbf{A}$ , se  $\bigoplus_{\Delta \in I} \pi_\Delta(f) = ((f)_{C(\Delta)})_{\Delta \in I} = 0$ , para todo  $\Delta \in I$ , então como  $\bigcup_{\Delta \in I} P(\Delta) = \mathbb{N}^k$  (pois  $f$  é cômodo), segue que  $f = 0$ .

Na próxima proposição veremos o que falta para a aplicação  $d_k = \bigoplus_{\Delta \in I} \pi_\Delta$  ser um isomorfismo.

**Proposição 4.6:** *Existe uma sequência exata de homomorfismos de  $\mathbf{A}$ -módulos graduados (que respeita as graduações)*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_\Delta \longrightarrow C_{k-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

onde, para  $0 \leq q \leq k-1$ , designamos por  $C_q$  a soma direta dos  $\mathbf{A}$ -módulos  $\mathbf{A}_\Delta$  sobre todas as faces de dimensão  $q$  da fronteira de Newton  $\tilde{\Gamma}$  não situada na união dos planos coordenados.

**Demonstração:** Denotamos por  $I_q$  o conjunto formado pelas faces de  $\tilde{\Gamma}$  de dimensão  $q$  não situadas na união dos planos coordenados. Para definirmos  $d_q$  é suficiente fornecer, para todo  $\Delta \in I_q$ ,  $\Delta_1 \in I_{q-1}$ , um homomorfismo  $d_{\Delta, \Delta_1} : \mathbf{A}_\Delta \longrightarrow \mathbf{A}_{\Delta_1}$ . Definimos, para cada  $\Delta \in I_q$ ,  $\Delta_1 \in I_{q-1}$ ,

$$d_{\Delta, \Delta_1} = \sigma(\Delta, \Delta_1) \pi_{\Delta, \Delta_1},$$

$$\text{onde } \sigma(\Delta, \Delta_1) = \begin{cases} \pm 1, & \text{se } \Delta_1 \subset \Delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para determinarmos o sinal  $+$  ou  $-$  da definição de  $\sigma(\Delta, \Delta_1)$ , atribuímos uma certa orientação da fronteira de Newton  $\tilde{\Gamma}$  como segue: sobre a face  $\Delta \subset \tilde{\Gamma}$  definimos uma orientação, como sendo a induzida de  $\tilde{\Gamma}$  e sobre as demais, definimos orientações arbitrárias. Assim, se  $\Delta \in I_q$ ,  $\Delta_1 \in I_{q-1}$ , e  $\Delta_1 \subset \partial\Delta$  definimos  $\sigma(\Delta, \Delta_1) = 1$ , quando a orientação induzida sobre  $\Delta_1$  coincidir com a orientação de  $\Delta_1$ , e  $\sigma(\Delta, \Delta_1) = -1$ , caso contrário. De acordo com a Proposição 4.5 segue que  $d_q$  é um homomorfismo de  $\mathbf{A}$ -módulos graduados respeitando a graduação.

Como cada anel  $\mathbf{A}_\Delta$  possui estrutura de  $\mathbb{C}$ -módulo, podemos, por um momento, esquecer a estrutura de  $\mathbf{A}$ -módulo sobre  $C_q$  e demonstrarmos que a sequência de  $\mathbb{C}$ -módulos (4.2) é exata.



Temos que

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] = \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_1} \oplus \frac{\mathcal{A}_{-1}}{\mathcal{A}_0} \oplus \frac{\mathcal{A}_{-2}}{\mathcal{A}_{-1}} \oplus \dots$$

e  $\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  de dimensão finita, para todo  $q \leq 0$ . Assim,  $\mathbf{A}$  se escreve como soma direta de espaços vetoriais, logo  $\mathbf{A}$  é um  $\mathbb{C}$ -módulo livre. Assim podemos escrever

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}.$$

Definimos então para todo  $m \in \mathbb{N}^k$ ,  $\mathbf{A}(m) = \mathbb{C}$  e, portanto

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}(m).$$

Da mesma forma que fizemos para  $\mathbf{A}$ ; para cada  $m \in \mathbb{N}^k$ , e para  $\Delta \subset \tilde{\Gamma}$  definimos

$$\mathbf{A}_{\Delta}(m) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } m \in P(\Delta) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim temos que  $\mathbf{A}_{\Delta} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}_{\Delta}(m)$ . Desta forma, conseguimos introduzir uma  $\mathbb{N}^k$ -gradação sobre os módulos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}_{\Delta}$ .

Como  $\mathbf{A}_{\Delta} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}_{\Delta}(m)$ , e lembrando que  $\mathbf{A}_{\Delta}(m) = 0$  caso  $m$  não pertença a  $P(\Delta)$ , segue que  $C_q = \bigoplus_{\Delta \in I_q} \mathbf{A}_{\Delta} = \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \mathbf{A}_{\Delta}(m)) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} (\bigoplus_{\Delta \in I_q} \mathbf{A}_{\Delta}(m))$ . Então definindo  $C_q(m)$  como  $\bigoplus_{\Delta \in I_q} \mathbf{A}_{\Delta}(m)$ , para todo  $m \in \mathbb{N}^k$ , obtemos que

$$C_q = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} C_q(m).$$

Portanto,  $C_q$  também possui uma estrutura de  $\mathbb{N}^k$ -gradação.

Observamos que pela proposição 4.5  $d_q$  respeita a  $\mathbb{N}^k$ -gradação, para todo  $q$  pertencente a  $\{1, \dots, k-1\}$ .

Observamos que para demonstrar que a sequência (4.2) é exata, é suficiente mostrar que para cada  $m \in \mathbb{N}^k$  a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}(m) \xrightarrow{d_k(m)} C_{k-1}(m) \xrightarrow{d_{k-1}(m)} \dots \xrightarrow{d_2(m)} C_1(m) \xrightarrow{d_1(m)} C_0(m) \longrightarrow 0 \quad (4.3)$$

é exata. Pois se a sequência (4.3) for exata, então tomando a soma direta em  $m \in \mathbb{N}^k$ , temos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_{\Delta} \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

é exata.

Seja  $X(m) = \cup_{m \in P(\Delta)} \Delta$  e consideramos a decomposição celular da variedade topológica  $\tilde{\Gamma}$  em células correspondentes às faces e a decomposição induzida nos espaços  $X(m)$ .

Da definição de  $C_q(m)$  e de  $X(m)$  (e do fato de  $\Delta$  não estar situado em um subespaço linear de dimensão  $q$ , para  $1 \leq q \leq k-1$ ) temos que a sequência (4.3) (menos o termo  $\mathbf{A}(m)$ ) é isomorfa ao complexo de cadeias celulares do par  $(X(m), \partial X(m))$  com coeficientes em  $\mathbb{C}$ . Assim temos que a sequência (4.3) é isomorfa ao complexo

$$H_{k-1}(X(m), \partial X(m)) \xrightarrow{d_{k-1}} \dots \xrightarrow{d_2} H_1(X(m), \partial X(m)) \xrightarrow{d_1} H_0(X(m), \partial X(m)) \rightarrow 0.$$

Portanto  $\text{Im } d_i \subseteq \ker d_{i-1}$ . Como as aplicações  $d_i$  são sobrejetoras para todo  $i = 1, \dots, k-1$ , temos  $\text{Im } d_i = \ker d_{i-1}$ . Portanto, a sequência (4.3) (menos o termo  $\mathbf{A}(m)$ ) é exata.

Pela convexidade de  $\tilde{\Gamma}_-$  temos que o par  $(X(m), \partial X(m))$  é homotopicamente equivalente ao par (disco, fronteira do disco) e portanto, somente as homologias de dimensão maximal são não-nulas e elas são isomorfas à  $\mathbb{C} = \mathbf{A}(m)$ .

Assim, a sequência (4.3), e portanto a sequência (4.2), é exata. ■

Afim de estudar o anel quociente  $\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle$ , descrevemos a sequência exata

$$\mathbf{A}^k \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle$$

onde  $\pi$  é a projeção natural, onde

$$\partial_1(a_1, \dots, a_k) = a_1 F_1 + \dots + a_k F_k.$$

Estenderemos agora a sequência anterior a uma sequência semi-exata obtida através do complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$  com o acréscimo do epimorfismo  $\pi$ :

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \xrightarrow{\partial_k} \mathbf{A}^{\binom{k}{k-1}} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}/\langle F \rangle. \quad (4.4)$$

Como os elementos  $F_1, \dots, F_k$  são homogêneos de grau  $M$  (pois  $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , para  $i = 1, \dots, k$ , pertencem a  $\mathcal{A}_{-M}$ , logo  $F_i$  é homogêneo de grau  $M$ , no anel graduado  $\mathbf{A}$ ), segue pela definição de complexo de Koszul que todos os homomorfismos aumentam a graduação de  $M$ .

**Lema 4.7:** ([4], pag. 62) *Seja  $R$  um anel qualquer. Consideramos o seguinte diagrama comutativo de  $R$ -módulos*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & R_{11} & \longrightarrow & R_{12} & \longrightarrow & R_{13} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_{1n} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{21} & \longrightarrow & R_{22} & \longrightarrow & R_{23} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_{2n} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{31} & \longrightarrow & R_{32} & \longrightarrow & R_{33} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_{3n} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{n1} & \longrightarrow & R_{n2} & \longrightarrow & R_{n3} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_{nn} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Denotaremos os homomorfismos horizontais por  $h$  e os verticais por  $v$ . Suponhamos que  $v^2 = 0$ ,  $h^2 = 0$ , que todas as linhas são exatas e a  $i$ -ésima coluna é exata a partir do módulo  $R_{ii}$ , para  $i = 2, \dots, n$ , a saber a sequência

$$0 \longrightarrow R_{ni} \longrightarrow R_{n-1,i} \longrightarrow R_{n-2,i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_{ii} \longrightarrow R_{i-1,i} \longrightarrow 0$$

é exata. Então a primeira coluna é exata.

**Teorema 4.8:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Nestas condições, o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$  é acíclico em dimensões positivas.*

**Demonstração:** Desejamos mostrar que o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$  é acíclico em dimensões positivas. Para isto consideramos o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$ , com coeficientes nos  $\mathbf{A}$ -módulos da sequência (4.2),



Pela definição do complexo de Koszul com coeficientes em um módulo, temos que o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$  com coeficientes nos  $\mathbf{A}$ -módulos  $C_q$  é isomorfo à soma direta dos complexos de Koszul com coeficientes em  $\mathbf{A}_\Delta$ , onde  $\Delta \in I_q$ . De fato, consideramos o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$

$$K.(F_1, \dots, F_k) : 0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}$$

então  $K.(F_1, \dots, F_k; C_q) := K.(F_1, \dots, F_k) \otimes_{\mathbf{A}} C_q$ , é o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A}$ , com coeficientes nos  $\mathbf{A}$ -módulos  $C_q$ , dando origem a seguinte sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \otimes_{\mathbf{A}} C_q \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \otimes_{\mathbf{A}} C_q \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \otimes_{\mathbf{A}} C_q \rightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} C_q$$

como o produto tensorial comuta com a soma direta, segue que a sequência acima é isomorfa a

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta)$$

e esta sequência é a soma direta do complexo de Koszul com coeficientes em  $\mathbf{A}_\Delta$ ,  $\Delta \in I_q$ , como queríamos demonstrar.

Agora para cada face  $\Delta$  em  $I_q$  o complexo

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k-1}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta \rightarrow \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta$$

é isomorfo, como um complexo de  $\mathbb{C}$  módulos, ao complexo de Koszul dos elementos  $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$  do anel  $\mathbf{A}_\Delta$ . De fato, novamente aplicando a propriedade de que o produto tensorial comuta com a soma direta, segue que o complexo anterior é isomorfo ao complexo abaixo

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\binom{k}{k}} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\binom{k}{1}} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta) \rightarrow (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_\Delta).$$

Uma vez que  $\mathbf{A}_\Delta$  é um  $\mathbf{A}$ -módulo, temos que a sequência anterior é isomorfa a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta$$

que é o complexo de Koszul dos elementos  $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$  do anel  $\mathbf{A}_\Delta$ , pois  $\mathbf{A}_\Delta$  é uma  $\mathbf{A}$ -álgebra.

Pela observação anterior e pelo Lema 4.7, para mostrar que a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k}} \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \rightarrow \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}$$

é exata, basta mostrar que a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{2}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta^{\binom{k}{1}} \rightarrow \mathbf{A}_\Delta \tag{4.5}$$

é exata em dimensões  $\geq k - q$ , para todo  $q = 0, 1, \dots, k - 1$ . E isto é equivalente a dizer que o complexo (4.5) é exato em dimensões  $\geq k - q$ , para toda face  $q$ -dimensional  $\Delta$  e todo  $q = 0, 1, \dots, k - 1$ .

Se  $q \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$  e  $\Delta$  é uma face compacta  $q$ -dimensional de  $\tilde{\Gamma}$ , então pela hipótese de não-degeneração o ideal de  $\mathbf{A}_\Delta$ , gerado pelos elementos  $\pi_\Delta(F_1), \dots, \pi_\Delta(F_k)$ , é de codimensão finita em  $\mathbf{A}_\Delta$ , ou seja,

$$\dim \frac{\mathbf{A}_\Delta}{\langle \pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k \rangle} < \infty.$$

Então pela Proposição 1.6 segue que

$$\frac{\mathbf{A}_\Delta}{\langle \pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k \rangle}$$

possui comprimento finito.

O anel  $\mathbf{A}_\Delta$  é um anel Cohen-Macaulay (ver [11]) e temos que  $\dim \mathbf{A}_\Delta = \dim \Delta + 1 = q + 1$  (ver [6]).

Isto implica que a profundidade de  $\mathbf{A}_\Delta$  é  $q + 1$ , pois  $\mathbf{A}_\Delta$  é Cohen-Macaulay, então  $\text{depth}(\pi_\Delta(F_i), \mathbf{A}_\Delta) = \dim \mathbf{A}_\Delta = q + 1$ . Então pela observação do Teorema 1.32 o número de termos nulos sucessivos na sequência das homologias é  $k - q - 1$ , logo

$$H_k(\pi_\Delta(F_i), \mathbf{A}_\Delta) = \dots = H_{k-q-1}(\pi_\Delta(F_i), \mathbf{A}_\Delta) = 0.$$

Portanto as homologias de (4.5) são zero de  $k$  até  $k - q - 1$ . Logo o complexo (4.5) é acíclico em dimensões  $\geq k - q$ .

Portanto o complexo (4.5) é acíclico em dimensões maiores ou iguais a  $k - q$ , logo o complexo

$$0 \rightarrow C_q^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow C_q^{(2)} \rightarrow C_q^{(1)} \rightarrow C_q$$

é acíclico em dimensões maiores ou iguais a  $n - q$ .

Portanto pelo Lema anterior a sequência

$$0 \rightarrow \mathbf{A}^{(k)} \rightarrow \mathbf{A}^{(k-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}^{(2)} \rightarrow \mathbf{A}^{(1)} \rightarrow \mathbf{A}$$

é exata. ■

**Definição 4.9:** A *série de Poincaré* do  $\mathbb{C}$ -módulo graduado  $\mathbf{A}$  é dada pela expressão

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{q=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}_q) \cdot t^q$$

e denotamos por  $p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)$  a *série de Poincaré* do  $\mathbb{C}$ -módulo graduado  $\mathbf{A}_\Delta$ .

**Lema 4.10:** a)  $p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)$  é uma função racional em  $t$  e o ponto  $t = 1$  é um polo de ordem  $\dim \Delta + 1$ .

b) Se  $\dim \Delta = k - 1$ , então

$$p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)(1 - t^M)^k \Big|_{t=1} = k!V_{k\Delta}$$

onde  $V_{k\Delta}$  é o  $k$ -volume da pirâmide de vértice zero e de base  $\Delta$ .

**Demonstração:** a) Observamos que o anel  $\mathbf{A}_\Delta$  é Noetheriano, pois é o quociente de um anel Noetheriano (pois  $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}/\ker \pi_\Delta$  pela Proposição 4.5). Portanto pelo Teorema 1.36 a série de Poincaré de  $\mathbf{A}_\Delta$  é uma função racional em  $t$  e o ponto  $t = 1$  é um polo de ordem  $\dim \mathbf{A}_\Delta = \dim \Delta + 1$ .

b) Sejam  $m_1, \dots, m_k$  os vértices da face. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}_\Delta}(t)(1 - t^M)^k &= \text{número de pontos do conjunto } P(\Delta) \setminus \cup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta)) \\ &= \text{número de pontos do grupo quociente } \mathbb{Z}^k / \langle m_1, \dots, m_k \rangle \\ &= |\det(m_1, \dots, m_k)| = k!V_{k\Delta}. \end{aligned}$$

onde  $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$  denota o subgrupo gerado pelos elementos  $m_1, \dots, m_k$ . ■

**Teorema 4.11:** ([4], pag. 47) Seja  $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$  um anel Noetheriano graduado com  $R_0$  Artiniano e seja  $U = (u_{ij})$  uma matriz  $k \times m$  com entradas em  $R$ , sendo  $k \geq m$  e cada  $u_{ij}$  homogêneo de grau  $d_{ij}$ . Suponhamos que se cumpre

$$d_{ij} + d_{nl} = d_{il} + d_{nj};$$

para quaisquer  $i, j, n, l$ . Se o ideal gerado pelos menores de ordem maximal de  $U$ , denotado por  $I_m(U)$ , tem profundidade  $k - m + 1$ , então a série de Hilbert de  $R_m(U) = R/I_m(U)$  é dada por:

$$p_{R_m(U)}(t) = p_R(t) \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^r (-1)^{n+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n \leq m \\ 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m+n} \leq k}} t^{d_{i_1 j_1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+n} j_n}}\right)$$

onde  $r = k - m$ .

**Observação 4.12:** Consideramos  $R = \mathbf{A} = \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_{-2}/\mathcal{A}_{-1} \oplus \dots = \oplus_{q \geq 0} \mathbf{A}_q$  onde  $\mathbf{A}_q = \mathcal{A}_{-q}/\mathcal{A}_{-q+1}$  assim o anel  $\mathbf{A}$  tem estrutura de anel graduado associado. Além disso,  $\mathbf{A}$  é Noetheriano (pois é isomorfo ao anel de polinômios nas indeterminadas  $x_1, \dots, x_k$  sobre o corpo  $\mathbb{C}$ ) e  $\mathbf{A}_0$  é Artiniano pois  $\mathbf{A}_0 = \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}$  que é um corpo e portanto é um anel Artiniano. Consideramos no Teorema 4.11  $m = 1$  e  $I(m) = I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ , onde  $F_i$  é homogêneo de grau  $M$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Notemos que a profundidade de  $I$  é  $k - 1 + 1 = k$ , pois  $I$  contém uma sequência regular, a saber  $F_1, \dots, F_k$ . Além disso,

$R_1(U) = \mathbf{A}/I$  possui dimensão finita como espaço vetorial. Logo pelo Teorema (1.6),  $\mathbf{A}/I$  tem comprimento finito e tem estrutura de anel graduado. Logo, estão satisfeitas as hipóteses do teorema anterior, para  $m = 1$ . Portanto, temos

$$p_{\mathbf{A}/I}(t) = p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k.$$

Agora iremos demonstrar o Teorema 4.1. Iremos enunciá-lo novamente para facilitar a leitura do texto.

**Teorema 4.13:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Então a codimensão do ideal gerado, no anel graduado associado*

$$\mathbf{A} = \text{gr } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{q \leq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}),$$

*pelos formas iniciais dos polinômios*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

*é igual a  $k!V_k$ . Em outras palavras, temos*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A} / \langle F_1, \dots, F_k \rangle = k!V_k.$$

**Demonstração:** Da exatidão da sequência (4.4) e da Observação 4.12 temos:

$$p_{\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle}(t) = p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k.$$

A partir desta igualdade, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle}(t) = \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k.$$

Considerando em  $\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle$  a graduação trivial, a igualdade acima se reescreve da seguinte forma

$$\lim_{t \rightarrow 1} \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle = \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k$$

donde segue que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle = \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k,$$

ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle = p_{\mathbf{A}}(t)(1 - t^M)^k \Big|_{t=1}. \quad (4.6)$$

Pelo fato da sequência (4.2) ser exata e a dimensão ser uma função aditiva temos:

$$\dim \mathbf{A}_q - \dim(C_{k-1})_q + \dim(C_{k-2})_q - \dots + (-1)^k \dim(C_0)_q = 0.$$



Logo, multiplicando cada parcela da soma anterior por  $t^q$  e somando em  $q$  de zero a infinito, segue

$$\sum_{q=0}^{\infty} \dim \mathbf{A}_q t^q - \sum_{q=0}^{\infty} \dim(C_{k-1})_q t^q + \cdots + (-1)^k \sum_{q=0}^{\infty} \dim(C_0)_q t^q = 0$$

donde obtemos,

$$p_{\mathbf{A}}(t) - p_{C_{k-1}}(t) + \cdots + (-1)^k p_{C_0}(t) = 0$$

portanto

$$p_{\mathbf{A}}(t) = p_{C_{k-1}}(t) + R(t)$$

onde  $R(t)$  é a soma alternada das séries de Poincaré dos módulos  $\mathbf{A}_{\Delta}$  onde  $\dim \Delta \leq k-2$ . Além disso,  $p_{C_{k-1}}(t) = p_{\oplus_{\Delta \in I} \mathbf{A}_{\Delta}}(t) = \sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)$ . Portanto a série de Poincaré do  $\mathbb{C}$ -módulo  $\mathbf{A}$  é:

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t) + R(t) \quad (4.7)$$

onde  $R(t)$  é a soma alternada das séries de Poincaré dos módulos  $\mathbf{A}_{\Delta}$  onde  $\dim \Delta \leq k-2$ . Conforme o ítem (a) do Lema 4.10, temos que  $R(t)$  é uma função racional em  $t$  com polo de ordem menor ou igual a  $k-1$ . Então

$$\lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)(1-t)^{k-1} = \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)^k = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t^M)^k &= \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)^k (1+t+t^2+\cdots+t^{M-1})^k \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t)^k \lim_{t \rightarrow 1} (1+t+t^2+\cdots+t^{M-1})^k \\ &= 0 \cdot M^k = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 1} R(t)(1-t^M)^k = 0. \quad (4.8)$$

Consequentemente, por (4.6), (4.7), (4.8) e pelo segundo ítem do Lema (4.10), segue

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle) &= \lim_{t \rightarrow 1} p_{\mathbf{A}}(t)(1-t^M)^k \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (\sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t) + R(t))(1-t^M)^k \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (\sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)(1-t^M)^k) + \lim_{t \rightarrow 1} (R(t)(1-t^M)^k) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} (\sum_{\Delta \in I} p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)(1-t^M)^k) \\ &= \sum_{\Delta \in I} (\lim_{t \rightarrow 1} (p_{\mathbf{A}_{\Delta}}(t)(1-t^M)^k)) \\ &= \sum_{\Delta \in I} k! V_{k_{\Delta}} = k! \sum_{\Delta \in I} V_{k_{\Delta}} = k! V_k. \end{aligned}$$

■

## 4.1 Codimensão dos ideais $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle_{i=1, \dots, k}$ e $\langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{-M+1} \rangle_{i=1, \dots, k}$

Nesta seção demonstramos o Teorema 4.2.

Para os próximos resultados, entendemos por graduação uma  $\mathbb{Z}$ -graduação decrescente, que é definida como segue: uma  $\mathbb{Z}$ -graduação decrescente em um anel  $R$  é uma família de subgrupos aditivos do grupo aditivo de  $R$ ,  $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfazendo as seguintes condições:

- a)  $1 \in R_0$ ;
- b)  $R_{n+1} \subset R_n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- c)  $R_p R_q \subset R_{p+q}$ .

**Definição 4.14:** Uma aplicação  $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  de  $\mathbb{C}$ -módulos graduados é dita *estrita* se para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\partial \mathcal{B}_q = \partial \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_q.$$

Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\mathbb{C}$ -álgebra graduada que satisfaz a condição  $\mathcal{A} = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q$ .

Denotamos  $\text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}$ , por

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}_q,$$

ou seja,  $\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1} = \mathbf{A}_q$ .

Seja  $f_i \in \mathcal{A}_{d_i}$  e  $F_i = f_i + \mathcal{A}_{d_i+1}$  que é um elemento de  $\mathbf{A}_{d_i}$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

Consideramos uma aplicação  $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  de  $\mathbb{C}$ -módulos graduados e  $\partial$  respeitando a graduações, isto é,

$$\partial(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A}_i$$

para  $i \geq 0$ . Nestas condições, podemos definir

$$\text{gr } \partial : \text{gr } \mathcal{B} \rightarrow \text{gr } \mathcal{A}$$

pondo,  $\text{gr}(f + \mathcal{B}_{i+1}) = \partial(f) + \mathcal{A}_{i+1}$ . Notamos que,  $\text{gr } \partial$  está bem definida e é um homomorfismo.

**Lema 4.15:** *Seja*

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{B} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

um complexo de  $\mathbb{C}$ -módulos graduados,  $\partial_1$  e  $\partial_2$  respeitando a graduação. Suponhamos que  $\mathcal{B} = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$  e a sequência

$$\text{gr } \mathcal{K} \xrightarrow{\text{gr } \partial_2} \text{gr } \mathcal{B} \xrightarrow{\text{gr } \partial_1} \text{gr } \mathcal{A} \quad (4.9)$$

é exata. Então, para qualquer  $q \in \mathbb{Z}$  tem-se

$$\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial_1(\mathcal{B}_q)$$

ou seja, o morfismo  $\partial_1$  é estrito.

**Demonstração:** Notamos que

$$\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q \supseteq \partial_1(\mathcal{B}_q)$$

uma vez que  $\partial_1(\mathcal{B}_q) \subseteq \mathcal{A}_q$  e  $\partial_1(\mathcal{B}_q) \subseteq \partial_1(\mathcal{B})$ . Mostramos agora que,

$$\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q \subseteq \partial_1(\mathcal{B}_q).$$

Seja  $\partial_1 b = a \in \partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q$ , para algum  $b \in \mathcal{B}$ . Definimos

$$q_1 = \max\{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}.$$

Como  $b \in \mathcal{B} = \cup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$  segue que  $b \in \mathcal{B}_m$ , para algum  $m \in \mathbb{Z}$  e assim  $a \in \partial_1(\mathcal{B}_m)$ . Caso  $m \leq q$ , segue que  $m \in \{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$ . Por outro lado, se  $m > q$ , temos que  $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_q$ ; portanto  $a \in \partial_1(\mathcal{B}_q)$  e temos  $m \in \{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$ . Portanto o conjunto

$$\{n : n \leq q, a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$$

é não-vazio e está bem definido. Notamos que basta mostrar que  $q = q_1$  para concluirmos a demonstração. Supomos que  $q_1 < q$ . Por definição de  $q_1$ ,  $a \in \partial_1(\mathcal{B}_{q_1})$ . Logo podemos encontrar  $b_1 \in \mathcal{B}_{q_1}$ , para o qual  $\partial_1(b_1) = a$ . Portanto,  $\text{gr } \partial_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) = \partial_1 b_1 + \mathcal{A}_{q_1+1} = a + \mathcal{A}_{q_1+1} = \mathcal{A}_{q_1+1}$ , pois como  $q_1 < q$  segue que  $q_1 + 1 \leq q$ , logo  $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_{q_1+1}$  e como  $a \in \mathcal{A}_q$ , segue que  $a \in \mathcal{A}_{q_1+1}$ . Portanto,  $b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1} \in \ker \text{gr } \partial_1$ . Pela exatidão da sequência (4.9), temos que  $\ker \text{gr } \partial_1 = \text{Im } \text{gr } \partial_2$ . Logo, existe  $x \in \mathcal{K}_{q_1}$  tal que  $\text{gr } \partial_2(x + \mathcal{K}_{q_1+1}) = \partial_2(x) + \mathcal{B}_{q_1+1} = b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}$ . Por consequência,  $b_1 - \partial_2(x) \in \mathcal{B}_{q_1+1}$  e

$$\partial_1(b_1 - \partial_2 x) = \partial_1 b_1 - \partial_1 \partial_2 x = \partial_1 b_1 = a.$$

Então,  $a \in \partial_1(\mathcal{B}_{q_1+1})$ , o que contradiz a maximalidade de  $q_1$ . Logo,  $q \geq q_1$ , mas desde que  $q \leq q_1$ , concluimos que  $\partial_1$  é estrita. ■

**Lema 4.16:** *Seja  $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  um morfismo estrito de  $\mathbb{C}$ -módulos graduados, isto é,  $\partial(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial(\mathcal{B}_q)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Então temos o seguinte isomorfismo de  $\mathbb{C}$ -módulos*

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \text{gr } \mathcal{A}/\text{gr}(\partial)(\text{gr } \mathcal{B}).$$

**Demonstração:** Da sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_i \cap \partial(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}_i \rightarrow (\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})})_i \rightarrow 0,$$

e como  $\mathcal{A}_i \cap \partial(\mathcal{B}) = \partial(\mathcal{B}_i)$ , segue que

$$(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B}))_i \cong \mathcal{A}_i/\partial(\mathcal{B}_i).$$

Assim,

$$0 \rightarrow \text{gr} \partial(\text{gr } \mathcal{B}) \rightarrow \text{gr } \mathcal{A} \rightarrow \text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \rightarrow 0,$$

é exata, portanto,  $\text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \text{gr } \mathcal{A}/\text{gr}(\partial)(\text{gr } \mathcal{B})$ . ■

Para apresentar o seguinte teorema denotemos por  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$

**Teorema 4.17:** *Suponha que o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  da  $\mathbb{C}$ -álgebra  $\mathbf{A}$  é acíclico em dimensão 1. Então temos*

a) *um isomorfismo de  $\mathbb{C}$ -módulos*

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle) \cong \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle. \quad (4.10)$$

b) *o morfismo  $\partial_1 : \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$  que envia  $(g_1, \dots, g_k)$  em  $g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$  é estrito para a seguinte escolha da filtração em  $\mathcal{A}^k$ : a filtração de  $(0, \dots, g_i, \dots, 0)$  em  $\mathcal{A}^k$  é igual a filtração de  $g_i$  em  $\mathcal{A}$  menos  $d_i$ .*

**Demonstração:** Vamos considerar uma parte do complexo de Koszul dos elementos  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A}^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{A}^{\binom{k}{1}} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

onde a filtração em  $\mathcal{A}^{\binom{k}{2}}$  é introduzida da mesma maneira que a filtração em  $\mathcal{A}^{\binom{k}{1}}$  no enunciado do teorema. A sequência

$$\text{gr } \mathcal{A}^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\text{gr } \partial_2} \text{gr } \mathcal{A}^{\binom{k}{1}} \xrightarrow{\text{gr } \partial_1} \text{gr } \mathcal{A}$$

é isomorfa a sequência

$$\mathbf{A}^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\text{gr } \partial_2} \mathbf{A}^{\binom{k}{1}} \xrightarrow{\text{gr } \partial_1} \mathbf{A}$$

que é uma parte do complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  do anel  $\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A}$ . Por hipótese temos que a sequência anterior é exata, então pelo Lema 4.15 segue que o morfismo  $\partial_1$  é estrito, o que demonstra a segunda parte do teorema.

Como  $\text{Im } \partial_1 = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  e  $\text{Im gr } \partial_1 = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ , então pelo Lema 4.16, temos

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \text{gr } \mathcal{A}/\text{gr}(\partial)(\text{gr } \mathcal{B})$$

ou seja,

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle) \cong \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle.$$

Portanto vale (a). ■

Agora demonstraremos o Teorema 4.2. Iremos enunciá-lo novamente para facilitar a leitura do texto.

**Teorema 4.18:** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo, com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Então a codimensão do ideal gerado por  $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  em  $\mathcal{A}$ , é igual a codimensão do ideal gerado pelas formas iniciais de  $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  no anel graduado associado  $\mathbf{A} = \text{gr } \mathcal{A}$ . Em outras palavras, temos*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]/\langle f_1, \dots, f_k \rangle.$$

**Demonstração:** Colocamos  $f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{A}_M$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Por hipótese temos que  $f$  é um polinômio cômodo e com parte principal Newton não-degenerada, então pelo Teorema 4.8 temos que o complexo de Koszul dos elementos  $F_1, \dots, F_k$  é acíclico em dimensões positivas. Logo, temos que vale (4.10) do Teorema 4.17, ou seja,

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle) \cong \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle.$$

Resta apenas mostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\text{gr}(\mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}/\langle f_1, \dots, f_k \rangle.$$

Seja  $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  e escrevemos  $\text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}_i/\mathcal{X}_{i+1}$ , onde  $\mathcal{X}_i = \mathcal{A}_i/\partial(\mathcal{B}_i)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , segue-se da filtração de Newton que  $\mathcal{X}_i = 0$  para  $i \geq 1$ .

Já sabemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/\langle F_1, \dots, F_k \rangle = k!V_k.$$

Assim, usando (4.10) e o Teorema 4.17, temos

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}/\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathcal{A}_{M+1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \mathcal{A}_{M+1} \rangle = k!V_k.$$

Portanto,  $\dim_{\mathbb{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$  é finita. Logo, existe  $r \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\mathcal{X}_{-r} = \mathcal{X}_{-r-1} = \mathcal{X}_{-r-2} \cdots$$

Onde  $\mathcal{X}_{-i} = \mathcal{A}_{-i}/\partial(\mathcal{B}_{-i}) = \mathcal{A}_{-i}/\partial(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_{-i} = (\mathcal{A}_{-i} + \mathcal{I})/\mathcal{I}$ . Assim

$$\mathcal{I} + \mathcal{A}_{-r} = \mathcal{I} + \mathcal{A}_{-r-1} = \cdots .$$

Decorre da filtração de Newton, que

$$\mathcal{I} + \mathcal{A}_{-r} = \mathcal{I} + \mathcal{A}_{-r-1} = \cdots = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$$

e assim  $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathcal{X}_{-r} = (\mathcal{I} + \mathcal{A}_{-r})/\mathcal{I}$  logo

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I}) = \sum_{q=0}^r \dim_{\mathbb{C}} X_q = \sum_{q=0}^r \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_{-q}/\mathcal{X}_{-q+1} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_{-r} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Portanto  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}/\mathcal{I} = \dim_{\mathbb{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ . ■

## 4.2 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção demonstramos os resultados enunciados no capítulo 3, e damos a demonstração completa do Teorema 3.3.

**Definição 4.19:** Seja  $X$  um espaço métrico qualquer. Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é *semicontínua inferiormente* se para toda sequência de pontos  $x_n \in X$ , com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(a).$$

Agora iremos demonstrar o teorema principal (Teorema 3.3):

**Teorema Principal:** Seja  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  um polinômio cômodo. Então

i) A soma dos números de Milnor de seus pontos singulares isolados de  $f$  é inferior ou igual a  $\tilde{\nu}(f)$ , em particular se  $\tilde{\mu}(f) < +\infty$  então

$$\tilde{\mu}(f) \leq \tilde{\nu}(f).$$

ii) Se a parte principal newtoniana do polinômio é Newton não-degenerada no infinito (no sentido de 2.10) então

$$\tilde{\mu}(f) = \tilde{\nu}(f),$$

ou seja,

$$\tilde{\mu}(f) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k \quad (4.11)$$

**Demonstração:** (i) Consideremos polinômio cômodo  $f$ . pelo Teorema (2.15), podemos encontrar uma aproximação de  $f$  consistindo de uma família  $\{f_n\}$  de polinômios cômodos Newton não-degeneradas a um parâmetro, com a mesma fronteira de Newton  $\tilde{\Gamma}(f)$  para cada polinômio. Pelo ítem (ii) do Teorema (3.3), segue que

$$\tilde{\mu}(f_n) = \tilde{\nu}(f_n).$$

Observamos agora que o número de Newton é uma soma de volumes, e o volume é uma função contínua, logo o número de Newton é uma função contínua.

Usando a semicontinuidade inferior do número  $\tilde{\mu}$ , temos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(f_n) \geq \tilde{\mu}(f).$$

Como para cada  $f_n$  temos:  $\tilde{\mu}(f_n) = \tilde{\nu}(f_n)$ , segue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(f_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\nu}(f_n).$$

Uma vez que a sequência  $\{f_n\}$  converge para a série  $f$ , temos pela continuidade do número de Newton, que a sequência  $\tilde{\nu}(f_n)$  converge para  $\tilde{\nu}(f)$ . Assim,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\nu}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\nu}(f_n) = \tilde{\nu}(f).$$

Portanto

$$\tilde{\mu}(f) \leq \tilde{\nu}(f).$$

(ii) Demonstraremos agora, com auxílio do Teorema 3.5, a afirmação (b), para polinômios cômodos com parte principal Newton não-degenerada no infinito.

Consideramos o conjunto  $\{1, \dots, k\}$ . Seja  $I$  um subconjunto próprio do conjunto  $\{1, \dots, k\}$ . Denotaremos por  $\omega_I$  o volume de dimensão  $(k - |I|)$  do poliedro  $\tilde{\Gamma}_-(f_I)$  multiplicado por  $(k - |I|)!$ , ou seja,  $\omega_I = (k - |I|)!V_{(k-|I|)}$ . Colocamos  $\omega_{\{1, \dots, k\}} = 1$  e  $\omega_\emptyset = k!V_k$ , onde  $V_k$  é o volume de dimensão  $k$  de  $\tilde{\Gamma}_-(f_I)$ .

Seja  $f$  um polinômio cômodo, com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Então pelo ítem (a) do Lema 3.8, o polinômio  $f_I$ , para cada  $I \subset \{1, \dots, k\}$ , é um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito. Assim, podemos aplicar o Teorema 3.5 a cada um dos polinômios  $f_I$ .

Depois da fórmula (3.1) para  $f_I$ , obtemos

$$\omega_I = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]}{\langle x_1 \frac{\partial f_I}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \rangle} = \sum_{I_1 \subset 2\{1, \dots, k\}} \tilde{\mu}_{I_1} \quad (4.12)$$

onde  $I \subset I_1 \subset 2^{\{1, \dots, k\}}$ .

Com auxílio do Lema 3.8, (parte (b)), obtemos a seguinte igualdade

$$k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k = \Sigma(-1)^{|I|}\omega_I \quad (4.13)$$

onde  $I \in 2^{\{1, \dots, k\}}$ .

Mas por (4.12) temos que

$$\sum_I (-1)^{|I|}\omega_I = \sum_{I \subset I_1 \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \sum_{I_1 \subset \{1, \dots, k\}} \tilde{\mu}_{I_1} = \sum_{I_1 \subset \{1, \dots, k\}} \left( \sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|} \right) \tilde{\mu}_{I_1} = \tilde{\mu}_\emptyset = \tilde{\mu}(f),$$

pois o coeficiente de  $\tilde{\mu}_\emptyset$  é igual a 1 e o coeficiente de  $\tilde{\mu}_{I_1}$ , para  $I_1 \neq \emptyset$ , é dado por  $\sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|}$  (que é igual a  $\sum_{0 \leq i \leq |I_1|} (-1)^i \binom{|I_1|}{i} = 0$ ).

Portanto vale (4.11).

Faremos um exemplo para ilustrar (4.13) e o fato de que o coeficiente de  $\tilde{\mu}_\emptyset$  é igual a 1 e o coeficiente de  $\tilde{\mu}_{I_1}$ , para  $I_1 \neq \emptyset$ , é dado por  $\sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|}$ , respectivamente.

**Exemplo 4.20:** Consideramos  $I \in 2^{\{1, 2\}}$  temos

$$\begin{aligned} \Sigma(-1)^{|I|}\omega_I &= (-1)^{|\emptyset|}\omega_\emptyset + (-1)^{|\{1\}|}\omega_{\{1\}} + (-1)^{|\{2\}|}\omega_{\{2\}} + (-1)^{|\{1, 2\}|}\omega_{\{1, 2\}} \\ &= 2!V_2 - V_1^{\{1\}} - V_1^{\{2\}} + 1 \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\Gamma}_-(f_{\{1\}}) = \tilde{\Gamma}_-(f) \cap \mathbb{R}_{+\{1\}}$  e  $\tilde{\Gamma}_-(f_{\{2\}}) = \tilde{\Gamma}_-(f) \cap \mathbb{R}_{+\{2\}}$ . Notemos que  $V_{k-1}^{\{1\}} + V_{k-1}^{\{2\}}$  é a soma dos volumes de dimensão 2 das interseções do poliedro  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  com os planos coordenados de dimensão 1. Assim a soma anterior é igual  $2!V_2 - 1!V_1 + 1$ .

Consideramos  $I \subset \{1, 2\}$ . Logo

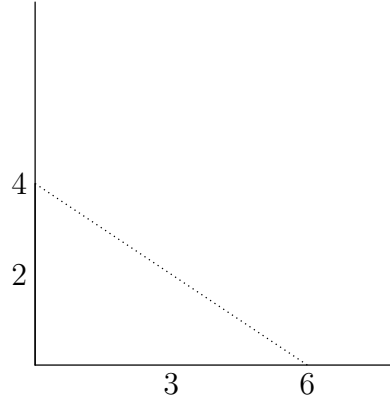
$$\begin{aligned} \sum_{I_1 \subset \{1, 2\}} \left( \sum_{I \subset I_1} (-1)^{|I|} \right) \tilde{\mu}_{I_1} &= \sum_{\emptyset \subset I_1 \subset \{1, 2\}} \tilde{\mu}_{I_1} - \sum_{\{1\} \subset I_1 \subset \{1, 2\}} \tilde{\mu}_{I_1} - \sum_{\{2\} \subset I_1 \subset \{1, 2\}} \tilde{\mu}_{I_1} + \sum_{\{1, 2\} \subset I_1 \subset \{1, 2\}} \tilde{\mu}_{I_1} \\ &= \tilde{\mu}_\emptyset + \tilde{\mu}_{\{1\}} + \tilde{\mu}_{\{2\}} + \tilde{\mu}_{\{1, 2\}} - \tilde{\mu}_{\{1\}} - \tilde{\mu}_{\{2\}} + \tilde{\mu}_{\{1, 2\}} = \tilde{\mu}_\emptyset = \tilde{\mu}(f). \end{aligned}$$

Observamos que o coeficiente de  $\tilde{\mu}_\emptyset$  é igual a 1, enquanto que para  $|I_1| = 1$  os coeficientes de  $\tilde{\mu}_{I_1}$  são  $0 = 1 - 1 = \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = \sum_{0 \leq i \leq 1} (-1)^i \binom{|I_1|}{i}$ , e no caso  $|I_1| = 2$  os coeficientes são  $0 = 1 - 2 + 1 = \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \sum_{0 \leq i \leq 2} (-1)^i \binom{|I_1|}{i}$ .



Os exemplos a seguir ilustram o Teorema 3.3

**Exemplo 4.21:** Consideremos o polinômio do exemplo 2.11,  $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por  $f(x, y) = x^6 + xy - 2x^3y^2 + y^4$ , temos que  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos que ligam os pontos  $(0,4)$  a  $(6,0)$ , como observamos na figura abaixo.

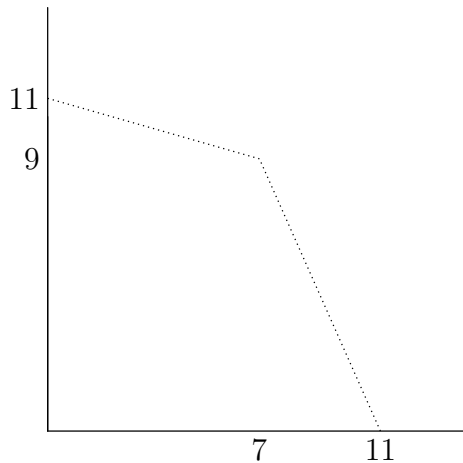


Do exemplo 2.11 temos que  $f$  é um polinômio cômodo com parte principal degenerada no infinito, então pelo teorema 3.3 o número de Milnor do polinômio  $f$  é menor ao número de Newton  $\tilde{\nu}(f)$ . Assim

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle 6x^5 + y - 6x^2y^2, x - 4x^3y + 4y^3 \rangle} \leq \tilde{\nu}(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1,$$

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle 6x^5 + y - 6x^2y^2, x - 4x^3y + 4y^3 \rangle} \leq \tilde{\nu}(f) = 15.$$

**Exemplo 4.22:** Consideremos o polinômio do exemplo 2.12,  $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dada por  $f(x, y) = x^{11} + x^5y - 2x^3y^3 + x^7y^9 + xy^5 + y^{11}$ , temos que  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos que ligam os pontos  $(0,11)$  a  $(7,9)$  e  $(7,9)$  a  $(11,0)$ , como observamos na figura abaixo.

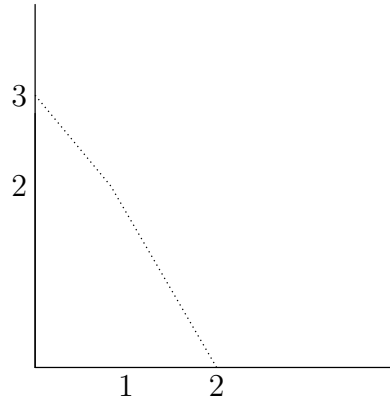


Vemos do exemplo 2.12 que  $f$  é um polinômio cômodo com parte principal Newton não-degenerada no infinito, então pelo teorema principal 3.3 temos

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \tilde{\nu}(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1$$

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle 11x^{10} + 5x^4y - 6x^2y^3 + 7x^6y^9 + y^5, x^5 - 6x^3y^2 + 9x^7y^8 + 5xy^4 + 11y^{10} \rangle} = 155.$$

**Exemplo 4.23:** Consideremos o polinômio do exemplo 2.21,  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x, y) = x^2 + xy^2 + 2y^3$ , temos que  $\tilde{\Gamma}_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos que ligam os pontos (0,3) a (1,2) e (1,2) a (2,0), como observamos na figura abaixo.



Temos que  $f$  é um polinômio é Newton não-degenerada no infinito, pois se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_1} = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_1} = 0$ , onde  $\Delta_1$  é a face formada pelos vértices (0, 3) e (1, 2), então  $x = 0$  ou  $y = 0$ . E se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta_2} = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta_2} = 0$ , onde  $\Delta_2$  é a face formada pelos vértices (1, 2) e (2, 0), então  $x = 0$  ou  $y = 0$ , então pelo teorema principal 3.3 temos

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \tilde{\nu}(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1$$

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\langle 2x + y^2, 2xy + 6y^2 \rangle} = 3$$

Logo temos que a soma dos números de Milnor dos pontos singulares isolados de  $f$  é  $\tilde{\mu}(f) = 3$ .

Se  $p$  é um ponto singular isolado de  $f$  então nos denotamos o número de Milnor do polinômio  $f$  em  $p$  por  $\mu_p(f)$ . Calculemos os números de milnor em cada ponto singular isolado de  $f$ , para obter os pontos singulares de  $f$  resolvemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 6y^2 = 0, \quad (4.14)$$

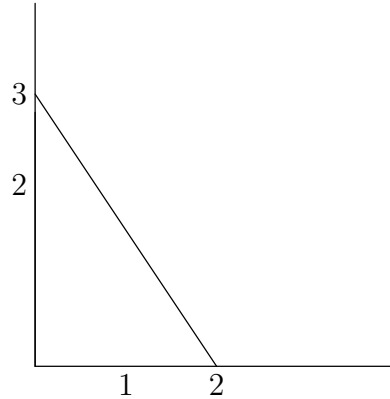
que tem como solução os pontos  $p_1 = (0, 0)$  e  $p_2 = (-18, 6)$ .

Logo o teorema 3.3 afirma que:

$$\tilde{\mu}(f) = \mu_{p_1} + \mu_{p_2}(f) \quad (4.15)$$

vamos a verificar esta igualdade.

Calculemos o número de Milnor do polinômio  $f$  no ponto  $p_1 = (0, 0)$  que é calculado considerando  $f$  como uma série formal, então pelo teorema 3.1 apresentado no capítulo 3 temos que  $\Gamma_-(f)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos que ligam os pontos  $(0, 3)$  a  $(2, 0)$ , e a fronteira de Newton  $\Gamma(f)$  é o segmento formado pelos vértices  $(0, 3)$ ,  $(2, 0)$  como podemos observar na figura abaixo.



Temos que  $f$  é uma série não-degenerada na origem, pois se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_\Delta = x(2x + y^2) = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_\Delta = 2y^2(x + 3y) = 0$ , onde  $\Delta$  é a face formada pelos vértices  $(0, 3)$  e  $(2, 0)$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ , então pelo teorema 3.1 temos

$$\mu_{p_1}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \nu(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1$$

$$\mu_{p_1}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{\langle 2x + y^2, 2xy + 6y^2 \rangle} = 2$$

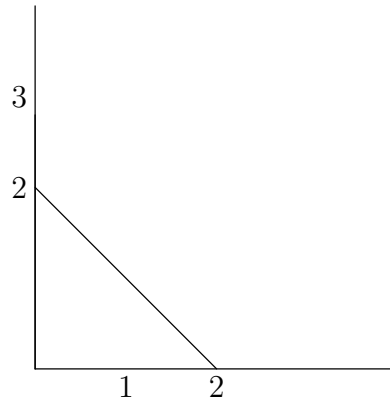
Para calcular o número de Milnor do polinômio  $f$  em  $p_2$  fazemos a mudanças de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, p_2) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, f(p_2)) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \phi \\ (\mathbb{C}^2, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

onde  $\phi(z) = z - f(p_2)$ ,  $\varphi(x, y) = (x, y) - p_2$ , e  $g = \phi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é um polinômio com a seguinte propriedade  $\mu(g) = \mu_{p_2}(f)$ .

Portanto é suficiente calcular o número de Milnor de  $g$ , observamos que  $g$  é dado por  $g(x, y) = x^2 + xy^2 + 12xy + 18y^2 + 2y^3$ , então temos que  $\Gamma_-(g)$  é a parte limitada em  $\mathbb{R}_+^2$  pelos segmentos que ligam os pontos  $(0, 2)$  a  $(2, 0)$ , e a fronteira de Newton  $\Gamma(f)$  é o

segmento formado pelos vértices  $(0,2)$ ,  $(2,0)$  como podemos observar na figura abaixo.



Temos que  $g$  é uma série formal Newton não-degenerada na origem, pois se  $(x \frac{\partial f}{\partial x})_{\Delta} = 2x(x + 6y) = 0$  e  $(y \frac{\partial f}{\partial y})_{\Delta} = 12y(x + 3y) = 0$ , onde  $\Delta$  é a face formada pelos vértices  $(0, 2)$  e  $(2, 0)$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ , então pelo teorema 3.1 temos

$$\mu_{p_2}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle} = \nu(f) = 2!V_2 - 1!V_1 + 1$$

$$\mu_{p_1}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{\langle x + y^2 + 12y, 2xy + 12x + 36y + 6y^2 \rangle} = 1$$

Portanto a igualdade 4.15 é satisfeita.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G.; Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. (1969).
- [2] Bivià-Ausina, C.; Fukui, T. e Saia, M. J.; Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerate ideals. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 135, (2002) 55-75.
- [3] Carles Bivià-Ausina.; Injectivity of real polynomial maps and Łojasiewicz exponents at infinity. Springer-Verlag. Math. Z.257, (2007) 745-767.
- [4] Bivià-Ausina, C.; Tesis Doctoral. València. (2000).
- [5] Cristina Spohr.; Poliedro de Newton e o Número de Milnor. Dissertação Mestrado. Universidade Federal de São Carlos. (2006).
- [6] Bruns, W.; Herzog, J.; Cohen-Macaulay rings. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. 39, (1993).
- [7] Cox, D. A.; Little, J. e O'Shea, D.; Using Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, No.185. Springer-Verlag, New York. (2005).
- [8] Eisenbud, D.; Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 150. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York. (1995).
- [9] Fulton, W.; Algebraic Curves: an introduction to algebraic geometry. Addison-Wesley Publishing Co., Inc. (1989).
- [10] Gibson, C. G.; Singular points of smooth mappings. Pitman Publishing Limited, London. (1979).

- [11] Hochster, M.; Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes. *Ann. of Math.* 96, (1972) 318-337.
- [12] Kouchnirenko, A. G.; Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Inventiones math.* 32, (1976) 1-31.
- [13] Massey, W. S.; *Singular Homology Theory*. Graduate Texts in Mathematics, No. 70. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York. (1980).
- [14] Mather, J. N.; Stability of  $C^\infty$  mappings III. *Publ. Sc. IHES* 35, (1969) 127-156.
- [15] Matsumura, H.; *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 8, (1988).
- [16] Milnor, J. W.; *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Math. Studies, Princeton University. 61, (1968).
- [17] Munkres, J. R.; *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company. (1984).
- [18] Northcott, D.; *Lessons on rings, modules and multiplicities*. Cambridge University Press, London. (1988).
- [19] Rotman, J. J.; *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, New York. (1979).
- [20] Serre, Jean-Pierre; *Local algebra*. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. (2000).
- [21] Shafarevich, I. R.; *Basic Algebraic Geometry*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, No. 213. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York. (1977).
- [22] Tráng, L. D.; *Topologie des Singularites des Hypersurfaces Complexes*. *Asterisque* 7 e 8, (1973) 171-182.

# Índice Remissivo

---

- anel
  - Artiniano, 3
  - Cohen-Macaulay, 15
  - Noetheriano, 3
  - graduado, 7
- anel de Rees
  - associado a filtração, 36
- anel graduado associado a filtração multiplicativa do anel, 10
- anulador de um módulo, 15
- aplicação característica, 19
- aplicação estrita, 60
  
- célula, 19
- cadeia, 4
- característica de Euler-Poincaré, 15
- complexo, 10
- complexo a esquerda, 12
- complexo acíclico, 11
- complexo de cadeia celular, 21
- complexo de Koszul, 12
  - com coeficientes no módulo , 15
- componente homogênea, 7, 8
- comprimento de um módulo, 4
- CW-complexo, 19
  
- dimensão de um módulo, 15
- elemento homogêneo
  - de um anel graduado, 7
  - de um módulo graduado, 8
- Ext, 6
  
- filtração
  - de Newton, 35
- filtração de anéis, 9
- filtração multiplicativa, 9
- fronteira de Newton
  - de um polinômio de Laurent, 24
  - de um polinômio, 24
  - de uma série formal, 24
- função semicontínua inferiormente, 64
  
- germe
  - degenerado, 27
  - Newton degenerado, 27
- gradação
  - induzida, 9
  - quociente, 9
  - trivial, 7
- grupos de homologia relativa, 20
  
- isomorfismo de complexos, 11
  
- Lema de Nakayama, 5
  
- M-sequência, 16
- M-sequência regular, 16
- módulo

- Artiniano, 3
- Cohen-Macaulay, 15
- Noetheriano, 3
  - graduado, 8
  - injetivo, 5
  - projetivo, 5
  - simples, 4
- módulo componente de grau  $n$ , 10
- monóide graduado, 6
- monômio em um anel graduado associado ,
  - 46
- $n$ -ésima componente do complexo, 10
- $n$ -ésima diferencial, 10
- $n$ -ésimo homomorfismo de bordo, 10
- $n$ -ésimo módulo de homologia, 11
- $n$ -bordos, 11
- $n$ -ciclos, 11
- $n$ -esqueleto, 20
- número de Newton
  - de um polinômio de Laurent, 26
  - de um polinômio, 26
  - de uma série formal, 26
- Newton polinômio de Laurent
  - não-degenerado, 27
- parte principal
  - de um polinômio de Laurent, 24
  - de um polinômio, 24
  - de uma série formal, 24
- parte principal newtoniana
  - de um polinômio de Laurent, 24
  - de um polinômio, 24
  - de uma série formal, 24
- poliedro de Newton, 24
- polinômio
  - cômodo, 24
  - Newton não-degenerado, 27
  - polinômio de Laurent
    - cômodo, 24
  - profundidade de um ideal, 17
  - profundidade de um módulo, 16
  - resolução injetiva, 5
  - resolução projetiva, 6
- série
  - Newton não-degenerada, 27
  - cômoda, 24
  - série de composição, 4
  - série de Hilbert, 18
  - série de Poincaré, 18
- sequência
  - M-regular maximal, 16
  - M-regular, 16
- simplexo, 19
- sistema de multiplicidade, 15
- sistema de parâmetros
  - de um anel, 16
  - de um módulo, 16
- submódulo homogêneo, 8
- suporte, 24
- Teorema da Base de Hilbert, 4
- Teorema de Sard, 31
- Teorema dos Zeros de Hilbert, 5
- vértice, 19
- vetor
  - primitivo, 33