

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Fibrados vetoriais, operações e classes de Stiefel-Whitney

Ana Lucília Chaves de Toledo

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Ana Lucília Chaves de Toledo

Fibrados vetoriais, operações e classes de Stiefel-Whitney

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

USP – São Carlos
Abril de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C512f Chaves de Toledo, Ana Lucília
Fibrados vetoriais, operações e classes de
Stiefel-Whitney / Ana Lucília Chaves de Toledo;
orientador Nivaldo de Góes Grulha Júnior. -- São
Carlos, 2021.
100 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Classes característica. 2. Classes de Stiefel-
Whitney. 3. Fibrados vetoriais. I. Grulha Júnior,
Nivaldo de Góes, orient. II. Título.

Ana Lucília Chaves de Toledo

Vector Bundles, operations and Stiefel-Whitney classes

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

USP – São Carlos
April 2021

Dedico essa dissertação a todos os não-mestre e não-doutores, os quais tiveram a coragem de desistir. Àqueles que apesar da notória capacidade de produzir qualquer trabalho acadêmico, descobrindo-se infelizes, abdicaram do título para cuidar de suas saúdes mentais e buscar a alegria em novos projetos. Que essa dedicatória seja um lembrete de que se você não quer continuar, está tudo bem. Há muita força em desistir, procure apoio.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus e depois ao espiritismo que permitiu minha aproximação com Ele. Assim, estendo meu agradecimento aos grupos de mocidade de São Carlos e as diversas casas espíritas que me acolheram, em especial ao Grupo Kardecista Cairbar Schutel e seu amado ex-presidente Nelson Serafim Lourenço.

Agradeço aos meus pais, Jacqueline Ivone Chaves e Luiz Ageo Ribeiro de Toledo, pelo apoio incondicional, emocional e financeiro durante todos os anos de graduação e mestrado. Estendo meus agradecimentos a minhas irmãs, Lilian Carolina Pinheiro de Toledo e Liliane Cristina Pinheiro de Toledo, à minha madrasta Ana Maria Nascimento Silva, assim como as minhas queridas tias e primas de Ponta Grossa - PR, amo vocês.

Não posso deixar de agradecer imensamente ao meu orientador, Nivaldo de Góes Grulha Júnior, assim como a sua linda família pela parceria em todos os momentos. Estendo meus sinceros agradecimentos aos amados amigos, de graduação e do grupo de Singularidades. Principalmente, Felipe de Moura Ferreira, Edivania Barreto, Luciano Renato Rocha, Amanda Figur, Amanda Monteiro, Raphael Omena, Castelo Branco e Rejiane Aparecida Calixto.

Agradeço também a minha maravilhosa psicóloga Cássia Regina Rodrigues.

Por fim, agradeço a todos os meus professores, as maravilhosas fadas das secretarias de graduação e pós-graduação, funcionárias da biblioteca, segurança e limpeza do nosso belo ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

TOLEDO, C. A. **Fibrados vetoriais, operações e classes de Stiefel-Whitney**. 2021. 108 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Nesta dissertação apresentamos um estudo sistemático sobre fibrados vetoriais, operações entre fibrados e classes características de Stiefel-Whitney, via definição axiomática. Assumimos a existência e a unicidade destas classes para abordar importantes resultados neste trabalho, como o Teorema da Dualidade de Whitney, o qual relaciona as classes de Stiefel-Whitney do fibrado tangente com as do fibrado normal, e o Teorema de Stiefel, que nos permite concluir quando um espaço projetivo real é paralelizável. Como aplicações significativas desta teoria, estudamos problemas relacionados a imersões de variedades e variedades cobordantes.

Palavras-chave: Classes característica, Classes de Stiefel-Whitney, Fibrados vetoriais.

ABSTRACT

TOLEDO, C. A. **Vector Bundles, operations and Stiefel-Whitney classes**. 2021. 108 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In this dissertation, we present a systematic study on vector bundles, operations between bundles, and characteristic classes of Stiefel-Whitney, via axiomatic definition. We assume the existence and uniqueness of these classes to address meaningful results in this work, such as Whitney's Duality Theorem, which relates the Stiefel-Whitney classes of the tangent bundle to those of the normal bundle, and the Stiefel Theorem, which allows us to conclude when a real projective space is parallelizable. As significant applications of this theory, we studied problems related to the immersion of manifolds and cobordant manifolds.

Keywords: Characteristic classes, Stiefel-Whitney classes, Vector bundles.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1 PRELIMINARES	17
1.1 Topologia Diferencial	17
1.1.1 <i>Variedades Suaves</i>	18
1.1.1.1 <i>Espaço Tangente</i>	19
1.1.1.2 <i>Orientação</i>	20
1.1.2 <i>Campo Vetorial</i>	21
1.1.3 <i>Variedade de Grassmann</i>	22
1.1.4 <i>Teoria da Interseção Módulo 2</i>	24
1.1.5 <i>O Teorema de Poincaré-Hopf</i>	28
1.2 Topologia Algébrica	30
1.2.1 <i>Homotopia</i>	31
1.2.2 <i>Homologia</i>	31
1.2.3 <i>Cohomologia</i>	36
1.2.3.1 <i>Axiomas para cohomologia</i>	38
1.2.3.2 <i>Produto Cup</i>	39
2 FIBRADOS VETORIAIS	41
2.0.1 <i>Definições básicas</i>	41
2.0.2 <i>Alguns exemplos importantes</i>	43
2.0.2.1 <i>Fibrado tangente</i>	44
2.0.2.2 <i>Fibrado tangente da esfera</i>	44
2.0.2.3 <i>Fibrado de linhas tautológico</i>	45
2.0.2.4 <i>Fibrado tautológico de k-planos sobre $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$</i>	46
2.0.3 <i>Seções</i>	48
2.0.4 <i>Morfismos e B-morfismos entre fibrados vetoriais</i>	52
2.0.5 <i>Novos fibrados a partir de outros fibrados</i>	56
2.0.5.1 <i>Restrição</i>	56
2.0.5.2 <i>Produto</i>	57
2.0.5.3 <i>Soma de Whitney</i>	58
2.0.5.4 <i>Pullback</i>	61
2.0.5.5 <i>Subfibrados e mergulhos</i>	67

2.0.5.6	<i>Fibrados Vetoriais Euclidianos e Complementos Ortogonais</i>	71
2.0.5.7	<i>Fibrado Hom</i>	76
3	CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY	83
3.0.1	<i>Consequências dos quatro axiomas</i>	84
3.0.2	<i>Imersões</i>	94
3.0.3	<i>Números de Stiefel-Whitney</i>	98
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
	REFERÊNCIAS	105
APÊNDICE A	A ESTRUTURA DIFERENCIÁVEL DO ESPAÇO PROJATIVO REAL	107

INTRODUÇÃO

Em 1758, Euler observou que a soma alternada de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 é igual a 2. Poincaré, 1893, generalizou esse resultado para poliedros de dimensão n em \mathbb{R}^m e depois para variedades, definindo assim um invariante topológico conhecido como característica de Euler. Uma teoria, aparentemente desconexa deste estudo combinatório é o estudo de índices de singularidades de campos vetoriais. Através da definição de índice de um campo, o qual trata-se da soma das orientações na pré-imagem de uma singularidade do campo pela aplicação de Gauss, podemos compreender a surpreendente conexão entre essas duas teorias através do Teorema de Poincaré-Hopf, demonstrado para dimensão dois por Poincaré em 1885 e para todas as dimensões por Hopf em 1927:

Seja v um campo vetorial tangente sobre uma variedade orientada compacta M com finitas singularidades isoladas, digamos p_1, \dots, p_n . Então a soma dos índices das singularidades de v coincide com a característica de Euler de M .

O importante corolário deste teorema é um resultado de obstrução, a saber, a característica de Euler de uma variedade mede a obstrução para a construção de um campo vetorial contínuo sem singularidades.

A característica de Euler é o primeiro exemplo de classe característica, entretanto, este trabalho tem por objetivo final estudar outra classe característica, através da teoria de cohomologia, as chamadas classes de Stiefel-Whitney. Em 1935, Stiefel e Whitney definem, de forma independente, classes características para variedades suaves com objetivo de investigar a obstrução à construção de seções do fibrado tangente, o que é uma generalização do caso tratado por Poincaré-Hopf.

Podemos também relacionar a possibilidade de construção de n campos vetoriais linearmente independentes sobre uma variedade suave com a classificação de fibrados vetoriais triviais, por exemplo, mostraremos que:

Um n -fibrado vetorial é trivial se, e somente se, podem ser definidas n seções linearmente independentes sobre a base deste fibrado.

Assim, o estudo de fibrados vetoriais reais torna-se central nesse trabalho. Como comumente acontece nas diversas áreas da matemática, além definir uma estrutura e estudar seus objetos isoladamente, devemos procurar deformar e comparar objetos de mesma natureza, de forma que esse processo de deformação preserve informações suficientes. Por isso, também destacamos o estudo de morfismos entre fibrados vetoriais como essencial para estruturação

desse trabalho.

A divisão por capítulos é a seguinte:

No capítulo 1, apresentamos breves definições e resultados envolvendo variedades suaves e seus espaços tangentes. Como um exemplo não trivial de variedade, sugerimos as variedades Grassmann que serão utilizadas como base para os fibrados tautológico estudados no capítulo 2. O resultado principal nessa primeira etapa é o Teorema de Poincaré-Hopf. Na seção 1.2, introduzimos os pilares da topologia algébrica: teoria de homotopia, grupos de homologia e grupos de cohomologia, os quais serão fundamentais no estudo das Classes de Stiefel-Whitney.

Dedicamos o capítulo 2 aos estudos de fibrados vetoriais reais. Além de diversos exemplos, como o fibrado de linha tautológico e os fibrados tautológicos sobre as variedades de Grassmann, apresentamos de forma detalhada o estudo de operações entre fibrados e a construção de novos fibrados a partir de fibrados dados.

Enfim, no capítulo 3, apresentamos as classes de Stiefel-Whitney através de quatro axiomas. Assumimos a existência e unicidade de classes satisfazendo estes axiomas para o estudo de importantes consequências e aplicações. Como apresentado por Milnor e Stasheff em (MILNOR; STASHEFF, 1974), utilizamos as classes de Stiefel-Whitney para analisar problemas de imersões de variedades e também para o estudo de variedades cobordantes.

Por sua importância nas ilustrações deste trabalho, anexamos ao apêndice, um estudo da estrutura diferencial do espaço projetivo real.

PRELIMINARES

Neste capítulo recordamos resultados essenciais para o desenvolvimento do tema principal deste trabalho. As demonstrações serão, em sua maioria, apenas referenciadas. Assim, as demonstrações contidas neste capítulo aparecem por não se encontrarem na literatura ou por nos auxiliar em resultados posteriores.

A menos de menção contrária, a topologia produto, a topologia quociente e a topologia do subespaço sempre serão a escolha natural quando estivermos tratando do produto de espaços topológicos, do quociente de um espaço topológico por uma relação de equivalência ou de um subconjunto de um espaço topológico, respectivamente.

O n espaço vetorial real \mathbb{R}^n será considerado junto com a norma Euclidiana, denotada por $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Se U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m , dada uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, a derivada de f em $x \in U$ é igual ao limite

$$d_x f(v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x - tv) - f(x)}{t}.$$

1.1 Topologia Diferencial

A topologia diferencial é o campo da matemática que dedica-se ao estudo de propriedades invariantes por difeomorfismos. Aqui definimos os principais objetos de estudo desta área, as variedades suaves e seus espaços tangentes.

O resultado mais importante é o Teorema de Poincaré-Hopf, que nos permite interpretar geometricamente a característica de Euler, no caso de variedades suaves compactas e orientadas, em termos de obstrução à construção de um campo de vetores tangente sem singularidades.

Referências para este capítulo, são (MILNOR, 1997) e (LIMA, 2007).

1.1.1 Variedades Suaves

Definição 1. Uma aplicação entre abertos euclidianos é dita suave se todas as derivadas parciais de todas as suas funções coordenadas existem e são contínuas, para qualquer ordem. Mais geralmente, se temos X e Y subconjuntos quaisquer de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m respectivamente, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **suave** quando para todo $x \in X$ existem um aberto U de \mathbb{R}^n contendo x e uma aplicação $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ suave que coincide com f em $U \cap X$. Uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ é chamada **difeomorfismo** se f e f^{-1} são suaves.

Definição 2. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade suave** de dimensão m , ou uma m -variedade suave, se para todo $x \in M$ existe uma vizinhança aberta $V' \subset \mathbb{R}^n$ de x tal que $V := V' \cap M$ é difeomorfa a um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^m .

Chamaremos a terna (U, V, h) de **parametrização local**, onde $V \subset M$, $U \subset \mathbb{R}^m$ e $h : V \rightarrow U$ é um difeomorfismo, ao difeomorfismo inverso de h chamaremos de **sistema de coordenadas** de V , V será dita **vizinhança coordenada** de M . Uma coleção de difeomorfismos h tais que seus respectivos domínios cobrem todo o espaço M será denominado **atlas**.

Por simplicidade, muitas vezes nos permitimos dizer apenas variedade referindo-nos a uma variedade suave.

Exemplo 1. Pela projeção estereográfica, podemos verificar que a esfera n -dimensional

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$$

é um exemplo de n -variedade suave.

Exemplo 2. Outro exemplo de n -variedade suave é o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ de dimensão n , o qual é o quociente do espaço $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ munido com a seguinte relação de equivalência:

$$p \sim q \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } p = \lambda q.$$

Consideramos a topologia quociente em $\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$, a qual torna a projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ contínua.

Intuitivamente, cada ponto de $\mathbb{R}P^n$ é uma reta em \mathbb{R}^{n+1} que passa pela origem. Com essa definição, dado um ponto $[p] = [p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{R}P^n$, para algum índice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ temos que $p_i \neq 0$. Nesse caso, é fácil ver que existe um homeomorfismo entre \mathbb{R}^n e $U_i = \{[q] \in \mathbb{R}P^n; q_i \neq 0\}$, onde U_i é um aberto de $\mathbb{R}P^n$ contendo $[p]$.

Vale observar que podemos construir o mesmo espaço projetivo considerando a relação de equivalência na esfera que relaciona seus pontos antípodas, vide (LIMA, 2007).

Definição 3. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **m -variedade suave com bordo**, se para cada $x \in M$, existe uma vizinhança de x em M difeomorfa a um subconjunto aberto do espaço $H^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_m \geq 0\}$.

Os difeomorfismos da definição acima também são chamados de parametrizações locais de M . A **fronteira** de M , denotada por ∂M consiste dos pontos cuja imagem pela parametrização local pertence a $\partial H^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. O complementar da fronteira de M é dito **interior** de M e denotado por $\text{int}(M)$.

É fácil ver que se M é uma m -variedade com bordo, ∂M é uma $(n-1)$ -variedade sem bordo.

O produto de uma variedade com bordo M e uma variedade sem bordo N é uma nova variedade com bordo, sendo $\partial(N \times M) = N \times \partial M$ e $\dim(N \times M) = \dim(N) + \dim(M)$.

Exemplo 3. Se M é m -variedade sem bordo e $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$, então $M \times I$ é uma $(m+1)$ -variedade com bordo tal que $\partial(M \times I) = (M \times 0) \cup (M \times 1)$.

1.1.1.1 Espaço Tangente

Agora, para a construção do espaço tangente, considere $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave e $p \in M$. Um caminho suave γ em M que passa por p é uma aplicação suave $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, onde $\gamma(0) = p$. Convencionamos que o **vetor velocidade** do caminho γ será a derivada

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|_{t=0} \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 4. Sejam M uma variedade suave e $p \in M$. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é **tangente** à M em p se v é o vetor velocidade de algum caminho suave que passa por p em M . O conjunto de tais vetores tangentes, denotado por $T_p M$, será chamado de **espaço tangente** a M em p .

Em termos de sistema de coordenadas $h: U \rightarrow V$ de M em torno de $p \in M$, podemos supor que $0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ com $h(0) = p \in V$, então um vetor v está no espaço tangente de M em p se, e somente se, v pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\frac{\partial h}{\partial u_1}(0), \dots, \frac{\partial h}{\partial u_m}(0)$, sendo esse resultado independente da escolha de parametrização. Vale observar também que o espaço tangente é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n que tem a mesma dimensão da variedade M , demonstra-se esse resultado provando que diferencial $d_0 h$ é na verdade um isomorfismo entre \mathbb{R}^m e $T_p M$.

Definição 5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave. A **variedade tangente** de M é o subespaço de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dado por $TM := \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$.

Observação 1. Um atlas em M induz um atlas em TM . Assim, se M é uma m -variedade suave, então TM é uma $2m$ -variedade suave.

Para demonstrar essa propriedade é mais fácil trabalhar com uma definição equivalente de espaço tangente, na qual $T_x M = d_0 h(\mathbb{R}^m)$, onde $h: U \rightarrow V$ é parametrização local de M em torno de $x \in M$ com $h(0) = x$. É fato que essa definição independe da parametrização. Além disso, podemos considerar, para todo $(x, v) \in TM$, a partir da parametrização $h: U \rightarrow V$, os abertos

$U' := U \times \mathbb{R}^m$ e $V' := V \times T_x M$ e a função $dh : U' \rightarrow V'$, definida por $dh(u, y) = (h(u), d_0 h(y))$, para todo $(u, y) \in U'$, que é o difeomorfismo procurado.

Sejam M, N duas variedades e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Dado $x \in M$, definimos $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ por $d_x f(v) = d_0 \psi \circ d_0 h \circ (d_0 \varphi)^{-1}(v)$, onde φ e ψ são sistemas de coordenadas locais para M e N em torno de x e $f(x)$, respectivamente, com $f(V_1) \subset V_2$ e $h := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

1.1.1.2 Orientação

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ duas bases ordenadas de V . Considere o único isomorfismo linear $A : V \rightarrow V$ de modo que $\beta' = A(\beta)$, onde $A(\beta)$ denota a base $\{A(v_1), \dots, A(v_n)\}$.

Se $\det(A)$ o determinante da matriz de A é positivo, dizemos que β e β' determinam a mesma orientação para o espaço V . Nesse caso, β e β' estão relacionados e esta é uma relação de equivalência.

Portanto, fixada uma base, da relação obtemos duas classes de equivalência: a das bases que determinam a mesma orientação ($\det A > 0$) e das bases que não determinam a mesma orientação ($\det A < 0$).

Definição 6. Uma **orientação** para o espaço vetorial V é a escolha arbitrária de alguma dessas classes de equivalência, a qual chamaremos de positiva, sendo a outra classe chamada de negativa. Para espaços de dimensão zero, uma orientação será apenas uma escolha de sinais $+1$ ou -1 .

Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita isomorfos. Considere $A : V \rightarrow W$ um isomorfismo entre esses espaços. É fácil ver que se β e β' têm a mesma orientação em V , então $A(\beta)$ e $A(\beta')$ têm a mesma orientação em W .

Definição 7. Fixadas orientações, ou seja, escolhidas uma classe de V e uma de W como positivas, dizemos que o isomorfismo A **preserva orientação** se $A(\beta)$ tem o mesmo sinal em W que β em V . Caso contrário, diremos que A **reverte orientação**.

Definição 8. Uma **orientação** para uma variedade suave M é uma escolha suave de orientação para seus espaços tangentes. Diremos que M é **orientável** se possui uma orientação.

A escolha suave da definição acima significa que em cada ponto $x \in M$ existirá uma parametrização local $h : U \rightarrow V$ de uma vizinhança V de x em M tal que o isomorfismo

$$d_u h : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{h(u)} M$$

preserva orientação para todo $u \in U$, considerando a base canônica como orientação para \mathbb{R}^n e sendo $d_u h(v) = \frac{\partial(h \circ \gamma)}{\partial t}(0)$, onde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é um caminho suave com $\gamma(0) = u$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(0) = v$.

1.1.2 Campo Vetorial

Campos de vetores é um tema amplamente estudado devido sua importância em vários ramos da matemática, assim como também por suas aplicações em inúmeras outras áreas, como no estudo de fluídos dentro da física ou da meteorologia, por exemplo.

Definição 9. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma m -variedade suave. Um **campo vetorial tangente** v sobre M é uma aplicação contínua $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja a imagem de cada ponto é um vetor no espaço tangente desse ponto, isto é, $v(x) \in T_x M \cong \mathbb{R}^m$ para todo $x \in M$.

Por simplicidade, muitas vezes nos permitimos dizer apenas campo vetorial referindo-nos a um campo vetorial tangente.

Definição 10. Seja M uma n -variedade suave. Um ponto $p \in M$ é uma **singularidade**, ou ponto estacionário, de um campo vetorial v sobre M quando $v(p) = 0$.

Exemplo 4. A esfera S^1 admite campo vetorial sem singularidade.

Basta considerar $v : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $v(x, y) = (-y, x)$.

No estudo do comportamento de campos vetoriais, pontos singulares (zeros) se destacam como indicadores de mudanças interessantes. Normalmente na vizinhança desses pontos há variação na direção e norma dos vetores do campo. Veremos alguns exemplos mais adiante.

Definição 11. Sejam M uma variedade suave e $N \subset M$ um subconjunto. Um **r -campo tangente** em N é um conjunto $v^{(r)} := \{v_1, \dots, v_r\}$ de r campos vetoriais tangentes v_i de M restritos a N .

Um **ponto singular** de um r -campo vetorial $v^{(r)}$ é um ponto $p \in N$ tal que os vetores $v_1(p), \dots, v_r(p)$ não são linearmente independentes.

Se $v^{(r)}$ não possui pontos singulares, então $v^{(r)}$ é dito um **r -referencial**.

Por abuso de linguagem, também chamamos uma r -upla de vetores linearmente independentes de r -referencial. Nesse caso, a coleção de todos os r -referenciais em \mathbb{R}^n gera um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n)^r$ que consiste de todas as r -uplas de vetores de \mathbb{R}^n que são linearmente independentes. Basta observar que qualquer pequena variação de direção e norma em um conjunto de vetores linearmente independentes mantém tal conjunto linearmente independente. Chamamos tal coleção de **Variedade de Stiefel** e a denotamos por $V_r(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1. A variedade de Stiefel $V_r(\mathbb{R}^n)$ é uma nr -variedade suave.

O lema segue do fato de que todo subconjunto aberto de \mathbb{R}^{nr} é uma nr -variedade suave.

Um subconjunto importante de $V_r(\mathbb{R}^n)$ é o formado por todos os r -referenciais ortonormais. Denotaremos tal subconjunto por $V_r^0(\mathbb{R}^n)$. O próximo resultado pode ser encontrado em (MILNOR; STASHEFF, 1974, p.58).

Proposição 1. $V_r^0(\mathbb{R}^n)$ é um espaço topológico compacto.

1.1.3 Variedade de Grassmann

Nessa seção estudaremos a variedade de Grassmann, a qual é um exemplo não trivial de variedade topológica. Mais adiante esta variedade será utilizada na construção de um exemplo tautológico de fibrado vetorial real.

Definição 12. A **variedade de Grassmann** $G_k(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todos os k -subespaços vetoriais de \mathbb{R}^n , onde $k < n$.

Exemplo 5. Quando $n = 1$, a variedade de Grassmann $G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ é o conjunto de todos os subespaços de dimensão 1 de \mathbb{R}^{1+k} , ou seja, de todas as retas que passam pela origem de \mathbb{R}^{1+k} . Portanto, podemos identificar $G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ com o espaço projetivo $\mathbb{R}P^k$.

A seguir mostraremos que $G_k(\mathbb{R}^n)$ é um espaço topológico Hausdorff e localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{nk} .

Definindo uma topologia em $G_k(\mathbb{R}^n)$:

Considerando a variedade de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$, queremos definir em $G_k(\mathbb{R}^n)$ a topologia quociente que torna a seguinte aplicação contínua:

$$q : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

que aplica cada conjunto de k vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^n no espaço vetorial gerado por eles.

Essa aplicação é sobrejetora, pois cada subespaço de \mathbb{R}^n de dimensão k é gerado por k vetores linearmente independentes. Diremos que $U \subset G_k(\mathbb{R}^n)$ é aberto se, e somente se, $q^{-1}(U)$ for um aberto de $V_k(\mathbb{R}^n)$.

Vale observar que podemos considerar apenas conjuntos de geradores ortonormais como base para os subespaços. Seja $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ o subconjunto de $V_k(\mathbb{R}^n)$ formado por conjuntos de k vetores ortonormais em \mathbb{R}^n . Se $i : V_k^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)$ representa a inclusão, $g : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k^0(\mathbb{R}^n)$ representa o processo de Gram-Schmidt e $q_0 = q|_{V_k^0(\mathbb{R}^n)}$, então $q_0 = q \circ i$ e $q = q_0 \circ g$. Portanto, $V_k^0(\mathbb{R}^n)$ gera a mesma topologia quociente em $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 6. A princípio falamos apenas da igualdade de conjuntos entre $G_1(\mathbb{R}^{1+k}) = \mathbb{R}P^k$, entretanto, como $V_1^0(\mathbb{R}^{1+k}) = S^k$ e a aplicação quociente $q_0 : V_1^0(\mathbb{R}^{1+k}) \rightarrow G_1(\mathbb{R}^{1+k})$ coincide com a aplicação quociente que usamos para definir a topologia do espaço projetivo $\mathbb{R}P^k$, temos que vale a igualdade $G_1(\mathbb{R}^{1+k}) = \mathbb{R}P^k$ como espaços topológicos.

$G_k(\mathbb{R}^n)$ é um espaço Hausdorff:

Demonstraremos esse fato a partir de uma função real contínua que fornecerá vizinhanças disjuntas para pontos distintos de $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Fixado $w \in \mathbb{R}^n$, considere a aplicação $\rho_w : G_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $X \in G_k(\mathbb{R}^n)$ determina o quadrado da distância entre w e X .

Para verificarmos que ρ_w é uma aplicação contínua, podemos considerar bases ortonormais para os subespaços. Assim, se $\{x_1, \dots, x_k\}$ é uma base ortonormal do subespaço X , temos que $\rho_w(X) = w \cdot w - (w \cdot x_1)^2 - \dots - (w \cdot x_k)^2$. Isso implica que $\rho'_w = \rho_w \circ q_0$ é contínua. Como q_0 é sobrejetora e também é contínua, concluímos que ρ_w é contínua.

Agora, considere X e Y dois k -espaços vetoriais distintos em \mathbb{R}^n tais que $w \in X$ e $w \notin Y$, então $\rho_w(X) \neq \rho_w(Y)$. Como \mathbb{R} é Hausdorff, existem vizinhanças abertas disjuntas U e V contendo $\rho_w(X)$ e $\rho_w(Y)$, respectivamente. Nesse caso, $\rho_w^{-1}(U)$ e $\rho_w^{-1}(V)$ são vizinhanças abertas disjuntas em $G_k(\mathbb{R}^n)$ contendo X e Y , respectivamente, o que demonstra que $G_k(\mathbb{R}^n)$ é Hausdorff.

$G_k(\mathbb{R}^n)$ é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{n-k} :

Apresentaremos aqui apenas um esboço da demonstração.

Seja $X_0 \in G_k(\mathbb{R}^n)$. Podemos ver o espaço \mathbb{R}^n como a decomposição

$$\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp.$$

Considere $U \subset G_k(\mathbb{R}^n)$ o subconjunto que consiste dos subespaços Y tais que $Y \cap X_0^\perp = \{0\}$. Argumento análogo ao aplicado para demonstrar que a variedade de Stiefel ($V_k(\mathbb{R}^{n+k})$) formada por todas as k -uplas de vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^{n+k} (k -referenciais) é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^{n+k})^k$, prova que U é um subconjunto aberto de $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Essa condição implica a injetividade em $Y \in U$ da projeção $p : X_0 \oplus X_0^\perp \rightarrow X_0$, pois se $w, w' \in Y$ são tais que $p(w) = p(w') = x_0$, podemos escrever $w = x_0 + v$ e $w' = x_0 + v'$ com $x_0 \in X_0$ e $v, v' \in X_0^\perp$, por Y ser um subespaço vetorial temos que $x_0 + v - (x_0 + v') = v - v' \in Y \cap X_0^\perp = \{0\}$, portanto $v = v'$ que implica $w = w'$.

Nesse caso, podemos ver Y como o gráfico de uma transformação linear $T_Y : X_0 \rightarrow X_0^\perp$ (pensando cada $y \in Y$ como $y = x_0 + T_Y(x_0)$).

Isso já nos dá uma correspondência bijetiva:

$$T : U \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \cong \mathbb{R}^{n-k}.$$

Agora, seja $\{x_1, \dots, x_k\}$ uma base ortonormal para X_0 . Cada $Y \in U$ possui uma única base $\{y_1, \dots, y_k\}$ tal que $p(y_i) = x_i$ para $i = 1, \dots, k$.

Dessa maneira, y_i e x_i dependem continuamente em Y , como $y_i = x_i + T_Y(x_i)$, temos que $T_Y(x_i)$ depende continuamente em Y . Portanto, T e T^{-1} são contínuas, donde $G_k(\mathbb{R}^n)$ é homeomorfo a \mathbb{R}^{nk} .

A demonstração da suavidade das coordenadas locais de $G_k(\mathbb{R}^n)$ pode ser consultada em (LIMA, 2007, p.126).

1.1.4 Teoria da Interseção Módulo 2

Nesta seção, apresentamos invariantes para a interseção de variedades, os quais possuem boas consequências geométricas. Com o objetivo final de apresentar uma definição, via topologia diferencial, da característica de Euler, dissertaremos a seguir sobre teoria da interseção módulo 2. A principal referência utilizada é (GUILLEMIN; POLLACK, 1974).

Primeiramente, precisamos de algumas definições.

Definição 13. Se $f : X \rightarrow Y$ é um aplicação suave entre variedades, diremos que $y \in Y$ é **valor regular** se $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ é sobrejetora para todo $x \in f^{-1}(y)$.

Quando $\dim(X) < \dim(Y)$, não existem valores regulares para $f : X \rightarrow Y$ na imagem de f . Agora se $\dim(X) \geq \dim(Y)$ e y é um valor regular de f , ou seja, f é submersão em todo $x \in f^{-1}(y)$, temos que $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X de dimensão igual a $\dim(X) - \dim(Y)$. No caso especial em que $\dim(X) = \dim(Y)$ e y é um valor regular de f , temos que f é um difeomorfismo local em cada $x \in f^{-1}(y)$.

O teorema de Sard afirma que para $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades, quase todo ponto de Y é regular, sendo o conjunto dos pontos regulares denso em Y .

Definição 14. Sejam X e Y variedades suaves, Z subvariedade de Y e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Dizemos que f é **transversal** a Z se

$$d_x f(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y,$$

para todo $x \in f^{-1}(Z)$. Nessa caso, usamos a notação $f \bar{\cap} Z$.

Quando $X \subset Y$ e consideramos a inclusão $i : X \rightarrow Y$, dizemos que X é transversal a Z , $X \bar{\cap} Z$, se para todo $x \in X \cap Z$ vale $T_x X + T_x Z = T_x Y$.

Observe que o conceito de transversalidade estende o conceito de valor regular, pois quando y é valor regular de f , temos $f \bar{\cap} \{y\}$.

Teorema 1. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades. Se f é transversal à Z , então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X com $\text{codim}(f^{-1}(Z)) = \text{codim}(Z)$.

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades que é transversal à subvariedade Z de Y . Se $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$, pelo teorema anterior, temos que

$$\text{codim}(f^{-1}(Z)) = \text{codim}(Z) = \dim(X),$$

logo $\dim(f^{-1}(Z)) = 0$. Além disso, se X é uma variedade compacta, temos que $f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito.

Nessas condições, chamaremos provisoriamente a quantidade de pontos de $f^{-1}(Z)$ de número de interseção de X e Z e usaremos a notação $\#(X \cap Z)$.

Definição 15. Sejam X uma variedade compacta e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave transversal a subvariedade Z de Y com $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$. Então o **número de interseção módulo 2** da aplicação f com Z é a cardinalidade do conjunto $f^{-1}(Z)$ módulo 2, o qual denotaremos por $I_2(f, Z)$.

A definição a seguir é muito importante, pois nos permite estudar quando determinada propriedade de uma função é preservada por deformações suaves.

Definição 16. Seja $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Dizemos que duas aplicações suaves $f_0 : X \rightarrow Y$ e $f_1 : X \rightarrow Y$ são **homotópicas**, $f_0 \simeq f_1$, se existe uma aplicação suave $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$. F é chamada **homotopia** entre f_0 e f_1 .

Homotopia é uma relação de equivalência entre aplicações. Quando duas aplicações suaves são homotópicas, é possível encontrar uma homotopia suave entre elas. Mais adiante destinaremos toda uma seção ao estudo de homotopias, 1.2.1.

Para domínios compactos, transversalidade com relação a subvariedades fechadas é uma propriedade estável por pequenas e suaves perturbações, sendo assim, é dita um invariante homotópico.

Nas hipóteses da definição de número de interseção módulo 2:

Teorema 2. Se $f, g : X \rightarrow Y$ são duas aplicações homotópicas e ambas transversais a Z , então $I_2(f, Z) = I_2(g, Z)$.

A demonstração desse resultado envolve um estudo de variedades unidimensionais, a saber o bordo dessas variedades tem um número par de pontos. Além do importante teorema da extensão: Suponha Z uma subvariedade fechada de Y e C um subconjunto fechado de X . Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave tal que a condição de transversalidade de f é satisfeita para todo $x \in f^{-1}(Z) \cap C$ e de $\partial f : \partial X \rightarrow Y$ para todo $x \in C \cap \partial X$, então existe uma aplicação suave $g : X \rightarrow Y$ homotópica a f tal que $g \bar{\cap} Z$ e $\partial g \bar{\cap} Z$ com $g = f$ em uma vizinhança de C .

Quando temos duas variedades de mesma dimensão:

Teorema 3. Sejam X uma variedade compacta, Y uma variedade conexa tais que $\dim(X) = \dim(Y)$ e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Então $I_2(f, \{y\})$ é o mesmo valor para todo $y \in Y$. Esse valor é chamado grau *mod 2* de f e denotado por $\deg_2(f)$.

Estamos supondo a possibilidade de uma pequena deformação em f , caso necessário, para que y se torne um valor regular. Pelos teoremas anteriores, o grau *mod 2* é um invariante homotópico bem definido.

Agora, considere X, Y e Z variedades suaves orientadas sem bordo com X compacta, Z subvariedade fechada de Y e $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$. Se $f : X \rightarrow Y$ é transversal à Z , então $f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito de pontos, onde cada ponto possui um número de orientação ± 1 .

Definição 17. O número de interseção, $I(f, Z)$, é a soma desses números de orientações.

No caso especial em que X também é uma subvariedade de Y , então definimos o número de interseção de X e Z por $I(X, Z) := I(i, Z)$, em que $i : X \rightarrow Y$ é a aplicação inclusão.

O número de interseção é também um invariante homotópico:

Teorema 4. Aplicações homotópicas têm o mesmo número de interseção.

E a demonstração desse resultado também faz uso do teorema da extensão e do estudo de variedades unidimensionais: A soma dos números de orientação nos pontos do bordo de qualquer variedade unidimensional com bordo e orientada é zero.

Definição 18. Se Y é conexo e $\dim(X) = \dim(Y)$, então o grau de uma aplicação suave $f : X \rightarrow Y$ é definido por $\deg(f) := I(f, \{y\})$ em que $y \in Y$ é qualquer valor regular.

Por definição e por todos os resultados anteriores, o grau de uma aplicação é também um invariante homotópico.

Observação 2. Podemos entender que nas hipóteses de X e Y da definição de grau, dado um valor regular p , existe para cada x_i na pré-imagem de p uma vizinhança na qual f é um difeomorfismo local. Nesse caso, f pode preservar ou reverter orientação. O grau de f será a diferença entre o número de pontos onde f preserva a orientação e o número de pontos onde f reverte a orientação.

E chegamos a última definição.

Definição 19. Se X é uma variedade compacta e orientada, então a característica de Euler, $\chi(X)$, é o número de auto interseções da diagonal Δ em $X \times X$, sendo definida por $\chi(X) := I(i', \Delta)$, onde $i' : \Delta \rightarrow X \times X$ é uma aplicação homotópica à aplicação inclusão.

Tomamos uma aplicação i' homotópica a inclusão i , pois $i^{-1}(\Delta) = \Delta$ não é necessariamente um conjunto finito de pontos. Entretanto, como o número de interseção não varia através

de aplicações homotópicas, devemos considerar uma aplicação $i' : \Delta \rightarrow X \times X$ homotópica a i de forma que $i' \overline{\cap} \Delta$. Assim, considerando a orientação, temos $\chi(X) = I(i, \Delta) = I(i', \Delta)$.

Entretanto, apesar da definição apresentada acima estar bem posta diante da teoria apresentada nessa seção, ela afasta-se da intuição geométrica que motivou a característica de Euler.

Tudo começou em 1758, quando Euler percebeu que dado um poliedro convexo P de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 , temos $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de P .

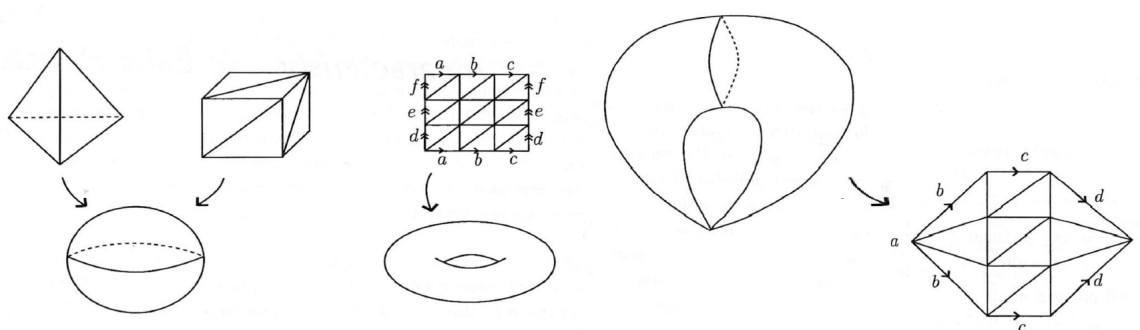
Claro que a soma alternada $V - A + F$ está definida para um poliedro P qualquer de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 . Mas foi Poincaré, em 1893, quem estendeu essa definição para poliedros finitos P de dimensão qualquer n em \mathbb{R}^m , definindo a característica de Euler nesse contexto por:

$$\chi(P) := \sum_{i=0}^n (-1)^i n_i$$

onde n_i é o número de simplexes de dimensão i de P , os quais serão estudados mais adiante nesse trabalho, definição 26.

Ampliando ainda mais os objetos geométricos, a cada variedade suave compacta podemos associar uma triangularização, a qual é um poliedro finito, portanto possui sua característica de Euler, vide (WHITNEY, 1957, p.124-135). A saber, dada M uma variedade suave compacta, dizemos que o par (P, h) é uma triangularização de M , se $h : |P| \rightarrow M$ é um homeomorfismo, onde $|P|$ é o espaço topológico dado pelo conjunto P com a topologia do espaço ambiente. Além disso, duas triangularizações da mesma variedade possuem a mesma característica de Euler, ficando assim bem definida a característica de Euler para uma variedade compacta.

Na figura a seguir temos triangularizações da esfera (S^2), do toro (T) e do toro pinçado (X). É fácil verificar que $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T) = 0$ e $\chi(X) = 1$.



Retirada de Brasselet (2002)

Figura 1 – Triangularizações

Observe que apesar do toro pinçado ser uma variedade singular ele é triangularizável, portanto possui uma característica de Euler associada.

1.1.5 O Teorema de Poincaré-Hopf

No estudo do comportamento de campos vetoriais, pontos singulares (zeros) se destacam como indicadores de mudanças interessantes. Normalmente na vizinhança desses pontos há variação na direção e norma dos vetores do campo.

Particularmente, estamos interessados em observar singularidades isoladas.

Definição 20. Seja M uma variedade suave. Diremos que $p \in M$ é uma **singularidade isolada** do campo $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ quando existir uma vizinhança V em M tal que o campo não se anula em outros pontos dessa vizinhança, isto é, $v(y) \neq 0$ para todo $y \neq p$ e $y \in V$.

Por simplicidade, podemos considerar um campo v com uma singularidade isolada na origem de \mathbb{R}^n . Além disso, sendo M uma m -variedade suave, temos difeomorfismos locais com abertos de \mathbb{R}^m , portanto podemos considerar um disco fechado de raio $\varepsilon > 0$ dentro de uma vizinhança de $p \in M$.

Definição 21. Sejam M uma m -variedade orientável e $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo com uma singularidade isolada na origem. Se $\varepsilon > 0$ é tal que v não possui singulares no disco fechado D_ε exceto na origem, sendo $\partial D_\varepsilon = S_\varepsilon$, então o **índice de Poincaré-Hopf** (ou apenas índice) de v em 0, denotado por $ind_0(v)$, é o grau da aplicação de Gauss:

$$\gamma : S_\varepsilon \longrightarrow S^n, \quad x \longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

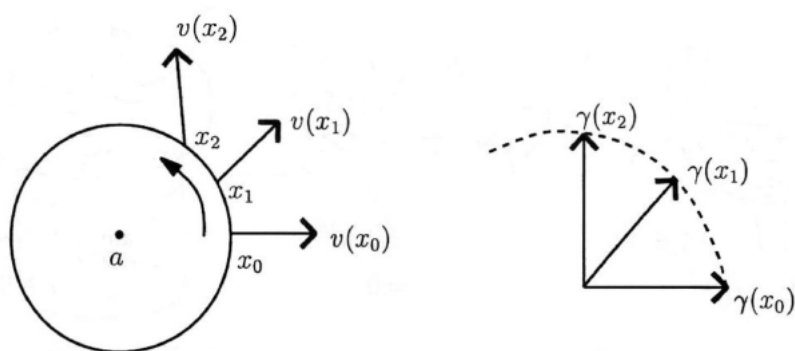
A definição independe da escolha de parametrização, assim como de ε .

Exemplo 7. Para ilustrar geometricamente, podemos estudar variedades em \mathbb{R}^2 .

A transformação de Gauss aplica cada vetor do campo em vetor unitário, como mostra a figura:

Estamos considerando o sentido anti-horário como a orientação positiva na circunferência, induzida pela base canônica.

Dada uma variedade contida em \mathbb{R}^2 e $v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores com uma singularidade isolada p , considere um disco fechado como vizinhança, no qual p é a única singularidade, podemos percorrer no sentido anti-horário o bordo desse disco (que será uma circunferência de raio ε) aplicando a aplicação de Gauss. Então, se a imagem do campo percorre S^1 também no sentido anti-horário, diremos que a aplicação de Gauss percorre S^1 positivamente e caso contrário, negativamente.

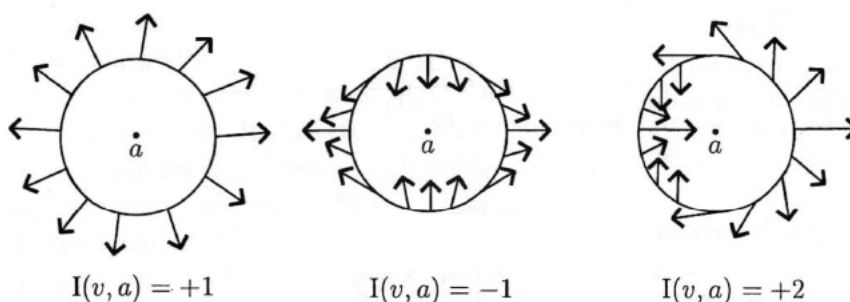


Retirada de Brasselet (2002)

Figura 2 – Aplicação de Gauss

Agora, o índice de Poincaré-Hopf é dado pelo número de voltas positivas menos o número de voltas negativas que aplicação de Gauss faz em torno de S^1 quando o campo v percorre toda a circunferência S_E .

Intuitivamente podemos observar os índices de v em a , $I(v, a)$, dos campos a seguir:



Retirada de Brasselet (2002)

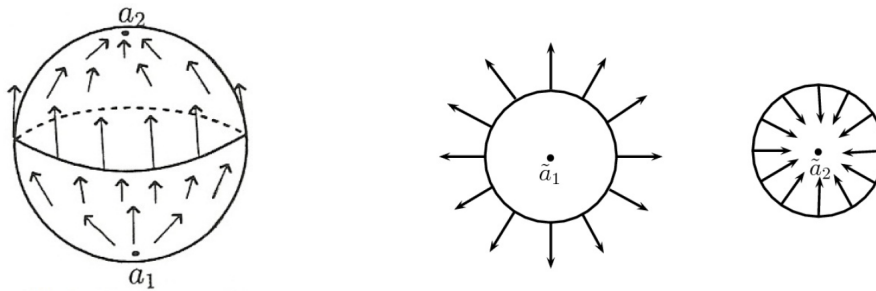
Figura 3 – Campos de vetores em dimensão 2

Exemplo 8. Considere o campo sobre a esfera S^2 dado pela figura 4 a seguir, o qual possui duas singularidades: $a_1 = (0, 0, -1)$ e $a_2 = (0, 0, 1)$.

O comportamento do campo em a_1 e a_2 pode ser representado como em \tilde{a}_1 e \tilde{a}_2 , respectivamente.

Pelo que foi discutido no exemplo anterior, os índices das singularidades são ambos iguais a 1 e veremos a seguir que não é coincidência que a soma dos índices seja igual a característica de Euler da variedade.

Foi Poincaré, 1885, quem demonstrou que a soma dos índices das singularidades de um campo contínuo v de vetores tangentes à uma superfície compacta e sem bordo M de dimensão 2 não depende do campo v . E mais tarde, 1927, Hopf generalizou o resultado:



Retirado de Dalbelo (2011)

Figura 4 – Campo de vetores na esfera S^2

Teorema 5. (TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF) Dado um campo vetorial v sobre uma variedade orientada compacta M com finitas singularidades isoladas, digamos p_1, \dots, p_k . Então, a soma dos índices das singularidades de v coincide com a característica de Euler de M , isto é

$$\sum_{i=1}^k \text{ind}_{p_i}(v) = \chi(M).$$

Corolário 1. Seja M uma variedade com $\chi(M) \neq 0$, então qualquer campo vetorial sobre M deverá se anular em algum ponto.

O corolário segue diretamente do Teorema de Poincaré-Hopf, pois se $\chi(M) \neq 0$, o campo considerado admite alguma singularidade isolada e portanto se anula em algum ponto.

Com isso, podemos dizer que a característica de Euler de uma variedade compacta e orientada M mede a obstrução para a construção de um campo vetorial contínuo sem singularidade sobre M .

Das várias questões que podemos pontuar, temos que a característica de Euler está definida para variedades singulares, como o toro pinçado, entretanto o índice de Poincaré-Hopf não está. Nesse caso, para estender o Teorema de Poincaré-Hopf ao caso singular precisamos primeiramente estender o conceito de índice, então será que existe uma nova definição de índice para variedades singulares? Além disso, o Teorema de Poincaré-Hopf é uma ferramenta de estudo da obstrução para campos de vetores, será que existe um teorema análogo para a obstrução da construção de r -referenciais? O estudo em classes características destina-se a responder questões como essas.

Referências para esta seção são (BRASSELET, 2002) e (DALBELO, 2011).

1.2 Topologia Algébrica

A Topologia Algébrica é o ramo da Matemática que dedica-se ao estudo de espaços topológicos a partir de recursos algébricos. Sem rigor, isso significa que estruturas algébricas

serão associadas a um espaço topológico de interesse com a intenção de obter informações sobre esse espaço. Apresentaremos aqui os conceitos clássicos dessa área da matemática: homotopia, homologia e cohomologia.

1.2.1 Homotopia

Como afirmamos anteriormente homotopias são importante porque nos permitem estudar quando determinada propriedade de uma função é preservada por deformações suaves, 16. Ademais alguns resultados de homologia e cohomologia são apresentados em termos de aplicações homotópicas.

Definição 22. Sejam X e Y espaços topológicos e o intervalo $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Uma **homotopia** é uma família de aplicações $f_t : X \rightarrow Y$, $t \in I$, onde a aplicação $F : X \times I \rightarrow Y$ dada por $F(x, t) = f_t(x)$ é contínua, para todo $t \in I$.

Com essa definição, dizemos que duas aplicações contínuas f e g entre espaços topológicos são **homotópicas**, $f \simeq g$, se existir uma homotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. A relação \simeq define uma relação de equivalência entre aplicações contínuas do espaço topológico X para Y . Diremos que f é **homotopicamente nula** quando g for uma aplicação constante.

Exemplo 9. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, então dados X um espaço topológico e $f, g : X \rightarrow E$ aplicações contínuas, temos que $f \simeq g$. Basta considerar a **homotopia linear** $F : X \times I \rightarrow E$ dada por:

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

que está bem definida, pois E é convexo.

Definição 23. Dizemos que dois espaços X e Y são **homotopicamente equivalentes**, $X \equiv Y$, se existem $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ aplicações contínuas tais que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$, onde $id_Y : Y \rightarrow Y$ e $id_X : X \rightarrow X$ denotam as respectivas aplicações identidades de Y e X . Nessas condições, f é dita uma **equivalência homotópica**.

Definição 24. Sejam X um espaço topológico qualquer e Y um espaço topológico constituído de apenas um único ponto. Se existir uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow Y$, então X é dito um espaço **contrátil**.

1.2.2 Homologia

A teoria de Homologia pode, por exemplo, auxiliar na classificação de espaços topológicos com relação a homeomorfismos. Para isso são utilizados objetos como simplexes, complexos de cadeias e aplicações bordo.

Definição 25. Dados $(p + 1)$ pontos em \mathbb{R}^n , $p \leq n$, dizemos que $\{x_0, \dots, x_p\}$ é uma coleção **geometricamente independente** se os vetores

$$\vec{v}_1 = x_1 - x_0, \vec{v}_2 = x_2 - x_0, \dots, \vec{v}_p = x_p - x_0$$

são linearmente independentes.

Definição 26. Seja $\{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ uma coleção geometricamente independente, $p \leq n$. O p -simplexo S gerado por x_0, \dots, x_p é a envoltória convexa

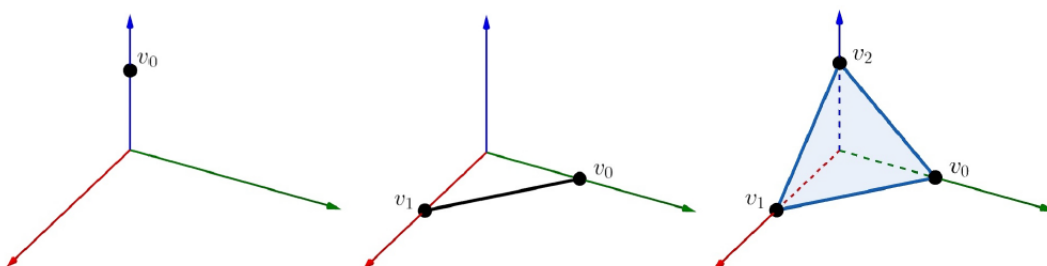
$$S = \left\{ t_0 x_0 + \dots + t_p x_p; t \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^p t_i = 1 \right\},$$

a qual denotaremos por $S = [x_0, \dots, x_p]$.

Estamos utilizando o Teorema das Coordenadas Baricêntricas para descrever a envoltória convexa do enunciado acima e também segue deste teorema que cada ponto $x \in [x_0, \dots, x_p]$ é unicamente determinado por uma $(p + 1)$ -upla (t_0, \dots, t_p) , com $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^p t_i = 1$, denominada as coordenadas baricêntricas do ponto x .

Definição 27. Se $x_0 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $x_1 = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $x_p = e_{p+1} = (0, \dots, 0, 1)$, então o p -simplexo $S = [x_0, \dots, x_p]$ será chamado de **p -simplexo padrão** e será denotado por $\Delta_p \subset \mathbb{R}^{p+1}$.

Por definição, geometricamente um 0-simplexo é um ponto, um 1-simplexo é segmento de reta e um 2-simplexo é um triângulo totalmente preenchido, como ilustra a figura:



Retirado de Castelo Branco Júnior (2019)

Figura 5 – p -simplexos nos casos $p = 0, 1, 2$

Fixe G um grupo abeliano e considere a topologia induzida de \mathbb{R}^{p+1} no p -simplexo padrão Δ_p . Iniciaremos o estudo de homologia singular para um espaço topológico X com coeficientes em um grupo abeliano G com algumas definições.

Definição 28. Para cada espaço topológico X , um p -simplexo singular em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$. Denotaremos por $C_p(X)$ o conjunto de todos os p -simplexos singulares de X .

Definição 29. Para cada $p \geq 0$, denotamos por $C_p(X, G)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto $C_p(X)$ de todos os p -simplexos singulares de X . Os elementos de $C_p(X, G)$ são chamados de p -cadeias singulares de X com coeficientes em G .

Um elemento típico de $C_p(X, G)$ é uma combinação linear formal $\sum_{i=0}^r \alpha_i \sigma_i$, onde $\alpha_i \in G$ e $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow X$ é um p -simplexo singular de X , para todo $i = 0, \dots, r$.

Por outro lado, podemos conceber

$$C_p(X, G) = \left\{ f : C_p(X) \rightarrow G; f(\sigma) \neq 0 \text{ apenas para um número finito de elementos } \sigma \right\}$$

devido a bijeção $\sum_{i=0}^r \alpha_i \sigma_i \longleftrightarrow f : C_p(X) \rightarrow G$, onde

$$f(\sigma) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{se } \sigma = \sigma_i \text{ para algum } i = 1, \dots, r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definição 30. Considere a inclusão

$$\begin{aligned} \varepsilon_i : \Delta_{p-1} &\hookrightarrow \Delta_p \\ (t_0, \dots, t_{p-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}) \end{aligned}$$

Seja $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ um p -simplexo singular de X . Para cada $i = 1, \dots, p$, definimos a i -ésima face de σ como sendo o $(p-1)$ -simplexo singular de X dado pela composição $\sigma \circ \varepsilon_i : \Delta_{p-1} \rightarrow X$, a qual é contínua e será denotada por $\bar{\partial}_i \sigma$.

A definição acima induz uma função:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_i : C_p(X) &\rightarrow C_{p-1}(X) \\ \sigma &\mapsto \bar{\partial}_i \sigma \end{aligned}$$

Como $C_p(X)$ é base para o grupo abeliano livre $C_p(X, G)$, podemos estender $\bar{\partial}_i$ por linearidade a um único homomorfismo $\bar{\partial}_i : C_p(X, G) \rightarrow C_{p-1}(X, G)$, chamado **operador face**.

Definição 31. O homomorfismo $\partial_p : C_p(X, G) \rightarrow C_{p-1}(X, G)$ dado pela soma alternada dos operadores face

$$\partial_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \bar{\partial}_i$$

é chamado **operador bordo**.

Teorema 6. O operador bordo é tal que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$

Chamaremos os elementos de $Ker(\partial_p)$ de **p -ciclos** e os elementos de $Im(\partial_{p+1})$ de **p -bordos**. Do teorema acima segue que $Im(\partial_{p+1}) \subset Ker(\partial_p)$, então podemos definir o **p -ésimo grupo de homologia singular** de X com coeficientes em G por:

$$H_p(X, G) = \frac{Ker(\partial_p)}{Im(\partial_{p+1})}$$

para cada $p \geq 0$.

Definição 32. Seja X um espaço topológico e ∂_p a p -ésima aplicação bordo. A sequência

$$\cdots \rightarrow C_{p+1}(X, G) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(X, G) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X, G) \rightarrow \cdots \rightarrow C_0(X, G) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

é chamada **complexo de cadeia singular** associado ao espaço X .

Exemplo 10. Sejam $X = \{x\}$ um espaço topológico constituído de apenas um ponto e G um grupo abeliano. Então

$$H_p(X, G) = \begin{cases} G, & \text{se } p = 0 \\ \{0\}, & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

De fato, como para cada $p \geq 0$ existe um único p -simplexo singular $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow \{x\}$ igual a aplicação constante, temos

$$C_p(X, G) = \left\{ a\sigma_p; a \in G \text{ e } \sigma_p : \Delta_p \rightarrow \{x\} \text{ o único } p\text{-simplexo singular de } X \right\}$$

e portanto $C_p(X, G) \approx G$.

Agora analisando as aplicações bordo:

- $\partial_0 : C_0(X, G) \rightarrow \{0\}$ é a aplicação identicamente nula, portanto

$$Im(\partial_0) = \{0\} \text{ e } Ker(\partial_0) = C_0(X, G) \approx G.$$

- $\partial_1 : C_1(X, G) \rightarrow C_0(X, G)$ é tal que

$$\partial_1(\sigma_1) = \bar{\partial}_0(\sigma_1) - \bar{\partial}_1(\sigma_1) = \sigma_0 - \sigma_0 = 0$$

e portanto $Im(\partial_1) = \{0\}$ e $Ker(\partial_1) = C_1(X, G) \approx G$.

- $\partial_2 : C_2(X, G) \rightarrow C_1(X, G)$ é tal que

$$\partial_2(\sigma_2) = \bar{\partial}_0(\sigma_2) - \bar{\partial}_1(\sigma_2) + \bar{\partial}_2(\sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_1 + \sigma_1 = \sigma_1$$

e portanto $Im(\partial_2) = C_1(X, G) \approx G$ e $Ker(\partial_2) = \{0\}$.

Continuando essa análise, concluímos que para p ímpar, ∂_p é a aplicação identicamente nula. Quando p é par, temos $\partial_p(a\sigma_p) = a\sigma_{p-1}$, logo ∂_p é bijetora. Assim sendo, obtemos

$$H_0(X, G) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} \approx \frac{G}{\{0\}} \approx G$$

$$H_1(X, G) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} \approx \frac{G}{G} \approx 0$$

$$H_2(X, G) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} \approx \frac{\{0\}}{\{0\}} \approx 0$$

$$H_3(X, G) = \frac{\text{Ker}(\partial_3)}{\text{Im}(\partial_4)} \approx \frac{G}{G} \approx 0$$

...

E assim por diante, se $p > 0$, então $H_p(X, G) \approx 0$. ■

Dada $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre os espaços topológicos X e Y , queremos construir um homomorfismo $f_\# : C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G)$. Inicialmente determinamos $f_\#$ nos elementos da base $C_p(X)$ de $C_p(X, G)$: Dado $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ um p -simplexo singular, definimos $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta_p \rightarrow Y$. Agora basta estender linearmente esta aplicação da seguinte maneira:

$$f_\# \left(\sum_{i=0}^n a_i \sigma_i \right) = \sum_{i=0}^n a_i f_\#(\sigma_i).$$

As definições por linearidade implicam $f_\# \circ \partial_p = \partial_p \circ f_\#$ e isso significa que cada quadrado no seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{p+1}(X, G) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(X, G) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(X, G) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{p+1}(Y, G) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(Y, G) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(Y, G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dizemos que $f_\#$ é uma **aplicação entre cadeias** de um complexo de cadeias singular de X em um complexo de cadeia singular de Y . Ainda como consequência do fato $f_\# \circ \partial_p = \partial_p \circ f_\#$, temos que $f_\#$ leva ciclos de $C_p(X, G)$ em ciclos de $C_p(Y, G)$ assim como também leva bordo em bordo. Com isso, $f_\#$ induz um homomorfismo $f_* : H_p(X, G) \rightarrow H_p(Y, G)$.

Proposição 2. Sejam X e Y espaços topológicos. Se $f, g : X \rightarrow Y$ são duas aplicações contínuas homotópicas, $f \simeq g$, então elas induzem o mesmo homomorfismo nos grupos de homologia, isto é, $f_* = g_* : H_p(X, G) \rightarrow H_p(Y, G)$ para cada $p \geq 0$.

Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em (HATCHER, 2001, p.112).

Dado X um espaço topológico e seja $A \subset X$ um subespaço. Podemos considerar o **grupo relativo** $C_p(X, A, G)$ como o quociente $\frac{C_p(X, G)}{C_p(A, G)}$. Nesse caso, as cadeias de $C_p(X, G)$ que estão em $C_p(A, G)$ são anuladas, ou ainda, as cadeias não nulas são aquelas que não tem sua imagem contida em A .

A aplicação bordo induzida $\partial_p : C_p(X, A, G) \rightarrow C_{p-1}(X, A, G)$ é tal que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ para todo $p \geq 0$, portanto nos permite considerar o complexo de cadeia singular relativo:

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}(X, A, G) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(X, A, G) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X, A, G) \longrightarrow \cdots$$

Então analogamente definimos o **p -ésimo grupo de homologia singular relativa** com coeficientes em G :

$$H_p(X, A, G) = \frac{Ker(\partial_p)}{Im(\partial_{p+1})}$$

O teorema a seguir caracteriza quando é possível retirar um subconjunto $Z \subset A$ sem afetar os grupos de homologia relativos.

Teorema 7. Seja X um espaço topológico e considere dois subespaços $Z \subset A \subset X$ tais que $\bar{Z} \subset int(A)$, então a inclusão $i : (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos

$$H_p(X - Z, A - Z, G) \rightarrow H_p(X, A, G) \text{ para todo } p \geq 0.$$

Equivalentemente, se os subespaços $A, B \subset X$ são tais que $X = int(A) \cup int(B)$, então a inclusão $i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $H_p(B, A \cap B, G) \rightarrow H_p(X, A, G)$ para todo $p \geq 0$.

O resultado acima é conhecido como Teorema da Excisão, uma demonstração pode ser encontrada em (HATCHER, 2001, p.124).

Definição 33. Seja X um espaço topológico. Os grupos de **homologia local** no ponto $x \in X$ são definidos pelos grupos de homologia relativa $H_p(X, X - \{x\}, G)$.

Nesta seção, vimos como a Topologia Algébrica descreve a estrutura geométrica de um espaço topológico, associando a ele um sistema algébrico, uma sequência de grupos. Além disso, vimos que as funções contínuas entre espaços topológicos correspondem homomorfismo entre grupos associados a estes espaços.

1.2.3 Cohomologia

A teoria de cohomologia é construída de forma análoga à teoria de homologia, porém a diferença é que agora teremos estrutura para a definição de um produto como veremos a seguir.

Sejam G um grupo abeliano e X um espaço topológico. Considere os grupos abelianos livres $C_p(X, G)$ das p -cadeias singulares definidos na seção anterior e também o complexo de cadeia singular:

$$\cdots \rightarrow C_{p+1}(X, G) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(X, G) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X, G) \rightarrow \cdots$$

Lembrando que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Chamamos de grupo das p -**cocadeias singulares** com coeficientes em G ao grupo $\text{Hom}(C_p(X, G), G)$, o qual denotaremos por $C^p(X, G)$, para todo $p \geq 0$. Como o conjunto dos p -simplexos singulares, $C_p(X)$, gera o grupo das p -cadeias singulares, uma aplicação de $C^p(X, G)$ pode ser definida em $C_p(X)$ e estendida por linearidade a $C_p(X, G)$.

A aplicação **cobordo** $\delta^p : C^p(X, G) \rightarrow C^{p+1}(X, G)$ é definida por

$$\delta^p(\varphi) = \varphi \circ \partial_{p+1} : C_{p+1}(X, G) \rightarrow G, \text{ onde } \varphi : C_p(X, G) \rightarrow G.$$

Por $\partial_{p+1} \circ \partial_{p+2} = 0$, temos que $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$. Basta observar que

$$(\delta^{p+1} \circ \delta^p)(\varphi) = \delta^{p+1}(\delta^p(\varphi)) = \delta^{p+1}(\varphi \circ \partial_{p+1}) = \varphi \circ \partial_{p+1} \circ \partial_{p+2} = \varphi \circ 0 = 0$$

para toda $\varphi \in C^p(X, G)$.

Portanto, podemos definir o complexo de cocadeias:

$$\cdots \leftarrow C^{p+1}(X, G) \xleftarrow{\delta^p} C^p(X, G) \xleftarrow{\delta^{p-1}} C^{p-1}(X, G) \leftarrow \cdots$$

E o p -ésimo grupo de cohomologia singular de X com coeficientes em G é dado por

$$H^p(X, G) = \frac{\text{Ker}(\delta^{p+1})}{\text{Im}(\delta^p)}.$$

O elementos de $\text{Ker}(\delta^{p+1})$ são chamados **cociclos** e os elementos de $\text{Im}(\delta^p)$ são chamados **cobordos**.

Dada uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, vimos como induzir uma aplicação

$$f_{\#} : C_p(X, G) \rightarrow C_p(Y, G),$$

a qual podemos dualizar para obter $f_{\#}^{\#} : C^p(Y, G) \rightarrow C^p(X, G)$ dada por $f_{\#}^{\#}(\varphi) := \varphi \circ f_{\#}$, para cada $\varphi \in C^p(Y, G)$. A relação $f_{\#} \circ \partial_{p+1} = \partial_{p+1} \circ f_{\#}$ implica $f_{\#}^{\#} \circ \partial^p = \partial^p \circ f_{\#}^{\#}$, da qual obtemos o homomorfismo

$$f_p^* : H^p(Y, G) \rightarrow H^p(X, G).$$

Seja $A \subset X$, na seção anterior definimos os grupos relativos $C_p(X, A, G) = \frac{C_p(X, G)}{C_p(A, G)}$ e podemos considerar a sequência exata natural:

$$0 \longrightarrow C_p(A, G) \xrightarrow{i} C_p(X, G) \xrightarrow{\pi} C_p(X, A, G) \longrightarrow 0$$

Que induz a seguinte sequência exata dual:

$$0 \longleftarrow C^p(A, G) \xleftarrow{i^*} C^p(X, G) \xleftarrow{\pi^*} C^p(X, A, G) := \text{Hom}(C_p(X, A, G), G) \longleftarrow 0$$

onde $i^*(\varphi) = \varphi \circ i$ e $\pi^*(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi} \circ \pi$.

Um operador cobordo $\delta^p : C^p(X, A, G) \rightarrow C^{p+1}(X, A, G)$ é definido como o original, porém utilizando as aplicações bordo restritas aos quocientes, isto é, dada $\varphi : C_p(X, A, G) \rightarrow G$, então

$$\delta^p(\varphi) := \varphi \circ \partial_{p+1} : C_{p+1}(X, A, G) \rightarrow G, \text{ onde } \partial_{p+1} : C_{p+1}(X, A, G) \rightarrow C_p(X, A, G).$$

Ainda vale $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$. Portanto, podemos considerar cociclos ($\text{Ker}(\delta^{p+1})$) e cobordos ($\text{Im}(\delta^p)$) relativos para definir os grupos de cohomologia singular relativa $H^p(X, A, G)$.

Agora, dada uma aplicação contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, podemos definir

$$f_{\#} : C_p(X, A, G) \rightarrow C_p(Y, B, G),$$

a qual podemos dualizar para obter $f_p^{\#} : C^p(Y, B, G) \rightarrow C^p(X, A, G)$ dada por $f_p^{\#}(\varphi) := \varphi \circ f_{\#}$, para cada $\varphi \in C^p(Y, B, G)$. A relação $f_{\#} \circ \partial_{p+1} = \partial_{p+1} \circ f_{\#}$ implica $f_{p+1}^{\#} \circ \delta^p = \delta^p \circ f_p^{\#}$, da qual obtemos o homomorfismo $f_p^* : H^p(Y, B, G) \rightarrow H^p(X, A, G)$, para todo $p \geq 0$.

1.2.3.1 Axiomas para cohomologia

As propriedades satisfeitas pelos grupos de cohomologia singular podem ser resumidas nos seguintes axiomas:

Axioma 1 A aplicação identidade $i : X \rightarrow X$ induz, para cada $p \geq 0$, a aplicação identidade $i_p^* : H^p(X, G) \rightarrow H^p(X, G)$.

Axioma 2 Se as aplicações $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ são contínuas, então $(g \circ f)_p^* = f_p^* \circ g_p^* : H^p(Z, C, G) \rightarrow H^p(X, A, G)$, para todo $p \geq 0$.

Axioma 3 Seja $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ uma aplicação contínua, então as aplicações induzidas por f são tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(B, G) & \xrightarrow{\delta^{p-1}} & H^p(Y, B, G) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{p-1}^* & & \downarrow f_p^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(A, G) & \xrightarrow{\delta^{p-1}} & H^p(X, A, G) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

é comutativo, para todo $p \geq 0$.

Axioma 4 Sejam $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ duas aplicações homotópicas. Então, as aplicações induzidas nos grupos de cohomologia $f_p^* : H^p(Y, B, G) \rightarrow H^p(X, A, G)$ e $g_p^* : H^p(Y, B, G) \rightarrow H^p(X, A, G)$ são iguais, para todo $p \geq 0$.

Axioma 5 (Teorema da excisão) *Sejam U um subconjunto aberto tal que $U \subset A \subset X$ e $\bar{U} \subset \text{int}(A)$. Então a inclusão $i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo*

$$i^* : H^p(X, A, G) \rightarrow H^p(X - U, A - U, G),$$

para todo $p \geq 0$.

Axioma 6 *Se X é um espaço topológico consistindo de apenas um único ponto, então*

$$H^p(X, G) = \begin{cases} G, & \text{se } p = 0 \\ \{0\}, & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

Analogamente a teoria de cohomologia, a homologia singular com coeficientes em \mathbb{Z} satisfaz uma descrição axiomática proposta por Samuel Eilenberg e Norman Steenrod, como pode ser consultado em (MACLANE, 1979).

1.2.3.2 Produto Cup

Seja R um anel comutativo, as definições feitas nas seções anteriores para um grupo abeliano G podem ser feitas igualmente considerando R . Particularmente, temos

$$C^p(X, R) := \text{Hom}(C_p(X, R), R).$$

Além disso, para facilitar a notação, para um p -simplexo singular $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$, nessa seção denotaremos a aplicação face por $\bar{\partial}_i(\sigma) = \sigma|_{[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p]}$.

Dadas as cocadeias $\varphi \in C^k(X, R)$ e $\psi \in C^l(X, R)$, definimos o **produto cup**:

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X, R)$$

como a cocadeia cujo valor em um simplexo singular $\sigma : \Delta_{k+l} \rightarrow X$ é dado por

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[x_0, \dots, x_k]})\psi(\sigma|_{[x_k, \dots, x_{k+l}]})$$

O lema a seguir relaciona o produto cup com a aplicação cobordo.

Lema 2. *Sejam $\varphi \in C^k(X, R)$ e $\psi \in C^l(X, R)$, então*

$$\delta^{k+l}(\varphi \smile \psi) = (\delta^k(\varphi) \smile \psi) + ((-1)^k \varphi \smile \delta^l(\psi)).$$

Demonstração: *Seja $\sigma : \Delta^{k+l+1} \rightarrow X$ um simplexo singular. Note que:*

$$(\delta^k(\varphi) \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1}]})\psi(\sigma|_{[x_{k+1}, \dots, x_{k+l+1}]}), \text{ e também}$$

$$((-1)^k(\varphi \smile \delta^l(\psi)))(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[x_0, \dots, x_k]}) \psi(\sigma|_{[x_k, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+l+1}]})$$

Ao somar as duas expressões, temos que o último termo da primeira soma cancela com o primeiro termo da segunda soma. O restante das parcelas formam exatamente

$$\delta^{k+l}(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial_{k+l+1}(\sigma)), \text{ pois } \partial_{k+l+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|_{[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+l+1}]}$$

■

Exemplo 11. Se $n \geq 1$, então

$$H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \langle a^i \rangle, & \text{para } 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{para } i > n \end{cases}$$

onde $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$, $a^0 = 1$ e $a^i = \underbrace{a \smile \dots \smile a}_{i\text{-vezes}}$.

(vide (GREENBERG; HARPER, 1981))

FIBRADOS VETORIAIS

Sem rigor, um fibrado vetorial é um espaço topológico dado por uma coleção de espaços vetoriais, sendo tal coleção indexada por outro espaço topológico.

No estudo de variedades suaves, como os espaços tangentes são capazes de fornecer informações sobre o espaço inicial, podemos estudar as variedades tangentes associadas. Uma maneira de estudar a variedade tangente relacionada a uma variedade suave é através de uma estrutura matemática chamada fibrado tangente que é um caso particular de fibrado vetorial.

2.0.1 Definições básicas

Definição 34. Um **fibrado vetorial real** ξ é uma tripla (E, π, B) consistindo de um espaço topológico E , um espaço topológico B e uma aplicação contínua $\pi : E \rightarrow B$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Para todo $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ deve possuir a estrutura de um espaço vetorial real.
2. Para todo ponto $b \in B$, devem existir uma vizinhança $U \subset B$ desse ponto, um número inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tal que, para cada $p \in U$, a restrição $h|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear.

Estamos considerando o conjunto $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ com a estrutura de espaço vetorial induzida pela bijeção entre \mathbb{R}^n e $\{p\} \times \mathbb{R}^n$, isto é, dados $(p, x_1), (p, x_2) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha_1(p, x_1) + \alpha_2(p, x_2) = (p, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Se $\xi = (E, \pi, B)$ é um fibrado vetorial real, usaremos a seguinte terminologia:

- E é chamado de **espaço total**, algumas vezes denotado por $E(\xi)$.

- B é chamado **espaço base**, algumas vezes denotado por $B(\xi)$.
- $\pi : E \rightarrow B$ é chamada **aplicação projeção**, algumas vezes denotada por π_ξ .
- Dado $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ é chamado de **fibra** sobre b , algumas vezes denotada por E_b ou $E(\xi)_b$.
- Na segunda condição da definição, $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é chamada de **trivialização local** e sua inversa h^{-1} é chamada de **sistema de coordenadas locais**.

Algumas vezes a trivialização local é dada por $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times S$, onde S é um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^n . Nessa situação basta considerar um isomorfismo linear $T : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a composição $(Id \times T) \circ h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ para definir uma trivialização local.

A aplicação projeção garante que as fibras que compõe E variam continuamente com o parâmetro b . Como tais fibras são espaços vetoriais, podemos associar a cada $\pi^{-1}(b)$ uma dimensão. Pela trivialização local, temos que essa dimensão é localmente constante. Porém antes de estudar mais a questão da dimensão das fibras de um fibrado vetorial, apresentaremos o exemplo mais simples possível.

Definição 35. Dizemos que o fibrado (E, π, B) é **trivial** se existir uma trivialização global $h : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$.

Intuitivamente, no caso de um fibrado trivial temos que E é igual ao produto $B \times \mathbb{R}^n$ a menos de um reposicionamento contínuo das fibras. A seguir construímos um fibrado trivial, no qual E é exatamente $B \times \mathbb{R}^n$.

Exemplo 12. Sejam B um espaço topológico e $n \in \mathbb{N}$. Considere $E := B \times \mathbb{R}^n$ munido da topologia produto e defina $\pi : E \rightarrow B$ como a projeção na primeira coordenada, a qual é uma aplicação contínua.

Assim sendo, podemos munir $\pi^{-1}(b) = \{(b, v); v \in \mathbb{R}^n\}$ de uma estrutura vetorial real considerando a bijeção

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \pi^{-1}(b) \\ v &\mapsto (b, v) \end{aligned}$$

que coincide com a estrutura de $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ que definimos anteriormente.

Agora podemos tomar $U := E = B \times \mathbb{R}^n$ e considerar a trivialização global $h : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ como a aplicação identidade, a qual é um isomorfismo, em particular um homeomorfismo e $h|_{\pi^{-1}(b)} : \pi^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, para cada $b \in B$.

Portanto, o fibrado $(B \times \mathbb{R}^n, \pi, B)$ é trivial. Denotaremos tal fibrado por \mathcal{E}_B^n .

Agora vamos estudar a questão da dimensão das fibras, começando por um exemplo no qual a dimensão não é globalmente constante no fibrado.

Exemplo 13. O fibrado apresentado a seguir demonstra que é possível que diferentes pontos do espaço base possuam fibras de dimensões diferentes. Considere $B := \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ munido da topologia do subespaço. Defina $E_1 := \{0\} \times \mathbb{R}$ visto como subespaço de \mathbb{R}^2 , $E_2 := \{1\} \times \mathbb{R}^2$ visto como subespaço de \mathbb{R}^3 e considere $E := E_1 \sqcup E_2$ munido da topologia da união disjunta.

Então definimos $\pi : E \rightarrow B$ por

$$\pi(x, v) := \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0; \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

e temos que π é uma aplicação contínua, pois $\pi|_{E_1}$ e $\pi|_{E_2}$ são ambas aplicações contínuas.

Como $\{0\}$ é uma vizinhança de $0 \in B$, a aplicação $s : \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cong E_0$ dada por $h(0, v) := v$ é um sistema de coordenadas locais para o fibrado em uma vizinhança de 0. Assim como, $s' : \{1\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong E_1$ dada por $h(0, v) := v$ é um sistema de coordenadas em uma vizinhança de 1.

Portanto, (E, π, B) é um fibrado no qual a fibra $\pi^{-1}(0)$ tem dimensão um e a fibra $\pi^{-1}(1)$ tem dimensão 2.

O próximo resultado mostra que quando B é um espaço topológico conexo não ocorrem fibras de diferentes dimensões como no exemplo anterior.

Proposição 3. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial real. Se B é conexo, então todas as fibras possuem a mesma dimensão.

A demonstração da proposição é simples, pois as trivializações locais tornam localmente constante (em particular, contínua) a aplicação dimensão: $f : B \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada ponto de b a dimensão da fibra $\pi^{-1}(b)$. Sendo B conexo e \mathbb{N} totalmente desconexo, temos que $f(B)$ é um conjunto unitário e, portanto, todas as fibras de ξ possuem a mesma dimensão.

No caso em que todas as fibras de um fibrado vetorial tem a mesma dimensão, suponha igual a n , diremos que ξ é um fibrado de **posto** n ou chamaremos tal fibrado por **n -fibrado**.

2.0.2 Alguns exemplos importantes

A seguir apresentamos três exemplos canônicos de fibrados vetoriais reais, são eles: fibrado tangente, fibrado tangente da esfera, fibrado de linha tautológico e fibrado tautológico de k -planos, sobre os espaços bases S^n , $\mathbb{R}P^n$ e $G_k(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

2.0.2.1 Fibrado tangente

Seja M uma variedade suave. Considere o fibrado tangente τ_M de M , onde o espaço total é TM , espaço base é M e a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ é dada pela projeção na primeira coordenada $\pi(p, v) := p$, para $p \in M$ e $v \in T_pM$. Vamos apresentar um sistema de coordenadas locais para τ_M . Dado $x \in M$ qualquer, considere $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V \subset M$ uma parametrização local de M em torno de x e defina $h : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(V)$ dada por

$$h(b, v) := d_\varphi \circ (\varphi^{-1} \times id_{\mathbb{R}^k})(b, v),$$

onde $d_\varphi(u, v) = (\varphi(u), d_u\varphi(v))$. Observe que h é um homeomorfismo tal que $\pi \circ h = p_1$, pois se $(b, v) \in V \times \mathbb{R}^k$ temos:

$$\pi \circ h(b, v) = \pi \circ d_\varphi(\varphi^{-1}(b), v) = \pi(b, d_{\varphi^{-1}(b)}\varphi(v)) = b = p_1(b, v).$$

Então, a restrição $h|_{\{b\} \times \mathbb{R}^k} : \{b\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \{b\} \times T_bM$ dada por

$$h(b, v) = (b, d_{\varphi^{-1}(b)}\varphi(v))$$

é um isomorfismo linear, por $d_{\varphi^{-1}(b)}\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_bM$ ser um isomorfismo linear entre espaços vetoriais.

2.0.2.2 Fibrado tangente da esfera

Considere a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com $n \geq 1$. Dado $p \in S^n$, o subespaço vetorial n -dimensional $T_pS^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; v \perp p\}$ é o **espaço tangente** a S^n em p .

Vamos construir um fibrado vetorial sobre a esfera S^n coletando todos os espaços tangentes, ou seja, considerando como espaço total o subespaço

$$E := \{(p, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}; v \in T_pS^n\} \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Seja $\pi : E \rightarrow S^n$ a aplicação projeção na primeira coordenada. Nesse caso, dado $p_0 \in S^n$ temos a fibra $\pi^{-1}(p_0) := \{(p_0, v); v \in T_{p_0}S^n\} = \{p_0\} \times T_{p_0}S^n$. Assim, a estrutura linear de $T_{p_0}S^n$ induz uma estrutura linear na fibra $\pi^{-1}(p_0)$.

Para obter as trivializações locais utilizaremos projeções ortogonais. Dado e_i um vetor da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} , considere o conjunto aberto $U_i := \{p \in S^n; p \not\perp e_i\}$ de S^n .

Observe que se $p \in U_i$, a projeção ortogonal $\pi_{p, e_i} : T_pS^n \rightarrow T_{e_i}S^n$ é um isomorfismo linear. De fato, suponha que $v \in T_pS^n$ está no núcleo de π_{p, e_i} , isso significa que v pertence ao complemento ortogonal do subespaço $T_{e_i}S^n$ e portanto $v = \lambda e_i$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\langle v, p \rangle = 0$ e $\langle e_i, p \rangle \neq 0$, temos $\lambda = 0$, pois $\langle v, p \rangle = \lambda \langle e_i, p \rangle$, portanto $v = 0$.

Definimos uma quase trivialização local por $h : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times T_{e_i}S^n$ dada por

$$h(p, v) := (p, \pi_{p, e_i}(v))$$

que explicitamente é

$$h(p, v) := (p, (v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}))$$

para $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$.

Claro que h é contínua. Para definir sua inversa considere $p = (p_1, \dots, p_n)$. De $\langle v, p \rangle = 0$ segue que $p_1 v_1 + \dots + p_{n+1} v_{n+1} = 0$. Como $p \in U_i$, temos $p_i \neq 0$ e podemos escrever

$$v_i = -\frac{1}{p_i} \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} p_j v_j.$$

Usando essa expressão para v_i definimos $h^{-1} : U_i \times T_{e_i} S^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ por

$$h^{-1}(p, w) = \left(p, (w_1, \dots, w_{i-1}, -\frac{1}{p_i} \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} p_j w_j, \dots, w_{n+1}) \right),$$

a qual é contínua e por construção inversa de h , logo h é um homeomorfismo.

Fixado p a restrição de h à fibra $\{p\} \times T_p S^n$ é simplesmente a projeção ortogonal π_{p, e_i} , a qual já demonstramos ser um isomorfismo linear.

Finalmente, basta considerar um isomorfismo linear $T : T_{e_i} S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a composição $(Id \times T) \circ h : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ define uma trivialização local.

Portanto, a tripla (E, π, S^n) define um fibrado vetorial real chamado **fibrado tangente de S^n** e denotado por τ_{S^n} , ou como a variedade tangente, por TS^n . Este é um caso particular do fibrado tangente (τ_M) sobre uma variedade qualquer M , definido em 2.0.2.1.

2.0.2.3 Fibrado de linhas tautológico

O fibrado vetorial que apresentaremos agora é muito importante para o estudo de classes características. Ele ainda será generalizado a seguir gerando uma classe de fibrados tautológicos que poderá essencialmente descrever qualquer fibrado vetorial, o que reduzirá o estudo de classes característica a tais fibrados. A referência para essa subseção é (HUMSEMOLLER, 1994).

Vamos construir um fibrado vetorial γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$, para $n \geq 1$ um número natural. O espaço total será

$$E(\gamma_n^1) := \{(L, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}; v \in L\},$$

considerado como subespaço do produto $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Intuitivamente, estamos associando a reta L vista como espaço vetorial a ela mesma vista como ponto no espaço projetivo.

Considere $\pi : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a restrição a $E(\gamma_n^1)$ da aplicação projeção na primeira coordenada do produto $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, a qual é contínua. Então fixada uma reta $L_0 \in \mathbb{R}P^n$, temos a fibra

$$\pi^{-1}(L_0) = \{(L_0, v); v \in L_0\} = \{L_0\} \times L_0,$$

a qual tem uma estrutura de espaço vetorial unidimensional induzida pela bijeção entre L_0 e $\{L_0\} \times L_0$.

Agora vamos construir as trivializações locais para essa estrutura. Tal construção será análoga à feita no exemplo anterior do fibrado tangente da esfera, pois dada uma reta $L_0 \in \mathbb{R}P^n$, outras retas próximas de L_0 são isomorfas a esta por projeções ortogonais, então tomaremos o aberto formado por essas retas e usaremos tais projeções ortogonais para definir o homeomorfismo que será isomorfismo quando restrito às fibras.

Assim como no caso dos fibrados tangentes, escolhemos L_0 de forma estratégica para obter expressões mais simples para as trivializações locais.

Dado $j \in \{1, \dots, n+1\}$, definimos $L_j := [e_j] \in \mathbb{R}P^n$ como a reta gerada pelo j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Se $L \in \mathbb{R}P^n$, denotaremos por pr_{L,L_j} a restrição ao subespaço L da projeção ortogonal $\text{pr}_{L_j} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow L_j$, a qual é uma transformação linear. Observe que $v \in L$ pertence ao núcleo de pr_{L,L_j} se, e somente se, $v \in L_j^\perp$. Portanto, temos que pr_{L,L_j} é um isomorfismo se, e somente se, $L \cap L_j^\perp = \{0\}$. Assim, faz sentido definir o conjunto

$$U_j := \{L \in \mathbb{R}P^n; L \cap L_j^\perp = \{0\}\}.$$

Sabemos que a topologia de $\mathbb{R}P^n$ pode ser induzida pela projeção canônica $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, portanto basta observar que $q^{-1}(U_j) = \{v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in S^n; v_j \neq 0\}$ é um aberto de S^n , logo U_j é aberto em $\mathbb{R}P^n$.

Enfim definimos a aplicação contínua $h : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times L_j$ por

$$h(L, v) := (L, \text{pr}_{L,L_j}(v)) = (L, \langle v, e_j \rangle e_j) = (L, (0, \dots, v_j, \dots, 0)).$$

Note que fixado $L \in U_j$, então h aplica a fibra $E(\gamma_n^1)_L = \{L\} \times L$ em $\{L\} \times L_j$, o que corresponde à projeção ortogonal pr_{L,L_j} , ou seja, um isomorfismo linear.

Resta apenas apresentar uma inversa h^{-1} também contínua. A ideia é recuperar as outras coordenadas de $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in L$ a partir de v_j . Se representarmos $L = [u]$ com $u \in S^n$, então existe um único escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$, em particular, $v_j = \lambda u_j$ e dessa forma sabemos que $\lambda = \frac{v_j}{u_j}$. Portanto, considerando ainda $L = [u]$ com $u \in S^n$, definimos $h^{-1}([u], w) = ([u], \frac{w_j}{u_j} u)$. Como $[-u]$ representa o mesmo ponto de $\mathbb{R}P^n$, é preciso que $h^{-1}([u], w) = h^{-1}([-u], w)$ o que realmente ocorre, pois $\frac{w_j}{-u_j}(-u) = \frac{w_j}{u_j} u$.

O fibrado vetorial que acabamos de construir é chamado **fibrado de linhas tautológico sobre $\mathbb{R}P^n$** .

2.0.2.4 Fibrado tautológico de k -planos sobre $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$

Agora vamos generalizar o exemplo anterior, mudando o espaço base para as variedades de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ dos k -planos em \mathbb{R}^{n+k} .

Vamos associar a cada k -plano um vetor que pertence a este plano para definir o espaço total do fibrado vetorial que denotaremos por γ_n^k , isto é:

$$E(\gamma_n^k) := \{(W, v) \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}; v \in W\}$$

visto como subespaço do produto $G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$.

Definimos $\pi : E(\gamma_n^k) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ como a projeção na primeira coordenada restrita a $E(\gamma_n^k)$, a qual é contínua. Nesse caso, a fibra sobre um k -plano W_0 é intuitivamente uma cópia de W_0 e portanto herda sua estrutura linear k -dimensional:

$$E_{W_0} = \pi^{-1}(W_0) = \{(W_0, v); v \in W_0\} = \{W_0\} \times W_0.$$

Para verificar a trivialidade local das fibras utilizaremos projeções ortogonais como no exemplo anterior. Com isso, também precisamos garantir a existência de uma vizinhança de $V \in G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ cujos elementos são isomorfos a V pela projeção ortogonal.

Lembre-se que a variedade de Stiefel ($V_k(\mathbb{R}^{n+k})$) formada por todas as k -uplas de vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^{n+k} (k -referenciais) é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^{n+k})^k$, argumento análogo demonstra que:

Proposição 4. Seja (v_1, \dots, v_k) um k -referencial em \mathbb{R}^{n+k} . Então

$$U := \{(w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^{n+k})^n; (w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_k) \text{ é linearmente independente}\}$$

é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^{n+k})^n$.

Corolário 2. Seja $V \in G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ um k -plano fixado em \mathbb{R}^{n+k} . Então o subconjunto

$$\{W \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}); W \cap V = \{0\}\}$$

é aberto em $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.

Em outras palavras, temos:

Corolário 3. Seja $V \in G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ um k -plano fixado. O subconjunto

$$U := \{W \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}); \text{pr}_{W,V} : W \rightarrow V \text{ é uma bijeção}\}$$

é um aberto de $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$, onde $\text{pr}_{W,V}$ denota a projeção ortogonal sobre V restrita ao k -plano W .

Demonstração: Basta observar que sendo a projeção ortogonal $\text{pr}_{W,V} : W \rightarrow V$ uma aplicação linear, temos que ela é bijetiva se, e somente se, é injetiva, o que acontece se, e somente se, $W \cap V^\perp = \{0\}$, onde $V^\perp \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Nessas condições, basta aplicar o corolário anterior. ■

Então fixado um k -plano $V \in G_k(\mathbb{R}^{n+k})$, seja $U \subset G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ a vizinhança de V definida como no corolário anterior. Podemos considerar $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ dada por

$$h(W, w) := (W, \text{pr}_{W,V}(w)).$$

Assim sendo, a aplicação h é contínua por ter ambas as coordenadas contínuas e sua restrição à uma fibra $\pi^{-1}(W)$ é um isomorfismo entre $\{W\} \times W$ para $\{W\} \times V$, pela forma como escolhemos a vizinhança U .

A inversa contínua de h deve associar $v \in V$ ao único elemento $w \in W$ tal que $\text{pr}_{W,V}(w) = v$, ou seja, $h^{-1}(W, v) = (W, v + T_W v)$, onde $T_W : V \rightarrow V^\perp$ é a transformação linear definida na subseção 1.1.3.

Assim sendo, γ_n^k define um fibrado vetorial chamado **fibrado tautológico de k -planos sobre $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$** . Essa classe de fibrados é importante porque essencialmente todos os fibrados vetoriais podem ser descritos a partir destes e, em termos de classes características, isso significa que as classes de fibrados mais gerais podem ser expressas em termos das classes dos fibrados tautológicos.

2.0.3 Seções

Dado um fibrado $\xi = (E, \pi, B)$, se pensarmos no espaço total E como uma coleção de espaços vetoriais parametrizados pelos pontos do espaço base B , então uma seção é uma aplicação que associa continuamente a cada ponto $b \in B$ um vetor da fibra E_b . Por exemplo, podemos ver campos vetoriais sobre variedades suaves como uma coleção de vetores tangentes variando continuamente ao longo da variedade.

Definição 36. Seja (E, π, B) um fibrado vetorial. Dizemos que uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ é uma **seção** se satisfaz a igualdade $\pi \circ s = id_B$.

A proposição a seguir mostra que todo fibrado admite pelos menos uma seção. Além disso, é possível produzir novas seções a partir de outras já existentes.

Proposição 5. Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial real.

1. A aplicação $s : B \rightarrow E$ dada por $s(b) := 0_{E_b}$ é uma seção de ξ , chamada **seção nula**.
2. Se s e s' são duas seções de ξ , então a aplicação $s + s' : B \rightarrow E$ dada por

$$(s + s')(b) = s(b) + s'(b)$$

é uma seção de ξ .

3. Se $s : B \rightarrow E$ é uma seção de ξ e $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $\phi s : B \rightarrow E$ dada por $\phi s(b) := \phi(b)s(b)$ é uma seção de ξ .

A demonstração de cada um dos itens segue o mesmo padrão. Dado um ponto $b \in B$, como $\pi^{-1}(b)$ é um espaço vetorial, é fácil ver que $s(b) = 0_{E_b}$, $(s + s')(b)$, $\phi s(b) \in E_b$. Além disso, tomando uma trivialização local $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ de ξ em uma vizinhança U de b , mostra-se que a composta $h \circ s$, $h \circ (s + s')$ e $h \circ (\phi s)$ são contínuas e como h é um homeomorfismo, conclui-se que s , $s + s'$ e ϕs são contínuas.

Observe que os itens (2) e (3) mostram que o conjunto das seções de ξ possui uma estrutura de um módulo sobre o anel $C(B, \mathbb{R})$ de funções contínuas $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}$.

A seguir estudaremos como seções podem ajudar a analisar a trivialidade de fibrados.

Definição 37. Uma seção $s : B \rightarrow E$ de um fibrado vetorial (E, π, B) é dita **não-nula** se $s(b) \neq 0_{E_b}$ para todo $b \in B$.

Lema 3. Se $\xi = (E, \pi, B)$ é um fibrado de linhas trivial, então existe uma seção não-nula de ξ .

Demonstração: Se $h : B \times \mathbb{R} \rightarrow E$ é um sistema de coordenadas globais para o fibrado ξ , defina $s : B \rightarrow E$ por $s(b) := h(b, 1)$. Como h é contínua, temos que s é contínua, além disso, como h é um isomorfismo entre as fibras $\{b\} \times \mathbb{R}$ e E_b para todo $b \in B$, temos que $s(b) = h(b, 1) \in E_b$ e $s(b) = h(b, 1) \neq 0$, já que $(b, 1)$ é um vetor não nulo em $\{b\} \times \mathbb{R}$. ■

Agora podemos utilizar esse resultado para verificar a trivialidade de um fibrado de linhas, por exemplo:

Proposição 6. O fibrado de linhas tautológico γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ não é trivial, para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Vamos mostrar que não existe uma seção não-nula de γ_n^1 . Suponha uma seção

$$s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_n^1),$$

vamos mostrar que se s é diferente de zero em algum ponto, então s se anula em algum outro ponto.

De fato, se $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é a aplicação quociente, considere a aplicação $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \langle x, (\pi_2 \circ s \circ q)(x) \rangle$, onde $\pi_2 : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é a restrição a $E(\gamma_n^1)$ da projeção no segundo fator de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Observe que intuitivamente f extrai coeficientes, pois para qualquer $x \in S^n$, pela definição do espaço total $E(\gamma_n^1)$ sabemos que $\pi_2(s(q(x)))$ é um vetor que pertence a reta $\langle x \rangle$, logo $\pi_2(s(q(x))) = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f(x) = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda$.

Como $q(x) = q(-x)$ para todo $x \in S^n$, temos

$$f(-x) = \langle -x, (\pi_2 \circ s \circ q)(-x) \rangle = -\langle x, (\pi_2 \circ s \circ q)(x) \rangle = -f(x).$$

Assim se existe uma reta $L = \langle x_0 \rangle \in \mathbb{RP}^n$ tal que $s(L) \neq 0$, então $f(x_0) \neq 0$, o que implica que os números $f(x_0)$ e $f(-x_0)$ têm sinais opostos. Agora, sendo f uma função contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário temos que existe $y \in S^n$ satisfazendo $f(y) = 0$, portanto $s(\langle y \rangle) = 0$.

Concluimos que não existe uma seção não-nula de γ_n^1 , então segue do lema anterior que o fibrado γ_n^1 é não-trivial para todo $n \geq 0$. ■

Podemos generalizar o critério acima para fibrados de n -planos. Primeiramente vamos generalizar a noção de seção não-nula:

Definição 38. Seja (E, π, B) um fibrado vetorial real. Dizemos que uma coleção de seções $s_1, \dots, s_n : B \rightarrow E$ é linearmente independente se os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independente para todo $b \in B$.

Como um vetor é linearmente independente se, e somente se, é não nulo, temos que uma seção $s : B \rightarrow E$ é linearmente independente se, e somente se, é não-nula, logo a definição acima generaliza o conceito de seção não-nula.

O próximo resultado é útil para a demonstração do critério de trivialização para fibrados de posto n .

Teorema 8. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Se $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma aplicação contínua tal que $f|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$ é um isomorfismo para todo $b \in B$, então f é um homeomorfismo.

Demonstração: Não é difícil mostrar que f é uma bijeção. Feito isso, usa-se as coordenadas locais de ξ e η para demonstrar que f^{-1} é contínua.

Dado $y \in E(\eta)$, seja $b := \pi_\eta(y)$, então temos $y \in E(\eta)_b$. Como $f|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$ é um isomorfismo, existe $x \in E(\xi)_b \subset E(\xi)$ tal que $f(x) = y$, o que demonstra que f é sobrejetiva.

Também por f aplicar isomorficamente as fibras $E(\xi)_b$ às fibras $E(\eta)_b$, temos que $\pi_\xi = \pi_\eta \circ f$. Nesse caso, se $x_1, x_2 \in E(\xi)$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $\pi_\eta(f(x_1)) = \pi_\eta(f(x_2))$, que implica $\pi_\xi(x_1) = \pi_\xi(x_2)$. Seja $b := \pi_\xi(x_1) = \pi_\xi(x_2)$, então temos $x_1, x_2 \in E(\xi)_b$, sendo $f|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$ um isomorfismo, por $f(x_1) = f(x_2)$ devemos ter $x_1 = x_2$, demonstrando a injetividade de f .

Sabendo que f é uma bijeção contínua, resta mostrar que a aplicação inversa

$$f^{-1} : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$$

é contínua. Para isso utilizaremos as coordenadas locais de ξ e η . Dado um ponto $x_0 \in E(\xi)$, seja $b_0 := \pi_\xi(x_0) \in B$. Considere $h_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ e $h_2 : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\eta^{-1}(V)$ sistemas de coordenadas locais em vizinhanças de b_0 para os fibrados ξ e η , respectivamente. Então podemos tomar uma vizinhança W de b_0 suficientemente pequena para que a composição $h_2^{-1} \circ f \circ h_1 : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow W' \times \mathbb{R}^n$ esteja bem definida, onde $W' \times \mathbb{R}^n := h_2^{-1} \circ f \circ h_1(W \times \mathbb{R}^n)$.

Sabendo que as coordenadas locais são homeomorfismos e que f é uma bijeção contínua, temos que $h_2^{-1} \circ f \circ h_1$ é uma bijeção contínua. Como as coordenadas locais são ainda isomorfismos lineares quando restritas às fibras, fixado $b \in W$, temos que a restrição $h_2^{-1} \circ f \circ h_1|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, portanto existe $F_b \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $h_2^{-1} \circ f \circ h_1(b, v) = (b, F_b(v))$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Então definimos $\varphi : U \cap V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ dada por $\varphi(b) := F_b$. Observe que se considerarmos F_b uma matriz, sua j -ésima coluna é dada pelas coordenadas do vetor $h_2^{-1} \circ f \circ h_1(b, e_j)$ com relação à base canônica $\{e_j\}$ de \mathbb{R}^n . Essas coordenadas variam continuamente com b por conta da continuidade de $h_2^{-1} \circ f \circ h_1$, portanto que φ é contínua. Sendo a inversão de matrizes uma aplicação contínua sobre $GL_n(\mathbb{R})$ e também a aplicação de avaliação $GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, temos que a aplicação $H : W' \times \mathbb{R}^n \rightarrow W \times \mathbb{R}^n$ dada por $H(b, u) := (b, F_b^{-1}(u))$ é contínua e inversa de $h_2^{-1} \circ f \circ h_1$. Assim, concluímos que $h_2^{-1} \circ f \circ h_1$ é um homeomorfismo, como h_1 e h_2 já são homeomorfismos, obtemos que f é um homeomorfismo restrito a essa pequena vizinhança de b_0 . Como b_0 é arbitrário, provamos que f é um homeomorfismo, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 9. Um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ de posto n é trivial se, e somente se, existem n seções $s_1, \dots, s_n : B \rightarrow E$ linearmente independentes.

Demonstração: Suponha ξ trivial e seja $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ um sistema de coordenadas globais de ξ . Então, para $j = 1, \dots, n$, basta definir $s_j : B \rightarrow E$ por $s_j(b) := h(b, e_j)$, onde e_j é o j -ésimo elementos da base canônica de \mathbb{R}^n . Como h é contínua, temos que cada s_j é contínua, além disso, como para cada $b \in B$ a restrição de h é um isomorfismo entre as fibras $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ e E_b , temos que para cada $j = 1, \dots, n$ vale $\pi \circ s_j = id_B$ e $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independentes, portanto cada aplicação s_j é uma seção e s_1, \dots, s_n são linearmente independentes.

Reciprocamente, suponha que existem n seções linearmente independentes

$$s_1, \dots, s_n : B \rightarrow E.$$

Então podemos definir a aplicação $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ dado por

$$h(b, (x_1, \dots, x_n)) = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b),$$

a qual é contínua (basta usar a Proposição 5).

Como os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ formam uma base de E_b para cada $b \in B$, temos que a restrição de h é um isomorfismo linear entre as fibras $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ e E_b , portanto segue do teorema anterior que h é um homeomorfismo. A existência do sistema de coordenadas globais ξ demonstra que o fibrado ξ é trivial. ■

Exemplo 14. Dos capítulos anteriores desse trabalho (Exemplo 8 e Corolário 1), sabemos que a esfera S^2 não admite um campo vetorial contínuo não-nulo, em outras palavras, o fibrado tangente sobre a esfera, não admite seção não-nula e, em particular, não admite um par de seções linearmente independentes. Portanto, do teorema anterior, temos que o fibrado tangente sobre a esfera é não-trivial.

Veremos que o mesmo não ocorre com a esfera de dimensão 1.

Definição 39. Uma n -variedade suave M é dita **paralelizável** se o fibrado τ_M é trivial.

Exemplo 15. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é uma 1-variedade suave paralelizável.

Precisamos mostrar que $\tau_{S^1} \cong \varepsilon_{S^1}^1$. Para isso, considere $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} denota o conjunto dos números complexos. Então, temos que

$$S^1 = \{x = x_0 + x_1 i \in \mathbb{C}; |x| = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Defina $s : S^1 \rightarrow TS^1$ dada por

$$s(x) = (x, xi) = ((x_0, x_1), (-x_1, x_0)), \text{ para todo } x = (x_0, x_1) \in S^1.$$

Note que s está bem definida, pois $\langle x, xi \rangle = 0$. Além disso, s é contínua, $\pi_{\tau_{S^1}} \circ s = id_{S^1}$ e $s(x) = xi \neq 0$, para qualquer $x \in S^1$.

Logo, s é uma seção não nula de τ_{S^1} , o que implica que τ_{S^1} é trivial. Em outras palavras, S^1 é paralelizável.

2.0.4 Morfismos e B-morfismos entre fibrados vetoriais

Com o objetivo de relacionar diferentes fibrados vetoriais respeitando suas estruturas, definimos o conceito de morfismo entre fibrados. Intuitivamente, dados dois fibrados vetoriais devemos relacionar seus espaços bases e totais respeitando as relações já estabelecidas pelas projeções, além disso, é natural pedir que a estrutura linear das fibras seja também respeitada.

Definição 40. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B')$ dois fibrados vetoriais reais. Um **morfismo** de ξ para ξ' é um par (u, f) , onde $u : E \rightarrow E'$ e $f : B \rightarrow B'$ são contínuas e satisfazem:

1. As aplicações u e f fazem o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

2. A restrição $u|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_{f(b)}$ é uma transformação linear para todo $b \in B$.

Denotaremos um morfismo (u, f) de ξ para ξ' por $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$. A proposição a seguir possibilitará a definição de um morfismo identidade e também a operação composição de morfismos.

Proposição 7. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$, $\xi' = (E', \pi', B')$ e $\xi'' = (E'', \pi'', B'')$ três fibrados vetoriais reais.

1. $(id_E, id_B) : \xi \rightarrow \xi$ é um morfismo.
2. Se $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ e $(u', f') : \xi' \rightarrow \xi''$ são morfismos, então $(u' \circ u, f' \circ f) : \xi \rightarrow \xi''$ é um morfismo.

Usando o segundo item da proposição acima, definimos a composição de morfismos por $(u, f) \circ (u', f') := (u \circ u', f \circ f') : \xi \rightarrow \xi''$. Das propriedades já conhecidas da composição usual de funções, temos que:

1. Para um fibrado $\xi = (E, \pi, B)$, o morfismo (id_E, id_B) é identidade para a composição, ou seja, se η é outro fibrado, $(u, f) : \xi \rightarrow \eta$ e $(v, g) : \eta \rightarrow \xi$ são morfismos, valem as igualdades

$$(u, f) \circ (id_E, id_B) = (u, f) \text{ e } (id_E, id_B) \circ (v, g) = (v, g).$$

2. Vale a associatividade da composição de morfismos, ou seja, dados três morfismos $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$, $(u', f') : \xi' \rightarrow \xi''$ e $(u'', f'') : \xi'' \rightarrow \xi'''$, vale

$$[(u'', f'') \circ (u', f')] \circ (u, f) = (u'', f'') \circ [(u', f') \circ (u, f)].$$

3. Podemos definir a noção de isomorfismo para fibrados vetoriais. Dados $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B')$, então ξ e ξ' são ditos isomorfos se existem morfismos $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ e $(v, g) : \xi' \rightarrow \xi$ tais que

$$(u, f) \circ (v, g) = (id_E, id_B) \text{ e } (v, g) \circ (u, f) = (id_{E'}, id_{B'}).$$

Pela definição de composição de morfismos, quando ξ e ξ' são isomorfos, temos espaços bases homeomorfos e espaços totais homeomorfos.

Exemplo 16. Vamos construir um morfismo de forma que o fibrado γ_n^1 possa ser visto como um subfibrado de γ_{n+1}^1 .

Considere a aplicação $q_{n+1} \circ i : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$, onde $q_{n+1} : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ é a aplicação quociente e $i : S^n \rightarrow S^{n+1}$ é a inclusão no equador. Como para todo $x \in S^n$, vale $i(-x) = -i(x)$, e para todo $y \in S^{n+1}$, vale $q_{n+1}(-y) = q_{n+1}(y)$, temos que $q_{n+1}(i(-x)) = q_{n+1}(i(x))$, portanto existe uma aplicação induzida $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ satisfazendo $q_n \circ f = q_{n+1} \circ i$, onde $q_n : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é a aplicação quociente.

Observe que dada uma reta $\langle x \rangle \in \mathbb{R}P^n$ com $x \in S^n$, temos que $f(\langle x \rangle) = \langle (x, 0) \rangle$, ou seja, f inclui uma reta de \mathbb{R}^{n+1} em \mathbb{R}^{n+2} por meio do hiperplano $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$.

Então considere a aplicação $u : E(\gamma_n^1) \rightarrow E(\gamma_{n+1}^1)$ dada por

$$u(L, v) := (f(L), (v, 0)) = (L \times \{0\}, (v, 0)),$$

a qual por definição implica a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E(\gamma_n^1) & \xrightarrow{u} & E(\gamma_{n+1}^1) \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_{n+1} \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^{n+1} \end{array}$$

Note que a restrição $u|_{\pi_n^{-1}(L)} : \pi_n^{-1}(L) \rightarrow \pi_{n+1}^{-1}(f(L))$ à fibra

$$\pi_n^{-1}(L) = \{(L, v); v \in L\}$$

é dada por $(L, v) \rightarrow (L \times \{0\}, (v, 0))$ que é uma transformação linear.

Concluimos que o par $(u, f) : \gamma_n^1 \rightarrow \gamma_{n+1}^1$ é um morfismo de fibrados vetoriais, o qual é uma injeção em cada uma das fibras, portanto podemos interpretar o fibrado γ_n^1 como um subfibrado de γ_{n+1}^1 .

Vamos definir uma noção mais restrita de morfismos entre fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço base.

Definição 41. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais reais sobre um mesmo espaço base B . Um **B -morfismo** de ξ para η é uma aplicação contínua $u : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ satisfazendo as seguintes condições:

1. A aplicação u faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{u} & E(\eta) \\ \pi_\xi \searrow & & \swarrow \pi_\eta \\ & B & \end{array}$$

2. A restrição $u|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$ é uma transformação linear para todo $b \in B$.

Denotamos um B -morfismo $u : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ por $u : \xi \rightarrow \eta$.

Note que $u : \xi \rightarrow \eta$ é um B -morfismo se, e somente se, $(u, id_B) : \xi \rightarrow \eta$ é um morfismo de fibrados vetoriais. Assim sendo, os B -morfismos possuem uma estrutura similar a dos morfismos. Dados dois B -morfismos, $u : \xi \rightarrow \eta$ e $v : \eta \rightarrow \gamma$, definimos a composição pela aplicação $v \circ u : \xi \rightarrow \gamma$, a qual é também um B -morfismo.

Então a composição de B -morfismos satisfaz as mesmas propriedades que eram satisfeitas pelos morfismos. Dado um fibrado vetorial real ξ sobre o espaço base B , a aplicação identidade $id_{E(\xi)} : E(\xi) \rightarrow E(\xi)$ é um B -morfismo que satisfaz: dado η outro fibrado vetorial real sobre B , se $u : \xi \rightarrow \eta$ e $v : \eta \rightarrow \xi$ são B -morfismos, temos as igualdades $u \circ id_{E(\xi)} = u$ e $id_{E(\xi)} \circ v = v$.

Vale ainda a associatividade: dados mais dois fibrados γ e θ sobre B , se $u_1 : \gamma \rightarrow \eta$, $u_2 : \eta \rightarrow \xi$ e $u_3 : \xi \rightarrow \theta$ são três B -morfismos, temos que $u_3 \circ (u_2 \circ u_1) = (u_3 \circ u_2) \circ u_1$.

Por fim, definimos a noção de B -isomorfismo entre fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço base B : ξ e η são B -isomorfos se existem B -morfismos $u : \xi \rightarrow \eta$ e $v : \eta \rightarrow \xi$ tais que $u \circ v = id_{E(\eta)}$ e $v \circ u = id_{E(\xi)}$. Observe que um B -isomorfismo é na verdade um homeomorfismo especial entre os espaços totais $E(\xi)$ e $E(\eta)$, o qual é compatível com as estruturas lineares das fibras.

Uma vantagem de trabalharmos sobre um mesmo espaço base B é já conhecermos condições necessárias e suficientes para que um B -morfismo seja um B -isomorfismo. O teorema a seguir é o Teorema 8 da seção anterior reescrito na linguagem de B -morfismos:

Teorema 10. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais reais sobre um mesmo espaço base B e seja $u : \xi \rightarrow \eta$ um B -morfismo. Então u é um B -isomorfismo se, e somente se, a restrição $u|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$ é um isomorfismo linear para todo $b \in B$.

Proposição 8. Um n -fibrado ξ é trivial sobre B se, e somente se, é B -isomorfo ao fibrado ε_B^n definido no exemplo 12.

Demonstração: Se ξ é um n -fibrado trivial sobre B , existe um sistema de coordenadas global $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$. Como $B \times \mathbb{R}^n = E(\varepsilon_B^n)$ e $\pi^{-1}(B) = E(\xi)$, temos que h é um B -isomorfismo entre ξ e ε_B^n . Reciprocamente, se $\xi \cong_B \varepsilon_B^n$, então existe um homeomorfismo $f : E(\varepsilon_B^n) \rightarrow E(\xi)$, isto é, $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$, o qual é um isomorfismo quando restrito às fibras (basta aplicar o teorema anterior). Nesse caso, tomando $h = f$ como sistema de coordenadas global, concluímos que ξ é trivial. ■

Assim, podemos dizer que uma n -variedade suave M é paralelizável (39) se, e somente se, $\tau_M \cong \varepsilon_M^n$.

2.0.5 Novos fibrados a partir de outros fibrados

Os exemplos a seguir são construções de novos fibrados a partir de outros fibrados dados. A saber, apresentaremos os fibrados restrição, produto, soma de Whitney, pullback, subfibrados, mergulhos, fibrado vetoriais Euclidianos, complemento ortogonal e fibrado Hom. Cada um destes fibrados estará relacionado ao seu gerador (ou aos seus geradores) por meio de morfismos (ou B -morfismos).

2.0.5.1 Restrição

Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial. Dado um subespaço $B' \subset B$ do espaço base, vamos construir um fibrado $\xi|_{B'} = (E', \pi', B')$ sobre B' . Para isso, considere $E' := \pi^{-1}(B') \subset E$ e $\pi' := \pi|_{E'} : E' \rightarrow B'$.

Observe que dado $b' \in B'$, a fibra de π' sobre b' é igual a fibra de π sobre b' , portanto possui a mesma estrutura de espaço vetorial real.

Sejam $U \subset B$ uma vizinhança de b' e $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ uma trivialização local. Definimos $U' := U \cap B'$ como uma vizinhança de b' em B' . Então pela igualdade

$$\pi'^{-1}(U') = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(B') = \pi^{-1}(U) \cap E',$$

temos que $\pi'^{-1}(U')$ é um subconjunto aberto de E' . Com isso, definimos a restrição

$$\phi' := \phi|_{\pi'^{-1}(U')} : \pi'^{-1}(U') \rightarrow U' \times \mathbb{R}^n,$$

a qual é um homeomorfismo.

Como a trivialização local ϕ estabelece um isomorfismo linear entre as fibras $E_{b'}$ e $\{b'\} \times \mathbb{R}^n$ e temos a igualdade das fibras $\pi'^{-1}(b') = E_{b'}$, concluímos que ϕ' também estabelece um isomorfismo linear entre $\pi'^{-1}(b')$ e $\{b'\} \times \mathbb{R}^n$, logo é uma trivialização local para $\xi|_{B'}$ em b' .

Segue que $\xi|_{B'} = (E', \pi', B')$ é um fibrado vetorial sobre B' e temos ainda um morfismo de inclusão:

Proposição 9. Considere um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$, um subconjunto $B' \subset B$ e a restrição de $\xi|_{B'} = (E', \pi', B')$. Se $I : E' \rightarrow E$ e $i : B' \rightarrow B$ são as respectivas inclusões, então (I, i) é um morfismo de $\xi|_{B'}$ para ξ .

Intuitivamente, podemos considerar $\xi|_{B'}$ como um subfibrado vetorial de ξ .

Observe ainda que morfismos saindo de ξ podem ser restritos a $\xi|_{B'}$: se η é outro fibrado qualquer e $(u, f) : \xi \rightarrow \eta$ é um morfismo, podemos considerar o morfismo $(u, f) \circ (I, i) : \xi|_{B'} \rightarrow \eta$ que é de fato uma restrição, pois

$$(u, f) \circ (I, i) = (u \circ I, f \circ i) = (u|_{E'}, f|_{B'}).$$

Exemplo 17. Sejam $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial e $U \subset B$ uma vizinhança tal que

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

é uma trivialização local. A restrição $\xi|_U$ é um fibrado vetorial trivial, já que a trivialização ϕ é global para esse novo fibrado.

2.0.5.2 Produto

Dados ξ e η dois fibrados vetoriais, podemos produzir um novo fibrado $\xi \times \eta$ sobre o espaço produto $B(\xi) \times B(\eta)$ satisfazendo que a fibra sobre um ponto (b_1, b_2) seja o igual ao produto das fibras $E(\xi)_{b_1} \times E(\eta)_{b_2}$.

Definimos o espaço total pelo produto $E(\xi \times \eta) := E(\xi) \times E(\eta)$ e a projeção

$$\pi_{\xi \times \eta} : E(\xi) \times E(\eta) \rightarrow B(\xi) \times B(\eta)$$

pelo produto das projeções $\pi_\xi \times \pi_\eta$, isto é, $\pi_{\xi \times \eta}(x, y) = (\pi_\xi(x), \pi_\eta(y))$.

Assim sendo, observe que dado $(b_1, b_2) \in B(\xi) \times B(\eta)$, temos que

$$(x, y) \in \pi_{\xi \times \eta}^{-1}(b_1, b_2) \text{ se, e somente se, } x \in \pi_\xi^{-1}(b_1) \text{ e } y \in \pi_\eta^{-1}(b_2).$$

Portanto, a fibra de $\xi \times \eta$ sobre (b_1, b_2) é igual a $E(\xi)_{b_1} \times E(\eta)_{b_2}$, dotada da estrutura linear do produto.

Resta apresentar as trivializações locais de $\xi \times \eta$. Considerando $(b_1, b_2) \in B(\xi) \times B(\eta)$, podemos tomar vizinhanças U_1 e U_2 de b_1 e b_2 , respectivamente, e trivializações locais

$$h_1 : \pi_\xi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^n \text{ e } h_2 : \pi_\eta^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}^m$$

dos fibrados ξ e η , respectivamente. Como $\pi_{\xi \times \eta}^{-1}(U_1 \times U_2) = \pi_\xi^{-1}(U_1) \times \pi_\eta^{-1}(U_2)$, podemos considerar o homeomorfismo dado pelo produto $h_1 \times h_2 : \pi_{\xi \times \eta}^{-1}(U_1 \times U_2) \rightarrow (U_1 \times \mathbb{R}^n) \times (U_2 \times \mathbb{R}^m)$. Agora basta considerar o homeomorfismo linear

$$T : (U_1 \times \mathbb{R}^n) \times (U_2 \times \mathbb{R}^m) \rightarrow (U_1 \times U_2) \times \mathbb{R}^{n+m} \text{ dado por } T((b, u), (b', v)) = ((b, b'), (u, v)),$$

e a composição $T \circ (h_1 \times h_2) : \pi_{\xi \times \eta}^{-1}(U_1 \times U_2) \rightarrow (U_1 \times U_2) \times \mathbb{R}^{n+m}$ é um homeomorfismo que restrito as fibras é linear, portanto é a trivialização local procurada.

O fibrado $\xi \times \eta$ é chamado de **produto** de ξ e η , sua estrutura permite induzir dois morfismos naturais para os fibrados ξ e η . Considere as projeções nas primeiras coordenadas $P_1 : E(\xi) \times E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ e $p_1 : B(\xi) \times B(\eta) \rightarrow B(\xi)$. É fácil ver que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) \times E(\eta) & \xrightarrow{P_1} & E(\xi) \\ \pi_{\xi \times \eta} \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ B(\xi) \times B(\eta) & \xrightarrow{p_1} & B(\xi) \end{array}$$

Portanto, temos que (P_1, p_1) é um morfismo entre os fibrados vetoriais $\xi \times \eta$ e ξ . Analogamente, as projeções nas segundas coordenadas definem um morfismo (P_2, p_2) de $\xi \times \eta$ para η . A proposição a seguir é uma caracterização do fibrado produto:

Proposição 10. Sejam ξ , η e θ fibrados vetoriais. Dados dois morfismos $(u, f) : \theta \rightarrow \xi$ e $(v, g) : \theta \rightarrow \eta$, existe um único morfismo $(w, h) : \theta \rightarrow \xi \times \eta$ satisfazendo $(P_1, p_1) \circ (w, h) = (u, f)$ e $(P_2, p_2) \circ (w, h) = (v, g)$.

Definindo $w : E(\theta) \rightarrow E(\xi \times \eta)$ por $w(x) := (u(x), v(x))$ e $h : B(\theta) \rightarrow B(\xi \times \eta)$ por $h(z) := (f(z), g(z))$, é fácil demonstrar que $(w, h) : \theta \rightarrow \xi \times \eta$ é um morfismo, satisfaz as composições do enunciado acima e justamente por essa propriedade é único. Além disso, se outro fibrado satisfaz as condições descritas na proposição acima, então esse fibrado é isomorfo ao produto $\xi \times \eta$.

2.0.5.3 Soma de Whitney

Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais reais sobre o mesmo espaço base B . Vamos construir um novo fibrado vetorial $\xi \oplus \eta$ sobre B .

Definimos o espaço total por

$$E(\xi \oplus \eta) := \{(x, y) \in E(\xi) \times E(\eta); \pi_\xi(x) = \pi_\eta(y)\},$$

visto como subespaço do espaço produto $E(\xi) \times E(\eta)$.

A aplicação projeção $\pi : E(\xi \oplus \eta) \rightarrow B$ é definida por $\pi(x, y) := \pi_\xi(x) = \pi_\eta(y)$, a qual pode ser vista como a composição de π_ξ com a projeção na primeira coordenada do produto $E(\xi) \times E(\eta)$, portanto é contínua.

Observe que se $b \in B$, então

$$\pi^{-1}(b) = \{(x, y) \in E(\xi) \times E(\eta); x \in E(\xi)_b \text{ e } y \in E(\eta)_b\} = E(\xi)_b \times E(\eta)_b,$$

logo $\pi^{-1}(b)$ possui a estrutura de espaço vetorial dada pelo produto.

Resta apresentar trivializações locais para $\xi \oplus \eta$. Seja $b_0 \in B$, podemos considerar as trivializações locais $h : \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ e $h' : \pi_\eta^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ para ξ e η , respectivamente, associadas a uma mesma vizinhança U de b_0 , bastando, se necessário, intersectar as vizinhanças e restringir as trivializações. Escrevendo as trivializações em termos de suas componentes como $h = (h_1, h_2)$ e $h' = (h'_1, h'_2)$, podemos definir $H : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ por $H(x, y) := (h_1(x), (h_2(x), h'_2(y)))$.

Note que H é contínua por ter componentes contínuas. Vamos estudar H restrita a uma fibra $\pi^{-1}(b)$. Observe que se $(x, y) \in \pi^{-1}(b) = E(\xi)_b \times E(\eta)_b$, então $x \in E(\xi)_b$, além disso, como h é um isomorfismo entre $E(\xi)_b$ e $\{b\} \times \mathbb{R}^n$, temos que $h(x) = (h_1(x), h_2(x)) \in \{b\} \times \mathbb{R}^n$,

logo $h_1(x) = b$, donde $H(x, y) \in \{b\} \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ para todo $(x, y) \in \pi^{-1}(b)$. Assim sendo, H restrita a fibra $\pi^{-1}(b)$ é dada por

$$H(x, y) := (b, h_2(x), h'_2(y)),$$

que é um isomorfismo linear, já que $h_2 : E(\xi)_b \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ e $h'_2 : E(\eta)_b \rightarrow \mathbb{R}^m$ são isomorfismos lineares.

Para concluir que H é uma trivialização local, basta observar que

$$H^{-1} : U \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \pi^{-1}(U) \text{ é dada por } H^{-1}(b, (u, v)) = (h^{-1}(b, u), h'^{-1}(b, v)),$$

que é uma aplicação contínua pela continuidade de h^{-1} e h'^{-1} .

O fibrado vetorial $\xi \oplus \eta$ é chamado de **soma de Whitney** de ξ e η . Essa construção será importante para o estudo axiomático das classes de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial.

Podemos ainda definir dois B -morfismos naturais. Considere $\pi_1 : E(\xi \oplus \eta) \rightarrow E(\xi)$ a restrição a $E(\xi \oplus \eta)$ da projeção na primeira na primeira coordenada do produto $E(\xi) \times E(\eta)$. Então π_1 é uma aplicação contínua que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} E(\xi \oplus \eta) & \xrightarrow{\pi_1} & E(\xi) \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_\xi \\ & B & \end{array}$$

definindo um B -morfismo de $\xi \oplus \eta$ para ξ . Analogamente, a projeção na segunda coordenada define um B -morfismos $\pi_2 : \xi \oplus \eta \rightarrow \eta$.

A proposição a seguir é uma caracterização do fibrado soma de Whitney:

Proposição 11 (Propriedade universal da soma de Whitney). Sejam ξ , η e γ três fibrados vetoriais reais sobre o mesmo espaço base B . Se $f : \gamma \rightarrow \xi$ e $g : \gamma \rightarrow \eta$ são B -morfismos, então existe um único B -morfismo $u : \gamma \rightarrow \xi \oplus \eta$ satisfazendo $\pi_1 \circ u = f$ e $\pi_2 \circ u = g$.

Demonstração: Basta definir $u : E(\gamma) \rightarrow E(\xi \oplus \eta)$ por $u(x) := (f(x), g(x))$ para todo $x \in E(\gamma)$. Note que u está bem definida, pois se f e g são B -morfismos, temos

$$\pi_\xi(f(x)) = \pi_\gamma(x) = \pi_\eta(g(x)),$$

portanto $u(x) \in E(\xi \oplus \eta)$. A mesma igualdade já demonstra que $\pi \circ u = \pi_\gamma$, onde π é a aplicação projeção de $\xi \oplus \eta$. Como as restrições de f e g às fibras são lineares, temos que u tem a mesma propriedade e portanto é um B -morfismo. Se existisse outro morfismo u' satisfazendo o enunciado acima, a composta de u' com as projeções π_1 e π_2 implicaria $u' = u$, donde segue a unicidade. ■

Exemplo 18. Considere o fibrado de linhas trivial sobre a esfera S^n , o qual denotaremos por $\varepsilon_{S^n}^1$. Vamos mostrar que a soma de Whitney $TS^n \oplus \varepsilon_{S^n}^1$ é trivial, isto é, existe um S^n -isomorfismo entre $E(TS^n \oplus \varepsilon_{S^n}^1)$ e $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Dado $p \in S^n$, considere a decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = T_p S^n \oplus [p]$, onde $[p]$ é o subespaço gerado por p em \mathbb{R}^{n+1} . Mostraremos que aplicação contínua

$$f : S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow E(TS^n \oplus \varepsilon_{S^n}^1) \text{ dada por } f(p, v) := ((p, v - \langle v, p \rangle p), (p, \langle v, p \rangle))$$

é um S^n -isomorfismo.

Observe que, fixado $p \in S^n$, a restrição de f a fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ é linear, pois as aplicações $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} = T_p S^n \oplus [p] \rightarrow T_p S^n$, dada por $f_1(v) = v - \langle v, p \rangle p$, e $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} = T_p S^n \oplus [p] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_2(v) = \langle v, p \rangle$, são lineares.

Além disso, se $v \in \text{Ker}(f|_{\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}})$, então $\langle v, p \rangle = 0$ e $v - \langle v, p \rangle p = 0$, que implica $v = 0$. Logo, f restrita a fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ é um isomorfismo linear.

Segue do Teorema 8 que f é um S^n -isomorfismo, como queríamos demonstrar.

Dados ξ e η dois fibrados sobre o mesmo espaço base B tais que $E(\xi) \subset E(\eta)$, por enquanto, diremos que ξ é um subfibrado de η quando $E(\xi)_b$ for um subespaço vetorial de $E(\eta)_b$, para todo $b \in B$.

Lema 4. Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de um fibrado η . Se $E(\eta)_b = E(\xi_1)_b \oplus E(\xi_2)_b$ para todo $b \in B(\eta)$, então $\eta = \xi_1 \oplus \xi_2$.

Demonstração: Defina a aplicação contínua $f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\eta)$ dada por $f(x, y) = x + y$. Mostraremos que $f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b} : E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b \rightarrow E(\eta)_b$ é um isomorfismo linear.

1. $f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}$ é linear, pois dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, y), (w, z) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b$, temos

$$\begin{aligned} f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}(\alpha(x, y) + (w, z)) &= f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}(\alpha x + w, \alpha y + z) = \\ &\alpha x + w + \alpha y + z = \alpha(x + y) + (w + z) = \\ &\alpha f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}(x, y) + f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}(w, z). \end{aligned}$$

2. $f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}$ é bijetora, pois dado $w \in E(\eta)_b = E(\xi_1)_b \oplus E(\xi_2)_b$, temos que existem únicos $x \in E(\xi_1)_b$ e $y \in E(\xi_2)_b$ tais que $w = x + y$. Então $f|_{E(\xi_1 \oplus \xi_2)_b}(x, y) = w$.

Portanto, por f ser uma aplicação contínua que aplica cada fibra de $\xi_1 \oplus \xi_2$ isomorficamente na fibra correspondente em η , temos que f é um homeomorfismo e com isso $\eta = \xi_1 \oplus \xi_2$. ■

Exemplo 19. Para qualquer espaço topológico B e para qualquer $n > 0$ inteiro, temos que $\varepsilon_B^n \cong \varepsilon_B^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_B^1$.

De fato, provaremos por indução sobre $n > 0$. Para $n = 2$, considere

$$f : B \times \mathbb{R}^2 \rightarrow E(\varepsilon_B^1 \times \varepsilon_B^1) \text{ dada por } f(b, (\alpha, \beta)) = (b, (b, \alpha), (b, \beta)).$$

Neste caso, pela definição de $E(\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1)$, f está bem definida e ainda é contínua.

Além disso, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^2}$ é um isomorfismo linear entre $\{b\} \times \mathbb{R}^2$ e $(\{b\} \times \mathbb{R}) \times (\{b\} \times \mathbb{R})$. Logo, f define um homeomorfismo entre ε_B^2 e $\varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^1$.

Por fim, suponha que $\varepsilon_B^{n-1} \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_B^1}_{(n-1)\text{-vezes}}$.

Agindo da mesma forma que para o caso $n = 2$ acima, obtemos $\varepsilon_B^n \cong \varepsilon_B^1 \oplus \varepsilon_B^{n-1}$. Utilizando a hipótese de indução, concluimos que $\varepsilon_B^n \cong \underbrace{\varepsilon_B^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_B^1}_{n\text{-vezes}}$.

2.0.5.4 Pullback

O fibrado apresentado nessa seção será bastante utilizado ao longo do trabalho, algumas referências importantes são (HATCHER, 2003) e (HUMSEMOLLER, 1994).

Sejam ξ um fibrado vetorial real sobre B , B_1 um espaço topológico qualquer e $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Vamos construir um fibrado $f^*(\xi)$ sobre B_1 . Definimos o espaço total por

$$\begin{aligned} E(f^*(\xi)) &:= \{(b_1, v) \in B_1 \times E(\xi); (f \circ p_1)(b_1, v) = (\pi_\xi \circ p_2)(b_1, v)\} = \\ &= \{(b_1, v) \in B_1 \times E(\xi); f(b_1) = \pi_\xi(v)\}, \end{aligned}$$

onde p_1 e p_2 são as projeções canônicas do produto $B_1 \times E(\xi)$, munido da topologia do subespaço. Observe que pela própria definição do espaço total, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(f^*(\xi)) & \xrightarrow{p_2} & E(\xi) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Definimos a aplicação projeção como a restrição ao espaço total $E(f^*(\xi))$ da projeção na primeira coordenada do produto $\pi := p_1|_{E(f^*(\xi))} : E(f^*(\xi)) \rightarrow B_1$. Nesse caso, a fibra sobre $b_1 \in B_1$ é dada por

$$\pi^{-1}(b_1) = \{(b_1, v); \pi_\xi(v) = f(b_1)\} = \{(b_1, v); v \in E(\xi)_{f(b_1)}\} = \{b_1\} \times E(\xi)_{f(b_1)}$$

com a estrutura linear natural induzida pela fibra $E(\xi)_{f(b_1)}$ (basta considerar a bijeção dada pela restrição da projeção $p_2|_{\pi^{-1}(b_1)}$). Portanto, pela própria definição da estrutura linear de $\pi^{-1}(b_1)$ temos um isomorfismo $\pi^{-1}(b_1) \cong_{p_2} E(\xi)_{f(b_1)}$.

Agora vamos apresentar trivializações locais. Dado um ponto $b_1 \in B_1$, considere o sistema de coordenadas locais $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ em uma vizinhança U do ponto $f(b_1) \in B$. Definimos $U_1 := f^{-1}(U)$ como a vizinhança de b_1 em B_1 e

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_1) \text{ por } h_1(b, x) := (b, h(f(b), x)).$$

Observe que h_1 está bem definida, pois a restrição de h é um isomorfismo entre as fibras $\{f(b)\} \times \mathbb{R}^n$ e $E(\xi)_{f(b)}$, ou seja, $h(f(b), x) \in E(\xi)_{f(b)}$, portanto

$$(b, h(f(b), x)) \in \pi^{-1}(b) \subset \pi^{-1}(U_1).$$

Além disso, h_1 é contínua por ter coordenadas contínuas e fixado $b \in U_1$, a restrição de h_1 ao conjunto $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo com $E(f^*(\xi))_b$, pois a restrição de h estabelece um isomorfismo entre $\{f(b)\} \times \mathbb{R}^n$ e $E(\xi)_{f(b)}$.

Resta apenas apresentar uma inversa contínua para h_1 . Considere

$$H_1 : \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^n \text{ dada por } H_1(b, v) = (b, (p'_2 \circ h^{-1})(v)),$$

onde $p'_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção na segunda coordenada. Note que H^{-1} está bem definida, pois se $(b, v) \in \pi^{-1}(U)$, temos $\pi_\xi(v) = f(b) \in U$, isto é, $v \in \pi_\xi^{-1}(U)$ e podemos aplicar h^{-1} . Ademais, H_1 é contínua por ter coordenadas contínuas, não é difícil verificar que $H_1 \circ h_1 = id_{U_1 \times \mathbb{R}^n}$ e para demonstrar a que $h_1 \circ H_1 = id_{\pi^{-1}(U_1)}$ basta observar que se $(b, v) \in \pi^{-1}(U_1)$, então $\pi_\xi(v) = f(b)$, nesse caso

$$h^{-1}(v) = (f(b), (p'_2 \circ h^{-1})(v)),$$

portanto

$$h_1 \circ H_1(b, v) = h_1(b, (p'_2 \circ h^{-1})(v)) = (b, h(f(b), (p'_2 \circ h^{-1})(v))) = (b, h(h^{-1}(v))) = (b, v).$$

O fibrado vetorial $f^*(\xi)$ é dito **pullback de ξ ao longo de f** . Assim como nos exemplos anteriores temos um morfismo natural induzido pela construção do novo fibrado.

Proposição 12. Dados ξ um fibrado vetorial sobre B e $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação contínua, considere $f^*(\xi)$ o pullback de ξ ao longo de f . O par $(p_2, f) : f^*(\xi) \rightarrow \xi$ é um morfismo de fibrados vetoriais.

Não há muito a ser provado, já que a própria definição do espaço total de $f^*(\xi)$ implica que se $(b, v) \in E(f^*(\xi))$, então $\pi_\xi(v) = f(b)$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(f^*(\xi)) & \xrightarrow{p_2} & E(\xi) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Além disso, dado $b_1 \in B_1$, temos que a estrutura de espaço vetorial definida sobre a fibra $\pi^{-1}(b_1)$ foi induzida exatamente pelo isomorfismo linear dado pela restrição de p_2 . Portanto, (p_2, f) é um morfismo, chamado **morfismo canônico** do pullback de ξ ao longo de f .

A próxima proposição mostra que alguns morfismos com contra-domínio ξ podem ser fatorados pelo morfismo canônico.

Proposição 13. (Propriedade universal do pullback) Sejam ξ um fibrado vetorial sobre B , $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação contínua e $f^*(\xi)$ o pullback de ξ ao longo de f . Se η é um fibrado vetorial sobre B_1 e $(v, f) : \eta \rightarrow \xi$ é um morfismo, existe um único B_1 -morfismo $w : \eta \rightarrow f^*(\xi)$ satisfazendo $(p_2, f) \circ (w, id_{B_1}) = (v, f)$.

Demonstração: Basta definir $w : E(\eta) \rightarrow E(f^*(\xi))$ por $w(x) = (\pi_\eta(x), v(x))$. Note que w está bem definida, pois (v, f) é um morfismo, logo se $x \in E(\eta)$ vale a igualdade

$$\pi_\xi(v(x)) = f(\pi_\eta(x))$$

que implica $(\pi_\eta(x), v(x)) \in E(f^*(\xi))$. A continuidade de w segue da continuidade de suas coordenadas. Como a projeção π de $f^*(\xi)$ é simplesmente a projeção na primeira coordenada, temos $\pi(w(x)) = \pi_\eta(x)$, donde concluímos que $w : \eta \rightarrow f^*(\xi)$ é um B_1 -morfismo. A composição $(p_2, f) \circ (w, id_{B_1}) = (v, f)$ segue da própria definição de w , pois $p_2 \circ w = v$. Por fim, observe que se existisse outro $w' : E(\eta) \rightarrow E(f^*(\xi))$ satisfazendo a proposição, teríamos $p_1 \circ w' = \pi_\eta$ para que w' seja um morfismo e $p_2 \circ w' = v$ para que satisfaça a composição do enunciado, portanto $w'(x) = (\pi_\eta(x), v(x)) = w(x)$, ou seja, w é único. ■

O resultado acima implica uma certa unicidade do pullback como descrevemos no corolários a seguir:

Corolário 4. Sejam ξ um fibrado vetorial sobre B , $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação contínua e $f^*(\xi)$ o pullback de ξ ao longo de f . Se η é um fibrado vetorial sobre B_1 e $(v, f) : \eta \rightarrow \xi$ é um morfismo tal que a restrição $v|_{E(\eta)_{b_1}} : E(\eta)_{b_1} \rightarrow E(\xi)_{f(b_1)}$ é um isomorfismo para todo $b_1 \in B_1$, então η e $f^*(\xi)$ são B_1 -isomorfos.

Demonstração: Pela proposição anterior existe um único B_1 -morfismo

$$w : \eta \rightarrow f^*(\xi) \text{ tal que } (p_2, f) \circ (w, id_{B_1}) = (v, f).$$

Em particular temos $p_2 \circ w = v$, restringindo a uma fibra qualquer obtemos

$$(p_2 \circ w)|_{E(\eta)_{b_1}} = p_2|_{E(f^*(\xi))_{b_1}} \circ w|_{E(\eta)_{b_1}} = v|_{E(\eta)_{b_1}},$$

como p_2 e v são isomorfismos lineares quando restrito as fibras, obtemos que w também tem essa propriedade, então pelo Teorema 8 concluímos que w é um B_1 -isomorfismo. ■

Corolário 5. Sejam ξ_1 e ξ_2 dois fibrados vetoriais B -isomorfos e seja $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Então os fibrados $f^*(\xi_1)$ e $f^*(\xi_2)$ são B_1 -isomorfos.

Demonstração: Considere o morfismo $(p_2, f) : f^*(\xi_2) \rightarrow \xi_2$ e lembre-se de que

$$p_2|_{E(f^*(\xi_2))_{b_1}} : E(f^*(\xi_2))_{b_1} \rightarrow E(\xi_2)_{f(b_1)}$$

é um isomorfismo linear para todo $b_1 \in B_1$. Seja $u : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ um B -isomorfismo. Então a composição

$$(u, id_B) \circ (p_2, f) := (u \circ p_2, f) : f^*(\xi_2) \rightarrow \xi_1$$

é também um morfismo tal que restrito às fibras é um isomorfismo, logo, pelo corolário anterior, temos que $f^*(\xi_2)$ e $f^*(\xi_1)$ são B_1 -isomorfos. ■

Assim como o corolário anterior, com os resultados que já temos, não é difícil verificar a próxima proposição:

Proposição 14. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço B e sejam $f : B_1 \rightarrow B$ e $g : B_2 \rightarrow B$ duas aplicações contínuas. Então

1. Os fibrados vetoriais $(f \circ g)^*(\xi)$ e $g^*(f^*(\xi))$ são B_2 -isomorfos.
2. Os fibrados vetoriais $f^*(\xi \oplus \eta)$ e $f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$ são B_1 -isomorfos.

Demonstração:

1. O morfismo canônico $(p_2, f) : f^*(\xi) \rightarrow \xi$ se restringe para isomorfismos entre as fibras. Assim como o morfismo canônico $(p'_2, g) : g^*(f^*(\xi)) \rightarrow f^*(\xi)$, que também se restringe a isomorfismos entre as fibras (p'_2 é a projeção na segunda coordenada de $B_2 \times E(f^*(\xi))$). Então a composição $(p_2, f) \circ (p'_2, g) = (p_2 \circ p'_2, f \circ g) : g^*(f^*(\xi)) \rightarrow \xi$ é um morfismo que se restringe para isomorfismo entre as fibras. Portanto, pelo Corolário 4, $g^*(f^*(\xi))$ e $(f \circ g)^*(\xi)$ são B_2 -isomorfos.
2. Considere o morfismo canônico $(p_{\xi \oplus \eta}, f) : f^*(\xi \oplus \eta) \rightarrow \xi \oplus \eta$, onde $p_{\xi \oplus \eta}$ é a restrição a $E(f^*(\xi \oplus \eta))$ da projeção na segunda coordenada de $B_1 \times E(\xi \oplus \eta)$. Composto com a projeção canônica $\pi_1 : \xi \oplus \eta \rightarrow \xi$ obtemos o morfismo

$$(\pi_1 \circ p_{\xi \oplus \eta}, f) : f^*(\xi \oplus \eta) \rightarrow \xi.$$

Pela propriedade universal do pullback, existe um único B_1 -morfismo

$$P_1 : f^*(\xi \oplus \eta) \rightarrow f^*(\xi)$$

satisfazendo a composição $(p_\xi, f) \circ (P_1, id_{B_1}) = (\pi_1 \circ p_{\xi \oplus \eta}, f)$, onde p_ξ é a restrição a $E(f^*(\xi))$ da projecção na segunda coordenada de $B_1 \times E(\xi)$.

Explicitamente, P_1 aplica $(b, (x, y)) \in E(f^*(\xi \oplus \eta))$ para o elemento $(b, x) \in E(f^*(\xi))$.

Analogamente obtemos o morfismo $P_2 : f^*(\xi \oplus \eta) \rightarrow f^*(\eta)$ satisfazendo a composição $(p_\eta, f) \circ (P_2, id_{B_1}) = (\pi_2 \circ p_{\xi \oplus \eta}, f)$.

Então a propriedade universal da soma de Whitney nos dá um B_1 -morfismo

$$u : f^*(\xi \oplus \eta) \rightarrow f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$$

tal que $\overline{\pi}_1 \circ u = P_1$ e $\overline{\pi}_2 \circ u = P_2$, onde as aplicações $\overline{\pi}_1 : f^*(\xi) \times f^*(\eta) \rightarrow f^*(\xi)$ e $\overline{\pi}_2 : f^*(\xi) \times f^*(\eta) \rightarrow f^*(\eta)$ são as projecções na primeira e segunda coordenada respectivamente.

Note que u aplica

$$(b, (x, y)) \in E(f^*(\xi \oplus \eta)) \text{ para } ((b, x), (b, y)) \in E(f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)).$$

Como as fibras de $f^*(\xi \oplus \eta)$ são da forma $E(f^*(\xi \oplus \eta))_b = \{b\} \times (E(\xi)_b \oplus E(\eta)_b)$, e as fibras de $f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$ são da forma

$$E(f^*(\xi) \oplus f^*(\eta))_b = (\{b\} \times E(\xi)_b) \oplus (\{b\} \times E(\eta)_b),$$

vemos que u é um isomorfismo entre as fibras, o que implica que u é um B_1 -isomorfismo, utilizando novamente o Teorema 8.

■

Exemplo 20. Considere ξ um fibrado vetorial sobre B e seja $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação constante igual a $b \in B$. Observe que $(b_1, v) \in E(f^*(\xi))$ se, e somente se, $v \in E(\xi)_b$. Assim, temos $E(f^*(\xi)) = B_1 \times E(\xi)_b$. Se $E(\xi)_b$ tem dimensão n , seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)_b$ um isomorfismo linear. Então podemos definir o sistema de coordenadas $h : B_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(f^*(\xi))$ dado por $h(b_1, x) = (b_1, T(x))$, o qual é global. Portanto, $f^*(\xi)$ é um fibrado trivial.

Exemplo 21. Sejam ξ e η fibrados sobre o mesmo espaço base B e $d : B \rightarrow B \times B$ a aplicação diagonal dada por $d(b) = (b, b)$, então $\xi \oplus \eta \cong d^*(\xi \times \eta)$. Basta observar que:

$$E(\xi \oplus \eta) = \{(x, y); \pi_\xi(x) = \pi_\eta(y)\} \text{ e } E(d^*(\xi \times \eta)) = \{(b, (x, y)); (\pi_\xi(x), \pi_\eta(y)) = (b, b)\}.$$

Quando conveniente, utilizaremos esta equivalência.

Exemplo 22. Se ξ é um n -fibrado trivial sobre B e $f : B_1 \rightarrow B$ é uma aplicação contínua, então $f^*(\xi)$ é também um n -fibrado trivial. De fato, pelo Teorema 9, sabemos que um n -fibrado é trivial se, e somente se, existem n seções linearmente independentes. Como por hipótese ξ é trivial, existem n seções linearmente independentes $s_1, \dots, s_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ sobre ξ . Defina

$$S_i : B_1 \rightarrow E(f^*(\xi)) \text{ por } S_i(x) := (x, s_i(f(x))) \text{ para todo } x \in B_1 \text{ e } i = 1, \dots, n.$$

Note que S_i são contínuas, por terem coordenadas contínuas e para todo $x \in B_1$ temos $\pi_1 \circ S_i(x) = \pi_1(x, s_i(f(x))) = x = id_{B_1}(x)$. Além disso, o conjunto $\{S_1, \dots, S_n\}$ é linearmente independente, pois para qualquer $x \in B_1$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(x) = 0 \in E(f^*(\xi))_x$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(x) = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i (b, s_i(f(x))) = 0 \iff \\ \left(b, \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(f(x)) \right) = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i(f(x)) = 0 \iff \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto, $f^*(\xi)$ admite n seções linearmente independentes e é um n -fibrado trivial.

Para finalizar essa seção, apresentaremos uma noção mais geral do que a definição de isomorfismo entre fibrados.

Definição 42. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais reais. Dizemos que uma função contínua $g : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma **aplicação fibrada** de ξ para η se g leva cada fibra $E(\xi)_b$ isomorficamente em alguma fibra $E(\eta)_{b'}$, com $b \in B(\xi)$ e $b' \in B(\eta)$.

Mostraremos que dada uma aplicação fibrada g de ξ para η , existe uma única aplicação contínua associada $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ fazendo o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) & \xrightarrow{\bar{g}} & B(\eta) \end{array}$$

De fato, defina $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ por $\bar{g}(b) = b'$, onde b' é tal que $g(E(\xi)_b) = E(\eta)_{b'}$.

Dado $x \in E(\xi)$, temos que $x \in E(\xi)_{\pi_\xi(x)}$. Se $g(E(\xi)_{\pi_\xi(x)}) = E(\eta)_{b'}$ para algum $b' \in B(\eta)$, então $\bar{g} \circ \pi_\xi(x) = b'$. Por outro lado, como $g(x) \in E(\eta)_{b'}$, temos que $\pi_\eta(g(x)) = b'$. Portanto, $\bar{g} \circ \pi_\xi = \pi_\eta \circ g$.

Para provarmos a continuidade de \bar{g} usaremos que para qualquer fibrado ξ , a projeção $\pi_\xi : E(\xi) \rightarrow B(\xi)$ é uma aplicação aberta.

Considere $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ um sistema de coordenadas locais de ξ sobre $b \in B(\xi)$. É suficiente mostrar que $\pi_\xi|_{\pi_\xi^{-1}(U)} : \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow U$ é aberta.

Se $A \subset \pi_\xi^{-1}(U)$ é um aberto, então $h^{-1}(A) \subset U \times \mathbb{R}^n$ e $p_1(h^{-1}(A)) \subset U$ são abertos, por h ser contínua e p_1 ser uma aplicação aberta. Como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi_\xi^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi_\xi \\ & U & \end{array}$$

comuta, então $\pi_\xi(A) = p_1(h^{-1}(A)) \subset U$ é um aberto, demonstrando que π_ξ é uma aplicação aberta.

Agora, voltando ao nosso objetivo inicial, note que se $A \subset B(\eta)$ é um aberto, temos que $\bar{g}^{-1}(A) = \pi_\xi(g^{-1}(\pi_\eta^{-1}(A))) \subset B(\xi)$ é um aberto, portanto \bar{g} é contínua.

Por fim, resta apenas provar a unicidade de \bar{g} . Suponha que exista $\tilde{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ contínua tal que $\tilde{g} \circ \pi_\xi = \pi_\eta \circ g$. Então se $b \in B(\xi)$, considere $0 \in E(\xi)_b$. Nesse caso,

$$\tilde{g}(b) = \tilde{g}(\pi_\xi(0)) = \pi_\eta(g(0)) = \bar{g}(\pi_\xi(0)) = \bar{g}(b),$$

de onde concluímos que $\tilde{g} = \bar{g}$.

Com isso, temos associada a uma aplicação fibrada $g : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ uma única aplicação contínua \bar{g} e podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 5. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais reais. Se $g : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma aplicação fibrada de ξ para η e $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ é sua aplicação correspondente nos espaços bases, então $\xi \cong \bar{g}^*(\eta)$.

Demonstração: Defina $f : E(\xi) \rightarrow E(\bar{g}^*(\eta))$ por $f(x) := (\pi_\xi(x), g(x))$. Como por hipótese, $\pi_\eta(g(x)) = \bar{g}(\pi_\xi(x))$, temos que f está bem definida. A continuidade de f , segue da continuidade de π_ξ e g .

Agora, observe que se $x \in E(\xi)_b$, então

$$f(x) = (\pi_\xi(x), g(x)) = (b, g(x)) \in \{b\} \times E(\eta)_{\bar{g}(b)} = E(\bar{g}^*(\eta))_b.$$

Assim, $f(E(\xi))_b \subset E(\bar{g}^*(\eta))_b$. Ainda, como $g|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_{\bar{g}(b)}$ é um isomorfismo linear, temos $f|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\bar{g}^*(\eta))_b = \{b\} \times E(\eta)_{\bar{g}(b)}$ dada por

$$f|_{E(\xi)_b}(x) = (b, g|_{E(\xi)_b}(x))$$

também é um isomorfismo linear.

Portanto, segue do Teorema 8 que f é um homeomorfismo e com isso $\xi \cong \bar{g}^*(\eta)$. ■

2.0.5.5 Subfibrados e mergulhos

Um subfibrado de um fibrado vetorial dado é um fibrado vetorial que está contido nesse outro, de forma que a estrutura do subfibrado seja induzida pela estrutura do fibrado ambiente.

Definição 43. Seja ξ um fibrado vetorial. Dizemos que um fibrado vetorial η é um **subfibrado** de ξ se satisfaz as seguintes condições:

1. $B(\eta)$ é um subespaço de $B(\xi)$;

2. $E(\eta)$ é um subespaço de $E(\xi)$;
3. A projeção π_η é dada pela restrição da projeção π_ξ ao subespaço $E(\eta)$;
4. $E(\eta)_b$ é um subespaço vetorial de $E(\xi)_b$ para todo $b \in B$.

As condições acima formalizam a ideia de que η é um subfibrado de ξ quando sua estrutura é induzida pela estrutura de ξ , incluindo as topologias nos espaços bases e total, a aplicação projeção, como também a estrutura linear das fibras.

A seguir temos alguns exemplos de fibrados que já estudamos e podem ser vistos como subfibrados.

Exemplo 23. Sejam ξ um fibrado vetorial e $B' \subset B(\xi)$ um subconjunto. O fibrado dado pela restrição $\xi|_{B'}$ é um subfibrado de ξ .

Exemplo 24. O fibrado tangente TS^n da esfera unitária S^n é um subfibrado do fibrado trivial $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. De fato, os dois fibrados tem o mesmo espaço base, o espaço total de TS^n é um subespaço do produto $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ formado pelos pares (p, v) satisfazendo $v \in T_p S^n$, além disso, a fibra sobre um ponto $p \in S^n$ é dada por $\{p\} \times T_p S^n$ que é um subespaço linear de $\{p\} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 25. Como no exemplo anterior, o fibrado tautológico γ_n^k é um subfibrado do fibrado trivial $G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$. Lembre-se que o espaço total de γ_n^k é um subespaço do produto $G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$ formado pelos pares (W, v) tal que $v \in W$. A fibra sobre o k -plano $W \in G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ é dada pelo produto $\{W\} \times W$, o qual é um subespaço linear de $\{W\} \times \mathbb{R}^{n+k}$.

Temos associado a cada subfibrado um morfismo de inclusão para o fibrado vetorial ambiente.

Proposição 15. Sejam ξ um fibrado vetorial e η um subfibrado. Considere $I : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ e $i : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ as respectivas inclusões. Então $(I, i) : \eta \rightarrow \xi$ é um morfismo de fibrados vetoriais.

Demonstração: A continuidade das inclusões segue do fato de que $B(\eta)$ e $E(\eta)$ são subespaços de $B(\xi)$ e $E(\xi)$ respectivamente. A comutatividade das inclusões com as projeções é trivial. Dado $b \in B(\eta)$, a restrição $I|_{E(\eta)_b}$ inclui a fibra $E(\eta)_b$ na fibra $E(\xi)_b$, essa inclusão é linear porque $E(\eta)_b$ é um subespaço vetorial de $E(\xi)_b$. Observe que se θ é outro fibrado vetorial qualquer e $(u, f) : \xi \rightarrow \theta$ é um morfismo, então o par $(u|_{E(\eta)}, f|_{B(\eta)})$ é um morfismo de η em θ , onde η é um subfibrado de ξ . Basta verificar a igualdade $(u|_{E(\eta)}, f|_{B(\eta)}) = (u, f) \circ (I, i)$. ■

Nosso próximo objetivo é obter subfibrados a partir de morfismos especiais. Situação análoga ocorre no caso variedades suaves, onde subvariedades podem ser obtidas a partir de mergulhos suaves.

Definição 44. Um morfismo entre fibrados vetoriais $(u, f) : \xi \rightarrow \theta$ é um **mergulho** quando:

1. $f : B(\xi) \rightarrow B(\theta)$ é um mergulho topológico, isto é, quando f define um homeomorfismo sobre sua imagem.
2. $u : E(\xi) \rightarrow E(\theta)$ é um mergulho topológico, isto é, quando u define um homeomorfismo sobre sua imagem.
3. A restrição $u : E(\xi)_b \rightarrow E(\theta)_{f(b)}$ é injetiva para todo $b \in B(\xi)$.

Exemplo 26. Observe que se ξ é um fibrado vetorial e η é um subfibrado de ξ , então o morfismo inclusão $(I, i) : \eta \rightarrow \xi$ é um mergulho.

Agora mostraremos que um mergulho dá origem a um subfibrado do contra-domínio.

Seja $(u, f) : \xi \rightarrow \eta$ um mergulho, definimos a tripla $Im(u, f) := (Im\ u, \pi_\eta|_{Im\ u}, Im\ f)$, a qual primeiramente mostraremos ser um fibrado vetorial. De fato, consideramos $Im\ u$ e $Im\ f$ como subespaços de $E(\eta)$ e $B(\eta)$, respectivamente. Dessa forma, a restrição $\pi_\eta|_{Im\ u}$ é contínua e, por (u, f) ser um morfismo, aplica $Im\ u$ para $Im\ f$.

Seja $f(b) \in Im\ f$, então $(\pi_\eta|_{Im\ u})^{-1}(f(b)) = Im(u|_{E(\xi)_b})$. Sendo a restrição

$$u|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_{f(b)}$$

uma transformação linear injetiva, temos que sua imagem $Im(u|_{E(\xi)_b})$ é um subespaço linear da fibra $E(\eta)_{f(b)}$.

Resta construir trivializações locais. Seja $U \subset B(\xi)$ um aberto tal que existe

$$\phi : \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

uma trivialização local. Como f é um mergulho, $f(U)$ é aberto em $Im\ u$ e vale a igualdade $(\pi_\eta|_{Im\ u})^{-1}(f(U)) = u(\pi_\xi^{-1}(U))$. Defina

$$\psi : (\pi_\eta|_{Im\ u})^{-1}(f(U)) \rightarrow f(U) \times \mathbb{R}^n \text{ como sendo a composição } (f \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \phi \circ u^{-1}.$$

Como as aplicações envolvidas são homeomorfismos, o mesmo vale para ψ , além disso, como u^{-1} e ϕ são lineares quando restritas às fibras, vale o mesmo para ψ . Portanto, a tripla $Im(u, f)$ é um fibrado vetorial.

Proposição 16. Sejam ξ e η fibrados vetoriais e seja $(u, f) : \xi \rightarrow \eta$ um mergulho. Então $Im(u, f)$ é um subfibrado de η isomorfo a ξ . Reciprocamente, todo subfibrado de η é da forma $Im(u, f)$ para algum fibrado ξ e algum mergulho $(u, f) : \xi \rightarrow \eta$.

Demonstração: Como f e u são mergulhos por hipótese, os espaços $Im\ u$ e $Im\ f$ são subespaços de $E(\eta)$ e $B(\eta)$, respectivamente. Assim, podemos definir a projeção de $Im(u, f)$ como uma

restrição da projeção de η . Além disso, a estrutura linear das fibras de $\text{Im}(u, f)$ foi definida de forma a torná-las subespaços das fibras correspondentes de η . Logo, $\text{Im}(u, f)$ é um subfibrado de η .

Para definir um isomorfismo entre $\text{Im}(u, f)$ e ξ basta considerar o morfismo

$$(u^{-1}, f^{-1}) : \text{Im}(u, f) \rightarrow \xi$$

que inverte $(u, f) : \xi \rightarrow \text{Im}(u, f)$.

Agora, seja θ um subfibrado qualquer de η . Sabemos que o morfismo inclusão $(I, i) : \theta \rightarrow \eta$ é um mergulho, portanto $\text{Im}(I, i) = \theta$, o que demonstra que todo subfibrado é dado pela imagem de algum mergulho. ■

O próximo resultado mostra que quando trabalhamos com fibrados sobre um mesmo espaço base a noção de mergulho pode ser simplificada.

Proposição 17. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Se $u : \xi \rightarrow \eta$ é um B -morfismo tal que a restrição $u|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$ é injetiva para todo $b \in B$, então $(u, id_B) : \xi \rightarrow \eta$ é um mergulho.

A injetividade de u segue da sua injetividade em cada uma das fibras. Portanto, u é uma bijeção contínua sobre sua imagem. Resta mostrar que existe uma inversa contínua u^{-1} . Faremos isso localmente e utilizaremos o seguinte lema.

Lema 6. Seja B um espaço topológico e considere os fibrados triviais $B \times \mathbb{R}^m$ e $B \times \mathbb{R}^n$. Suponha que $u : B \times \mathbb{R}^m \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ é um B -morfismo tal que a restrição $u|_{\{b\} \times \mathbb{R}^m} : \{b\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $b \in B$. Suponha ainda que existe um subespaço W de \mathbb{R}^n tal que

$$\text{Im}((p_2 \circ u)|_{\{b\} \times \mathbb{R}^m}) \oplus W = \mathbb{R}^n$$

para todo $b \in B$. Então, u é um mergulho.

Demonstração do Lema: Vamos fixar uma base $\{w_1, \dots, w_{n-m}\}$ para W . Para cada $b \in B$, considere a transformação linear $U_b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$U_b(x_1, \dots, x_m) := p_2(u(b, (x_1, \dots, x_m))),$$

onde $p_2 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção na segunda coordenada. Tais transformações dependem continuamente de b e podemos estender cada uma delas a uma aplicação $T_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$T_b(x_1, \dots, x_n) := U_b(x_1, \dots, x_m) + \sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i} \cdot w_i,$$

a qual é um isomorfismo linear. Assim, podemos tomar as aplicações inversas T_b^{-1} e sendo a inversão de isomorfismos uma operação contínua, temos que as aplicações também T_b^{-1} dependem continuamente de b .

Definimos a aplicação $v : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$ dada por

$$v(b, (x_1, \dots, x_n)) = (b, (p(T_b^{-1}(x_1, \dots, x_n)))),$$

onde $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção nas m primeiras coordenadas.

Então, dado $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $b \in B$, note que

$$T_b(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = U_b(x_1, \dots, x_m),$$

o que implica que

$$T_b^{-1}(U_b(x_1, \dots, x_m)) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Portanto,

$$v(u(b, x_1, \dots, x_m)) = (b, (x_1, \dots, x_m)),$$

demonstrando que a restrição de v à imagem de u é a aplicação u^{-1} que estávamos procurando. Como tal restrição é contínua, concluímos que u é um mergulho, ou seja, um homeomorfismo sobre sua imagem. ■

Continuando a demonstração original da proposição. Tome $b \in B$ e considere uma vizinhança U de b tal que existam trivializações locais $\phi : \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ e $\psi : \pi_\eta^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ de ξ e η , respectivamente. Então a aplicação

$$\psi \circ u \circ \phi^{-1} : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

satisfaz as condições do Lema, sendo portanto um mergulho. Como ϕ e ψ são homeomorfismos, concluímos que $u : \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow \pi_\eta^{-1}(U)$ é um mergulho. Assim, provamos que a aplicação inversa $u^{-1} : \text{Im } u \rightarrow E(\xi)$ é contínua quando restrita aos abertos $\pi_\xi^{-1}(U) \cap \text{Im } u$. Como tais abertos cobrem $\text{Im } u$, concluímos que u^{-1} é contínua. ■

2.0.5.6 Fibrados Vetoriais Euclidianos e Complementos Ortogonais

Para a construção dos fibrados vetoriais chamados complementos ortogonais, precisamos antes introduzir os fibrados euclidianos. Sem rigor, desejamos definir um fibrado cujo espaço total é munido por um produto interno.

Definição 45. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma aplicação $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma quadrática positiva definida** se

$$\mu(v) := \sum_{i=1}^n l_i(v)l_i'(v),$$

onde $l_i, l'_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ são transformações lineares para todo $i = 1, \dots, n$, e $\mu(v) > 0$, para todo $v \in V$ não nulo.

A partir de μ como na definição acima, é possível obter uma aplicação bilinear e simétrica $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle v, w \rangle := \frac{1}{2}[\mu(v+w) - \mu(w) - \mu(v)]$. Essa aplicação é tal que

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \frac{1}{2}[\mu(2v) - 2\mu(v)] = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_i(2v)l'_i(2v) \right) - 2\mu(v) \right] = \\ &= \frac{1}{2}[4\mu(v) - 2\mu(v)] = \mu(v). \end{aligned}$$

Definição 46. Um espaço vetorial V de dimensão finita é um **espaço vetorial Euclidiano** se for possível definir uma forma quadrática definida positiva $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, o número $\langle v, w \rangle$ será dito o **produto interno** dos elementos de V .

Definição 47. Um **fibrado vetorial Euclidiano** ξ é um fibrado vetorial real com uma função contínua $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a restrição $\mu|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática definida positiva para todo $b \in B(\xi)$. Nestas condições, μ é chamada **métrica Euclidiana do fibrado** ξ .

Exemplo 27. Seja M uma variedade suave. Considere o fibrado tangente τ_M de M , definido em 2.0.2.1. Mostremos que τ_M é um fibrado Euclidiano.

De fato, basta considerar $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu(p, (v_1, \dots, v_n)) := \sum_{i=1}^n v_i^2$. Temos que μ é contínua e, para todo $p \in M$,

$$\mu|_{E(\tau_M)_p} : E(\tau_M)_p \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $\mu|_{E(\tau_M)_p}(p, (v_1, \dots, v_n)) := \sum_{i=1}^n v_i^2$ é uma forma quadrática definida positiva.

Uma métrica Euclidiana $\mu : TM \rightarrow \mathbb{R}$ para τ_M é chamada **métrica Riemanniana** e o par (M, μ) é dita uma **variedade Riemanniana**.

Vejamos alguns exemplos de fibrados vetoriais já conhecidos que são Euclidianos.

Exemplo 28. Para qualquer espaço topológico B e para qualquer $n > 0$ inteiro, temos que ε_B^n é um fibrado Euclidiano. Basta definir

$$\mu : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ por } \mu(b, (x_1, \dots, x_n)) := \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Então μ é contínua e fixado $b \in B$, a restrição $\mu|_{E(\varepsilon_B^n)_b} : E(\varepsilon_B^n)_b \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática definida positiva.

Exemplo 29. O fibrado de linhas tautológico γ_n^1 é um fibrado Euclidiano. Observe que se $x \in S^n$ e $(\langle x \rangle, v) \in \gamma_n^1$, então $v = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, utilizando o produto interno canônico de \mathbb{R}^{n+1} , temos que $\langle x, v \rangle = \lambda$. Assim, podemos definir $\mu : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mu(\langle x \rangle, v) := \begin{cases} \lambda, & \text{se } v = \lambda x \text{ e } \lambda \geq 0 \\ -\lambda, & \text{se } v = \lambda x \text{ e } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Segue da própria definição do produto interno canônico de \mathbb{R}^{n+1} que a restrição de μ à fibra $E(\gamma_n^1)_{\langle x \rangle}$ é uma forma quadrática definida positiva.

A seguir temos um resultado sobre fibrados Euclidianos triviais, o qual é o Teorema 9 aprimorado pelo processo de Gram-Schmidt permitido pelo produto interno definido no espaço total do fibrado Euclidiano.

Lema 7. Seja ξ um n -fibrado Euclidiano trivial. Então existem n seções

$$s_1, \dots, s_n : B(\xi) \rightarrow E \text{ de } \xi \text{ que são ortonormais,}$$

$$\text{no sentido que } \langle s_i(b), s_j(b) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ para todo } b \in B(\xi).$$

Demonstração: Como ξ é um n -fibrado trivial, existem n seções linearmente independentes $s'_1, \dots, s'_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$. Aplicando o processo de Gram-Schmidt para $s'_1(b), \dots, s'_n(b)$, obtemos uma base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ de $E(\xi)_b$, para todo $b \in B$. Como as funções resultantes s_i são contínuas para todo $i = 1, \dots, n$, segue que s_1, \dots, s_n são n seções ortogonais de ξ . ■

Complemento ortogonal

O fibrado complemento ortogonal nos permitirá definir o fibrado normal a uma variedade, o qual será importante nos próximos capítulos.

Sejam η um fibrado vetorial Euclidiano sobre B e $\xi \subset \eta$ um subfibrado também sobre B , isto é, cada fibra $E(\xi)_b$ é um subespaço vetorial da fibra $E(\eta)_b$, para qualquer $b \in B$. Agora, para cada $b \in B$, defina

$$E(\xi^\perp)_b := (E(\xi)_b)^\perp = \{v \in E(\eta)_b; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in E(\xi)_b\} \subset E(\eta)_b.$$

Construiremos ξ^\perp um o fibrado vetorial cujo espaço total é $E(\xi^\perp) = \bigcup_{b \in B} E(\xi^\perp)_b$, o espaço base é B e a projeção é a restrição $\pi = \pi_\eta|_{E(\xi^\perp)} : E(\xi^\perp) \rightarrow B$.

Temos que π é contínua, vamos analisar suas fibras. Dado $b \in B$:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(b) &= \left(\pi_\eta|_{E(\xi^\perp)} \right)^{-1}(b) = \pi_\eta^{-1}(b) \cap E(\xi^\perp) = \pi_\eta^{-1}(b) \cap \bigcup_{b \in B} E(\xi^\perp)_b = \\ &= \bigcup_{b \in B} (\pi_\eta^{-1}(b) \cap E(\xi^\perp)_b) = \pi_\eta^{-1}(b) \cap E(\xi^\perp)_b = E(\xi^\perp)_b. \end{aligned}$$

Então $\pi^{-1}(b)$ tem a estrutura linear induzida pela estrutura de $E(\eta)_b$. Resta provar a trivialidade local.

Suponha η um n -fibrado e ξ um m -fibrado, com $m \leq n$. Vamos mostrar a trivialidade local de ξ^\perp . Sejam $b_0 \in B$ qualquer e $U \subset B$ uma vizinhança de b_0 tal que existem trivializações locais $h_1 : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ e $h_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\eta^{-1}(U)$ para ξ e η , respectivamente. Nesse caso, temos que $h_1|_{\{b\} \times \mathbb{R}^m} : \{b\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow E(\xi)_b$ e $h_2|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\eta)_b$ são isomorfismos lineares para todo $b \in U$

Observe que $\pi_\xi^{-1}(U) \subset \pi_\eta^{-1}(U)$, pois $E(\xi)_b \subset E(\eta)_b$, para todo $b \in U$.

Como $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são triviais, existem m seções ortogonais $s_1, \dots, s_m : U \rightarrow E(\xi)$ de $\xi|_U$ e n seções ortogonais $s'_1, \dots, s'_n : U \rightarrow E(\eta)$ de $\eta|_U$. Considere a matriz $A = (\langle s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle)_{m \times n}$. Provaremos que A tem posto m , para tanto basta verificar que as m -linhas de A são linearmente independentes. Para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i (\langle s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle) &= (0, \dots, 0) \iff \\ \left(\left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_1(b_0) \right\rangle, \dots, \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_n(b_0) \right\rangle \right) &= (0, \dots, 0) \iff \\ \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_j(b_0) \right\rangle &= 0, \forall j = 1, \dots, n \iff \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0) &= 0 \iff \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Reenumerando, se necessário, as seções s'_1, \dots, s'_n para que a submatriz m por m a esquerda de A tenha determinante não nulo. Existe $V \subset U$ aberto contendo b_0 tal que para qualquer $b \in V$, $\text{rank}(\langle s_i(b), s'_j(b) \rangle)_{m \times n} = m$.

Isso implica que para qualquer $b \in V$, o conjunto $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$ é linearmente independente, pois dados $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = m+1, \dots, n$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b) + \sum_{j=m+1}^n \beta_j s'_j(b) &= 0 \iff \\ \left\langle \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b) + \sum_{j=m+1}^n \beta_j s'_j(b) \right), s'_k(b) \right\rangle &= 0, \forall k = 1, \dots, n \iff \\ \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b), s'_k(b) \right\rangle + \left\langle \sum_{j=m+1}^n \beta_j s'_j(b), s'_k(b) \right\rangle &= 0, \forall k = 1, \dots, n \iff \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle s_i(b), s'_k(b) \rangle + \sum_{j=m+1}^n \beta_j \langle s'_j(b), s'_k(b) \rangle &= 0, \forall k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Então, para $0 \leq k \leq m$, a igualdade acima se resume a $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle s_i(b), s'_k \rangle = 0$, pois $\langle s'_j(b), s'_k(b) \rangle = 0$, para todo $j = m+1, \dots, n$. Como escolhemos A de forma que

$$\text{rank}(\langle s_i(b), s'_j(b) \rangle)_{m \times n} = m,$$

para todo $b \in V$, obtemos $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$. Portanto, tomando $m+1 \leq k \leq n$, temos apenas a igualdade $\beta_k \langle s'_k(b), s'_k(b) \rangle = 0$ que implica $\beta_k = 0$.

Portanto, provamos que para qualquer $b \in V$, o conjunto

$$\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$$

é linearmente independente, agora, por Gram-Schmidt, podemos supor que o conjunto

$$\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$$

é base ortonormal de $E(\eta)_b$, para qualquer $b \in V$.

Podemos definir a aplicação contínua $h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \pi^{-1}(V)$ dada por

$$h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b),$$

a qual é um isomorfismo linear quando fixado $b_0 \in V$, pois

$$h|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^{n-m}} : \{b_0\} \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow E(\xi^\perp)_{b_0}$$

é simplesmente dada por $h(b_0, (x_1, \dots, x_{n-m})) = \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b_0)$.

A inversa $h^{-1} : \pi^{-1}(v) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-m}$ é definida por

$$h^{-1}(e) = (\pi(e), (\langle e, s_{m+1}(\pi(e)) \rangle, \dots, \langle e, s_n(\pi(e)) \rangle)),$$

a qual também é contínua. Observe:

1. Dado $e \in \pi^{-1}(V)$, temos

$$\begin{aligned} h \circ h^{-1}(e) &= h(\pi(e), (\langle e, s_{m+1}(\pi(e)) \rangle, \dots, \langle e, s_n(\pi(e)) \rangle)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} \langle e, s_{i+m}(\pi(e)) \rangle s_{i+m}(\pi(e)) = e, \end{aligned}$$

pois $e \in E(\xi^\perp)_{\pi(e)} = E(\xi)_{\pi(e)}^\perp$, logo $\langle e, s_i(\pi(e)) \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$, o que significa que a decomposição de e na base ortonormal

$$\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$$

é exatamente $\sum_{i=1}^{n-m} \langle e, s_{i+m}(\pi(e)) \rangle s_{i+m}(\pi(e))$.

2. Dado $(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) \in V \times \mathbb{R}^{n-m}$, temos

$$h^{-1} \circ h(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = h^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b) \right) = (b, (x_1, \dots, x_{n-m})),$$

pois $\pi \left(\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b) \right) = b$ e $\langle \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b), s_{j+m}(b) \rangle = x_j$, $j = 1, \dots, n-m$.

Logo, h é uma trivialização local para ξ^\perp , como queríamos demonstrar. Chamamos o fibrado ξ^\perp de **complemento ortogonal** de ξ em η .

Proposição 18. Se ξ é um subfibrado de um fibrado Euclidiano η sobre um espaço base B , então $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$.

Demonstração: Como $E(\eta)_b = E(\xi)_b \oplus E(\xi^\perp)_b$, para qualquer $b \in B$ então segue do Lema 4 que $\eta \cong \xi \oplus \xi^\perp$. ■

Definição 48. Seja M uma variedade suave. O **fibrado normal** de M é o fibrado complemento ortogonal τ_M^\perp , o qual denotaremos por ν_M .

Exemplo 30. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave. Por definição, temos $\tau_M \subset \varepsilon_M^n$. Então

$$\varepsilon_M^n = \tau_M \oplus \nu_M.$$

2.0.5.7 Fibrado Hom

Lembramos da álgebra linear que dados V_1 e V_2 dois espaços vetoriais dimensão finita, podemos considerar $Hom(V_1, V_2) := \{T : V_1 \rightarrow V_2; T \text{ é linear}\}$. Se $\dim(V_1) = n$ e $\dim(V_2) = m$, então existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow Hom(V_1, V_2)$.

Agora, sejam ξ um n -fibrado e η um m -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Definimos o fibrado $Hom(\xi, \eta)$ como

$$E(Hom(\xi, \eta)) = \bigcup_{b \in B} Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b), \quad B(Hom(\xi, \eta)) = B \text{ e}$$

$$\pi : E(Hom(\xi, \eta)) \rightarrow B \text{ dada por } \pi(T) = b, \text{ onde } T \in Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b).$$

A topologia escolhida para $E(Hom(\xi, \eta))$ é a que torna π uma aplicação contínua, ou seja, $U \subset E(Hom(\xi, \eta))$ é um aberto se, e somente se, $U = \pi^{-1}(A)$ para algum aberto $A \subset B$.

Assim, π é contínua. Além disso, π é sobrejetora, pois dado $b_0 \in B$, podemos considerar a transformação linear nula $O_{b_0} : E(\xi)_{b_0} \rightarrow E(\eta)_{b_0}$ e temos $\pi(O_{b_0}) = b_0$. Pela forma como definimos a projeção, temos que a fibra sobre um ponto $b \in B$ é $E(Hom(\xi, \eta))_b = Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b)$.

Mostraremos a trivialidade local de $Hom(\xi, \eta)$. Seja $b_0 \in B$, considere um aberto $U \subset B$ contendo b_0 , no qual ξ e η são triviais. Como existe

$$T_b : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b)$$

isomorfismo linear, para cada $b \in B$, defina

$$h : U \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \pi^{-1}(U) = \bigcup_{b \in U} Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b) \text{ por } h(b, x) = T_b(x),$$

para todo $(b, x) \in U \times \mathbb{R}^{nm}$.

Observe que $\pi \circ h = p_1$, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada. Vamos mostrar que h é contínua. Se $O \subset \pi^{-1}(U)$ é um aberto, então $O = A \cap \pi^{-1}(U)$, onde $A \subset E(Hom(\xi, \eta))$ é um aberto. Nesse caso, existe aberto $V \subset B$ tal que $A = \pi^{-1}(V)$. Como p_1 é uma aplicação contínua, temos que $p_1^{-1}(V \cap U) \subset U \times \mathbb{R}^{nm}$ é aberto. Então, resta observar:

$$h^{-1}(O) = h^{-1}(A \cap \pi^{-1}(U)) = h^{-1}(\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(U)) = h^{-1}(\pi^{-1}(V \cap U)) = p_1^{-1}(V \cap U)$$

é um aberto em $U \times \mathbb{R}^{nm}$.

Como T_b é um isomorfismo linear para todo $b \in B$, fixado $b_0 \in B$, temos que a restrição

$$h|_{\{b_0\} \times \mathbb{R}^{nm}} \rightarrow E(Hom(\xi, \eta))_{b_0} = Hom(E(\xi)_{b_0}, E(\eta)_{b_0}) \text{ dada por } h(b_0, x) = T_{b_0}(x)$$

é igualmente um isomorfismo linear.

Por fim, defina

$$g : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{nm} \text{ por } g(T) = (b, T_b^{-1}(T)),$$

onde $T \in Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b)$, para um único $b \in U$. Observe que $g = h^{-1}$. Mostremos que g é contínua. Dado $T \in \pi^{-1}(U)$. Considere um aberto básico

$$O = A \times V \subset U \times \mathbb{R}^{nm} \text{ contendo } g(T),$$

onde $A \subset U$ e $V \subset \mathbb{R}^{nm}$ são abertos. Assim, se $b \in B$ é tal que $T \in Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b)$, então $b \in A$ e $T_b^{-1}(T) \in V$. Como $T_b^{-1} : Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b) \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ é contínua, então existe aberto $W \subset Hom(E(\xi)_b, E(\eta)_b)$ tal que $T \in W$ e $T^{-1}(W) \subset V$. Portanto,

$$g(W) \subset A \times T_b^{-1}(W) \subset A \times V = O.$$

Isso demonstra que g é contínua em T , entretanto, como T é arbitrário em $\pi^{-1}(U)$, disto segue a continuidade de g . Assim, fica demonstrado que $Hom(\xi, \eta)$ é localmente trivial.

A demonstração feita acima de que h é contínua nos motiva a enunciar o resultado mais geral a seguir.

Proposição 19. Sejam ξ e η fibrados sobre o mesmo espaço base B , X um espaço topológico e $g : X \rightarrow B$ uma função contínua. Então, toda função

$$f : X \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \eta)),$$

tal que $\pi \circ f = g$, é contínua, onde $\pi : E(\text{Hom}(\xi, \eta)) \rightarrow B$ é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\xi, \eta)$.

Demonstração: Considere $O \subset E(\text{Hom}(\xi, \eta))$ um aberto arbitrário. Da topologia de

$$E(\text{Hom}(\xi, \eta)),$$

segue que existe $A \subset B$ aberto tal que $O = \pi^{-1}(A)$. Como g é contínua, temos $g^{-1}(\pi^{-1}(A)) \subset X$ é aberto. Assim, $f^{-1}(O) = g^{-1}(\pi^{-1}(A))$ é aberto. Logo, f é contínua. ■

Proposição 20. Sejam ξ um n -fibrado, η_1 um m_1 -fibrado e η_2 um m_2 -fibrado, todos sobre o mesmo espaço base B . Então,

$$\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2) \cong \text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2).$$

Demonstração: Note que se $(T_1, T_2) \in E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2))$, então temos

$$T_1 : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta_1)_b \text{ e } T_2 : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta_2)_b$$

para um único b . Defina

$$f : E(\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2)) \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2))$$

por $f(T_1, T_2) = T$, onde $T : E(\xi)_b \rightarrow E(\xi \oplus \eta)_b = E(\xi)_b \times E(\eta)_b$ é dada por

$$T(x) = (T_1(x), T_2(x)).$$

Como T_1 e T_2 são lineares, temos que T é linear, portanto f está bem definida. Além disso, como $\pi \circ f = \pi_1$, onde π e π_1 são as projeções de $\text{Hom}(\xi, \eta_1 \oplus \eta_2)$ e $\text{Hom}(\xi, \eta_1) \oplus \text{Hom}(\xi, \eta_2)$, respectivamente, temos que f é contínua pela Proposição 19.

Agora mostraremos que a restrição

$$h := f|_{\text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_1)_b) \times \text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_2)_b)}$$

de $\text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_1)_b) \times \text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_2)_b)$ para $\text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_1 \oplus \eta_2)_b)$ é um isomorfismo linear.

1. h é linear, pois T_1 e T_2 são lineares.
2. Se $h(T_1, T_2) = 0$, então $T = 0$. Logo, $\text{Ker}(h) = 0$.

3. Como

$$\begin{aligned} \dim(\text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_1)_b) \times \text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_2)_b)) &= nm_1 + nm_2 = \\ &= n(m_1 + m_2) = \dim(\text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta_1 \oplus \eta_2)_b)), \end{aligned}$$

segue do Teorema do Núcleo de da Imagem que h é bijetora.

Então provamos que f é uma aplicação contínua, cuja restrição a cada fibra é um isomorfismo, logo f é um homeomorfismo (Teorema 8). ■

O próximo resultado demonstra que o fibrado Hom é bem comportado com relação a fibrados triviais.

Proposição 21. Sejam ξ um n -fibrado e η um m -fibrado, ambos sobre o mesmo espaço base B . Se $\eta \cong \varepsilon_B^m$, então $\text{Hom}(\xi, \eta) \cong \text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m)$.

Demonstração: Como $\eta \cong \varepsilon_B^m$, temos que η é trivial, portanto, existe $h : E(\eta) \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$ tal que $h|_{E(\eta)_b} : E(\eta)_b \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear para cada $b \in B$. Assim, podemos definir $f : E(\text{Hom}(\xi, \eta)) \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m))$ por $f(T) = T'$, onde $T \in \text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta)_b)$ para um único $b \in B$ e $T'(x) = h|_{E(\xi)_b}(x)$.

Por termos $\pi \circ f = \pi_1$, com π e π_1 são as projeções dos fibrados $\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m)$ e $\text{Hom}(\xi, \eta)$, respectivamente, concluímos que f é contínua (Proposição 19).

Além disso, por $h|_{E(\eta)_b}$ ser um isomorfismo, obtemos que

$$f|_{\text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta)_b)} : \text{Hom}(E(\xi)_b, E(\eta)_b) \rightarrow \text{Hom}(E(\xi)_b, \{b\} \times \mathbb{R}^m)$$

é um isomorfismo linear.

Assim, mostramos que f é uma aplicação contínua que aplica cada fibra isomorficamente em sua fibra correspondente, portanto f é o homeomorfismo procurado (Teorema 8). ■

O próximo resultado é interessante, pois atribui uma estrutura bem comportada e conhecida a um fibrado Euclidiano qualquer, igualando-o ao fibrado Hom .

Proposição 22. Se ξ é um fibrado Euclidiano, então $\xi \cong \text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^1(\xi))$.

Demonstração: Defina $f : E(\xi) \rightarrow E(\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^1(\xi)))$ por $f(x) = T$, onde

$$T : E(\xi)_{\pi_\xi(x)} \rightarrow \{\pi_\xi(x)\} \times \mathbb{R}$$

é dada por $T(v) = (\pi_\xi(x), \langle v, x \rangle)$.

Como o produto interno é uma aplicação bilinear, temos que f está bem definida, isso é, T é linear. Além disso, como $\pi \circ f = \pi_\xi$, onde π é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^m(\xi))$, temos que f é contínua (Proposição 19).

Por fim, observe que a restrição $f|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow \text{Hom}(E(\xi)_b, \{b\} \times \mathbb{R})$ é um isomorfismo:

1. $f|_{E(\xi)_b}$ é linear, pois o produto interno é bilinear.
2. Se $f|_{E(\xi)_b} = 0$, então $(\pi_\xi(x), \langle v, x \rangle) = (\pi_\xi(x), 0)$ para todo $v \in E(\xi)_{\pi_\xi(x)}$, o que implica $x = 0$. Portanto, $\text{Ker}(f|_{E(\xi)_b}) = 0$.
3. Como $\dim(E(\xi)_b) = \dim(\text{Hom}(E(\xi)_b, \{b\} \times \mathbb{R}))$, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $f|_{E(\xi)_b}$ é uma bijeção.

Assim, provamos que f é uma aplicação contínua que aplica cada fibra isomorficamente em sua fibra correspondente, portanto f é o homeomorfismo procurado (Teorema 8). ■

O próximo resultado mostra que o fibrado tangente sobre $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ tem uma estrutura de fibrado Hom .

Lema 8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n} \cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp)$.

Demonstração: Considere $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ a aplicação quociente canônica. Sabemos que

$$q(x) = q(-x) \text{ para todo } x \in S^n.$$

Vamos mostrar $dq : TS^n \rightarrow T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, dada por $dq(x, v) = (q(x), d_x q(v))$, é tal que

$$dq(x, v) = dq(-x, -v), \text{ para todo } (x, v), (-x, -v) \in TS^n.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} d_{-x}q(-v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q(-x + t(-v)) - q(-x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q(-(x + tv)) - q(-x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q(x + tv) - q(x)}{t} \\ &= d_x q(v), \end{aligned}$$

portanto, $dq(-x, -v) = (q(-x), d_{-x}q(-v)) = (q(x), d_x q(v)) = dq(x, v)$.

Assim, temos que dq induz um homeomorfismo $\overline{dq} : \widetilde{TS^n} \rightarrow T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ dado por

$$\overline{dq}(\overline{(x, v)}) = dq(x, v),$$

onde \sim é a relação de equivalência que identifica os pontos (x, v) com os pontos $(-x, -v)$. Neste caso, podemos considerar

$$T\mathbb{R}P^n = \{\overline{(x, v)}; (x, v) \in TS^n\} = \{\{(x, v), (-x, -v)\}, \langle x, x \rangle = 1 \text{ e } \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Denotando por L_x a reta que passa pela origem de \mathbb{R}^{n+1} e tem $x \in S^n$ como vetor diretor. Note que cada elemento $\{(x, v), (-x, -v)\} \in T\mathbb{R}P^n$ determina e é determinado pela transformação $l_{x,v} : L_x \rightarrow (L_x)^\perp$ definida por $l_{x,v}(y) = \langle y, x \rangle v$, para todo $y \in L_x$. Como $L_x \cong E(\gamma_n^1)$ e $(L_x)^\perp \cong E(\gamma^\perp)$, podemos considerar $l_{x,v} \in \text{Hom}(E(\gamma_n^1), E(\gamma^\perp))$. Assim, defina $f : T\mathbb{R}P^n \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp))$ dada por $f(\overline{(x, v)}) = l_{x,v}$.

Note que f é tal que $\pi \circ f = \pi_{\mathbb{R}P^n} : T\mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, onde

$$\pi : E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)) \rightarrow \mathbb{R}P^n$$

é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$. Portanto, f é contínua.

Mais ainda, vamos provar que f é um homeomorfismo. Para isso, observe que

$$f|_{E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}} : E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}} \rightarrow \text{Hom}(E(\gamma_n^1)_{\bar{x}}, E(\gamma^\perp)_{\bar{x}})$$

dada por $f|_{E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}}(\overline{(x, v)}) = l_{x,v}$, para todo $(\bar{x}, v) \in E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}} = \{\bar{x}\} \times T_x\mathbb{R}P^n$, é um isomorfismo linear.

De fato, $f|_{E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}}$ é linear, uma vez que $l_{x,v}$ é linear. Como

$$\dim(E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}) = n = \dim(\text{Hom}(E(\gamma_n^1)_{\bar{x}}, E(\gamma^\perp)_{\bar{x}})),$$

podemos apenas verificar que $f|_{E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}}$ é injetiva. Então, note que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f|_{E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}}) &= \{(\bar{x}, v) \in E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}; l_{x,v} = 0\} = \\ &= \{(\bar{x}, v) \in E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}; \langle y, x \rangle v = 0, \forall y \in L_x\}. \end{aligned}$$

Em particular, para $y = x$, temos $\langle x, x \rangle v = v = 0$, logo,

$$\text{Ker}(f|_{E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}}) = \{(\bar{x}, 0) \in E(\tau_{\mathbb{R}P^n})_{\bar{x}}\},$$

como queríamos demonstrar.

Portanto, f é um homeomorfismo entre $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ e $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$. ■

Utilizando o lema anterior, podemos demonstrar outro isomorfismo importante.

Teorema 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathcal{E}_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}.$$

Demonstração: Considere $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1))$ dada por $s(\bar{x}) = \text{id}_{E(\gamma_n^1)_{\bar{x}}}$. Note que s é uma seção não nula do fibrado linha $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$, portanto, temos que $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \cong \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1$. Além disso, lembre-se γ_n^1 é euclidiano, logo $\gamma_n^1 = \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathbb{R}P^n} \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n} &\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^\perp) \\
&\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^\perp) \\
&\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}) \\
&\cong \text{Hom}(\gamma_n^1, \underbrace{\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1}_{(n+1)\text{-vezes}}) \\
&\cong \underbrace{\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1) \oplus \cdots \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1)}_{(n+1)\text{-vezes}} \\
&\cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}
\end{aligned}$$

■

Este último resultado será utilizado para o cálculo da classe total de Stiefel-Whitney de $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ definida no próximo capítulo, Exemplo 34.

CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY

Adentrando o estudo de classes características, nessa seção apresentamos uma caracterização axiomática das classes de cohomologia de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial.

Seja $H^i(B, \mathbb{Z}_2)$ o i -ésimo grupo de cohomologia singular de B com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , o grupo dos números inteiros módulo 2.

Axioma 1. A cada n -fibrado vetorial ξ corresponde uma sequência de classes de cohomologia

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

chamada **classes de Stiefel-Whitney de ξ** , satisfazendo

$$w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi), \mathbb{Z}_2) \quad \text{e} \quad w_i(\xi) = 0 \quad \text{para todo} \quad i > n.$$

Axioma 2. (Naturalidade) Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais reais. Se existe

$$f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$$

uma aplicação fibrada de ξ para η , então

$$w_i(\xi) = \bar{f}_i^*(w_i(\eta)), \quad \text{onde} \quad \bar{f}_i^* : H^i(B(\eta); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$$

é a aplicação correspondente nos grupos de cohomologia para todo $i \geq 0$.

Axioma 3. (Teorema do Produto de Whitney) Se ξ e η são dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta),$$

para todo $k \geq 0$.

Axioma 4. Para o fibrado de linha tautológico γ_1^1 sobre $\mathbb{R}P^1$, temos $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Esse último axioma pode ser apresentado de forma mais geral, como em (MILNOR; STASHEFF, 1974), solicitando apenas que a classe $w_1(\gamma_1^1)$ seja não nula. Entretanto, na prova da existência e unicidade das classes de Stiefel-Whitney, demonstra-se que $w_1(\gamma_1^1)$ é exatamente igual a $b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Foi Stiefel em 1935, quem começou com os estudos sobre classes características definindo classes de homologia para fibrados tangentes de variedades suaves. Simultaneamente, Whitney estudou o caso para qualquer fibrado obtido de um fibrado vetorial Euclidiano considerando somente os vetores de seu espaço total com norma igual a um, chamado fibrado esfera. Depois disso, as contribuições de Whitney no desenvolvimento da linguagem de cohomologia possibilitaram o surgimento das classes de cohomologia como são apresentadas acima. Esta definição axiomática para as classes de Stiefel-Whitney foi sugerida por Hirzebruch em (HIRZEBRUCH, 1966), quando uma definição análoga foi dada as classes de Chern, que são a generalização da característica de Euler para o caso complexo.

Não é óbvio que existam classes $w_i(\xi)$ satisfazendo os quatro axiomas, tal resultado pode ser encontrado também em (MILNOR; STASHEFF, 1974), assumiremos que tais classes existem e são únicas e estudaremos as consequências desses axiomas.

3.0.1 Consequências dos quatro axiomas

A seguir veremos como comportam-se as classes de Stiefel-Whitney com relação a isomorfismos e fibrados triviais.

Como consequências imediatas do Axioma 2 (Naturalidade), temos os seguintes resultados:

Proposição 23. Se ξ e η são dois fibrados sobre o mesmo espaço base B tais que $\xi \cong \eta$, então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$, para todo $i \geq 0$.

Demonstração: Considere $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ um homeomorfismo que é isomorfismo linear quando restrito às fibras $f|_{E(\xi)_b} : E(\xi)_b \rightarrow E(\eta)_b$, o qual existe porque ξ e η são B -isomorfos por hipótese. Podemos ver f como uma aplicação fibrada, cuja aplicação correspondente nas bases é a identidade $\bar{f} = id_B : B \rightarrow B$. Assim, temos $\xi \cong id_B^*(\eta)$. Como a aplicação identidade id_B induz a aplicação identidade nos grupos de cohomologia $(id_B)_i^* : H^i(B, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B, \mathbb{Z}_2)$, aplicando o Axioma da Naturalidade obtemos $w_i(\xi) = (id_B)_i^*(w_i(\eta)) = w_i(\eta)$, para todo $i \geq 0$. ■

Proposição 24. Se ξ é um fibrado vetorial trivial, então $w_i(\xi) = 0$ para $i > 0$.

Demonstração: Como ξ é um fibrado trivial, temos $\xi \cong \epsilon_B^n$, para algum inteiro $n \geq 0$. Assim, pela proposição anterior, basta demonstrar que $w_i(\epsilon_B^n) = 0$ para $i > 0$.

Fixe $b \in B(\xi)$ e defina $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ por $f(x, y) := (b, y)$ para todo $(x, y) \in B(\xi) \times \mathbb{R}^n$. A continuidade de f segue da continuidade de suas coordenadas, além disso, $f|_{\{x\} \times \mathbb{R}^n} : \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear para todo $x \in B(\xi)$.

Portanto, f é uma aplicação fibrada de $\mathcal{E}_{B(\xi)}^n$ para $\mathcal{E}_{\{b\}}^n$. A aplicação induzida por f nas bases é a aplicação constante $c := \bar{f} : B(\xi) \rightarrow \{b\}$. Então, $\mathcal{E}_{B(\xi)}^n \cong c^*(\mathcal{E}_{\{b\}}^n)$.

Pelo Axioma da Naturalidade, temos

$$w_i(\mathcal{E}_{B(\xi)}^n) = c_i^*(w_i(\mathcal{E}_{\{b\}}^n)),$$

onde $c_i^* : H^i(\{b\}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação induzida por c nos grupos de cohomologia. Entretanto, sabemos que

$$H^i(\{b\}, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$$

para $i > 0$, então c_i^* é a aplicação identicamente nula para todo $i > 0$. Logo, $c_i^*(w_i(\mathcal{E}_{\{b\}}^n)) = 0$ para todo $i > 0$. Como $w_i(\xi) = w_i(\mathcal{E}_{B(\xi)}^n) = c_i^*(w_i(\mathcal{E}_{\{b\}}^n))$, concluímos a demonstração. ■

Até agora sabemos que dois fibrados isomorfos possuem todas as classes de Stiefel-Whitney iguais. Além disso, o fibrado trivial possui todas as suas classes de Stiefel-Whitney nulas, com exceção da classe w_0 que é determinada pelo primeiro axioma.

Combinando essas informações com o Teorema do Produto de Whitney, obtemos:

Proposição 25. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base. Se ξ é trivial, então $w_i(\xi \oplus \eta) = w_i(\eta)$.

Demonstração: Pelo Axioma 3 (Teorema do Produto de Whitney), para $k = 0$, temos

$$w_0(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_0(\eta) = 1 \smile w_0(\eta) = w_0(\eta),$$

para $k > 0$, temos

$$w_k(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_k(\eta) + w_1(\xi) \smile w_{k-1}(\eta) + \cdots + w_k(\xi) \smile w_0(\eta).$$

Como ξ é trivial, pela proposição anterior $w_i(\xi) = 0$, para todo $i > 0$, logo

$$w_k(\xi \oplus \eta) = 1 \smile w_k(\eta) + 0 + \cdots + 0 = w_k(\eta). \quad \blacksquare$$

Observe que a proposição anterior nos permite, quando necessário, somar fibrados triviais sem que as classes de Stiefel-Whitney sejam alteradas.

Para o próximo resultado, lembremos que um n -fibrado é trivial se, e somente se, possui n seções linearmente independentes, Teorema 9. Em outras palavras, o número de seções linearmente independentes mede a trivialidade de um fibrado.

Proposição 26. Seja ξ um n -fibrado Euclidiano. Se ξ possui k seções linearmente independentes, com $1 \leq k \leq n$, então

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \cdots = w_n(\xi) = 0.$$

Em particular, se ξ possui uma seção não nula, então $w_n(\xi) = 0$.

Demonstração: Como ξ possui k seções linearmente independentes, existe um k -subfibrado trivial de ξ , digamos ε .

Agora, como ξ é Euclidiano, vale $\xi = \varepsilon \oplus \varepsilon^\perp$, onde ε^\perp é um $(n-k)$ -fibrado. Assim, pela Proposição anterior, temos $w_i(\xi) = w_i(\varepsilon \oplus \varepsilon^\perp) = w_i(\varepsilon^\perp)$, para qualquer $i \geq 0$.

Sendo ε^\perp um $(n-k)$ -fibrado, pelo Axioma 1, temos $w_i(\varepsilon^\perp) = 0$, para $i > n-k$. Portanto, $w_i(\xi) = 0$, para $i > n-k$. ■

Então, o resultado acima mede o quanto um fibrado vetorial Euclidiano está próximo de ser trivial, relacionando o número de seções linearmente independentes com as classes de Stiefel-Whitney.

Pelo Axioma 4, temos que $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, como γ_1^1 é Euclidiano, aplicando a proposição anterior, concluímos que γ_1^1 não possui uma seção não nula, ou seja, não é trivial, o que havíamos demonstrado diretamente na proposição 6.

Definição 49. Seja B um espaço topológico. O conjunto $H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$ representa o anel das somas formais:

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots,$$

onde $a_i \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots$

Dados $a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ e $b = b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ dois elementos de $H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$, as operações neste anel são:

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots =$$

$$= c_0 + c_1 + c_2 + \dots, \text{ onde } c_k = a_k + b_k, \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ e}$$

$$a \cdot b = (a_0 \smile b_0) + (a_0 \smile b_1 + a_1 \smile b_0) + (a_0 \smile b_2 + a_1 \smile b_1 + a_2 \smile b_0) + \cdots =$$

$$= d_0 + d_1 + d_2 + \dots, \text{ onde } d_k = \sum_{i=0}^k a_i \smile b_{k-i}, \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \dots$$

O anel $H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$ é o **anel de cohomologia singular** de B com coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Ele também pode ser visto como o anel graduado

$$H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H^i(B, \mathbb{Z}_2)$$

soma direta dos grupos de cohomologia singular de B com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , munido do produto cup e com a unidade $1 \in H^0(B, \mathbb{Z}_2)$.

Note que como os coeficientes estão em \mathbb{Z}_2 , o produto definido acima é associativo e comutativo, pois, para qualquer espaço topológico B , se $x \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^j(B, \mathbb{Z}_2)$, então

$$xy = (-1)^{ij}yx = yx.$$

Definição 50. Seja ξ um fibrado vetorial sobre B . A **classe de total de Stiefel-Whitney** é o elemento

$$W(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots + w_n(\xi) + 0 + 0 + \cdots \in H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2).$$

Assim, se ξ e η são dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , então o Axioma Teorema do Produto de Whitney pode ser reescrito como

$$W(\xi \oplus \eta) = W(\xi).W(\eta).$$

Lema 9. O subconjunto

$$\{w = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2); w_0 = 1\} \subset H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$$

é um grupo abeliano com a operação produto definida acima.

Demonstração: *Este subconjunto herda as propriedades de ser comutativo e associativo com relação a operação produto de $H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$. Além disso, o elemento $1 + 0 + 0 + \cdots \in H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$ é naturalmente o elemento neutro. Resta verificar a existência do elemento inverso para um elemento qualquer*

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2).$$

Defina

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \cdots, \text{ onde } \bar{w}_0 = 1 \text{ e } \bar{w}_k = \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} \text{ para } k \geq 1.$$

$$\text{Então } w.\bar{w} = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots, \text{ onde } c_k = \sum_{i=0}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \geq 1 \end{cases}.$$

De fato, observe:

1. para $k = 0$, temos $c_0 = w_0 \smile \bar{w}_0 = 1 \smile 1 = 1$;

2. para $k \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} = 1 \smile \bar{w}_k + \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} = \\ &= \bar{w}_k + \sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} = 2 \left(\sum_{i=1}^k w_i \smile \bar{w}_{k-i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, \bar{w} é o inverso de w em $H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$. Isso demonstra que o subconjunto

$$\{w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \in H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2); w_0 = 1\} \subset H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$$

é um grupo abeliano com a operação produto. ■

O grupo do lema acima é exatamente o grupo das unidades do anel $H^\Pi(B, \mathbb{Z}_2)$.

Corolário 6. Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base tais que $\xi \oplus \eta$ é trivial. Então $W(\eta) = \bar{W}(\xi)$.

Demonstração: Sabemos que $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi).W(\eta)$. Como $\xi \oplus \eta$ é trivial, então

$$W(\xi \oplus \eta) = 1 + 0 + 0 + \dots$$

Pela lema anterior, existe $\bar{W}(\xi)$, portanto

$$W(\eta) = \bar{W}(\xi).W(\xi).W(\eta) = \bar{W}(\xi).W(\xi \oplus \eta) = \bar{W}(\xi)$$

.

Teorema 12. (Teorema da Dualidade de Whitney) Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade suave, então $w_i(\tau_M) = \bar{w}_i(\nu_M)$, para todo $i \geq 0$.

Demonstração: Lembre-se de que temos $\varepsilon_M^n = \tau_M \oplus \nu_M$. Assim, o fibrado $\tau_M \oplus \nu_M$ é trivial. Então, pelo corolário anterior, $W(\tau_M) = \bar{W}(\nu_M)$, isto é, $w_i(\tau_M) = \bar{w}_i(\nu_M)$, para todo $i \geq 0$. ■

Agora, calcularemos algumas classes de Stiefel-Whitney como exemplos. Por conveniência, para M uma variedade suave, denotaremos por $W(M) := W(\tau_M)$ a classe total de Stiefel-Whitney do fibrado tangente τ_M , assim como $w_i(M) := w_i(\tau_M)$, para todo $i \geq 0$.

Exemplo 31. Para S^n a esfera n -dimensional, temos $W(S^n) = 1$.

De fato, pelo exemplo 18, temos que $TS^n \oplus \varepsilon_{S^n}^1 \cong \varepsilon_{S^n}^{n+1}$. Logo,

$$W(S^n) = W(S^n)W(\varepsilon_{S^n}^1) = W(TS^n \oplus \varepsilon_{S^n}^1) = W(\varepsilon_{S^n}^{n+1}) = 1.$$

Note que o exemplo acima nos diz que as classes de Stiefel-Whitney não distinguem o fibrado tangente do fibrado trivial na esfera S^n .

Exemplo 32. Seja γ_n^1 o fibrado de linha tautológico sobre $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Então $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, onde $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$.

De fato, considere a aplicação inclusão $i : E(\gamma_1^1) \rightarrow E(\gamma_n^1)$ que é uma aplicação fibrada de γ_1^1 em γ_n^1 com a aplicação inclusão $j : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ sendo a aplicação correspondente nos espaços bases.

Assim, temos $\gamma_1^1 \cong j^*(\gamma_n^1)$ e pelo Axioma da Naturalidade $w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\gamma_n^1))$, para $k \geq 0$, onde $j_k^* : H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação induzida por j nos grupos de cohomologia singular.

Por γ_n^1 ser um fibrado linha, então $w_k(\gamma_n^1) = 0$ para todo $k \geq 1$.

Por outro lado, segue do Axioma 4 que $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_2)$.

Como $w_1(\gamma_n^1) \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \langle a \rangle$ e $w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\gamma_n^1))$, para $k \geq 0$, concluímos que $j^*(w_1(\gamma_n^1)) = b$ e assim $w_1(\gamma_n^1) = a$, já que j_k^* é um homomorfismo, para cada $k \geq 0$, e consequentemente, leva gerador em gerador.

Portanto, $W(\gamma_n^1) = w_0(\gamma_n^1) + w_1(\gamma_n^1) + 0 + \dots = 1 + a$.

Por construção, temos $\gamma_n^1 \subset \varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^{n+1}$. O próximo exemplo usa este fato e o exemplo anterior para demonstrar que existe um n -fibrado com todas as n classes de Stiefel-Whitney não nulas.

Exemplo 33. Seja γ^\perp o fibrado complemento ortogonal de γ_n^1 em $\varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^{n+1}$. Então,

$$W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

De fato, como $\varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^{n+1} \cong \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$, então $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ é trivial e com isso $W(\gamma^\perp) = \overline{W}(\gamma_n^1)$.

Sendo γ^\perp um n -fibrado, precisamos apenas calcular $w_i(\gamma^\perp)$ para $i = 1, \dots, n$.

Lembrando do exemplo anterior que $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, temos

$$\overline{w}_k(\gamma_n^1) = \sum_{i=1}^k w_i(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_{k-i}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_{k-1}(\gamma_n^1),$$

pois γ_n^1 é um fibrado de linha e com isso $w_k(\gamma_n^1) = 0$, para $k > 1$.

Mostremos, por indução sobre $k > 0$, que $\bar{w}_k(\gamma_n^1) = a^k$.

Note que

$$\bar{w}_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile \bar{w}_0(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile 1 = w_1(\gamma_n^1) = a.$$

Agora, supondo que $w_k(\gamma_n^1) = a^k$, obtemos que

$$\bar{w}_{k+1}(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile \bar{w}_k(\gamma_n^1) = a \smile a^k = a^{k+1}.$$

Como $w_k(\gamma^\perp) = \bar{w}_k(\gamma_n^1) = a^k$ e, pelo Axioma 1, $w_k(\gamma^\perp) = 0$ para $k > n$, temos

$$W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n.$$

Para o exemplo a seguir, lembre-se de que $\epsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n} \cong \underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}$, Teorema 11.

Exemplo 34. Utilizando o Teorema 11 e o Exemplo 32, podemos calcular a classe total de Stiefel-Whitney do $\mathbb{R}P^n$:

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P^n) &= 1.W(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = W(\epsilon_{\mathbb{R}P^n}^1)W(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = W(\epsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 \oplus \tau_{\mathbb{R}P^n}) \\ &= W(\underbrace{\gamma_n^1 \oplus \dots \oplus \gamma_n^1}_{(n+1)\text{-vezes}}) = \left(W(\gamma_n^1)\right)^{n+1} = (1+a)^{n+1} \\ &= 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \dots + \binom{n+1}{n}a^n. \end{aligned}$$

Para facilitar a visualização das classes totais de Stiefel-Whitney do $\mathbb{R}P^n$, apresentamos a seguir uma tabela com os valores dos coeficientes binomiais $\binom{n+1}{i}$ módulo 2, para $0 \leq n \leq 14$.

$\mathbb{R}P^1$	1	0													
$\mathbb{R}P^2$	1	1	1												
$\mathbb{R}P^3$	1	0	0	0											
$\mathbb{R}P^4$	1	1	0	0	1										
$\mathbb{R}P^5$	1	0	1	0	1	0									
$\mathbb{R}P^6$	1	1	1	1	1	1	1								
$\mathbb{R}P^7$	1	0	0	0	0	0	0	0							
$\mathbb{R}P^8$	1	1	0	0	0	0	0	0	1						
$\mathbb{R}P^9$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0					
$\mathbb{R}P^{10}$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1				
$\mathbb{R}P^{11}$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0			
$\mathbb{R}P^{12}$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1		
$\mathbb{R}P^{13}$	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	
$\mathbb{R}P^{14}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}

Tabela 1 – Coeficientes das classes de Stiefel-Whitney para $\mathbb{R}P^n$, com $0 \leq n \leq 14$

Então, pela observação da tabela, por exemplo, temos facilmente que $W(\mathbb{R}P^1) = 1$, $W(\mathbb{R}P^2) = 1 + a + a^2$, $W(\mathbb{R}P^3) = 1$ e $W(\mathbb{R}P^4) = 1 + a + a^4$.

No próximo exemplo, utilizamos as Classes de Stiefel-Whitney para medir a trivialidade do fibrado tangente sobre o espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$, onde $n + 1 = 2^r m$ para algum inteiro $r \geq 1$ e algum ímpar $m \geq 1$.

Exemplo 35. Se $n + 1 = 2^r m$ para algum inteiro $r \geq 1$ e algum ímpar $m > 1$, então o fibrado $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ não admite 2^r seções linearmente independentes.

Da fato, suponha que existam 2^r seções linearmente independentes de $\tau_{\mathbb{R}P^n}$, isto é, existe um 2^r -subfibrado trivial de $\tau_{\mathbb{R}P^n}$. Neste caso, temos que $\tau_{\mathbb{R}P^n} = \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{2^r} \oplus (\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{2^r})^\perp$, que implica $W(\mathbb{R}P^n) = W((\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{2^r})^\perp)$.

Deste modo, pelo Axioma 1, temos que

$$w_i(\mathbb{R}P) = 0 \text{ para todo } i > n - 2^r = (2^r m - 1) - 2^r = 2^r(m - 1) - 1.$$

Em particular, $w_{2^r(m-1)}(\mathbb{R}P^n) = 0$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} w_{2^r(m-1)}(\mathbb{R}P^n) &= \binom{n+1}{2^r(m-1)} a^{2^r(m-1)} \\ &= \binom{(2^r m - 1) + 1}{2^r(m-1)} a^{2^r(m-1)} \\ &= \binom{2^r m}{2^r(m-1)} a^{2^r(m-1)} \\ &= \binom{2^r m}{2^r m - 2^r} a^{2^r(m-1)} \\ &= \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r(m-1)} \\ &= m a^{2^r(m-1)} \\ &= a^{2^r(m-1)} \neq 0, \end{aligned}$$

pois $1 < 2^r$ e com isso temos que $2^r(m-1) = 2^r m - 2^r < 2^r m - 1 = n$, então

$$\langle a^{2^r(m-1)} \rangle = H^{2^r(m-1)}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2).$$

Assim, chegamos a um absurdo.

Portanto, não existem 2^r seções linearmente independente se $n + 1 = 2^r m$, para algum inteiro $r \geq 1$ e algum ímpar $m > 1$.

No próximo resultado, temos uma condição necessária para que um espaço projetivo real seja paralelizável, pois pelo Axioma 1, temos que as classes de Stiefel-Whitney w_i de um fibrado trivial são nulas, para todo $i > 0$ e além disso, pela Proposição 23, fibrados isomorfos têm as mesmas classes de Stiefel-Whitney associadas, portanto, $\mathbb{R}P^n$ é possivelmente paralelizável, se $W(\mathbb{R}P^n) = 1$.

Proposição 27. (Corolário de Stiefel) Dado $n \in \mathbb{N}$, a classe $W(\mathbb{R}P^n)$ é igual a 1 se, e somente se, $n + 1$ é uma potência de 2.

Demonstração: Suponha que $W(\mathbb{R}P^n) = 1$ e, por absurdo, $n + 1$ não seja uma potência de 2, isto é, $n + 1 = 2^r m$ para algum inteiro $r \geq 0$ e algum ímpar $m > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P^n) &= (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r m} \\ &= [(1 + a)^{2^r}]^m \\ &= \left[1 + \binom{2^r}{1} a + \binom{2^r}{2} a^2 + \cdots + \binom{2^r}{2^r - 1} a^{2^r - 1} + a^{2^r} \right]^m \\ &= (1 + a^{2^r})^m \\ &= 1 + m a^{2^r} + \binom{m}{2} (a^{2^r})^2 + \cdots + \binom{m}{m-1} (a^{2^r})^{m-1} + (a^{2^r})^m \neq 1, \end{aligned}$$

pois $m > 1$ é ímpar e $2^r < n + 1$. Logo, $W(\mathbb{R}P^n) \neq 1$, o que é um absurdo. Portanto, $n + 1$ deve ser uma potência de 2.

Reciprocamente, suponha que $n + 1$ seja uma potência de 2, isto é, existe inteiro $r \geq 1$ tal que $n + 1 = 2^r$. Então

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r} = 1 + a^{2^r} = 1 + a^{n+1} = 1,$$

pois $a^{n+1} \in H^{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = 0$. ■

Assim, pelo corolário, os **possíveis** espaços projetivos reais paralelizáveis são $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^7, \mathbb{R}P^{15}, \dots$. A seguir caracterizamos os espaços projetivos reais paralelizáveis.

Definição 51. Um elemento não nulo a em um anel comutativo A é dito um **divisor de zero** se existe um elemento não nulo b em A tal que $ab = 0$.

Teorema 13. (Teorema de Stiefel) Suponha que exista uma operação de produto bilinear $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sem divisores de zero. Então, o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{n-1}$ é paralelizável, consequentemente n é uma potência de 2.

Demonstração: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Observe que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = p(x, e_n)$ é um isomorfismo linear, pois p é bilinear e sem divisores de zero.

Neste caso, podemos ver $\mathbb{R}^n = \{p(x, e_n); x \in \mathbb{R}^n\}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, defina

$$v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por $v_i(p(x, e_n)) = p(x, e_i)$, para todo $p(x, e_n) \in \mathbb{R}^n$. Afirmamos que v_i é linear, para todo $i = 1, \dots, n$. De fato, considere $p(x, e_n), p(y, e_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} v_i(p(x, e_n) + \alpha p(y, e_n)) &= v_i(p(x + \alpha y, e_n)) = p(x + \alpha y, e_i) = \\ &= p(x, e_i) + \alpha p(y, e_i) = v_i(p(x, e_n)) + \alpha v_i(p(y, e_n)). \end{aligned}$$

Note que para qualquer $x \neq 0$, o conjunto $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ é linearmente independente, pois $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto linearmente independente e p não possui divisores de zero, então para $x = p(y, e_n)$, temos que

$$\{p(y, e_1), \dots, p(y, e_n)\} = \{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$$

é também linearmente independente. Além disso, $v_n(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, pois se $x = p(y, e_n)$, então $v_n(x) = v_n(p(y, e_n)) = p(y, e_n) = x$.

Agora, a partir das transformações lineares v_1, \dots, v_n vamos construir $(n-1)$ seções linearmente independentes para o $(n-1)$ -fibrado $\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$.

Para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$, denotaremos por L_x a reta que passa pela origem de \mathbb{R}^n e tem $x \in \mathbb{R}^n$ como vetor diretor. Assim, para cada $i = 1, \dots, n$, defina

$$s_i : \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow E(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp) \text{ por } s_i(\bar{x}) = \bar{v}_i,$$

onde $\bar{v}_i : L_x \rightarrow (L_x)^\perp$ é a função que associa a cada $z \in L_x$ a projeção ortogonal de $v_i(z)$ em $(L_x)^\perp$.

Note que s_i está bem definida, pois a projeção ortogonal \bar{v}_i é uma transformação linear, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Além disso, $\pi \circ s_i = \text{id}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}}$, onde π é a projeção do fibrado $\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$, logo, s_i é contínua, para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Resta apenas mostrar que s_1, \dots, s_{n-1} são seções linearmente independentes. Sabemos que $\{v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)\}$ é um conjunto linearmente independente para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Considere $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $(L_x)^\perp$, então

$$\bar{v}_i(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_i(x), a_j \rangle a_j,$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Considere $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{v}_i(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \langle v_i(x), a_j \rangle a_j \right) = 0 \iff$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \alpha_i v_i(x), a_j \rangle a_j = 0 &\iff \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(x), a_j \right\rangle a_j = 0 \iff \\ &\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(x), a_j \right\rangle = 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, n-1 \iff \\ &\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i(x) = 0 \iff a_i = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\{\bar{v}_1(x), \dots, \bar{v}_{n-1}(x)\}$ é um conjunto linearmente independente, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, s_1, \dots, s_{n-1} são seções linearmente independentes de $\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$. Consequentemente, $\text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$ é trivial. Como sabemos que $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}} \cong \text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$, concluímos que $\tau_{\mathbb{R}P^{n-1}}$ é trivial.

Em outras palavras, provamos que $\mathbb{R}P^{n-1}$ é paralelizável e, pelo Corolário de Stiefel, temos que n é uma potência de 2. ■

Assim, observe que no Corolário de Stiefel temos uma condição necessária e no Teorema de Stiefel temos uma condição suficiente para $\mathbb{R}P^n$ seja paralelizável.

Exemplo 36. Nos casos em que $n = 2, 4$ e 8 adotamos em $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ e \mathbb{R}^8 o produto dos números complexos, quatérnios e dos números de Cayley, respectivamente, tornando os espaços $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3$ e $\mathbb{R}P^7$ paralelizáveis.

3.0.2 Imersões

Sabendo que a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ é igual a $W(\mathbb{R}P^n) = (1 + a)^{n+1}$, veremos quais espaços projetivos reais podem ser imersos em espaços Euclidianos de determinada dimensão.

Definição 52. Uma função $f : M \rightarrow N$ entre duas variedades suaves é dita um **imersão** se f é suave e $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é injetora, para todo $x \in M$. Neste caso, dizemos que M pode ser **imersa** em N .

Assim, o Teorema da Dualidade de Whitney pode ser reescrito como:

Proposição 28. Se M é uma n -variedade suave imersa em \mathbb{R}^{n+m} , então

$$W(v_M) = \bar{W}(M).$$

Logo, $\bar{w}_i(M) = 0$, para todo $i > m$.

De fato, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ é uma imersão. Então $f : M \rightarrow \text{Im}(f)$ é um homeomorfismo tal que $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^{n+m}$ é injetiva, para todo $x \in M$. Isso implica que $\tau_M \cong \tau_{f(M)}$. Portanto, $\nu_M \oplus \tau_M$ é trivial e conseqüentemente $\bar{w}_i(M) = w_i(\nu_{f(M)}) = 0$, para $i > m$.

Assim, para mostrar que M uma n -variedade suave não pode ser imersa em \mathbb{R}^{n+m} , basta mostrar que $\bar{w}_i(M) \neq 0$ para algum $i > m$.

Exemplo 37. Se $\mathbb{R}P^9$ pode ser imersa em \mathbb{R}^{9+m} , então $m \geq 6$.

Temos que $W(\mathbb{R}P^9) = 1 + a^2 + a^8$. Além disso, lembre-se que

$$\bar{w}_k(\mathbb{R}P^9) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-i}(\mathbb{R}P^9),$$

então

$$\bar{w}_k(\mathbb{R}P^9) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 1 \\ w_2(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-2}(\mathbb{R}P^9), & \text{se } 2 \leq k \leq 7 \\ w_2(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-2}(\mathbb{R}P^9) + w_8(\mathbb{R}P^9) \smile \bar{w}_{k-8}(\mathbb{R}P^9), & \text{se } k \geq 8 \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\bar{w}_2(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 1 = a^2$$

$$\bar{w}_3(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$\bar{w}_4(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^2 = a^4$$

$$\bar{w}_5(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$\bar{w}_6(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^4 = a^6$$

$$\bar{w}_7(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 = 0$$

$$\bar{w}_8(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile a^6 + a^8 \smile 1 = a^8 + a^8 = 0$$

$$\bar{w}_9(\mathbb{R}P^9) = a^2 \smile 0 + a^8 \smile 0 = 0$$

Para $k > 9$, temos $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^9) = 0$, pois $H^k(\mathbb{R}P^9, \mathbb{Z}_2) = 0$, para todo $k > 9$.

Portanto, $\bar{W}(\mathbb{R}P^9) = 1 + a^2 + a^4 + a^6$. Neste caso, se $\mathbb{R}P^9$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{9+m} , então $m \geq 6$.

Proposição 29. Se M é uma n -variedade suave que pode ser imersa em \mathbb{R}^{n+1} , então

$$w_i(M) = w_1^i(M) = \underbrace{w_1(M) \smile \dots \smile w_1(M)}_{i\text{-vezes}},$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: De fato, como ν_M é um 1-fibrado, pelo Teorema da Dualidade de Whitney, temos que $\bar{w}_i(M) = 0$, para todo $i > 1$. Então

$$\bar{W}(M) = 1 + \bar{w}_1(M) = 1 + w_1(M).$$

Provaremos por indução sobre $i > 0$ que $w_i(M) = w_1^i(M)$. Lembrando que

$$\bar{w}_k(M) = \sum_{i=1}^k w_i(M) \smile \bar{w}_{k-i}(M).$$

Se $i = 2$, então

$$0 = \bar{w}_2(M) = w_1(M) \smile \bar{w}_1(M) + w_2(M) \smile \bar{w}_0(M) = w_1^2(M) + w_2(M),$$

que implica $w_1^2(M) = w_2(M)$.

Agora, suponha por hipótese de indução que $w_k(M) = w_1^k(M)$. Então, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{w}_{k+1}(M) = w_k(M) \smile \bar{w}_1(M) + w_{k+1}(M) \smile \bar{w}_0(M) = \\ &= w_1^k(M) \smile w_1(M) + w_{k+1}(M) \smile 1 = w_1^{k+1}(M) + w_{k+1}(M), \end{aligned}$$

que implica $w_{k+1}(M) = w_1^{k+1}(M)$.

Como τ_M é um n -fibrado, temos que $w_i(M) = 0$, para todo $i > n$, portanto, $w_i(M) = w_1^i(M)$, para todo $i = 1, \dots, n$. ■

Exemplo 38. Se o espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{n+1} , então $n = 2^r - 1$ ou $n = 2^r - 2$, para algum inteiro $r \geq 1$.

De fato, do proposição anterior, sabemos que

$$w_i(M) = w_1^i(M), \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Além disso, lembre-se de que

$$w_i(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} a^i, \text{ então } w_1^i(\mathbb{R}P^n) = \underbrace{\binom{n+1}{1} a \smile \dots \smile \binom{n+1}{1} a}_{i\text{-vezes}} = (n+1)^i a^i.$$

Vamos analisar os possíveis casos para $n + 1$:

1. Supondo que $n + 1$ seja um número par, então existe um inteiro $r \geq 1$ e um ímpar $m \geq 1$ tais que $n + 1 = 2^r m$. Vamos supor, por absurdo, que $m > 1$. Neste caso, note que:

$$w_{2^r}(\mathbb{RP}^n) = \binom{n+1}{2^r} a^{2^r} = \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r} = m a^{2^r} \neq 0,$$

pois $2^r < 2^r m = n + 1$, o que implica $\langle a^{2^r} \rangle = H^{2^r}(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$.

Por outro lado, $w_1^{2^r}(\mathbb{RP}^n) = (n + 1)^{2^r} a^{2^r} = 0$, pois $n + 1$ é par.

Assim, $w_{2^r}(\mathbb{RP}^n) \neq w_1^{2^r}(\mathbb{RP}^n)$, o que é um absurdo. Logo, $m = 1$.

2. Supondo que $n + 2 = 2^r m$, com $r \geq 1$ inteiro e $m > 1$ um número ímpar. Note que:

$$w_{2^r}(\mathbb{RP}^{n+1}) = \binom{n+2}{2^r} a^{2^r} = \binom{2^r m}{2^r} a^{2^r} = m a^{2^r} = a^{2^r} \neq 0,$$

pois $2^r < 2^r m = n + 2$ e $2^r \neq n + 1$, uma vez que $n + 1$ é ímpar, então $2^r < n$ e vale $\langle a^{2^r} \rangle = H^{2^r}(\mathbb{RP}^{n+1}, \mathbb{Z}_2)$.

Por outro lado, $w_1^{2^r}(\mathbb{RP}^{n+1}) = (n + 2)^{2^r} a^{2^r} = 0$, pois $n + 2$ é par.

Assim, $w_{2^r}(\mathbb{RP}^{n+1}) \neq w_1^{2^r}(\mathbb{RP}^{n+1})$, o que é um absurdo. Logo, $m = 1$, isto é, $n + 2 = 2^r$.

Portanto, $n = 2^r - 1$ ou $n = 2^r - 2$ para algum inteiro $r \geq 1$.

Teorema 14. Seja $r \geq 1$ um número inteiro. Se \mathbb{RP}^{2^r} puder ser imerso em \mathbb{R}^{2^r+m} , então $m \geq 2^r - 1$.

Demonstração: Se a é tal que $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{RP}^{2^r}, \mathbb{Z}_2)$, então

$$W(\mathbb{RP}^{2^r}) = (1 + a)^{2^r+1} = (1 + a)^{2^r} (1 + a) = 1 + a + a^{2^r},$$

pois $H^i(\mathbb{RP}^{2^r}, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $i > 2^r$.

Como

$$\bar{w}_k(\mathbb{RP}^{2^r}) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbb{RP}^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-i}(\mathbb{RP}^{2^r}),$$

temos que

$$\bar{w}_k(\mathbb{RP}^{2^r}) = \begin{cases} w_1(\mathbb{RP}^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-1}(\mathbb{RP}^{2^r}), & \text{se } 1 \leq k \leq 2^r - 1 \\ w_1(\mathbb{RP}^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-1}(\mathbb{RP}^{2^r}) + w_{2^r}(\mathbb{RP}^{2^r}) \smile \bar{w}_{k-2^r}(\mathbb{RP}^{2^r}), & \text{se } k \geq 2^r \end{cases}$$

Assim,

$$\bar{w}_1(\mathbb{RP}^{2^r}) = a \smile 1 = a$$

$$\bar{w}_2(\mathbb{RP}^{2^r}) = a \smile a = a^2$$

$$\bar{w}_3(\mathbb{RP}^{2^r}) = a \smile a^2 = a^3$$

...

$$\bar{w}_{2^r-1}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^{2^r-2} = a^{2^r-1}$$

$$\bar{w}_{2^r}(\mathbb{R}P^{2^r}) = a \smile a^{2^r-1} + a^{2^r} \smile 1 = 2a^{2^r} = 0$$

Para $k > 2^r$, temos $\bar{w}_k(\mathbb{R}P^{2^r}) = 0$, pois $H^k(\mathbb{R}P^{2^r}, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $k > 2^r$.

Portanto, $\bar{W}(\mathbb{R}P^{2^r}) = 1 + a + \dots + a^{2^r-1}$, isto é, se $\mathbb{R}P^{2^r}$ pode ser imerso em \mathbb{R}^{2^r+m} , então $m \geq 2^r - 1$. ■

3.0.3 Números de Stiefel-Whitney

Os números de Stiefel-Whitney constituem uma ferramenta de comparação entre duas variedades suaves diferentes utilizando suas classes de Stiefel-Whitney sobre os fibrados tangentes e as classes fundamentais de homologia singular das variedades em questão.

Definição 53. Seja M uma n -variedade suave fechada, isto é, compacta e sem bordo. Dizemos que o elemento $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z}_2)$ é uma **classe fundamental de homologia** para M se $[M]$ é o gerador do grupo de homologia local $H_n(M, M - \{x\}, \mathbb{Z}_2)$, para todo $x \in M$.

Se M é uma variedade suave fechada, então existe uma única classe fundamental denotada por $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Desta maneira, dada uma classe qualquer de cohomologia $v \in H^n(M, \mathbb{Z}_2)$, o valor $v([M]) \in \mathbb{Z}_2$ está bem definido, pois

$$v \in H^n(M, \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(H_n(M, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2),$$

como demonstrado em (HATCHER, 2001, p.198-199).

Definição 54. Sejam M uma n -variedade suave fechada e r_1, \dots, r_n inteiros não negativos tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, então o número módulo 2:

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n} [M] := (w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M))([M])$$

é chamado **número de Stiefel-Whitney** de M associado ao monômio

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}.$$

Diremos que duas variedades M e M' têm os mesmos números de Stiefel-Whitney, quando

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n} [M] = w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n} [M']$$

para todo monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$ de dimensão n .

No exemplo a seguir, calculamos alguns números de Stiefel-Whitney dos espaços projetivos reais $\mathbb{R}P^n$.

Exemplo 39. Considere o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$. Vamos analisar as possibilidades para n :

1. Caso n seja par:

Como

$$w_1(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{a} a = (n+1)a = a \neq 0 \text{ e}$$

$$w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n} a^n = (n+1)a^n = a^n \neq 0,$$

temos que

$$w_1^n \smile w_2^0 \smile \dots \smile w_n^0[\mathbb{R}P^n] = w_1^n[\mathbb{R}P^n] = a^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$$

$$w_1^0 \smile \dots \smile w_{n-1}^0 \smile w_n^1[\mathbb{R}P^n] = w_n^1[\mathbb{R}P^n] = a^n[\mathbb{R}P^n] \neq 0$$

a) Caso n seja uma potência de 2:

Como $W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) = (1+a^n)(1+a) = 1+a+a^n$, então o único número de Stiefel-Whitney não nulo está relacionado aos monômios $w_1^n \smile w_2^0 \smile \dots \smile w_n^0$ e $w_1^0 \smile \dots \smile w_{n-1}^0 \smile w_n^1$. Basta observar que para outros inteiros $r_1, \dots, r_n \geq 0$ satisfazendo

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n,$$

existirá algum $i_0 \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $r_{i_0} \neq 0$. Por outro lado, $w_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Portanto,

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[\mathbb{R}P^n] =$$

$$= w_1^{r_1}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_{i_0}^{r_{i_0}}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\mathbb{R}P^n)[\mathbb{R}P^n] = 0.$$

b) Caso n não seja uma potência de 2, mas ainda par, os números de Stiefel-Whitney podem ser calculados como o produto de coeficientes binomiais.

2. Caso n seja ímpar.

Suponha $n = 2k - 1$ com $k \geq 1$. Note que

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k \text{ e } w_j(\mathbb{R}P^n) = \binom{2k}{j} a^j = 0,$$

quando j é ímpar, pois $\binom{2k}{j} = 0$ módulo 2.

Como todo monômio $w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}$ possui pelos menos um termo w_j , onde j é ímpar, temos

$$w_1^{r_1} \smile \dots \smile w_n^{r_n}[\mathbb{R}P^n] =$$

$$= w_1^{r_1}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_j^{r_j}(\mathbb{R}P^n) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(\mathbb{R}P^n)[\mathbb{R}P^n] = 0.$$

Assim, todos os números de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^n$ são nulos, quando n é ímpar.

A seguir apresentaremos uma introdução ao estudo de variedades cobordantes com o intuito de expor uma aplicação dos números de Stiefel-Whitney, a saber, vamos determinar quando variedades são fronteira de uma outra variedade suave.

Teorema 15. (Pontrjagin) Seja M uma $(n + 1)$ -variedade suave compacta, cujo bordo é uma n -variedade suave $N := \partial M$. Então todos os números de Stiefel-Whitney de N são nulos.

Demonstração: Considere a classe fundamental de homologia relativa

$$[M, N] \in H_{n+1}(M, N, \mathbb{Z}_2)$$

e os homomorfismos

$$\partial_{n+1} : H_{n+1}(M, N, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(N, \mathbb{Z}_2) \text{ e } \delta^n : H^n(N, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(M, N, \mathbb{Z}_2),$$

tais que $\partial_{n+1}([M, N]) = [N]$ e para cada $\alpha \in H^n(N, \mathbb{Z}_2)$, a aplicação

$$\delta^n(\alpha) : H_{n+1}(M, N, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

é dada por $\delta^n(\alpha)([M, N]) = \alpha(\partial_{n+1}([M, N])) = \alpha([N])$.

Como τ_N é um fibrado Euclidiano, existe um único campo de vetores normais ao longo de N gerando o fibrado trivial ε_N^1 (completo ortogonal). Pois, como M é uma $(n + 1)$ -variedade suave compacta e com fronteira N , existe $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto contendo N tal que

$$U \cong N \times (0, 1) \cong N \times \mathbb{R}.$$

Portanto, se $i : N \hookrightarrow M$ é a aplicação inclusão, então $i^* \tau_M \cong \varepsilon_N^1 \oplus \tau_N$, pela própria definição do fibrado pullback e por $E(\tau_M)_b \cong E(\varepsilon_N^1)_b \times E(\tau_N)_b$, para todo $b \in N$. Assim, temos $w_k(\tau_N) = w_k(\varepsilon_N^1 \oplus \tau_N) = w_k(i^* \tau_M)$, para todo $k \geq 0$. Pelo Axioma da Naturalidade,

$$w_k(N) = w_k(i^* \tau_M) = i_k^*(w_k(M)),$$

para todo $k \geq 0$.

Agora, considere os inteiros r_1, \dots, r_n não negativos tais que

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n.$$

Então,

$$\begin{aligned} w_1^{r_1}(N) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(N)[N] &= i_1^*(w_1^{r_1}(M)) \smile \dots \smile i_n^*(w_n^{r_n}(M))[N] \\ &= i_n^*(w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M))(\partial_{n+1}([M, N])) \\ &= \delta^n(i_n^*(w_1^{r_1}(M) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M)))[M, N] \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois a sequência de cohomologia do par (M, N) é exata:

$$\dots H^n(M, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_n^*} H^n(N, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta^n} H^n(M, N, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots,$$

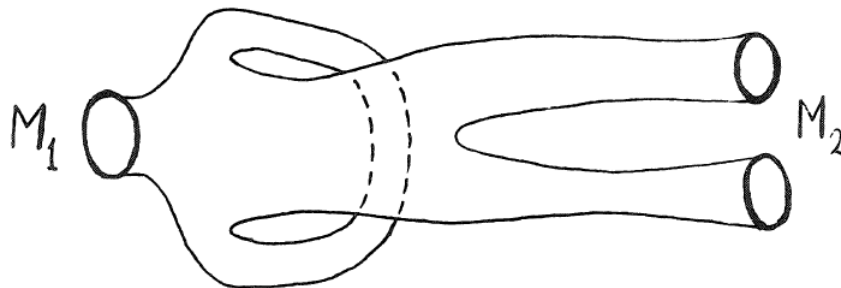
Desta maneira, concluímos que todos os números de Stiefel-Whitney de N são nulos. ■

O Teorema a seguir é a recíproca do Teorema de Pontrjagin apresentado acima. Devido a complexidade, sua demonstração foge ao escopo desse trabalho, entretanto pode ser encontrada em (STONG, 1958, p.18-23).

Teorema 16. (Thom) Seja M uma n -variedade suave. Se todos os números de Stiefel-Whitney de M são nulos, então M é a fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta.

Exemplo 40. Dos resultados anteriores, segue que \mathbb{RP}^{2n-1} é fronteira de alguma $2n$ -variedade suave compacta, enquanto que não existe $(2n + 1)$ -variedade suave compacta com a fronteira sendo igual à variedade \mathbb{RP}^{2n} .

Definição 55. Sejam M_1 e M_2 suas n -variedades suaves fechadas. Dizemos que M_1 e M_2 pertencem a mesma **classe de cobordismo**, ou são **cobordantes**, se a união disjunta de M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \dot{\cup} M_2$, é a fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta.



Retirada de Milnor-Stasheff (1974)

Figura 6 – Variedades M_1 e M_2 cobordantes.

O próximo resultado é consequência do Teorema de Pontrjagin e do Teorema de Thom.

Corolário 7. Duas n -variedades suaves fechadas são cobordantes se, e somente se, todos os seus correspondentes números de Stiefel-Whitney são iguais.

Demonstração: Sejam M_1 e M_2 suas n -variedades suaves fechadas. Suponha que M_1 e M_2 são cobordantes. Neste caso, $M_1 \dot{\cup} M_2$ é fronteira de alguma $(n + 1)$ -variedade suave compacta.

Assim, pelo Teorema de Pontrjagin, temos que todos os números de Stiefel-Whitney de $M_1 \dot{\cup} M_2$ são nulos. Portanto, para r_1, \dots, r_n inteiros não negativos tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$, temos

$$w_1^{r_1}(M_1 \dot{\cup} M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1 \dot{\cup} M_2)[M_1 \dot{\cup} M_2] = 0$$

o que equivale a

$$w_1^{r_1}(M_1) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1)[M_1] + w_1^{r_1}(M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_2)[M_2] = 0$$

que por sua vez, equivale a

$$w_1^{r_1}(M_1) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1)[M_1] = w_1^{r_1}(M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_2)[M_2].$$

Assim, todos os respectivos números de Stiefel-Whitney de M_1 e M_2 coincidem.

Reciprocamente, suponha que todos os números de Stiefel-Whitney de M_1 e M_2 sejam iguais. Pela equivalência acima, temos

$$w_1^{r_1}(M_1 \dot{\cup} M_2) \smile \dots \smile w_n^{r_n}(M_1 \dot{\cup} M_2)[M_1 \dot{\cup} M_2] = 0,$$

para quaisquer inteiros não negativos r_1, \dots, r_n tais que

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n.$$

O que significa que todos os números de Stiefel-Whitney de $M_1 \dot{\cup} M_2$ são nulos. Consequentemente, pelo Teorema de Thom, temos que $M_1 \dot{\cup} M_2$ é fronteira de alguma $(n+1)$ -variedade suave compacta. Logo, M_1 e M_2 são cobordantes. ■

Exemplo 41. Quando n é um número par, temos que S^n e $\mathbb{R}P^n$ não são cobordantes.

De fato, sabemos que $w_i(S^n) = 0$, para todo $i > 0$, portanto, todos os números de Stiefel-Whitney de S^n são nulos. Por outro lado, sabemos que existem números de Stiefel-Whitney não nulos para $\mathbb{R}P^n$, quando n é par. Assim, S^n e $\mathbb{R}P^n$ não pertencem à mesma classe de cobordismo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho é estudar fibrados vetoriais reais e ferramentas que possam fornecer informações importantes sobre o comportamento de tais fibrados. Neste estudo pudemos observar que a existência de k -seções linearmente independentes sobre um fibrado vetorial Euclidiano está relacionada ao número de classes de Stiefel-Whitney não nulas deste fibrado.

Assim, concluímos que as classes de Stiefel-Whitney generalizam a noção da característica de Euler, isto é, foram pensadas para medir a obstrução a construção de k -referências tangentes a uma variedade suave real. No caso complexo, o mesmo problema de obstrução motivou o surgimento das chamadas classes de Chern.

Ademais, o caso singular também possui suas generalizações da característica de Euler. Neste contexto, é preciso generalizar o fibrado tangente que não existe no caso de variedades singulares, tal construção tem pelo menos dois diferentes caminhos, dando origem a duas diferentes classes, as classes de Schwartz-MacPherson e classes de Fulton. Uma referência para este estudo é ([BRASSELET, 2002](#)).

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, A. M. **Classes de Stiefel-Whitney e de Euler**. Dissertação (Mestrado) — UNESP, Campus São José do Rio Preto, 2017. Nenhuma citação no texto.
- BRASSELET, J. P. **Characteristic Classes and Singular Varieties**. Notas de aula: ICMC-USP, 2002. Citado nas páginas 30 e 103.
- CASTELO BRANCO JÚNIOR, J. L. **Classes de Stiefel-Whitney**. Dissertação (Mestrado) — UFPB, João Pessoa, 2019. Nenhuma citação no texto.
- DALBELO, T. M. **O índice de Poincaré-Hopf e generalizações no caso singular**. Dissertação (Mestrado) — ICMC, São Carlos, 2011. Citado na página 30.
- GREENBERG, M.; HARPER, J. **Algebraic topology: a first course**. London: Benjamin-Cummings Pub. Comp., 1981. Citado na página 40.
- GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. **Differential Topology**. [S.l.]: Prentice Hall, 1974. Citado na página 24.
- HATCHER, A. **Algebraic Topology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. Citado nas páginas 35, 36 e 98.
- _____. **Vector Bundles and K-Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 61.
- HIRZEBRUCH, F. **Topological Methods in Algebraic Geometry**. [S.l.]: Springer Verlag, 1966. Citado na página 84.
- HUMSEMOLLER, D. **Fibre Bundles**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1994. Citado nas páginas 45 e 61.
- LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2007. Citado nas páginas 17, 18 e 24.
- MACLANE, S. **Homology**. Berlin: Springer-Verlag, 1979. Citado na página 39.
- MILNOR, J. **Topology from the Differentiable Viewpoint**. [S.l.]: Princeton Landmarks in Mathematics, 1997. Citado na página 17.
- MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. **Characteristic Classes**. Princeton University Press, NJ: Annals of Mathematics Studies, No 76, 1974. Citado nas páginas 16, 21 e 84.
- STONG, R. E. **Notes on Cobordism Theory**. Notes, Princeton University Press, 1958. Citado na página 101.
- WHITNEY, H. **Geometric Integration Theory**. Princeton: Princeton University Press, 1957. Citado na página 27.

A ESTRUTURA DIFERENCIÁVEL DO ESPAÇO PROJETIVO REAL

Quando tratamos do fibrado tangente $\tau_{\mathbb{R}P^n}$ sobre o espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$, estamos considerando uma estrutura diferenciável para o espaço projetivo, a qual definiremos a seguir.

Primeiramente, devemos observar que $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade topológica.

Como a aplicação quociente $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é contínua, sobrejetiva e aberta, veremos que $\mathbb{R}P^n$ é compacto e Hausdorff.

Pela continuidade e sobrejetividade de q , a compacidade de $\mathbb{R}P^n$ segue da compacidade da esfera S^n . Além disso, como q é aberta, para demonstrar que $\mathbb{R}P^n$ é Hausdorff, basta mostrar que conjunto $C(q) = \{(x, y) \in S^n \times S^n; q(x) = q(y)\}$ é fechado no produto $S^n \times S^n$, o que segue do fato de $C(q)$ ser a união de dois fechados, a saber a diagonal de S^n e $\{(x, -x); x \in S^n\}$ que é homeomorfo a diagonal.

Para concluir que $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade topológica, precisamos ainda de uma base enumerável e cartas locais.

Observe que para cada ponto $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in S^n$, existe a vizinhança que não contém nenhum par de pontos antípodas. De fato, como p é não-nulo, existe $p_i \neq 0$, se $p_i > 0$, basta considerar $U_i^+ = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_i > 0\}$, e no caso de $p_i < 0$, basta considerar $U_i^- = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_i < 0\}$.

Então afirmamos que a aplicação quociente $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é um homeomorfismo local. Os abertos construídos U_i^+ e U_i^- acima cobrem S^n quando variamos $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Como q só perde injetividade em pares antípodas e é uma aplicação aberta, as restrições $q|_{U_i^+}$ e $q|_{U_i^-}$ são bijeções contínuas e abertas sobre suas imagens, ou seja, homeomorfismos.

Assim, demonstramos que podemos cobrir $\mathbb{R}P^n$ com abertos homeomorfos a abertos da esfera S^n . Observe que apenas os abertos $q(U_i^+)$, para $i = 1, \dots, n+1$, já são suficientes para

cobrir $\mathbb{R}P^n$, pois $q(U_i^+) = q(U_i^-)$.

Agora, provaremos que:

1. $\mathbb{R}P^n$ possui base enumerável para sua topologia.
2. $\mathbb{R}P^n$ é localmente euclidiano de dimensão n .

De fato, seja $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável de S^n , como q é uma aplicação aberta, temos que $\{q(V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base enumerável de $\mathbb{R}P^n$. Agora, já vimos acima que

$$\{q(U_i^+); i = 1, \dots, n+1\}$$

é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}P^n$ tal que as restrições $q|_{U_i^+} : U_i^+ \rightarrow q(U_i^+)$ são homeomorfismos. Além disso, para cada $i = 1, \dots, n+1$, a aplicação $\phi_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi_i^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

é um homeomorfismo sobre a bola aberta de raio 1 centrada na origem de \mathbb{R}^n . Portanto, as composições $\phi_i^+ \circ (q|_{U_i^+})^{-1} : q(U_i^+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definem as cartas locais de $\mathbb{R}P^n$.

Com isso, vemos que $\mathbb{R}P^n$ é um espaço Hausdorff, com base enumerável e localmente euclidiano de dimensão n , o que significa que $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade topológica n dimensional.

Porém, desejamos ainda utilizar a estrutura diferenciável da esfera S^n para induzirmos uma estrutura diferenciável em $\mathbb{R}P^n$. O atlas de S^n formado pelas cartas U_i^+ e U_i^- é compatível, no sentido de que as mudanças de cartas são diferenciáveis. Para cada $i = 1, \dots, n+1$, considere novamente a aplicação $\psi_i : q(U_i^+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\psi := \phi_i^+ \circ (q|_{U_i^+})^{-1}$, então afirmamos que a coleção $\{(q(U_i^+), \psi_i)\}_{i=1, \dots, n+1}$ é um atlas compatível para $\mathbb{R}P^n$.

De fato, na interseção $q(U_i^+) \cap q(U_j^+)$ dos domínios de duas cartas quaisquer, temos que a troca de coordenadas $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ é dada por

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \phi_j^+ \circ (\phi_i^+)^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \psi_i(q(U_i^+) \cap q(U_j^+))$. Como a composição $\phi_j^+ \circ (\phi_i^+)^{-1}$ é diferenciável em $\psi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+)$ e $\psi_i(q(U_i^+) \cap q(U_j^+)) \subset \psi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+)$, o mesmo vale para $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$.

Assim definimos a estrutura diferenciável de $\mathbb{R}P^n$. Além disso, valem as seguintes proposições.

Proposição 30. A projeção $q : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ é um difeomorfismo local.

Proposição 31. Seja M uma variedade diferenciável qualquer. Uma aplicação $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow M$ é diferenciável se, e somente se, a composição $f \circ q : S^n \rightarrow M$ é diferenciável.

Proposição 32. Sejam M uma variedade diferenciável qualquer e $f : S^n \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável satisfazendo $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in S^n$. Então existe uma única aplicação diferenciável $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \rightarrow M$ satisfazendo $\bar{f} \circ q = f$.

