UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Propriedades das soluções de equações diferenciais em medida

Fernando Gomes de Andrade

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Fernando Gomes de Andrade

Propriedades das soluções de equações diferenciais em medida

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
Abril de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A553p

Andrade, Fernando Gomes de
Propriedades das soluções de equações diferenciais em medida / Fernando Gomes de Andrade; orientador Miguel Vinícius Santini Frasson. -- São Carlos, 2019.
68 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Equações diferenciais em medida. 2. Equações neutras. 3. Existência e unicidade de soluções. 4. Dependência contínua de soluções. 5. Controlabilidade. I. Frasson, Miguel Vinícius Santini, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Fernando Gomes de Andrade

Properties of solutions of measure differential equations

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
April 2019

Dedico este trabalho à minha família, minha maior motivação.

AGRADECIMENTOS

É realmente verdade que gratidão gera gratidão e lamúria gera lamúria. Isto acontece porque o coração agradecido comunica-se com Deus, e o queixoso relaciona-se com Satanás. Assim, quem vive agradecendo, torna-se feliz; quem vive se lamuriando, caminha para a infelicidade. A frase "Alegrem-se que virão coisas alegres", expressa uma grande verdade (Meishu-Sama).

Primeiramente quero agradecer a Deus, pois, sem Ele a concretização desse trabalho não seria possível.

À minha família. Agradeço aos meus pais, Genilda e Nilson, que sempre fizeram todo o possível para que os filhos pudessem estudar. A minha irmã, Fabiane, e aos meus irmãos, Flávio e Felipe, por sempre acreditaram e me apoiarem na conclusão deste trabalho.

Agradeço a todos os mestres com quem tive a oportunidade de conviver e aprender. Em especial, aos professores Luís Antônio e Roseli Arbach, pela orientação durante a graduação; à minha orientadora do mestrado, Andréa, por ter acreditado e me encaminhado ao doutorado; ao professor Miguel, pela orientação no doutorado; às professoras Márcia Federson e Patrícia pela ajuda e valiosas contribuições na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos. Aos companheiros de República, Angelo, Douglas, Éverton, Leandro, Wilker, pelos incontáveis momentos bons. As amizades que São Carlos fortaleceu ou me permitiu conhecer, Aninha, Rafaella, Pedro, Paty, Maico, Amanda, Matheus, Marielle, Fernanda, Dione, Jorge, Victor, Thales, Thiago (fera), Gustavo, Josuel, Henrique Koch, Thiago Henrique, Rafael, Naiara, Karen e Renata pelas conversas boas e produtivas (as vezes nem tanto rs) durante os cafés, e à "grande" irmã que a vida me deu, Carol, por seu companheirismo durante o doutorado.

Aos funcionários do ICMC pelo excelente serviço prestado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Se existe um problema que você não pode resolver, então
existe um problema mais fácil que você pode resolver:
encontre-o.
(George Pólya)

RESUMO

ANDRADE, F. G. **Propriedades das soluções de equações diferenciais em medida**. 2019. 68 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Equações diferenciais funcionais em medida podem ser usadas como ferramentas para o estudo de modelos físicos mais próximos da realidade, por exemplo, modelos com fenômeno de "jump" e constituem um ramo relativamente novo de equações diferenciais. Embora esse campo tenha se desenvolvido nos últimos anos, a teoria sobre equações diferenciais funcionais em medida é escassa, com algumas classes de equações ainda não pesquisadas. Neste trabalho, vamos explorar as equações diferenciais funcionais neutras em medida com retardo infinito. Usando técnicas conhecidas na literatura, obtemos propriedades qualitativas para sua solução, como existência, unicidade e dependência contínua com relação as condições iniciais. Além disso, estudamos a controlabilidade de um sistema descrito por este tipo de equação.

Palavras-chave: Equações diferenciais em medida, Equações neutras, Existência de soluções, Unicidade de soluções, Dependência contínua de soluções, Controlabilidade.

ABSTRACT

ANDRADE, F. G. **Properties of solutions of measure differential equations**. 2019. 68 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Measure differential equations is a branch of differential equations area recently discovered that can be used as a tool to study physical models closer to the reality, for example, models with the phenomenon of jump. Although this field has been developed in the recent years, the theory of measure functional differential equations is still scarce, and some classes of these equations have not been described yet. Here, we will explore the neutral measure functional differential equations with infinite delay. Using techniques known in the literature, we obtain qualitative properties of their solutions, such as existence, uniqueness and continuous dependence. In addition, we study controllability for systems described by this type of equation.

Keywords: Measure differential equations, Neutral equations, Existence of solutions, Uniqueness of solutions, Continuous dependence of solutions, Controllability.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 19

1 PRELIMINARES 21
1.1 Funções Regradas 21
1.2 Integral de Kurzweil 22
1.3 EDO generalizadas 26

2 EDFN EM MEDIDA COM RETARDO INFINITO VIA EDO GENERALIZADA 31
2.1 Espaço de Fase 31
2.2 EDFN em medida e EDO generalizada 34
2.3 Existência e unicidade de soluções 45
2.4 Dependência contínua 48

3 CONTROLABILIDADE 53
3.1 Controlabilidade para sistemas de EDF 53
3.2 Controlabilidade de sistemas de EDF em medida 55

REFERÊNCIAS 65

INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial funcional, abrev. EDF, é uma equação diferencial em que a taxa de variação da solução depende tanto de ocorrências do presente quanto do passado. Em outras palavras, esse tipo de equação pode descrever eventos futuros a partir de informações do que temos agora e de observações anteriores.

Suponha que $0 \leqslant r \leqslant +\infty$ seja um número real dado, $\mathbb{R}^n$ seja o espaço euclidiano de dimensão n com norma $|\cdot|$, e $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ seja o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ assumindo valores em $\mathbb{R}^n$, munido com a norma do supremo, isto é, para $\varphi \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\| = \sup_{a\leqslant\theta\leqslant b}\varphi(\theta)$. Se $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$ e $y \in \mathscr{C}([t_0-r,t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$, para $t \in [t_0,t_0+\sigma]$ definimos $y_t \in \mathscr{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, a história de y em t, por $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, para todo $\theta \in [-r,0]$. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathscr{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, dizemos que a relação

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t,y_t) \tag{1}$$

é uma equação diferencial funcional retardada (EDFR). Uma função y é chamada de solução de (1) em $[t_0-r,t_0+\sigma)$ se existe $\sigma > 0$ tal que $y \in \mathscr{C}([t_0-r,t_0+\sigma),\mathbb{R}^n)$, $(t,y_t) \in \Omega$ e y satisfaz (1) para todo $t \in [t_0,t_0+\sigma]$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathscr{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, dizemos que $y(t;t_0,\varphi)$ é solução de (1) com condição inicial φ se existe $\sigma > 0$ tal que $y(t;t_0,\varphi)$ é solução de (1) em $[t_0-r,t_0+\sigma)$ e $y_{t_0}(\cdot,\varphi) = \varphi$. Para um estudo detalhado e aprofundado das EDFR's, veja (HALE; LUNEL, 1993).

A partir da necessidade de aplicações reais, houve uma evolução deste ramo de equações diferenciais. Durante este processo surgiram alguns tipos de EDFR's, dentre elas a EDF neutra (EDFN) e a EDF impulsiva (EDI). Podemos ainda dividir as EDRF's em classes de retardo finito e retardo infinito, *i.e.*, tomando $r = +\infty$. Diferente do que acontece com as EDFR's com retardo finito, em que o estado y_t é uma função contínua para $t \geqslant t_0+r$, nas EDFR's com retardo infinito a solução sempre vai carregar informações da condição inicial, isto é, x_t sempre vai incluir parte da função inicial para qualquer $t \geqslant t_0$. Por este motivo, a teoria desenvolvida deve ser adequada a cada espaço de fase escolhido. Para desviar dessa dificuldade, Hale e Kato (1978) adotaram como espaço de fase um espaço de Banach satisfazendo algumas propriedades qualitativas (axiomas de definição). Mais tarde, Hino, Murakami e Naito (1991) mostraram que alguns espaços de funções bem conhecidos satisfazem os axiomas de (HALE; KATO, 1978).

Questões envolvendo essas equações vem sendo extensivamente estudadas na literatura. Por exemplo, no contexto de retardo finito Andrade (2014) estudou a controlabilidade de sistemas representados por EDFN's, Frasson e Lunel (2003) descreveram o comportamento assintótico

de uma classe de EDFN's, Benchohra, Henderson e Ntouyas (2006) apresentaram a teoria de existência e Federson e Mesquita (2016) estabeleceram resultados de dependência contínua para as EDI's. Já com retardo infinito temos a existência e unicidade para EDFN's desenvolvida por Hernández e Henríquez (1998).

Caminhando um pouco mais na evolução das EDF's, na década de 1960 surgem as equações diferenciais em medida

$$Dy = f(t,y) + G(t,y)Dg, \tag{2}$$

onde D denota a derivada distribucional da função g e $G(t,y)$ pode ser tomada como uma função contínua ou uma função integrável que faz o sistema evoluir continuamente com relação ao tempo. Tais equações foram estudadas primeiramente por Schmaedeke (1965) na teoria do controle, considerando o caso especial em que $G(t,y) = G(t)$ é uma função contínua com relação a t (lembramos que quando g é uma função de variação limitada então Dg torna-se uma medida de Stieltjes). Uma solução de (2) é uma função y de variação limitada cuja derivada distribucional Dy satisfaz a equação (2). Note que agora não se espera mais a continuidade das soluções, melhor dizendo, estamos lidando com uma ferramenta que possibilita a modelagem de modelos físicos descontínuos, por exemplo, com o fenômeno de salto.

Posteriormente, Das e Sharma (1971) incluíram na área de equações as EDF's em medida

$$Dy = f(t,y_t) + G(t,y_t)Dg. \tag{3}$$

Muitas das técnicas usuais para se obter propriedades das soluções não se aplicam as EDFR's em medida ou são de tratamento muito complexo. Esse inconveniente pôde ser superado usando uma nova forma de olhar para as EDFR's em medida. A técnica, que consiste relacionar EDF's e EDO's generalizadas (veja a seção 1.3) através de uma correspondência biunívoca, foi apresentada na literatura pela primeira vez por Imaz e Vorel (1966) e Oliva e Vorel (1966). Desde então, alguns trabalhos têm aparecido nessa linha, por exemplo, (FEDERSON; SCHWABIK, 2006), (FEDERSON *et al.*, 2018) e (MONTEIRO; SLAVÍK, 2014) relacionaram com EDO generalizadas as EDI's com retardo finito, EDFN's em medida com retardo finito e EDFR's lineares em medida com retardo infinito, respectivamente.

Embora a teoria de equações diferenciais em medida esteja bem encaminhada, este campo de pesquisa das equações ainda desperta muito interesse. Neste trabalho, vamos estudar EDFN's em medida com retardo infinito. Mais especificamente, tendo em vista (DAS; SHARMA, 1972), vamos considerar sua forma integral

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y_s)\,dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}. \tag{4}$$

Nosso objetivo é associar (4) a uma EDO generalizada e, usando a teoria disponível na literatura sobre estas equações, extrair propriedades qualitativas de uma solução de (4).

Dividimos nosso trabalho em duas partes principais. Num primeiro momento estudamos qual o melhor cenário para que nossa correspondência seja concretizada, ou seja, vamos procurar um espaço de fase que seja o mais conveniente para as EDF's neutras em medida com retardo infinito e analisar quais são as particularidades que cada elemento de (4) deve satisfazer para que possamos associar a (4) uma EDO generalizada. A partir disto, vamos extrair propriedades qualitativas da solução de (4), a saber, existência, unicidade e dependência contínua das soluções de (4).

Na segunda parte, estudaremos a controlabilidade para sistemas descritos por uma EDFN em medida perturbada com retardo infinito. Usando a teoria de controle para EDO generalizadas e correspondências existentes na literatura, vamos explorar essa propriedade da solução de (4) comparando com outros sistemas.

CAPÍTULO

1

PRELIMINARES

Neste capítulo são introduzidas ferramentas básicas que fundamentam todo este trabalho. Dividimos este capítulo em três partes, sendo a primeira delas destinada à apresentação de uma classe de funções bem conhecida na literatura, a segunda ao estudo da Integral de Kurzweil e finalizamos com a teoria de equações diferenciais ordinárias generalizadas.

Neste capítulo, consideraremos X um espaço de Banach munido de uma norma $\|\cdot\|$ e $a,b \in \mathbb{R}$, com $-\infty < a < b < +\infty$.

1.1 Funções Regradas

Recordamos aqui uma importante classe de funções para o nosso propósito, conhecida como a classe das funções regradas. As informações contidas aqui sobre este tipo de função, quando não forem explicitamente citadas, podem ser encontradas com maiores detalhes, por exemplo, em (FRAŇKOVÁ, 1991) e (BANAŚ; KOT, 2017).

Definição 1.1. Uma função $f : [a,b] \to X$ é regrada quando existem e são finitos os limites laterais

$$f(t^-) := \lim_{s \to t^-} f(s),\ t \in (a,b] \quad \text{e} \quad f(t^+) := \lim_{s \to t^+} f(s),\ t \in [a,b).$$

Uma *partição* de $[a,b]$ é uma coleção finita de pontos $D = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, sendo $a = s_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n = b$. Se existir uma partição de $[a,b]$, tal que uma função f é constante em cada intervalo (s_{j-1}, s_j), então f é chamada de *função escada.*

O Teorema 1.2 abaixo diz que o conjunto das funções regradas $f : [a,b] \to X$, aqui denotado por $G([a,b],X)$ de acordo com (HÖNIG, 1975) e (TVRDÝ, 1989), é o fecho do espaço das funções escada. Isto é, o espaço $G([a,b],X)$, munido com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$, torna-se um espaço de Banach.

Teorema 1.2. *Seja f uma função de $[a,b]$ em X. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) *$f : [a,b] \to X$ é limite uniforme de funções escada.*

(ii) *$f : [a,b] \to X$ é regrada.*

(iii) *Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $D = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ de $[a,b]$ tal que*

$$\sup\{\|f(t) - f(s)\|,\ t,s \in (s_{j-1}, s_j),\ i = 1, \ldots, n\} < \varepsilon.$$

Corolário 1.3. *Toda função regrada $f : [a,b] \to X$ é limitada por uma constante.*

Corolário 1.4. *Se $f : [a,b] \to X$ é uma função regrada então, para todo $\varepsilon > 0$, os conjuntos*

$$\{t \in [a,b), \|f(t^+) - f(t)\| \geqslant \varepsilon\} \ \ e \ \ \{t \in (a,b], \|f(t) - f(t^-)\| \geqslant \varepsilon\}$$

são finitos. Além disso, o conjunto de pontos de descontinuidade da função f é enumerável.

Sejam $f : [a,b] \to X$ e $D = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Se considerarmos

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \|f(s_j) - f(s_{j-1})\|$$

como uma soma do tipo Riemman para a função f, sua variação em $[a,b]$ é dada por

$$\mathrm{var}_{[a,b]}(f) = \sup\{S(f,D)\},$$

com o supremo tomado sobre todas as partições de $[a,b]$. Quando $\mathrm{var}_{[a,b]}(f) < +\infty$, a função f é dita de *variação limitada*. O conjunto dessas funções, usualmente denotado por $BV([a,b],X)$, é um espaço de Banach se considerarmos a norma $\|f\|_{BV} = \|f(a)\|_X + \mathrm{var}_{[a,b]}(f)$. Segundo (KREJČÍ, 2005 apud BRÉZIS, 1973) sabe-se que $BV([a,b],X) \subset G([a,b],X)$.

Finalizamos esta seção apresentando um conjunto de funções regradas que possuem uma certa regularidade.

Definição 1.5. Um conjunto $\mathscr{A} \subset G([a,b],X)$ é dito equi-regrado se, para cada $\varepsilon > 0$ e cada $t_0 \in [a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathscr{A}$ valem:

(i) se $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, então $\|f(t) - f(t_0^-)\| < \varepsilon$;

(ii) se $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, então $\|f(t) - f(t_0^+)\| < \varepsilon$.

1.2 Integral de Kurzweil

Falando em integrais, podemos dizer que houve uma evolução ao longo do desenvolvimento da Análise. Tipicamente os cursos de graduação apresentam a integral de Riemann, em seguida a integral imprópria de Riemann e mais tarde, a integral de Lebesgue. Porém, mesmo estas integrais não eram totalmente adequadas e muitas classes de funções não se enquadravam

entre as funções integráveis. Mais tarde, temos as definições de Arnaud Denjoy e Oskar Perron, que vieram ser equivalentes. Décadas depois, Jaroslav Kurzweil e Ralph Henstock, de forma independente, tal como Leibniz e Newton no desenvolvimento do Cálculo, desenvolveram uma versão mais simples para a definição da integral de Denjoy-Perron, sobre a qual veremos algumas propriedades a seguir.

Os resultados e definições aqui enunciados são bem conhecidos na literatura e podem ser encontrados, por exemplo, em (GODOY, 2009). Veja também (SCHWABIK, 1992), para o caso particular $X = \mathbb{R}^n$.

Uma *partição marcada* de $[a,b]$ é uma coleção finita de pares *ponto-intervalo* $D = \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]), j = 1, \ldots, n\}$, onde $a = s_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n = b$ é uma divisão de $[a,b]$ e $\tau_j \in [s_{j-1}, s_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Um *calibre* em um conjunto $B \subset [a,b]$ é uma função $\delta : B \to (0, \infty)$. Dado um calibre δ em $[a,b]$ dizemos que uma divisão marcada $D = \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]), j = 1, \ldots, n\}$ é *δ-fina* se, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$[s_{j-1}, s_j] \subset (\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)).$$

É natural se perguntar quando é possível encontrar uma partição δ-fina a partir de um calibre δ dado. O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em (HENSTOCK, 1988), traz a resposta para essa pergunta.

Lema 1.6 (Lema de Cousin)**.** *Dado um calibre δ em $[a,b]$, existe uma partição δ-fina de $[a,b]$.*

Apresentamos a seguir o conceito de integrabilidade no sentido de Kurzweil para uma função definida em $[a,b] \times [a,b]$ tomando valores em X.

Definição 1.7. Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é dita Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ se existe um elemento $I \in X$ satisfazendo a seguinte condição:

dado $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que, para toda partição marcada δ-fina $D = \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]), j = 1, \ldots, n\}$ de $[a,b]$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} [U(\tau_j, s_j) - U(\tau_j, s_{j-1})] - I \right\| < \varepsilon.$$

Na definição acima o elemento I é chamado a integral de Kurzweil de U sobre $[a,b]$ e denotado por $\int_a^b DU(\tau,t)$. Com alguns cálculos é possível mostrar que algumas propriedades básicas da integral de Kurzweil são similares às propriedades da integral de Riemann, a saber, linearidade, aditividade com relação a intervalos adjacentes e integrabilidade em subintervalos. Além disso, quando $\int_a^b DU(\tau,t)$ existe, definimos $\int_a^b DU(\tau,t) = -\int_b^a DU(\tau,t)$, quando $b < a$, e $\int_a^b DU(\tau,t) = 0$, quando $a = b$.

Alguns casos específicos são bem conhecidos quando δ é um calibre constante. Por exemplo, se $U(\tau,t) = f(\tau)g(t)$, com $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função, então obtemos a integral de Riemann-Stieltjes de f com relação a g. Ainda, se $g(t) = t$ então $U(\tau,t) = f(\tau) \cdot t$ e, nesse caso, obtemos a usual integral de Riemann. Esta análise nos permite dizer que funções Riemman integráveis são funções Kurzweil integráveis podendo-se tomar um calibre constante.

No que segue, enunciamos uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de funções no sentido de Kurzweil, onde

$$S(U,D) = \sum_{j=1}^{n} [U(\tau_j, s_j) - U(\tau_j, s_{j-1})]$$

representa uma soma do tipo Riemman para a função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ em relação a partição marcada $D = \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]), j = 1, \ldots, n\}$.

Teorema 1.8 (Critério de Cauchy)**.** *Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ será integrável sobre $[a,b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um calibre δ em $[a,b]$ tal que*

$$\|S(U,D_1) - S(U,D_2)\| < \varepsilon,$$

para quaisquer partições marcadas δ-finas D_1, D_2 do intervalo $[a,b]$.

O próximo resultado, conhecido como Lema de Saks-Henstock, diz que se uma função é integrável em $[a,b]$ então, para os mesmos ε e δ, a integral em partes de $[a,b]$ pode ser considerada como a soma de Riemman dessa função respectiva a essas partes.

Lema 1.9. *Sejam $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, seja δ um calibre em $[a,b]$ tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} [U(\tau_j, s_j) - U(\tau_j, s_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \varepsilon,$$

para toda partição marcada δ-fina $D = \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]), j = 1, \ldots, n\}$ de $[a,b]$. Se

$$a \leqslant \alpha_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m \leqslant \xi_m \leqslant \beta_m \leqslant b,$$

representa uma partição marcada δ-fina $\{(\xi_j, [\alpha_j, \beta_j]), j = 1 \ldots, m)\}$, sem que necessariamente tenhamos $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{m} [\alpha_j, \beta_j]$, então

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \alpha_j) - \int_{\alpha_j}^{\beta_j} DU(\tau,t) \right] \right\| < \varepsilon.$$

Teorema 1.10. *Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função Kurzweil integrável sobre $[a,c]$, para todo $c \in [a,b)$. Se existir o limite*

$$\lim_{c \to b^-} \left[\int_a^c DU(\tau,t) - U(b,c) + U(b,b) \right] = I \in X,$$

então a função U será Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I.$$

Analogamente, se a função U for Kurzweil integrável sobre $[c,b]$ e existir o limite

$$\lim_{c\to a^+}\left[\int_c^b DU(\tau,t) + U(a,c) - U(a,a)\right] = I \in X,$$

para todo $c \in (a,b]$, então a função U será Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I.$$

Corolário 1.11. *Considere o par de funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

i) *Se a integral de Kurzweil-Henstock-Stieltjes $\int_a^t f(s)dg(s)$ existir para todo $t \in [a,b)$ e*

$$\lim_{t\to b^-}\left[\int_a^t f(s)dg(s) + f(b)(g(b)-g(t))\right] = I,$$

então $\int_a^b f(s)dg(s) = I$.

ii) *Se a integral de Kurzweil-Henstock-Stieltjes $\int_t^b f(s)dg(s)$ existir para todo $t \in (a,b]$ e*

$$\lim_{t\to a^+}\left[\int_t^b f(s)dg(s) + f(b)(g(b)-g(t))\right] = I,$$

então $\int_a^b f(s)dg(s) = I$.

O Teorema 1.12 sugere um comportamento para a função $s \mapsto \int_a^s DU(\tau,t)$. Mais especificamente, nem sempre é verdade que a integral indefinida da função U é uma função contínua.

Teorema 1.12 (Hake)**.** *Sejam $U : [a,b]\times[a,b] \to X$ Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e $c \in [a,b]$. Então,*

$$\lim_{s\to c}\left[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\right] = \int_a^c DU(\tau,t)$$

e

$$\lim_{s\to c}\left[\int_s^b DU(\tau,t) + U(c,s) - U(c,c)\right] = \int_c^b DU(\tau,t).$$

A seguir exibimos algumas propriedades para a integral indefinida de Kurzweil-Henstock-Stieltjes resultantes de casos particulares do teorema anterior.

Teorema 1.13. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções tais que g é regrada e $\int_a^b f(s)dg(s)$ existe. Então, as funções*

$$h(t) = \int_a^t f(s)dg(s),\ t \in [a,b], \qquad k(t) = \int_t^b f(s)dg(s), t \in [a,b],$$

são regradas em $[a,b]$ *e satisfazem*

$$h(t^+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t), \quad t \in [a,b),$$
$$h(t^-) = h(t) + f(t)\Delta^- g(t), \quad t \in (a,b],$$
$$k(t^+) = k(t) + f(t)\Delta^+ g(t), \quad t \in [a,b),$$
$$k(t^-) = k(t) + f(t)\Delta^- g(t), \quad t \in (a,b],$$

onde

$$\Delta^+ g(t) = g(t^+) - g(t) \quad e \quad \Delta^- g(t) = g(t) - g(t^-).$$

Para finalizar a seção, vejamos um resultado, bastante útil no decorrer deste trabalho, que apresenta uma condição para podermos majorar a integral de Kurzweil.

Teorema 1.14. *Seja* $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ *uma função integrável. Se* $V : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *for integrável e existir um calibre* δ *em* $[a,b]$ *tal que*

$$|t-\tau| \cdot \|U(\tau,t) - U(\tau,\tau)\| \leqslant (t-\tau) \cdot [V(\tau,t) - V(\tau,\tau)]$$

para todo $t \in (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$*, então*

$$\left\| \int_a^b DU(\tau,t) \right\| \leqslant \int_a^t DV(\tau,t).$$

1.3 EDO generalizadas

Nesta seção introduziremos as equações diferenciais ordinárias generalizadas, abreviadas por EDO generalizadas, e apresentaremos alguns resultados básicos desta teoria cujas demonstrações podem ser encontradas em (GODOY, 2009) e (SCHWABIK, 1992), para o caso particular $X = \mathbb{R}^n$. Por toda esta seção, considere O um subconjunto de X e $F : [a,b] \times O \to X$.

Definição 1.15. Uma função $x : [\alpha,\beta] \to O$ é solução da equação diferencial ordinária generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(t,x) \tag{1.1}$$

no intervalo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, se $(t,x(t)) \in [\alpha,\beta] \times O$ para todo $t \in [\alpha,\beta]$ e se, quaisquer que sejam $s_1, s_2 \in [\alpha,\beta]$,

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(t,x(\tau)). \tag{1.2}$$

A integral considerada na definição acima é a integral de Kurzweil, definida na Seção 1.2, para a função $U(\tau,t) = F(t,x(\tau))$.

Observação 1.16. No conceito de EDO generalizada, que é definido via solução da equação, a letra D em (1.1) não se refere a derivação, é apenas um símbolo usado para indicar que (1.1) é uma EDO generalizada. Mesmo a notação $\dfrac{dx}{d\tau}$ não significa que a solução de uma EDO generalizada tenha uma derivada.

Exemplo 1.17. Sejam O um conjunto de funções contínuas definidas em $[0,1]$ com valores em $\mathbb{R}$ e $z \in O$ uma função que não possui derivada em qualquer ponto $t \in [0,1]$. A função z pode ser, por exemplo, a restrição ao intervalo $[0,1]$ da função de Weierstrass

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cos(d^n \pi t),$$

onde $c \in (0,1)$ e d é um número inteiro positivo ímpar tal que $cd > 1 + 3\pi/2$. Definindo $F : [0,1] \times O \to \mathbb{R}$ por $F(t,x) = z(t)$, pela definição de integral de Kurzweil, temos

$$\int_c^d DF(t,x(\tau)) = \int_c^d Dz(t) = z(d) - z(c),$$

quaisquer que sejam $c,d \in [0,1]$. Assim, a função $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $x(s) = z(s)$ é solução da EDO generalizada

$$\frac{dx}{dt} = DF(t,x) = Dz(t),$$

mas não possui derivada em nenhum ponto de $[0,1]$.

Diferente da teoria de EDO, poucas informações podem ser extraídas da definição de solução de uma EDO generalizada. Diretamente sabemos apenas que a integral do lado direto de (1.2) existe. Ainda assim, usando o Teorema 1.12 podemos obter uma aproximação do valor $x(t)$, para cada $t \in [a,b]$ fixado.

Proposição 1.18. *Se $x : [\alpha,\beta] \to X$ for uma solução da EDO generalizada (1.1) em $[\alpha,\beta]$, então*

$$\lim_{s \to t} [x(s) - F(s,x(t)) + F(t,x(t))] = x(t)$$

para todo $t \in [\alpha,\beta]$.

Certas situações na teoria de EDO dependem de uma condição inicial associada ao problema. Quando isso acontece para uma EDO generalizada, podemos definir a solução de (1.1) com condição inicial $(t_0, x(t_0)) \in [a,b] \times X$ da seguinte forma.

Definição 1.19. Uma função $x : [\alpha,\beta] \to X$ é solução da EDO generalizada (1.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$ no intervalo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, se $t_0 \in [\alpha,\beta]$, $(t,x(t)) \in [a,b] \times O$ para todo $t \in [\alpha,\beta]$ e se, qualquer que seja $s \in [\alpha,\beta]$,

$$x(s) - x_0 = \int_{t_0}^{s} DF(t,x(\tau)).$$

A fim de obter resultados mais ricos sobre a solução de uma EDO generalizada, vamos nos restringir ao estudo das equações cuja função F em (1.1) satisfaz duas condições comuns na teoria de EDO generalizadas:

$(\mathscr{F}_1)$ Dada uma função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ não decrescente, para todo $x \in O$ e $t_1, t_2 \in [a,b]$,

$$\|F(t_2,x) - F(t_1,x)\| \leqslant |h(t_2) - h(t_1)|;$$

$(\mathscr{F}_2)$ Dada uma função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ não decrescente, para todo $x, y \in O$ e $t_1, t_2 \in [a,b]$,

$$\|F(t_2,x) - F(t_1,x) - F(t_2,y) + F(t_1,y)\| \leqslant |h(t_2) - h(t_1)|\,\|x-y\|.$$

Definição 1.20. Para $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ não decrescente, uma função $F : [a,b] \times O \to X$ pertence à classe $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$ se $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ são satisfeitas com tal h.

Lema 1.21. *Seja $F : [a,b] \times O \to X$ uma função que satisfaz $\mathscr{F}_1$, e $x : [a,b] \to X$ uma função tal que $(t, x(t)) \in [a,b] \times O$, para todo $t \in [a,b]$. Se a integral $\int_a^b DF(t, x(\tau))$ existe no sentido de Kurzweil, então, quaisquer que sejam $s_1, s_2 \in [a,b]$, temos*

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} DF(t, x(\tau)) \right\| \leqslant |h(s_2) - h(s_1)|.$$

No lema anterior, é preciso garantir a existência da integral de Kurzweil. A proposição a seguir nos dá condições para que isso aconteça.

Proposição 1.22. *Seja $F : [a,b] \times O \to X$ um elemento da classe $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$. Se $x : [a,b] \to X$ é um função regrada em $[a,b]$ (em particular, uma função de variação limitada) e $(t, x(t)) \in [a,b] \times O$, para todo $t \in [a,b]$, então a integral $\int_a^b DF(t, x(\tau))$ existe no sentido de Kurzweil e a função $s \mapsto \int_a^s DF(t, x(\tau))$ é de variação limitada em $[a,b]$.*

Supondo que a função F do lado direito de (1.1) seja de classe $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$ é possível obter informações mais precisas sobre a solução de uma EDO generalizada.

Lema 1.23. *Seja $F : [a,b] \times O \to X$ uma função que satisfaz $\mathscr{F}_1$. Se $x : [\alpha, \beta] \to X$ é uma solução da EDO generalizada (1.1), então*

$$\|x(s_2) - x(s_1)\| \leqslant |h(s_2) - h(s_2)|$$

quaisquer que sejam $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$.

Observação 1.24. Segue da desigualdade acima que os pontos do intervalo $[a,b]$ onde a função h é contínua, também são pontos de continuidade da solução da EDO generalizada (1.1).

Corolário 1.25. *Seja $F : [a,b] \times O \to X$ uma função que satisfaz $\mathscr{F}_1$. Se $x : [\alpha, \beta] \to X$ é uma solução da EDO generalizada (1.1), então x é uma função de variação limitada em $[\alpha, \beta]$ e*

$$var_{[\alpha,\beta]}(x) \leqslant h(\beta) - h(\alpha) < +\infty.$$

Na busca por informações e propriedades das soluções de uma EDO generalizada, vejamos um resultado acerca de suas descontinuidades. Usaremos as notações

$$F(t^+, x(t)) = \lim_{s \to t^+} F(s, x(t)),\ \forall t \in [a,b) \quad \text{e} \quad F(t^-, x(t)) = \lim_{s \to t^-} F(s, x(t)),\ \forall t \in (a,b].$$

Lema 1.26. *Considere $F : [a,b] \times O \to X$ uma função que satisfaz $\mathscr{F}_1$. Se $x : [\alpha,\beta] \to X$ é uma solução da EDO generalizada (1.1), então*

$$x(t^+) - x(t) = F(t^+, x(t)) - F(t, x(t)), \text{ para todo } t \in [\alpha,\beta),$$
$$x(t) - x(t^-) = F(t, x(t)) - F(t^-, x(t)), \text{ para todo } t \in (\alpha,\beta].$$

Observação 1.27. Pelo lema anterior, se F satisfaz $\mathscr{F}_1$ então uma solução $x : [\alpha,\beta] \to X$ da EDO generalizada (1.1) é uma função regrada.

Até este momento, todas as vezes que falamos em solução de uma EDO generalizada estamos assumindo que ela existe, mas ainda não sabemos sob quais condições isso acontece. Para estudar a existência e a unicidade de soluções da EDO generalizada (1.1), emprestamos um resultado, veja (FEDERSON; SCHWABIK, 2006, Teorema 2.15), que confere uma resposta para essa pergunta.

Teorema 1.28. *Sejam $O \subset X$ um subconjunto aberto e limitado e $F : [a,b] \times O \to X$ uma função de classe $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$, com $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e contínua à esquerda. Se x_0 e $x_0^+ = x_0 + F(t_0^+, x_0) - F(t_0, x_0)$ pertencem à O, então existe $\omega > 0$ e uma função $x : [t_0, t_0 + \omega] \to X$ sendo a única solução da EDO generalizada (1.1) com condição inicial $x(t_0) = x_0$.*

Observação 1.29. Segue da demonstração do teorema acima que se tivermos uma família de EDO generalizadas,

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_k(t,x), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

sendo $F_k \in \mathscr{F}([a,b] \times O, h^k)$, com $h^k : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções não decrescentes e contínuas à esquerda para todo $k = 0,1,2,\ldots$, então a hipótese adicional de que o conjunto $\mathscr{A} = \{h^k : [a,b] \to \mathbb{R}, k = 0,1,2,\ldots\}$ seja equi-regrado, garante a existência de $\omega > 0$ tal que $x^k : [t_0, t_0 + \omega] \to X$ é a única solução da (1.3) com condição inicial $x^k(t_0) = x_0^k$.

Dependência contínua fecha nosso breve estudo sobre EDO generalizadas. Aqui, o principal resultado é de (AFONSO *et al.*, 2011). No entanto, como esse assunto já foi amplamente estudado, na literatura existem vários trabalhos com versões diferentes de dependência contínua de soluções para este tipo de equação. Podemos citar, por exemplo, (FRAŇKOVÁ, 1989), (HALAS, 2007), (HALAS; TVRDÝ, 2009), (MONTEIRO; TVRDÝ, 2013).

Lema 1.30. *Sejam $F_k : [a,b] \times O \to X$, $k = 0,1,2,\ldots$, uma sequência de funções de classe $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$, onde h é não decrescente e contínua à esquerda, e $\psi_k \in G([\alpha,\beta], X)$, $k = 0,1,2,\ldots$, uma sequência de funções regradas em $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Suponha que $F_k \to F_0$ em $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$, quando $k \to +\infty$, e*

$$\|\psi_k - \psi_0\| = \sup_{t \in [\alpha,\beta]} \|\psi_k(t) - \psi_0(t)\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. *Então*

$$\left\| \int_\alpha^\beta DF_k(s, \psi_k(\tau)) - \int_\alpha^\beta DF_0(s, \psi_0(\tau)) \right\| \to 0, \text{ quando } k \to +\infty.$$

Eis o resultado sobre dependência contínua que generaliza o Teorema 8.2 de (SCHWABIK, 1992). Uma demonstração alternativa pode ser encontrar em (GODOY, 2009).

Proposição 1.31. *Suponha que* $F_k : [a,b] \times O \to X$, $k = 0,1,2,\ldots$, *seja uma sequência de funções de classe* $\mathscr{F}([a,b] \times O, h)$, *com* h *não decrescente e contínua à esquerda, tal que*

$$\lim_{k \to +\infty} F_k(t,x) = F_0(t,x),$$

para todo $(t,x) \in [a,b] \times O$. *Se* $x_k : [\alpha,\beta] \to X$ *é uma solução da equação diferencial generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_k(t,x), \quad k = 1,2,\ldots,$$

em $[\alpha,\beta]$, $(x(s),s) \in [a,b] \times O$, *para todo* $s \in [\alpha,\beta]$, *e se*

$$\lim_{k \to +\infty} x_k(s) = x_0(s), \ \forall s \in [\alpha,\beta],$$

então $x_0 : [\alpha,\beta] \to X$ *satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leqslant h(s_2) - h(s_1)$, *quaisquer que sejam* $s_1, s_2 \in [\alpha,\beta]$, *com* $s_1 \leqslant s_2$;

(ii) $\lim_{k \to +\infty} x_k(s) = x_0(s)$ *uniformemente em* $[\alpha,\beta]$;

(iii) x_0 *é uma solução em* $[\alpha,\beta]$ *da equação diferencial generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_0(t,x).$$

CAPÍTULO

2

EDFN EM MEDIDA COM RETARDO INFINITO VIA EDO GENERALIZADA

A ideia principal deste capítulo é obter propriedades das soluções de uma equação diferencial neutra (EDFN) em medida da forma

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}, \tag{2.1}$$

com retardo infinito, isto é, considerando $\varphi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ como condição inicial . Para isso, vamos usar a teoria existente para EDO generalizadas e estabelecer nossos resultados através de uma correspondência entre estes dois tipos de equações. Antes de começar a investigar as possíveis propriedades qualitativas da solução de (2.1), vamos estudar um ambiente apropriado para isso.

2.1 Espaço de Fase

Sejam $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e O um conjunto de funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Por toda esta seção, usaremos a notação $|\cdot|$ para representar uma norma de $\mathbb{R}^n$ e $G((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ denotando o conjunto das funções regradas $f : (-\infty,0] \to \mathbb{R}^n$.

Um importante conceito que utilizaremos é o conceito de prolongamento. Dizemos que O tem a propriedade de prolongamento se, para cada $y \in O$ e $t \in [a,b]$, a função $\overline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\overline{y}(s) = \begin{cases} y(s), & s \in (-\infty, t] \cap [a,b], \\ y(t), & s \in [t, \infty) \cap [a,b], \end{cases}$$

ainda pertence ao conjunto O. Uma ideia geométria deste conceito pode ser visto na Figura 1. Note que, dada $y \in G((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ e $t \in (-\infty,0]$, existem os limites laterais $\lim_{s\to\tau^+} y(s)$ para todo $\tau \in (-\infty,t)$ e $\lim_{s\to\tau^-} y(s)$ todo $\tau \in (-\infty,t]$. Além disso,

$$\lim_{s\to\tau^+} y(s) = y(t), \forall \tau \in [t,0) \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\tau^-} y(s) = y(t), \forall \tau \in (t,0].$$

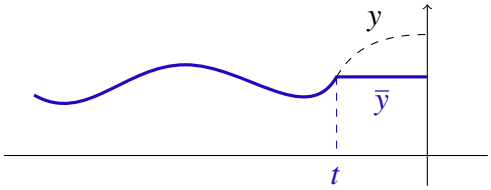

Figura 1 – Propriedade de prolongamento

Logo, o conjunto $G((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ tem a propriedade de prolongamento.

Na teoria de equações diferenciais com retardo infinito, a escolha de um espaço de fase apropriado é sempre feita com certo cuidado. Ao contrário do que acontece quando trabalhamos com retardo finito, aqui não vamos tomar um espaço de Banach específico e desenvolver a teoria para este espaço. Nosso protótipo para espaço de fase será um conjunto $H_0 \subset G((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$, munido de uma norma $\|\cdot\|_{H_0}$, satisfazendo as mesmas hipóteses (H1)–(H5) de (SLAVÍK, 2013).

(H1) $(H_0, \|\cdot\|_{H_0})$ é completo e tem a propriedade de prolongamento.

(H2) Se $y \in H_0$ e $t \leqslant 0$, então $y_t \in H_0$.

(H3) Existe uma função localmente limitada $\xi_1 : (-\infty,0] \to (0,+\infty)$ tal que se $y \in H_0$, então

$$|y(t)| \leqslant \xi_1(t)\|y\|_{H_0}.$$

(H4) Existe uma função $\xi_2 : (0,+\infty) \to [1,+\infty)$ tal que se $\sigma > 0$ e $y \in H_0$ com $\operatorname{supp}(y) \subset [-\sigma,0]$, então

$$\|y\|_{H_0} \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[-\sigma,0]} |y(t)|.$$

(H5) Existe uma função localmente limitada $\xi_3 : (-\infty,0] \to [0,+\infty)$ tal que se $y \in H_0$ e $t \leqslant 0$, então

$$\|y_t\|_{H_0} \leqslant \xi_3(t)\|y\|_{H_0}.$$

Recordamos que dada uma função em H_0, para cada $t \leqslant 0$, o símbolo y_t representa a história de y em t, ou seja, a função $y_t : (-\infty,0] \to X$ definida por $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, para todo $\theta \in (-\infty,0]$.

Para garantir que a correspondência anteriormente mencionada seja estabelecida, além do espaço H_0 definido axiomaticamente acima, precisamos de um outro espaço mais conveniente de funções regradas em $(-\infty,a]$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, vamos definir um espaço H_a da seguinte forma: dada uma função regrada qualquer $y \in H_0$, definimos $S_a y : (-\infty,a] \to \mathbb{R}^n$ por

$$(S_a y)(s) = y(s-a).$$

Assim, consideramos $H_a = \{S_a y;\ y \in H_0\}$ com a norma $\|y\|_{H_a} := \|S_{-a}y\|_{H_0}$. Observe que, se $t \leqslant a$ e $z \in H_a$, então

$$z_t(\theta) = (S_a y)(t+\theta) = y(t+\theta-a) = y_{t-a}(\theta), \quad \forall\, \theta \in (-\infty, 0],$$

donde, por (H2), concluímos que $z_t \in H_0$, para todo $t \leqslant a$. Dessa forma, podemos reescrever o espaço $H_a = \{z \in G((-\infty,a],\mathbb{R}^n);\ z_t \in H_0\}$.

O lema a seguir pode ser encontrado (SLAVÍK, 2013) e mostra que, dado $a \in \mathbb{R}$, o espaço H_a herda propriedades de H_0. As afirmações nele contidas são consequências diretas dos axiomas de definição (H1)–(H5). Para a demonstração, basta ter um pouco de paciência e executar alguns cálculos entediantes.

Lema 2.1. *Se $H_0 \subset G((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ é um espaço satisfazendo* (H1)–(H5)*, então para $a \in \mathbb{R}$ as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1- $(H_a, \|\cdot\|_{H_a})$ *é completo e tem a propriedade de prolongamento.*

2- *Se $t \leqslant a$ e $y \in H_a$, então $y_t \in H_0$.*

3- *Se $t \leqslant a$ e $y \in H_a$, então $|y(t)| \leqslant \xi_1(t-a)\|y\|_{H_a}$.*

4- *Se $\sigma > 0$ e $y \in H_{a+\sigma}$ é uma função com* $\operatorname{supp}(y) \subset [a, a+\sigma]$ *então*

$$\|y\|_{H_{a+\sigma}} \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[a,a+\sigma]} |y(t)|.$$

5- *Se $t \leqslant a+\sigma$ e $y \in H_{a+\sigma}$ então*

$$\|y_t\|_{H_0} \leqslant \xi_3(t-a-\sigma)\|y\|_{H_{a+\sigma}}.$$

Como H_0 foi definido de forma axiomática, é natural questionar a existência de um espaço que satisfaça tantas propriedades. Na teoria de equações diferenciais funcionais com retardo infinito, onde o espaço de fase também é definido por meio de axiomas semelhantes, vários exemplos podem ser encontrados em (HINO; MURAKAMI; NAITO, 1991). Aqui, vamos dar um exemplo apresentado por (MONTEIRO; SLAVÍK, 2014).

Exemplo 2.2. Seja $g : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva e considere o conjunto

$$G_g = \{y \in G((-\infty,0],\mathbb{R}^n);\ y/g \text{ é limitada}\},$$

com a norma $\|y\|_g = \sup\{|y(\theta)|/g(\theta);\ -\infty < \theta \leqslant 0\}$. Assuma que para todo $t \leqslant 0$

$$\gamma(t) = \sup_{s\in(-\infty,0]} \frac{g(s+t)}{g(s)} < +\infty.$$

Além disso, suponha que γ seja uma função localmente limitada. No que segue, vamos verificar se $(G_g, \|\cdot\|_g)$ satisfaz os axiomas (H1)–(H5).

Se definirmos a aplicação $y \mapsto y/g$, então teremos um isomorfismo isométrico entre G_g e $BG((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções regradas e limitadas em $(-\infty,0]$ munido da norma do supremo. Como $BG((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo, temos que $G_g(-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ é completo. Assim, a condição (H1) está garantida.

Agora, note que para todo $t<0$ e $y \in G_g(-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ temos

$$\sup_{s\in(-\infty,0]} \frac{|y_t(s)|}{g(s)} \leqslant \left(\sup_{s\in(-\infty,0]} \frac{|y(t+s)|}{g(t+s)}\right)\left(\sup_{s\in(-\infty,0]} \frac{g(t+s)}{g(s)}\right) \leqslant \|y\|_g \gamma(t),$$

ou seja, $y_t \in G_g((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$, o que torna (H2) satisfeita e, pela definição da norma $\|\cdot\|_g$, (H5) é válida para $\xi_3(t)=\gamma(t)$. Mais ainda, tomando $\xi_1(t)=g(t)$ a condição (H3) é satisfeita, pois,

$$|y(t)| = g(t)\frac{|y(t)|}{g(t)} \leqslant g(t) \sup_{s\in(-\infty,0]} \frac{|y(s)|}{g(s)}.$$

Dado $\sigma>0$, seja $y \in G_g((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}(y) \subset [-\sigma,0]$. Se $\kappa = \min_{t\in[-\sigma,0]} g(t)$, então

$$\|y\|_g = \sup_{t\in[-\sigma,0]} \frac{|y(t)|}{g(t)} \leqslant \sup_{t\in[-\sigma,0]} \frac{|y(t)|}{\kappa}$$

e consequentemente, $\xi_2(\sigma)=\kappa^{-1}$ verifica (H4).

Alguns casos particulares do exemplo acima são bastante interessantes. Se considerarmos a função g constante igual a 1, então $G_g((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ será o espaço $BG((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ com a norma do supremo. Para este espaço rapidamente se verificam as propriedades (H1)–(H5). Quando consideramos $g(t)=e^{-\gamma t}$, para algum $\gamma \geqslant 0$, temos outro exemplo de espaço de fase, a saber, o espaço

$$G_\gamma((-\infty,0],\mathbb{R}^n) = \{y:(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n;\ \sup_{t\in(-\infty,0]} |e^{\gamma t}y(t)| < \infty\},$$

com a norma, $\|y\|_\gamma = \sup_{t\in(-\infty,0]} |e^{\gamma t}y(t)|$. Para mais detalhes deste último espaço, veja (SLAVÍK, 2013, exemplo 2.5).

2.2 EDFN em medida e EDO generalizada

Por toda esta seção fixe $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma>0$. Considere $O \subset H_{t_0+\sigma}$ um subconjunto limitado, $P=\{y_t;\ y \in O \text{ e } t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\sigma\}$. Uma equação diferencial funcional neutra em medida com retardo infinito, aqui abreviada por EDFN, é uma equação da forma

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y_s)\,dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}, \tag{2.2}$$

sendo $g:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}$ não decrescente, $f,N:[t_0,t_0+\sigma]\times P\to\mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $N(t):P\to\mathbb{R}^n$ linear limitada pra cada $t\in[t_0,t_0+\sigma]$. Quando $y_{t_0}=\varphi\in P$, dizemos que (2.2) tem condição inicial φ.

Nosso objetivo é associar à equação (2.2) uma EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(t,x), \quad t \in [t_0, t_0+\sigma], \tag{2.3}$$

com $x : [t_0, t_0+\sigma] \to O$ e $F : [t_0, t_0+\sigma] \times O \to G((-\infty, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$ dada por

$$F(t,x)(v) = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, t_0), \\ \displaystyle\int_{t_0}^{v} f(s,x_s)\,dg(s) + N(v)x_v, & v \in [t_0, t], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,x_s)\,dg(s) + N(t)x_t, & v \in [t, t_0+\sigma], \end{cases} \tag{2.4}$$

conforme a seguinte relação, entre a solução x de (2.3) e a solução y de (2.2),

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in (-\infty, t], \\ y(t), & v \in [t, t_0+\sigma]. \end{cases}$$

Note que o Teorema 1.13 justifica a definição da função F em (2.4), isto é, a função F de fato assume valores no espaço das funções regradas.

A fim de assegurar uma correspondência entre (2.2) e (2.3), dados $t_0 < a < b < t_0+\sigma$ e $y, z \in O$, vamos assumir as seguintes condições:

(A1) existe, no sentido de Kurzweil, a integral $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\sigma} f(t,y_t)\,dg(t)$;

(A2) existe uma função positiva $M : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ integrável, no sentido de Kurzweil, em relação a g tal que

$$\left| \int_a^b f(t,y_t)\,dg(t) \right| \leqslant \int_a^b M(t)\,dg(t);$$

(A3) existe uma função positiva $L : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ integrável em relação a g tal que

$$\left| \int_a^b [f(t,y_t) - f(t,z_t)]\,dg(t) \right| \leqslant \int_a^b L(t)\|y_t - z_t\|_{H_0}\,dg(t);$$

(A4) existe uma função positiva $Q : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ integrável, no sentido de Kurzweil, em relação a g tal que

$$|N(b)y_b - N(a)y_a| \leqslant \int_a^b Q(t)\|y_t\|_{H_0}\,dg(t).$$

Antes de enunciar o próximo resultado, observe que sendo $O \subset H_{t_0+\sigma}$ um conjunto limitado, existe uma constante $C > 0$ com $\|y\|_{H_{t_0+\sigma}} \leqslant C$, para todo $y \in O$. Assim, pelo Lema 2.1, se $t \leqslant t_0+\sigma$ temos

$$\|y_t\|_{H_0} \leqslant \xi_3(t-t_0-\sigma)\|y\|_{H_{t_0+\sigma}} \leqslant \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \xi_3(t-t_0-\sigma)\cdot C + 1 := \widetilde{C}. \tag{2.5}$$

Lema 2.3. *Sejam $O \subset H_{t_0+\sigma}$ um subconjunto limitado, $P = \{y_t;\ y \in O$ e $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\sigma\}$ e $g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Assuma que a função definida em (2.4),*

$$F : [t_0, t_0+\sigma] \times O \to G((-\infty, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n),$$

tome valores em $H_{t_0+\sigma}$. Nessas condições, supondo que f e g satisfaçam (A1) *e $N : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ cumpre* (A4)*, valem:*

(i) *se $f : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ cumpre a condição* (A2)*, então a função F satisfaz $\mathscr{F}_1$ com*

$$h_1(t) = \tilde{C}\xi_2(\sigma)\left(\int_{t_0}^{t} [M(s)+Q(s)]\, dg(s)\right), \quad \forall t \in [t_0, t_0+\sigma];$$

(ii) *se $f : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ cumpre a condição* (A3)*, então a função F satisfaz $\mathscr{F}_2$ com*

$$h_2(t) = \xi_2(\sigma)\left(\sup_{s\in[t_0,t_0+\sigma]} \xi_3(s-t_0-\sigma)\right)\left(\int_{t_0}^{t} [L(s)+Q(s)]\, dg(s)\right), \forall t \in [t_0, t_0+\sigma].$$

Demonstração. Pela condição (A1), para todo $v \in [t_0, t_0+\sigma]$, existe a integral $\int_{t_0}^{v} f(s, y_s) dg(s)$. Para cada $y \in O$ e $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_0+\sigma$, temos

$$[F(t_2,y) - F(t_1,y)](v) = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, t_1], \\ \displaystyle\int_{t_1}^{v} f(s,y_s)\, dg(s) + N(v)y_v - N(t_1)y_{t_1}, & v \in [t_1, t_2], \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(s,y_s)\, dg(s) + N(t_2)y_{t_2} - N(t_1)y_{t_1}, & v \in [t_2, t_0+\sigma]. \end{cases}$$

Dessa forma, usando (A2), (A4), (2.5) e o item 4 do Lema 2.1 temos

$$\begin{aligned} \|F(t_2,y) - F(t_1,y)\|_{H_{t_0+\sigma}} &\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v\in[t_0,t_0+\sigma]} |F(t_2,y)(v) - F(t_1,y)(v)| \\ &\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v\in[t_1,t_2]} \left(\left|\int_{t_1}^{v} f(s,y_s)\, dg(s)\right| + |N(v)y_v - N(t_1)y_{t_1}|\right) \\ &\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v\in[t_1,t_2]} \left(\int_{t_1}^{v} M(s)\, dg(s) + \int_{t_1}^{v} Q(s)\|y_s\|_{H_0}\, dg(s)\right) \\ &\leqslant \widetilde{C}\xi_2(\sigma)\left(\int_{t_1}^{t_2} [M(s)+Q(s)]\, dg(s)\right) \\ &= h_1(t_2) - h_1(t_1), \end{aligned}$$

o que prova o item (i). Agora, para cada $x, y \in O$ temos

$$[F(t_2,x) - F(t_1,x) - F(t_2,y) + F(t_1,y)](v) =$$

$$
= \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, t_1], \\ \displaystyle\int_{t_1}^{v} [f(s,x_s) - f(s,y_s)]\, dg(s) + N(v)x_v - N(v)y_v - N(t_1)x_{t_1} + N(t_1)y_{t_1}, & v \in [t_1, t_2], \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} [f(s,x_s) - f(s,y_s)]\, dg(s) + N(t_2)x_{t_2} - N(t_2)y_{t_2} - N(t_1)x_{t_1} + N(t_1)y_{t_1}, & v \in [t_2, t_0+\sigma]. \end{cases}
$$

Usando (2.5) e a condição (A3), temos

$$
\begin{aligned}
&\|F(t_2,x) - F(t_1,x) - F(t_2,y) + F(t_1,y)\|_{H_{t_0+\sigma}} \\
&\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v\in[t_0,t_0+\sigma]} |[F(t_2,x) - F(t_1,x) - F(t_2,y) + F(t_1,y)](v)| \\
&\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v\in[t_1,t_2]} \left(\left| \int_{t_1}^{v} [f(s,x_s) - f(s,y_s)]\, dg(s) \right| + |N(v)(x_v - y_v) - N(t_1)(x_{t_1} - y_{t_1})| \right) \\
&\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v\in[t_1,t_2]} \left(\int_{t_1}^{v} L(s)\|x_s - y_s\|_{H_0}\, dg(s) + \int_{t_1}^{v} Q(s)\|x_s - y_s\|_{H_0}\, dg(s) \right) \\
&\leqslant \xi_2(\sigma) \left(\sup_{s\in[t_0,t_0+\sigma]} \xi_3(s - t_0 - \sigma) \right) \left(\int_{t_1}^{t_2} [L(s) + Q(s)]\, dg(s) \right) \|x - y\|_{H_{t_0+\sigma}} \\
&\leqslant (h_2(t_2) - h_2(t_1))\|x - y\|_{H_{t_0+\sigma}},
\end{aligned}
$$

o que prova (ii) e encerra a demonstração do lema. □

Algumas propriedades das soluções de uma EDO generalizada são de fundamental importância para que nossos objetivos sejam alcançados. Uma delas aparece no teorema a seguir, que possui algumas formas diferentes na literatura, cuja demonstração desta versão encontra-se em (SLAVÍK, 2013, Lema 3.5).

Lema 2.4. *Sejam O um subconjunto aberto de $H_{t_0+\sigma}$, $P = \{y_t;\ y \in O,\ e\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\sigma\}$ e $g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Assuma que $f : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ satisfaça a condição* (A1) *e $F : [t_0, t_0+\sigma] \times O \to G((-\infty, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$ definida em* (2.4) *tome valores em $H_{t_0+\sigma}$. Se $x : [t_0, t_0+\sigma] \to O$ é uma solução de*

$$
\frac{dx}{d\tau} = DF(t,x)
$$

e $x(t_0) \in H_{t_0+\sigma}$ é constante em $[t_0, t_0+\sigma]$ então

$$
\begin{aligned}
x(v)(\theta) &= x(v)(v), \quad t_0 \leqslant v \leqslant \theta \leqslant t_0+\sigma, \\
x(v)(\theta) &= x(\theta)(\theta), \quad t_0 \leqslant \theta \leqslant v \leqslant t_0+\sigma.
\end{aligned}
$$

Teorema 2.5. *Sejam $O \subset H_{t_0+\sigma}$ limitado com a propriedade de prolongamento para $t \geqslant t_0$, $P = \{y_t;\ y \in O\ e\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\sigma\}$, $\varphi \in P$ e $g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ uma função não descrescente. Assuma que $f : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições* (A1)–(A3)*, $N : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$*

cumpra (A4) *e* F *seja definida por* (2.4)*, com* $F(t,x) \in H_{t_0+\sigma}$ *para cada* $x \in O$ *e* $t \in [t_0, t_0+\sigma]$*. Se* $y \in O$ *é uma solução da EDFN em medida*

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}, \\ y_{t_0} = \varphi, \end{cases}$$

então a função $x : [t_0, t_0+\sigma] \to O$ *definida por*

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in (-\infty, t], \\ y(t), & v \in [t, t_0+\sigma], \end{cases} \tag{2.6}$$

é uma soluação da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(t,x).$$

Demonstração. Devemos mostrar que para todo $v \in [t_0, t_0+\sigma]$ a integral $\int_{t_0}^{v} DF(t, x(\tau))$ existe e vale

$$x(v) - x(t_0) = \int_{t_0}^{v} DF(t, x(\tau)).$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como a função

$$h_1(t) = \widetilde{C}\xi_2(\sigma)\left(\int_{t_0}^{t} [M(s) + Q(s)]\, dg(s)\right)$$

é não descrescente em $[t_0, t_0+\sigma]$, existe um número finito de pontos com

$$h_1(t^+) - h_1(t) = \Delta^+ h_1(t) \geqslant \varepsilon,$$

que serão denotados por $\{t_1, \ldots, t_m\}$. Considere um calibre $\delta : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\delta(\tau) < \min\left\{\frac{t_j - t_{j-1}}{2};\ j = 2, \ldots, m\right\}, && \tau \in [t_0, t_0+\sigma], \\ &\delta(\tau) < \min\left\{|\tau - t_j|;\ j = 1, \ldots, m\right\}, && \tau \in [t_0, t_0+\sigma] \setminus \{t_1, \ldots t_m\}. \end{aligned}$$

Nestas condições, se $(\tau, [a,b])$ é um par ponto-intervalo tal que $[a,b] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$, então $[a,b]$ contém no máximo um dos pontos $t_1, \ldots t_m$ e, além disso, se $t_j \in [a,b]$, então $\tau = t_j$. Esta última afirmação é verdadeira pois, se $[a,b]$ fosse um intervalo com $t_j \in [a,b]$, para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$, mas $\tau \neq t_j$, então pela caraterística do calibre δ, o intervalo $[a,b]$ não seria δ-fino, como podemos ver na Figura 2, por exemplo.

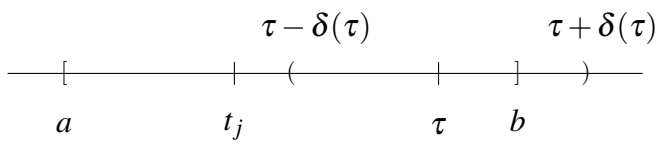

Figura 2 – Intervalo não δ-fino.

Agora, note que pela definição da função $x(t)$ em (2.6), para cada $j \in \{1,\dots,m\}$, temos

$$(x(t_j))_{t_j}(\theta) = x(t_j)(t_j+\theta) = y(t_j+\theta) = y_{t_j}(\theta),\ \forall \theta \in (-\infty,0],$$

isto é, $x(t_j)_{t_j} = y_{t_j}$ para todo $j \in \{1,\dots,m\}$. Assim, pelo Teorema 1.13, temos

$$\lim_{s\to t_j^+} \int_{t_j}^{s} [L(s)+Q(s)]\|y_s - x(t_j)_s\|_{H_0}\, dg(s) = [L(t_j)+Q(t_j)]\|y_{t_j} - x(t_j)_{t_j}\|_{H_0}\Delta^+ g(t_j) = 0,$$

e com isto podemos escolher o calibre δ tal que

$$\int_{t_j}^{t_j+\delta(t_j)} [L(s)+Q(s)]\|y_s - x(t_j)_s\|_{H_0}\, dg(s) < \frac{\varepsilon}{2m+1},\ \forall j \in \{1,\dots,m\}.$$

Ainda sobre a escolha de δ, usando (A2) e (A4), temos

$$\begin{aligned}
|y(\tau+t)-y(\tau)| &= \left| \int_{t_0}^{\tau+t} f(s,y_s)\, dg(s) + N(\tau+t)y_{\tau+t} - \int_{t_0}^{\tau} f(s,y_s)\, dg(s) - N(\tau)y_\tau \right| \\
&\leqslant \left| \int_{\tau}^{\tau+t} f(s,y_s)\, dg(s) \right| + |N(\tau+t)y_{\tau+t} - N(\tau)y_\tau| \\
&\leqslant \int_{\tau}^{\tau+t} M(s)\, dg(s) + \int_{\tau}^{\tau+t} Q(s)\|y_s\|_{H_0}\, dg(s) \\
&\leqslant h_1(\tau+t) - h_1(\tau),
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade verdadeira pois, $\xi_2(\sigma) \geqslant 1$ e $\widetilde{C} \geqslant 1$. Dessa forma, fazendo $t \to 0^+$ obtemos

$$|y(\tau^+) - y(\tau)| \leqslant h_1(\tau^+) - h_1(\tau) = \Delta^+ h_1(\tau) < \varepsilon,\ \tau \in [t_0, t_0+\sigma]\backslash\{t_1,\dots t_m\}$$

e assim, o calibre δ pode ser ajustado para que tenhamos

$$|y(\rho) - y(\tau)| < \varepsilon,\ \forall \tau \in [t_0,t_0+\sigma]\backslash\{t_1,\dots t_m\},\ \rho \in [\tau, \tau+\delta(\tau)).$$

Sejam $v \in [t_0, t_0+\sigma]$ e $\{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]), j = 1,\dots,p\}$ uma partição δ-fina de $[t_0, v]$. Para cada $j \in \{1,\dots,p\}$, temos

$$[x(s_j) - x(s_{j-1})](v) = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, s_{j-1}], \\ \displaystyle\int_{s_{j-1}}^{v} f(s,y_s)\, dg(s) + N(v)y_v - N(s_{j-1})y_{s_{j-1}}, & v \in [s_{j-1}, s_j], \\ \displaystyle\int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s,y_s)\, dg(s) + N(s_j)y_{s_j} - N(s_{j-1})y_{s_{j-1}}, & v \in [s_j, t_0+\sigma], \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&[F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) \\
&\quad = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, s_{j-1}], \\ \displaystyle\int_{s_{j-1}}^{v} f(s,x(\tau_j)_s)\, dg(s) + N(v)x(\tau_j)_v - N(s_{j-1})x(\tau_j)_{s_{j-1}}, & v \in [s_{j-1}, s_j], \\ \displaystyle\int_{s_{j-1}}^{v} f(s,x(\tau_j)_s)\, dg(s) + N(s_j)x(\tau_j)_{s_j} - N(s_{j-1})x(\tau_j)_{s_{j-1}}, & v \in [s_j, t_0+\sigma]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que, se $s \leqslant \tau_j$, então por (2.6) temos

$$x(\tau_j)_s(\theta) = x(\tau_j)(s+\theta) = y(s+\theta) = y_s(\theta),\ \forall \theta \in (-\infty, 0],$$

isto é, $x(\tau_j)_s = y_s$ quando $s \leqslant \tau_j$. Em particular, $x(\tau_j)_{s_{j-1}} = y_{s_{j-1}}$ e

$$\int_{s_{j-1}}^{v} [f(s,y_s) - f(s,x(\tau_j)_s)]\, dg(s) = \begin{cases} 0, & v \in [s_{j-1}, \tau_j], \\ \displaystyle\int_{\tau_j}^{s_j} [f(s,y_s) - f(s,x(\tau_j)_s)]\, dg(s), & v \in [\tau_j, s_j]. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &[x(s_j) - x(s_{j-1})](v) - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) \\ &\quad = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, \tau_j], \\ \displaystyle\int_{\tau_j}^{v} [f(s,y_s) - f(s,x(\tau_j)_s)]\, dg(s) + N(v)y_v - N(v)x(\tau_j)_v, & v \in [\tau_j, s_j], \\ \displaystyle\int_{\tau_j}^{s_j} [f(s,y_s) - f(s,x(\tau_j)_s)]\, dg(s) + N(s_j)y_{s_j} - N(s_j)x(\tau_j)_{s_j}, & v \in [s_j, t_0+\sigma], \end{cases} \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} &\Big\| x(s_j) - x(s_{j-1}) - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))] \Big\|_{H_{t_0+\sigma}} \\ &\qquad \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v \in [t_0, t_0+\sigma]} \Big| [x(s_j) - x(s_{j-1})](v) - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) \Big| \\ &\qquad = \xi_2(\sigma) \sup_{v \in [\tau_j, s_j]} \Big| [x(s_j) - x(s_{j-1})](v) - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) \Big| \\ &\qquad \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{v \in [\tau_j, s_j]} \left(\left| \int_{\tau_j}^{v} [f(s,y_s) - f(s,x(\tau_j)_s)]\, dg(s) \right| + |N(v)y_v - N(v)x(\tau_j)_v \right). \end{aligned}$$

Como $x(\tau_j)_{\tau_j} = y_{\tau_j}$, então $N(\tau_j)(y_{\tau_j}) = N(\tau_j)(x(\tau_j)_{\tau_j})$ e, de acordo com a hipótese (A4), temos

$$\begin{aligned} |N(v)y_v - N(v)x(\tau_j)_v| &= |N(v)(y_v - x(\tau_j)_v) - N(\tau_j)(y_{\tau_j} - x(\tau_j)_{\tau_j})| \\ &\leqslant \int_{\tau_j}^{v} Q(s) \|y_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0}\, dg(s). \end{aligned}$$

Isto, junto com (A3), implica em

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\tau_j}^{v} [f(s,y_s) - f(s,x(\tau_j)_s)]\, dg(s) \right| + \big| N(v)y_v - N(v)x(\tau_j)_v \big| \\ &\qquad \leqslant \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \|y_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0}\, dg(s). \end{aligned}$$

Dado um par ponto-intervalo particular $(\tau_j, [s_{j-1}, s_j])$ temos duas possibilidades:

(i) A interseção de $[s_{j-1}, s_j]$ e $\{t_1, \ldots, t_m\}$ contém um único ponto $\tau_j = t_i$;

(ii) A interseção de $[s_{j-1}, s_j]$ e $\{t_1, \ldots, t_m\}$ é vazia.

No caso (i), pela escolha do calibre δ temos

$$\int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \|y_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0} \, dg(s) < \frac{\varepsilon}{2m+1}.$$

Assim, neste caso

$$\Big\| x(s_j) - x(s_{j-1}) - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))] \Big\|_{H_{t_0+\sigma}} < \xi_2(\sigma) \frac{\varepsilon}{2m+1}.$$

No caso (ii), se $s \in [\tau_j, s_j]$ então

$$\|y_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0} \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{\rho \in [\tau_j, s]} |y(\rho) - x(\tau_j)(\rho)| = \xi_2(\sigma) \sup_{\rho \in [\tau_j, s]} |y(\rho) - y(\tau_j)| < \xi_2(\sigma)\varepsilon.$$

Logo,

$$\int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \|y_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0} \, dg(s) < \xi_2(\sigma)\varepsilon \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \, dg(s),$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\Big\| x(s_j) - x(s_{j-1}) - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))] \Big\|_{H_{t_0+\sigma}} \\
&\qquad \leqslant \xi_2(\sigma) \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \|y_s - x(\tau_j)_s\| \, dg(s) \\
&\qquad < \xi_2(\sigma)^2 \varepsilon \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \, dg(s).
\end{aligned}$$

Combinando (i) e (ii), sabendo que (i) acontece no máximo $2m$ vezes, temos

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| x(v) - x(t_0) - \sum_{j=1}^{p} \Big[F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j)) \Big] \Bigg\|_{H_{t_0+\sigma}} \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{p} \Big\| [x(s_j) - x(s_{j-1})] - [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))] \Big\|_{H_{t_0+\sigma}} \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{p} \left(\xi_2(\sigma)^2 \varepsilon \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)] \, dg(s) \right) + 2m\xi_2(\sigma) \frac{\varepsilon}{2m+1} \\
&\qquad < \varepsilon \xi_2(\sigma)^2 \left(\int_{t_0}^{t_0+\sigma} [L(s) + Q(s)] \, dg(s) + 1 \right),
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Teorema 2.6. *Sejam O um subconjunto limitado de $H_{t_0+\sigma}$ com a propriedade de prolongamento para $t \geqslant t_0$, $P = \{y_t;\ y \in O$ e $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma\}$, $\varphi \in P$ e $g : [t_0, t_0 + \sigma]$ uma função não decrescente.*

Assuma que $f : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ *satisfaça as condições* (A1)–(A3), $N : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ *cumpra* (A4) *e* F *seja dada por* (2.4), *com* $F(t,x) \in H_{t_0+\sigma}$ *para cada* $x \in O$ *e* $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. *Se* $x : [t_0, t_0+\sigma] \to O$ *é uma solução da EDO generalizada*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(t,x),$$

com condição inicial

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \varphi(v-t_0), & v \in (-\infty, t_0], \\ \varphi(0), & v \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

então a função $y \in O$ *definida por*

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v), & v \in (-\infty, t_0], \\ x(v)(v), & v \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

é uma solução da EDFN em medida

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}, \\ y_{t_0} = \varphi. \end{cases}$$

Demonstração. Observe primeiramente que para todo $\theta \in (-\infty, 0]$ temos

$$y_{t_0}(\theta) = y(t_0+\theta) = x(t_0)(t_0+\theta) = \varphi(t_0+\theta-t_0) = \varphi(\theta),$$

ou seja, $y_{t_0} = \varphi$. Precisamos mostrar que, se $v \in [t_0, t_0+\sigma]$, então

$$y(v) = y(t_0) + \int_{t_0}^{v} f(s, y_s)\, dg(s) + N(v)y_v - N(t_0)y_{t_0}.$$

Usando o Lema 2.4 temos

$$y(v) - y(t_0) = x(v)(v) - x(t_0)(t_0) = x(v)(v) - x(t_0)(v) = \left(\int_{t_0}^{v} DF(t, x(\tau)) \right)(v),$$

donde,

$$y(v) - y(t_0) - \int_{t_0}^{v} f(s, y_s)\, dg(s) = \left(\int_{t_0}^{v} DF(t, x(\tau)) \right)(v) - \int_{t_0}^{v} f(s, y_s)\, dg(s).$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como a função

$$h_1(t) = \widetilde{C}\xi_2(\sigma) \left(\int_{t_0}^{t} [M(s) + Q(s)]\, dg(s) \right)$$

é não decrescente em $[t_0, t_0+\sigma]$, existe um número finito de pontos neste intervalo, denotados por $\{t_1, \ldots t_m\}$, tais que

$$h_1(t_j^+) - h_1(t_j) = \Delta^+ h(t_j) \geqslant \varepsilon, \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Da mesma maneira feita no teorema anterior, seja δ um calibre em $[t_0, t_0+\sigma]$ tal que

$$\delta(\tau) < \min\left\{\frac{t_j - t_{j-1}}{2};\ j = 2,\dots,m\right\}, \quad \tau \in [t_0, t_0+\sigma],$$

$$\delta(\tau) < \min\{|\tau - t_j|;\ j = 1,\dots,m\}, \quad \tau \in [t_0, t_0+\sigma]\backslash t_1,\dots,t_m,$$

$$\int_{t_j}^{t_j+\delta(t_j)} [L(s)+Q(s)]\|y_s - x(t_j)_s\|_{H_0}\, dg(s) < \frac{\varepsilon}{2m+1}, \quad j \in \{1,\dots,m\}.$$

Por fim, escolha o calibre δ de forma que

$$|h_1(\rho) - h_1(\tau)| < \varepsilon,\ \tau \in [t_0, t_0+\sigma]\backslash\{t_1,\dots,t_m\},\ \rho \in [\tau, \tau+\delta(\tau)).$$

Pela definição da integral de Kurzweil, existe uma partição $\{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]);\ j = 1,\dots,p\}$ de $[t_0, v]$, δ-fina, tal que

$$\left\|\int_{t_0}^{v} DF(t, x(\tau)) - \sum_{j=1}^{p} [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))]\right\|_{H_{t_0+\sigma}} < \varepsilon.$$

Do item 3 do Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|y(v) - y(t_0) - \int_{t_0}^{v} f(s, y_s)\, dg(s) - N(v)y_v + N(t_0)y_{t_0}\right| \\
&\leqslant \left|\left(\int_{t_0}^{v} DF(t, x(\tau))\right)(v) - \sum_{j=1}^{p} [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v)\right| \\
&+ \left|\sum_{j=1}^{p}\left([F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) - \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s, y_s)\, dg(s) - N(s_j)y_{s_j} + N(s_{j-1})y_{s_{j-1}}\right)\right| \\
&< \varepsilon\, \xi_1(v - t_0 - \sigma) \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\left|[F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) - \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s, y_s)\, dg(s) - N(s_j)y_{s_j} + N(s_{j-1})y_{s_{j-1}}\right|.
\end{aligned}$$

Sendo $s_j \leqslant v$ para todo $j \in \{1,\dots,m\}$, pela definição da F, temos

$$[F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) = \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s, x(\tau_j)_s)\, dg(s) + N(s_j)x(\tau_j)_{s_j} - N(s_{j-1})x(\tau_j)_{s_{j-1}}.$$

Além disso, pelo Lema 2.4, para cada $j \in \{1,\dots,p\}$ temos $x(\tau_j)_s = x(s)_s = y_s$, $s \in [s_{j-1}, \tau_j]$ e $x(s_j)_s = x(s)_s = y_s$, $s \in [\tau_j, s_j]$. Consequentemente, $N(s_{j-1})y_{s_{j-1}} = N(s_{j-1})x(\tau_j)_{s_{j-1}}$ e

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} [f(s, x(\tau_j)_s) - f(s, y_s)]\, dg(s) = \int_{\tau_j}^{s_j} [f(s, x(\tau_j)_s) - f(s, y_s)]\, dg(s).$$

Assim,

$$\left|[F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) - \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s, y_s)\, dg(s) - N(s_j)y_{s_j} + N(s_{j-1})y_{s_{j-1}}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left| \int_{\tau_j}^{s_j} [f(s,x(\tau_j)_s) - f(s,y_s)]\, dg(s) \right| + \left| N(s_j)x(\tau_j)_{s_j} - N(s_j)y_{s_j} \right| \\
&= \left| \int_{\tau_j}^{s_j} [f(s,x(\tau_j)_s) - f(s,y_s)]\, dg(s) \right| + \left| N(s_j)(x(\tau_j)_{s_j} - y_{s_j}) - N(\tau_j)(x(\tau_j)_{\tau_j} - y_{\tau_j}) \right| \\
&\leqslant \int_{\tau_j}^{s_j} L(s)\|x(\tau_j)_s - y_s\|_{H_0}\, dg(s) + \int_{\tau_j}^{s_j} Q(s)\|x(\tau_j)_s - y_s\|_{H_0}\, dg(s) \\
&= \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)]\|x(\tau_j)_s - y_s\|_{H_0}\, dg(s).
\end{aligned}
$$

Novamente temos dois casos a considerar:

(i) A interseção de $[s_{j-1}, s_j]$ e $\{t_1, \ldots, t_m\}$ contém um único ponto $\tau_j = t_i$;

(ii) A interseção de $[s_{j-1}, s_j]$ e $\{t_1, \ldots, t_m\}$ é vazia.

No caso (i), pela escolha do calibre δ, temos

$$
\int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)]\|y_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0}\, dg(s) < \frac{\varepsilon}{2m+1}.
$$

Portanto, neste caso,

$$
\left| [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) - \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s,y_s)\, dg(s) - N(s_j)y_{s_j} + N(s_{j-1})y_{s_{j-1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2m+1}.
$$

Vejamos o caso (ii). Note que se $s \in [\tau_j, s_j]$ então $s - \sigma \leqslant t_0$. Além disso, pela definição da função F temos $F(t, x(t))(v) = 0$ para todo $t \in [\tau_j, s_j]$ e $v \in (-\infty, t_0]$. Logo,

$$
[x(s_j) - x(\tau_j)](v) = \left(\int_{\tau_j}^{s_j} DF(t, x(\tau)) \right)(v) = 0, \forall v \in (-\infty, t_0].
$$

Assim, dos Lemas 2.1, 2.3 e 2.4, temos

$$
\begin{aligned}
\|x(s_j)_s - x(\tau_j)_s\|_{H_0} &\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{\rho \in [s-\sigma, s]} |x(s_j)(\rho) - x(\tau_j)(\rho)| \\
&\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{\rho \in [s-\sigma, s]} \xi_1(\rho - t_0 - \sigma)\|x(s_j) - x(\tau_j)\|_{H_{t_0+\sigma}} \\
&\leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{[-2\sigma, 0]} \xi_1(\rho)(h(s_j) - h(\tau_j)) \\
&< \varepsilon\lambda,
\end{aligned}
$$

onde $\lambda = \xi_2(\sigma) \sup_{\rho \in [-2\sigma, 0]} \xi_1(\rho)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\left| [F(s_j, x(\tau_j)) - F(s_{j-1}, x(\tau_j))](v) - \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(s,y_s)\, dg(s) - N(s_j)y_{s_j} + N(s_{j-1})y_{s_{j-1}} \right| \\
&\qquad \leqslant \int_{\tau_j}^{s_j} [L(s) + Q(s)]\|x(\tau_j)_s - y_s\|_{H_0}\, dg(s)
\end{aligned}
$$

$$< \varepsilon\lambda \int_{s_{j-1}}^{s_j} [L(s)+Q(s)]\, dg(s).$$

Combinando os casos (i) e (ii), sabendo que (i) acontece no máximo $2m$ vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left| y(v) - y(t_0) - \int_{t_0}^{v} f(s,y_s)\, dg(s) - N_0(v)y_v + N_0(t_0)y_{t_0} \right| \\
&\qquad < \varepsilon\xi_1(v-t_0-\sigma) + \sum_{j=1}^{p} \left(\varepsilon\lambda \int_{s_{j-1}}^{s_j} [L(s)+Q(s)]\, dg(s) \right) + 2m\frac{\varepsilon}{2m+1} \\
&\qquad < \varepsilon \left(\xi_1(v-t_0-\sigma) + \lambda \int_{t_0}^{t_0+\sigma} [L(s)+Q(s)]\, dg(s) + 1 \right),
\end{aligned}$$

o que completa a prova do teorema. □

2.3 Existência e unicidade de soluções

Tendo em mente a correspondência estabelecida na seção anterior, agora nosso objetivo é estudar a existência local e a unicidade de uma solução da EDFN em medida com retardo infinito (2.2).

Considere $O \subset H_{t_0+\sigma}$ um subconjunto limitado com a propriedade de prolongamento para $t \geqslant t_0$, $P = \{y_t;\ y \in O \text{ e } t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\sigma\}$ e $\varphi \in P$. Nosso objetivo é estabelecer condições para garantir a existência e a unicidade da solução de uma EDFN

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y_s)\, dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0},$$

sendo $f, N : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ como na seção anterior.

Defina as funções $x_0 : (-\infty, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ e $z : (-\infty, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ por

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t-t_0), & t \in (-\infty, t_0], \\ \varphi(0), & t \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases} \tag{2.7}$$

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t-t_0), & t \in (-\infty, t_0], \\ \varphi(0) + f(t_0,\varphi)\Delta^+ g(t_0) + N_0(t_0+)(x_0)_{t_0+} - N_0(t_0)\varphi, & t \in (t_0, t_0+\sigma]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Como consequência direta de (H3) temos $|\varphi(0)| \leqslant \xi_1(0)\|\varphi\|_{H_0}$. Além disso, a condição (A4) aliada ao Teorema 1.13 produz

$$\begin{aligned}
|N(t_0^+)(x_0)_{t_0^+} - N(t_0)\varphi| &= \lim_{t \to t_0^+} |N(t)(x_0)_t - N(t_0)(x_0)_{t_0}| \\
&\leqslant \lim_{t \to t_0^+} \int_{t_0}^{t} Q(s)\|(x_0)_s\|_{H_0}\, dg(s) \\
&= Q(t_0)\Delta^+ g(t_0)\|(x_0)_{t_0}\|_{H_0} \\
&= Q(t_0)\Delta^+ g(t_0)\|\varphi\|_{H_0}.
\end{aligned}$$

Mais ainda, observando que $x_0(t) = x_0^1(t) + x_0^2(t)$, onde

$$x_0^1(t) = \begin{cases} \varphi(t-t_0), & t \in (-\infty, t_0], \\ 0, & t \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases} \quad \text{e} \quad x_0^2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, t_0], \\ \varphi(0), & [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

do Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|x_0\|_{H_{t_0+\sigma}} &\leqslant \|x_0^1\|_{H_{t_0+\sigma}} + \|x_0^2\|_{H_{t_0+\sigma}} \\ &\leqslant \|\varphi\|_{H_0} + \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \|x_0^2(t)\| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{H_0} + \xi_2(\sigma)|\varphi(0)| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{H_0} + \xi_2(\sigma)\xi_1(0)\|\varphi\|_{H_0}. \end{aligned}$$

Suponha que $f : [t_0, t_0+\sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ satisfaça a seguinte condição:

(A5) dados $t_0 \leqslant a < b \leqslant t_0+\sigma$, temos $\displaystyle\int_a^b f(t,0)\,dg(a) = 0$.

De acordo com (A3) e (A5), temos

$$\left| \int_{t_0}^t f(s,(x_0)_s)\,dg(s) \right| = \left| \int_{t_0}^t [f(s,(x_0)_s) - f(s,0)]\,dg(s) \right| \leqslant \int_{t_0}^t L(s)\|(x_0)_s\|_{H_0}\,dg(s)$$

e, consequentemente, $|f(t_0,\varphi)\Delta^+ g(t_0)| \leqslant L(t_0)\Delta^+ g(t_0)\|\varphi\|_{H_0}$. Dessa forma, pelo Lema 2.1 para a função

$$z_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, t_0), \\ \varphi(0) + f(t_0,\varphi)\Delta^+ g(t_0) + N(t_0+)(x_0)_{t_0+} - N(t_0)\varphi, & t \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

temos

$$\|z_2\|_{H_{t_0+\sigma}} \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} |z_2(t)| \leqslant \xi_2(\sigma)[\xi_1(0) + L(t_0)\Delta^+ g(t_0) + Q(t_0)\Delta^+ g(t_0)]\|\varphi\|_{H_0}.$$

Portanto,

$$\|z\|_{H_{t_0+\sigma}} \leqslant \underbrace{[1 + \xi_2(\sigma)\xi_1(0) + \xi_2(\sigma)L(t_0)\Delta^+ g(t_0) + \xi_2(\sigma)Q(t_0)\Delta^+ g(t_0)]}_{:=C'} \|\varphi\|_{H_0}.$$

Assim, se considerarmos $C > 0$ a constante de limitação do conjunto O e o subconjunto $P' = \{\varphi \in P; \|\varphi\| \leqslant C(C')^{-1}\}$ fica demonstrado o lema a seguir.

Lema 2.7. *Se $\varphi \in P'$ então as funções x_0 e z, definidas em (2.7) e (2.8), são elementos de O.*

Observação 2.8. A função

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, t_0), \\ \frac{C}{\xi_2(\sigma)C'}, & t \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

é um elemento de O, pois, $\frac{C}{C'\xi_2(\sigma)} < C$. Além disso, se $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, temos

$$\tilde{x}_t(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in (-\infty, -(t-t_0)), \\ \frac{C}{C'\xi_2(\sigma)}, & \theta \in [-(t-t_0), 0], \end{cases}$$

ou seja, o suporte da função (x_t) está contido em $[-\sigma, 0]$ para todo $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, e portanto

$$\|\tilde{x}_t\|_{H_0} \leqslant \xi_2(\sigma) \sup_{\theta \in [-\sigma,0]} |\tilde{x}_t(\theta)| = \frac{C}{C'}.$$

Em resumo, o conjunto P' não é um conjunto vazio.

Teorema 2.9. *Sejam $O \subset H_{t_0+\sigma}$, P e P' como descritos acima, $\varphi \in P'$ e $g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente contínua a esquerda. Assuma que as condições* (A1) - (A5) *sejam satisfeitas e $F : [t_0, t_0+\sigma] \times O \to G((-\infty, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$ seja definida por* (2.4)*, com $F(t,x)$ tomando valores em $H_{t_0+\sigma}$, para cada $x \in O$ e $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. Se*

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t-t_0), & t \in (-\infty, t_0], \\ \varphi(0), & t \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t-t_0), & t \in (-\infty, t_0], \\ \varphi(0) + f(t_0,\varphi)\Delta^+ g(t_0) + N_0(t_0+)(x_0)_{t_0+} - N_0(t_0)\varphi, & t \in (t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

são elementos de $H_{t_0+\sigma}$, então existe um $\omega > 0$ e uma função $y : (-\infty, t_0+\omega] \to \mathbb{R}^n$ sendo a única solução da EDFN em medida

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}, \\ y_{t_0} = \varphi. \end{cases} \tag{2.9}$$

Demonstração. Pelos Teoremas 2.5 e 2.6, o PVI (2.9) é equivalente à EDO generalizada

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = DF(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

com a função F definida por (2.4). Pelo Lema 2.3, F satisfaz as condições $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$. Além disso, segue do lema anterior que x_0 e x_0+ são elementos de O. De fato, do Teorema 1.13 temos

$$[F(t_0^+, x_0) - F(t_0, x_0)](v) = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, t_0), \\ f(t_0,\varphi)\Delta^+ g(t_0) + N(t_0^+)(x_0)_{t_0^+} - N(t_0)\varphi, & v \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

visto que $(x_0)_{t_0} = \varphi$. Logo,

$$\begin{aligned} &[x_0 + F(t_0^+, x_0) - F(t_0, x_0)](v) \\ &\qquad = \begin{cases} \varphi(v-t_0), & v \in (-\infty, t_0), \\ \varphi(0) + f(t_0,\varphi)\Delta^+ g(t_0) + N_0(t_0^+)(x_0)_{t_0^+} - N_0(t_0)\varphi, & v \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases} \\ &\qquad = z(v). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1.28, existe um $\omega > 0$ e uma única solução $x : [t_0, t_0 + \omega] \to O$ da EDO generalizada (2.10) de forma que $y : (-\infty, t_0 + \omega] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v), & v \in (-\infty, t_0], \\ x(v)(v), & v \in [t_0, t_0 + \omega], \end{cases}$$

é uma solução da EDFN em medida (2.9), que deve ser única pois, caso contrário, o Teorema 2.5 garante que a solução de (2.10) não é única.

□

2.4 Dependência contínua

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e os conjuntos $O \subset H_{t_0+\sigma}$, P e P' da mesma forma da seção anterior. Considere a família de EDFN's

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^k(s, y_s)\, dg^k(s) + N^k(t) y_t - N^k(t_0) y_{t_0},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

com condição inicial $\varphi^k \in P'$, $g^k : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ funções não decrescentes e $f^k, N^k : [t_0, t_0 + \sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ tais que para todos $y, z \in O$ e quaisquer $t_0 \leqslant a < b \leqslant t_0 + \sigma$ valem as seguintes condições:

(A1') existe, no sentido de Kurzweil, a integral $\displaystyle\int_a^b f^k(s, y_s)\, dg^k(s)$;

(A2') existe uma função positiva $M^k : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ integrável, no sentido de Kurzweil, em relação à g^k tal que

$$\left| \int_a^b f^k(s, y_s)\, dg^k(s) \right| \leqslant \int_a^b M^k(s)\, dg^k(s);$$

(A3') existe uma função positiva $L^k : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ integrável, no sentido de Kurzweil, em relação à g^k tal que

$$\left| \int_a^b [f^k(s, y_s) - f^k(s, z_s)]\, dg^k(s) \right| \leqslant \int_a^b L^k(s) \|y_s - z_s\|_{H_0}\, dg^k(s);$$

(A4') existe uma função positiva $Q^k : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ integrável, no sentido de Kurzweil, em relação à g^k tal que

$$|N^k(b) y_b - N^k(a) y_a| \leqslant \int_a^b Q^k(s) \|y_s\|_{H_0}\, dg^k(s);$$

(A5') $\displaystyle\int_a^b f^k(t, 0)\, dg^k(s) = 0.$

Observe que, se $y^k : (-\infty, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (2.11) com condição inicial $\varphi^k \in P'$, então

$$y^k(t) = y_1^k(t) + y_2^k(t),$$

com $y_1^k : (-\infty, t_0+\sigma]$ e $y_2^k : (-\infty, t_0+\sigma]$ dadas por

$$y_1^k(t) = \begin{cases} \varphi^k(t-t_0), & t \in (-\infty, t_0], \\ 0, & t \in (t_0, t_0+\sigma], \end{cases} \quad \text{e} \quad y_2^k(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, t_0], \\ z^k(t), & t \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases}$$

sendo $z^k(t)$ uma função que satisfaz (2.11). No que resta dessa seção, se $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ usaremos a notação $y^k(t)$ para representar $y_2^k(t)$. Nessas condições podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 2.10. *Sejam $O \subset H_{t_0+\sigma}$, P e P' como descritos na seção anterior. Para cada $k = 0,1,2,\ldots$ seja $\varphi^k \in P'$ e considere $g^k : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$, $k = 0,1,2,\ldots$, uma sequência de funções não decrescentes contínuas à esquerda, com $\mathscr{A} = \{g^k : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}, k = 0,1,2\ldots\}$ equi-regrado. Assuma que as condições* (A1')–(A5') *sejam satisfeitas. Além disso, suponha que para todo $y \in O$ valham as hipóteses:*

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} \|\varphi^k - \varphi^0\|_{H_0} = 0;$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \left| \int_{t_0}^t f^k(s,y_s)\,dg^k(s) - \int_{t_0}^t f^0(s,y_s)\,dg^0(s) \right| = 0;$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} |N^k(t)y_t - N^0(t)y_t| = 0;$

(iv) $\lim\limits_{k\to\infty} g^k(t) \sup\limits_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} Q^k(t) < +\infty,\ \forall t \in [t_0, t_0+\sigma].$

Então para cada $k = 0,1,2\ldots$ existe $\omega > 0$ e uma única solução $y^k : (-\infty, t_0+\omega] \to \mathbb{R}^n$ do PVI

$$\begin{cases} y^k(t) = y^k(t_0) + \int_{t_0}^t f^k(s,y_s)\,dg^k(s) + N^k(t)y_t - N^k(t_0)y_{t_0}, \\ y_{t_0}^k = \varphi^k, \end{cases} \tag{2.12}$$

tal que $|y^k(t) - y^0(t)| \to 0$ quando $k \to +\infty$, para todo $t \in (-\infty, t_0+\omega]$.

Demonstração. A existência e a unicidade da solução de (2.12) segue do Teorema 2.9. Agora, observe que se $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ então

$$\begin{aligned} y^k(t) - y^0(t) &= y^k(t_0) - y^0(t_0) + \int_{t_0}^t f^k(s,y_s^k)\,dg^k(s) - \int_{t_0}^t f^0(s,y_s^0)\,dg^0(s) \\ &\quad + N^k(t)y_t^k - N^0(t)y_t^0 - N^k(t_0)y_{t_0}^k + N^0(t_0)y_{t_0}^0. \end{aligned}$$

Por (H3), temos

$$|y^k(t_0) - y^0(t_0)| = |y_{t_0}^k(0) - y_{t_0}^0(0)| = |\varphi^k(0) - \varphi^0(0)| \leqslant \xi_1(0)\|\varphi^k - \varphi^0\|_{H_0}.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}
&N^k(t)y_t^k - N^0(t)y_t^0 - N^k(t_0)y_{t_0}^k + N^0(t_0)y_{t_0}^0 \\
&\quad = N^k(t)(y_t^k - y_t^0) - N^k(t_0)(y_{t_0}^k - y_{t_0}^0) + \Big(N^k(t)y_t^0 - N^0(t)y_t^0\Big) - \Big(N^k(t_0)y_{t_0}^0 - N^0(t_0)y_{t_0}^0\Big),
\end{aligned}$$

usando (A4'), obtemos

$$\begin{aligned}
&|N^k(t)y_t^k - N^0(t)y_t^0 - N^k(t_0)y_{t_0}^k + N^0(t_0)y_{t_0}^0| \\
&\qquad \leqslant \int_{t_0}^t Q^k(s)\|y_s^k - y_s^0\|_{H_0}\, dg^k(s) + |N^k(t)y_t^0 - N^0(t)y_t^0| + |N^k(t_0)y_{t_0}^0 - N^0(t_0)y_{t_0}^0|.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|y^k(t) - y^0(t)| \leqslant &\underbrace{|y^k(t_0) - y^0(t_0)|}_{(I)} + \underbrace{\left|\int_{t_0}^t f^k(s,x_s)\, dg^k(s) - \int_{t_0}^t f^0(s,x_s)\, dg^0(s)\right|}_{(II)} \\
&+ \int_{t_0}^t Q^k(s)\|y_s^k - y_s^0\|_{H_0} dg^k(s) + \underbrace{|N^k(t)y_t^0 - N^0(t)y_t^0| + |N^k(t_0)y_{t_0}^0 - N^0(t_0)y_{t_0}^0|}_{(III)}.
\end{aligned}$$

Definindo $\alpha^k(t) = (I) + (II) + (III)$, podemos escrever

$$|y^k(t) - y^0(t)| \leqslant \alpha^k(t) + \int_{t_0}^t Q^k(s)\|y_s^k - y_s^0\|_{H_0}\, dg^k(s).$$

Como y^k é solução de (2.12), temos $y^k = y_1^k + y_2^k$. Assim, se $s \in [t_0, t_0+\sigma]$, então dado $\varepsilon > 0$ e k suficientemente grande, temos

$$\|y_s^k - y_s^0\|_{H_0} \leqslant \|(y_1^k)_s - (y_1^0)_s\|_{H_0} + \|(y_2^k)_s - (y_2^0)_s\|_{H_0} < \varepsilon + \xi_2(\sigma) \sup_{\tau\in[t_0,s]} |y^k(\tau) - y^0(\tau)|$$

Assim,

$$|y^k(t) - y^0(t)| \leqslant \alpha^k(t) + \int_{t_0}^t Q^k(s)\Big(\varepsilon + \xi_2(\sigma) \sup_{\tau\in[t_0,s]} |y^k(\tau) - y^0(\tau)|\Big)\, dg^k(s),\ t \in [t_0, t_0+\sigma].$$

Tomando $\beta^k = \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \Big(\alpha^k(t) + \varepsilon \int_{t_0}^t Q^k(s)\, dg^k(s)\Big)$ e $q^k = \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} Q^k(t)$ temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau\in[t_0,t]} |y^k(\tau) - y^0(\tau)| &\leqslant \beta^k + \xi_2(\sigma) \sup_{\tau\in[t_0,t]} \int_{t_0}^\tau Q^k(s) \sup_{\tau\in[t_0,s]} |y^k(\tau) - y^0(\tau)|\, dg^k(s) \\
&\leqslant \beta^k + \xi_2(\sigma) q^k \int_{t_0}^t \sup_{\tau\in[t_0,s]} |y^k(\tau) - y^0(\tau)|\, dg^k(s).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.43 de (SCHWABIK, 1992) obtemos

$$\sup_{\tau\in[t_0,t]} |y^k(\tau) - y^0(\tau)| \leqslant \beta^k \exp(\xi_2(\sigma) q^k (g^k(t) - g^k(t_0)),$$

e, portanto, $|y^k(t) - y^0(t)| \to 0$, quando $k \to \infty$ uniformemente para todo $t \in (-\infty, t_0+\omega]$, visto que $\beta^k \to 0$, quando $k \to \infty$. □

Observação 2.11. Se existir um $\varepsilon > 0$ tal que para todo k suficientemente grande

$$C_k := \xi_2(\sigma) \int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q^k(s)\xi_3(s-t_0-\sigma)\, dg^k(s) < 1-\varepsilon,$$

então $\|y^k - y^0\|_{H_{t_0+\sigma}} \to 0$, quando $k \to \infty$. De fato, como

$$\begin{aligned}
\|y^k - y^0\|_{H_{t_0+\sigma}} &\leqslant \|\varphi^k - \varphi^0\|_{H_0} + \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} |y^k(t) - y^0(t)| \\
&\leqslant \|\varphi^k - \varphi^0\|_{H_0} \\
&\quad + \xi_2(\sigma)|y^k(t_0) - y^0(t_0)| \\
&\quad + \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \left| \int_{t_0}^t f^k(s,y_s^k)\, dg^k(s) - \int_{t_0}^t f^0(s,y_s^0)\, dg^0(s) \right| \\
&\quad + \xi_2(\sigma)\|y^k - y^0\|_{H_{t_0+\sigma}} \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \int_{t_0}^t Q^k(s)\xi_3(s-t_0-\sigma)\, dg^k(s) \\
&\quad + 2\xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \left| N^k(t)y_t^0 - N^0(t)y_t^0 \right|,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
(1-C_k)\|y^k - y^0\|_{H_{t_0+\sigma}} &\leqslant \|\varphi^k - \varphi^0\|_{H_0} \\
&\quad + \xi_2(\sigma)|y^k(t_0) - y^0(t_0)| \\
&\quad + \xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \left| \int_{t_0}^t f^k(s,y_s^k)\, dg^k(s) - \int_{t_0}^t f^0(s,y_s^0)\, dg^0(s) \right| \\
&\quad + 2\xi_2(\sigma) \sup_{t\in[t_0,t_0+\sigma]} \left| N^k(t)y_t^0 - N^0(t)y_t^0 \right|,
\end{aligned}$$

e portanto, $\|y^k - y^0\|_{H_{t_0+\sigma}} \to 0$, quando $k \to \infty$.

CAPÍTULO

3

CONTROLABILIDADE

Neste capítulo nossa contribuição será investigar quais condições são necessárias para garantir a controlabilidade de um sistema descrito por uma equação diferencial em medida.

3.1 Controlabilidade para sistemas de equações diferenciais funcionais

Nesta seção, faremos um breve estudo sobre controlabilidade para sistemas descritos por equações diferenciais abstratas em espaços de dimensão infinita. Abordaremos, de forma sucinta, sistemas lineares e sistemas lineares retardados. Um estudo mais aprofundado sobre a controlabilidade de sistemas lineares pode ser encontrado, por exemplo, em (CURTAIN; ZWART, 1995) e (ZABCZYK, 1992), nossas principais referências aqui. Considere nesta seção X e U espaços de Hilbert.

Relembramos que um semigrupo $(S(t))_{t\geqslant 0}$ é uma família a um parâmetro de operadores lineares limitados em X tal que $S(0) = I$ e $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todos $t, s \in [t_0, +\infty)$, onde I é o operador identidade em X. O operador $A : D(A) \subset X \to X$, definido por

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A),$$

sendo $D(A) = \{x \in X;\ \lim_{t\to 0^+}(S(t)x - x)/t \ \text{ existe}\}$, é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $(S(t))_{t\geqslant 0}$.

Definição 3.1. Um semigrupo $(S(t))_{t\geqslant 0}$ de operadores lineares limitados em X é chamado de fortemente contínuo, ou C_0-semigrupo, se

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x, \quad \forall x \in X,$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Vamos introduzir o estudo de controlabilidade com o sistema linear de EDO's dado por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geqslant 0, \\ y(0) = y_0 \in X, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde, para todo $t \geqslant 0$, $y(t) \in X$, o espaço dos estados, $u(t) \in U$, o espaço dos controles, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(S(t))_{t\geqslant 0}$ e $B : U \to X$ é uma aplicação linear contínua. A fórmula da variação dos parâmetros nos dá que uma solução de (3.1) é da forma

$$y(t; y_0, u) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\, ds.$$

Para $T > 0$, considere o espaço $L^2([0,T],U) = \{f : [0,T] \to U;\ \int_0^T |f(s)|_U^2\, ds < +\infty\}$. Definimos o operador controlabilidade $\mathscr{B}^T : L^2([0,T],U) \to X$, por

$$\mathscr{B}^T(u) = \int_0^T S(T-s)Bu(s)\, ds.$$

Definição 3.2. O sistema (3.1) é dito *exatamente controlável* em $[0,T]$ se a imagem do operador $\mathscr{B}^T$ é igual a X, isto é, $R(\mathscr{B}^T) = X$.

Observação 3.3. Pela definição acima, o sistema (3.1) é exatamente controlável quando, dado um estado $x \in X$, é possível encontrar um controle $u \in L^2([0,T],U)$ tal que $y(T) = x$, se considerarmos a condição inicial $y(0) = 0$. Mas isto equivale a dizer

$$y(T,0,u) = x - y(T,y_0,0).$$

Em outras palavras, dado um estado $x \in X$ podemos encontrar um controle $u \in L^2([0,T],U)$ tal que $y(T,y_0,u) = x$.

Proposição 3.4. *Se o operador B é compacto, então o operador controlabilidade $\mathscr{B}^T$ é compacto para todo $T > 0$. Em particular, se* $\dim X = \infty$, *então* (3.1) *nunca é exatamente controlável em* $[0,T]$.

Em vista da proposição acima, apresentamos uma definição mais fraca para a controlabilidade de um sistema linear.

Definição 3.5. O sistema (3.1) é dito ser *aproximadamente controlável* em $[0,T]$ se a imagem do operador controlabilidade $\mathscr{B}^T$ for densa em X, isto é, $\overline{R(\mathscr{B}^T)} = X$.

De acordo com esta definição, o sistema (3.1) ser aproximadamente controlável em $[0,T]$ é equivalente a dizer que existe um controle $u_\varepsilon \in L^2([0,\tau],U)$ tal que $\|x - y(T,y_0,u_\varepsilon)\| < \varepsilon$, para cada estado $x \in X$.

Outra classe de sistemas lineares estudada na literatura, veja por exemplo (NAKAGIRI; YAMAMOTO, 1989), são aqueles descritos por uma equação diferencial funcional com retardo $r > 0$. Mais especificamente, sistemas da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + L(t)(y_t) + Bu(t),\ t \geqslant 0, \\ y_0 = \varphi \in \mathscr{C}, \end{cases} \tag{3.2}$$

com $y(t) \in X$, $u(t) \in U$, para todo $t \geqslant 0$, $\mathscr{C} = C([-r,0],X)$ é o espaço das funções contínuas definidas em $[-r,0]$ tomando valores em X, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(S(t))_{t\geqslant 0}$ em X, para cada $t \in [0,+\infty)$ a aplicação $L(t) : \mathscr{C} \to X$ é linear limitada e fortemente contínua, isto é, $t \mapsto L(t)\psi$ é contínua para toda $\psi \in \mathscr{C}$ fixa, e $B : U \to X$ é uma aplicação linear contínua.

Para estudar a controlabilidade desse sistema, precisamos introduzir o conceito de conjunto atingível.

Definição 3.6. O *conjunto atingível* de (3.2) é o conjunto definido por

$$R_L(T,\varphi) = \left\{ S(T)\varphi(0) + \int_0^T S(T-s)[L(s)(y_s) + Bu(s)]\, ds;\ u \in L^2([0,T],U) \right\}.$$

Definição 3.7. O sistema (3.2) é *X-aproximadamente controlável* em $[0,T]$, se $R_L(T,0)$ é denso em X, isto é, $\overline{R_L(T,0)} = X$.

Em (HENRÍQUEZ; PROKOPCZYK, 2015) foi feita uma comparação entre a controlabilidade do sistema (3.1) e do sistema (3.2). Os autores afirmam que, sob ser certas condições, a controlabilidade aproximada de (3.1), com condição inicial $\varphi(0) \in X$, garante a controlabilidade aproximada de (3.2), com condição inicial $\varphi \in \mathscr{C}$.

Com esta ideia de comparar sistemas de equações diferenciais, passamos a estudar alguns sistemas retardados em que o espaço de fase não seja um ambiente de funções contínuas.

3.2 Controlabilidade de sistemas de equações diferencias funcionais em medida

Fixe $t_0, r \in [0,+\infty)$. Considere $O \subset BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ um subconjunto aberto limitado com a propriedade de prolongamento e $P = \{y_t; y \in O \text{ e } t \geqslant t_0\}$. Nosso objeto de estudo é um sistema descrito pelo Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [A(s)y(s) + L(s)y_s]dg(s) + \int_{t_0}^t B(s)u(s)ds,\ t \geqslant t_0, \\ y_{t_0} = \varphi \in P, \end{cases} \tag{3.3}$$

cuja solução denotaremos por $y(t;\varphi,u)$, onde $L : [t_0,+\infty) \to \mathscr{L}(BG([-r,0],\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n)$ e $A : [t_0,+\infty) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ são localmente Perron-Stieltjes integráveis, $g : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função

não decrescente contínua à esquerda, $B : [t_0, +\infty) \to \mathscr{L}(U, \mathbb{R}^n)$ e $u : [t_0, +\infty) \to U$ uma função tal que $B(\cdot)u(\cdot)$ seja localmente Perron integrável, com $(U, \|\cdot\|_U)$ um espaço de Banach.

O conjunto das funções $u : [t_0, +\infty) \to U$ que tornam $B(\cdot)u(\cdot)$ localmente Perron integrável será denotado por $\mathscr{U}$.

Observação 3.8. Dada $y \in BG([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ e $t \in [t_0, +\infty)$ temos

$$\|y_t\|_\infty = \sup_{\theta \in [-r,0]} |y_t(\theta)| = \sup_{\theta \in [-r,0]} |y(t+\theta)| \leqslant \sup_{s \in [t_0 - r, t]} |y(s)|.$$

Por outro lado,

$$|y(t)| = |y_t(0)| \leqslant \|y_t\|_\infty.$$

No que segue apresentamos algumas propriedades consequentes das características dos elementos que compõe (3.3). Antes, lembramos que existe $M > 0$ tal que

$$\|y\|_\infty \leqslant M, \text{ para todo } y \in O,$$

visto que $O \subset BG([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ é limitado.

A fim de estudar a controlabilidade para o sistema (3.3), algumas verificações se fazem necessárias. Para isto, vamos definir $f : [t_0, +\infty) \times P \to \mathbb{R}^n$ por

$$f(t, \varphi) = A(t)\varphi(0) + L(t)\varphi. \tag{3.4}$$

Como consequência da observação anterior, para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e $y \in O$, temos

$$|f(t, y_t)| \leqslant \|A(t)\||y(t)| + \|L(t)\|\|y_t\|_\infty \leqslant M\Big(\|A(t)\| + \|L(t)\|\Big).$$

Assim, tomando $M_1(t) = (\|A(t)\| + \|L(t)\|)M$, se $\tau, \rho \in [t_0, +\infty)$ são quaisquer, então

$$\begin{aligned}
|\rho - \tau||f(\tau, y_\tau)g(\rho) - f(\tau, y_\tau)g(\tau)| &= |\rho - \tau||f(\tau, y_\tau)||g(\rho) - g(\tau)| \\
&= \begin{cases} -(\rho - \tau)|f(\tau, y_\tau)|(-(g(\rho) - g(\tau))), & \rho \leqslant \tau \\ (\rho - \tau)|f(\tau, y_\tau)|(g(\rho) - g(\tau)), & \rho \geqslant \tau \end{cases} \\
&= (\rho - \tau)\Big(|f(\tau, y_\tau)|g(\rho) - |f(\tau, y_\tau)|g(\tau)\Big) \\
&\leqslant (\rho - \tau)\Big(M_1(\tau)g(\rho) - M_1(\tau)g(\tau)\Big).
\end{aligned}$$

Com isto, pelo Teorema 1.14, podemos afirmar que

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)dg(s)\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} M_1(s)dg(s).$$

Além disso, ainda levando em consideração a observação anterior, qualquer que seja $z \in BG([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$, em particular $z \in O$, temos

$$|f(t, y_t) - f(t, z_t)| \leqslant \|A(t)\||y(t) - z(t)| + \|L(t)\|\|y_t - z_t\|_\infty$$

$$\leqslant \Big(\|A(t)\| + \|L(t)\|\Big)\|y_t - z_t\|_\infty.$$

Pelo mesmo argumento usado acima, definindo com $M_2(t) = \|A(t)\| + \|L(t)\|$, temos

$$\left|\int_{t_0}^{t} [f(s,y_s) - f(s,z_s)]dg(s)\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} M_2(s)\|y_s - z_s\|_\infty \, dg(s).$$

Por fim, fixada uma função $u \in \mathscr{U}$, podemos definir $p : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ por $p(t) = B(t)u(t)$. Uma vez que $B(t)$ é linear limitado para cada $t \in [t_0, +\infty)$, existe uma constante $K(t) > 0$ tal que

$$|B(t)u(t)| \leqslant K(t)\|u(t)\|_U := M_3(t), \tag{3.5}$$

donde concluímos que

$$\left|\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} M_3(s)ds.$$

Com isto, garantimos que os elementos que compõem (3.3) cumprem as condições (H1)–(H5) de (FEDERSON; MESQUITA; TOON, 2015).

Agora, seja $BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ o subconjunto de $BG([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$, das funções contínuas à esquerda, e considere $O \subset BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ um subconjunto com a propriedade de prolongamento, aberto e limitado . Pelo Teorema 3.1 de (FEDERSON; MESQUITA; TOON, 2015), o PVI (3.3), pode ser associado à EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[\widehat{F}(t,x) + \widehat{B}(t)u(t)], \tag{3.6}$$

com condição inicial

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \varphi(v - t_0), & v \in [t_0 - r, t_0], \\ x(t_0)(t_0), & v \in [t_0, +\infty), \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $\widehat{F} : [t_0, +\infty) \times O \to BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\widehat{F}(t,y)(v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, t_0], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{v} [A(s)y(s) + L(s)y_s]dg(s), & v \in [t_0, t], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + L(s)y_s]dg(s), & v \in [t, +\infty), \end{cases} \tag{3.8}$$

e para cada $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ a aplicação $\widehat{B}(t) : U \to BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ é definida da seguinte forma

$$[\widehat{B}(t)u(t)](v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0 - r, t_0], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{v} B(s)u(s)ds, & v \in [t_0, t], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds, & v \in [t, +\infty). \end{cases} \tag{3.9}$$

Embora as funções $\widehat{F}$ e $\widehat{B}$ assumam valores em $BG^-[t_0-r,+\infty)$, a correspondência estabelecida em (FEDERSON; MESQUITA; TOON, 2015) acontece quando consideramos que a solução x de (3.6) toma valores em um subconjunto $O \subset G([t_0-r,t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$ para algum $\sigma > 0$ fixado. No entanto, é possível "estender" para $BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ aplicando a mesma técnica de (SLAVÍK, 2013). Vejamos isso com um pouco mais de detalhes.

Seja O um subconjunto de $BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Dizer que $x:[t_0-r,+\infty)\to O$ é solução da EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[\widehat{F}(t,x)+\widehat{B}(t)u(t)]$$

é equivalente a dizer que

$$x(t_0+\sigma)-x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} D[\widehat{F}(t,x(\tau))+\widehat{B}(t)u(t)], \tag{3.10}$$

para todo $\sigma \geqslant 0$. Fixado um $\sigma > 0$, segue de (3.8) e (3.9) que ambos os lados direito e esquerdo de (3.10) são constantes em $[t_0+\sigma,+\infty)$, ou seja, a igualdade acima é equivalente a

$$x(t_0+\sigma)(v)-x(t_0)(v) = \left(\int_{t_0}^{t_0+\sigma} D(\widehat{F}(t,x(\tau))+\widehat{B}(t)u(t))\right)(v)$$

para todo $v \in [t_0,t_0+\sigma]$. Considerando $\widehat{x}$ a restrição da solução x ao intervalo $[t_0,t_0+\sigma]$ o problema, antes considerado em $[t_0-r,+\infty)$, se reduz ao intervalo $[t_0,t_0+\sigma]$ onde o Teorema 3.1 de (FEDERSON; MESQUITA; TOON, 2015) se aplica. Dito isto, apresentamos uma releitura desse teorema.

Teorema 3.9. *Considere $O \subset BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ com a propriedade de prolongamento. Sejam $P = \{y_t;\ y \in O \text{ e } t_0 \leqslant t < +\infty\}$ e $\varphi \in P$. Assuma que $g:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ seja não decrescente.*

(i) *Se $y \in O$ é uma solução da equação diferencial em medida*

$$\begin{cases} y(t) = y_{t_0} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s) + \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds, \\ y_{t_0} = \varphi, \end{cases}$$

então a função $x:[t_0,+\infty)\to O$ dada por

$$x(t)(v) = \begin{cases} y(v), & v \in [t_0-r,t], \\ y(t), & v \in [t,+\infty), \end{cases}$$

é solução da EDO generalizada (3.6) com condição inicial

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \varphi(v-t_0), & v \in [t_0-r,t_0] \\ x(t_0)(t_0), & v \in [t_0,+\infty). \end{cases}$$

(ii) *Se* $x : [t_0, +\infty) \to O$ *é uma solução da EDO generalizada* (3.6) *com condição inicial*

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \varphi(v - t_0), & v \in [t_0 - r, t_0] \\ x(t_0)(t_0), & v \in [t_0, +\infty). \end{cases}$$

então a função $y \in O$ *definida por*

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v), & v \in [t_0 - r, t_0], \\ x(v)(v), & v \in [t_0, +\infty), \end{cases}$$

é solução da EDF em medida

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + L(s)y_s]dg(s) + \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds, \ t \in [t_0, t_0 + \sigma], \\ y_{t_0} = \varphi. \end{cases}$$

Até agora verificamos que a equação (3.3) possui uma EDO generalizada associada. Dessa forma, podemos usar a teoria de controle para EDO generalizadas de (SILVA, 2017), e extrair informações para o nosso objeto de estudo. Antes de tudo, vejamos quando o sistema (3.3) é controlável.

Definição 3.10. Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) Dizemos que o sistema (3.3) é controlável em $[t_0, T]$ (para algum tempo finito $T > t_0$) se existe uma função $u \in \mathscr{U}$ tal que

$$y(T; \varphi, u) = x^0.$$

(b) Dizemos que o sistema (3.3), é aproximadamente controlável em $[t_0, T]$ (para algum tempo finito $T > t_0$) se existe uma sequência $u_n \in \mathscr{U}$ tal que

$$y(T; \varphi, u_n) \to x^0.$$

No que segue, vamos nos apoiar na construção de (COLLEGARI, 2014) e (FEDERSON; SCHWABIK, 2006). Sejam $y \in BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ e $t \in [t_0, +\infty)$ quaisquer. Note que a aplicação

$$v \mapsto \widehat{F}(t, y)(v)$$

é limitada e regrada em $[t_0, +\infty)$, isto é, $\widehat{F}(t, y) : [t_0 - r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ é regrada limitada. Assim, podemos olhar para a função $\widehat{F}$ de uma maneira mais conveniente, da seguinte forma: para cada $t \in [t_0, +\infty)$ fixado, consideramos o operador

$$\widehat{F}(t, \cdot) : BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n) \to BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n).$$

Como $A(t)$, $L(t)$ e o operador integral são operadores lineares, então $\widehat{F}(t, \cdot)$ é linear, isto é

$$\widehat{F}(t, \alpha y + \beta z) = \widehat{F}(t, \alpha y) + \widehat{F}(t, \beta z),$$

quaisquer que sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $y,z \in BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, a função definida em (3.8) pode ser reescrita na forma

$$[\widehat{A}(t)y](v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0-r,t_0], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{v} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s), & v \in [t_0,t], \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s), & v \in [t,+\infty), \end{cases} \tag{3.11}$$

sendo $\widehat{A}(t)$ um operador linear definido em $BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$, para cada $t \in [t_0,+\infty)$ fixado, tomando valores em $BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Considere a norma

$$\|\widehat{A}(t)y\| = \sup_{v\in[t_0-r,+\infty)} |\widehat{F}(t,y)(v)|.$$

Com os mesmos argumentos de antes, se $v \in [t_0-r,+\infty)$, então

$$|\widehat{F}(t,y)(v)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{v} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s)\right| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} M_2(s)dg(s)\right) \|y\|_\infty.$$

Logo, $\widehat{A}(t)$ é um operador linear limitado para cada $t \in [t_0,+\infty)$, isto é,

$$\widehat{A} : [t_0,+\infty) \to \mathscr{L}(BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)),$$

com

$$\|\widehat{A}(t)\|_{\mathscr{L}(BG^-([t_0,+\infty)),\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_{t_0}^{t} M_2(s)dg(s).$$

Mais ainda, se $y \in BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ e $t_0 \leqslant s_1 < s_2 < +\infty$, então

$$[\widehat{A}(s_2)y](v) - [\widehat{A}(s_1)y](v) = \begin{cases} 0, & v \in [t_0-r,s_1], \\ \displaystyle\int_{s_1}^{v} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s), & v \in [s_1,s_2], \\ \displaystyle\int_{s_1}^{s_2} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s), & v \in [s_2,+\infty). \end{cases} \tag{3.12}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|\widehat{A}(s_2)y - \widehat{A}(s_1)y\|_\infty &= \sup_{v\in[s_1,s_2]} \left|[\widehat{A}(s_2)y](v) - \widehat{A}(s_1)y](v)\right| \\ &= \sup_{v\in[s_1,s_2]} \left|\int_{s_1}^{v} [A(s)y(s)+L(s)y_s]dg(s)\right| \\ &\leqslant \sup_{v\in[s_1,s_2]} \left(\int_{s_1}^{v} M_2(s)dg(s)\right) \|y\|_\infty \\ &= \left(\int_{s_1}^{s_2} M_2(s)dg(s)\right) \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto, quaisquer que sejam $t_0 \leqslant s_1 < s_2 < +\infty$,

$$\|\widehat{A}(s_2) - \widehat{A}(s_1)\| \leqslant \int_{s_1}^{s_2} M_2(s)dg(s), \tag{3.13}$$

ou seja, a aplicação $\widehat{A} : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathscr{L}(BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n))$ é de variação limitada em $[t_0, t_0+\sigma]$ qualquer que seja $\sigma > 0$, com

$$\mathrm{var}_{[t_0,t_0+\sigma]}(\widehat{A}) \leqslant \int_{t_0}^{t_0+\sigma} M_2(s)dg(s).$$

Para atingir nosso objetivo, precisamos enquadrar (3.6) no mesmo formato apresentado em (SILVA, 2017), isto é, precisamos verificar as seguintes hipóteses:

(B1) $\widehat{A} \in BV([t_0,+\infty), \mathscr{L}(BG^-([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n))$;

(B2) para todo $t \in [t_0,+\infty)$, temos

- $(I - [A(t) - A(t^-)])^{-1} \in \mathscr{L}(BG^-([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n))$;
- $(I + [A(t^+) - A(t)])^{-1} \in \mathscr{L}(BG^-([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n))$.

A construção anterior mostra que o operador $\widehat{A} : [t_0,+\infty) \to \mathscr{L}(BG^-([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n))$, redefinido em (3.11), satisfaz a condição (B1). Para verificar (B2), suponha que valha a seguinte condição:

(B3) se t é um ponto de descontinuidade de g, então $M_2(t)\Delta^+ g(t) < 1$.

Assim, por (3.13), pelo Teorema 1.13 aliado à continuidade a esquerda da função g e pela condição (B3), temos

$$\|\widehat{A}(t) - \widehat{A}(t^-)\| \leqslant M_2(t)\Delta^- g(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \|\widehat{A}(t^+) - \widehat{A}(t)\| \leqslant M_2(t)\Delta^+ g(t) < 1,$$

donde, podemos concluir (veja, por exemplo, o Teorema 2.8 de (KRESS, 1989)) que a condição (B2) está satisfeita.

Agora, vejamos a aplicação $\widehat{B}$ definida em (3.9). A linearidade de $\widehat{B}$ segue do fato de B e o operador integral serem lineares. Além disso, visto que para cada $t \in [t_0,+\infty)$ temos $\widehat{B}(t)u(t) \in BG^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ então

$$\|\widehat{B}(t)u(t)\|_\infty = \sup_{v\in[t_0-r,+\infty)} \left|[\widehat{B}(t)u(t)](v)\right|.$$

Suponha que $u : [t_0,+\infty) \to U$ seja tal que $\|u(s)\|_U \leqslant 1$ para todo $s \in [t_0,+\infty)$. Então, por (3.5) e o Teorema 1.35 de (SCHWABIK, 1992) temos

$$\left|[\widehat{B}(t)u(t)](v)\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{v} B(s)u(s)ds\right| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right) := \widehat{K}(t).$$

Nesse caso,

$$\|\widehat{B}(t)u(t)\|_\infty \leqslant \widehat{K}(t).$$

Agora, se $u(t) \in U$ é qualquer elemento não nulo, podemos definir $v(t) = u(t)/\|u(t)\|_U$. Assim, $\|v(t)\|_U \leqslant 1$ e pela afirmação anterior $|\widehat{B}(t)v(t)| \leqslant \widehat{K}(t)$ e, portanto,

$$\|\widehat{B}(t)u(t)\|_\infty \leqslant \widehat{K}(t)\|u(t)\|_U.$$

Consequentemente, $\widehat{B} : [t_0, +\infty) \to \mathscr{L}(U, BG([t_0 - r, +\infty)), \mathbb{R}^n)$.

Sintetizando a análise feita até o momento, o PVI (3.3) corresponde à EDO generalizada linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = D[\widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u(t)], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.14}$$

onde $x_0 \in BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$ é dada por (3.7) e as soluções $y(t; \varphi, u)$ de (3.3) e $x(t; x_0, u)$ de (3.14) obedecem a relação

$$y(v) = \begin{cases} x(t_0)(v) & v \in [t_0 - r, t_0], \\ x(v)(v) & v \in [t_0, +\sigma). \end{cases}$$

Para a controlabilidade do PVI (3.14) apresentamos uma releitura da Definição 4.2 de (SILVA, 2017).

Definição 3.11. Seja $\zeta \in BG^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$.

(a) Dizemos que o sistema (3.14) é controlável em $[t_0, T]$ (para algum tempo finito $T > t_0$) se existe uma função $u \in \mathscr{U}$ tal que

$$x(T; x_0, u) = \zeta.$$

(b) Dizemos que o sistema (3.14), é aproximadamente controlável em $[t_0, T]$ (para algum tempo finito $T > t_0$) se existe uma sequência $u_n \in \mathscr{U}$ tal que

$$x(T; x_0, u_n) \to \zeta.$$

Observe que dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$ podemos definir a função constante por

$$\zeta(t) = x^0, \text{ para todo } t \in [t_0 - r, +\infty).$$

Se existirem $t_0 < T < +\infty$ e uma função $u \in \mathscr{U}$ tal que $x(T; x_0, u) = \zeta$, então

$$y(T; \varphi, u) = x(T)(T) = \zeta(T) = x^0.$$

De maneira análoga se existirem $t_0 < T < +\infty$ e uma sequência $u_n \in U$ tal que $x(T; x_0, u_n) \to \zeta$, então $y(T; \varphi, u_n) \to x^0$.

Todo esse estudo justifica o próximo resultado.

Teorema 3.12. *Seja $\varphi \in P$. Se o sistema (3.14) é (exatamente) aproximadamente controlável então o sistema (3.3) é (exatamente) aproximadamente controlável.*

A partir dessa condição suficiente para a controlabilidade de (3.3), buscamos estabelecer um critério de controlabilidade para equações diferenciais funcionais com impulso (EDFI). Vamos considerar uma EDFI com infinitos impulsos semelhante àquela estudada em (SELVI; ARJUNAN, 2012). Mais especificamente, consideraremos um sistema da forma

$$\begin{cases} y' = A(t)y(t) + L(t)y_t + B(t)u(t), \ t \neq t_k, \\ \Delta^+ y(t_k) = I_k(y(t_k)), \ t = t_k, k = 1, 2 \ldots, \\ y_{t_0} = \varphi \in P, \end{cases} \tag{3.15}$$

com os os operadores A, B, L e a função u satisfazendo as mesmas condições do começo deste capítulo.

Definição 3.13. Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$. O sistema (3.15) é controlável em $[0, T]$ (para algum tempo finito $T > t_0$), se existe uma função controle $u \in \mathscr{U}$ tal que $y(T; \varphi, u) = x^0$.

De acordo com (FEDERSON; MESQUITA; SLAVÍK, 2012), veja a observação 3.12, o PVI (3.15) pode ser reescrito como o sistema de EDF em medida

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \tilde{f}(s, y_s) dg(s) + \int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds, \ t \geqslant t_0, \\ y_{t_0} = \varphi \in P, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $\tilde{f} : [t_0, +\infty) \times P \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\tilde{f}(t, \varphi) = \begin{cases} A(t)\varphi(0) + L(t)\varphi, & t \neq t_k \\ I_k(\varphi(0)), & t = t_k, k = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

e $g(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{t_k}(t)$, sendo χ_a a função característica do intervalo aberto $(a, +\infty)$. Assim, podemos enunciar o resultado a seguir.

Corolário 3.14. *Seja $\varphi \in P$. Se (3.16) é exatamente controlável então (3.15) é controlável.*

REFERÊNCIAS

AFONSO, S. M.; BONOTTO, E. M.; FEDERSON, M.; SCHWABIK, Š. Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times. **J. Differential Equations**, v. 250, n. 7, p. 2969–3001, 2011. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.01.019>. Citado na página 29.

ANDRADE, F. G. d. **Controlabilidade para sistemas de equaçoes diferenciais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto, 2014. Citado na página 17.

BANAŚ, J.; KOT, M. On regulated functions. **J. Math. Appl.**, v. 40, p. 21–36, 2017. ISSN 1733-6775. Citado na página 21.

BENCHOHRA, M.; HENDERSON, J.; NTOUYAS, S. **Impulsive differential equations and inclusions**. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006. v. 2. xiv+366 p. (Contemporary Mathematics and Its Applications, v. 2). ISBN 977-5945-50-X. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/9789775945501>. Citado na página 18.

BRÉZIS, H. **Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert**. [S.l.]: North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. vi+183 p. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). Citado na página 22.

COLLEGARI, R. **Equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares e aplicações às equações diferenciais funcionais lineares**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado na página 59.

CURTAIN, R. F.; ZWART, H. **An introduction to infinite-dimensional linear systems theory**. Springer-Verlag, New York, 1995. v. 21. xviii+698 p. (Texts in Applied Mathematics, v. 21). ISBN 0-387-94475-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6>. Citado na página 53.

DAS, P. C.; SHARMA, R. R. On optimal controls for measure delay-differential equations. **SIAM J. Control**, v. 9, p. 43–61, 1971. ISSN 0363-0129. Citado na página 18.

____. Existence and stability of measure differential equations. **Czechoslovak Math. J.**, v. 22(97), p. 145–158, 1972. ISSN 0011-4642. Citado na página 18.

FEDERSON, M.; FRASSON, M.; MESQUITA, J. G.; TACURI, P. H. Measure neutral functional differential equations as generalized odes. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, Jul 2018. ISSN 1572-9222. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10884-018-9682-y>. Citado na página 18.

FEDERSON, M.; MESQUITA, J. G. A new continuous dependence result for impulsive retarded functional differential equations. **Czechoslovak Math. J.**, v. 66(141), n. 1, p. 1–12, 2016. ISSN

0011-4642. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10587-016-0233-6>. Citado na página 18.

FEDERSON, M.; MESQUITA, J. G.; SLAVÍK, A. Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales. **J. Differential Equations**, v. 252, n. 6, p. 3816–3847, 2012. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.11.005>. Citado na página 63.

FEDERSON, M.; MESQUITA, J. G.; TOON, E. Lyapunov theorems for measure functional differential equations via Kurzweil-equations. **Math. Nachr.**, Wiley Online Library, v. 288, n. 13, p. 1487–1511, 2015. ISSN 0025-584X. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mana.201300219>. Citado nas páginas 57 e 58.

FEDERSON, M.; SCHWABIK, v. S. Generalized ODE approach to impulsive retarded functional differential equations. **Differential Integral Equations**, v. 19, n. 11, p. 1201–1234, 2006. ISSN 0893-4983. Citado nas páginas 18, 29 e 59.

FRAŇKOVÁ, D. Continuous dependence on a parameter of solutions of generalized differential equations. **Časopis Pěst. Mat.**, v. 114, n. 3, p. 230–261, 1989. ISSN 0528-2195. Citado na página 29.

____. Regulated functions. **Math. Bohem.**, v. 116, n. 1, p. 20–59, 1991. ISSN 0862-7959. Citado na página 21.

FRASSON, M. V. S.; LUNEL, S. M. V. Large time behaviour of linear functional differential equations. **Integral Equations Operator Theory**, v. 47, n. 1, p. 91–121, 2003. ISSN 0378-620X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00020-003-1155-x>. Citado na página 17.

GODOY, J. B. **Método da média para Equações diferenciais funcionais retardadas impulsivas via equações diferenciais generalizadas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009. Citado nas páginas 23, 26 e 30.

HALAS, Z. Continuous dependence of solutions of generalized linear ordinary differential equations on a parameter. **Math. Bohem.**, v. 132, n. 2, p. 205–218, 2007. ISSN 0862-7959. Citado na página 29.

HALAS, Z.; TVRDÝ, M. Continuous dependence of solutions of generalized linear differential equations on a parameter. **Funct. Differ. Equ.**, v. 16, n. 2, p. 299–313, 2009. ISSN 0793-1786. Citado na página 29.

HALE, J. K.; KATO, J. Phase space for retarded equations with infinite delay. **Funkcial. Ekvac.**, v. 21, n. 1, p. 11–41, 1978. ISSN 0532-8721. Disponível em: <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~fe/xml/mr0492721.xml>. Citado na página 17.

HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to functional-differential equations**. Springer-Verlag, New York, 1993. v. 99. x+447 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 99). ISBN 0-387-94076-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7>. Citado na página 17.

HENRÍQUEZ, H. R.; PROKOPCZYK, A. Controllability and stabilizability of linear time-varying distributed hereditary control systems. **Math. Methods Appl. Sci.**, v. 38, n. 11, p. 2250–2271, 2015. ISSN 0170-4214. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mma.3219>. Citado na página 55.

HENSTOCK, R. **Lectures on the theory of integration**. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1988. v. 1. xiv+206 p. (Series in Real Analysis, v. 1). ISBN 9971-50-450-2; 9971-50-451-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/0510>. Citado na página 23.

HERNÁNDEZ, E.; HENRÍQUEZ, H. R. Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 221, n. 2, p. 499–522, 1998. ISSN 0022-247X. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5899>. Citado na página 18.

HINO, Y.; MURAKAMI, S.; NAITO, T. **Functional-differential equations with infinite delay**. Springer-Verlag, Berlin, 1991. v. 1473. x+317 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1473). ISBN 3-540-54084-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BFb0084432>. Citado nas páginas 17 e 33.

HÖNIG, C. S. **Volterra Stieltjes-integral equations**. [S.l.]: North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975. x+157 p. Functional analytic methods; linear constraints, Mathematics Studies, No. 16, Notas de Matemática, No. 56. [Notes on Mathematics, No. 56]. Citado na página 21.

IMAZ, C.; VOREL, Z. Generalized ordinary differential equations in Banach space and applications to functional equations. **Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)**, v. 11, p. 47–59, 1966. Citado na página 18.

KREJČÍ, P. An application of non-smooth mechanics in real analysis. In: **EQUADIFF 2003**. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005. p. 49–58. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/9789812702067_0005>. Citado na página 22.

KRESS, R. **Linear integral equations**. Springer-Verlag, Berlin, 1989. v. 82. xii+299 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 82). ISBN 3-540-50616-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97146-4>. Citado na página 61.

MONTEIRO, G. A.; SLAVÍK, A. Linear measure functional differential equations with infinite delay. **Math. Nachr.**, v. 287, n. 11-12, p. 1363–1382, 2014. ISSN 0025-584X. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mana.201300048>. Citado nas páginas 18 e 33.

MONTEIRO, G. A.; TVRDÝ, M. Generalized linear differential equations in a Banach space: continuous dependence on a parameter. **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, v. 33, n. 1, p. 283–303, 2013. ISSN 1078-0947. Citado na página 29.

NAKAGIRI, S.-i.; YAMAMOTO, M. Controllability and observability of linear retarded systems in Banach spaces. **Internat. J. Control**, v. 49, n. 5, p. 1489–1504, 1989. ISSN 0020-7179. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00207178908961331>. Citado na página 55.

OLIVA, F.; VOREL, Z. Functional equations and generalized ordinary differential equations. **Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)**, v. 11, p. 40–46, 1966. Citado na página 18.

SCHMAEDEKE, W. W. Optimal control theory for nonlinear vector differential equations containing measures. **J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control**, v. 3, p. 231–280, 1965. Citado na página 18.

SCHWABIK, v. S. **Generalized ordinary differential equations**. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1992. v. 5. x+382 p. (Series in Real Analysis, v. 5). ISBN 981-02-1225-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/1875>. Citado nas páginas 23, 26, 30, 50 e 61.

SELVI, S.; ARJUNAN, M. M. Controllability results for impulsive differential systems with finite delay. **J. Nonlinear Sci. Appl.**, v. 5, n. 3, Special issue, p. 206–219, 2012. ISSN 2008-1898. Disponível em: <https://doi.org/10.22436/jnsa.005.03.05>. Citado na página 63.

SILVA, F. A. d. **Controlabilidade e observabilidade em equações diferenciais ordinárias generalizadas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. Citado nas páginas 59, 61 e 62.

SLAVÍK, A. Measure functional differential equations with infinite delay. **Nonlinear Anal.**, Elsevier, v. 79, p. 140–155, 2013. ISSN 0362-546X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.na.2012.11.018>. Citado nas páginas 32, 33, 34, 37 e 58.

TVRDÝ, M. Regulated functions and the Perron-Stieltjes integral. **Časopis Pěst. Mat.**, v. 114, n. 2, p. 187–209, 1989. ISSN 0528-2195. Citado na página 21.

ZABCZYK, J. **Mathematical control theory: an introduction**. [S.l.]: Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. x+260 p. (Systems & Control: Foundations & Applications). ISBN 0-8176-3645-5. Citado na página 53.

ICMC USP
SÃO CARLOS