

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Teoremas do tipo Tverberg colorido e Teoremas do tipo Van Kampen-Flores

Leandro Vicente Mauri

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Leandro Vicente Mauri

Teoremas do tipo Tverberg colorido e Teoremas do tipo Van Kampen-Flores

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
Abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M454t Mauri, Leandro Vicente
Teoremas do tipo Tverberg colorido e Teoremas do
tipo Van Kampen-Flores / Leandro Vicente Mauri;
orientadora Denise de Mattos. -- São Carlos, 2023.
92 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Teorema Topológico de Tverberg colorido. 2.
Teorema de Van Kampen-Flores. 3. Topologia
combinatória. 4. complexo chessboard. 5. índice de
Volovikov. I. de Mattos, Denise, orient. II. Título.

~~Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:~~

Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938

Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Leandro Vicente Mauri

Tverberg type theorems and Van Kampen-Flores type
theorems

Thesis submitted to the Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in
accordance with the requirements of the Mathematics
Graduate Program, for the degree of Doctor in Science.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
April 2023

À minha companheira Bruna e aos meus familiares, em especial, minha mãe Silvia, minha irmã Giseli, meu sobrinho Pedro e meus avós Vicente (in memoriam) e Nita.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto de dedicação de 10 anos da minha vida dedicados à vida acadêmica e também a realização de um sonho. Porém, não cabe a mim o discurso individualista de que este é o fruto da minha dedicação e que só dependemos de nós mesmos para que nossos objetivos sejam alcançados. Toda construção é coletiva, e com uma Tese de Doutorado não é diferente, existe aqui contribuição de pessoas que não sabem a definição de um espaço topológico. O sentido da vida é coletivo.

Agradeço à Deus, pois vejo suas ações em vários momentos durante a minha vida acadêmica que tornaram possível que eu esteja escrevendo este trabalho.

À companheira e grande amor Bruna, que me acompanhou durante toda minha trajetória desde a graduação e me deu forças necessárias nos momentos de estresse da vida acadêmica oferecendo apoio incondicional e me ouvindo sempre que preciso, além da convivência diária, que me faz ser mais feliz, e claramente isso contribui para eu desenvolver minhas atividades da melhor maneira. Te amo, sem você não consigo imaginar o quão difícil seria.

À minha família, meus pais e avós que sempre me apoiaram nas minhas escolhas acadêmicas, me dando autonomia inclusive quando aos 13 anos declinei de uma oferta de bolsa de estudo integral até o ensino médio em um colégio particular, porque eu sempre acreditei na escola pública. Muitos diziam que eu não tinha escolha e que meus pais deveriam aceitar por mim, mas me deram autonomia, isto é um exemplo de como sempre respeitaram minhas escolhas.

Agradeço à minha irmã Giseli, que foi a primeira pessoa que eu vi valorizando a universidade pública. Em uma época com mais difícil acesso ao ensino superior, ela trabalhava até meia noite, inclusive aos domingos, para pagar cursinho pra ingressar em uma universidade pública. Seu esforço me fez enxergar a universidade pública como algo grandioso, como de fato é.

Aos meus tios Ovaldir e Malena, meus primos, meu grande amigo Ari e sua família, que sempre demonstraram interesse pela minha vida acadêmica e expressaram orgulho de ter um matemático como amigo ou familiar.

À todas essas pessoas citadas, que nunca estudaram Topologia, mas contribuíram muito, pois vocês foram combustível para minha dedicação.

À minha orientadora Denise de Mattos, a qual me acompanhou durante estes 10 anos. Denise além de excelente matemática, é uma excelente pessoa, sempre me tranquilizando quando

necessário. Sem esquecer do professor Edivaldo Lopes dos Santos, o qual possui as mesmas qualidades. Vocês são inspiradores e eu me considero uma pessoa de muita sorte em ter vocês no caminho, além de considerá-los grandes amigos.

Agradeço ao Professor Rade Živaljević, a oportunidade de trabalharmos juntos no Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts (MI SASA), em Belgrado, Sérvia. O Professor Rade, assim como Denise e Edivaldo, além de um grande matemático, é um grande ser humano, assim eu posso dizer que tenho um amigo na Sérvia, país o qual passei a ter um carinho especial.

Agradeço à OBMEP, a qual despertou em mim a paixão por matemática. Em especial às professoras Yuriiko Baldin, Margarete Bapstistini e Ires Dias.

Agradeço aos Presidentes Lula e Dilma, os quais tiveram governos que investiram em educação e pesquisa e viabilizaram a criação da OBMEP, onde começou meu interesse por matemática e do PICME, programa de Iniciação Científica onde conheci a professora Denise e comecei a fazer pesquisa. Em especial, a presença do Presidente Lula na premiação de medalhistas de ouro da OBMEP fez aquela criança de 13 anos sonhar que poderia estar aqui hoje, pois um Presidente que tem vários compromissos, fez questão de estar presente parabenizando os medalhistas, entre os quais eu me incluía.

Agradeço ao ICMC-USP, pela excelente formação matemática, com professores que marcaram minha trajetória, como Oziride Manzoli, Nivaldo Grulha, Leandro Aurichi, Farid Tari, Behrooz Mirzaii, Paulo Dattori, Irene Onnis, Eduardo Tengan, entre outros.

Agradeço aos colegas matemáticos que contribuíram de alguma forma durante minha trajetória. Em especial a Carlos Poncio, César Zapata, Alice Libardi, Pedro Pergher e Thiago de Mello.

Agradeço ao meu país Brasil, que oferece universidades públicas de ótima qualidade, pois se nestas universidades fossem cobradas mensalidades, eu não estaria aqui escrevendo esta tese, pois minha família não teria condições de pagar.

Agradeço à FAPESP, Processo 2018/23928-2, pelo suporte financeiro.

"O filho do pobre vai ser Doutor" (Luiz Inácio Lula da Silva)

RESUMO

MAURI, V. L. **Teoremas do tipo Tverberg colorido e Teoremas do tipo Van Kampen-Flores.** 2023. 92 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

O objetivo deste trabalho é obter novos teoremas do tipo Tverberg colorido e do tipo Van Kampen-Flores. Foram obtidos novos resultados do tipo Tverberg colorido, incluindo um teorema no qual o número de faces na partição de Tverberg não é potência de primo. Novos Teoremas do tipo Van Kampen-Flores para todo r também são resultados originais deste trabalho.

Palavras-chave: Teorema Topológico de Tverberg colorido, Teorema de Van Kampen-Flores, Topologia combinatória, complexo chessboard, índice de Volovikov.

ABSTRACT

MAURI, V. L. **Tverberg type theorems and Van Kampen-Flores type theorems.** 2023. 92 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

The objective of this work is to obtain new colored Tverberg type theorem and of the Van Kampen-Flores type theorem. New colored Tverberg type results were obtained, including a theorem where the number of faces in the Tverberg partition is not a prime power. New Van Kampen-Flores Theorems for all r are also original results of this work.

Keywords: Colored Tverberg theorem, Van Kampen-Flores theorem, Topological combinatorics, chessboard complex, Volovikov index.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – p -simplexos padrão.	28
Figura 2 – Faces de um 2- simplexo.	29
Figura 3 – Decomposição de um 2-simplexo.	30
Figura 4 – 0 e 1- dimensional complexos simpliciais.	30
Figura 5 – Exemplos que mostram a estrutura de um 2- dimensional complexo simplicial.	31
Figura 6 – Exemplo de k - esqueleto.	32
Figura 7 – Exemplo de produto cartesiano e <i>join</i> de simplexos.	32
Figura 8 – Exemplo de <i>join</i>	33
Figura 9 – Representação da afirmação da Proposição 9.	34
Figura 10 – Exemplo de mergulho do produto cartesiano no <i>join</i>	35
Figura 11 – Duas cópias de D_2 , $(D_2)^{*2}$, $(D_2)_{\Delta(2)}^{*2}$ e $(D_2)_{\Delta(2)}^{\times 2}$	36
Figura 12 – Complexo <i>chessboard</i> $\Delta_{2,3}$	42

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^n — espaço Euclidiano

$|A|$ — cardinalidade do conjunto A

$\lceil x \rceil$ — função teto dada por $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z}; n \geq x\}$

$\lfloor x \rfloor$ — função piso dada por $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$

$[n]$ — conjunto $\{1, \dots, n\}$

$\text{conv}(T)$ — envoltória convexa de T

Δ_N — complexo simplicial do n -dimensional simplex

$V(\sigma)$ — conjunto de vértices de σ

$\text{relint}(\sigma)$ — interior relativo de σ

\mathfrak{S}_n — Grupo simétrico das bijeções de $[n]$ em $[n]$

$\Delta^{\leq k}$ — k -esqueleto do complexo simplicial Δ

$\text{conn}(X)$ — conexidade de X

$\dim(\sigma)$ — dimensão de σ

$||\Delta||$ — poliedro do complexo simplicial Δ

$A_1 \uplus \dots \uplus A_n$ — denota o conjunto $(A_1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (A_n \times \{n\})$

\sqcup — união disjunta

$\text{supp}(x)$ — suporte de x

K^{*n} — n -join de K

S^n — esfera n -dimensional

$K_{\Delta(2)}^{\times n}$ — n -produto deletado dois a dois disjuntos do complexo simplicial K

$K_{\Delta(k)}^{*n}$ — n -join k -deletado do complexo simplicial K

p_X — fibração de Borel de X

$\{E_r^{*,*}, d_r\}$ — sequência espectral cohomológica

$E_{\infty}^{p,q}$ — termo limite da sequência espectral

$H^*(X; R)$ — anel de cohomologia de X

X_G — espaço de Borel do G-espaço X

\mathbb{Z}_p — grupo finito de ordem p primo

$H^n(X; R)$ — n-ésimo R-módulo de cohomologia de X

$\tilde{H}^n(X; R)$ — n-ésimo R-módulo de cohomologia reduzida de X

$i(X)$ — índice de Volovikov de X

$i'(X)$ — índice relacionado com índice de Volovikov (ver Definição 5.1.1)

$\Delta_{m,n}$ — complexo *chessboard* do tabuleiro $[m] \times [n]$

$R_{(C_1, \dots, C_k)}$ — subcomplexo colorido

W_r — subespaço $\{(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r ; \sum_{i=1}^r t_i = 0\}$

$S(V)$ — esfera unitária do espaço vetorial normado V

D^\perp — subespaço ortogonal a D

$\pi_1(X)$ — grupo fundamental de X

$A(f, y)$ — conjunto de coincidência parcial de f

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRELIMINARES	27
2.1	Complexos simpliciais geométricos	27
2.2	<i>Joins</i>	32
2.3	A fibração de Borel	36
2.4	Seqüências Espectrais	38
2.5	Índice de Volovikov	40
2.6	Complexo <i>Chessboard</i> e conexidade	41
3	TEOREMAS DO TIPO TVERBERG COLORIDO	45
3.1	Teorema Topológico de Tverberg e Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica	45
3.1.1	<i>Teorema Topológico de Tverberg</i>	45
3.1.2	<i>Problema de Tverberg Colorido de Živaljević e Vrećica</i>	47
3.1.3	<i>Definições e teoremas chave na resolução de problemas do tipo Tverberg e Tverberg Colorido</i>	48
3.1.4	<i>Demonstrações dos teoremas clássicos</i>	52
3.2	Generalização do Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica	54
3.3	Teorema de Tverberg colorido com novas condições sobre as faces	57
4	TEOREMAS DO TIPO VAN KAMPEN-FLORES	71
4.1	Teorema de Van Kampen-Flores colorido para todo inteiro r	71
4.2	Novos teoremas para partições j -disjuntas	79
5	TEOREMA DE TVERBERG COLORIDO PARA NÃO POTÊNCIAS DE PRIMO	83
5.1	Teorema de Tverberg colorido com $p^n - 1$ faces	83
	REFERÊNCIAS	91

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é obter novos resultados em Problemas do tipo Tverberg, Problemas do tipo Tverberg colorido e Problemas do tipo Van Kampen-Flores. Estes tipos de problemas de Geometria Discreta e Combinatória se tornaram uma importante área de pesquisa em constante expansão nos últimos anos e as ferramentas da Topologia Algébrica tem sido fundamentais na obtenção de novos resultados.

A história dos teoremas do tipo Tverberg surge com o Teorema de Radon.

Teorema de Radon (Teorema 3.1.1) Para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ com pelo menos $d + 2$ elementos, existem subconjuntos disjuntos S e T de X tais que $\text{conv}(S) \cap \text{conv}(T) \neq \emptyset$.

O Teorema de Radon tem uma reformulação equivalente utilizando aplicação afim.

Teorema de Radon Afim (Teorema 3.1.2) Para toda aplicação afim $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem faces disjuntas σ e τ de Δ_{d+1} tais que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.

A pergunta que surgiu a partir do Teorema de Radon Afim é se a aplicação f precisa ser afim ou se o teorema segue válido para f contínua. Essa pergunta foi respondida por Bajmóczy e Bárány em 1979 (BAJMÓCZY; BÁRÁNY, 1979) e utiliza o Teorema de Borsuk–Ulam em sua demonstração.

Teorema Topológico de Radon (Teorema 3.1.3) Para toda aplicação contínua $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem faces disjuntas σ e τ do simplexo Δ_{d+1} tais que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.

Em 1966, Helge Tverberg demonstrou o Teorema de Tverberg, que generaliza o Teorema Topológico de Radon.

Teorema de Tverberg (Teorema 3.1.4) Sejam $r \geq 2$, $d \geq 1$ inteiros e $N = (r - 1)(d + 1)$. Para toda aplicação afim $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N , duas a duas disjuntas,

tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Novamente surge a pergunta se é necessário que f seja uma aplicação afim ou se o teorema segue para f sendo uma aplicação contínua qualquer. Desta pergunta surge a Conjectura Topológica de Tverberg.

Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) Sejam $r \geq 2$, $d \geq 1$ inteiros e $N = (r-1)(d+1)$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

A Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) ficou por muito tempo sem uma resposta, sendo considerada um dos problemas mais importantes em Topologia Combinatória. Em 1981 foi demonstrada para o caso onde r é um número primo, por Bárány, Shlosman e Szücs (BÁRÁNY; SHLOSMAN; SZÜCS, 1981). Este resultado foi estendido para o caso onde r é potência de primo, por Özaydin (não publicado) (OZAYDIN, 1987) e Volovikov (VOLOVIKOV, 1996). Este resultado ficou conhecido como Teorema Topológico de Tverberg.

Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6) Sejam $d \geq 1$ inteiro, $r = p^n \geq 2$ potência de primo e $N = (r-1)(d+1)$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

O conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ de faces duas a duas disjuntas de Δ_N cujas imagens pela aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ tem interseção não vazia é chamado *partição de Tverberg* para f .

O caso geral da Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) ficou em aberto por muito tempo, até que recentemente, em (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2019) ficou provado que a conjectura não é válida quando r não é potência de primo e $d \geq 2r + 1$.

Problemas e teoremas relacionados com o Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6) são chamados de *Teoremas e Problemas do tipo Tverberg*.

Posteriormente surgiram problemas relacionados com o Teorema Topológico de Tverberg que utilizavam o conceito de coloração nos vértices e exigiam as faces coloridas.

Sejam $N \geq 1$ inteiro e $V(\Delta_N)$ o conjunto de vértices do simplexo Δ_N . Uma *coloração* do conjunto de vértices $V(\Delta_N)$ por l cores é uma partição (C_1, \dots, C_l) de $V(\Delta_N)$, isto é, $C_1 \cup \dots \cup C_l = V(\Delta_N)$ e $C_i \cap C_j = \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq l$.

Os elementos da partição (C_1, \dots, C_l) são chamados *classes de cores* ou simplesmente *cores*.

Uma face σ de Δ_N é uma *face colorida* se $|\sigma \cap C_i| \leq 1$, para todo $i \in [l]$, isto é, não

existem dois ou mais vértices da face σ que pertencem a uma mesma classe de cor.

Em 1992, Živaljević e Vrećica apresentaram em (ŽIVALJEVIĆ; VREĆICA, 1992) o seguinte problema envolvendo coloração.

Problema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Problema 3.1.10) Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Determine o menor inteiro $t = t(d, r)$ tal que para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d+1)$ cores, onde toda cor tem cardinalidade de pelo menos t vértices, existem r faces coloridas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Para o caso onde $r = p^n \geq 2$ é potência de primo, Živaljević e Vrećica provaram que $t(d, r) \leq 2r - 1$ e este resultado ficou conhecido como Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica.

Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ do simplexo Δ por $(d+1)$ cores, onde toda cor tem pelo menos $2r - 1$ vértices, existem r faces coloridas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Problemas e teoremas relacionados com o Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) são chamados de *Teoremas e Problemas do tipo Tverberg colorido*.

O conjunto de r faces coloridas duas a duas disjuntas $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ que satisfaz um Teorema do tipo Tverberg colorido é chamado *Partição de Tverberg colorida*.

O Teorema Topológico de Radon (Teorema 3.1.3), o qual é o Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.4), para o caso $r = 2$, garante que para toda aplicação contínua $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem duas faces disjuntas cujas imagens por f se intersectam. Naturalmente surgiram perguntas sobre se poderíamos limitar a dimensão destas faces neste tipo de problema e, assim, surgiram os problemas do tipo Van Kampen-Flores e os problemas do tipo Van Kampen-Flores colorido.

Na década de 1930, Antonio Flores formulou e Van Kampen demonstrou o seguinte teorema.

Teorema de Van Kampen-Flores (Teorema 4.1.1) Sejam $d \geq 2$ inteiro e $f : \Delta_{d+2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Então existem duas faces disjuntas σ e τ de Δ_{d+2} , onde $\dim(\sigma) \leq d/2$ e $\dim(\tau) \leq d/2$, tais que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.

Note que o caso $d = 2$ do Teorema de Van Kampen-Flores (Teorema 4.1.1) é equivalente a afirmar que o grafo K_5 não é planar.

O teorema a seguir generaliza o Teorema de Van Kampen-Flores e segue como uma consequência do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6). Foi provado primeiramente por Sarkaria (SARKARIA, 1991) para r primo e, em seguida, para $r = p^n$ potência de primo por Volovikov (VOLOVIKOV, 1996).

Teorema de Van Kampen-Flores generalizado (Teorema 4.1.3) Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $k \geq \lceil \frac{r-1}{r}d \rceil$, $N = (d+2)(r-1)$ e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Então, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, no k -esqueleto $\Delta_N^{\leq k}$, isto é, $\dim(\sigma_i) \leq k$, para todo $i \in [r]$ tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

O caso $r = 2$ do Teorema de Van Kampen-Flores generalizado (Teorema 4.1.3) é exatamente o Teorema de Van Kampen-Flores (Teorema 4.1.1).

Em (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014) foram obtidos novos resultados do tipo Tverberg colorido que são obtidos a partir do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6).

O primeiro resultado obtido foi o Teorema de Tverberg colorido “fraco”, enunciado a seguir.

Teorema de Tverberg colorido “fraco” (Teorema 4.1.6) Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $N = (2d+2)(r-1)$ e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Se os vértices de Δ_N tem uma coloração por $(d+1)$ cores, onde cada cor tem cardinalidade no máximo $2r-1$, então existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Também foi obtido o seguinte teorema, o qual é chamado de Teorema de Van Kampen-Flores colorido.

Teorema de Van Kampen-Flores colorido (Teorema 4.1.7) Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $m \geq \lceil \frac{r-1}{r}d \rceil + 1$ e $N = (d+m+1)(r-1)$ inteiros e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Se os vértices do simplexo Δ_N tem uma coloração por m cores, onde cada cor tem cardinalidade no máximo $2r-1$, então existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Neste trabalho foram obtidos resultados inéditos desta teoria utilizando ferramentas sofisticadas da Topologia Algébrica, tais como o índice de Volovikov, o qual é definido a partir da sequência espectral obtida pela fibração de Borel.

O trabalho está organizado como segue.

O Capítulo 2 consiste nos conceitos e ferramentas que serão utilizados para demonstrar os resultados principais. Definimos complexo simplicial, *join*, produto deletado, *join* deletado e listamos suas principais propriedades. Além disso, introduzimos fibração de Borel e sequências espectrais, ferramentas da Topologia Algébrica fundamentais para definir o índice de Volovikov, o

qual tem propriedades importantes listadas na Proposição 2.5.2 que serão amplamente utilizadas nas demonstrações de resultados inéditos ao longo deste trabalho. Na última seção definimos o complexo *chessboard* e enunciamos algumas de suas propriedades. O complexo *chessboard* é um complexo simplicial com papel extremamente importante na resolução de Problemas do tipo Tverberg colorido.

No Capítulo 3, tratamos sobre os Teoremas do tipo Tverberg colorido. Na primeira seção é apresentada uma introdução histórica. Em seguida, definimos conceitos e enunciamos teoremas importantes para demonstrar este tipo de teorema e, por fim, é dada uma demonstração bem objetiva dos clássicos Teorema Topológico de Tverberg e Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica. Na segunda seção, apresentamos o Teorema 3.2.1, demonstrado por C. Poncio (PONCIO, 2020) e que generaliza o Teorema Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica e, em seguida, enunciamos e demonstramos o Teorema 3.2.3, que flexibiliza ainda mais as cardinalidades mínimas das cores no Teorema 3.2.1. Tais teoremas encontram-se em (MAURI *et al.*, 2022). Na terceira seção, é introduzido um novo problema que propõe limitar para toda cor a quantidade de faces na Partição de Tverberg colorida com vértices desta cor (Problema 3.3.1). Como solução do Problema 3.3.1, obtemos neste trabalho o Teorema 3.3.5, que tem como consequências os Corolários 3.3.7 e 3.3.10. Além disso, com modificações apropriadas no problema inicial, obtivemos três novos resultados: os Teoremas 3.3.12, 3.3.14 e 3.3.17. Os resultados desta terceira seção encontram-se em (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022). A ferramenta principal nas demonstrações deste capítulo foi o índice de Volovikov, o qual tem propriedades chaves que estão listadas na Proposição 2.5.2.

O Capítulo 4 trata sobre Teoremas do tipo Van-Kampen-Flores. Na primeira seção, é feita uma introdução histórica deste tipo de teorema e apresentamos uma versão do teorema Topológico de Tverberg para todo r (MATTOS; SANTOS; SOUZA, 2017) que é a motivação para o resultado principal desta seção, o Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” para todo r (Teorema 4.1.13). Na segunda seção, demonstramos dois teoremas com novas versões para todo r e partições j -disjuntas. São estas: o Teorema Topológico de Tverberg para todo r e partições j -disjuntas (Teorema 4.2.6) e o Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r e partições j -disjuntas (Teorema 4.2.8). Os resultados obtidos neste capítulo serão organizados em um pré-print, o qual posteriormente será submetido para publicação. As principais ferramentas utilizadas para demonstrar os teoremas deste capítulo são baseadas no “*constraint method*”, introduzido em (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014).

No quinto e último capítulo, utilizamos o conceito de conjunto de coincidência parcial de f , denotado por $A(f, y)$ e dos índices de Volovikov i e i' e suas propriedades, para demonstrar o Teorema 5.1.6, o qual é um Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica para uma Partição de Tverberg colorida de $q = p^n - 1$ faces, isto é, uma quantidade de faces que não é uma potência de primo, o que torna o resultado bem interessante. Os resultados deste capítulo

são fruto de um estágio realizado com o Professor Rade Živaljević no Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, MI SASA, em Belgrado, Sérvia, durante o primeiro semestre de 2022. Os resultados deste capítulo encontram-se em ([MAURI *et al.*, 2022](#)).

PRELIMINARES

Neste capítulo, introduziremos conceitos preliminares que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Complexos simpliciais geométricos

Nesta seção, apresentaremos os complexos simpliciais geométricos e resultados básicos sobre eles e ilustraremos os conceitos com alguns exemplos. A referência para esta seção é (MATOUSEK, 2008).

Definição 2.1.1. Sejam $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$. Dizemos que estes pontos são *geometricamente dependentes* se existem $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^d$, não todos nulos tais que $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i = 0$ e $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$. Caso contrário v_0, v_1, \dots, v_k são chamados *geometricamente independentes*.

Exemplo 2.1.2. Pela definição acima:

- (1) Dois pontos $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ são geometricamente independentes se $v_0 \neq v_1$.
- (2) Três pontos $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ são geometricamente independentes se não são colineares.
- (3) Quatro pontos $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ são geometricamente independentes se eles não são coplanares.
- (4) Mais geralmente, $k + 1$ pontos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$ são geometricamente independentes se todos não pertencem a um mesmo hiperplano.

O lema a seguir nos fornece uma visão geométrica mais clara da definição de $(k + 1)$ pontos serem geometricamente independentes.

Lema 2.1.3. São equivalentes:

- (1) $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ são geometricamente independentes.

- (2) Os k vetores $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes.
 (3) $(1, v_0), (1, v_1), \dots, (1, v_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ são linearmente independentes.

A seguir definiremos simplexo, o objeto que compõe os complexos simpliciais.

Definição 2.1.4. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^d$ é dito *convexo* se para quaisquer $x, y \in C$ o segmento $xy = \{tx + (1-t)y ; t \in [0, 1]\}$ está contido em C .

O *fecho convexo* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ é a interseção de todos os conjuntos convexos contendo X . O *fecho convexo* de um conjunto X será denotado por $\text{conv}(X)$.

Definição 2.1.5. Um k -simplexo σ é o fecho convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ de $(k+1)$ pontos geometricamente independentes. Os pontos de A são chamados *vértices* de σ e denotados por $V(\sigma)$. A *dimensão* de σ é definida como sendo $|V(\sigma)| - 1 = k$ e denotada por $\dim \sigma$.

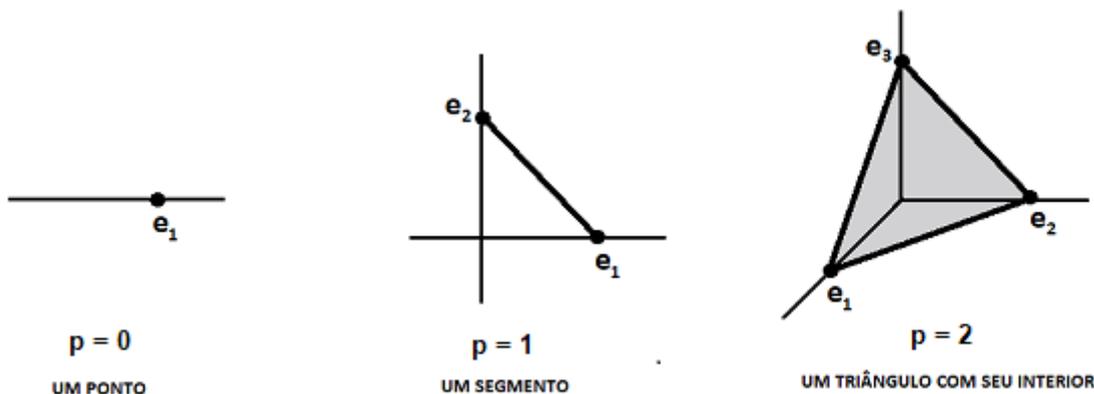
Observação 2.1.6. Note que cada k -simplexo (simplexo k -dimensional) tem $k+1$ vértices.

Observação 2.1.7. Usaremos a denominação k -simplexo quando quisermos especificar a sua dimensão. Quando não for preciso especificar sua dimensão, escreveremos simplesmente simplexo.

Exemplo 2.1.8. Os exemplos mais famosos de simplexos são os p -simplexos padrão. O p -simplexo padrão é o simplexo σ o qual é fecho convexo do conjunto $A = \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$, onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ tem todas as coordenadas nulas, exceto a i -ésima coordenada que tem valor igual a 1.

Veja na figura abaixo os p -simplexos padrão para $p = 0, 1, 2$.

Figura 1 – p -simplexos padrão.



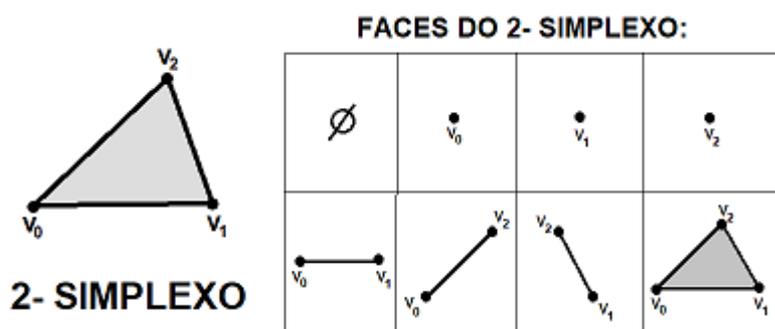
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.1.9. Uma *face* de um k -simplexo σ é o fecho convexo de um subconjunto de vértices de σ .

Observação 2.1.10. Seja σ um k -simplexo cujo conjunto de vértices é A . Claramente, $\emptyset \subset A$ para qualquer que seja A , logo o fecho convexo do conjunto vazio também é uma face de σ . O fecho convexo de \emptyset é obviamente \emptyset e, assim, pela definição o conjunto vazio é uma face de qualquer simplexo σ .

Exemplo 2.1.11. Considere o triângulo da Figura 2 (2- simplexo). Temos 3 vértices, logo temos $2^3 = |\mathcal{P}(\{v_0, v_1, v_2\})| = 8$ faces.

Figura 2 – Faces de um 2- simplexo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.1.12. A palavra face pode nos levar erroneamente a considerar somente as faces de dimensão $k - 1$ (como os segmentos do triângulo do exemplo anterior). Assim, é importante destacar que essa definição de face é bem mais geral, pois como foi mostrado no exemplo, todo o triângulo, os pontos e o vazio também são faces e não somente os segmentos.

Definição 2.1.13. Seja σ um simplexo. O *interior relativo* de σ , denotado por $\text{relint } \sigma$ é obtido de σ removendo todas suas faces com dimensão menor que $\dim \sigma$. Em outras palavras:

$$\text{relint } \sigma = \left\{ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_{d+1} v_{d+1} ; 0 < \lambda_0, \dots, \lambda_{d+1} \leq 1 \text{ e } \sum_{i=0}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}, \text{ onde } V(\sigma) = \{v_0, \dots, v_d\}.$$

Proposição 2.1.14. Seja σ um n - simplexo. Podemos decompor σ como a união disjunta do interior das faces de σ , isto é

$$\sigma = \bigsqcup_{F \subset V(\sigma)} \text{relint}(\text{conv}(F)).$$

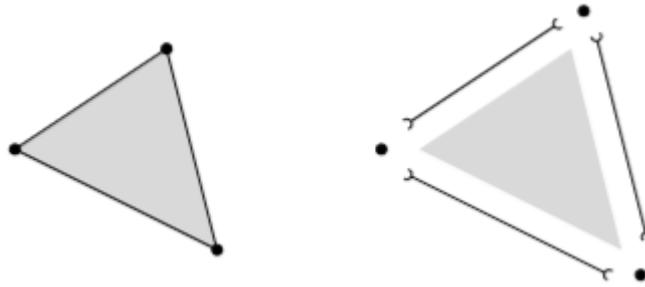
Exemplo 2.1.15. Veja na Figura 3 o esquema da decomposição de um triângulo (2-simplexo).

Definição 2.1.16. Um *complexo simplicial* é uma família não vazia Δ de simplexos que satisfazem as duas condições a seguir.

(C.S. 1) Seja $\sigma \in \Delta$, então toda face de σ está em Δ .

(C.S. 2) Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$, então a intersecção $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é uma face de σ_1 e de σ_2 ao mesmo tempo.

Figura 3 – Decomposição de um 2-simplexo.



Fonte: Matousek (2008, pg. 8).

A *dimensão* de um complexo simplicial Δ é a maior dimensão de um simplexo que está na família Δ , isto é $\dim(\Delta) = \max \{\dim \sigma ; \sigma \in \Delta\}$.

O *conjunto de vértices* de Δ , denotado por $V(\Delta) = \{x ; x \in V(\sigma) \text{ e } \sigma \in \Delta\}$ é o conjunto de todos os vértices dos simplexos da família Δ .

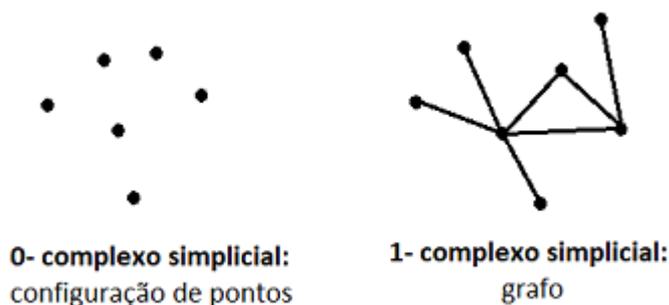
Observação 2.1.17. Para qualquer complexo simplicial Δ temos $\emptyset \in \Delta$, pois como Δ é uma família não vazia, existe um simplexo $\sigma \in \Delta$ e como vimos na Observação 2.1.10, \emptyset é uma face de σ e pela condição (C.S. 1) da Definição 2.1.16 segue que $\emptyset \in \Delta$.

Quando o complexo simplicial contém somente o conjunto vazio, isto é, $\Delta = \{\emptyset\}$, definimos $\dim(\Delta) = -1$.

Observação 2.1.18. Neste texto trataremos apenas de complexos simpliciais finitos, isto é, quando o conjunto Δ é finito. Os complexos simpliciais finitos serão suficientes para nossas aplicações em combinatória e geometria.

Exemplo 2.1.19. Temos que um 0-dimensional complexo simplicial é uma configuração de pontos e um 1-dimensional complexo simplicial é um grafo.

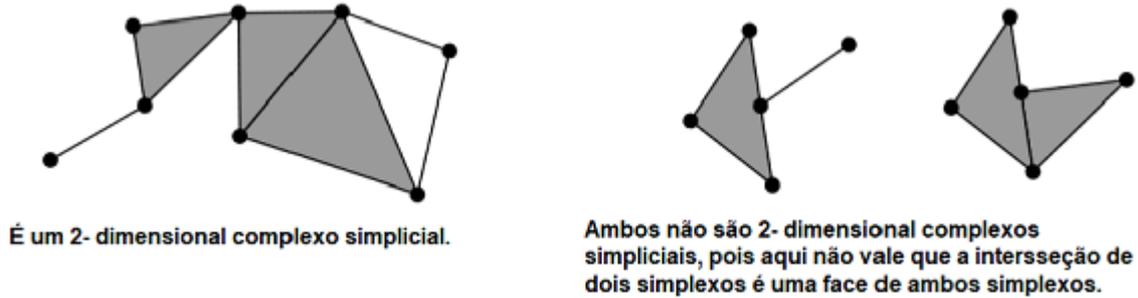
Figura 4 – 0 e 1- dimensional complexos simpliciais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.1.20. Na Figura 5 temos um exemplo de um 2- dimensional complexo simplicial e dois exemplos que não satisfazem as condições de complexo simplicial.

Figura 5 – Exemplos que mostram a estrutura de um 2- dimensional complexo simplicial.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 9).

Definição 2.1.21. A união de todos os simplexos de Δ é chamada *poliedro* de Δ , e será denotado por $||\Delta||$.

Observação 2.1.22. Como vimos na Proposição 2.1.14, temos uma partição do interior relativo das faces para qualquer simplexo σ . Assim, o interior de todos os simplexos de um complexo simplicial Δ também formam uma partição do poliedro $||\Delta|| = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} \text{relint } \sigma$.

Definição 2.1.23. Seja Δ um complexo simplicial. Como já observamos, temos a partição

$$||\Delta|| = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} \text{relint } \sigma.$$

Assim, dado um ponto $x \in ||\Delta||$, existe um único simplexo $\sigma \in \Delta$ tal que $x \in \text{relint } \sigma$. Tal simplexo é dito ser o *suporte* de x e será denotado por $\text{supp}(x)$. Em outras palavras:

$$\text{supp}(x) = \{\sigma; \text{ onde } x \in \text{relint } \sigma \text{ e } \sigma \in \Delta\}.$$

Lema 2.1.24. O conjunto de todas as faces de um simplexo é um complexo simplicial.

Observação 2.1.25. Seja Δ um n -dimensional simplexo. O complexo simplicial consistindo de todas as faces de Δ será denotado por Δ_n . Então, $||\Delta_n||$ é um n -simplexo (geométrico).

Definição 2.1.26. Dado um complexo simplicial Δ , um *subcomplexo simplicial* $\Delta' \subset \Delta$ é um subconjunto $\Delta' \subset \Delta$ o qual também é um complexo simplicial.

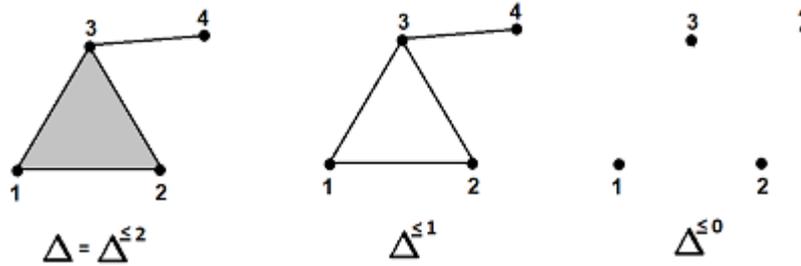
Um subcomplexo de um complexo simplicial Δ que será muito importante no nosso trabalho é o k -esqueleto $\Delta^{\leq k} \subset \Delta$.

Definição 2.1.27 (*k-esqueleto*). Seja Δ um complexo simplicial. Definimos o *k-esqueleto* $\Delta^{\leq k}$ como sendo o subcomplexo simplicial de Δ que corresponde à seguinte família de simplexos

$$\Delta^{\leq k} = \{\sigma \in \Delta; \dim \sigma \leq k\}.$$

Exemplo 2.1.28. Na Figura 6 temos um exemplo de 2- dimensional complexo simplicial e todos os seus respectivos k -esqueletos ($k = 0, 1$ e 2).

Figura 6 – Exemplo de k - esqueleto.



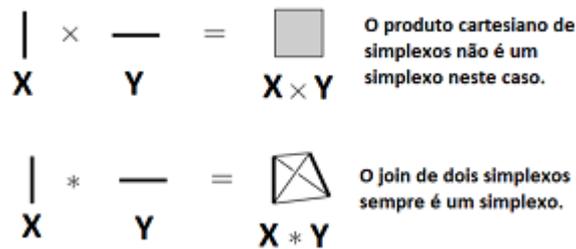
Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Joins

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de *join*, produto deletado e *join* deletado. As referências para esta seção são (MATOUSEK, 2008) e (BLAGOJEVIĆ; ZIEGLER, 2017).

O produto cartesiano $X \times Y$ de dois espaços topológicos X e Y também é um espaço topológico, porém o produto de dois simplexos de dimensão ao menos 1 não é um simplexo (veja Figura 7). Introduziremos uma operação em que o produto de dois simplexos é um simplexo, chamada *join* e denotada por $*$. Assim, podemos definir o *join* de dois complexos simpliciais, obtendo um novo complexo simplicial.

Figura 7 – Exemplo de produto cartesiano e *join* de simplexos.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 73 e 74).

Definição 2.2.1. Sejam K e L dois complexos simpliciais. O *join* $K * L$ é o complexo simplicial com conjunto de vértices $V(K) \uplus V(L) \stackrel{def}{=} V(K) \times \{1\} \cup V(L) \times \{2\}$ e conjunto de simplexos $\{F \uplus G ; F \in K, G \in L\}$.

Observação 2.2.2. Dado um complexo simplicial K , temos o n - *join* de K , denotado por K^{*n} , onde o conjunto de vértices é $V(K) \times \{1\} \cup \dots \cup V(K) \times \{n\}$ e conjunto de simplexos

$$\{F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_n ; F_1, F_2, \dots, F_n \in K\}.$$

Exemplo 2.2.3. Seja o 0- simplexo Δ_0 , que consiste de um ponto. Temos que $\Delta_0 * \Delta_0$ é um segmento, mais geralmente, temos $(\Delta_0)^{*n}$ isomorfo a Δ_{n-1} e, conseqüentemente, $\Delta_k * \Delta_l$ isomorfo a Δ_{k+l+1} , pois $\Delta_k * \Delta_l = (\Delta_0)^{*(k+1)} * (\Delta_0)^{*(l+1)} = (\Delta_0)^{*(k+l+2)} = \Delta_{k+l+1}$.

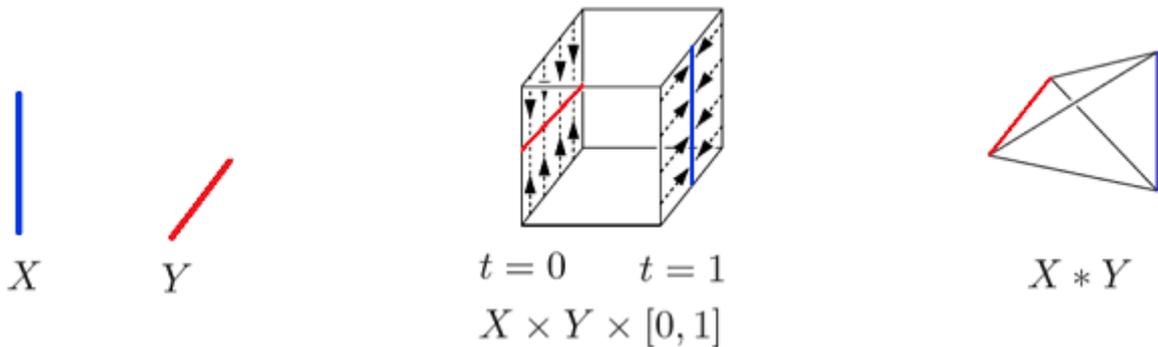
Exemplo 2.2.4. Seja $D_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ um complexo simplicial correspondendo a um espaço discreto de 2 pontos. Note que $\|D_2\|$ é homeomorfo a S^0 . Vamos analisar o n -join D_2^{*n} .

O conjunto de vértices pode ser identificado com $[2] \times [n]$ e um subconjunto do conjunto de vértices é um simplexo se não contém $(1, i)$ e $(2, i)$, para algum $i \in [n]$ ao mesmo tempo. D_2^{*n} é o complexo simplicial \diamond^{n-1} , para o qual $\|\diamond^{n-1}\|$ é homeomorfo a S^{n-1} e, portanto, $\|D_2^{*n}\|$ é homeomorfo a S^{n-1} .

Definição 2.2.5. Sejam X e Y espaços topológicos. O join $X * Y$ é o espaço quociente $\frac{X \times Y \times [0, 1]}{\approx}$, onde a relação de equivalência \approx é dada por $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$, para todo $x, x' \in X$ e $y \in Y$ e $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$, para todo $x \in X$ e $y, y' \in Y$.

Exemplo 2.2.6. Sejam X e Y dois simplexos de dimensão 1. Veja na Figura 8 como obter o join $X * Y$.

Figura 8 – Exemplo de join.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 75).

Exemplo 2.2.7. Pelo Exemplo 2.2.4, temos que $\|D_2\|$ é homeomorfo a $\|\diamond^{n-1}\|$ e, assim, $(S^0)^{*n}$ é homeomorfo a S^{n-1} . Conseqüentemente, $S^k * S^l$ é homeomorfo a S^{k+l+1} .

Exemplo 2.2.8. Dado um espaço topológico X , o cone de X , denotado por $\text{cone}(X)$ e definido como sendo o espaço quociente $(X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ pode ser identificado pelo join do espaço X com o espaço de um ponto $\{p\}$, isto é, $\text{cone}(X)$ é homeomorfo a $X * \{p\}$.

A suspensão de X , denotada, por $\text{susp}(X)$, e definida como sendo o espaço quociente $(X \times [0, 1]) / (X \times \{0\}, X \times \{1\})$ pode ser identificada pelo join do espaço X com S^0 , isto é, $\text{susp}(X)$ é homeomorfo a $X * S^0$.

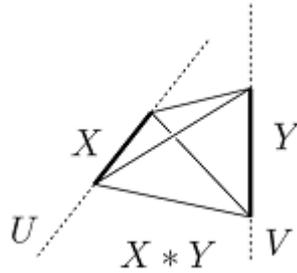
Uma interpretação geométrica do join é dada pela proposição a seguir.

Proposição 2.2.9. Suponha que X e Y sejam subespaços de um mesmo espaço Euclidiano, e que $X \subset U$ e $Y \subset V$, onde U e V são subespaços afim de algum \mathbb{R}^n tais que $U \cap V = \emptyset$ e $\text{conv}(U \cup V)$ tem dimensão $\dim U + \dim V + 1$. Suponha também que X e Y sejam limitados. Então, $X * Y$ é homeomorfo ao espaço

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{tx + (1-t)y; t \in [0, 1], x \in X, y \in Y\} \subset \mathbb{R}^n,$$

isto é, a união de todos os segmentos conectando um ponto de X a um ponto de Y .

Figura 9 – Representação da afirmação da Proposição 9.



Fonte: [Matousek \(2008, pg. 75\)](#).

Teorema 2.2.10. Sejam K e L complexos simpliciais. Então, $\|K * L\|$ é homeomorfo a $\|K\| * \|L\|$.

Observação 2.2.11. Um ponto do *join* $X * Y$ formalmente é dado por uma classe de equivalência $[(x, y, t)]$, onde $x \in X$, $y \in Y$ e $t \in [0, 1]$. Vamos denotar este ponto por $tx + (1-t)y$. Analogamente, um ponto do n -*join* X^{*n} é dado por $t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n$, onde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e t_1, t_2, \dots, t_n são números reais não-negativos tais que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Note que a notação $tx + (1-t)y$ não é uma combinação convexa dos pontos x e y . De fato, se $X = Y$ e $a, b \in X$, com $a \neq b$, temos que $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = [(a, b, \frac{1}{2})] \neq [(b, a, \frac{1}{2})] = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ em X^{*2} , mas $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ na combinação convexa.

Definição 2.2.12. Sejam $f : X_1 \rightarrow X_2$ e $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ aplicações contínuas. Então, o *join* destas aplicações, denotado por $f * g$ é a aplicação:

$$f * g : X_1 * Y_1 \rightarrow X_2 * Y_2,$$

dada por

$$tx + (1-t)y \mapsto tf(x) + (1-t)g(y),$$

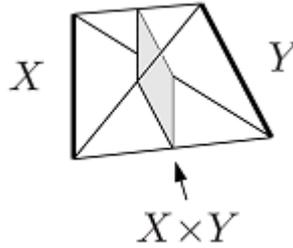
ou, equivalentemente,

$$[(x, y, t)] \mapsto [(f(x), g(y), t)].$$

Observação 2.2.13. Sendo $f : X_1 \rightarrow X_2$ e $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ aplicações contínuas, então $f * g : X_1 * Y_1 \rightarrow X_2 * Y_2$ também é contínua.

Observação 2.2.14. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser mergulhado em $X * Y$ por $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ (veja na Figura 10 o exemplo para $X = Y = \Delta_1$). Analogamente, o produto cartesiano X^n pode ser mergulhado em X^{*n} por $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n$.

Figura 10 – Exemplo de mergulho do produto cartesiano no *join*.



Fonte: Adaptada de Matousek (2008, pg. 77).

A seguir, vamos definir e ilustrar com um exemplo os conceitos de produto deletado e *join* deletado.

Definição 2.2.15 (Produto deletado). O n -produto deletado dois a dois disjuntos de um complexo simplicial K é o complexo celular

$$K_{\Delta(2)}^{\times n} \stackrel{def}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \subset K^{\times n}; \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j\}.$$

onde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são faces não vazias de K .

Definimos também uma \mathfrak{S}_n -ação no produto deletado $K_{\Delta(2)}^{\times n}$, onde $\mathfrak{S}_n = \text{Sym}(n)$ é o grupo simétrico das bijeções de $[n]$ em $[n]$ da seguinte forma:

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(n)}), \text{ para todo } (x_1, \dots, x_n) \in K_{\Delta(2)}^{\times n} \text{ e } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

Definição 2.2.16 (*Join* deletado). O n -*join* k -deletado de um complexo simplicial K é o complexo simplicial

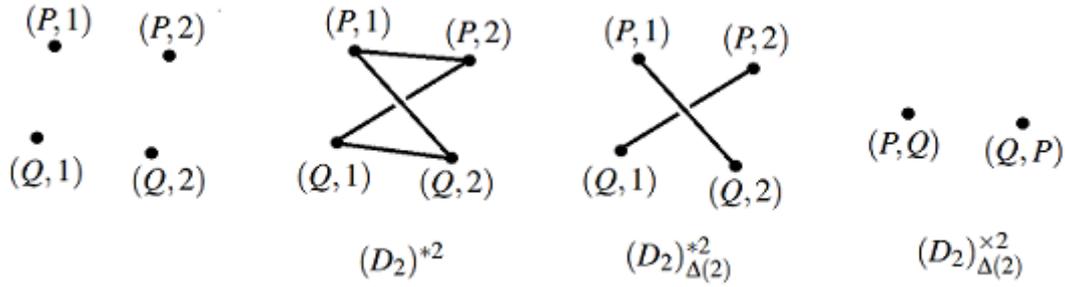
$$K_{\Delta(k)}^{*n} \stackrel{def}{=} \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in \sigma_1 * \dots * \sigma_n \subset K^{*n}; \forall I \subset [n], \text{ onde } |I| \geq k, \text{ temos } \bigcap_{i \in I} \sigma_i = \emptyset \right\}.$$

onde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são faces de K , incluindo possivelmente a face vazia.

Definimos uma \mathfrak{S}_n -ação no *join* deletado $K_{\Delta(k)}^{*n}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= \lambda_{\pi^{-1}(1)} x_{\pi^{-1}(1)} + \dots + \lambda_{\pi^{-1}(n)} x_{\pi^{-1}(n)}, \\ &\text{para todo } \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in K_{\Delta(k)}^{*n} \text{ e } \pi \in \mathfrak{S}_n. \end{aligned}$$

Figura 11 – Duas cópias de D_2 , $(D_2)^{*2}$, $(D_2)_{\Delta(2)}^{*2}$ e $(D_2)_{\Delta(2)}^{\times 2}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 2.2.17. No caso $k = 2$, temos:

$$K_{\Delta(2)}^{*n} \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \in \sigma_1 * \dots * \sigma_n \subset K^{*n} ; \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j\}.$$

Exemplo 2.2.18. Seja $D_2 = \{\emptyset, \{P\}, \{Q\}\}$ o complexo simplicial de dois pontos. Temos que $(D_2)^{*2}$ é homeomorfo a S^1 , $(D_2)_{\Delta(2)}^{*2}$ é união disjunta de dois segmentos de retas e $(D_2)_{\Delta(2)}^{\times 2}$ é o espaço discreto de dois pontos. A Figura 11 ilustra esse exemplo.

Lema 2.2.19. Sejam K e L complexos simpliciais, e $n \geq 2$ e $k \geq 2$ inteiros. Então, existe um isomorfismo de complexos simpliciais

$$(K * L)_{\Delta(k)}^{*n} \cong K_{\Delta(k)}^{*n} * L_{\Delta(k)}^{*n}.$$

2.3 A fibração de Borel

Nesta seção, vamos descrever brevemente a construção de Borel, a qual nos fornece uma aplicação que é uma fibração, a chamada fibração de Borel. A fibração de Borel é fundamental para definir o índice de Volovikov, o qual será usado nas demonstrações dos novos resultados deste trabalho. As referências para essa seção são (BOREL, 1960), (DIECK, 1987) e (MILNOR, 1956).

Definição 2.3.1 (Construção de Borel). Dado um grupo topológico G , existe um G -fibrado universal $\omega_G = (EG, BG, p, G)$, onde

$$EG = G * G * G * \dots$$

é o *join* de uma quantidade infinita e enumerável de cópias de G , $BG = EG/G$ é o espaço de órbitas e $p : EG \rightarrow BG$, $p(x) = xG$ é a aplicação quociente.

Seja X um G -espaço topológico. Sendo EG um G -espaço livre, então a ação diagonal $g(e, x) = (e g^{-1}, g x)$, $\forall (e, x) \in EG \times X$ e $\forall g \in G$, sobre o produto $EG \times X$ também é livre.

Assim, definimos o *espaço de Borel* como o seguinte espaço de órbitas

$$X_G = \frac{EG \times X}{G}.$$

Definimos também aplicação entre os espaços de órbitas $p_X : X_G \rightarrow BG$ como a induzida pela projeção na primeira coordenada, isto é, $p((e,x)G) = eG$.

A seguir vamos definir fibração.

Definição 2.3.2. Uma aplicação $p : E \rightarrow B$ tem a *Propriedade de Levantamento de Homotopia (PLH)* com respeito ao espaço topológico X se, dadas uma homotopia $H : X \times I \rightarrow B$ e uma aplicação $g : X \rightarrow E$ tais que $p \circ g(x) = H \circ i(x)$, onde $i(x) = (x, 0)$, existir uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ que comuta o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ i \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Ou seja, $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H} \circ i = g$.

Definição 2.3.3. Uma aplicação que possui (PLH) com respeito a todos os espaços topológicos é chamada *fibração*.

Observação 2.3.4. Se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração, para cada $b \in B$, $F_b = p^{-1}(b)$ é uma fibra de p sobre b . Embora $F_b = p^{-1}(b)$ possa variar para diferentes escolhas de b , a PLH restringe o tipo de homotopia da fibra F_b .

O Teorema a seguir afirma que se G é grupo compacto de Lie e age livremente sobre X , um G -espaço topológico Hausdorff paracompacto, então a aplicação $p_X : X_G \rightarrow BG$ da Definição 2.3.1 é uma fibração.

Teorema 2.3.5. Dado G grupo compacto de Lie agindo livremente sobre um topológico X Hausdorff paracompacto, a aplicação $p_X : EG \times_G X \rightarrow BG$, onde $p_X((e,x)G) = eG$ é uma fibração com fibra X .

Observação 2.3.6. Enfatizamos que é fundamental X ser G -espaço Hausdorff paracompacto para termos p_X uma fibração.

A seguir definiremos a fibração de Borel.

Definição 2.3.7. Seja G grupo compacto de Lie agindo livremente sobre um topológico X Hausdorff paracompacto. A fibração $p_X : EG \times_G X \rightarrow BG$ com fibra X é chamada *fibração de Borel* de X .

2.4 Seqüências Espectrais

Nesta seção, apresentamos uma breve descrição de resultados sobre seqüências espectrais. A referência para esta seção é (MCCLEARY, 2001).

Definição 2.4.1. Um módulo diferencial bigraduado sobre um anel R , é uma coleção de R -módulos $\{E^{p,q}\}$, para todo par de inteiros p e q , junto com uma aplicação R -linear $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, o diferencial, de bigrau $(-r, r-1)$ ou $(r, -r+1)$, para algum inteiro r , satisfazendo $d \circ d = 0$.

Definição 2.4.2. O módulo de homologia $H(E)$ é o módulo bigraduado

$$H_{p,q}(E_{*,*}, d) = \frac{\ker(d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r-1})}{\operatorname{im}(d : E_{p+r,q-r+1} \rightarrow E_{p,q})}.$$

Definição 2.4.3. O módulo de cohomologia $H(E)$ é o módulo bigraduado

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\ker(d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r,q-r+1})}{\operatorname{im}(d : E^{p-r,q+r-1} \rightarrow E^{p,q})}.$$

Definição 2.4.4. Uma seqüência espectral do tipo homológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais tem bigrau $(-r, r-1)$ e $E_{p,q}^{r+1}$ é isomorfo a $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$.

Definição 2.4.5. Uma seqüência espectral do tipo cohomológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais tem bigrau $(r, -r+1)$ e $E_{r+1}^{p,q}$ é isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \dots & & E_r^{p,q} & & E_r^{p+1,q} & & \dots & & E_r^{p+r,q} & & \dots \\
 & & \searrow & & & & & & & & \\
 \dots & & E_r^{p,q-1} & & & & & & \vdots & & \dots \\
 & & \vdots & & & & & & E_r^{p+r,q+2-r} & & \dots \\
 \dots & & E_r^{p,q+1-r} & & E_r^{p+1,q+1-r} & & \dots & & E_r^{p+r,q+1-r} & & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \dots & & & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Observação 2.4.6. Embora a seqüência espectral esteja indexada para $r = 1, 2, \dots$, essa indexação pode começar em qualquer inteiro e, para as nossas aplicações, a seqüência começa em $r = 2$.

Nesta seção, estaremos considerando seqüências espectrais do tipo cohomológicas. As definições e propriedades apresentadas a seguir, também podem ser obtidas no caso de uma seqüência espectral homológica.

Para definir o termo limite de uma seqüência espectral cohomológica, para todo $k \geq r$, denotemos por

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= \ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}), \\ B_r^{p,q} &= \operatorname{im}(d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}). \end{aligned}$$

A condição $d_r \circ d_r = 0$, implica que $B_r \subset Z_r \subset E_r$, e segue da Definição 2.4.3 que $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$. Sejam

$$\begin{aligned} Z(E_{r+1})^{p,q} &= \ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p+r+1, q-r}), \\ B(E_{r+1})^{p,q} &= \operatorname{im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1, q+r} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}). \end{aligned}$$

Existem submódulos bigraduados Z_{r+1} e B_{r+1} de Z_r , contendo B_r , tais que $Z(E_{r+1})^{p,q} \cong Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ e $B(E_{r+1})^{p,q} \cong B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$, para todo p, q . Assim, $B_{r+1} \subset Z_{r+1}$ e temos que

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r.$$

Além disso, $E_{r+2} \cong Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \cong Z_{r+1}/B_{r+1}$. Continuando esse processo por indução, obtemos uma seqüência de submódulos, para todo $n \geq r$,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \dots \subset B_n \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r,$$

com a propriedade que $E_{n+1} \cong Z_n/B_n$.

Definição 2.4.7. Definimos os módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \text{ e } B_\infty = \bigcup_n B_n.$$

O módulo bigraduado $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$ é chamado o limite da seqüência espectral E .

Definição 2.4.8. Uma seqüência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsa no N -ésimo termo se o diferencial $d_r = 0$, para todo $r \geq N$.

Observação 2.4.9. Uma consequência imediata do fato de uma seqüência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsar no N -ésimo termo, é que $E_N^{*,*} \cong E_{N+1}^{*,*} \cong \dots \cong E_\infty^{*,*}$.

Definição 2.4.10. Uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A é uma família de submódulos $\{F^p(A)\}$, com $p \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\dots F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \dots \subset A.$$

Definição 2.4.11. Dada uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , o módulo graduado associado $E_0^*(A)$ é dado por

$$E_0^p(A) = F^p(A)/F^{p+1}(A).$$

Observação 2.4.12. Se H^* é um R -módulo graduado e se F é uma filtração sobre H^* , então $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$ e o módulo bigraduado associado $E_0^{*,*}$ é dado por

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q})/F^{p+1}(H^{p+q}).$$

Definição 2.4.13. Uma seqüência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para um R -módulo graduado H^* , se existe uma filtração F sobre H^* tal que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F),$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da seqüência espectral.

Definição 2.4.14. Uma seqüência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ é uma seqüência espectral do primeiro quadrante, se existe r tal que $E_r^{p,q} = 0$, para $p < 0$ ou $q < 0$.

Teorema 2.4.15 (*Seqüência espectral cohomológica de Leray-Serre*, (Theorem 5.2 (MCCLEARY, 2001))). Seja R um anel comutativo com unidade. Dada um fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos, então existe uma seqüência espectral de álgebras do primeiro quadrante $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ convergindo para $H^*(E; R)$ como uma álgebra, e

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)),$$

é a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia da fibra de p .

2.5 Índice de Volovikov

Nesta seção, definiremos o índice de Volovikov e enunciaremos algumas de suas propriedades básicas (para mais detalhes, veja (VOLOVIKOV, 2000)). Esta é uma função que associa um G -espaço Hausdorff paracompacto a um inteiro positivo ou ∞ . Para nossos objetivos é suficiente considerar que G é um p -toro (p é um número primo), isto é, $G = (\mathbb{Z}_p)^n$ para $n \geq 1$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ é o corpo de coeficiente na Cohomologia de Čech.

Definição 2.5.1 (Índice de Volovikov). Sejam $G = (\mathbb{Z}_p)^n$ (p é um número primo) para $n \geq 1$ um grupo de Lie compacto e X um G -espaço Hausdorff paracompacto, sobre o qual G age livremente. A definição do *índice de Volovikov de X* (denotado por $i(X)$) usa a seqüência espectral do fibrado $p_X : X_G \rightarrow BG$ com fibra X (fibrção de Borel). Esta seqüência espectral é dada pelo Teorema 2.4.15. A seqüência espectral converge para a cohomologia equivariante $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Seja Λ^* a cohomologia equivariante $H^*(\text{pt}_G; \mathbb{Z}_p) = H^*(BG; \mathbb{Z}_p)$ de um ponto. Suponhamos que X seja

conexo por caminhos. Então, $E_2^{*,0} = \Lambda^*$. Se $E_2^{*,0} = \dots = E_s^{*,0} \neq E_{s+1}^{*,0}$, por definição, $i(X) = s$. Se $E_2^{*,0} = \dots = E_\infty^{*,0}$ então, por definição, $i(X) = \infty$.

Definimos também $i'(X)$ que é dado pelo menor inteiro r tal que o kernel do isomorfismo natural $\Lambda^* \rightarrow E_{r+1}^{*,0}$ contém um elemento que não é um divisor de zero em Λ^* .

A seguir listamos algumas propriedades do índice de Volovikov.

Proposição 2.5.2. Sejam X, Y e Z três G -espaços Hausdorff paracompactos, sobre os quais G age livremente. Então, são válidas as seguintes condições.

(i) Se existe uma aplicação G -equivariante $X \rightarrow Y$, então $i(X) \leq i(Y)$ e $i'(X) \leq i'(Y)$.

(ii) Se $\tilde{H}^j(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para todo $j < n$, então $i(X) \geq n + 1$.

(iii) Se $H^j(Z; \mathbb{Z}_p) = 0$, para todo $j \geq n$ e $i(Z) < \infty$, então $i(Z) \leq n$.

(iv) Se X é compacto ou finito dimensional e tal que $H^*(X; \mathbb{Z}_p) = H^*(S^n; \mathbb{Z}_p)$, e se G age sem pontos fixos em X , então $i(X) = i'(X) = n + 1$.

(v) Se $X = A \cup B$, onde A e B são fechados (ou abertos) subespaços G -invariantes, então $i(X) \leq i'(A) + i(B)$. Em particular, $i(X * Y) \leq i'(X) + i(Y)$.

Observação 2.5.3. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois G -espaços X e Y é chamada G -equivariante se $f(gx) = gf(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Além disso, seja X um G -espaço. Um subespaço $A \subset X$ é chamado G -invariante se $gA \subset A$, para todo $g \in G$.

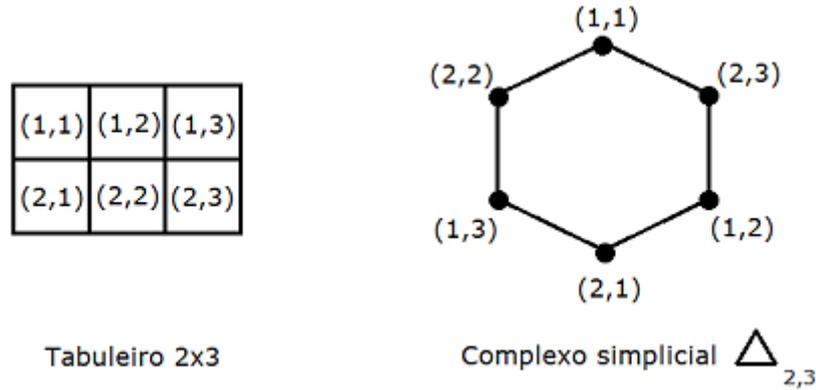
2.6 Complexo Chessboard e conexidade

Nesta seção, definiremos complexo *chessboard*, que é muito utilizado nas demonstrações de Teoremas do tipo Tverberg Colorido. Vamos introduzir também o conceito de conexidade e relacioná-lo com o índice de Volovikov. Para mais detalhes, veja (BLAGOJEVIĆ; ZIEGLER, 2017) e (MATOUSEK, 2008).

Definição 2.6.1 (Complexo Chessboard). O complexo *chessboard* $\Delta_{m,n}$ é o complexo simplicial com conjunto de vértices $[m] \times [n]$, e cujos simplexes de $\Delta_{m,n}$ são os subconjuntos $\{(i_0, j_0), \dots, (i_k, j_k)\} \subset [m] \times [n]$, onde $i_s \neq i_{s'} (1 \leq s < s' \leq k)$, e $j_t \neq j_{t'} (1 \leq t < t' \leq k)$.

Observação 2.6.2. O complexo *chessboard* pode ser visualizado da seguinte forma: cada simplexo de $\Delta_{m,n}$ é uma configuração de torres em um tabuleiro $m \times n$ de maneira que não existam duas torres em uma mesma linha ou coluna deste tabuleiro.

Exemplo 2.6.3. A Figura 12 ilustra o complexo *chessboard* $\Delta_{2,3}$, o qual é homeomorfo a S^1 .

Figura 12 – Complexo *chessboard* $\Delta_{2,3}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.6.4. Seja $K = [m]$ o complexo simplicial discreto com m vértices, então o *join* deletado $K_{\Delta(2)}^{*2}$ é o complexo *chessboard* $\Delta_{m,n}$.

Definição 2.6.5 (\mathfrak{S}_n -ação em $\Delta_{m,n}$). O complexo *chessboard* $\Delta_{m,n}$ é um \mathfrak{S}_n -espaço, onde a \mathfrak{S}_n -ação é dada pela permutação nas n colunas do complexo *chessboard* $\Delta_{m,n}$, como segue:

$$\pi \{(i_0, j_0), \dots, (i_k, j_k)\} = \{(i_0, \pi(j_0)), \dots, (i_k, \pi(j_k))\}, \text{ para todo } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

Definição 2.6.6 (n -conexo). Seja $n \geq -1$ inteiro. Um espaço topológico X é n -conexo se toda aplicação contínua $f : S^k \rightarrow X$, onde $-1 \leq k \leq n$, pode ser estendida a aplicação contínua $g : B^{k+1} \rightarrow X$, isto é $g|_{\partial B^{k+1} = S^k} = f$, (onde B^{k+1} denota a $(k+1)$ -dimensional bola fechada cuja fronteira é a esfera S^k). Um espaço topológico é (-1) -conexo se é não vazio. Se o espaço X é n -conexo, mas não é $(n+1)$ -conexo, denotamos $\text{conn}(X) = n$.

Teorema 2.6.7 (pg. 332, (BLAGOJEVIĆ; ZIEGLER, 2017)). Sejam X e Y espaços topológicos. Então, $\text{conn}(X * Y) \geq \text{conn}(X) + \text{conn}(Y) + 2$.

Teorema 2.6.8 (4.4.1 Theorem, (MATOUSEK, 2008)). Sejam X um espaço topológico não vazio e seja $k \geq 1$. Então, X é k -conexo se, e somente se, é simplesmente conexo (isto é, o grupo fundamental $\pi_1(X)$ é trivial) e $\tilde{H}_i(X) = 0$, para todo $i = 0, 1, \dots, k$.

O Teorema a seguir relaciona o índice de Volovikov com conexidade.

Teorema 2.6.9. Seja G um grupo compacto de Lie que age livremente sobre um G -espaço topológico Hausdorff paracompacto X . Então, $i(X) \geq \text{conn}(X) + 2$.

Demonstração. É uma consequência do Teorema 2.6.8 e da Proposição 2.5.2 (ii).

□

Teorema 2.6.10 (4.4.2 Proposition, (MATOUSEK, 2008)). Um complexo simplicial K é s -conexo se, e somente se, o $(s+1)$ -esqueleto $K^{\leq s+1}$ é s -conexo.

Teorema 2.6.11. Sejam $m, n \geq 1$ inteiros. Então, $\text{conn}(\Delta_{m,n}) = \min\{m, n, \lfloor \frac{m+n+1}{3} \rfloor\}$.

Corolário 2.6.12. Seja $r \geq 2$ inteiro. Então, $\text{conn}(\Delta_{2r-1,r}) = r - 2$.

TEOREMAS DO TIPO TVERBERG COLORIDO

Neste capítulo, introduziremos a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) e o Problema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Problema 3.1.10), os quais deram origem ao Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6) e o Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12). Em seguida, serão apresentados resultados inéditos do tipo Tverberg colorido.

3.1 Teorema Topológico de Tverberg e Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica

Apresentaremos aqui os teoremas clássicos que denominam esta seção e introduziremos as ferramentas para demonstrá-los. Estas ferramentas serão importantes não apenas para demonstrar esses teoremas, como também serão importantes para a demonstração de resultados inéditos deste trabalho que serão apresentados nas seções seguintes deste capítulo.

3.1.1 Teorema Topológico de Tverberg

A história dos teoremas do tipo Tverberg surge com um dos primeiros resultados fundamentais da geometria convexa, o Teorema de Radon.

Teorema 3.1.1 (*Teorema de Radon*, (RADON, 1921)). Para qualquer subconjunto $X \subset \mathbb{R}^d$ com pelo menos $d + 2$ elementos, existem subconjuntos disjuntos S e T de X tais que $\text{conv}(S) \cap \text{conv}(T) \neq \emptyset$.

O Teorema de Radon tem uma reformulação equivalente utilizando aplicação afim.

Teorema 3.1.2 (*Teorema de Radon Afim*). Para toda aplicação afim $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem faces disjuntas σ e τ de Δ_{d+1} tais que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.

A pergunta que surgiu a partir do Teorema de Radon Afim é se a aplicação f precisa ser afim ou se o teorema segue válido para f contínua. Essa pergunta foi respondida por Bajmóczy e Bárány em 1979 (BAJMÓCZY; BÁRÁNY, 1979) e utiliza o Teorema de Borsuk–Ulam em sua demonstração.

Teorema 3.1.3 (*Teorema Topológico de Radon, (BAJMÓCZY; BÁRÁNY, 1979)*). Para toda aplicação contínua $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem faces disjuntas σ e τ do simplexo Δ_{d+1} tais que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.

Em 1966, Helge Tverberg demonstrou o Teorema de Tverberg, que generaliza o Teorema de Radon Afim (Teorema 3.1.2).

Teorema 3.1.4 (*Teorema de Tverberg, (TVERBERG, 1966)*). Sejam $r \geq 2$, $d \geq 1$ inteiros e $N = (r-1)(d+1)$. Para toda aplicação afim $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Novamente surge a pergunta se é necessário que f seja aplicação afim ou se o teorema segue para f sendo uma aplicação contínua qualquer. Desta pergunta surge a Conjectura Topológica de Tverberg.

Conjectura 3.1.5 (*Conjectura Topológica de Tverberg*). Sejam $r \geq 2$, $d \geq 1$ inteiros e $N = (r-1)(d+1)$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

A Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) ficou por muito tempo sem uma resposta, sendo considerada um dos problemas mais importantes em Topologia Combinatória. Em 1981, foi demonstrada para o caso onde r é um número primo, por Bárány, Shlosman e Szücs (BÁRÁNY; SHLOSMAN; SZÜCS, 1981). Este resultado foi estendido para o caso onde r é potência de primo, por Özaydin (não publicado) (OZAYDIN, 1987) e Volovikov (VOLOVIKOV, 1996). Este resultado ficou conhecido como Teorema Topológico de Tverberg.

Teorema 3.1.6 (*Teorema Topológico de Tverberg, (OZAYDIN, 1987), (VOLOVIKOV, 1996)*). Sejam $d \geq 1$ inteiro, $r = p^n \geq 2$ potência de primo e $N = (r-1)(d+1)$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Observação 3.1.7. O conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ de faces duas a duas disjuntas de Δ_N cujas imagens pela aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ tem interseção não vazia é chamado *partição de Tverberg* para f .

O caso geral da Conjectura 3.1.5 ficou em aberto por muito tempo. Até que, recentemente, em (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2019) ficou provado que a conjectura não é válida quando r não é potência de primo e $d \geq 2r + 1$.

Observação 3.1.8. Problemas e teoremas relacionados com o Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6) são chamados de *Teoremas e Problemas do tipo Tverberg*.

3.1.2 Problema de Tverberg Colorido de Živaljević e Vrećica

Para introduzir os Problemas do tipo Tverberg colorido precisamos de algumas definições.

Definição 3.1.9. Sejam $N \geq 1$ inteiro e $V(\Delta_N)$ o conjunto de vértices do simplexo Δ_N . Uma *coloração* do conjunto de vértices $V(\Delta_N)$ por l cores é uma partição (C_1, \dots, C_l) de $V(\Delta_N)$, isto é, $C_1 \cup \dots \cup C_l = V(\Delta_N)$ e $C_i \cap C_j = \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq l$.

Os elementos da partição (C_1, \dots, C_l) são chamados *classes de cores* ou simplesmente *cores*.

Uma face σ de Δ_N é uma *face colorida* se $|\sigma \cap C_i| \leq 1$, para todo $i \in [l]$, isto é, não existem dois ou mais vértices da face σ que pertencem a uma mesma classe de cor.

O subcomplexo de Δ_N cujos simplexos são todas as faces coloridas de Δ_N induzido pela coloração (C_1, \dots, C_l) será denotado por $R_{(C_1, \dots, C_l)}$ e chamado *subcomplexo colorido*. Existe um isomorfismo natural $R_{(C_1, \dots, C_l)} \cong C_1 * \dots * C_l$.

Em 1992, Živaljević e Vrećica apresentaram em (ŽIVALJEVIĆ; VREĆICA, 1992) o seguinte problema.

Problema 3.1.10 (*Problema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica, (ŽIVALJEVIĆ; VREĆICA, 1992)*). Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Determine o menor inteiro $t = t(d, r)$ tal que para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d + 1)$ cores, onde toda cor tem cardinalidade de pelo menos t vértices, existem r faces coloridas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Observação 3.1.11. Denotaremos simplesmente por Δ um simplexo Δ_N para algum N em alguns enunciados. Optaremos por esta notação simplificada para não sobrecarregar o texto.

Para o caso onde $r = p^n \geq 2$ é potência de primo, Živaljević e Vrećica provaram que $t(d, r) \leq 2r - 1$ e este resultado ficou conhecido como Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica.

Teorema 3.1.12 (*Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica, (ŽIVALJEVIĆ; VREĆICA, 1992)*). Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua

$f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ do simplexo Δ por $(d+1)$ cores, onde toda cor tem pelo menos $2r-1$ vértices, existem r faces coloridas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ , duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Observação 3.1.13. Problemas e teoremas relacionados com o Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) são chamados de *Teoremas e Problemas do tipo Tverberg colorido*.

Observação 3.1.14. O conjunto de r faces coloridas duas a duas disjuntas $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ que satisfazem um Teorema do tipo Tverberg colorido é chamado *Partição de Tverberg colorida*.

3.1.3 Definições e teoremas chave na resolução de problemas do tipo Tverberg e Tverberg Colorido

Introduziremos algumas definições, observações e alguns resultados que serão importantes nas demonstrações do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6) e Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12). Além disso, os resultados e definições desta subseção serão utilizados nas demonstrações de resultados inéditos do tipo Tverberg colorido desta tese que serão apresentados nas próximas seções deste capítulo. A referência para esta subseção é (BLAGOJEVIĆ; ZIEGLER, 2017).

Definição 3.1.15 (*Mapa Produto e mapa Join*). Suponha que $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ seja um contraexemplo para a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5), isto é, para todas r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N , duas a duas disjuntas, temos que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.

A partir de f construímos um *mapa produto*:

$$P_f : (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \rightarrow (\mathbb{R}^d)^{\times r} \cong (\mathbb{R}^d)^{\oplus r}$$

$$(x_1, \dots, x_r) \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_r)).$$

Também definimos um *mapa Join*:

$$J_f : (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \mapsto ((\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)), \dots, (\lambda_r, \lambda_r f(x_r))).$$

Definição 3.1.16 (*A \mathfrak{S}_r -ação em $(\mathbb{R}^d)^{\oplus r}$ e $(\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$*). A \mathfrak{S}_r -ação é dada pela permutação das “ r coordenadas” em $(\mathbb{R}^d)^{\oplus r}$ e $(\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$, respectivamente. Assim, dado $\pi \in \mathfrak{S}_r = \text{Sym}(r)$, definimos:

$$\pi(x_1, \dots, x_r) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(r)}) \in (\mathbb{R}^d)^{\oplus r},$$

$$\pi(z_1, \dots, z_r) = (z_{\pi^{-1}(1)}, \dots, z_{\pi^{-1}(r)}) \in (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}.$$

Observação 3.1.17. Os mapas P_f e J_f são \mathfrak{S}_r -equivariantes.

Definição 3.1.18 (Subespaços diagonais $D_P \subset (\mathbb{R}^d)^{\oplus r}$ e $D_J \subset (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$). Para todo inteiro $r \geq 2$ e $d \geq 1$, definimos:

$$D_P = \{(y_1, \dots, y_r) \in (\mathbb{R}^d)^{\oplus r} ; \text{ onde } y_1 = \dots = y_r, \text{ para } y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}^d\},$$

$$D_J = \{(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} ; \text{ onde } z_1 = \dots = z_r, \text{ para } z_1, \dots, z_r \in \mathbb{R}^{d+1}\}.$$

Observação 3.1.19. Os subespaços D_P e D_J são \mathfrak{S}_r -invariantes, isto é, dado $\pi \in \mathfrak{S}_r$, temos

$$\pi D_P \subset D_P \quad \text{e} \quad \pi D_J \subset D_J.$$

Proposição 3.1.20. Seja $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua que é um contraexemplo para a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5). Temos:

$$\text{Im}(P_f) \cap D_P = \emptyset \quad \text{e} \quad \text{Im}(J_f) \cap D_J = \emptyset.$$

Demonstração. Sendo $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua que é um contraexemplo para a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5), isto é, para todas r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N , duas a duas disjuntas, temos que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.

Suponha que $\text{Im}(P_f) \cap D_P \neq \emptyset$, então existem $(f(x_1), \dots, f(x_r)) \in \text{Im}(P_f)$, com $x_1 \in \sigma_1, \dots, x_r \in \sigma_r$, onde as r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N são duas a duas disjuntas e $(y, y, \dots, y) \in D_P \subset (\mathbb{R}^d)^{\oplus r}$ são tais que:

$$(f(x_1), \dots, f(x_r)) = (y, y, \dots, y).$$

Então, $y = f(x_1) = \dots = f(x_r)$ e, conseqüentemente, $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$, o que é uma contradição com f ser um contraexemplo.

De maneira análoga, podemos provar que $\text{Im}(J_f) \cap D_J = \emptyset$.

□

Observação 3.1.21. Como as imagens de P_f e J_f não intersectam D_P e D_J , podemos “retirar” D_P e D_J dos contradomínios e redefinir (com um pequeno abuso de notação) as aplicações \mathfrak{S}_r -equivariantes P_f e J_f como segue:

$$P_f : (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \rightarrow (\mathbb{R}^d)^{\oplus r} \setminus D_P,$$

$$J_f : (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J.$$

Definição 3.1.22 (*Esfera unitária de um espaço vetorial normado*). Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. A *esfera unitária de um espaço vetorial normado* é dada por:

$$S(V) = \{v \in V ; \|v\| = 1\}.$$

Observação 3.1.23. Através de uma composição de projeções e retratos por deformação, obtemos as aplicações \mathfrak{S}_r -equivariantes:

$$\begin{aligned} R_P : (\mathbb{R}^d)^{\oplus r} \setminus D_P &\longrightarrow D_P^\perp \setminus \{0\} \longrightarrow S(D_P^\perp) \quad \text{e} \\ R_J : (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J &\longrightarrow D_J^\perp \setminus \{0\} \longrightarrow S(D_J^\perp). \end{aligned}$$

Observação 3.1.24. Seja \mathbb{R}^r um espaço vetorial com a \mathfrak{S}_r -ação dada pela permutação das “ r coordenadas”. Definimos o subespaço vetorial

$$W_r = \left\{ (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r ; \sum_{i=1}^r t_i = 0 \right\}.$$

O subespaço vetorial W_r tem dimensão $(r-1)$ e é \mathfrak{S}_r -equivariante. Assim, temos os seguintes isomorfismos de \mathfrak{S}_r -espaços:

$$D_P^\perp \cong W_r^{\oplus d} \quad \text{e} \quad D_J^\perp \cong W_r^{\oplus (d+1)}.$$

Substituindo D_P^\perp por $W_r^{\oplus d}$ e D_J^\perp por $W_r^{\oplus (d+1)}$ nos contradomínios de R_P e R_J , respectivamente, temos duas aplicações \mathfrak{S}_r -equivariantes

$$R_P : (\mathbb{R}^d)^{\oplus r} \setminus D_P \longrightarrow S(W_r^{\oplus d}) \quad \text{e} \quad R_J : (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \longrightarrow S(W_r^{\oplus (d+1)}).$$

Observação 3.1.25. A partir de um contraexemplo $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ para a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) construímos as aplicações \mathfrak{S}_r -equivariantes P_f, J_f, R_P e R_J . E a partir destas aplicações demonstraremos o seguinte resultado, o qual é um *critério* para quando vale a Conjectura Topológica de Tverberg (ou Problema de Tverberg).

Teorema 3.1.26. Sejam $d \geq 1, r \geq 2, N = (r-1)(d+1)$ inteiros. Se existe um contraexemplo para a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) nestes parâmetros, então existem aplicações \mathfrak{S}_r -equivariantes:

$$(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus d}) \quad \text{e} \quad (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\ast r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus (d+1)})$$

Logo, se não existem tais aplicações, não existe contraexemplo e, conseqüentemente, o Problema de Tverberg vale nestes parâmetros.

Demonstração. Suponhamos que $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ seja um contraexemplo para a Conjectura Topológica de Tverberg (Conjectura 3.1.5) nos parâmetros $d \geq 1$ e $r \geq 2$. Tome as composições:

$$(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \xrightarrow{P_f} (\mathbb{R}^d)^{\oplus r} \setminus D_P \xrightarrow{R_P} S(W_r^{\oplus d}) \quad \text{e} \quad (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*r} \xrightarrow{J_f} (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \xrightarrow{R_J} S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

As composições $R_P \circ P_f$ e $R_J \circ J_f$ são as aplicações \mathfrak{S}_r -equivariantes do enunciado. □

Observação 3.1.27. O Teorema 3.1.26 é o resultado chave na demonstração do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6).

Observação 3.1.28. O Teorema a seguir estabelece um *critério* para quando vale o Problema de Tverberg colorido (Problema 3.1.10) a partir de um contraexemplo $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Teorema 3.1.29. Seja (C_1, \dots, C_m) uma coloração do simplexo Δ por m cores. Se não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_m|,r} \cong (R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}),$$

então para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem r faces coloridas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ , duas a duas disjuntas, tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Como vimos, uma aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ induz um mapa *join*:

$$J_f : (\Delta)_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \longmapsto ((\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)), \dots, (\lambda_r, \lambda_r f(x_r))).$$

O domínio e o contradomínio do mapa *join* J_f estão munidos com a ação do grupo simétrico \mathfrak{S}_r , de maneira que J_f é uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante. Como o *join* deletado do subcomplexo colorido, denotado por $(R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r}$, é um subespaço \mathfrak{S}_r -invariante do subcomplexo $(\Delta)_{\Delta(2)}^{*r}$, podemos restringir a aplicação J_f na aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante J'_f a seguir:

$$J'_f \stackrel{def}{=} J_f|_{(R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r}} : (R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}.$$

Note que $D_J = \{(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} ; z_1 = \dots = z_r\}$ é um subespaço \mathfrak{S}_r -invariante de $(\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$.

Analogamente ao que vimos no Teorema 3.1.26, a propriedade chave de J'_f é que, dado $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ um contraexemplo para o Problema de Tverberg colorido, temos $\text{Im}(J'_f) \cap D_J = \emptyset$. Então, J'_f induz uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante:

$$(R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J,$$

a qual ainda denotaremos por J'_f .

Seja

$$R_J : (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \longrightarrow D_J^\perp \setminus \{0\} \longrightarrow S(D_J^\perp)$$

a composição obtida através de uma projeção e um retrato por deformação. Note que R_J é \mathfrak{S}_r -equivariante.

Temos que $D_J^\perp \cong W_r^{\oplus(d+1)}$, onde $W_r = \left\{ (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r ; \sum_{i=1}^r t_i = 0 \right\}$ é munido com a \mathfrak{S}_r -ação que permuta as “ r coordenadas”. Fazendo as modificações na aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante R_J , segue que:

$$R_J : (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

Assim, assumindo a existência de um contraexemplo $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, temos uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$R_J \circ J'_f : (R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

Logo, se não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante $(R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)})$, então não existe um aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ que seja um contraexemplo e, portanto, para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces coloridas, duas a duas disjuntas, tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

□

3.1.4 Demonstrações dos teoremas clássicos

Utilizando os Teoremas chave 3.1.26 e 3.1.29 e as propriedades do índice de Volovikov $i(X)$ (ver Definição 5.1.1), vamos demonstrar os clássicos Teoremas 3.1.6 e 3.1.12.

Demonstração do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6). Pelo Teorema 3.1.26 basta provar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus d}).$$

Considere o mergulho

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{Z}_p)^n &\longrightarrow \text{Sym}((\mathbb{Z}_p)^n) \cong \mathfrak{S}_r \\ g &\longmapsto L_g : (\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^n, L_g(x) = g + x.\end{aligned}$$

Portanto, temos um subgrupo $(\mathbb{Z}_p)^n \cong \text{Im}(\varphi) \leq \mathfrak{S}_r$. Então, para provar a não existência de uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante, é suficiente mostrar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante.

Suponhamos que exista tal aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus d})$.

Temos que o produto deletado $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r}$ é $(N-r)$ -conexo (ver Lemma 1, (BÁRÁNY; SHLOSMA; SZÜCS, 1981)). Logo, pelo Teorema 2.6.9 segue que:

$$i\left((\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r}\right) \geq \text{conn}\left((\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r}\right) + 2 \geq N - r + 2 = (r-1)d + 1.$$

Da Proposição 2.5.2 (iv) segue que :

$$i\left(S(W_r^{\oplus d})\right) = i\left(S^{(r-1)d-1}\right) = (r-1)d.$$

Pela Proposição 2.5.2 (i), como existe aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus d})$, temos:

$$i\left((\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r}\right) \leq i\left(S(W_r^{\oplus d})\right) \implies (r-1)d + 1 \leq (r-1)d,$$

o que é um absurdo.

Assim, não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{\times r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus d})$ e o teorema está provado. □

Demonstração do Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12). Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|C_1| = \dots = |C_{d+1}| = 2r - 1$.

Pelo Teorema 3.1.29, basta provar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$(\Delta_{2r-1,r})^{*(d+1)} \cong (R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

Como $(\mathbb{Z}_p)^n \leq \mathfrak{S}_r$ é um subgrupo, basta provar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $(\Delta_{2r-1,r})^{*(d+1)} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)})$.

Suponhamos que exista tal aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$(\Delta_{2r-1,r})^{*(d+1)} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

Pelo Corolário 2.6.12, temos $\text{conn}(\Delta_{2r-1,r}) = r - 2$ e, assim, pelo Teorema 2.6.7 segue que:

$$\text{conn}\left(\left(\Delta_{2r-1,r}\right)^{*(d+1)}\right) \geq (d+1)(r-2) + 2d = r(d+1) - 2.$$

Pelo Teorema 2.6.9, temos:

$$i\left(\left(\Delta_{2r-1,r}\right)^{*(d+1)}\right) \geq \text{conn}\left(\left(\Delta_{2r-1,r}\right)^{*(d+1)}\right) + 2 = [r(d+1) - 2] + 2 = r(d+1).$$

Por outro lado, pela Proposição 2.5.2 (iv) segue que:

$$i\left(S(W_r^{\oplus(d+1)})\right) = i\left(S^{(r-1)(d+1)-1}\right) = (r-1)(d+1).$$

Pela Proposição 2.5.2 (i), como existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-1,r}\right)^{*(d+1)} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)})$, temos:

$$i\left(\left(\Delta_{2r-1,r}\right)^{*(d+1)}\right) \leq i\left(S(W_r^{\oplus(d+1)})\right) \implies r(d+1) \leq (r-1)(d+1),$$

o que é um absurdo.

Assim, não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante $\left(\Delta_{2r-1,r}\right)^{*(d+1)} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)})$ e o teorema está provado. □

3.2 Generalização do Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica

Nesta seção, apresentaremos dois resultados que generalizam o Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12). O Teorema 3.2.1 foi demonstrado por Carlos H.F. Poncio em sua tese de doutorado (PONCIO, 2020) e o Teorema 3.2.3, que flexibiliza as cardinalidades das $(d+1)$ cores do primeiro teorema, é original do nosso trabalho. Os dois teoremas encontram-se em (MAURI *et al.*, 2022).

O teorema a seguir generaliza o Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica, pois exige que apenas uma das $(d+1)$ cores tenha cardinalidade pelo menos $2r-1$, enquanto as outras d cores podem ter cardinalidade pelo menos $2r-4$.

Teorema 3.2.1 (*Generalização do Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica*, (PONCIO, 2020)). Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 3$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por $(d+1)$ cores, onde $|C_1| \geq 2r-1$ e $|C_i| \geq 2r-4$, para todo $i = 2, \dots, d+1$, existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Exemplo 3.2.2. Considere $r = 9$ e $d = 3$ e uma coloração (C_1, C_2, C_3, C_4) por $(d + 1) = 4$ cores do conjunto de vértices $V(\Delta)$. O Teorema de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) afirma que se $|C_1|, |C_2|, |C_3|, |C_4| \geq 2r - 1 = 17$, então para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$, existem 9 faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_9$ de Δ satisfazendo $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_9) \neq \emptyset$.

O Teorema 3.2.1 afirma que para que o resultado continue valendo só é necessário que $|C_1| \geq 2r - 1 = 17$, enquanto as outras 3 cores devem satisfazer apenas que $|C_2|, |C_3|, |C_4| \geq 2r - 4 = 14$.

O teorema a seguir flexibiliza o Teorema 3.2.1 quando $r = p^n \geq 3$, pois permite uma maior variação nas cardinalidades mínimas nas $(d + 1)$ classes de cores.

Teorema 3.2.3 (*Flexibilização do Teorema 3.2.1, (MAURI et al., 2022)*). Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 3$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por $(d + 1)$ cores, com $|C_i| \geq 2r - 1 - 3x_i$ (onde $x_i \geq 0$ é um inteiro), para todo $i = 1, \dots, d + 1$ tais que $\sum_{i=1}^{d+1} x_i \leq d$ e $2x_i + 1 \leq r, \forall i = 1, \dots, d + 1$, existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|C_i| = 2r - 1 - 3x_i$, para todo $i \in [d + 1]$. Então, pelo Teorema 3.1.29, é suficiente mostrar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante:

$$\Delta_{2r-1-3x_1, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_i, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1}, r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Como $(\mathbb{Z}_p)^n \leq \mathfrak{S}_r$ é um subgrupo, basta provar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\Delta_{2r-1-3x_1, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_i, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1}, r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)$.

Suponhamos que exista uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$\Delta_{2r-1-3x_1, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_i, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1}, r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Então, pela Proposição 2.5.2 (i), temos que:

$$i\left(\Delta_{2r-1-3x_1, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_i, r} * \dots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1}, r}\right) \leq i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Segue da Proposição 2.5.2 (iv) que:

$$i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right) = i\left(S^{(r-1)(d+1)-1}\right) = (r-1)(d+1).$$

Podemos calcular $\text{conn}(\Delta_{2r-1-3x_i, r})$, para todo $i \in [d + 1]$, usando o Teorema 2.6.11, como segue.

$$\begin{aligned} \text{conn}(\Delta_{2r-1-3x_i,r}) &= \min \left\{ 2r-1-3x_i, r, \left\lfloor \frac{(2r-1-3x_i)+r+1}{3} \right\rfloor \right\} - 2 = \\ &= \min \{ 2r-1-3x_i, r, r-x_i \} \stackrel{(2x_i+1 \leq r)}{=} (r-x_i) - 2 = r-x_i-2. \end{aligned}$$

Segue do Teorema 2.6.7 que:

$$\begin{aligned} \text{conn}(\Delta_{2r-1-3x_1,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_i,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1},r}) &\geq \left[\sum_{i=1}^{d+1} (r-x_i-2) \right] + 2d = \\ &= (d+1)(r-2) - \left(\sum_{i=1}^{d+1} x_i \right) + 2d \stackrel{(\sum_{i=1}^{d+1} x_i \leq d)}{\geq} (d+1)(r-1) - 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, do Teorema 2.6.9 temos que:

$$\begin{aligned} i(\Delta_{2r-1-3x_1,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_i,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1},r}) &\geq [(d+1)(r-1) - 1] + 2 = \\ &= (d+1)(r-1) + 1 > (r-1)(d+1). \end{aligned}$$

Então,

$$i(\Delta_{2r-1-3x_1,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_i,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1},r}) > (r-1)(d+1) = i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Mas isto contradiz:

$$i(\Delta_{2r-1-3x_1,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_i,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1},r}) \leq i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Portanto, não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$\Delta_{2r-1-3x_1,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_i,r} * \cdots * \Delta_{2r-1-3x_{d+1},r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

□

Observação 3.2.4. Para o caso $r = 2$, se aplicarmos as técnicas da demonstração do Teorema 3.2.3, obteremos os mesmos resultados do Teorema 3.2.1 para este caso, não resultando em uma flexibilização das cardinalidades mínimas das cores.

Exemplo 3.2.5. (1) Note que se $x_1 = 0, x_2 = \cdots = x_{d+1} = 1$, temos que $\sum_{i=1}^{d+1} x_i = d \leq d$ e $2x_i + 1 \leq r$, para todo $i \in [d+1]$. Este caso particular do Teorema 3.2.3 é exatamente o que é afirmado no Teorema 3.2.1, para $r = p^n \geq 3$.

(2) Considere $r = 9, d = 3, x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2$ e $x_4 = 1$. Temos que $\sum_{i=1}^{d+1} x_i = 3 \leq d = 3$ e $2x_i + 1 \leq r$, para todo $i \in [d+1]$. Este é um caso do Teorema 3.2.3, o qual não ocorre no Teorema 3.2.1, pois $|C_3| = 2r - 1 - 3x_3 = 11 < 14 = 2r - 4$.

3.3 Teorema de Tverberg colorido com novas condições sobre as faces

Nesta seção, introduziremos um novo problema (Problema 3.3.1) a partir do clássico Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) e apresentaremos soluções para tal problema, constituindo em novos resultados desta tese, que encontram-se em (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022).

O problema que apresentaremos a seguir surge da seguinte pergunta a respeito do Teorema 3.1.12.

“Podemos limitar a quantidade de faces na Partição de Tverberg colorida com um vértice de determinada cor e, ainda assim, o resultado ser válido?”

Esse questionamento pode ser traduzido matematicamente na condição (iii) do Problema 3.3.1, onde limitamos a l_i a quantidade de faces que contém um vértice da cor i , para todo $i \in [m]$, onde $V(\Delta)$ está colorido por m cores.

Problema 3.3.1. Sejam $d \geq 1$, $m \geq 1$ inteiros e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Determine inteiros l_1, \dots, l_m ($1 \leq l_i \leq r$, para $i = 1, \dots, m$) tais que para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_m) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por m cores, onde cada cor tem cardinalidade pelo menos $2r - 1$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [m]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq l_i$, para todo $i \in [m]$.

Observação 3.3.2. Note que, assim como no Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) as condições (i), (ii), $r = p^n \geq 2$ potência de primo e cada cor ter cardinalidade pelo menos $2r - 1$ se mantém. Apenas generalizamos o problema para m cores, não restringindo a $(d + 1)$ cores e incluímos as condições em (iii) que limitam para cada cor o número de faces com vértices desta determinada cor.

O exemplo a seguir ilustra as particularidades do Problema 3.3.1.

Exemplo 3.3.3. Sejam $d = 2$, $r = 3$ inteiros e seja (C_1, C_2, C_3) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [15]$ (a partir de agora vamos identificar vértices de um simplexo Δ com números), com $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $C_3 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, isto é, $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 2r - 1 = 5$. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua.

Pelo Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) existe uma partição de Tverberg colorida, que pode ser $\sigma_1 = \{1, 7, 13\}$, $\sigma_2 = \{2, 9, 14\}$, $\sigma_3 = \{5, 8, 11\}$. Note que nesta partição todas as 3 faces tem um vértice de cada uma das cores C_1 , C_2 e C_3 .

Nestas condições, se tomarmos $l_1 = l_2 = l_3 = 2$ para o Problema 3.3.1, a partição de Tverberg colorida $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ não satisfaz a condição (iii), que estaria limitando a presença de vértices de cada uma das cores C_1, C_2 e C_3 em no máximo 2 faces.

Assim, a condição (iii) restringe as possíveis partições de Tverberg coloridas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tais que $f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap f(\sigma_3) \neq \emptyset$.

Para demonstrar os resultados desta seção, os quais são soluções para o Problema 3.3.1, enunciaremos e demonstraremos o Teorema 3.3.4, que consiste em uma versão modificada do Teorema 3.1.29 (teorema chave para demonstrar Teoremas do tipo Tverberg colorido).

Antes, faremos algumas ponderações importantes para se entender o próximo teorema.

O *join* deletado $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*r} = \{\sigma_1 \uplus \dots \uplus \sigma_r; \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset, \text{ para } i, j \in [r] \text{ e } i \neq j\}$ pode ser visualizado como o *join* que identifica as coleções de r faces duas a duas disjuntas de Δ_N .

Suponhamos que (C_1, \dots, C_m) seja uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta)$. O *join* deletado do subcomplexo colorido $R_{(C_1, \dots, C_m)}$ pode ser identificado como:

$$(R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \cong ([|C_1|] * \dots * [|C_m|])_{\Delta(2)}^{*r} \cong \Delta_{|C_1|, r} * \dots * \Delta_{|C_m|, r}.$$

Então, $\Delta_{|C_1|, r} * \dots * \Delta_{|C_m|, r}$ pode ser visualizado como *join* das coleções de r faces coloridas duas a duas disjuntas de Δ , isto é, que satisfazem a condição (i) do Problema 3.3.1.

Note que para obter o *join* das r faces duas a duas disjuntas que satisfazem as condições (i) e (iii) do Problema 3.3.1, isto é, as faces são coloridas e temos no máximo l_i vértices da cor i , para $i = 1, \dots, m$, basta tomar o $(l_i - 1)$ -esqueleto do complexo chessboard $\Delta_{|C_i|, r}$. Portanto, o *join*

$$\Delta_{|C_1|, r}^{\leq l_1 - 1} * \dots * \Delta_{|C_m|, r}^{\leq l_m - 1}$$

pode ser visualizado como o *join* da coleção de r faces duas a duas disjuntas que satisfazem as condições (i) e (iii) do Problema 3.3.1.

Agora estamos prontos para enunciar e provar o Teorema chave dos resultados dessa seção.

Teorema 3.3.4. Sejam $d \geq 1, m \geq 1, l_1, \dots, l_m$ ($1 \leq l_i \leq r$, para $i = 1, \dots, m$) inteiros e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Seja (C_1, \dots, C_m) uma coloração de Δ por m cores. Se não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$\Delta_{|C_1|, r}^{\leq l_1 - 1} * \dots * \Delta_{|C_m|, r}^{\leq l_m - 1} \longrightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)})$$

então para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [m]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq l_i$, para todo $i \in [m]$.

Demonstração. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua tal que para quaisquer r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ que satisfazem as condições (i) e (iii), a condição (ii) não é satisfeita, isto é, $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$. Em outras palavras, f é um contraexemplo para a afirmação do Teorema.

Temos o *mapa join*

$$J_f : (\Delta)_{\Delta(2)}^{*r} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \longmapsto (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)), \dots, (\lambda_r, \lambda_r f(x_r)).$$

Note que $\Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1}$ é um subespaço \mathfrak{S}_r -invariante de $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*r}$, pois as permutações das r faces não alteram o número de vértices com a cor i , para todo $i \in [m]$.

Definimos o *mapa join*

$$J'_f \stackrel{\text{def}}{=} J_f|_{\Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1}} : \Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \longmapsto (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)), \dots, (\lambda_r, \lambda_r f(x_r)).$$

Por hipótese, f é um contraexemplo que não satisfaz a condição (ii), portanto

$$\text{Im}(J'_f) \cap D_J = \emptyset.$$

De fato, suponhamos que

$$(\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)), \dots, (\lambda_r, \lambda_r f(x_r)) \in \text{Im}(J'_f) \cap D_J \neq \emptyset,$$

para algum $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \in \Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1}$. Então, $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \frac{1}{r}$ e, consequentemente, $f(x_1) = \dots = f(x_r)$, onde $x_1 \in \text{relint } \sigma_1, \dots, x_r \in \text{relint } \sigma_r$ e estas r faces duas a duas disjuntas satisfazem as condições (i) and (iii), como explicamos anteriormente. Isto contradiz o fato de que f é um contraexemplo para este teorema.

Então, J'_f induz uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$\Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J,$$

a qual denotaremos também por J'_f , com um pequeno abuso de notação.

Além disso, seja

$$R_J : \left(\mathbb{R}^{d+1} \right)^{\oplus r} \setminus D_J \rightarrow D_J^\perp \setminus \{0\} \rightarrow S \left(D_J^\perp \right)$$

a composição de uma projeção apropriada e um retrato por deformação. A aplicação R_J é \mathfrak{S}_r -equivariante.

Temos um isomorfismo de \mathfrak{S}_r -representações $D_J^\perp \cong W_r^{\oplus(d+1)}$, onde ambos estão munidos da ação do grupo simétrico \mathfrak{S}_r dado pela permutação de coordenadas.

Identificando D_J^\perp com $W_r^{\oplus(d+1)}$, temos que R_J é uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$R_J : \left(\mathbb{R}^{d+1} \right)^{\oplus r} \setminus D_J \rightarrow S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right).$$

Então, temos uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante, dada pela composição

$$R_J \circ J'_f : \Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right).$$

Logo, se não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante $\Delta_{|C_1|,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{|C_m|,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right)$, então não existe uma aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ que seja um contraexemplo e, portanto, para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces coloridas, duas a duas disjuntas, satisfazendo as condições (i) e (iii) do Problema 3.3.1 tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset. \text{ (condição (ii) do Problema 3.3.1)}$$

□

O teorema a seguir afirma que o Problema 3.3.1 segue quando a desigualdade $\sum_{i=1}^m l_i > (d+1)(r-1)$ é válida.

Teorema 3.3.5. (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022) Sejam $d \geq 1$ inteiro, $r = p^n \geq 2$ potência de primo e l_1, \dots, l_m ($1 \leq l_i \leq r$, para $i = 1, \dots, m$) inteiros satisfazendo $\sum_{i=1}^m l_i > (d+1)(r-1)$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_m) do conjunto de vértices do simplexo Δ por m cores, onde cada classe de cor tem cardinalidade pelo menos $2r-1$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [m]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq l_i$, para todo $i \in [m]$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|C_1| = \dots = |C_m| = 2r - 1$. Então, pelo Teorema 3.3.4, é suficiente mostrar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Como $(\mathbb{Z}_p)^n \leq \mathfrak{S}_r$ é um subgrupo, basta provar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)$.

Suponhamos que exista uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)$.

Então, pela Proposição 2.5.2 (i), temos que

$$i\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1}\right) \leq i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Segue da Proposição 2.5.2 (iv) que

$$i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right) = i\left(S^{(r-1)(d+1)-1}\right) = (r-1)(d+1).$$

Por outro lado, note que $\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_i-1}$ é $(l_i - 2)$ -conexo, para todo $i = 1, \dots, m$.

De fato, $\Delta_{2r-1,r}$ é $(r - 2)$ -conexo (pelo Corolário 2.6.12), logo é $(l_i - 2)$ -conexo (desde que $l_i \leq r$). Assim, pelo Teorema 2.6.10, temos que $\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_i-1}$ é $(l_i - 2)$ -conexo.

Pelo Teorema 2.6.7, temos que

$$\text{conn}\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^m (l_i - 2)\right) + 2(m - 1) = \left(\sum_{i=1}^m l_i\right) - 2.$$

Segue do Teorema 2.6.9 e da desigualdade $\sum_{i=1}^m l_i > (d + 1)(r - 1)$, que

$$i\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1}\right) \geq \left[\left(\sum_{i=1}^m l_i\right) - 2\right] + 2 = \sum_{i=1}^m l_i > (r - 1)(d + 1).$$

Então, $i\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1}\right) > (r - 1)(d + 1) = i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right)$, mas isto contradiz

$$i\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1}\right) \leq i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Portanto, não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$\Delta_{2r-1,r}^{\leq l_1-1} * \dots * \Delta_{2r-1,r}^{\leq l_m-1} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

□

Exemplo 3.3.6. Sejam $d = 2$, $r = 3$ inteiros e seja (C_1, C_2, C_3) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [15]$, com $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $C_3 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, isto é, $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 2r - 1 = 5$. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua.

O Teorema 3.3.5 vale para $l_1 = l_2 = 2$ e $l_3 = 3$, pois $\sum_{i=1}^3 l_i = 7 > 6 = (d + 1)(r - 1)$. Então, existe uma partição de Tverberg colorida $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ tal que C_1 e C_2 tem vértices em no máximo 2 faces, enquanto C_3 pode ter vértices nas 3 faces.

O corolário a seguir se resume ao Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) com novas condições sobre as faces.

Corolário 3.3.7 (Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica com novas condições sobre as faces, (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022)). Sejam $d \geq 1$ inteiro, $r = p^n \geq 2$ potência de primo e l_1, \dots, l_{d+1} ($1 \leq l_i \leq r$, para $i = 1, \dots, d + 1$) inteiros tais que $\sum_{i=1}^{d+1} l_i > (d + 1)(r - 1)$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d + 1)$ cores, onde cada cor tem cardinalidade pelo menos $2r - 1$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [d + 1]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq l_i$, para todo $i \in [d + 1]$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.3.5 para o caso $m = d + 1$.

□

Observação 3.3.8. O Corolário 3.3.7 nos dá uma nova versão do Teorema de Tverberg Colorido de Živaljević e Vrećica com mais condições sobre as r faces.

O exemplo a seguir mostra como o Corolário 3.3.7 é uma versão mais forte do Teorema de Tverberg Colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12).

Exemplo 3.3.9. Sejam $d = 2$, $r = 3$ inteiros e seja (C_1, C_2, C_3) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [15]$, com $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $C_3 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, isto é, $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 2r - 1 = 5$. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua.

Pelo Teorema de Tverberg Colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12), podemos ter uma partição de Tverberg colorida $\sigma_1 = \{1, 6, 12\}$, $\sigma_2 = \{5, 9, 14\}$ e $\sigma_3 = \{10, 11\}$ tal que

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap f(\sigma_3) \neq \emptyset.$$

No Corolário 3.3.7, com $l_1 = l_2 = 2$ e $l_3 = 3$, a partição de Tverberg colorida $\sigma_1 = \{1, 6, 12\}$, $\sigma_2 = \{5, 9, 14\}$ e $\sigma_3 = \{10, 11\}$ não satisfaz a condição (iii) do Problema 3.3.1, pois

$$|(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3) \cap C_2| = 3 > l_2.$$

Portanto, o Corolário 3.3.7 é uma versão do Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica que reduz as possíveis partições de Tverberg coloridas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tais que

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Em particular, tomando $m = d + 1$, $l_1 = \dots = l_d = r - 1$ e $l_{d+1} = r$, temos a seguinte consequência do Teorema 3.3.5.

Corolário 3.3.10. (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022) Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d + 1)$ cores, onde cada classe de cor tem cardinalidade pelo menos $2r - 1$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [d + 1]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq r - 1$, para todo $i \in [d]$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.3.5 para o caso $m = d + 1$, $l_1 = \dots = l_d = r - 1$ e $l_{d+1} = r$.

□

Note que a condição (iii) do Teorema anterior não inclui:

$$|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_{d+1}| \leq r - 1. \quad (3.1)$$

Se adicionarmos (3.1) à condição (iii) e utilizarmos as mesmas técnicas da demonstração do Teorema 3.3.5, a resposta para o problema é inconclusiva, então temos o seguinte problema sem solução.

Problema 3.3.11. Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d + 1)$ cores, onde cada classe de cor tem cardinalidade pelo menos $2r - 1$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [d + 1]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq r - 1$, para todo $i \in [d + 1]$.

No entanto, se adicionarmos uma cor C_{d+2} com um único vértice, o resultado segue. De fato, nessas condições obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.12. (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022) Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+2}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d+2)$ cores, onde as classes de cores C_1, \dots, C_{d+1} tem cardinalidade pelo menos $2r-1$ e a classe de cor C_{d+2} tem um único vértice, então existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [d+2]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq r-1$, para todo $i \in [d+2]$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|C_1| = \dots = |C_{d+1}| = 2r-1$. Então, pelo Teorema 3.3.4, é suficiente mostrar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante:

$$\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \longrightarrow S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right).$$

Como $(\mathbb{Z}_p)^n \leq \mathfrak{S}_r$ é um subgrupo, basta provar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \longrightarrow S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right)$.

Suponhamos que exista uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \longrightarrow S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right).$$

Então, pela Proposição 2.5.2 (i), temos que:

$$i \left(\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \leq i \left(S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right) \right).$$

Segue da Proposição 2.5.2 (iv) que:

$$i \left(S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right) \right) = i \left(S^{(r-1)(d+1)-1} \right) = (r-1)(d+1).$$

Por outro lado, note que $\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2}$ é $(r-3)$ -conexo, para todo $i = 1, \dots, d+1$.

De fato, $\Delta_{2r-1,r}$ é $(r-2)$ -conexo (pelo Corolário 2.6.12) então, também é $(r-3)$ -conexo. Portanto, segue do Teorema 2.6.10 que $\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2}$ é $(r-3)$ -conexo.

O complexo chessboard $\Delta_{1,r}$ é (-1) -conexo, pelo Teorema 2.6.11.

Pelo Teorema 2.6.7, temos que:

$$\text{conn} \left(\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \geq (d+1)(r-3) + (-1) + 2(d+1) = (r-1)(d+1) - 1.$$

Portanto, utilizando o Teorema 2.6.9, segue que

$$i \left(\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \geq [(r-1)(d+1) - 1] + 2 = (r-1)(d+1) + 1.$$

Então, $i \left(\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \right) > (r-1)(d+1) = i \left(S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right) \right)$. Mas, isso contradiz

$$i \left(\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \leq i \left(S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right) \right).$$

Logo, não existe aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-1,r}^{\leq r-2} \right)^{* (d+1)} * \Delta_{1,r} \rightarrow S \left(W_r^{\oplus (d+1)} \right)$.

□

Exemplo 3.3.13. Sejam $d = 2$, $r = 3$ inteiros e seja (C_1, C_2, C_3, C_4) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [16]$, com $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $C_3 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ e $C_4 = \{16\}$, isto é, $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 2r - 1 = 5$ e C_4 tem um único vértice. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua.

Pelo Teorema 3.3.12, existe uma partição de Tverberg colorida $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, tal que cada uma das 4 cores C_1, C_2, C_3 e C_4 tem vértices em no máximo 2 faces, isto é, não existe uma das cores que tem vértices nas 3 faces.

Os próximos resultados são variações do Problema 3.3.1 e suas demonstrações utilizam as mesmas técnicas dos teoremas anteriores desta seção.

Teorema 3.3.14. (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022) Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 3$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d+1)$ cores, onde as classes de cores C_1, \dots, C_d tem cardinalidade pelo menos $2r - 4$ e a classe de cor C_{d+1} tem cardinalidade pelo menos $2r - 1$, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [d+1]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq r - 1$, para todo $i \in [d]$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|C_1| = \dots = |C_d| = 2r - 4$ e $|C_{d+1}| = 2r - 1$. Então, pelo Teorema 3.3.4, é suficiente mostrar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante:

$$\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Como $(\mathbb{Z}_p)^n \leq \mathfrak{S}_r$ é um subgrupo, basta provar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)$.

Suponhamos que exista uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Então, pela Proposição 2.5.2 (i), temos que:

$$i\left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r}\right) \leq i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Segue da Proposição 2.5.2 (iv) que:

$$i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right) = i\left(S^{(r-1)(d+1)-1}\right) = (r-1)(d+1).$$

Por outro lado, note que $\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}$ é $(r-3)$ -conexo.

De fato, $\Delta_{2r-4,r}$ é $(r-3)$ -conexo (pelo Teorema 2.6.11). Portanto, segue do Teorema 2.6.10, que $\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}$ é $(r-3)$ -conexo.

O complexo chessboard $\Delta_{2r-1,r}$ é $(r-2)$ -conexo, pelo Corolário 2.6.12.

Pelo Teorema 2.6.7, temos que:

$$\text{conn}\left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r}\right) \geq (r-3)d + (r-2) + 2d = (r-1)(d+1) - 1.$$

Portanto, utilizando o Teorema 2.6.9, temos que:

$$i\left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r}\right) \geq [(r-1)(d+1) - 1] + 2 = (r-1)(d+1) + 1.$$

Então, $i\left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r}\right) > (r-1)(d+1) = i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right)$. Mas isso contradiz

$$i\left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r}\right) \leq i\left(S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)\right).$$

Logo, não existe aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{2r-1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)$.

□

Exemplo 3.3.15. Sejam $d = 2$, $r = 3$ inteiros e seja (C_1, C_2, C_3) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [9]$, com $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{3, 4\}$ e $C_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, isto é, $|C_1| = |C_2| = 2r - 4 = 2$ e $|C_3| = 2r - 1 = 5$. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua.

Pelo Teorema 3.3.14 existe uma partição de Tverberg colorida $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, tal que as cores C_1 e C_2 tem vértices em no máximo 2 faces, enquanto a cor C_3 pode ter vértices nas 3 faces.

Observação 3.3.16. O Teorema 3.3.14 é uma versão inspirada no Teorema 3.2.1, onde restringimos a presença de vértices em no máximo $r - 1$ faces da partição de Tverberg colorida para as d cores com cardinalidade mínima de $2r - 4$, enquanto a cor de cardinalidade mínima $2r - 1$ pode ter vértices em todas as r faces.

Teorema 3.3.17. (MAURI; MATTOS; SANTOS, 2022) Sejam $d \geq 1$ inteiro, e $r = p^n \geq 3$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+2}) do conjunto de vértices do simplexo Δ por $(d + 2)$ cores, onde as classes de cores C_1, \dots, C_{d+1} tem cardinalidade pelo menos $2r - 4$ e a classe de cor C_{d+1} tem um único vértice, existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo:

- (i) $|C_i \cap \sigma_j| \leq 1$, para todo $i \in [d + 2]$, $j \in [r]$, isto é, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas;
- (ii) $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$; e
- (iii) $|(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r) \cap C_i| \leq r - 1$, para todo $i \in [d + 2]$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|C_1| = \dots = |C_{d+1}| = 2r - 4$. Então, pelo Teorema 3.3.4, é suficiente mostrar que não existe uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante:

$$\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Como $(\mathbb{Z}_p)^n \leq \mathfrak{S}_r$ é um subgrupo, basta provar que não existe uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right)$.

Suponhamos que exista uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante

$$\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}\right)^{*d} * \Delta_{1,r} \longrightarrow S\left(W_r^{\oplus(d+1)}\right).$$

Então, pela Proposição 2.5.2 (i), temos que:

$$i \left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2} \right)^{*(d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \leq i \left(S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right) \right).$$

Segue da Proposição 2.5.2 (iv) que:

$$i \left(S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right) \right) = i \left(S^{(r-1)(d+1)-1} \right) = (r-1)(d+1).$$

Por outro lado, note que $\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}$ é $(r-3)$ -conexo.

De fato, $\Delta_{2r-4,r}$ é $(r-3)$ -conexo (pelo Teorema 2.6.11). Portanto, segue do Teorema 2.6.10 que $\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2}$ é $(r-3)$ -conexo.

O complexo chessboard $\Delta_{1,r}$ é (-1) -conexo, pelo Teorema 2.6.11.

Pelo Teorema 2.6.7, temos que:

$$\text{conn} \left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2} \right)^{*(d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \geq (d+1)(r-3) + (-1) + 2(d+1) = (r-1)(d+1) - 1.$$

Portanto, utilizando o Teorema 2.6.9, temos que:

$$i \left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2} \right)^{*(d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \geq [(r-1)(d+1) - 1] + 2 = (r-1)(d+1) + 1.$$

Então, $i \left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2} \right)^{*(d+1)} * \Delta_{1,r} \right) > (r-1)(d+1) = i \left(S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right) \right)$. Mas isso contradiz

$$i \left(\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2} \right)^{*(d+1)} * \Delta_{1,r} \right) \leq i \left(S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right) \right).$$

Logo, não existe aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante $\left(\Delta_{2r-4,r}^{\leq r-2} \right)^{*(d+1)} * \Delta_{1,r} \rightarrow S \left(W_r^{\oplus(d+1)} \right)$. □

Exemplo 3.3.18. Sejam $d = 2$, $r = 3$ inteiros e seja (C_1, C_2, C_3, C_4) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [7]$, com $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{3, 4\}$, $C_3 = \{5, 6\}$ e $C_4 = \{7\}$, isto é, $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 2r - 4 = 2$ e C_4 tem um único vértice. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua.

Pelo Teorema 3.3.17 existe uma partição de Tverberg colorida $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, tal que cada uma das 4 cores C_1, C_2, C_3 e C_4 tem vértices em no máximo 2 faces, isto é, não existe uma das cores que tem vértices nas 3 faces.

Observação 3.3.19. O Teorema 3.3.17 se inspira na ideia do Teorema 3.3.12 de adicionar uma cor C_{d+2} com um único vértice e obter uma partição de Tverberg colorida em que todas as cores tenham vértices em no máximo $r - 1$ faces. Note ainda que no Teorema 3.3.17, as $(d + 1)$ cores C_1, \dots, C_{d+1} tem cardinalidade mínima $2r - 4$, enquanto no Teorema 3.3.14 a cor C_{d+1} deveria ter cardinalidade mínima $2r - 1$. Então, adicionar a cor C_{d+2} de um único vértice também trouxe a possibilidade de diminuir a cardinalidade mínima de C_{d+1} para $2r - 4$.

TEOREMAS DO TIPO VAN KAMPEN-FLORES

O Teorema Topológico de Radon (Teorema 3.1.3), o qual é o Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.4), para o caso $r = 2$, garante que para toda aplicação contínua $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem duas faces disjuntas cujas imagens por f se intersectam. Naturalmente surgiram perguntas sobre se poderíamos limitar a dimensão destas faces neste tipo de problema, e, assim, surgiram os problemas do tipo Van Kampen-Flores e os problemas do tipo Van Kampen-Flores colorido. Os resultados deste capítulo serão organizados em um pré-print e, posteriormente, submetidos para publicação.

Como nos teoremas do tipo Tverberg, os resultados existentes tem como hipótese $r = p^n$ potência de primo. Neste capítulo provaremos uma nova versão do tipo Van Kampen-Flores colorido “flexibilizada” (Teorema 4.1.13), onde r não é necessariamente potência de primo. Na segunda seção provaremos novas versões do Teorema Topológico de Tverberg para todo r inteiro e partições j -disjuntas (Teorema 4.2.6) e do Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r inteiro e partições j -disjuntas (Teorema 4.2.8).

4.1 Teorema de Van Kampen-Flores colorido para todo inteiro r

O objetivo desta seção é introduzir e demonstrar o Teorema 4.1.13, o qual é uma nova versão do Teorema de Van Kampen-Flores colorido (Teorema 4.1.7) para todo r inteiro e que “flexibiliza” a coloração das faces, como veremos ao longo desta seção.

Na década de 1930, Antonio Flores formulou e Van Kampen demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 (*Teorema de Van Kampen-Flores* (FLORES, 1933), (KAMPEN,)). Sejam $d \geq 2$ inteiro e $f : \Delta_{d+2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Então, existem duas faces disjuntas σ e τ de Δ_{d+2} , onde $\dim(\sigma), \dim(\tau) \leq d/2$ tais que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.

Observação 4.1.2. Note que o caso $d = 2$ do Teorema de Van Kampen-Flores (Teorema 4.1.1) é equivalente a afirmar que o grafo K_5 não é planar.

O teorema a seguir generaliza o Teorema de Van Kampen-Flores e segue como uma consequência do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6). Foi provado primeiramente por Sarkaria (SARKARIA, 1991) para r primo e em seguida para $r = p^n$ potência de primo por Volovikov (VOLOVIKOV, 1996). No entanto, existe uma demonstração elementar que utiliza um método denominado “*constraint method*”, introduzido no artigo (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014).

Teorema 4.1.3 (*Teorema de Van Kampen-Flores generalizado* (SARKARIA, 1991), (VOLOVIKOV, 1996)). Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $k \geq \lceil \frac{r-1}{r}d \rceil$, $N = (d+2)(r-1)$ e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Então existem r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, no k -esqueleto $\Delta_N^{\leq k}$, isto é, $\dim(\sigma_i) \leq k$, para todo $i \in [r]$ tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Observação 4.1.4. O caso $r = 2$ do Teorema de Van Kampen-Flores generalizado (Teorema 4.1.3) é exatamente o Teorema de Van Kampen-Flores (Teorema 4.1.1).

Observação 4.1.5. As demonstrações dos novos resultados apresentados neste capítulo utilizam técnicas baseadas no método denominado “*constraint method*”, introduzido no artigo (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014). Este método elementar deriva novos resultados do tipo Tverberg e Tverberg colorido a partir do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6).

Em (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014) foram descritos novos resultados do tipo Tverberg colorido que são obtidos a partir do Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6), utilizando as técnicas elementares do artigo.

O primeiro resultado obtido foi o Teorema de Tverberg colorido “fraco”, enunciado a seguir.

Teorema 4.1.6 (*Teorema de Tverberg colorido “fraco”* (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014)). Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $N = (2d+2)(r-1)$ e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Se os vértices de Δ_N tem uma coloração por $(d+1)$ cores, onde cada cor tem cardinalidade no máximo $2r-1$, então existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Também foi demonstrado o seguinte teorema, o qual é chamado de Teorema de Van Kampen-Flores colorido.

Teorema 4.1.7 (*Teorema de Van Kampen-Flores colorido* (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014)). Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $m \geq \lceil \frac{r-1}{r}d \rceil + 1$ e $N = (d + m + 1)(r - 1)$ inteiros e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Se os vértices do simplexo Δ_N tem uma coloração por m cores, onde cada cor tem cardinalidade no máximo $2r - 1$, então existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

A nossa proposta de novos resultados é a partir de uma “flexibilização” em uma Partição de Tverberg colorida $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$. Mais especificamente, ao invés de exigir que as r faces sejam coloridas, vamos supor que cada uma das faces da partição tenham no máximo q vértices coloridos ($q \geq 1$ inteiro) com cada cor. Tal face que satisfaça esta condição será denominada *face q -colorida*. Vamos chamar uma partição de faces q -coloridas de *Partição de Tverberg q -colorida*.

Exemplo 4.1.8. Seja (C_1, C_2, C_3) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta) = [15]$, onde $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $C_3 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. Para $q = 2$, temos $\sigma = \{1, 2, 7, 13, 15\}$ e $\tau = \{4, 9, 11, 14\}$ faces q -coloridas e possíveis faces de uma Partição de Tverberg q -colorida.

A seguir demonstramos um Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” para $r = p^n$ potência de primo.

Teorema 4.1.9 (*Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado”*). Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r = p^n$ potência de primo, $q \geq 1$, $m \geq 1$ e $N = (d + m + 1)(r - 1)$ inteiros que satisfaçam $m((q + 1)r - 1) \geq (d + m + 1)(r - 1) + 1$. Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração dos vértices do simplexo Δ_N por m cores, onde toda cor tem cardinalidade no máximo $(q + 1)r - 1$, existem r faces q -coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Demonstração. A demonstração se inspira nas técnicas da demonstração do Teorema 4.1.7 de (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014), com as adaptações necessárias.

Inicialmente note que a condição

$$m((q + 1)r - 1) \geq (d + m + 1)(r - 1) + 1 = N + 1,$$

garante que existe tal coloração como no enunciado.

Para cada uma das classes de cores C_i , onde $i \in [m]$, vamos definir um subcomplexo Σ_i^q de Δ_N da seguinte forma:

$$\Sigma_i^q \stackrel{def}{=} \{\sigma \in \Delta_N ; |\sigma \cap C_i| \leq q\}.$$

Isto é, o subcomplexo Σ_i^q consiste das faces σ de Δ_N que contêm no máximo q vértices da cor C_i .

Desta forma, o subcomplexo $\Sigma_1^q \cap \dots \cap \Sigma_m^q$ de Δ_N é o subcomplexo de todas as faces q -coloridas de Δ_N .

Defina a seguinte aplicação contínua:

$$g : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^{d+m}$$

$$x \longmapsto (f(x), \text{dist}(x, \Sigma_1^q), \dots, \text{dist}(x, \Sigma_m^q)).$$

Aplicando o Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6) para $N = ((d+m)+1)(r-1)$ e para a aplicação contínua $g : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}$ definida acima, obtemos r faces duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N tais que $g(\sigma_1) \cap \dots \cap g(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que existem $x_1 \in \text{relint } \sigma_1, \dots, x_r \in \text{relint } \sigma_r$ tais que $g(x_1) = \dots = g(x_r)$. Pela definição de g segue que $f(x_1) = \dots = f(x_r)$ e $\text{dist}(x_1, \Sigma_i^q) = \dots = \text{dist}(x_r, \Sigma_i^q)$, para todo $i \in [m]$.

Nosso objetivo agora é mostrar que as r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ pertencem ao subcomplexo $\Sigma_1^q \cap \dots \cap \Sigma_m^q$, pois neste caso o teorema estará provado.

Basta mostrar que, para todo $i \in [m]$, as r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ pertencem a Σ_i^q .

Fixado $i \in [m]$, pelo menos uma das r faces deve pertencer ao subcomplexo Σ_i^q , pois caso contrário deveríamos ter $|\sigma_j \cap C_i| \geq q+1$, para todo $j \in [r]$ e assim:

$$(q+1)r - 1 \geq |C_i| \geq |\sigma_1 \cap C_i| + \dots + |\sigma_r \cap C_i| \geq (q+1)r,$$

o que é uma contradição.

Logo, existe $l \in [r]$ tal que $\sigma_l \in \Sigma_i^q$, então $\text{dist}(x_l, \Sigma_i^q) = 0$. Assim, como

$$\text{dist}(x_1, \Sigma_i^q) = \dots = \text{dist}(x_l, \Sigma_i^q) = \dots = \text{dist}(x_r, \Sigma_i^q),$$

segue que $\text{dist}(x_j, \Sigma_i^q) = 0$, para todo $j \in [r]$.

Como Σ_i^q é fechado, temos $x_j \in \Sigma_i^q$, para todo $j \in [r]$.

Assim, como $x_j \in \text{relint } \sigma_j$, temos que $\sigma_j \in \Sigma_i^q$, para todo $j \in [r]$.

□

Observação 4.1.10. O Teorema 4.1.9 generaliza o Teorema 4.1.7.

O objetivo desta seção é apresentar um novo resultado que consiste em uma versão do Teorema de Van Kampen-Flores colorido para todo inteiro r . A motivação para esta nova versão vem do Teorema Topológico de Tverberg para todo r (Theorem 5.1 de (MATTOS; SANTOS; SOUZA, 2017)), o qual será enunciado a seguir.

Teorema 4.1.11 (Teorema Topológico de Tverberg para todo r , (MATTOS; SANTOS; SOUZA, 2017)). Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r \geq 2$ inteiro com fatoração prima:

$$r = r_1 \cdot \dots \cdot r_k, \text{ onde } r_j = p_j^{n_j}, j \in [k].$$

Defina $q_j = r/r_j$, para todo $j \in [k]$.

Sejam $N = (d+1)(r-1)$ inteiro e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ aplicação contínua. Então, para todo $j \in [k]$, existem q_j conjuntos $\{\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,r_j}\}_{i=1}^{q_j}$ que juntos possuem $r = r_j \cdot q_j$ faces duas a duas disjuntas de Δ_N tais que:

$$f(\sigma_{i,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{i,r_j}) \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in [q_j].$$

Observação 4.1.12. Note que para o caso onde $r = p^n$ é potência de primo, o Teorema Topológico de Tverberg para todo r (Teorema 4.1.11) tem afirmação equivalente ao Teorema Topológico de Tverberg (Teorema 3.1.6).

Utilizando o Teorema Topológico de Tverberg para todo r (Teorema 4.1.11) obtemos uma nova versão do Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” (Teorema 4.1.9) para todo inteiro r .

Teorema 4.1.13 (Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” para todo r). Sejam $d \geq 1, m \geq 1, q \geq 1$ inteiros e $r \geq 2$ inteiro com fatoração prima:

$$r = r_1 \cdot \dots \cdot r_k, \text{ onde } r_j = p_j^{n_j}, j \in [k].$$

Defina $q_j = r/r_j$, para todo $j \in [k]$.

Seja $s \in [k]$ tal que :

$$m((q+1)r_s - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1.$$

Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (d+m+1)(r-1)$ e toda coloração dos vértices de Δ_N por m cores, onde cada cor tem cardinalidade no máximo $(q+1)r_s - 1$, existem q_s conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}\}_{j=1}^{q_s}$ que juntos possuem $r = r_s \cdot q_s$ faces q -coloridas duas a duas disjuntas tais que:

$$f(\sigma_{j,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{j,r_s}) \neq \emptyset, \text{ para todo } j \in [q_s].$$

Demonstração. A demonstração deste teorema também se inspira nas técnicas da demonstração do Teorema 4.1.7 de (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014), com as adaptações necessárias.

Inicialmente note que a condição

$$m((q+1)r_s - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1 = N+1,$$

garante que existe tal coloração como no enunciado.

Para cada uma das classes de cores C_i , onde $i \in [m]$, vamos definir um subcomplexo Σ_i^q de Δ_N da seguinte forma:

$$\Sigma_i^q \stackrel{def}{=} \{\sigma \in \Delta_N ; |\sigma \cap C_i| \leq q\}.$$

Isto é, o subcomplexo Σ_i^q consiste das faces σ de Δ_N que contêm no máximo q vértices da cor C_i .

Desta forma, o subcomplexo $\Sigma_1^q \cap \dots \cap \Sigma_m^q$ de Δ_N é o subcomplexo de todas as faces q -coloridas de Δ_N .

Defina a seguinte aplicação contínua:

$$\begin{aligned} g : \Delta_N &\longrightarrow \mathbb{R}^{d+m} \\ x &\longmapsto (f(x), \text{dist}(x, \Sigma_1^q), \dots, \text{dist}(x, \Sigma_m^q)). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Topológico de Tverberg para todo r (Teorema 4.1.11) para $N = ((d+m)+1)(r-1)$ e para a aplicação contínua $g : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}$ definida acima, obtemos q_s conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}\}_{j=1}^{q_s}$ que juntos possuem $r = r_s \cdot q_s$ faces duas a duas disjuntas de Δ_N tais que:

$$g(\sigma_{j,1}) \cap \dots \cap g(\sigma_{j,r_s}) \neq \emptyset, \text{ para todo } j \in [q_s].$$

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, para todo $j \in [q_s]$, que existem $x_{j,1} \in \text{relint } \sigma_{j,1}, \dots, x_{j,r_s} \in \text{relint } \sigma_{j,r_s}$ tais que $g(x_{j,1}) = \dots = g(x_{j,r_s})$. Pela definição de g segue que $f(x_{j,1}) = \dots = f(x_{j,r_s})$ e $\text{dist}(x_{j,1}, \Sigma_i^q) = \dots = \text{dist}(x_{j,r_s}, \Sigma_i^q)$, para todo $i \in [m]$.

Nosso objetivo agora é mostrar que as r_s faces $\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}$ pertencem ao subcomplexo $\Sigma_1^q \cap \dots \cap \Sigma_m^q$, pois neste caso o teorema estará provado.

Basta mostrar que para todo $i \in [m]$, as r_s faces $\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}$ pertencem a Σ_i^q .

Fixado $i \in [m]$, pelo menos uma das r_s faces deve pertencer ao subcomplexo Σ_i^q , pois caso contrário deveríamos ter $|\sigma_{j,t} \cap C_i| \geq q+1$, para todo $t \in [r_s]$ e assim:

$$(q+1)r_s - 1 \geq |C_i| \geq |\sigma_{j,1} \cap C_i| + \dots + |\sigma_{j,r_s} \cap C_i| \geq (q+1)r_s,$$

o que é uma contradição.

Logo, existe $l \in [r_s]$ tal que $\sigma_{j,l} \in \Sigma_i^q$, então $\text{dist}(x_{j,l}, \Sigma_i^q) = 0$. Assim, como

$$\text{dist}(x_{j,1}, \Sigma_i^q) = \cdots = \text{dist}(x_{j,l}, \Sigma_i^q) = \cdots = \text{dist}(x_{j,r_s}, \Sigma_i^q),$$

segue que $\text{dist}(x_{j,t}, \Sigma_i^q) = 0$, para todo $t \in [r_s]$.

Como Σ_i^q é fechado, temos $x_{j,t} \in \Sigma_i^q$, para todo $t \in [r_s]$.

Portanto, como $x_{j,t} \in \text{relint } \sigma_{j,t}$, temos que $\sigma_{j,t} \in \Sigma_i^q$, para todo $t \in [r_s]$.

□

Observação 4.1.14. Note que para o caso onde $r = p^n$ é potência de primo, o Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” para todo r (Teorema 4.1.13) tem afirmação equivalente ao Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” (Teorema 4.1.9).

Observação 4.1.15. Observe que, ao contrário do Teorema Topológico de Tverberg para todo r (Teorema 4.1.11), o Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” para todo r (Teorema 4.1.13) não garante para todo $s \in [k]$, a existência de q_s conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}\}_{j=1}^{q_s}$ que juntos possuem $r = r_s \cdot q_s$ faces q -coloridas, duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_{j,1}) \cap \cdots \cap f(\sigma_{j,r_s}) \neq \emptyset$, para todo $j \in [q_s]$. O Teorema 4.1.13 garante a existência de tais q_s conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}\}_{j=1}^{q_s}$ somente se a desigualdade $m((q+1)r_s - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1$ for válida e se todas as cores tem cardinalidade máxima de $(q+1)r_s - 1$. O exemplo a seguir ilustra essa particularidade do teorema.

Exemplo 4.1.16. Sejam $d = 2$, $m = 6$, $q = 2$ e $r = 6$ com a fatoração prima $r = r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot 3$ e $f : \Delta_{45} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua. Os vértices de Δ_{45} tem uma coloração de 6 cores, onde toda cor tem cardinalidade no máximo 8.

Tomando $s = 2$ em [2], a desigualdade $m((q+1)r_s - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1$ é satisfeita e toda cor tem cardinalidade máxima $8 = (q+1)r_2 - 1$, logo existem $q_s = 2$ conjuntos $\{\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}\}$ e $\{\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}, \sigma_{2,3}\}$ de faces 2-coloridas duas a duas disjuntas tais que:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{1,1}) \cap f(\sigma_{1,2}) \cap f(\sigma_{1,3}) &\neq \emptyset, \\ f(\sigma_{2,1}) \cap f(\sigma_{2,2}) \cap f(\sigma_{2,3}) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $s = 1$ em [2], a desigualdade $m((q+1)r_s - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1$ não é satisfeita, logo o Teorema 4.1.13 não garante a existência de $q_s = 3$ conjuntos $\{\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}\}$, $\{\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}\}$ e $\{\sigma_{3,1}, \sigma_{3,2}\}$ de faces 2-coloridas duas a duas disjuntas que satisfaçam o teorema.

O próximo resultado, que é um corolário do Teorema de Van Kampen-Flores colorido “flexibilizado” para todo r (Teorema 4.1.13) garante, para todo $s \in [k]$, a existência de q_s conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}\}_{j=1}^{q_s}$ que juntos possuem $r = r_s \cdot q_s$ faces q -coloridas, duas a duas disjuntas, tais que $f(\sigma_{j,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{j,r_s}) \neq \emptyset$, para todo $j \in [q_s]$.

Corolário 4.1.17. Sejam $d \geq 1$, $m \geq 1$, $q \geq 1$ inteiros e $r \geq 2$ inteiro com fatoração prima:

$$r = r_1 \cdot \dots \cdot r_k, \text{ onde } r_j = p_j^{n_j}, j \in [k], \text{ e } r_1 < \dots < r_k.$$

Defina $q_j = r/r_j$, para todo $j \in [k]$.

Suponhamos que :

$$m((q+1)r_1 - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1.$$

Para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (d+m+1)(r-1)$ e toda coloração dos vértices de Δ_N por m cores, onde cada cor tem cardinalidade no máximo $(q+1)r_1 - 1$, existem q_s conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,r_s}\}_{j=1}^{q_s}$, para todo $s \in [k]$. que juntos possuem $r = r_s \cdot q_s$ faces q -coloridas, duas a duas disjuntas, tais que:

$$f(\sigma_{j,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{j,r_s}) \neq \emptyset, \text{ para todo } j \in [q_s].$$

Demonstração. Como $r_1 < \dots < r_k$, para todo $s \in [k]$, temos:

$$\begin{aligned} m((q+1)r_s - 1) &\geq m((q+1)r_1 - 1) \geq (d+m+1)(r-1) \quad \text{e} \\ (q+1)r_s - 1 &\geq (q+1)r_1 - 1. \end{aligned}$$

Assim, basta aplicar o Teorema 4.1.13 e o resultado segue para todo $s \in [k]$.

□

Exemplo 4.1.18. Sejam $d = 3$, $m = 6$, $q = 11$ e $r = 35$ com a fatoração prima $r = r_1 \cdot r_2 = 5 \cdot 7$ e $f : \Delta_{340} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação contínua. Os vértices de Δ_{340} tem uma coloração de 6 cores, onde toda cor tem cardinalidade no máximo 59.

Note que a desigualdade $m((q+1)r_1 - 1) \geq (d+m+1)(r-1) + 1$ é satisfeita e toda cor tem cardinalidade máxima $59 = (q+1)r_1 - 1$.

Assim, tomando $s = 1$ em [2], existem $q_s = 7$ conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,5}\}_{j=1}^7$ que juntos possuem $35 = r_1 \cdot q_1 = 5 \cdot 7$ faces 11-coloridas, duas a duas disjuntas, tais que:

$$f(\sigma_{j,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{j,5}) \neq \emptyset, \text{ para todo } j \in [7].$$

Por outro lado, tomando $s = 2$ em [2], existem $q_s = 5$ conjuntos $\{\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,7}\}_{j=1}^5$ que juntos possuem $35 = r_2 \cdot q_2 = 7 \cdot 5$ faces 11-coloridas, duas a duas disjuntas, tais que:

$$f(\sigma_{j,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{j,7}) \neq \emptyset, \text{ para todo } j \in [5].$$

4.2 Novos teoremas para partições j -disjuntas

Nesta seção, provaremos dois novos resultados, o Teorema Topológico de Tverberg para todo r e partições j -disjuntas (Teorema 4.2.6) e o Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r e partições j -disjuntas (Teorema 4.2.8). Esses teoremas são versões onde temos uma flexibilização da hipótese das r faces serem duas a duas disjuntas, permitindo que elas sejam j -disjuntas, como definiremos a seguir.

Definição 4.2.1 (*Faces j -disjuntas*). Sejam $N \geq 1$, $r \geq 2$ e $2 \leq j \leq r$ inteiros. Dizemos que r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N são j -disjuntas se para quaisquer j faces de $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ a interseção destas é vazia. Em outras palavras, elas são j -disjuntas se $\sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_j} = \emptyset$, para todo $\{i_1, \dots, i_j\} \subset [r]$ e $|\{i_1, \dots, i_j\}| = j$.

Observação 4.2.2. Para $j = 2$, as r faces são duas a duas disjuntas, como nos teoremas anteriores.

Exemplo 4.2.3. Seja $N = 15$, $r = 4$ e identifique $V(\Delta_N) = [16]$. As 4 faces $\sigma_1 = \{1, 2\}$, $\sigma_2 = \{5, 6, 7, 8\}$, $\sigma_3 = \{1, 2, 9\}$ e $\sigma_4 = \{5, 7, 10, 16\}$ são j -disjuntas para $j = 3$, mas não são j -disjuntas para $j = 2$, o que mostra que a condição de faces j -disjuntas para $j > 2$ é uma flexibilização nas condições sobre as faces nos Teoremas do tipo Tverberg e tipo Van Kampen-Flores.

Inicialmente vamos enunciar o Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r , o qual, assim como o Teorema Topológico de Tverberg para todo r , é um teorema de (MATTOS; SANTOS; SOUZA, 2017) e será utilizado nas demonstrações dos novos resultados desta seção.

Teorema 4.2.4 (*Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r*). (MATTOS; SANTOS; SOUZA, 2017)

Sejam $d \geq 1$, $l \geq 1$ inteiros e $r \geq 2$ inteiro com fatoração prima:

$$r = r_1 \cdot \dots \cdot r_k, \text{ onde } r_i = p_i^{n_i}, i \in [k].$$

Defina $q_i = r/r_i$, para todo $i \in [k]$.

Seja $i \in [k]$ tal que $l \geq \lceil \frac{r-1}{r_i} d \rceil$, então para toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (r-1)(d+2)$, existem q_i conjuntos $\{\sigma_{s,1}, \dots, \sigma_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$, que juntos possuem $r = r_i \cdot q_i$ faces duas a duas disjuntas de Δ_N , com dimensão no máximo l , isto é, pertencem ao l -esqueleto $\Delta_N^{\leq l}$, tais que:

$$f(\sigma_{s,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

Observação 4.2.5. Note que se adicionarmos como hipótese no Teorema 4.2.4 que $r_1 < \dots < r_k$ e $l \geq \lceil \frac{r-1}{r_k} d \rceil$, então para todo $i \in [k]$ existem q_i conjuntos $\{\sigma_{s,1}, \dots, \sigma_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$, que juntos possuem $r = r_i \cdot q_i$ faces duas a duas disjuntas de Δ_N , com dimensão no máximo l , isto é, pertencem ao l -esqueleto $\Delta_N^{\leq l}$, tais que:

$$f(\sigma_{s,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

A seguir, introduzimos os principais teoremas desta seção, os quais tem como motivação resultados do artigo (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014) (Theorem 6.4 e Theorem 7.1) que valem para o caso $r = p^n$ potência de primo. No nosso caso, estas versões são válidas para todo inteiro r .

Teorema 4.2.6 (Teorema Topológico de Tverberg para todo r e partições j -disjuntas). Sejam $r \geq 2$, $l \geq 1$, $d \geq 1$ e $2 \leq j \leq r$ inteiros, onde r possui a fatoração prima:

$$r = r_1 \cdot \dots \cdot r_k, \text{ onde } r_i = p_i^{n_i}, i \in [k].$$

Defina $q_i = r/r_i$, para todo $i \in [k]$.

Suponhamos que $N+1 > \frac{r-1}{j-1}(d+1)$. Então, para todo $i \in [k]$ e toda aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem q_i conjuntos $\{\sigma_{s,1}, \dots, \sigma_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$, que juntos possuem $r = r_i \cdot q_i$ faces j -disjuntas tais que:

$$f(\sigma_{s,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

Demonstração. Defina $N' = (N+1)(j-1) - 1$ e note que $\Delta_{N'} \cong \Delta_N^{*(j-1)}$.

Defina a projeção afim:

$$\begin{aligned} p : \Delta_{N'} \cong \Delta_N^{*(j-1)} &\longrightarrow \Delta_N \\ \emptyset \uplus \dots \uplus \emptyset \uplus \{v\} \uplus \emptyset \uplus \dots \uplus \emptyset &\longmapsto \{v\}. \end{aligned}$$

Isto é, p leva as $(j-1)$ -cópias de $v \in \Delta_N$ em $v \in \Delta_N$.

Assim, podemos definir $f' = f \circ p : \Delta_{N'} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Como $N+1 > \frac{r-1}{j-1}(d+1)$, então:

$$(N+1)(j-1) > (r-1)(d+1) \Rightarrow N' \geq (r-1)(d+1).$$

Então, podemos aplicar o Teorema Topológico de Tverberg para todo r (Teorema 4.1.11) e temos que existem q_i conjuntos $\{\sigma'_{s,1}, \dots, \sigma'_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$, que juntos possuem $r = r_i \cdot q_i$ faces duas a duas disjuntas de Δ_N tais que:

$$f'(\sigma'_{s,1}) \cap \dots \cap f'(\sigma'_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i]. \quad (4.1)$$

Pela definição de f' , (4.1) é equivalente a dizer que:

$$f(p(\sigma'_{s,1})) \cap \cdots \cap f(p(\sigma'_{s,r_i})) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

Defina $\sigma_{s,t} = p(\sigma'_{s,t})$, para todo $s \in [q_i]$ e $t \in [r_i]$.

Como as $r = r_i \cdot q_i$ faces $\{\sigma'_{s,1}, \dots, \sigma'_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$ são duas a duas disjuntas, segue que $\{\sigma_{s,1} = p(\sigma'_{s,1}), \dots, \sigma_{s,r_i} = p(\sigma'_{s,r_i})\}_{s=1}^{q_i}$ são j -disjuntas e

$$f(\sigma_{s,1}) \cap \cdots \cap f(\sigma_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

□

Observação 4.2.7. O caso $r = p^n$ potência de primo é equivalente ao Thorem 7.1 de (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014).

Teorema 4.2.8 (Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r e partições j -disjuntas).
Sejam $d \geq 1$, $2 \leq j \leq r$, $N = (r-1)(d+2)$, $l \leq N$ inteiros e $r \geq 2$ inteiro com fatoração prima:

$$r = r_1 \cdot \cdots \cdot r_k, \text{ onde } r_i = p_i^{n_i}, i \in [k].$$

Defina $q_i = r/r_i$, para todo $i \in [k]$.

Seja $i \in [k]$ tal que $l \geq \lceil \frac{r-1}{r_i} d \rceil$ e suponhamos que $N+1 > \frac{r-1}{j-1}(d+2)$. Então, para toda aplicação contínua $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem q_i conjuntos $\{\sigma_{s,1}, \dots, \sigma_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$, que juntos possuem $r = r_i \cdot q_i$ faces j -disjuntas de Δ_N , com dimensão no máximo l , isto é, pertencem ao l -esqueleto $\Delta_N^{\leq l}$, tais que:

$$f(\sigma_{s,1}) \cap \cdots \cap f(\sigma_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

Demonstração. Defina $N' = (N+1)(j-1) - 1$ e note que $\Delta_{N'} \cong \Delta_N^{*(j-1)}$.

Defina a projeção afim:

$$\begin{aligned} p: \Delta_{N'} \cong \Delta_N^{*(j-1)} &\longrightarrow \Delta_N \\ \emptyset \uplus \cdots \uplus \emptyset \uplus \{v\} \uplus \emptyset \uplus \cdots \uplus \emptyset &\longmapsto \{v\}. \end{aligned}$$

Isto é, p leva as $(j-1)$ -cópias de $v \in \Delta_N$ em $v \in \Delta_N$.

Assim, podemos definir $f' = f \circ p: \Delta_{N'} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Como $N+1 > \frac{r-1}{j-1}(d+2)$, então:

$$(N+1)(j-1) > (r-1)(d+2) \Rightarrow N' \geq (r-1)(d+2).$$

Logo, podemos aplicar o Teorema de Van Kampen-Flores generalizado para todo r (Teorema 4.2.4) e temos que existem q_i conjuntos $\{\sigma'_{s,1}, \dots, \sigma'_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$, que juntos possuem $r = r_i \cdot q_i$ faces duas a duas disjuntas de Δ_N , com dimensão no máximo l , isto é, pertencem ao l -esqueleto $\Delta_N^{\leq l}$ tais que:

$$f'(\sigma'_{s,1}) \cap \dots \cap f'(\sigma'_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i]. \quad (4.2)$$

Pela definição de f' , (4.2) é equivalente a dizer que:

$$f(p(\sigma'_{s,1})) \cap \dots \cap f(p(\sigma'_{s,r_i})) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

Defina $\sigma_{s,t} = p(\sigma'_{s,t})$, para todo $s \in [q_i]$ e $t \in [r_i]$.

Como as $r = r_i \cdot q_i$ faces $\{\sigma'_{s,1}, \dots, \sigma'_{s,r_i}\}_{s=1}^{q_i}$ são duas a duas disjuntas, segue que $\{\sigma_{s,1} = p(\sigma'_{s,1}), \dots, \sigma_{s,r_i} = p(\sigma'_{s,r_i})\}_{s=1}^{q_i}$ são j -disjuntas. Também, como $\sigma_{s,t} = p(\sigma'_{s,t})$, segue que $\dim \sigma_{s,t} \leq \dim(p(\sigma'_{s,t})) \leq l$ e são tais que:

$$f(\sigma_{s,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{s,r_i}) \neq \emptyset, \text{ para todo } s \in [q_i].$$

□

Observação 4.2.9. O caso $r = p^n$ potência de primo é equivalente ao Thorem 6.4 de (BLAGOJEVIĆ; FRICK; ZIEGLER, 2014).

Observação 4.2.10. Note que a flexibilização das r faces serem j -disjuntas no Teoremas 4.2.6 e 4.2.8 permite uma flexibilização do número de vértices $N + 1$ do simplexo Δ_N em relação ao Teoremas 4.1.11 e 4.2.4. Os exemplos a seguir ilustram esta observação.

Exemplo 4.2.11. Considere $d = 2$, $r = 6$, $j = 3$ e $N = 7$ para o Teorema 4.2.6. Podemos aplicar o teorema para estes parâmetros, pois a desigualdade $N + 1 > \frac{r-1}{j-1}(d + 1)$ segue. Note que no Teorema 4.1.11 para $j = 2$ (faces duas a duas disjuntas) temos $N = (r - 1)(d + 1) = 15$, então flexibilizando o teorema para faces 3-disjuntas podemos ter $N = 7$, o que é uma redução considerável de vértices do simplexo Δ_N .

Exemplo 4.2.12. Considere $d = 2$, $r = 6 = 2 \cdot 3 = r_1 \cdot r_2$, $j = 3$, $l = 5$ e $N = 10$ para o Teorema 4.2.6. Podemos aplicar o teorema para estes parâmetros, pois seguem as desigualdades $N + 1 > \frac{r-1}{j-1}(d + 2)$ e $l \geq \lceil \frac{r-1}{r_i} d \rceil$, para todo $i \in [2]$. Note que no Teorema 4.1.13 para $j = 2$ (faces duas a duas disjuntas) temos $N = (r - 1)(d + 2) = 20$, então flexibilizando o teorema para faces 3-disjuntas podemos ter $N = 10$, o que é uma redução considerável de vértices do simplexo Δ_N .

TEOREMA DE TVERBERG COLORIDO PARA NÃO POTÊNCIAS DE PRIMO

Neste capítulo provaremos um novo Teorema do tipo Tverberg colorido, onde a partição de Tverberg colorida terá q faces, onde $q = p^n - 1$ (para algum primo p) não é potência de primo. A formulação deste teorema tem origem a partir de modificações do Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12).

O novo resultado do capítulo é o Teorema 5.1.6, que tem como consequência o Corolário 5.1.7, que afirma que é suficiente a cardinalidade mínima $2p^n - 4$ nas $(d + 1)$ cores no Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica (Teorema 3.1.12) para se ter uma partição de Tverberg colorida de $q = p^n - 1$ faces. Note que para haver uma partição de Tverberg colorida de p^n faces, o resultado que minimiza as cardinalidades é o Teorema 3.2.1, onde pelo menos uma das cores deve ter cardinalidade $2p^n - 1$.

Os resultados deste capítulo encontram-se em (MAURI *et al.*, 2022).

5.1 Teorema de Tverberg colorido com $p^n - 1$ faces

Para se demonstrar o Teorema 5.1.6, precisamos introduzir a definição de conjunto de coincidência parcial de f e demonstrar dois lemas (Lema 5.1.2 e 5.1.3), os quais serão fundamentais. Usaremos novamente o índice de Volovikov de X , denotado por $i(X)$ (ver Definição 5.1.1).

Definição 5.1.1. (VOLOVIKOV, 2000) Seja X um G -espaço, onde G é um grupo finito, e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Para $2 \leq y \leq |G|$, definimos o *conjunto de coincidência parcial de f* por:

$$A(f, y) = \{x \in X ; f(g_1x) = \dots = f(g_yx) \text{ para elementos distintos } g_i \in G, i = 1, \dots, y\}.$$

Lema 5.1.2. (MAURI *et al.*, 2022) Sejam $r = p^n \geq 2$ potência de primo e $d \geq 1$, $1 \leq k \leq d$, $2 \leq q \leq r$ inteiros. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{k+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por $(k+1)$ cores, defina a aplicação contínua:

$$h : (R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(x_1, \dots, x_{p^n}) \mapsto f(x_1).$$

Se $A(h, q) \neq \emptyset$, então existem q faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ de Δ tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Tome $(x_1, \dots, x_{p^n}) \in A(h, q) \neq \emptyset$.

Então existem q elementos distintos $g_1, \dots, g_q \in (\mathbb{Z}_p)^n$ tais que

$$h(g_1(x_1, \dots, x_{p^n})) = \dots = h(g_q(x_1, \dots, x_{p^n})).$$

Portanto, existem q elementos $x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \in \{x_1, \dots, x_{p^n}\}$ tais que $f(x_{i_1}) = \dots = f(x_{i_q})$, onde $x_{i_1} \in \sigma_{i_1}, \dots, x_{i_q} \in \sigma_{i_q}$ ($\sigma_{i_m} = \text{supp}(x_{i_m})$ é o suporte de x_{i_m} , para todo $m \in [q]$).

Pela definição do produto deletado $(R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n}$, existem q faces coloridas não-vazias duas a duas disjuntas $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_q}$ tais que:

$$f(\sigma_{i_1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{i_q}) \neq \emptyset.$$

□

Lema 5.1.3. (MAURI *et al.*, 2022) Sejam $d \geq 1$, $1 \leq k \leq d$, $0 \leq m \leq k+1$ inteiros e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Seja (C_1, \dots, C_{k+1}) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por $(k+1)$ cores, onde $|C_i| \geq 2r-1$, para todo $i = 1, \dots, m$, $|C_i| \geq 2r-4$, para todo $i = m+1, \dots, k+1$ e $m \geq (d-k)(r-1)$. Então, temos a seguinte desigualdade sobre o índice de Volovikov de $(R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n}$:

$$i\left((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n}\right) \geq d(p^n - 1).$$

Demonstração. Note que

$$(R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*p^n} = A \cup B,$$

onde

$$A = \left\{ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p^n} x_{p^n} \in (R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*p^n} \mid (\exists i \in [p^n]) \lambda_i \neq \frac{1}{p^n} \right\}$$

$$B = \left\{ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p^n} x_{p^n} \in (R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*p^n} \mid \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p^n} = \frac{1}{p^n} \right\}.$$

Note que B é isomorfo a $(R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n}$. Segue da Proposição 2.5.2 (v) que:

$$i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*p^n}) \leq i'(A) + i(B) = i'(A) + i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n}). \quad (5.1)$$

Vamos calcular limitantes para os índices $i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*p^n})$ e $i'(A)$.

Pelo isomorfismo

$$(R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \cong \Delta_{|C_1|, r} * \cdots * \Delta_{|C_m|, r} * \Delta_{|C_{m+1}|, r} * \cdots * \Delta_{|C_{k+1}|, r}.$$

obtemos, como consequência dos Teoremas 2.6.7 e 2.6.11,

$$\text{conn}((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*r}) \geq m(r-2) + (k+1-m)(r-3) + 2k.$$

Segue do Teorema 2.6.9 que o índice de Volovikov satisfaz:

$$\begin{aligned} i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*r}) &\geq [m(r-2) + (k+1-m)(r-3) + 2k] + 2 \\ &= (k+1)(r-1) + m. \end{aligned}$$

Como $m \geq (d-k)(r-1)$, temos:

$$i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{*r}) \geq (d+1)(r-1).$$

Para encontrar um limitante para o índice $i'(A)$, vamos considerar as seguintes aplicações $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariantes

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \mathbb{R}^{p^n} \setminus \Delta(\mathbb{R}^{p^n}). \\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p^n} x_{p^n} &\longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{p^n}) \end{aligned}$$

e

$$\Pi : \mathbb{R}^{p^n} \setminus \Delta(\mathbb{R}^{p^n}) \rightarrow (\Delta(\mathbb{R}^{p^n}))^\perp \setminus \{0\} \rightarrow S((\Delta(\mathbb{R}^{p^n}))^\perp),$$

onde Π é a composição de uma projecção com um retrato por deformação.

Denotamos por $\Delta(\mathbb{R}^{p^n}) = \{(x_1, \dots, x_{p^n}) \in \mathbb{R}^{p^n} \mid x_1 = \dots = x_{p^n}\}$ o subespaço diagonal de \mathbb{R}^{p^n} .

Então, a composição:

$$\Pi \circ \phi : A \longrightarrow S((\Delta(\mathbb{R}^{p^n}))^\perp) \cong S^{p^n-2}$$

é uma aplicação $(\mathbb{Z}_p)^n$ -equivariante.

Pela Proposição 2.5.2 (i) e (iv), temos que:

$$i'(A) \leq i'(S^{p^n-2}) = p^n - 1.$$

Logo, segue que $i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})})_{\Delta(2)}^{\times p^n}) \geq d(p^n - 1)$, pois caso contrário teríamos uma contradição com (5.1). □

O Teorema a seguir é um resultado sobre o índice de Volovikov que será utilizado na demonstração do Teorema 5.1.6.

Teorema 5.1.4. (VOLOVIKOV, 2000, Theorem 4) Seja X um G -espaço conexo, onde $G = (\mathbb{Z}_p)^n$ é um p -toro, e $2 \leq y \leq p^n$, $y \neq 3$. Se a desigualdade $i(X) \geq (m-1)(p^n - 1) + y$ é válida, então $A(f, y) \neq \emptyset$ para toda aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Observação 5.1.5. O Teorema 5.1.4 também segue quando $y = 3$ e $r = 3, 4, 5$ (ver (VOLOVIKOV, 2000)).

Teorema 5.1.6. (MAURI *et al.*, 2022) Sejam $d \geq 1$, $1 \leq k \leq d$, $0 \leq m \leq k+1$ inteiros e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e toda coloração (C_1, \dots, C_{k+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por $(k+1)$ cores, onde $|C_i| \geq 2r - 1$, para todo $i = 1, \dots, m$, $|C_i| \geq 2r - 4$, para todo $i = m+1, \dots, k+1$ e $m \geq (d-k)(r-1)$, existem $q = r - 1 = p^n - 1$ faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Segue do Lema 5.1.2 que se $A(h, q)$ é não-vazio, então existem q faces coloridas não-vazias duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset.$$

Portanto, basta mostrar que $A(h, q) \neq \emptyset$.

Por outro lado, isto é uma consequência imediata do Teorema 5.1.4, aplicado ao G -espaço $X = (R_{(C_1, \dots, C_{k+1})}_{\Delta(2)})^{\times p^n}$ e à aplicação contínua $h : (R_{(C_1, \dots, C_{k+1})}_{\Delta(2)})^{\times p^n} \rightarrow \mathbb{R}^d$ (como no Lema 5.1.2), onde $y = q$. De fato, $(R_{(C_1, \dots, C_{k+1})}_{\Delta(2)})^{\times p^n}$ é conexo e $i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})}_{\Delta(2)})^{\times p^n}) \geq d(p^n - 1) = (m - 1)(p^n - 1) + y$ (pelo Lema 5.1.3). Assim, esta última observação completa a prova do teorema. \square

Corolário 5.1.7. Sejam $d \geq 1$ inteiro e $r = p^n \geq 2$ potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices $V(\Delta)$ por $(d + 1)$ cores, onde cada cor tem cardinalidade pelo menos $2r - 4$, existem $q = r - 1 = p^n - 1$ faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ tais que:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 5.1.6 para o caso $k = d$ e $m = 0$. \square

Observação 5.1.8. Note que se $m > (d - k)(r - 1)$, então

$$i((R_{(C_1, \dots, C_{k+1})}_{\Delta(2)})^{*r}) \geq (d + 1)(r - 1) + 1,$$

e, aplicando as mesmas técnicas do Capítulo 3, temos $r = q + 1$ faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tais que $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$. Isto significa que os casos mais interessantes do Teorema 5.1.6 acontecem quando $m = (d - k)(r - 1)$.

A seguir um exemplo do Teorema 5.1.6.

Exemplo 5.1.9. Sejam $r = 7$, $d = 8$, $k = 7$ e $m = 6$. Então, temos $k + 1 = 8$ cores C_1, \dots, C_8 , onde $|C_i| \geq 2r - 1 = 13$, para $i = 1, \dots, 6$ e $|C_7|, |C_8| \geq 2r - 4 = 10$. Note que a condição $m \geq (d - k)(r - 1)$ segue (mais especificamente temos uma igualdade). Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^8$ aplicação contínua. Então, existem $q = r - 1 = 6$ faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ e σ_6 tais que:

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap f(\sigma_3) \cap f(\sigma_4) \cap f(\sigma_5) \cap f(\sigma_6) \neq \emptyset$$

O exemplo a seguir ilustra o Corolário 5.1.7.

Exemplo 5.1.10. Sejam $d = 2$, $r = 7$ e (C_1, C_2, C_3) uma coloração do conjunto de vértices $V(\Delta)$, onde $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 2r - 4 = 10$. Seja $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua. Então, pelo Corolário 5.1.7, existem 6 faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ e σ_6 tais que:

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap f(\sigma_3) \cap f(\sigma_4) \cap f(\sigma_5) \cap f(\sigma_6) \neq \emptyset.$$

Note que pelo Teorema 3.2.1 precisaríamos de pelo menos uma das cores com cardinalidade mínima $2r - 1 = 13$ para se ter uma partição de Tverberg colorida de 7 faces. Porém, para se ter uma partição de Tverberg colorida de 6 faces (exatamente uma a menos), o Corolário 5.1.7 nos permite ter cardinalidade $2r - 4 = 10$ em todas as $(d + 1) = 3$ cores.

-
-
- k -esqueleto, 31
 - k -simplexo, 28
 - n -join, 32
 - n -conexidade, 42
 - p -simplexo padrão, 28
 - “constraint method”, 72
 - join, 32
 - join de aplicações contínuas $f * g$, 34
 - join deletado, 35

 - aplicação G -equivariante, 41

 - classes de cores, 47
 - coloração, 47
 - complexo *chessboard* $\Delta_{m,n}$, 41
 - complexo simplicial, 29
 - Conjectura Topológica de Tverberg, 46
 - conjunto convexo, 28
 - conjunto de coincidência parcial de f , 83
 - construção de Borel, 36
 - convergência de uma sequência espectral, 40

 - dimensão de k -simplexo, 28
 - dimensão de um complexo simplicial, 30

 - esfera unitária $S(V)$, 50
 - espaço de Borel, 37

 - face q -colorida, 73
 - face colorida, 47
 - face de um simplexo, 28
 - faces j -disjuntas, 79
 - fecho convexo de um conjunto, 28
 - fibração, 37
 - fibração de Borel, 37
 - filtração decrescente, 39

 - geometricamente independentes, 27
 - grupo simétrico \mathfrak{S}_n , 35

 - interior relativo de um simplexo, 29

 - mapa *join*, 48
 - mapa produto, 48
 - módulo de cohomologia, 38
 - módulo de homologia, 38
 - módulo diferencial bigraduado, 38

 - Partição de Tverberg, 46
 - Partição de Tverberg q -colorida, 73
 - Partição de Tverberg colorida, 48
 - poliedro de um complexo simplicial, 31
 - produto deletado, 35
 - Propriedade de Levantamento de Homotopia (PLH), 37

 - sequência espectral cohomológica de Leray-Serre, 40
 - sequência espectral colapsa no N -ésimo termo, 39
 - sequência espectral do primeiro quadrante, 40
 - sequência espectral do tipo cohomológica, 38
 - sequência espectral do tipo homológica, 38
 - simplesmente conexo, 42
 - subcomplexo colorido $R_{(C_1, \dots, C_l)}$, 47
 - subcomplexo simplicial, 31
 - subespaço G -invariante, 41
 - subespaços diagonais, 49
 - suporte de x , 31

 - Teorema de Radon, 45

Teorema de Radon Afim, 45	generalizado para todo r , 79
Teorema de Tverberg, 46	Teorema Topológico de Radon, 46
Teorema de Tverberg colorido de Živaljević e Vrećica, 47	Teorema Topológico de Tverberg, 46
Teorema de Van Kampen-Flores, 71	Teorema Topológico de Tverberg para todo r , 75
Teorema de Van Kampen-Flores colorido, 73	vértices, 28
Teorema de Van Kampen-Flores generalizado, 72	vértices de um complexo simplicial, 30
Teorema de Van Kampen-Flores	índice $i'(X)$, 41
	índice de Volovikov, 40

REFERÊNCIAS

- BAJMÓCZY, E. G.; BÁRÁNY, I. On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem. **Acta Mathematica Hungarica**, v. 34, n. 3-4, p. 347–350, 1979. Citado nas páginas [21](#) e [46](#).
- BÁRÁNY, I.; SHLOSMAN, S. B.; SZÜCS, A. On a topological generalization of a theorem of Tverberg. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 2, n. 1, p. 158–164, 1981. Citado nas páginas [22](#), [46](#) e [53](#).
- BLAGOJEVIĆ, P. V.; FRICK, F.; ZIEGLER, G. M. Tverberg plus constraints. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 46, n. 5, p. 953–967, 2014. Citado nas páginas [24](#), [25](#), [72](#), [73](#), [76](#), [80](#), [81](#) e [82](#).
- _____. Barycenters of polytope skeleta and counterexamples to the topological Tverberg conjecture, via constraints. **Journal of the European Mathematical Society**, v. 21, n. 7, p. 2107–2116, 2019. Citado nas páginas [22](#) e [47](#).
- BLAGOJEVIĆ, P. V.; ZIEGLER, G. M. Beyond the Borsuk–Ulam theorem: the topological Tverberg story. In: **A journey through discrete mathematics**. [S.l.]: Springer, 2017. p. 273–341. Citado nas páginas [32](#), [41](#), [42](#) e [48](#).
- BOREL, A. Seminar on transformation groups. In: . [S.l.]: Princeton University Press, 1960. Citado na página [36](#).
- DIECK, Transformation groups. **Walter de Gruyter Stud. Math**, v. 8, 1987. Citado na página [36](#).
- FLORES, A. Über n -dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind. In: **Ergebnisse eines Math. Kolloquiums**. [S.l.: s.n.], 1933. p. 4–7. Citado na página [72](#).
- KAMPEN, E. R. V. Komplexe in euklidischen Räumen. In: SPRINGER-VERLAG. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**. [S.l.]. Citado na página [72](#).
- MATOUSEK, J. **Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. Citado nas páginas [27](#), [30](#), [31](#), [32](#), [33](#), [34](#), [35](#), [41](#) e [42](#).
- MATTOS, D. de; SANTOS, E. L. dos; SOUZA, T. O. (H, G) -coincidence theorems for manifolds and a topological Tverberg type theorem for any natural number r . **Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin**, The Belgian Mathematical Society, v. 24, n. 4, p. 567–579, 2017. Citado nas páginas [25](#), [75](#) e [79](#).
- MAURI, L.; PONCIO, C.; SANTOS, E.; MATTOS, D. de. Some results about colored Tverberg theorem. **arXiv preprint arXiv:2210.09101**, 2022. Citado nas páginas [25](#), [54](#) e [55](#).
- MAURI, L. V.; MATTOS, D. de; SANTOS, E. L. d. Colored Tverberg theorem with new constraints on the faces. **arXiv preprint arXiv:2210.07804**, 2022. Citado nas páginas [25](#), [57](#), [60](#), [62](#), [63](#), [64](#), [65](#) e [67](#).

- MAURI, L. V.; ŽIVALJEVIĆ, R. T.; MATTOS, D. de; SANTOS, E. L. d. Colored tverberg Theorems for non-prime powers. **arXiv preprint arXiv:2211.02078**, 2022. Citado nas páginas 26, 83, 84 e 86.
- MCCLEARY, J. **A user's guide to spectral sequences**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. Citado nas páginas 38 e 40.
- MILNOR, J. Construction of universal bundles,II. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 430–436, 1956. Citado na página 36.
- OZAYDIN, M. Equivariant maps for the symmetric group. available online at <https://minds.wisconsin.edu/bitstream/handle/1793/63829/Ozaydin.pdf>, 1987. Citado nas páginas 22 e 46.
- PONCIO, C. H. F. Sobre teoremas do tipo Tverberg. Universidade Federal de São Carlos, 2020. Citado nas páginas 25 e 54.
- RADON, J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 83, n. 1, p. 113–115, 1921. Citado na página 45.
- SARKARIA, K. S. A generalized Van Kampen-Flores theorem. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 111, n. 2, p. 559–565, 1991. Citado nas páginas 24 e 72.
- TVERBERG, H. A generalization of Radon's theorem. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford Academic, v. 1, n. 1, p. 123–128, 1966. Citado na página 46.
- VOLOVIKOV, A. Y. On the Van Kampen-Flores theorem. **Mathematical Notes**, Springer, v. 59, n. 5, p. 477–481, 1996. Citado nas páginas 22, 24, 46 e 72.
- _____. On the index of G -spaces. **Sbornik: Mathematics**, IOP Publishing, v. 191, n. 9, p. 1259, 2000. Citado nas páginas 40, 83 e 86.
- ŽIVALJEVIĆ, R. T.; VREĆICA, S. T. The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions. **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, Elsevier, v. 61, n. 2, p. 309–318, 1992. Citado nas páginas 23 e 47.

