# HIPOELITICIDADE GLOBAL PARA OPERADORES DE SEGUNDA ORDEM

*Sérgio Luís Zani*

Orientador: *Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS
1988

Aos meus
pais.

- A G R A D E C I M E N T O S -

- Ao Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco pela orientação e pelo apoio sempre presentes.

- Aos Professores do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, principalmente ao Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro e ao Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento.

- Aos amigos e colegas de graduação e pós-graduação.

- Ao excelente trabalho de datilografia realizado pela Secretaria de Trabalhos Científicos do ICMSC-USP.

- Este trabalho contou parcialmente com o apoio financeiro do CNPq.

# A B S T R A C T

Our main aim in this work is to study the regularity of the periodic solutions of differential equations ( especially second order ones ) using the characterization of periodic distributions and of smooth periodic functions by means of their Fourier series.

# ÍNDICE

INTRODUÇÃO ..... i

CAPÍTULO I ..... 1

I.1. - $P_T$ : O Espaço das Funções Testes Periódicas .... 2
I.2. - $P'_T$ : O Espaço das Distribuições Periódicas ..... 9
I.3. - T-Convolução ..... 28
I.4. - A Álgebra $(P'_T, *, +)$ ..... 44
I.5. - A Série de Fourier ..... 47
I.6. - A Série Parcial de Fourier ..... 69

CAPÍTULO II ..... 84

II.1. - Resolubilidade de Equações Lineares de T-Convolução ..... 85
II.2. - Hipoeliticidade Global ..... 89
II.3. - Exemplos de Operadores Globalmente Hipoelíticos ..... 95
II.4. - Um Exemplo de Operador Diferencial Parcial a Coeficientes Variáveis Globalmente Hipoelítico .. 106
II.5. - Outros Exemplos ..... 112

APÊNDICE ..... 116

BIBLIOGRAFIA ..... 122

# INTRODUÇÃO

Este trabalho de Mestrado tem como objetivo principal o estudo da hipoeliticidade global de certos operadores diferenciais parciais lineares. Para chegar a isto fizemos no Capítulo I um estudo sobre distribuições periódicas procurando tratá-las de maneira que não fosse preciso ter um conhecimento prévio da teoria das distribuições, visando com isso torná-lo mais acessível. Ainda neste capítulo estudamos as séries de Fourier das distribuições periódicas e das funções periódicas infinitamente diferenciáveis de $n$ variáveis reais.

Após terminarmos a redação deste trabalho tomamos conhecimento do livro Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução, de Rafael Iório e Valéria Iório, Projeto Euclides - 1988, o qual trata este assunto no caso de uma variável.

Os resultados obtidos neste capítulo foram a ferramenta básica para o Capítulo II, que contém a parte principal do trabalho. Neste capítulo estudamos a influência dos termos de ordem mais baixa de um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes de 2ª ordem através de exemplos. Isto é, adicionamos a certos operadores homogêneos de ordem 2 outros homogêneos de ordem 1 e de ordem 0 e comparamos a hipoeliticidade do operador resultante com aquela de cada uma das parcelas.

Mostramos a hipoeliticidade do operador $P$ dado por $Pu = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \phi^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}u + a(x)\frac{\partial u}{\partial y}$ onde $a$ e $\phi$ são funções

$2\pi$ - periódicas de classe $C^\infty$ , $\phi(0) \neq 0$ e $\phi(x) = 0$ se $\frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi$ . No caso em que $a \equiv 0$ , $\phi(x) \equiv 1$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$ e $\phi(x) = 0$ se $\frac{3\pi}{4} \leq |x| \leq \pi$ o operador $\dot{P}$ é o mesmo que foi estudado por Fujiwara e Omori ([4]).

Por fim, verificamos que para quase todo $a \in [0,1]$ os operadores das famílias

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} \right)_{a \in [0,1]} \qquad \text{e} \qquad \left( \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha + a \right)_{a \in [0,1]}$$

são globalmente hipoelíticos.

O Teorema 4 da seção 2 e o Teorema 1 da seção 3 do Capítulo II são de Greenfield e Wallach [5].

# CAPÍTULO I

O objetivo deste capítulo é caracterizar as funções periódicas infinitamente diferenciáveis e as distribuições periódicas com suas séries de Fourier.

Na primeira seção será feito um breve estudo envolvendo as funções periódicas infinitamente diferenciáveis.

Na segunda seção serão definidas as distribuições periódicas e apresentadas algumas de suas propriedades mais importantes.

Na terceira seção será definido um tipo de convolução ( T - convolução ) para funções e distribuições periódicas. Um fato interessante é que esta convolução fica definida para quaisquer pares de distribuições periódicas, fato que não ocorre com as distribuições e convolução usuais.

Na quarta seção será dada uma condição necessária e suficiente para a resolubilidade de uma equação linear da T-convolução.

A quinta seção será dedicada ao estudo da série de Fourier tanto das funções periódicas infinitamente deriváveis como das distribuições periódicas. Será mostrada a caracterização de cada um destes objetos com seqüências numéricas apropriadas.

Na sexta seção serão estudadas as séries parciais de Fourier para funções periódicas infinitamente diferenciáveis e distribuições periódicas.

## 1. $P_T$ : O ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES PERIÓDICAS

Sejam $T > 0$ e $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

DEFINIÇÃO 1 . Seja

$$P_T(\mathbb{R}^n) = < \theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \; ; \; \theta(x) = \theta(x-Tm), \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \; \forall\, m \in \mathbb{Z}^n > .$$

$P_T(\mathbb{R}^n)$ ou, simplesmente, $P_T$ é um espaço vetorial chamado de espaço das funções testes periódicas.

DEFINIÇÃO 2 . Uma seqüência $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ onde $\theta_j \in P_T$ , $j \in \mathbb{N}$ , converge em $P_T$ se existir $\theta \in P_T$ tal que $D^\alpha\theta_j$ converge uniformemente para $D^\alpha\theta$ , para cada $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ .

Existe uma métrica em $P_T$ em relação a qual as seqüências convergentes são as da Definição 2. A saber:

$$d(\theta,\phi) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{p_k(\theta-\phi)}{2^k(1+p_k(\theta-\phi))} ,$$

onde

$$p_k(\theta) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha\theta(x)|$$

é uma semi-norma.

TEOREMA 1 . $\theta_j$ converge para $\theta$ em $P_T$ se, e somente se , $p_k(\theta_j-\theta) \to 0$ para cada $k = 1,2,\ldots$ .

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Se $\theta_j \to \theta$ em $P_T$, então, para cada $k$,

$$p_k(\theta_j-\theta) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha\theta_j(x) - D^\alpha\theta(x)| \longrightarrow 0 .$$

Se $p_k(\theta_j-\theta) \to 0$ então para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha\theta_j(x) - D^\alpha\theta(x)| \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha\theta_j(x) - D^\alpha\theta(x)| =$$
$$= p_k(\theta_j-\theta) \longrightarrow 0 .$$

Para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ defina $\theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$.
$\theta$ está bem definida pois, existe $C > 0$ tal que $\phi(x) = 0$ para todo $x$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $|x| \geq C$.

Assim, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $|x| \leq a$ para algum $a > 0$ então

$$\phi(x - Tm) \neq 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow |x - Tm| < C \Rightarrow |x_i - Tm_i| < C ,$$

$$i = 1,\ldots,n \Rightarrow -C < Tm_i - x_i < C , \quad i = 1,\ldots,n .$$

Como $-a \leq x_i \leq a$ temos

$$-C - a \leq -C + x_i < Tm_i < C + x_i \leq C + a , \quad i = 1,\ldots,n .$$

Logo, $|m_i| \leq \frac{C + a}{T}$, $i = 1,\ldots,n$. Como existe apenas um número finito de n-uplas $m$ que satisfazem esta última condição, podemos escrever

$$\theta(x) = \phi(x - Tm_1) + \ldots + \phi(x - Tm_k)$$

desde que $|x| \leq a$.

Mostremos que $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Seja $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\theta(x - Tm) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm - Tk) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - T(m+k)) =$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - T\ell) = \theta(x) .$$

Dado $x_o \in \mathbb{R}^n$ , seja $a > 0$ tal que $|x_o| < a$ . Assim,

$$\theta(x) = \phi(x - Tm_1) + \ldots + \phi(x - Tm_k) , \quad |x| < a$$

e vemos que $\theta$ é infinitamente diferenciável em $x_o$ . Logo, $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Além do mais,

$$D^\alpha\theta(x) = D^\alpha\phi(x - Tm_1) + \ldots + D^\alpha\phi(x - Tm_k)$$

e como $\phi(x - Tm) \equiv 0$ se $|x| < a$ e $m \neq m_i$ , $i = 1,\ldots,k$ , temos também que

$$D^\alpha\phi(x - Tm) \equiv 0 \quad \text{se} \quad |x| < a \quad \text{e} \quad m \neq m_i , \; i = 1,\ldots,n .$$

Desse modo podemos escrever

$$D^\alpha\theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha \phi(x - Tm) .$$

<u>PROPOSIÇÃO 1</u> . Seja $(\phi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ , $\phi_\ell \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_\ell$ converge para $\phi$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Então, a seqüência $(\theta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $P_T(\mathbb{R}^n)$ definida por $\theta_\ell(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_\ell(x - Tm)$ converge em $P_T(\mathbb{R}^n)$ para $\theta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Existe $a > 0$ tal que $S(\phi_\ell) \subset B[0,a]$, para todo $\ell \in \mathbb{N}$ e $D^\alpha \phi_\ell$ converge para $D^\alpha \phi$ uniformemente para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\varepsilon > 0$.

Como $D^\alpha(\phi_\ell - \phi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existem $m_1, \ldots, m_{k_\ell}$ tais que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm) = D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_1) + \ldots + D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_{k_\ell}),$$

$x \in [0,T]^n$.

Mas $\phi_\ell(x) \equiv 0$ se $x \notin B[0,a]$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Logo, se $\phi_\ell(x - Tm) \neq 0$ então $|x - Tm| \leq a$ e isto implica em $x_i - a \leq T m_i \leq a + x_i$.

Como $x \in [0,T]^n$, vem que

$$-a - T \leq -a \leq Tm_i \leq a + x_i \leq a + T$$

e, portanto

$$|m_i| \leq \frac{a}{T} + 1 .$$

Como $a$ independe de $\ell \in \mathbb{N}$, concluímos que só existe um número finito de índices $m \mid \phi_\ell(x - Tm) \neq 0$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

Desse modo, podemos escrever

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm) = D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_1) + \ldots$$

$$\ldots + D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_k), \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in [0,T]^n .$$

Como $D^\alpha \phi_\ell$ converge para $D^\alpha \phi$ uniformemente, existe $\ell_o \in \mathbb{N}$ tal que $\ell \geq \ell_o$ implica em

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \phi_\ell(x) - D^\alpha_\phi(x)| < \frac{\varepsilon}{k} .$$

Logo, se $\ell \geq \ell_o$ e $x \in [0,T]^n$

$$|D^\alpha \theta_\ell(x) - D^\alpha \theta(x)| = |D^\alpha(\theta_\ell - \theta)(x)| =$$

$$= |D^\alpha( \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi_\ell - \phi)(x - Tm) )| = |\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm)| =$$

$$= |D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_1) + \ldots + D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_k)| \leq$$

$$\leq |D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_1)| + \ldots + |D^\alpha(\phi_\ell - \phi)(x - Tm_k)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{k} + \ldots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon .$$

Considere

$$U_T(\mathbb{R}^n) = \{ \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) = 1 , \forall x \in \mathbb{R}^n \} .$$

Se $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$ diremos que $\xi$ é unitária.

Um exemplo de função unitária é $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_{|t|}^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx}{\displaystyle\int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}$$

Verifica-se que $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $S(\xi) = [-1,1]$ .

Dado $t \in \mathbb{R}$ seja $n_o \in \mathbb{Z}$ tal que $n_o \leq t \leq n_o + 1$

isto é, $0 \leq t - n_o \leq 1$ ou $-1 \leq n_o - t \leq 0$ .

Se $n \geq n_o + 2$ então $t \leq n$ e

$$|t-n| = n - t \geq n_o - t + 2 \geq -1 + 2 = 1$$

logo, $\xi(t-n) = 0$ .

Se $n \leq n_o - 1$ então $n < t$ e

$$|t-n| = t - n \geq t + 1 - n_o = (t-n_o) + 1 \geq 1$$

logo, $\xi(t-n) = 0$ .

Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi(t-n) = \xi(t-n_o) + \xi(t-n_o-1) =$$

$$= \left( \int_o^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx \right)^{-1} . \left[ \int_{t-n_o}^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{1+n_o-t}^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx \right] = \left( \int_o^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx \right)^{-1} .$$

$$. \left[ \int_{t-n_o}^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx - \int_{t_o-n_o}^o \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx \right] =$$

$$= \left( \int_o^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx \right)^{-1} . \left( \int_o^1 \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) dx \right) = 1 .$$

Se $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$ então $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e como visto

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha \xi(x - Tm) = D^\alpha \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) = D^\alpha 1 = 0 .$$

PROPOSIÇÃO 2 . Se $(\theta_j)$ converge para $\theta$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$ então $(\xi.\theta_j)$ converge para $\xi.\theta$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

i) $S(\xi.\theta_j) \subset S(\xi)$

ii) Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos que

$$D^\alpha(\xi.\theta_j) = \sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\ \beta!} D^\gamma\xi \,.\, D^\beta\theta_j$$

converge uniformemente para

$$\sum_{\gamma+\beta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\ \beta!} D^\gamma\xi\ D^\beta\theta = D^\alpha(\xi.\theta)$$

pois $\theta_j$ converge para $\theta$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

A proposição seguinte mostra que é sempre possível escrever uma função $\theta$ de $P_T$ na forma $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$ com $\phi \in C_c^\infty$.

PROPOSIÇÃO 3 . A aplicação

$$\tilde{T} : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P_T(\mathbb{R}^n)$$

$$\phi \longmapsto \tilde{T}\phi$$

onde $\tilde{T}\phi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm)$ é sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO:

Dada $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ defina $\phi = \xi.\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ onde $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$.

Assim,

$$(T\phi)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - Tm) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) \cdot \theta(x - Tm) =$$

$$= \theta(x) \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x - Tm) = \theta(x) .$$

Logo,

$$T\phi = \theta .$$

Note $\xi$ é uma função unitária arbitrária.

## 2. $P_T'$ : O ESPAÇO DAS DISTRIBUIÇÕES PERIÓDICAS

DEFINIÇÃO 1 . Um funcional linear $f : P_T(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é dito contínuo (ou seqüencialmente contínuo) se $(\theta_j)$ converge para $0$ em $P_T$ implica que $f(\theta_j)$ convirja para $0$ em $\mathbb{C}$ .

DEFINIÇÃO 2 . O espaço vetorial $P_T'(\mathbb{R}^n) = \{ f ; f$ é funcional linear contínuo de $P_T(\mathbb{R}^n) \}$ é chamado de espaço das distribuições periódicas e $f$ é dita uma distribuição periódica.

Se $f \in P_T'$ e $\theta \in P_T$ usaremos a seguinte notação:

$$f(\theta) = (f,\theta) .$$

TEOREMA 1 : Seja $f : P_T(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:

i) $f$ é contínuo;

ii) Existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$|(f,\theta)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta(x)| ,$$

para toda $\theta$ de $P_T$ .

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Suponha que (ii) seja válido. Se $(\theta_j)$ vai à 0 em $P_T$ então $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_j(x)|$ tende a zero para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Logo, a soma

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_j(x)|$$

também tende a zero quando $j$ tende a infinito.

Portanto, usando a desigualdade em (ii) concluímos que $f$ é contínuo.

Suponha agora que $f$ é contínuo.

Se $f \equiv 0$ a implicação é imediata. Admitamos que (ii) seja falso e $f \not\equiv 0$ .

Então, para cada $m \in \mathbb{N}$ , podemos encontrar $\tilde{\theta}_m \in P_T$ tal que

$$|(f,\tilde{\theta}_m)| > m \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \tilde{\theta}_m(x)|$$

Definindo $\theta_m = \dfrac{\tilde{\theta}m}{|(f,\tilde{\theta}_m)|}$ temos que

$$|(f,\theta_m)| = 1 > m \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_m(x)|$$

E daí,

$$0 < \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \theta_m(x)| < \frac{1}{m}$$

Assim, $\theta_m$ converge para 0 em $P_T$, porém $(f,\theta_m)$ não converge a zero em $\mathbb{C}$. Absurdo.

<u>DEFINIÇÃO 3</u>. Diremos que uma seqüência $(f_n)$ de distribuições T-periódicas é convergente em $P'_T(\mathbb{R}^n)$ se existir $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ a seqüência $(f_n,\theta)$ converge para $(f,\theta)$.

O próximo teorema mostra que existe uma identificação entre o $P'_T(\mathbb{R}^n)$ e o subespaço vetorial e topológico (munido da topologia induzida de $D'(\mathbb{R}^n)$ definido por:

$$D'_T(\mathbb{R}^n) = \{ u \in D'(\mathbb{R}^n) ; \quad u = u_{Tm} , \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}^n \}$$

onde $\langle u_{Tm} , \phi \rangle = \langle u , \phi_{-Tm} \rangle$ e $\phi_{Tm}(x) = \phi(x - Tm)$.

<u>TEOREMA 2</u>. Existe um homeomorfismo linear entre $P'_T(\mathbb{R}^n)$ e $D'_T(\mathbb{R}^n)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ considere

$$\theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \in P_T(\mathbb{R}^n)$$

Podemos definir

$$u : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \quad \text{por} \quad u(\phi) = (f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}) = (f, \theta) .$$

Mostremos que $u \in D_T'(\mathbb{R}^n)$ .

Linearidade: Se $\phi , \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então

$$u(\phi + \psi) = ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi + \psi)_{Tm} ) =$$

$$= ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \psi_{Tm} ) =$$

$$= ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) + ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \psi_{Tm} ) = u(\phi) + u(\psi)$$

e

$$u(\lambda\phi) = ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\lambda\phi)_{Tm} ) = ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda\phi_{Tm} ) =$$

$$= ( f , \lambda \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) = \lambda( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) = \lambda u(\phi) .$$

Continuidade: Se $\phi_j$ converge para zero em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , a Proposição 1 da seção anterior garante que $\theta_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi_j)_{Tm}$ converge para $\theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 0_{Tm} = 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Desse modo, $u(\phi_j) = (f , \theta_j)$ converge para $0$ em $\mathbb{C}$ . Logo, $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ . Usaremos a notação $u(\phi) = \langle u , \phi \rangle$ .

Periodicidade: Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{Z}^n$ então

$$\langle u_{Tm} , \phi \rangle = \langle u , \phi_{-Tm} \rangle = ( f , \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\phi_{-Tm})_{Tk} ) =$$

$$( f , \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi_{T(k-m)} ) = ( f , \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tk} ) = \langle u , \phi \rangle ,$$

isto é, $u_{Tm} = u$ .

Portanto, $u \in D_T'(\mathbb{R}^n)$ .

Seja

$$A : P'_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D'_T(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longmapsto u = T(f)$$

onde $\langle u , \phi \rangle = ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} )$ , $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Mostremos que $A$ é linear e contínuo.

Linearidade: Se $f , g \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle A(f+g) , \phi \rangle = ( f+g , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) =$$

$$= ( f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) + ( g , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) =$$

$$= \langle A(f) , \phi \rangle + \langle A(g) , \phi \rangle = \langle A(f) + A(g) , \phi \rangle$$

e

$$\langle A(\lambda f) , \phi \rangle = \langle \lambda f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \rangle = \lambda \langle f , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \rangle =$$

$$= \lambda \langle A(f) , \phi \rangle = \langle \lambda A(f) , \phi \rangle .$$

Continuidade: Seja $(f_j)$ , $f_j \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j$ tende a zero em $P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos que

$$\lim_{j \to \infty} \langle A(f_j) , \phi \rangle = \lim_{j \to \infty} ( f_j , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) = 0 .$$

Logo, $A(f_j)$ tende a zero em $D'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Vamos agora, a partir de $u \in D'_T(\mathbb{R}^n)$ , definir uma única

distribuição T-periódica $f$ de modo que esta aplicação seja a inversa de $A$ .

Seja $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$ . Para cada $u \in D'_T(\mathbb{R}^n)$ definamos

$$f_\xi : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto \langle u , \xi . \theta \rangle \quad .$$

Mostremos que $f_\xi \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Linearidade: Sejam $\theta , \beta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ .

i) $f_\xi(\theta+\beta) = \langle u , \xi(\theta+\beta)\rangle = \langle u , \xi\theta + \xi\beta\rangle = \langle u , \xi\theta\rangle + \langle u , \xi\beta\rangle =$

$= f_\xi(\theta) + f_\xi(\beta)$

ii) $f_\xi(\lambda\theta) = \langle u , \xi(\lambda\theta)\rangle = \langle u , \lambda\xi\theta\rangle = \langle \lambda u , \xi\theta\rangle = \lambda \langle u , \xi\theta\rangle =$

$= \lambda f_\xi(\theta)$ .

Continuidade: Seja $(\theta_j)$ , $\theta_j \in P_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta_j$ tende a zero em $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

A Proposição 2 da seção anterior nos diz que $(\xi\,\theta_j)$ tende a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Como $u \in D'_T(\mathbb{R}^n)$ temos que $f_\xi(\theta_j) = \langle u , \xi\theta_j\rangle \to 0$ .

Logo, $f_\xi \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Mostremos que a definição de $f_\xi$ independe da escolha de $\xi$ , isto é, se $\xi , \eta \in U_T(\mathbb{R}^n)$ então $f_\xi = f_\eta$ .

Mostremos antes que

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\eta)_{Tm} \quad .$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Então

$$<u - \sum_{|m| \leq k} (u\eta)_{Tm} , \phi> = <u - \sum_{|m| \leq k} u_{Tm} \eta_{Tm} , \phi> =$$

$$= <u - \sum_{|m| \leq k} u \eta_{Tm} , \phi> = <u(1 - \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm}) , \phi> =$$

$$= <u , \phi.(1 - \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm})>$$

converge para zero pois, $1 - \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm}$ tende a zero em $P_T(\mathbb{R}^n)$ e pela Proposição 2 da seção anterior $\phi.(1 - \sum_{|m| \leq k} \eta_{Tm})$ tende a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Além do mais, como

$$< \sum_{|m| \leq k} (u\eta)_{Tm} , \phi> = \sum_{|m| \leq k} <(u\eta)_{Tm} , \phi>$$

temos que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <(u\eta)_{Tm} , \phi> = < \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\eta)_{Tm} , \phi> .$$

Provemos agora que $f_\xi = f_\eta$ .

Dada $\theta \in P_T$ tome $\phi = \xi\theta$ então

$$f_\xi(\theta) = <u , \xi\theta> = < \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\eta)_{Tm} , \xi\theta> = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <(u\eta)_{Tm} , \xi\theta> =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <u\eta , (\xi\theta)_{-Tm}> = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <u \eta , \theta\xi_{-Tm}> = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <u , \eta\theta\xi_{-Tm}> =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <u\xi_{-Tm} , \eta\theta> = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} <(u\xi)_{-Tm} , \eta\theta> =$$

$$= < \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\xi)_{-Tm} , \eta\theta> = <u , \eta\theta> = f_\eta(\theta) .$$

Passaremos a escrever somente

$f_\xi = f$ .

Definamos

$$H : D'_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P'_T(\mathbb{R}^n)$$

$$u \longmapsto H(u)$$

onde $H(u) : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto \langle u, \xi\theta \rangle$$

e $\xi \in U_T$ .

$H$ é linear pois, dados $u,v \in D'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos para todo $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$

i) $(H(u+v), \theta) = \langle u+v, \xi\theta \rangle = \langle u, \xi\theta \rangle + \langle v, \xi\theta \rangle =$

$= (H(u), \theta) + (H(v), \theta) = (H(u)+(H(v), \theta)$ ;

ii) $(H(\lambda u), \theta) = \langle \lambda u, \xi\theta \rangle = \lambda \langle u, \xi\theta \rangle = (\lambda H(u), \theta)$ .

$H$ é contínuo pois, se $u_j \to 0$ em $D'_T(\mathbb{R}^n)$ então para cada $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$

$(H(u_j), \theta) = \langle u_j, \xi\theta \rangle \to 0$ .

Portanto, $H(u_j) \to 0$ em $P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Mostremos que $H$ é a inversa de $A$ .

Sejam $u \in D'_T(\mathbb{R}^n)$ , $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$ .

Observe que se $a > 0$ é tal que $S(\xi) \subset B[0,a]$ então

$$\psi(x) = \xi(x) \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi(x)\, \phi_{Tm}(x) =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi \cdot \xi_{-Tm})_{Tm}(x) = 0$$

se $|x| > a$ e, se $|x| \leq a$ então

$$\psi(x) = \xi(x)\, (\phi(x - Tm_1) + \ldots + \phi(x - Tm_k))$$

para certos $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}^n$.

Deste modo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ a série

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi\, \phi_{Tm} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi\, \xi_{-Tm})_{Tm} \quad \text{é finita.}$$

Tendo em vista isto, obtemos

$$\langle A(H(u)), \phi \rangle = (H(u), \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}) = \langle u, \xi \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} \rangle =$$

$$= \langle u, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\phi\, \xi_{-Tm})_{Tm} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u, (\phi\, \xi_{-Tm})_{Tm} \rangle =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \phi \xi_{-Tm} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle u\, \xi_{-Tm}, \phi \rangle =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle (u\xi)_{-Tm}, \phi \rangle = \langle \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (u\xi)_{-Tm}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle$$

onde as duas últimas igualdades são válidas em virtude da observação feita antes de demonstrarmos que $f_\eta = f_\xi$.

Agora, para $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$,

$$(H(A(f)), \theta) = \langle A(f), \xi\theta \rangle = (f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\xi\theta)_{Tm}) =$$

$$(f, \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi_{Tm}\, \theta) = (f, \theta \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \xi_{Tm}) = (f, \theta) .$$

Portanto, $H = A^{-1}$ , o que demonstra o teorema.

De agora em diante não distinguiremos mais $u$ e $f$ . Apenas quando julgarmos que possa haver dúvidas faremos alguma menção.

Mas como o nosso propósito é tratar distribuições periódicas como funcionais lineares contínuos de $P_T$ procuraremos usar a notação de $P_T'$ .

Vejamos agora alguns exemplos de distribuições periódicas.

<u>EXEMPLO 1</u> :

Seja $g \in L^1([0,T]^n)$ .

Defina $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$f(x + Tm) = g(x) \ , \quad x \in [0,T^n] \ , \quad m \in \mathbb{Z}^n \ .$$

Se $\xi \in U_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ então $f.\xi.\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e podemos definir

$L_f : P_T(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ por

$$L_f(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\theta\,\xi(x)\,dx$$

Vê-se que $L_f$ é linear e, além do mais, se $\theta_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ então $f.\xi.\theta_j \to 0$ quase sempre e

$$|(f.\xi.\theta_j)(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\theta_j(x)|.|(f.\xi)(x)| \leq$$

$$\leq C\,|(f.\xi)(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

pois como $\theta_j \to 0$ em $P_T$ existe $C > 0$ tal que

$$|\sup \theta_j(x)| \leq C \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{N} \ .$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$L_f(\theta_j) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\xi\,\theta_j \to 0$$

Portanto, $L_f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Além do mais, se $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$(L_f\,,\,\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\xi(x)\theta(x)dx =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\prod_{i=1}^{n}[a_i+Tm_i,a_i+Tm_i+T]} f(x)\xi(x)\theta(x)dx =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+T]} f(y+Tm)\xi(y+Tm)\theta(y+Tm)dy =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+T]} f(y)\theta(y)\xi(y+Tm)dy =$$

$$= \int_{\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+T]} f(y)\theta(y) \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \xi(y+Tm)dy =$$

$$= \int_{\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+T]} f(y)\theta(y)dy \quad .$$

<u>EXEMPLO 2</u> :

Seja

$$\delta : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto \theta(0) \quad .$$

Linearidade: Para todas $\theta_1 , \theta_2 \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in C$ temos:

i) $\delta(\theta_1+\theta_2) = (\theta_1+\theta_2)(0) = \theta_1(0) + \theta_2(0) = \delta(\theta_1) + \delta(\theta_2)$ ;

ii) $\delta(\lambda\theta_1) = (\lambda\theta_1)(0) = \lambda\theta_1(0) = \lambda\delta(\theta_1)$ .

Continuidade: Se $\theta_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ então $\delta(\theta_j) = \theta_j(0) \to 0$ em $\mathbb{C}$ . Portanto, $\delta$ é contínua.

Deste modo $\delta \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

Vejamos qual é o correspondente de $\delta$ em $D_T'(\mathbb{R}^n)$ .

Pelo Teorema 2 sabemos que tal correspondente , digamos $\tilde{\delta}$ , é definido por

$$<\tilde{\delta},\phi> = ( \delta , \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm} ) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_{Tm}(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi(Tm) .$$

$\delta$ é chamada de distribuição $\delta$ de Dirac T-periódica, ou $\delta$ de Dirac concentrada em $Tm$ , $m \in \mathbb{Z}^n$ .

Vejamos agora como podemos definir em $P_T'$ algumas operações.

Sejam $f , g \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ , $\theta , \theta_1 , \theta_2 \in P_T(\mathbb{R}^n)$ , $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\theta_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

i) Adição

Defina $f + g : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto (f,\theta) + (g,\theta)$$

Linearidade: $(f+g)(\theta_1+\theta_2) = (f , \theta_1+\theta_2) + (g , \theta_1+\theta_2) = (f,\theta_1) + (f , \theta_2) + (g , \theta_1) + (g , \theta_2) = (f , \theta_1) + (g , \theta_1) + (f , \theta_2) + (g , \theta_2) = (f+g)(\theta_1) + (f+g)(\theta_2)$

$$(f+g)(\lambda\theta) = (f,\lambda\theta) + (g,\lambda\theta) = \lambda(f,\theta) + \lambda(g,\theta) =$$

$$= \lambda[\,(f,\theta) + (g,\theta)\,] = \lambda(f+g)(\theta) \ .$$

Continuidade :

$$(f+g)(\theta_j) = (f,\theta_j) + (g,\theta_j) \to 0 \ .$$

Logo, $f+g \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

ii) Multiplicação por $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Defina $\phi f : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto (f,\phi\theta)$$

Linearidade:

$$(\phi f)(\theta_1+\theta_2) = (\,f\,,\,\phi(\theta_1+\theta_2)\,) = (\,f\,,\,\phi\theta_1+\phi\theta_2) =$$

$$= (\,f\,,\,\phi\theta_1) + (\,f\,,\,\phi\theta_2) = \phi f(\theta_1) + \phi f(\theta_2)$$

$$(\phi f)(\lambda\theta) = (\,f\,,\,\lambda\phi\theta) = \lambda(\,f\,,\,\phi\theta\,) = \lambda(\phi f)(\theta)$$

Continuidade:

$$(\phi f)(\theta_j) = (\,f\,,\,\phi\theta_j\,) \to 0 \ ,$$

pois para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$|D^\alpha \phi\, \theta_j(x)| \leq \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} |D^\beta \phi(x)| \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} C_\beta\, |D^\beta \theta_j(x)| \to 0$$

uniformemente para cada $\alpha$ .

Logo, $\phi f \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

iii) Translação

Seja $h \in \mathbb{R}^n$. Defina $f_h : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto (f, \theta_{-h})$$

onde $\theta_{-h}(x) = \theta(x+h)$ .

Linearidade:

$$f_h(\theta_1+\theta_2) = (f, (\theta_1+\theta_2)_{-h}) = (f, (\theta_1)_{-h} + (\theta_2)_{-h}) =$$

$$= (f, (\theta_1)_{-h}) + (f, (\theta_2)_{-h}) = (f, (\theta_1)_{-h}) +$$

$$+ (f, (\theta_2)_{-h}) = f_h(\theta_1) + f_h(\theta_2)$$

$$f_h(\lambda\theta) = (f, (\lambda\theta)_{-h}) = (f, \lambda\theta_{-h}) = \lambda(f, \theta_{-h}) = \lambda f_h(\theta)$$

Continuidade:

$f_h(\theta_j) = (f, (\theta_j)_{-h}) \to 0$ em $\mathbb{C}$ pois para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$D^\alpha(\theta_j)_{-h}(x) = D^\alpha\theta_j(x+h) \to 0$ uniformemente.

Logo, $f_h \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

iv) Reflexão

Defina $\check{f} : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto (f, \check{\theta})$$

onde $\check{\theta}(x) = \theta(-x)$ .

Linearidade:

$$\check{f}(\theta_1+\theta_2) = (f, (\theta_1+\theta_2)^\vee) = (f, \check{\theta}_1+\check{\theta}_2) = (f, \check{\theta}_1) + (f, \check{\theta}_2) =$$

$$= \check{f}(\theta_1) + \check{f}(\theta_2)$$

$$\check{f}(\lambda\theta) = (f, (\lambda\theta)^{\vee}) = (f, \lambda\check{\theta}) = \lambda(f, \check{\theta}) = \lambda\,\check{f}(\theta) \ .$$

Continuidade:

$\check{f}(\theta_j) = (f, \check{\theta}_j) \to 0$ em $\mathbb{C}$ pois, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\sup|D^\alpha \theta_j(x)| = \sup|D^\alpha \theta_j(x)|$$

e desse modo $\check{\theta}_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ :

Logo, $\check{f} \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

v) Derivação

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ defina

$$D^\alpha f : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta)$$

Linearidade:

$$D^\alpha f(\theta_1+\theta_2) = (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\theta_1+\theta_2)) =$$

$$= (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\theta_1 + (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\theta_2) =$$

$$= (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\theta_1) + (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\theta_2) =$$

$$= D^\alpha f(\theta_1) + D^\alpha f(\theta_2) \ .$$

$$D^\alpha(\lambda\theta) = (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \lambda\theta) = \lambda(f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\theta) = \lambda D^\alpha f(\theta)$$

Continuidade:

$$D^\alpha f(\theta_j) = (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta_j) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \ .$$

Logo, $D^\alpha f \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

Notemos que

$$D^\alpha : P_T'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P_T'(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longmapsto D^\alpha f$$

é linear e contínuo.

Linearidade: Se $f, g \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então para toda $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ temos

$$(D^\alpha (f+g), \theta) = (f+g, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta) =$$

$$= (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta) + (g, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta) =$$

$$= (D_f^\alpha, \theta) + (D^\alpha g, \theta) = (D^\alpha f + D^\alpha g, \theta)$$

e também

$$(D^\alpha (\lambda f), \theta) = (\lambda f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta) =$$

$$= \lambda (f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta) = \lambda (D_f^\alpha, \theta) = (\lambda D^\alpha f, \theta) .$$

Continuidade: Se $f_j \to 0$ em $P_T'(\mathbb{R}^n)$ então, para cada $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$

$$(D^\alpha f_j, \theta) = (f_j, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta) \to 0$$

Notemos ainda que se $f \in P_T(\mathbb{R}^n)$ então

$$(D^\alpha f, \theta) = \int_{\prod_{j=1}^{n} [a_j, a_j+T]} D^\alpha f(x) . \theta(x) dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\prod_{j=1}^{n} [a_j, a_j+T]} f(x) . D^\alpha \theta(x) dx =$$

$$= \int_{\prod_{j=1}^{n} [a_j, a_j+T]} f(x) \cdot (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \theta(x) dx = ( f , (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \theta ) .$$

Isto torna mais claro o motivo do fator $(-1)^{|\alpha|}$ .

<u>TEOREMA 3</u> . Seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int \phi = 1 \ , \quad \phi \geq 0 \quad \text{e} \quad S(\phi) \subset [0,T]^n$$

Seja

$$\theta_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi\left(\frac{x - Tm}{\varepsilon}\right) \in P_T(\mathbb{R}^n) \ , \quad 0 < \varepsilon < 1 \ .$$

Se $f$ é contínua e T-periódica então

$$f_{\varepsilon}(x) = \int_{[0,T]^n} f(x-y) \theta_{\varepsilon}(y) dy$$

pertence a $P_T(\mathbb{R}^n)$ e $f_{\varepsilon} \to f$ uniformemente.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Se $x \in [0,T]^n$ então para todo $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ , $m \neq 0$ existe $m_i \neq 0$ tal que

$$-\frac{Tm_i}{\varepsilon} \leq \frac{x_i - Tm_i}{\varepsilon} \leq T \frac{(1-m_i)}{\varepsilon}$$

Se $m_i \geq 1$ então $\dfrac{x_i - Tm_i}{\varepsilon} \leq 0$ e , desse modo , $\phi\left(\dfrac{x - Tm}{\varepsilon}\right) = 0$ .

Se $m_i \leq -1$ então $-\dfrac{Tm_i}{\varepsilon} \geq \dfrac{T}{\varepsilon} \geq T$ e , portanto , $\phi\left(\dfrac{x - Tm}{\varepsilon}\right) = 0$ .

Assim, $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\,\phi(\frac{x}{\varepsilon})$ , se $x \in [0,T]^n$ .

Agora,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{[0,T]^n} f(x-y)\,\theta_\varepsilon(y)\,dy = \varepsilon^{-n}\int_{[0,T]^n} f(x-y)\,\phi(\frac{y}{\varepsilon})\,dy =$$

$$= \int_{[0,T/\varepsilon]^n} f(x-\varepsilon z)\,\phi(z)\,dz = \int_{[0,T]^n} f(x-\varepsilon z)\,\phi(z)\,dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon z)\,\phi(z)\,dz = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\,\phi(\frac{x-u}{\varepsilon})\,du$$

pois,

$$S(\phi) \subset [0,T]^n \subset [0,T/\varepsilon]^n .$$

A igualdade

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})\,dy$$

permiti-nos escrever

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int_{K_x} f(y)\,\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})\,dy$$

onde

$$K_x = \{\, y \in \mathbb{R}^n ;\ 0 \leq \frac{x_i - y_i}{\varepsilon} \leq T ,\ i = 1,\dots,n \,\} =$$

$$= \{\, y \in \mathbb{R}^n ;\ x_i - \varepsilon T \leq y_i \leq x_i ,\ i = 1,\dots,n \,\}$$

$K_x$ é um compacto.

Dados $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , seja $K$ um compacto tal que $K_x \cup K_{x'} \subset K$ . Então existe $C > 0$ tal que

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')| \leq \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\ |\phi(\frac{x-y}{\varepsilon}) - \phi(\frac{x'-y}{\varepsilon})|\,dy \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-n} \cdot \sup|f(u)| \int_K \left|\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x'-y}{\varepsilon}\right)\right| dy \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-n-1} \cdot \int_K dy \cdot \sup|f(u)| \cdot |x-x'| \ .$$

Logo, $f_\varepsilon$ é contínua.

Para provar que $f_\varepsilon$ é diferenciável qualquer número de vezes, basta derivar sob o sinal de integração a função $\phi$ na expressão de $f_\varepsilon$ usada acima e repetir o procedimento acima usando $D^\alpha\phi$ ao invés de $\phi$ .

Agora,

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| = \left| \int_{[0,T]^n} f(x)\phi(z)dz - \right.$$

$$\left. - \int_{[0,T]^n} f(x-\varepsilon z)\phi(z)dz \right| \leq \int_{[0,T]^n} |f(x) - f(x-\varepsilon z)|\phi(z)dz \leq$$

$$\leq \sup_{z \in [0,T]^n} |f(x) - f(x-\varepsilon z)| \ .$$

Como $f$ é contínua e periódica, é uniformemente contínua. Assim, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Como $z \in [0,T]^n$ , $|z| \leq \sqrt{n}\, T$ e para todo $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta}{\sqrt{n}\, T}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$|x - (x-\varepsilon z)| = \varepsilon|z| < \delta$ . Logo,

$$|f(x) - f(x-\varepsilon z)| < \eta$$

$$\sup_{z \in [0,T]^n} |f(x) - f(x-\varepsilon z)| < \eta \ .$$

Isto prova que $f_\varepsilon \to f$ uniformemente.

TEOREMA 4 . Se $f$ e $g$ são funções contínuas e periódicas em $\mathbb{R}^n$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$ no sentido de distribuições periódicas então $f$ é diferenciável em relação a $x_j$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$ como funções.

DEMONSTRAÇÃO:

Usando a notação do teorema anterior

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x_j} [\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})] dy =$$

$$= -\varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} f(y) \frac{\partial}{\partial y_j} [\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})] dy =$$

$$= \varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} g(y) \phi(\frac{x-y}{\varepsilon}) dy = g_\varepsilon(x) .$$

Como $f_\varepsilon \to f$ e $g_\varepsilon \to g$ uniformemente segue que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$.

## 3. T - CONVOLUÇÃO

DEFINIÇÃO 1 . Se $f \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ defina a convolução de $f$ por $\theta$ como a função

$$f * \theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad (f * \theta)(a) = (f, \check{\theta}_a)$$

onde

$$\check{\theta}_a(x) = \theta(a-x) .$$

EXEMPLO 1 :

Seja $f$ como no exemplo 1 da seção anterior.

Se $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ temos,

$$(f * \theta)(a) = (f, \check{\theta}_a) = \int_{\prod_{i=1}^{n} [b_i, b_i+T]} f(x)\theta(a-x)dx$$

onde substituímos a notação $L_f$ do exemplo 1 da seção anterior pela própria $f$ .

EXEMPLO 2 :

Seja $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

$$(\delta * \theta)(a) = (\delta, \check{\theta}_a) = \check{\theta}_a(0) = \theta(a) .$$

EXEMPLO 3 :

Sejam $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathbb{R}^n$

$$(\delta_h * \theta)(a) = (\delta_h, \check{\theta}_a) = (\delta, (\check{\theta}_a)_{-h}) = (\check{\theta}_a)_{-h}(0) =$$

$$= \check{\theta}_a(h) = \theta(a-h) .$$

EXEMPLO 4 :

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

$$(D^\alpha \delta * \theta)(a) = (D^\alpha \delta, \check{\theta}_a) = (\delta, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \check{\theta}_a) =$$

$$= (\delta, (-1)^{|\alpha|} . (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \theta_a) = D^\alpha \theta(a)$$

portanto

$$D^\alpha_\delta * \theta = D^\alpha \theta .$$

<u>TEOREMA 1</u>. Sejam $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$. Então

$$f * \theta \in P_T(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad D^\alpha(f * \theta) = D^\alpha f * \theta = f * D^\alpha \theta .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e uma seqüência $(a_j)$ tal que $a_j \to a$.

Para provar a continuidade de $f * \theta$ basta provar que $\theta_{a_j} \to \theta_a$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$, pois daí,

$$(f * \theta)(a_j) = (f, \check{\theta}_{a_j}) \longrightarrow (f, \check{\theta}_a) = (f * \theta)(a) .$$

Mostremos, então, que $\check{\theta}_{a_j} \to \check{\theta}_a$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, sabemos que, devido às derivadas de $\theta$ serem limitadas, existe $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha \check{\theta}_{a_j}(x) - D^\alpha \check{\theta}_a(x)| = |D^\alpha \theta(a_j - x) - D^\alpha \theta(a-x)| \leq C|a_j - a| .$$

Como $a_j \to a$, segue-se o resultado.

Seja $e_i$ o i-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Dada uma seqüência $(h_j)$, $h_j \neq 0$ tal que $h_j \to 0$ temos

$$[\ (f * \theta)(a + h_j e_i) - (f * \theta)(a)\ ] \cdot h_j^{-1} =$$

$$= [\ (f, \check{\theta}_{a+h_j e_i}) - (f, \check{\theta}_a)\ ] \cdot h_j^{-1} =$$

$$= [\ (f_{h_j e_i}, \check{\theta}_a) - (f, \check{\theta}_a)\ ] \cdot h_j^{-1} =$$

$$= (\ (f_{h_j e_i} - f) \cdot h_j^{-1}, \check{\theta}_a\ )$$

Mostremos que $g_j = (f_{h_j e_i} - f) \cdot h_j^{-1}$ converge para $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ em $P'_T$.

Dada $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ temos

$$(g_j, \phi) = ((f_{h_j e_i} - f) \cdot h_j^{-1}, \phi) =$$

$$= (f, (\phi - \phi_{-h_j e_i}) \cdot h_j^{-1})$$

Resta, assim, mostrarmos que

$$(\phi - \phi_{-h_j e_i}) \cdot h_j^{-1} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x_i}\phi \quad \text{em} \quad P_T .$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$\left| \partial^\alpha \left( (\phi - \phi_{-h_j e_i}) h_j^{-1} + \frac{\partial}{\partial x_i}\phi \right)(x) \right| =$$

$$= \left| (\partial^\alpha \phi(x) - \partial^\alpha \phi(x + h_j e_i)) h_j^{-1} + \frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\alpha \phi(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\alpha \phi(x) - (\partial^\alpha \phi(x+h_j e_i) - \partial^\alpha \phi(x)) h_j^{-1} \right| \to 0$$

uniformemente, pois $\frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\alpha \phi$ é periódica e contínua, e

$$(\partial^\alpha \phi(x+h_j e_i) - \partial^\alpha \phi(x)) h_j^{-1}$$

converge pontualmente para $\frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\alpha \phi(x)$ .

Logo, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \theta) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * \theta$ ; como $\frac{\partial f}{\partial x_i} * \theta$ é contínua temos que $f * \theta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Também,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * \theta\right)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \check{\theta}_a\right) = \left(f, -\frac{\partial}{\partial x_i}\check{\theta}_a\right) =$$

$$= \left(f, \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)^{\vee}_a\right) = \left(f * \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)(a)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * \theta) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * \theta = f * \frac{\partial \theta}{\partial x_i} .$$

Usando o princípio da indução vemos que se $\partial^\alpha(f * \theta) = \partial^\alpha f * \theta = f * \partial^\alpha \theta$ é contínua então, colocando $\beta = \alpha + e_i$ temos que

$$\partial^\beta(f * \theta) = \frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\alpha(f * \theta) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha f * \theta) = \partial^\beta f * \theta$$

e, portanto, $\partial^\beta(f * \theta)$ também é contínua.

Ainda,

$$(\partial^\beta f * \theta)(a) = (\partial^\beta f, \check{\theta}_a) = (-1)^{|\beta|}(f, \partial^\beta \check{\theta}_a) =$$

$$= (f, (\partial^\beta \theta)^\vee_a) = (f * \partial^\beta \theta)(a) .$$

A periodicidade de $f * \theta$ se verifica através de

$$(f * \theta)(a + Tm) = (f, \check{\theta}_{a+Tm}) = (f, \check{\theta}_a) = (f * \theta)(a)$$

<u>TEOREMA 2</u>. Se $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta, \rho \in P_T(\mathbb{R}^n)$ então

$$(f * \theta) * \rho = f * (\theta * \rho)$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $a \in \mathbb{R}^n$.

Para cada $k = 1,2,\ldots$ tome $\varepsilon = \frac{T}{k}$ e defina

$$S_\varepsilon(x) = \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq k \\ 1 \leq i \leq n}} \theta(x - (a+\varepsilon m))\, \rho(a+\varepsilon m) \,.\, \varepsilon^n .$$

$S_\varepsilon$ é a soma de Riemann da função $g(y) = \theta(x-y)\rho(y)$ sobre o cubo $\prod_{j=1}^{n} [a_j, a_j + T]$.

Mostremos que $S_\varepsilon \to \theta * \rho$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existem $C > 0$ e $M > 0$ tais que

$$|D^\alpha\theta(x)| \leq C \quad , \quad |\rho(x)| \leq C$$

$$|D^\alpha\theta(x) - D^\alpha\theta(y)| \leq M|x-y| \qquad \text{e}$$

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq M|x-y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Defina $B_{\varepsilon,i} = \prod_{j=1}^{n} [\, a_j + \varepsilon(m_i - 1) \, , \, a_j + \varepsilon m_i \,]$

Assim,

$$|D^\alpha S_\varepsilon(x) - D^\alpha(\theta * \rho)(x)| = \Big| \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq k \\ 1 \leq i \leq n}} D^\alpha\theta(x - (a+\varepsilon m))\rho(a+\varepsilon m) \,.$$

$$. \; \varepsilon^n - \int_{\prod_{j=1}^{n} [a_j, a_j+T]} D^\alpha\theta(x-y)\rho(y)dy \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq k \\ 1 \leq i \leq n}} \int_{B_{\varepsilon,i}} D^\alpha\theta(x - (a+\varepsilon m))\rho(a+\varepsilon m)dy \; -$$

$$- \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq k \\ 1 \leq i \leq n}} \int_{B_{\varepsilon,i}} D^\alpha\theta(x-y)\rho(y)dy \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq k \\ 1 \leq i \leq n}} \int_{B_{\varepsilon,i}} |D^\alpha\theta(x - (a+\varepsilon m))\rho(a+\varepsilon m) - D^\alpha\theta(x-y)\rho(y)|dy \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{1 \leq m_i \leq k \\ 1 \leq i \leq n}} \int_{B_{\varepsilon,i}} \big( |D^\alpha\theta(x - (a+\varepsilon m)) - D^\alpha\theta(x-y)| \; |\rho(a+\varepsilon m)| \; +$$

$$+ \; |D^\alpha\theta(x-y)| \; |\rho(y) - \rho(a+\varepsilon m)| \big)dy \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{1\leq m_i\leq k\\ 1\leq i\leq n}} M \left( |\rho(a+\varepsilon m)| \int_{B_{\varepsilon,i}} |y-(a+\varepsilon m)|dy + \right.$$

$$\left. + \int_{B_{\varepsilon,i}} |D^{\alpha}\theta(x-y)|\ |y-(a+\varepsilon m)|dy \right) \leq$$

$$\leq CM \sum_{\substack{1\leq m_i\leq k\\ 1\leq i\leq n}} \left( \sqrt{n}\,\varepsilon \int_{B_{\varepsilon,i}} dy + \sqrt{n}\,\varepsilon \int_{B_{\varepsilon,i}} dy \right) =$$

$$= 2CM\,\varepsilon^{n+1} \sum_{\substack{1\leq m_i\leq k\\ 1\leq i\leq n}} 1 = 2CM\,k^n\,\varepsilon^{n+1} = \frac{2CMT^{n+1}}{k} \to 0 \quad .$$

Como $S_\varepsilon(x+Tm) = S_\varepsilon(x)$ temos que $S_\varepsilon \to \theta * \rho$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $(S_\varepsilon)^\vee_x \to (\theta*\rho)^\vee_x$ . Logo

$$(f*(\theta*\rho))(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (f*S_\varepsilon)(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \sum_{\substack{1\leq m_i\leq k\\ 1\leq i\leq n}} (f*\theta)(x-(a+\varepsilon m))\,\rho(a+\varepsilon m) =$$

$$= \int_{\prod_{j=1}^{n}[a_j,a_j+T]} (f*\theta)(x-y)\rho(y)dy = ((f*\theta)*\rho)(x) \quad .$$

<u>TEOREMA 3</u> . Seja $F : P_T(\mathbb{R}^n) \to P_T(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e toda $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$

$$[\,T_h F(\theta)\,](x) = F(\theta)(x-h) = F(\theta_h)(x) = F(T_h\theta)(x) \quad .$$

Então existe uma única $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(\theta) = f*\theta$ para toda $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Defina $f : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\theta \longmapsto (F\check{\theta})(0)$$

A linearidade de $f$ é imediata.

Se $\theta_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ então, por continuidade de $F$, $F\check{\theta}_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ e, conseqüentemente, $(F\check{\theta}_j)(0) \to 0$ em $\mathbb{C}$.

Logo $f \in P_T'(\mathbb{R}^n)$.

Para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

$$(F\theta)(h) = (T_{-h}(F\theta))(0) = ((T_{-h}F)\theta)(0) = (F(T_{-h}\theta))(0) =$$

$$= (f, (T_{-h}\theta)^{\vee}) = (f, \check{\theta}_h) = (f * \theta)(h)$$

pois, $(T_{-h}\theta)^{\vee}(x) = (T_{-h}\theta)(-x) = \theta(-x+h) = \check{\theta}_h(x)$.

Unicidade: Sejam $f, g \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ tais que $F(\theta) = f * \theta = g * \theta$ para toda $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$.

Então,

$$(f,\theta) = (f * \check{\theta})(0) = (g * \check{\theta})(0) = (g,\theta).$$

Logo, $f = g$.

DEFINIÇÃO 2. Sejam $f, g \in P_T'(\mathbb{R}^n)$.

Definimos $h = f * g$ como sendo a única distribuição periódica tal que

$$f * (g * \theta) = h * \theta \quad , \quad \theta \in P_T(\mathbb{R}^n).$$

$h$ é chamada de T-convolução de $f$ por $g$.

Para verificar que a definição é possível, mostremos que

$$F : P_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P_T(\mathbb{R}^n)$$

$$\theta \longmapsto f * (g * \theta)$$

é linear-contínuo e comuta com as translações $T_h$ .

Linearidade: Se $\theta , \rho \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então

i) $F(\theta + \rho) = f * (g * (\theta+\rho)) = f * (g * \theta + g * \rho) =$

$= f * (g * \theta) + f * (g * \rho) = F(\theta) + F(\rho)$ .

ii) $F(\lambda\theta) = f * (g * (\lambda\theta)) = f * (\lambda(g * \theta)) =$

$= \lambda f * (g * \theta) = \lambda F(\theta)$ .

Continuidade: Seja $\theta_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existem $C_1, C_2 > 0$ $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|D^\alpha(F(\theta_j))(a)| = |f * D^\alpha(g * \theta_j)(a)| =$$

$$= |(f, (D^\alpha(g * \theta_j))^\vee_a)| \leq C_1 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x |D^\beta(D^\alpha(g * \theta_j))^\vee_a| =$$

$$= C_1 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x |(D^{\beta+\alpha}(g * \theta_j))^\vee_a| =$$

$$= C_1 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x |(g * D^{\beta+\alpha}\theta_j)(a-x)| =$$

$$= C_1 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x |(g, (D^{\beta+\alpha}\theta_j)^\vee_{a-x})| \leq$$

$$\leq C_1 C_2 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x \Big| \sum_{|\gamma|\leq m_2} \sup_y |D^\gamma (D^{\beta+\alpha}\theta_j)^\vee_{a-x}| \Big| =$$

$$= C_1 C_2 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x \Big| \sum_{|\gamma|\leq m_2} \sup_y D^{\gamma+\beta+\alpha}\theta_j(a-x-y) \Big| \Big| =$$

$$= C_1 C_2 \sum_{|\beta|\leq m_1} \sup_x \Big| \sum_{|\gamma|\leq m_2} \sup_z D^{\gamma+\beta+\alpha}\theta_j(z-x) \Big| \to 0$$

uniformemente.

Portanto, $F$ é contínuo.

Comutatividade: Sejam $h \in \mathbb{R}^n$ e $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$

$$T_h(F\theta)(a) = T_h(f * (g * \theta))(a) = (f * (g * \theta))(a-h) =$$

$$= (f, (g * \theta)^{\vee}_{a-h}) = (f, (T_h(g * \theta))^{\vee}_a) =$$

$$= (f * T_h(g * \theta))(a) = (f * (g * T_h\theta))(a) = F(T_h\theta)(a) .$$

Justificativa da igualdade $T_h(g * \theta) = g * T_h(\theta)$ :

$$T_h(g * \theta)(a) = g * \theta(a-h) = (g, \overset{\vee}{\theta}_{a-h}) =$$

$$= (g, (T_h\theta)^{\vee}_a) = (g * T_h\theta)(a) .$$

Antes de mostrarmos algumas propriedades da T-convolução vejamos o seguinte lema:

<u>LEMA 1</u>. Seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1 \quad , \quad \phi \geq 0 \quad \text{e} \quad S(\phi) \subset [0,T]^n .$$

Seja $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi\left(\frac{x - Tm}{\varepsilon}\right)$ onde $0 < \varepsilon < 1$. Observe que $\theta_\varepsilon \in P_T(\mathbb{R}^n)$. Então, se $\psi \in P_T(\mathbb{R}^n)$, $\psi * \theta_\varepsilon \to \psi$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

$$D^\alpha(\psi * \theta_\varepsilon)(a) = \int_{[0,T]^n} D^\alpha\psi(a-x)\ \theta_\varepsilon(x)dx =$$

$$= \varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} D^\alpha\psi(a-x)\ \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$$

pois, se $x \in [0,T]^n$ então para todo $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $m \neq 0$ existe $m_i \neq 0$ tal que

$$-\frac{Tm_i}{\varepsilon} \leq \frac{x_i - Tm_i}{\varepsilon} \leq \frac{T(1-m_i)}{\varepsilon}$$

Se $m_i \geq 1$ então $\dfrac{x_i - Tm_i}{\varepsilon} \leq 0$ e então $\phi\left(\dfrac{x-Tm}{\varepsilon}\right) = 0$.

Se $m_i \leq -1$ então $-\dfrac{Tm_i}{\varepsilon} \geq \dfrac{T}{\varepsilon} \geq T$ e então $\phi\left(\dfrac{x-Tm}{\varepsilon}\right) = 0$.

Deste modo $\theta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ se $x \in [0,T]^n$.

Também,

$$\varepsilon^{-n} \int_{[0,T]^n} D^\alpha\psi(a-x)\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{[0,T/\varepsilon]^n} D^\alpha\psi(a-\varepsilon y)\phi(y)dy =$$

$$= \int_{[0,T]^n} D^\alpha\psi(a-\varepsilon y)\phi(y)dy$$

pois

$$S(\phi) \subset [0,T]^n \subset \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]^n .$$

Assim,

$$|D^\alpha\psi(a) - (D^\alpha\psi * \theta_\varepsilon)(a)| = \Big| \int_{[0,T]^n} (D^\alpha\psi(a) -$$

$$- D^\alpha\psi(a-\varepsilon x))\ \phi(x)dx\Big| \leq \int_{[0,T]^n} \phi(x)dx \,.\, \sup|D^\alpha\psi(a) -$$

$$- D^\alpha\psi(a-\varepsilon x)| \leq C \,.\, \sup_{x \in [0,T]^n} |\varepsilon x| = \sqrt{n}\, C\, T \,.\, \varepsilon .$$

Logo, $\psi * \theta_\varepsilon \to \psi$ em $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

<u>LEMA 2</u> . Sejam $f,g \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ . Então, $f = g$ se, e somente se, $f * \theta = g * \theta$ para toda $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Se $f = g$ então

$$(f * \theta)(a) = (f , \check{\theta}_a) = (g , \check{\theta}_a) = (g * \theta)(a) .$$

Se $g * \theta = f * \theta$ então

$$(f,\theta) = (f * \check{\theta})(0) = (g * \check{\theta})(0) = (g,\theta) .$$

<u>TEOREMA 4</u> . Se $f,g,h \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ então

i) $(f * g) * h = f * (g * h)$

ii) $f * g = g * f$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

i) $( (f * g) * h ) * \theta = (f * g) * (h * \theta) = f * ( g * (h * \theta) ) =$

$= f * ( (g * h) * \theta) = ( f * (g * h) ) * \theta$ .

Usando o Lema 2 concluímos que

$(f * g) * h = f * (g * h)$ .

ii) Seja $\theta_\varepsilon$ como no Lema 1 .

Provemos primeiramente que $\theta_\varepsilon * \theta = \theta * \theta_\varepsilon$ .

$$(\theta_\varepsilon * \theta)(a) = \int_{[0,T]^n} \theta_\varepsilon(a-x)\theta(x)dx =$$

$$= \int_{\prod_{j=1}^{n}[a_j,a_j+T]} \theta_\varepsilon(y)\theta(a-y)dy =$$

$$= \int_{\prod_{j=1}^{n}[a_j,a_j+T]} \theta(a-y)\theta_\varepsilon(y)dy = (\theta * \theta_\varepsilon)(a) \ .$$

Agora,

$$(f * g) * (\theta * \theta_\varepsilon) = f * (g * (\theta * \theta_\varepsilon)) = f * ((g * \theta) * \theta_\varepsilon) =$$

$$= f * (\theta_\varepsilon * (g * \theta)) = (f * \theta_\varepsilon) * (g * \theta) \ .$$

Por outro lado,

$$(g * f) * (\theta * \theta_\varepsilon) = (g * f) * (\theta_\varepsilon * \theta) = g * (f * (\theta_\varepsilon * \theta)) =$$

$$= g * ((f * \theta_\varepsilon) * \theta) = g * (\theta * (f * \theta_\varepsilon)) =$$

$$= (g * \theta) * (f * \theta_\varepsilon) = (f * \theta_\varepsilon) * (g * \theta) \ .$$

Comparando,

$$(f * g) * (\theta * \theta_\varepsilon) = (g * f) * (\theta * \theta_\varepsilon)$$

Quando $\varepsilon \to 0$ , pelo Lema 1 , $\theta * \theta_\varepsilon \to \theta$ em $P_T$ . Logo

$$(f * g) * \theta = (g * f) * \theta \ .$$

Pelo Lema 2 , $f * g = g * f$ .

<u>TEOREMA 5</u> . Sejam $f,g \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{R}^n$ .

Então

i) $(f * g)_a = f_a * g = f * g_a$

ii) $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g \ , \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Mostremos primeiramente que se $\theta \in P_T$ então $f_a * \theta =$
$= f * \theta_{-a}$ .

Observe que isto não contradiz i) , pois, se $L\theta$ é o representante da função $\theta$ como distribuição periódica então,

$L\theta_{-a} = (L\theta)_a$ . De fato ,

$$(f_a * \theta)(x) = (f_a , \check{\theta}_x) = (f , (\check{\theta}_x)_{-a}) = (f , \check{\theta}_{x+a}) =$$

$$= (f , (\theta_{-a})^{\vee}_x) = (f * \theta_{-a})(x) \ .$$

Assim,

$$(f * g)_a * \theta = (f * g) * \theta_{-a} = f * (g * \theta_{-a}) =$$

$$= f * (g_a * \theta) = (f * g_a) * \theta \ .$$

Portanto,

$$(f * g)_a = f * g_a \ .$$

Também,

$$(f * g)_a * \theta = (g * f)_a * \theta = (g * f) * \theta_{-a} = g * (f * \theta_{-a}) =$$

$$= g * (f_a * \theta) = (g * f_a) * \theta = (f_a * g) * \theta \ .$$

Mostremos agora ii)

$$(D^\alpha(f * g) * \theta)(a) = (D^\alpha(f * g) , \check{\theta}_a) = (f * g , (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\check{\theta}_a)) =$$

$$= (f * g , (D^\alpha\theta)^{\vee}_a) = ((f * g) * D^\alpha\theta)(a) = (f * (g * D^\alpha\theta))(a) =$$

$$= ( f * ( g , (D^\alpha\theta)^\vee_x ) )(a) = (-1)^{|\alpha|} ( f * ( g , D^\alpha(\check{\theta}_x) ) ) (a) =$$

$$= ( f * ( D^\alpha g , \check{\theta}_x ) )(a) = ( f * ( D^\alpha_g * \theta) ) (a) =$$

$$= ( ( f * D^\alpha g ) * \theta )(a) .$$

Portanto,

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g .$$

Por comutatividade obtém-se a outra igualdade.

<u>EXEMPLO 5</u> :

Sejam $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

$$( f * \delta,\theta ) = ( f * \delta * \check{\theta} )(0) = (f * \check{\theta})(0) = (f,\theta) .$$

Logo $f * \delta = f$ .

<u>EXEMPLO 6</u> :

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

$$D^\alpha f = D^\alpha(f * \delta) = D^\alpha f * \delta = f * D^\alpha\delta .$$

<u>EXEMPLO 7</u> :

Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial linear parcial a coeficientes constantes. Se $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ então

$$P(D)f = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha f = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha f * D^\alpha\delta =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} f * ( c_\alpha D^\alpha \delta ) = f * ( \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta ) = f * ( P(D)\delta ) .$$

Assim, toda equação diferencial parcial linear com coeficientes constantes

$$P(D)u = f \ , \quad \text{onde} \quad u,f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$$

pode ser expressa como uma equação da T-convolução

$$u * u_o = f \ ,$$

onde

$$u_o = P(D)\delta \ .$$

EXEMPLO 8 :

Uma equação linear de diferenças com coeficientes constantes pode ser expressa como uma equação da T-convolução.

Vejamos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \, f_{T\alpha} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \, (f * \delta)_{T\alpha} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \, f * \delta_{T\alpha} =$$

$$= f * \Big( \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \, \delta_{T\alpha} \Big) \ .$$

TEOREMA 6 . Seja $C : P'_T(\mathbb{R}^n) \times P'_T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow P'_T(\mathbb{R}^n)$

$$(f,g) \longmapsto f * g$$

$C$ é seqüencialmente contínuo em cada variável.

DEMONSTRAÇÃO:

Como $C$ é simétrico, basta demonstrar em uma variável.

Como $C$ é linear, basta verificar que se $f_j \to 0$ em $P'_T$ então

$C(f_j,g) = f_j * g \to 0$ em $P_T'$ .

Seja $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

$(C(f_j,g)\ ,\theta) = (f_j * g\ ,\theta) = (f_j * (g * \check{\theta})\ )\ (0)$

Como $g * \check{\theta} \in P_T$ e $f_j \to 0$ em $P_T'$ segue-se que

$(f_j * (g * \check{\theta})\ )\ (0) = (f_j\ ,(g * \check{\theta})^{\vee}\ ) \to 0$ .

## 4. A ÁLGEBRA $(P_T'\ ,*\ ,+)$

O espaço vetorial $P_T'(\mathbb{R}^n)$ munido das operações T-convolução e adição possui uma estrutura de álgebra comutativa com elemento neutro $\delta$ em relação à T-convolução. Designaremos esta álgebra por álgebra da T-convolução.

O próximo teorema nos dará uma condição necessária e suficiente para que possamos encontrar $u$ em $P_T'$ tal que

$$f * u = g \quad ,$$

onde $f$ e $g$ são distribuições periódicas conhecidas anteriormente.

Antes disso, definamos o inverso (segundo a T-convolução) de um elemento de $P_T'$ .

DEFINIÇÃO 1 . $f \in P_T'$ é dito inversível se existir $g \in P_T'$ tal que

$$f * g = g * f = \delta \quad .$$

Uma $g$ deste tipo é dita inversa de $f$ .

TEOREMA 1 . Se existir inversa de uma distribuição periódica ela é única.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam $g$ e $h$ inversas de $f$ então,

$$g = g * \delta = g * (f * h) = (g * f) * h = \delta * h = h \ .$$

Denotemos por $f^{-1}$ o inverso de $f$ , quando existir.

Nem todos os elementos de $P_T'$ possuem inverso, como é o caso de qualquer $\theta \in P_T$ . Pois, como visto no Teorema 1 da seção anterior, $f * \theta \in P_T$ para toda $f \in P_T'$ . Logo, é impossível encontrar $f \in P_T'$ tal que $f * \theta = \delta$ , já que $\delta \notin P_T$ , pois, se assim fosse teríamos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x) = \lim_{h \to o} \left( \delta(x+he_j) - \delta(x) \right) h^{-1} =$$

$$= \lim_{h \to o} \left( h^{-1} (\delta_{x+he_j} - \delta_x , \delta) \right) =$$

$$= \lim_{h \to o} \left( h^{-1} ( (\delta_x)_{he_j} - \delta_x) , \delta \right) \to \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_x , \delta \right) =$$

$$= \left( \delta_x , - \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x) \ .$$

Logo, $\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x) = 0$ , i.é., $\delta$ é constante.

Como $(\delta , e^{iwx}) = 1$ e $(\delta, 0) = 0$ vemos que a suposição foi absurda.

<u>TEOREMA 2</u>. Seja $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$.

Uma condição necessária e suficiente para que a equação

$$f * u = g$$

tenha, para cada $g \in P'_T(\mathbb{R}^n)$, uma solução em $P'_T(\mathbb{R}^n)$ é que exista $f^{-1}$.

No caso afirmativo a solução é única e dada por $f^{-1} * g$.

DEMONSTRAÇÃO:

Necessidade: Existe $u \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ tal que

$f * u = \delta$. Logo, $u = f^{-1}$.

Suficiência: Suponha que exista $f^{-1}$.

Tome $u = f^{-1} * g$. Então,

$$f * u = f * (f^{-1} * g) = (f * f^{-1}) * g = \delta * g = g .$$

Se $f * v = g$ então

$$f^{-1} * (f * v) = f^{-1} * g$$

$$(f^{-1} * f) * v = f^{-1} * g$$

$$v = f^{-1} * g$$

É importante observar que o teorema diz respeito à existência e unicidade de solução da equação de T-convolução $f * u = g$ quando a resolvemos para toda $g \in P'_T(\mathbb{R}^n)$.

Vejamos o seguinte exemplo:

EXEMPLO 1 :

Seja $f = 1$ e $u_n(t) = e^{iwnt}$ onde $w = \frac{2\pi}{T}$ , $n \in \mathbb{Z}^*$ e $t \in \mathbb{R}$ .

Então,

$$(f * u_n)(t= = \int_a^{a+T} f(t-s)u_n(s)ds = \int_a^{a+T} e^{iwns} ds = 0 .$$

Assim, a equação $f * u = 0$ possui infinitas soluções.

## 5. A SÉRIE DE FOURIER

DEFINIÇÃO 1 . Seja $(f_m)_{m \in \mathbb{Z}^k}$ uma seqüência em $P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

Dizemos que a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^k} f_m$ é convergente em $P_T'(\mathbb{R}^n)$ se a seqüência $s_\ell = \sum_{|m| \leq \ell} f_m$ for convergente em $P_T'(\mathbb{R}^n)$ .

TEOREMA 1 . Se $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^k} f_m \in P_T'(\mathbb{R}^n)$ então $D^\alpha f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^k} D^\alpha f_m$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Dados $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ existe $\ell_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\ell \geq \ell_o$ tem-se

$$\left| \left( f - \sum_{|m| \leq \ell} f_m , D^\alpha \theta \right) \right| < \varepsilon .$$

Deste modo,

$$\left| \left( D^{\alpha} f - \sum_{|m| \leq \ell} D^{\alpha} f_m , \theta \right) \right| = \left| \left( D^{\alpha} \left( f - \sum_{|m| \leq \ell} f_m \right) , \theta \right) \right| =$$

$$= \left| \left( f - \sum_{|m| \leq \ell} f_m , D^{\alpha} \theta \right) \right| < \varepsilon \quad .$$

As definições a seguir serão úteis para caracterizarmos os elementos de $P_T$ e $P_T'$ .

<u>DEFINIÇÃO 2</u> . Uma seqüência numérica é dita rapidamente decrescente se para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existir $C > 0$ tal que:

$$| c_m | \leq \frac{C}{|m|^k} \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad , \quad m \neq 0 \quad .$$

Equivalentemente, $(c_m)$ é rapidamente decrescente se para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existir $C > 0$ tal que $| c_m | \leq \frac{C}{(1+|m|)^k}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ . Pois, se para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existir $C > 0$ tal que

$$| c_m | \leq \frac{C}{|m|^k} \quad , \quad m \neq 0 \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad .$$

então, se $m \neq 0$ , $1 + |m| \leq 2|m|$ e

$$| c_m | \leq \frac{C}{|m|^k} \leq \frac{2^k C}{(1+|m|)^k} \quad .$$

Colocando $M = \max \{ 2^k C , |C| \}$ obtemos

$$| c_m | \leq \frac{M}{(1+|m|)^k} \quad , \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad .$$

Agora, se para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existir $C > 0$ tal que

$$| c_m | \leq \frac{C}{(1+|m|)^k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad .$$

então, como para $m \neq 0$ vale

$$\frac{1}{(1+|m|)^k} \leq \frac{1}{|m|^k}$$

chegamos a

$$|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad , \quad m \neq 0 \quad .$$

O espaço das seqüências de decrescimento rápido será denotado por $s(\mathbb{Z}^n ; \mathbb{C})$ ou simplesmente $s$ .

<u>DEFINIÇÃO 3</u> . Uma seqüência numérica $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é dita de crescimento lento se existirem constantes $M > 0$ e $k \in \mathbb{Z}^+$ tais que

$$|c_m| \leq M|m|^k \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad , \quad m \neq 0 \quad .$$

A definição acima é equivalente a existirem constantes $M > 0$ e $k \in \mathbb{Z}^+$ tais que

$$|c_m| \leq M(1+|m|)^k \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad .$$

Pois, se $M$ e $k$ são como na definição então

$$|c_m| \leq M|m|^k \leq M(1+|m|)^k \leq M'(1+|m|)^k$$

onde $M' = \max\{M , |c_o|\}$ .

Agora, se existem $M > 0$ e $k \in \mathbb{Z}^+$ tais que

$$|c_m| \leq M(1+|m|)^k \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad ,$$

temos que, se $m \neq 0$ então $|m| \geq 1$ e

$$|c_m| \leq M(1+|m|)^k \leq M(|m|+|m|)^k = 2^k M|m|^k \quad .$$

O espaço das seqüências de crescimento lento será denotado por $s'(\mathbb{Z}^n ; \mathbb{C})$ ou, simplesmente, $s'$ .

TEOREMA 2 . Seja $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência rapidamente decrescente.

Então $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m$ pertence a $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

OBS. $e_m(x) = e^{iwm.x}$ , $x \in \mathbb{R}^n$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Considere $s_p(x) = \sum_{|m| \leq p} c_m e_m(x)$ .

Como $(c_m)$ é de decrescimento rápido existe $M_1 > 0$ tal que

$$|c_m e_m(x)| = |c_m| < \frac{M_1}{(1+|m|)^{n+1}} \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n .$$

Pelo critério de Weierstrass $s_p$ é uniformemente convergente e $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m(x)$ é contínua.

É claro que $f$ é periódica.

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} s_p(x) = \sum_{|m| \leq p} i w m_j c_m e^{iwmx}$$

Novamente, existe $M_2 > 0$ tal que

$$|i w m_j c_m e_m(x)| = w|m_j| \; |c_m| \leq w(1+|m|) \; |c_m| \leq$$

$$\leq (1+|m|) M_2 (1+|m|)^{-n-2} = M_2 (1+|m|)^{-n-1} .$$

Assim, $g_j(x) = \lim \frac{\partial}{\partial x_j} s_p(x)$ é contínua. (a convergência é uniforme).

Sejam $x, h \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = x + th$. Então,

$$s_p(x+h) - s_p(x) = s_p(\gamma(1)) - s_p(\gamma(0)) = \int_0^1 (s_p \circ \gamma)'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \langle \text{grad } s_p(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle \text{grad } s_p(x+th), h\rangle dt .$$

Defina $g = (g_1, \ldots, g_n)$ .

Então, quando $p \to \infty$ , vem:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \langle g(x+th), h\rangle\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 g_j(x+th)dt = \sum_{j=1}^n h_j\, g_j(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 (g_j(x+th) - g_j(x))\, dt .$$

Agora, se $h \neq 0$ , temos

$$\left| \sum_{j=1}^n h_j \int_0^1 (g_j(x+th) - g_j(x))dt \right| . \|h\|^{-1} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |h_j| . \|h\|^{-1} \max |g_j(x+th) - g_j(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \max |g_j(x+th) - g_j(x)| \to 0$$

quando $h \to 0$ .

Logo, $f$ é diferenciável e $\text{grad } f(x) = g(x)$. Daí, concluímos que

$$f \in C^1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j .$$

Usando indução segue a tese.

<u>TEOREMA 3</u> . Seja $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ . Então

$$c_m(\phi) = T^{-n} \int_{[0,T]^n} e_{-m}(x)\,\phi(x)\,dx$$

forma uma seqüência rapidamente decrescente e

$$\phi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(\phi)\, e_m(x) \quad .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

$$T^n m_j\, c_m(\phi) = \int_{[0,T]^n} m_j\, e^{-imwx}\, \phi(x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{w} \int_{[0,T]^n} D_j\, e^{-iwmx})\,\phi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{w} \int_{[0,T]^n} e^{-iwmx}\, D_j\, \phi(x)\,dx = \frac{T^n}{w}\, c_m(D_j\,\phi) \quad .$$

Usando indução sobre $|\alpha|$ podemos obter

$$m^\alpha\, c_m(\phi) = \left(\frac{1}{w}\right)^{|\alpha|} c_m(D^\alpha\phi) \quad .$$

Assim, para cada $\ell \in \mathbb{N}$

$$|m|^\ell\, |c_m(\phi)| = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!}\, |m^\alpha\, c_m(\phi)| =$$

$$= \frac{1}{w^\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!}\, |c_m(D^\alpha\phi)| =$$

$$= \frac{1}{w^\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!}\, \left| \int_{[0,T]^n} D^\alpha\phi(x)\, e^{-iwmx}\, dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{T^n}{w^\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!}\, \sup|D^\alpha\phi| = M \quad .$$

Como $M$ não depende de $m$ , $(c_m(\phi)) \in s(\mathbb{Z}^n;\mathbb{C})$ .

Seja $\psi = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(\phi) e_m$ . Pelo teorema anterior $\psi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

$$c_m(\psi) = \frac{1}{T^n} \int_{[0,T]^n} \psi(x)\, e^{-iwmx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{T^n} \int_{[0,T]^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell(\phi)\, e^{iw(m-\ell)x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{T^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell(\phi) \int_{[0,T]^n} e^{iw(m-\ell)x}\, dx = \frac{c_m(\phi)}{T^n} \int_{[0,T]^n} dx =$$

$$= c_m(\phi) \ .$$

Deste modo, se provarmos que se $c_m(\phi) = c_m(\psi)$ implicar em $\phi = \psi$ o teorema estará demonstrado.

O próximo lema diz isto.

<u>LEMA 1</u> . (Unicidade). Seja $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ tal que $c_m(\phi) = 0$ para todo $m$ em $\mathbb{Z}^n$ . Então $\phi = 0$ .

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Suponha que tenhamos demonstrado o lema para toda

$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , $\psi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Se $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ então

$$\psi = \phi + \overline{\phi} = 2\,\mathrm{Re}(\phi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

é tal que

$$c_m(\psi) = c_m(\phi) + c_m(\overline{\phi}) = c_m(\psi) + \overline{c_{-m}(\phi)} = 0 \ .$$

Assim, $\psi = 0$ e, portanto, $\phi = i\xi$ onde $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\xi \in P_T(\mathbb{R}^n)$. Mas

$$c_m(\xi) = i\, c_m(\phi) = 0 .$$

Logo, $\phi = i\xi = 0$.

Com isto podemos supor, sem perda de generalidade, que $\phi$ assume valores reais.

Se $p(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, e^{iw\, m_j\, x}$, onde $a_j \in \mathbb{C}$, então

$$\int_{B_T(a)} \phi p = \int_{B_T(a)} \phi \sum_{j=1}^{k} a_j\, e_{m_j} = \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{B_T(a)} \phi\, e_{m_j} =$$

$$= T^n \sum_{j=1}^{k} a_j\, c_{-m_j}(\phi) = 0 .$$

Observe que se mostrarmos que $\phi(0) = 0$ então teremos mostrado que $\phi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, pois,

$$T^n c_m(T_{-x}\phi) = \int_{[0,T]^n} (T_{-x}\phi)(y)\, e^{-iwmy}\, dy =$$

$$= \int_{[0,T]^n} \phi(x+y)\, e^{-iwmy}\, dy = \int_{B_T(x)} \phi(z)\, e^{-iwm(z-x)}\, dz =$$

$$= T^n e^{iwmx} \cdot c_m(\phi) = 0 .$$

Logo, $(T_{-x}\phi)(0) = 0$, i.é,

$$\phi(x) = 0 .$$

Mostremos, enfim, que $\phi(0) = 0$.

Suponha que $\phi(0) = c \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $c > 0$ pois,

$$c_m(-\phi) = -c_m(\phi)$$

e

$$(-\phi)(0) = 0 \iff \phi(0) = 0 \ .$$

Como $\phi$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \frac{T}{2}$ e $x \in [-\delta, \delta]^n$ implica em $\phi(x) > \frac{c}{2} > 0$ .

Defina $\quad p : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto 1 + \cos wt - \cos w\delta \ .$$

Se $\delta \leq |t| \leq \frac{T}{2}$ então caso $\delta \leq t \leq \frac{T}{2}$ temos

$0 < w\delta \leq wt \leq \pi$

$-1 \leq \cos wt \leq \cos w\delta < 1$

$-1 - \cos w\delta \leq \cos wt - \cos w\delta \leq 0 < 1 - \cos w\delta$

$-1 < -\cos w\delta \leq p(t) \leq 1 < 2 - \cos w\delta$ .

Como $p(t) = p(-t)$ segue-se que $|p(t)| \leq 1$, $\delta \leq |t| \leq \frac{T}{2}$ .

Se $0 \leq |t| \leq \delta$ então

$0 \leq |wt| \leq w\delta < \pi$

e

$\cos wt = \cos |wt| \geq \cos w\delta$ .

Logo, $p(t) = 1 + \cos wt - \cos w\delta \geq 1$ .

Para cada $a > 1$ defina

$$p_a(t) = p\left(\frac{t}{a}\right) = 1 + \cos \frac{wt}{a} - \cos w\delta \ .$$

Sejam

$$q_a = 1 + \cos\left(\frac{w\delta}{a}\right) - \cos w\delta = \min_{-\frac{\delta}{a} \leq t \leq \frac{\delta}{a}} p(t)$$

e

$$k = \max_{-\delta \leq t \leq \delta} p(t) = 2 - \cos w\delta > 1 \ .$$

Como

$$\lim_{a \to +\infty} q_a = 2 - \cos w\delta = k > 1 \qquad (1)$$

então

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{k}{q_a} = 1$$

e, para $n \geq 1$

$$\lim_{a \to +\infty} \left(\frac{k}{q_a}\right)^{2(n-1)} = 1 \qquad (2)$$

Por (1) existe $a_1$ tal que $a \geq a_1$ implica em $q_a > k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$ e por (2) existe $a_2$ tal que $a \geq a_2$ implica em $\left(\frac{k}{q_a}\right)^{2(n-1)} < 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$ .

Seja $a_o = \max\{a_1, a_2\}$ .

Então para $a \geq a_o$ vale

$$\left(\frac{k}{q_a}\right)^{2(n-1)} < \frac{k+1}{2} < q_a \ .$$

Logo, $\frac{k}{q_a} < q_a^{\frac{1}{2(n-1)}}$ , i.é. , $k < q_a^{1 + \frac{1}{2(n-1)}}$

Deste modo,

$p(t) \leq k \leq q_a^{1 + \frac{1}{2(n-1)}}$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$ e se

$t \in [-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}]$ vale $q_a \leq p(t) \leq q_a^{1+\frac{1}{2(n-1)}}$ .

Fixemos $a$ , $a \geq a_o$ .

Considere

$$P(x) = p(x_1) \ldots p(x_n) =$$

$$= (1 + \cos wx_1 - \cos w\delta) \ldots (1 + \cos wx_n - \cos w\delta) =$$

$$= (1 + \frac{e^{iw e_1 x} - e^{-iw e_1 x}}{2} - \cos w\delta) \ldots$$

$$\ldots (1 + \frac{e^{iw e_n x} - e^{-iw e_n x}}{2} - \cos w\delta) .$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$ defina

$$P_N(x) = (P(x))^N .$$

$P_N$ é da forma $\sum_{j=1}^{k} a_j e^{iw m_j x}$ .

Temos

$$\int_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]^n} \phi P_N = \int_{[-\delta, \delta]^n} \phi P_N + \int_K \phi P_N + \int_Q \phi P_N$$

onde $K \subset [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]^n$ é dado por : $x \in K \iff |x_j| \geq \delta$ , $\forall j = 1, \ldots, n$ e $Q \subset [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]^n$ é dado por: $x \in Q \iff \exists\, i_1, i_2$ tais que $|x_{i_1}| \leq \delta$ e $|x_{i_2}| > \delta$ . (No caso $n = 1$ , $Q = \emptyset$)

Vale que $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]^n = [-\delta, \delta]^n \cup K \cup Q$ , união disjunta. (a menos de conjuntos de medida nula).

Se $x \in [-\delta, \delta]^n$ então $P_N(x) = p^N(x_1) \ldots p^N(x_n) \geq 1^{nN} = 1$

e $\phi(x) \geq \frac{c}{2}$ . Logo, $\phi P_N > 0$ e

$$\int_{[-\delta,\delta]^n} \phi P_N \geq \int_{[-\frac{\delta}{a},\frac{\delta}{a}]^n} \phi P_N \geq \frac{c}{2} \cdot q_a^{nN} \cdot \left(\frac{2\delta}{a}\right)^n .$$

Se $x \in K$ então $\frac{T}{2} \geq |x_j| \geq \delta$ para todo $j = 1,\ldots,n$ .

Assim $|p(x_j)| \leq 1$ , $j = 1,\ldots,n$ .

Logo, $|P_N(x)| \leq 1$ e

$$\int_K \phi P_N \geq -\int_K |\phi P_N| = -\int_K |\phi|\ |P_N| \geq -\sup|\phi| \cdot T^n .$$

Se $x \in Q$ existem $i_1$ e $i_2$ tais que

$|x_{i_1}| \leq \delta_1$ e $|x_{i_2}| > \delta$ .

Então, $|p(x_{i_2})| \leq 1$ e

$$|P_N(x)| = |p(x_1)|^N \ldots |p(x_n)^N \leq$$

$$\leq |p(x_1)|^N \ldots |p(x_{i_2-1})| \cdot |p(x_{i_2+1})|^N \ldots |p(x_n)|^N \leq$$

$$\leq q^{(1+\frac{1}{2(n-1)})(n-1)N} = q_a^{(n-\frac{1}{2})N} ,$$

pois, se $x_j \in [-\delta,\delta]$ então $p(x_j) \leq q_a^{1+\frac{1}{2(n-1)}}$ e

se $x_j \in [-\frac{T}{2},-\delta] \cup [\delta,\frac{T}{2}]$ então $|p(x_j)| \leq 1 \leq q_a^{1+\frac{1}{2(n-1)}}$.

Assim,

$$\int_Q \phi P_N \geq -\int_Q |\phi|\ |P_N| \geq -\sup|\phi| \cdot q_a^{(n-\frac{1}{2})N}\ T^n .$$

Portanto,

$$\int_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]^n} \phi P_N \geq \frac{c}{a}\left(\frac{2\delta}{a}\right)^n q_a^{nN} - T^n \sup|\phi| -$$

$$- T^n \sup|\phi| \; q_a^{(n-\frac{1}{2})N} =$$

$$= q_a^{nN}\left(\frac{c}{2}\left(\frac{2\delta}{a}\right)^n - \frac{\sup|\phi| \cdot T^n}{q_a^{nN}} - \frac{\sup|\phi| \; T^n}{q_a^{N/2}}\right) .$$

Como $q_a > 1$ temos:

$$\lim_{N\to\infty} q_a^{nN}\left(\frac{c}{2}\left(\frac{2\delta}{a}\right)^n - \frac{\sup|\phi| \cdot T^n}{q_a^{nN}} - \frac{\sup|\phi| \cdot T^n}{q_a^{N/2}}\right) = \infty .$$

Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]^n} \phi P_N \geq 1$ .

Absurdo.

Os Teoremas 2 e 3 permitem escrever um isomorfismo entre $s(\mathbb{Z}^n;\mathbb{C})$ e $P_T(\mathbb{R}^n)$ :

$$A : s(\mathbb{Z}^n;\mathbb{C}) \longrightarrow P_T(\mathbb{R}^n)$$

$$(c_m) \longmapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} c_m e_m$$

A linearidade é imediata.

A sobrejetividade é dada pelo Teorema 3 , visto que, para cada $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ a seqüência $c = (c_m(\phi))$ é tal que $c \in s(\mathbb{Z}^n;\mathbb{C})$ e $A(c) = \phi$ .

Para se verificar a injetividade observe que se $A(c) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} c_m e_m = 0$ então

$$0 = \frac{1}{T^n} \int_{[0,T]^n} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m \right) e_{-\ell} =$$

$$= \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m \int_{[0,T^n]} e_{m-\ell} = c_\ell \ .$$

Antes de fazermos a caracterização das distribuições periódicas com as seqüências de crescimento lento, mostremos que $P'_T$ é completo no seguinte sentido:

<u>TEOREMA 4</u>. Se $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em $P'_T$ tal que dados $\theta \in P_T$ e $\varepsilon > 0$ existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $j,k \geq j_o$ implica que $|(f_j - f_k, \theta)| < \varepsilon$ então $f_j \to f$ em $P'_T$, i.é., existe $f \in P'_T$ tal que $(f_j, \theta) \to (f, \theta)$ para cada $\theta \in P_T$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Mostremos antes que se $(\theta_j)$, $\theta_j \in P_T$ é de Cauchy então $\theta_j \to \theta$ em $P_T$ para alguma $\theta$.

Como para cada $p \in \mathbb{N}$

$$p_k(\theta_{j+p} - \theta_j) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \theta_{j+p} - D^\alpha \theta_j| \to 0 \ ,$$

quando $j \to \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $D^\alpha \theta_j$ converge uniformemente para uma função T-periódica contínua $\theta_\alpha$.

Para cada $\psi \in P_T$

$$(D^\alpha \theta_o, \psi) = (-1)^{|\alpha|} (\theta_o, D^\alpha \psi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{[0,T]^n} \theta_o D^\alpha \psi =$$

$$= \lim_{j \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{[0,T]^n} \theta_j D^\alpha \psi = \lim_{j \to \infty} \int_{[0,T]^n} D^\alpha \theta_j \psi =$$

$$= \int_{[0,T]^n} \theta_\alpha \psi = (\theta_\alpha, \psi) \ .$$

Usando o Teorema 4 da seção 2 repetidas vezes concluímos que $\theta_\alpha \in P_T$ e $D^\alpha\theta_o = \theta_\alpha$ .

Concluímos então que $D^\alpha\theta_j \to D^\alpha\theta_o$ uniformemente para cada $\alpha$ , isto é,

$$\theta_j \to \theta \quad \text{em} \quad P_T .$$

Considere a seqüência $(\rho_j)$ de funções contínuas, definidas em $P_T$ , dadas por

$$\rho_j(\theta) = |(f_j,\theta)| \quad , \quad j = 1,2,\ldots$$

Por uma aplicação do teorema de Baire [ ver [1] , [7] ] existe uma bola aberta em $P_T$ , $B(\theta_1,r) = \{\theta \in P_T ; d(\theta,\theta_1) < r\}$ onde $\rho_j$ é uniformemente limitada, i.é., existe $M > 0$ tal que

$$|\rho_j(\theta)| \leq M \quad \text{para toda} \quad \theta \in B(\theta_1,r) \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{N} .$$

Se $-\theta \in B(\theta_1,r)$ então $\rho_j(\theta) = \rho_j(-\theta) \leq M$ .

Seja $\theta \in B(0,r)$ .

Escreva

$$\theta = \frac{1}{2}[(\theta+\theta_1) + (\theta-\theta_1)]$$

Temos

$$d(\theta+\theta_1 , \theta_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\theta)}{2^k(1+p_k(\theta))} = d(\theta,0) < r$$

e

$$d(-(\theta-\theta_1) , \theta_1) = d(\theta_1-\theta , \theta_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\theta)}{2^k(1+p_k(\theta))} = d(\theta,0) < r$$

Sendo assim,

$$\rho_j(\theta) = \left| \left( f_j , \frac{1}{2} [ (\theta+\theta_1) + (\theta-\theta_1) ] \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} [ |(f_j , \theta+\theta_1)| + |(f_j , \theta-\theta_1)| ] =$$

$$= \frac{1}{2} [ \rho_j(\theta+\theta_1) + \rho_j(\theta-\theta_1) ] \leq M$$

pois $\theta + \theta_1$ e $-(\theta-\theta_1) \in B(\theta_1,r)$ .

Defina $f : P_T \to \mathbb{C}$ por $f(\theta) = \lim_{j\to\infty} (f_j,\theta)$. $f$ está bem definida pois, para cada $\theta \in P_T$ , a seqüência $(f_j,\theta)$ é de Cauchy. Mostremos que $f \in P_T'$ .

Seja $\theta_\ell \to 0$ em $P_T$ .

Para cada $\varepsilon > 0$ tomemos $\ell_o \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2M\theta_\ell}{\varepsilon} \in B(0,r)$ sempre que $\ell \geq \ell_o$ .

Dessa forma

$$\rho_j \left( \frac{2M\theta_\ell}{\varepsilon} \right) = \frac{2M}{\varepsilon} \left| (f_j,\theta_\ell) \right| \leq M$$

sempre que $\ell \geq \ell_o$ , $j = 1,2,\ldots$ , ou seja, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\ell \geq \ell_o$

$$\left| (f_j,\theta_\ell) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Como $f(\theta_\ell) = \lim_{j\to\infty} (f_j,\theta_\ell)$ , para cada $\ell \geq \ell_o$ existe $j_\ell$ tal que

$$|f(\theta_\ell) - (f_{j_\ell},\theta_\ell)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Assim, para $\ell \geq \ell_o$

$$|f(\theta_\ell)| \leq |f(\theta_\ell) - (f_{j_\ell},\theta_\ell)| + |(f_{j_\ell},\theta_\ell)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Portanto, $f \in P_T'$ .

<u>TEOREMA 5</u> . Seja $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência de crescimento lento.

Então a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e^{iwm.x}$ , $w = \frac{2\pi}{T}$ é convergente em $P'_T(\mathbb{R}^n)$ e se

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m \text{ , onde } e_m(x) = e^{iwm.x} \text{ , temos que}$$

$$c_m = \frac{1}{T^n} (f , e_{-m}) = c_m(f) .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $\theta \in P_T(\mathbb{R}^n)$ .

Para cada $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$ temos

$$m_j(e_m,\theta) = \int_{[0,T]^n} m_j e^{iwmx} \theta(x)dx = \frac{1}{w} \int_{[0,T]^n} D_j(e^{iwmx})\theta(x)dx =$$

$$= - \frac{1}{w} \int_{[0,T]^n} e^{iwmx} D_j\theta(x)dx .$$

Obtemos $m_j(e_m,\theta) = \frac{1}{w} ( D_j e_m , \theta ) = - \frac{1}{w} ( e_m , D_j\theta )$ .

Usando indução sobre $|\alpha|$ podemos ver que

$$m^\alpha(e_m,\theta) = \frac{1}{w^{|\alpha|}} ( D^\alpha e_m , \theta) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{w^{|\alpha|}} ( e_m , D^\alpha\theta ) .$$

Como $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é de crescimento lento, existem $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|c_m| \leq M|m|^k \text{ , } m \in \mathbb{Z}^n \text{ , } m \neq 0 .$$

Assim,

$$= \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} \cdot \frac{1}{w^{|\alpha|}} \, |(e_m, D^\alpha\theta)| \leq \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} \frac{1}{w^{|\alpha|}} \cdot$$

$$\cdot \int_{[0,T]^n} |e^{iwmx} D^\alpha\theta(x)| dx = \sum_{|\alpha|=k+n+1} \frac{k!}{\alpha!} \cdot \frac{1}{w^{|\alpha|}} \cdot$$

$$\cdot \int_{[0,T]^n} |D^\alpha\theta(x)| dx = C \quad .$$

Observe que $C$ não depende de $m$ e se $\theta_j \to 0$ em $P_T$ então para cada $k \in \mathbb{N}$ $|m|^{k+n+1} \, |(e_m, \theta_j)| \to 0$ , para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ .

$$|c_m(e_m, \theta)| = |c_m| \, |(e_m, \theta)| \leq M|m|^k \cdot \frac{C}{|m|^{k+n+1}} =$$

$$= \frac{MC}{|m|^{n+1}} = \frac{\tilde{C}}{|m|^{n+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad , \quad m \neq 0 \quad .$$

Considere a reduzida

$$s_j(x) = \sum_{|m| \leq j} c_m \, e^{iwmx} \quad .$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$

$$|(s_{j+p} - s_j, \theta)| = \left| \left( \sum_{j+1 \leq |m| \leq j+p} c_m \, e_m, \theta \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j+1 \leq |m| \leq j+p} |c_m(e_m, \theta)| \leq \sum_{j+1 \leq |m| \leq j+p} \frac{1}{|m|^{n+1}} \quad .$$

Como a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|m|^{n+1}}$ é convergente , é de Cauchy. Logo, $s_j$ também é de Cauchy e como $P_T'$ é completo , existe $f \in P_T'$ tal que

$$f = \lim_{j \to \infty} s_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m$$

Ainda,

$$\frac{1}{T^n} (f, e_{-m}) = \frac{1}{T^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell \int_{[0,T]^n} e^{iw(\ell-m)x} dx$$

Mas,

$$\int_{[0,T]^n} e^{iw(\ell-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \ell \neq m \\ T^n & \text{se} \quad \ell = m \end{cases} .$$

Então

$$c_m = \frac{1}{T^n} (f, e_{-m}) .$$

O que o teorema acima diz é que toda série trigonométrica tendo coeficientes de crescimento lento é convergente em $P'_T$ .

Já o seguinte nos diz que toda distribuição periódica pode ser representada como uma série trigonométrica com coeficientes de crescimento lento.

<u>TEOREMA 6</u> . Seja $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ . Se $c_m(f) = \frac{1}{T^n} (f, e_{-m})$ então $(c_m(f))$ é de crescimento lento e

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) e_m \quad \text{em} \quad P'_T(\mathbb{R}^n) .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Como $f \in P'_T$ existem $c > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|c_m(f) = \frac{1}{T^n} \, | \, (f, e_{-m}) \, | \leq \frac{C}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_x |D^\alpha e_m(x)| =$$

$$= \frac{C}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_x |w^{|\alpha|} \, . \, m^\alpha \, . \, e_m(x)| =$$

$$= \frac{C}{T^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_x |w^{|\alpha|} \, . \, m^\alpha| \leq \frac{C \, . \, \max\{1, w^k\}}{T^n} \, . \sum_{|\alpha| \leq k} |m^\alpha| \leq$$

$$\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} (1 + |m|)^{|\alpha|} \leq C'' (1 + |m|)^k \quad ,$$

para todo $m$ de $\mathbb{Z}^n$ .

Portanto $c_m(f)$ é de crescimento lento.

Pelo teorema anterior existe $g \in P_T'$ tal que

$$g = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) e_m \quad .$$

Resta-nos mostrar que $g = f$ .

Para isto, mostremos primeiramente que $\delta = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e_m$ .

Para cada $\theta \in P_T$ temos

$$\left( \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} e_m - \delta \, , \, \theta \right) = \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0,T]^n} e_m(x) \theta(x) dx \; -$$

$$- \theta(0) = \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0,T]^n} e_m(x) \theta(x) dx \; -$$

$$- \frac{\theta(0)}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0,T]^n} e_m(x) dx =$$

$$= \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0,T]^n} e_m(x) \, ( \theta(x) - \theta(0) ) \, dx =$$

$$= \frac{1}{T^n} \sum_{|m| \leq j} \int_{[0,T]^n} ( \theta(x) - \theta(0) ) \, e_{-m}(x) dx =$$

$$= \sum_{|m| \leq j} c_m(\theta - \theta(0)) = \sum_{|m| \leq j} c_m(\theta - \theta(0))\, e_m(0) \to$$

$$\to (\theta - \theta(0))(0) = \theta(0) - \theta(0) = 0 \quad .$$

Usando a continuidade seqüencial em cada variável da T-convolução chegamos a

$$(f,\theta) = (f * \delta, \theta) = \left( \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f * e_m , \theta \right) =$$

$$= \left( \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (f , (e_m)^{\vee}_a) , \theta(a) \right) =$$

$$= \left( \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (f , e_{-m}) . e_m(a) , \theta(a) \right) =$$

$$= \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f)\, e_m(a) , \theta(a) \right) = (g,\theta) \quad .$$

Portanto, $f = g$ .

Estes dois últimos teoremas mostram que é possível estabelecer um isomorfismo entre $s'(\mathbb{Z}^n ; \mathbb{C})$ e $P'_T(\mathbb{R}^n)$ .

Defina

$$B : s'(\mathbb{Z}^n ; \mathbb{C}) \longrightarrow P'_T(\mathbb{R}^n)$$

$$c = (c_m) \longmapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m\, e_m$$

A linearidade de $B$ é trivial.

A sobrejetividade decorre do último teorema, pois, para cada $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ tome $c = (c_m(f))$ e , então, $B(c) = f$ .

A injetividade:

Se $B(c) = \sum_{m=o} c_m e_m = 0$ então o Teorema 5 diz que $c_m = (0, e_{-m}) = 0$, i.é., $c = 0$.

EXEMPLO 1 :

Já sabemos que $\delta = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e_m$ ; calculemos a série de $D^\alpha \delta$ .

$$c_m(D^\alpha \delta) = \frac{1}{T^n} (D^\alpha \delta , e_{-m}) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{T^n} (\delta , D^\alpha e_{-m}) =$$

$$= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{T^n} (\delta , (-1)^{|\alpha|} w^{|\alpha|} m^\alpha e_{-m}) = \frac{w^{|\alpha|}}{T^n} m^\alpha .$$

Logo,

$$D^\alpha \delta = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} w^{|\alpha|} m^\alpha e_m .$$

TEOREMA 7 . Se $f, g \in P'_T$ então

$$f * g = T^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) . c_m(g) e_m .$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$c_m(f * g) = \frac{1}{T^n} (f * g , e_{-m}) = \frac{1}{T^n} (f * g * e_m)(0) =$$

$$= \frac{1}{T^n} (f * (g * e_m))(0) = \frac{1}{T^n} (f(x) , (g * e_m)^\vee (x)) =$$

$$= \frac{1}{T^n} (f(x) , (g * e_m)(-x)) = \frac{1}{T^n} (f(x) , (g(a) , e_m(-x-a))) =$$

$$= \frac{1}{T^n} (f(x) , (g(a) , e_{-m}(a)) . e_{-m}(x)) =$$

$$= \frac{1}{T^n} (f(x) , e_{-m}(x)) (g(a) , e_{-m}(a)) = T^n c_m(f) . c_m(g) .$$

Logo,

$$f * g = T^n \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(f) \cdot c_m(g)\, e_m$$

## 6. SÉRIE PARCIAL DE FOURIER

### 6.1. A SÉRIE PARCIAL DE FOURIER EM $P_T$ .

Sejam $p, q$ e $n$ em $\mathbb{N}$ tais que

$n = p + q$ .

Considere a soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ .

Escreveremos $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ para indicar que $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$ .

Dada $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ considere para cada $x \in \mathbb{R}^p$ a função

$$\psi_x : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$y \longmapsto \phi(x,y)$$

$\psi_x \in P_T(\mathbb{R}^q)$ e , portanto,

$$\phi(x,y) = \psi_x(y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} c_m(\psi_x)\, e^{iwmy}$$

onde

$$c_m(\psi_x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0,T]^q} \psi_x(y)\, e^{-iwmy}\, dy =$$

$$= \frac{1}{T^q} \int_{[0,T]^q} \phi(x,y)\, e^{-iwmy}\, dy \ .$$

Defina $\phi_m(x) = c_m(\psi_x)$ .

Assim, $\phi(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x)\, e^{iwmy}$ .

É claro que $\phi_m$ é T-periódica.

$\phi_m$ é contínua pois, se $x_j \to x_o$ em $\mathbb{R}^p$ então $\lim_{j\to\infty} \phi(x_j,y)\, e^{-iwmy} = \phi(x_o,y)\, e^{-iwmy}$ e como $\phi(x_j,y)\, e^{-iwmy}$ é mensurável e $|\phi(x_j,y)\, e^{-iwmy}| = |\phi(x_j,y)| \leq C$ ( onde C não depende de j , pois $\phi$ é limitada), pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{j\to\infty} \phi_m(x_j) = T^{-q} \lim_{j\to\infty} \int_{[0,T]^q} \phi(x_j,y)\, e^{-iwmy}\, dy =$$

$$= T^{-q} \int_{[0,T]^q} \phi(x_o,y)\, e^{-iwmy}\, dy = \phi_m(x_o) \quad .$$

Para verificarmos que $\phi_m$ é $C^1$ considere uma seqüência $(h_j)$ , $h_j \in \mathbb{R}^*$ , $h_j \to 0$ .

Temos que

$$\lim_{j\to\infty} \left[ \frac{\phi(x + h_j e_k, y) - \phi(x,y)}{h_j} \right] . e^{-iwmy} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x,y)\, e^{-iwmy}$$

e

$$\left| \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x_k} e^{-iwmy} \right| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x,y) \right| \leq C \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n .$$

Deste modo, a seqüência

$$\frac{\phi(x + h_j e_k, y) - \phi(x,y)}{h_j} . e^{-iwmy}$$

também é limitada para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ .

Pelo Teorema da Convergência Dominada segue-se que

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\phi_m(x + h_j e_k) - \phi_m(x)}{h_j} =$$

$$= T^{-q} \lim_{j \to \infty} \int_{[0,T]^q} \frac{\phi(x + h_j e_k , y) - \phi(x,y)}{h_j} \cdot e^{-iwmy} dy =$$

$$= T^{-q} \int_{[0,T]^q} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x,y) e^{-iwmy} dy .$$

Isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \phi_m(x) = T^{-q} \int_{[0,T]^q} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x,y) e^{-iwmy} dy .$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x,y)$ é contínua, podemos usar o mesmo raciocínio feito na prova de que $\phi_m$ é contínua para concluírmos que $\frac{\partial}{\partial x_k} \phi_m(x)$ também é.

Através de indução sobre a ordem da derivada concluímos que

$$\phi_m \in P_T(\mathbb{R}^n) .$$

<u>TEOREMA 1</u> . Seja $(\phi_m)_{m \in \mathbb{Z}^q}$ uma seqüência de funções de $P_T(\mathbb{R}^p)$ tal que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e $N \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha \phi_m(x)| \leq \frac{C}{(1+|m|)^N} ,$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$ e $x \in \mathbb{R}^p$ .

Então , a função $\psi : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{C}$ dada por

$\psi(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x)\, e^{iwmy}$ está bem definida e pertence a $P_T(\mathbb{R}^n)$ .

<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>

Como para cada $x \in \mathbb{R}^p$ .

$\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x)\, e^{iwmy}$ é convergente, $\psi$ está bem definida.

Seja $\psi_x : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$

$$y \longmapsto \psi(x,y)$$

$\psi_x$ é evidentemente periódica.

$\psi_x$ pertence a $P_T(\mathbb{R}^q)$ , pois, dado $N \in \mathbb{N}$ , existe $C > 0$ tal que

$$|c_m(\psi_x)| = |\phi_m(x)| \leq \frac{C}{(1+|m|)^N} .$$

Mostremos que $\psi$ é contínua.

Seja $(x_o,y_o) \in \mathbb{R}^n$ .

$$|\psi(x,y) - \psi(x_o,y_o)| = \Big| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (\phi_m(x)\, e^{iwmy} -$$

$$- \phi_m(x_o)\, e^{iwmy_o}) \Big| = \Big| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} [ (\phi_m(x) - \phi_m(x_o)) .$$

$$. e^{iwmy} + \phi_m(x_o)\, (e^{iwmy} - e^{iwmy_o}) ] \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_o)| + \Big| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x_o) .$$

$$. (e^{iwmy} - e^{iwmy_o}) \Big| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_o)| +$$

$$+ |\psi_{x_o}(y) - \psi_{x_o}(y_o)| .$$

Como existe $C > 0$ tal que

$$|\phi_m(x) - \phi_m(x_o)| \leq \frac{C}{(1+|m|)^{q+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^q \quad , \qquad \text{a função}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi_m(x_o)|$$

é contínua.

Como $\psi_{x_o}$ também é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|(x,y)| < \delta$ implica que

$$|\psi(x,y) - \psi(x_o,y_o)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} |\phi_m(x) - \phi(x_o)| +$$

$$+ |\psi_{x_o}(y) - \psi_{x_o}(y_o)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Vejamos agora que $\psi$ é $C^1$

$$\left| \frac{\psi(x_o + he_j, y_o) - \psi(x_o,y_o)}{h} - \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_o)\, e^{iwmy_o} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_m(x_o + h\, e_j)\, e^{iwmy_o} - \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \phi_m(x_o)\, e^{iwmy_o}}{h} - \right.$$

$$\left. - \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_o)\, e^{iwmy_o} \right| = \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left[ \frac{\phi_m(x_o+he_j)-\phi_m(x_o)}{h} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_o) \right] e^{iwmy_o} \right| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left| \frac{\phi_m(x_o + he_j) - \phi_m(x_o)}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_o) \right| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left| \frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}(x_o + \xi_m e_j) - \frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}(x_o) \right| =$$

onde

$$|\zeta_m| < |\xi_m| < |h| .$$

Existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_o + \zeta e_j) \right| \leq \frac{C}{(1+|m|)^{q+1}} , \quad m \in \mathbb{Z}^q .$$

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ tome

$$\delta = \varepsilon . \left( C \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{1}{(1+|m|)^{q+1}} \right)^{-1}$$

e se $|h| < \delta$ então $|\xi_m| < \delta$ e, portanto,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_o + \zeta e_j) \right| |\xi_m| <$$

$$< \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \phi_m(x_o + \zeta e_j) \right| \delta \leq C \delta \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{1}{(1+|m|)^{q+1}} = \varepsilon .$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} (x_o, y_o) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x_o) \, e^{iwmy_o} .$$

Como

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x) \, e^{iwmy} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_m(x) \right| \leq \frac{cte}{(1+|m|)^{q+1}} , \; m \in \mathbb{Z}^q$$

segue-se que $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ é contínua, já que

$$\lim_{h \to o} \frac{\psi(x_o, y_o + he_j) - \psi(x_o, y_o)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{\psi_{x_o}(y_o + he_j) - \psi_{x_o}(y_o)}{h} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_j} \psi_{x_o}(y_o) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \phi_m(x_o)\, e^{iwmy} \right] \Big|_{y = y_o} =$$

$$= iw \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} m_j\, \phi_m(x_o)\, e^{iwmy_o}$$

e

$$|m_j\, \phi_m(x_o)\, e^{iwmy_o}| = |m_j\, \phi_m(x_o)| \leq \frac{cte}{(1+|m|)^{q+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^q .$$

Mostremos por indução sobre a ordem das derivadas que $\psi \in C$ .

Suponha que $\partial^{(\alpha,\beta)}$ é contínua e que

$$\partial^{(\alpha,\beta)} \psi(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^{\alpha} \phi_m(x)\, (iwm)^{\beta}\, e^{iwmy} .$$

Defina $\alpha_j = \alpha + e_j$ e $\alpha_{jj} = \alpha_j + e_j$

$$\left| \frac{\partial^{(\alpha,\beta)} \psi(x_o + h\, e_j\, , y_o) - \partial^{(\alpha,\beta)} \psi(x_o, y_o)}{h} - \right.$$

$$\left. - \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_o)\, (iwm)^{\beta}\, e^{iwmy_o} \right| =$$

$$= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left[ \frac{1}{h} \left( \partial^{\alpha} \phi_m (x_o + h\, e_j) - \partial^{\alpha} \phi_m(x_o) \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_o) \right] (iwm)^{\beta}\, e^{iwmy_o} \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \frac{1}{h} \left( \partial^{\alpha} \phi_m (x_o + h\, e_j) - \partial^{\alpha} \phi_m(x_o) \right) - \right.$$

$$\left. - \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_o) \right| \, |(iwm)\beta| =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \left( \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_o + \xi_m e_j) - \partial^{\alpha_j} \phi_m(x_o) \right) \right| \quad |(iwm)^\beta| =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \partial^{\alpha_{jj}} \phi_m(x_o + \zeta_m e_j) \right| \quad |\xi_m| \quad |(iwm)^\beta|$$

onde $|\zeta_m| < |\xi_m| < |h|$ .

Como existe $C > 0$ tal que

$$\left| \partial^{\alpha_{jj}} \phi_m(x_o + \xi_m e_j) \right| \quad |(iwm)^\beta| \leq \frac{C}{(1+|m|)^{q+1}} ,$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$ , tome , para cada $\varepsilon > 0$ ,

$$\delta = \varepsilon \left( C \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \frac{1}{(1+|m|)^{q+1}} \right)^{-1} .$$

Então, se $h$ é tal que $|h| < \delta$ temos

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \left| \partial^{\alpha_{jj}} \phi_m(x_o + \zeta_m e_j) \right| \quad |\xi_m| \quad |(iwm)^\beta| < \varepsilon .$$

Dessa forma,

$$\partial^{(\alpha_j, \beta)} \psi(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \partial^{\alpha_j} \phi_m(x) \; e^{iwmy} . (iwm)^\beta$$

e como

$$\left| \partial^{\alpha_j} \phi_m(x) . e^{iwmy} \; (iwm)^\beta \right| =$$

$$= \left| \partial^{\alpha_j} \phi_m(x) \; (iwm)^\beta \right| \leq \frac{cte}{(1+|m|)^{q+1}} , \quad m \in \mathbb{Z}^q$$

segue-se que

$\partial^{(\alpha_j,\beta)}\psi$ é contínua.

Defina $\beta_j = \beta + e_j$

$$\lim_{h\to o} [\ \partial^{(\alpha,\beta)}\psi(x_o, y_o + he_j) - \partial^{(\alpha,\beta)}\psi(x_o,y_o)\ ]\, h^{-1} =$$

$$= \lim_{h\to o} [\ h^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x_o)\ (iwm)^\beta\ e^{iwmy_o}\ (e^{iwhme_j} - 1)\ ] =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x_o)\ (iwm)^\beta\ (iwm_j)\ e^{iwmy_o} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} \partial^\alpha \phi_m(x_o)\ (iwm)^{\beta_j}\ e^{iwmy_o} .$$

Deste modo, existe $\partial^{(\alpha,\beta_j)}\psi$ e é contínua.

A periodicidade de $\psi$ é imediata.

No início desta seção vimos que se $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ então

$$\phi(x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} \phi_m(x)\ e^{iwmy}$$

onde $\phi_m \in P_T(\mathbb{R}^p)$ e

$$\phi_m(x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0,T]^q} \phi(x,y)\ e^{-iwmy}\, dy .$$

O teorema a seguir mostra que $(\phi_m)$ é uma seqüência de decrescimento rápido.

<u>TEOREMA 2</u>. Se $\phi \in P_T(\mathbb{R}^n)$ então

$$\phi(x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} \phi_m(x)\ e^{iwmy} ,$$

onde

$$\phi_m \in P_T(\mathbb{R}^p) \quad , \qquad \phi_m(x) = \frac{1}{T^q} \int_{[0,T]^q} \phi(x,y)\, e^{-iwmy}\, dy$$

e dado $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^p$ existe $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha \phi_m(x)| \leq \frac{C}{(1+|m|)^k} \quad ,$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^q$ e $x \in \mathbb{R}^p$ .

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Só resta demonstrar a última parte do teorema.

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e $\beta \in \mathbb{N}^q$

$$T^q |m^\beta D^\alpha \phi_m(x)| = \left| \int_{[0,T]^q} D^{(\alpha,o)} \phi(x,y)\, m^\beta\, e^{-iwmy}\, dy \right| =$$

$$= \frac{1}{w^{|\beta|}} \left| \int_{[0,T]^q} D^{(\alpha,o)} \phi(x,y) \,.\, D^\beta\, e^{-iwmy}\, dy \right| =$$

$$= \frac{1}{w^{|\beta|}} \left| \int_{[0,T]^q} D^{(\alpha,\beta)} (\phi(x,y))\, e^{-iwmy}\, dy \right| .$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$|m|^k \, |D^\alpha \phi_m(x)| = \Big( \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} |m^\beta| \Big) |D^\alpha \phi_m(x)| =$$

$$= \sum_{|\beta|=k} \left| \frac{k!}{\beta!} m^\beta \,.\, D^\alpha \phi_m(x) \right| =$$

$$= \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \cdot \frac{1}{w^{|\beta|}} \left| \frac{1}{T^q} \int_{[0,T]^q} D^{(\alpha,\beta)} (\phi(x,y))\, e^{-iwmy}\, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{w^k} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^n} |D^{(\alpha,\beta)} \phi(x,y)| = C(k,\phi) \; .$$

Observe que $C(k,\phi)$ não depende de $m \in \mathbb{Z}^q$ e que se $\phi_j \to 0$ em $P_T$ então $C(k,\phi_j) \to 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Estes dois teoremas caracterizam também as funções de $P_T$ através dos coeficientes (neste caso funções) de Fourier.

## 6.2. A SÉRIE PARCIAL DE FOURIER PARA DISTRIBUIÇÕES PERIÓDICAS.

Seja $u \in P_T'(\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q)$ , $p+q = n$ .

Para cada $\gamma \in P_T(\mathbb{R}^p)$ defina

$$v_\gamma : P_T(\mathbb{R}^q) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto v_\gamma(\theta) = (u , \gamma \otimes \theta)$$

onde

$$\gamma \otimes \theta : \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x,y) \longmapsto \gamma(x) . \theta(y) \quad .$$

Afirmação: $v_\gamma$ é linear, pois, para quaisquer $\theta_1,\theta_2 \in P_T(\mathbb{R}^q)$ e $a_1,a_2 \in \mathbb{C}$ vale:

$$v_\gamma(a_1\theta_1 + a_2\theta_2) = (u , \gamma \otimes (a_1\theta_1 + a_2\theta_2)) =$$

$$= (u , a_1 \gamma \otimes \theta_1 + a_2 \gamma \otimes \theta_2) = a_1(u , \gamma \otimes \theta_1) + a_2(u , \gamma \otimes \theta_2) =$$

$$= a_1 v_\gamma(\theta_1) + a_2 v_\gamma(\theta_2) .$$

$v_\gamma$ é contínuo. Seja $\theta_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^p)$. Então para todo $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$

$$|D^{(\alpha,\beta)}\ \gamma\otimes\theta_j\ (x,y)| = |D^{(\alpha,\beta)}\ \gamma(x)\ \theta_j(y)| =$$

$$= |D^{\alpha}\gamma(x)\ .\ D^{\beta}\theta_j(y)| \leq \sup|D^{\alpha}\gamma(x)|\ .\ \sup|D^{\beta}\theta_j(y)| \to 0$$

uniformemente.

Logo, $v_\gamma(\theta_j) = (u, \gamma\otimes\theta_j) \to 0$ em $\mathbb{C}$ .

Assim, $v_\gamma \in P'_T(\mathbb{R}^q)$ e , desta forma ,

$$v_\gamma = \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} c_m(v_\gamma)e_m$$

onde

$$c_m(v_\gamma) = \frac{1}{T^q}\ (v_\gamma\ ,\ e_{-m}) = \frac{1}{T^q}\ (u\ ,\ \gamma\otimes e_{-m})\ .$$

Defina $u_m : P_T(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma \longmapsto c_m(v_\gamma)$$

$u_m$ é linear.

$$u_m(a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2) = \frac{1}{T^q}\ (u\ ,\ (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2)\ \otimes\ e_{-m}) =$$

$$= \frac{a_1}{T^q}\ (u\ ,\ \gamma_1\otimes e_{-m}) + \frac{a_2}{T^q}\ (u\ ,\ \gamma_2\otimes e_{-m}) =$$

$$= a_1\ u_m(\gamma_1) + a_2\ u_m(\gamma_2)\quad ,$$

para todos $\gamma_1,\gamma_2 \in P_T(\mathbb{R}^q)$ e $a_1,a_2 \in \mathbb{C}$ .

Afirmação: $u_m$ é contínuo. Seja $\gamma_j \to 0$ em $P_T(\mathbb{R}^p)$ . Então, para todo $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$ ,

$$|D^{(\alpha,\beta)}\ \gamma_j\otimes e_{-m}(x,y)| = |D^{\alpha}\gamma_j(x)\ D^{\beta}\ e_{-m}(y) \leq$$

$$\leq \sup|D^{\beta}e_{-m}(y)|\ .\ \sup|D^{\alpha}\gamma_j(x)| \to 0$$

uniforme, quando $j \to \infty$ , para cada $m \in \mathbb{Z}^q$ .

Logo,

$$u_m(\gamma_j) = \frac{1}{T^q}(u, \gamma_j \otimes e_{-m}) \to 0 .$$

Assim, $u_m \in P'_T(\mathbb{R}^p)$ , para todo $m \in \mathbb{Z}^q$ ,

e

$$v_\gamma = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (u_m, \gamma) e_m$$

$$(u, \gamma \otimes \theta) = \Big( \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} (u_m, \gamma) e_m, \theta \Big) .$$

Note que esta expressão já é suficiente para que $u$ fique bem definida, bastando tomar $\gamma(x) = e^{-iwm_1 x}$ e $\theta(y) = e^{-iwm_2 y}$ , onde $m = m_1 + m_2 \in \mathbb{Z}^n$ , $m_1 \in \mathbb{Z}^p$ e $m_2 \in \mathbb{Z}^q$. Daí,

$$c_m(u) = (u, \gamma \otimes \theta) .$$

Vejamos agora como é o crescimento da seqüência $(u_m)$ .

Como $u \in P'_T(\mathbb{R}^{p+q})$ existem $C_o > 0$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $\gamma \in P_T(\mathbb{R}^p)$

$$|(u_m, \gamma)| = \frac{1}{T^q} |(u, \gamma \otimes e_{-m})| \leq$$

$$\leq C_o \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq k_o} |D^{(\alpha,\beta)} (\gamma(x) . e_{-m}(y))| =$$

$$= C_o \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq k_o} \sup |D^\alpha \gamma(x) (-iwm)^\beta e^{-iwmy}| =$$

$$= C_o \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq k_o} \sup |D^\alpha \gamma(x)| . |(wm)^\beta| .$$

Então, para algum $C_1 > 0$

$$|(u_m,\gamma)| \leq C_1\, p_{k_o}(\gamma)\,(1+|m|)^{k_o}$$

onde

$$p_{k_o}(\gamma) = \sum_{|\alpha| \leq k_o} \sup|D^\alpha \gamma| \quad .$$

Provamos o seguinte teorema

<u>TEOREMA 3</u> . Se $u \in P'_T(\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q)$ então

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e_m \qquad \text{onde} \qquad u_m \in P'_T(\mathbb{R}^p)$$

é dada por $(u_m,\gamma) = c_m(v_\gamma)$ e

$$c_m(v_\gamma) = \frac{1}{T^q}(u, \gamma \otimes e_{-m}) \quad , \quad \gamma \in P_T(\mathbb{R}^p) \quad .$$

Além do mais, para cada $\gamma \in P_T(\mathbb{R}^n)$ , $(u_m,\gamma)$ é uma seqüência de crescimento lento.

<u>TEOREMA 4</u> . Seja $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^q}$ uma seqüência de $P'_T(\mathbb{R}^p)$ que satisfaz a seguinte condição:

Existe $C > 0$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(u_m, \phi)| \leq C\, p_{k_o}(\phi)\,(1+|m|)^{k_o} \quad ,$$

para toda $\phi$ de $P_T(\mathbb{R}^p)$ e todo $m$ de $\mathbb{Z}^q$ .

Então $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e_m$ pertence a $P'_T(\mathbb{R}^{p+q})$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Para cada $\theta \in P_T(\mathbb{R}^{p+q})$ considere a seqüência

$$s_j = \sum_{\substack{|m| \leq j \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (u_m(x)\, e_m(y)\, ,\, \theta(x,y)) =$$

$$= \sum_{\substack{|m| \leq j \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (u_m(x)\, ,\, \int_{[0,T]^q} e_m(y)\, \theta(x,y)dy) =$$

$$= \sum_{\substack{|m| \leq j \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (u_m(x)\, ,\, \theta_m(x)) \, .$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$

$$|s_{j+p} - s_j| \leq \sum_{\substack{j<|m|\leq j+p \\ m \in \mathbb{Z}^q}} |(u_m\, ,\, \theta_m)| \leq$$

$$\leq C \sum_{j<|m|\leq j+p} p_{k_o}(\theta_m)\, (1+|m|)^{k_o} \, .$$

Porém, como visto, $\theta_m$ é rapidamente decrescente ; sendo assim,

$$p_{k_o}(\theta_m) = \sum_{|\alpha| \leq k_o} \sup|D^\alpha \theta_m(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq k_o} c_\alpha (1+|m|)^{-k_o-q-1} \leq$$

$$\leq C'\, (1+|m|)^{-k_o-q-1} \, .$$

Assim,

$$|s_{j+p} - s_j| \leq CC' \sum_{\substack{j<|m|\leq j+p \\ m \in \mathbb{Z}^q}} (1+|m|)^{-q-1} \to 0$$

quando $j \to \infty$ .

Deste modo, $s_j$ é convergente, e $\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m\, e_m$ pertence a $P'_-(\mathbb{R}^{p+q})$ .

# CAPÍTULO II

Neste capítulo serão utilizadas basicamente as caracterizações feitas no capítulo anterior (dos elementos de $P_T$ e $P_T'$ com seus coeficientes de Fourier) para se analisar a regularidade (hipoeliticidade global) de alguns operadores diferenciais parciais lineares.

Na primeira seção será apresentada uma condição necessária e suficiente para que uma equação de T-convolução tenha sempre uma solução. Estaremos assim incluindo a resolubilidade dos operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes.

Na segunda seção será mostrada uma condição necessária e suficiente para que um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes seja globalmente hipoelítico.

Com base neste resultado, a terceira seção será dedicada a operadores diferenciais globalmente hipoelíticos. Nesta seção serão vistos outros exemplos de como fica afetada a regularidade de alguns operadores pela adição de outros de ordem mais baixa.

A quarta seção diz respeito a um exemplo de operador globalmente hipoelítico com coeficientes variáveis.

Por fim, na quinta seção será demonstrada hipoeliticidade global de certos operadores utilizando-se uma técnica diferente das usadas nas seções anteriores.

## 1. RESOLUBILIDADE DE EQUAÇÕES LINEARES DE T-CONVOLUÇÃO

Na seção 4 do capítulo anterior vimos que dada $f \in P'_T$, a equação $f * u = g$ tem, para cada $g \in P'_T$, uma solução em $P'_T$ se, e somente se, existe a inversa de $f$ na T-convolução, isto é, $f * u = \delta$ tem solução em $P'_T$.

O próximo teorema dá condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes de Fourier de uma distribuição periódica para que ela possua uma inversa.

TEOREMA 1. Seja $f \in P'_T(\mathbb{R}^n)$. Então, $f$ é inversível se, e somente se, $c_m(f) \neq 0$ para todo $m$ de $\mathbb{Z}^n$ e $\left(\frac{1}{c_m(f)}\right)$ formar uma seqüência de crescimento lento, i.é., existem $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|c_m(f)| \geq C(1 + |m|)^{-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}^n \quad .$$

Antes da demonstração observemos que esta última condição sobre $c_m(f)$ diz que estes não podem decrescer rapidamente, i.é, $c_m(f) \notin s(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha que exista $f^{-1}$. Assim,

$$c_m(\delta) = \frac{1}{T^n} = T^n \cdot c_m(f) \cdot c_m(f^{-1}) \quad .$$

Desta forma, $c_m(f) \neq 0$, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$.

Como $(c_m(f^{-1}))$ é de crescimento lento, pois $f^{-1} \in P'_T$,

vemos que $\dfrac{1}{c_m(f)} = \dfrac{c_m(f^{-1})}{T^{2n}}$ também o é.

Suponha agora que $c_m(f) \neq 0$ e que $\left(\dfrac{1}{c_m(f)}\right)$ seja de crescimento lento.

Defina $g = \dfrac{1}{T^{2n}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \dfrac{1}{c_m(f)} \cdot e_m$ , $g \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ pois, $(c_m(g)) = \left(\dfrac{1}{T^{2n}} \cdot \dfrac{1}{c_m(f)}\right) \in s'(\mathbb{Z}^n ; \mathbb{C})$ .

Então,

$$c_m(f * g) = T^n c_m(f) \cdot c_m(g) = T^n c_m(f) \cdot \frac{1}{T^{2n} c_m(f)} = \frac{1}{T^n} = c_m(\delta)$$

Logo, $f * g = \delta$ .

Por este teorema e o comentário que lhe precede, a equação $f * u = g$ tem uma solução para cada $g \in P'_T$ se, e somente se, $c_m(f) \neq 0$ e $\left(\dfrac{1}{c_m(f)}\right)$ é de crescimento lento.

Além do mais, já sabemos que caso exista a solução, ela é dada por $u = f^{-1} * g$ .

Porém,

$$c_m(u) = T^n c_m(f^{-1}) \cdot c_m(g) = \frac{1}{T^n} \frac{c_m(g)}{c_m(f)}$$

e daí,

$$u = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_m(g)}{c_m(f)} e_m .$$

Note que se $A = \{ m \in \mathbb{Z}^n ; c_m(f) = 0 \}$ então a equação $f * u = g$ pode ter solução, dependendo da $g$ .

Por exemplo, se $c_m(g) = 0$ para todo $m \in A$ defina

$$u = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n \setminus A} \frac{c_m(g)}{c_m(f)} e_m \quad .$$

Então ,
$$c_m(u) = \begin{cases} \dfrac{c_m(g)}{T^n \cdot c_m(f)} & \text{se} \quad m \notin A \\ 0 & \text{se} \quad m \in A \end{cases} \quad .$$

Logo, $f * u = g$ .

Neste caso não há unicidade de solução pois, basta acrescentar à $u$ qualquer $\tilde{u} \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ da forma

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{k} e_{m_j} \quad , \quad \text{onde} \quad m_j \in A \quad , \quad j = 1,\ldots,k \quad .$$

já que

$$c_m(f * \tilde{u}) = T^n c_m(f) \cdot c_m(\tilde{u}) = 0$$

pois, $c_m(f) = 0$ se $m = m_j$ , $j = 1,\ldots,k$ e $c_m(\tilde{u}) = 0$ se $m \neq m_j$ , $j = 1,\ldots,k$ .

Assim,

$$f * \tilde{u} = 0 \quad \text{e} \quad f * (u + \tilde{u}) = f * u + f * \tilde{u} = g \quad .$$

No caso em que $c_m(f) \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ e $\left(\frac{1}{c_m(f)}\right)$ não é de crescimento lento, a equação $f * u = g$ pode ter solução desde que $\left(\frac{c_m(g)}{c_m(f)}\right)$ seja uma seqüência de crescimento lento. Neste caso, a solução será dada por:

$$u = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_m(g)}{c_m(f)} e_m \quad .$$

Por exemplo, se $f \in P_T(\mathbb{R}^n)$ e $c_m(f) \neq 0$ então $\left(\frac{1}{c_m(f)}\right)$

não é de crescimento lento, porém, $f * \delta = f$ .

Já vimos que, se $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ , $a_\alpha \in \mathbb{C}$ for um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes, a equação $P(D)u = g$ , onde $g \in P'_T(\mathbb{R}^n)$ pode ser transformada em

$$u * P(D)\delta = g \quad .$$

Usando o Teorema 1 desta seção vemos que a equação admite uma única solução para cada $g$ se, e somente se, $c_m(P(D)\delta) \neq 0$ , para todo $m$ de $\mathbb{Z}^n$ e $\left(\frac{1}{c_m(f)}\right)$ for uma seqüência de crescimento lento.

Note que, definindo $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \xi^\alpha$ , $\xi \in \mathbb{R}^n$ , o símbolo de $P(D)$ , temos:

$$T^n c_m(P(D)\delta) = T^n c_m\left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \delta\right) =$$

$$= c_m\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha w^{|\alpha|} \ell^\alpha e_\ell\right) =$$

$$= c_m\left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha w^{|\alpha|} \ell^\alpha\right) e_\ell\right) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha w^{|\alpha|} m^\alpha =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha w^{|\alpha|} m^\alpha = p(w\,m) \quad .$$

No caso de existência de solução ela será dada por

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_m(q)}{p(wm)} e_m \quad .$$

EXEMPLO 2 :

Considere

$$P(D)u = u - \Delta u \quad ,$$

onde

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$$

Temos

$$p(\xi) = 1 + |\xi|^2 \geq 1$$

e

$$\frac{1}{p(w\,m)} = \frac{1}{w^2\,|m|^2 + 1} \leq 1$$

Então, para cada $g \in P_T'$

$$u = \frac{1}{T^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_m(g)}{w^2\,|m|^2 + 1}\, e_m$$

é solução de $u - \Delta u = g$ .

## 2. HIPOELITICIDADE GLOBAL

DEFINIÇÃO 1 . Seja $P$ um operador diferencial parcial com coeficientes em $P_T$ . $P$ é dito globalmente hipoelítico se $u \in P_T'$ e

$$Pu = f \in P_T \quad \text{então} \quad u \in P_T \quad .$$

TEOREMA 1 . No caso em que $P$ é um operador diferencial par

cial linear a coeficientes constantes de ordem $k$ então a Definição 1 é equivalente a :

Se $u \in C_T^k$ e $Pu = f \in P_T$ então $u \in P_T$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha que $P$ satisfaz a Definição 1 .

Se $u \in C_T^k$ e $Pu = f \in P_T$ então $u \in P_T$ pois, $C_T^k \subset P_T$ .

Suponha que $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ não satisfaz a Definição 1, isto é, existe

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e_m \in P_T' \setminus P_T$$

tal que

$$Pu = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} c_m m^\alpha a_\alpha \right) e_m = f \in P_T$$

Como $u \in P_T' \setminus P_T$ existem $L , M_1 , M_2 > 0$ e uma seqüência $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\frac{k}{(1 + |m_k|^2)^{M_1}} \leq |c_{m_k}|$$

e

$$|c_m| \leq L \, (1 + |m|^2)^{M_2} \quad , \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n .$$

Como $f \in P_T$ , para cada $M \in \mathbb{N}$ existe $K > 0$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq k} c_m m^\alpha a_\alpha \right| \leq \frac{K}{(1 + |m|^2)^M} .$$

Então, para todo $k$ de $\mathbb{N}$

$$\frac{k}{(1+|m_k|^2)^{M_1+M_2+p}} \leq \frac{|c_{m_k}|}{(1+|m_k|^2)^{M_2+p}}$$

e

$$\frac{|c_m|}{(1+|m|^2)^{M_2+p}} \leq \frac{L}{(1+|m|^2)^p} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}^n .$$

A primeira desigualdade garante que $v \notin P_T$ e a segunda, para $p$ suficientemente grande, que $v \in C_T^k$.

Assim,

$$P(v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{c_m\, m^\alpha\, a_\alpha}{(1+|m|^2)^{M_2+p}} \right) e_m = g .$$

Afirmação : $g \in P_T$.

De fato, se $M \in \mathbb{N}$ então

$$|c_m(g)| = \left| \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{c_m\, m^\alpha\, a_\alpha}{(1+|m|^2)^{M_2+p}} \right| =$$

$$= \frac{1}{(1+|m|^2)^{M_2+p}} \left| \sum_{|\alpha| \leq k} c_m\, m^\alpha\, a_\alpha \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{|\alpha| \leq k} c_m\, m^\alpha\, a_\alpha \right| \leq \frac{K}{(1+|m|^2)^M} .$$

<u>TEOREMA 2</u>. Sejam $P_1$ e $P_2$ operadores globalmente hipoelíticos. Então $P_1 \circ P_2$ também o é.

DEMONSTRAÇÃO:

Se $u \in P_T'$ e $(P_1 \circ P_2)(u) = P_1(P_2(u)) = f \in P_T$ então, por $P_1$ ser globalmente hipoelítico, $P_2u \in P_T$. Por $P_2$ ser globalmente hipoelítico, $u \in P_T$.

TEOREMA 3. Sejam $P_1$ e $P_2$ operadores diferenciais parciais com coeficientes em $P_T$.

Então,

a) Se $P_2$ não é globalmente hipoelítico então $P_1 \circ P_2$ também não é.

b) Se $P_1$ não é globalmente hipoelítico e $P_2$ é resolúvel então $P_1 \circ P_2$ não é globalmente hipoelítico.

DEMONSTRAÇÃO:

a) Existe $u \in P_T' \setminus P_T$ tal que $P_2u = f \in P_T$.

Como $P_1$ tem coeficientes em $P_T$, $P_1(P_2(u)) = P_1f \in P_T$.

Logo $P_1 \circ P_2$ não é globalmente hipoelítico.

b) Como $P_1$ não é globalmente hipoelítico existe $u \in P_T' \setminus P_T$ tal que

$P_1u = f \in P_T$.

Como $P_2$ é resolúvel, existe $v \in P_T'$ tal que $P_2v = u$. Note que $v \notin P_T$ pois, caso contrário $u = P_2v \in P_T$.

Logo,

$v \in P_T' \setminus P_T$ e $(P_1 \circ P_2)v = f \in P_T$.

<u>TEOREMA 4</u>. Seja $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ , $a_\alpha \in \mathbb{C}$ .

P é globalmente hipoelítico (GH) se, e somente se, existem números reais positivos tais que

$$\text{(LM)} \qquad |P(m)| \geq \frac{L}{(m_1^2+\ldots+m_n^2)^M}$$

para $|m|$ suficientemente grande, onde $P(m) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha m^\alpha$ .

Antes da demonstração note que a condição (LM) é equivalente a

$$|P(m)| \geq \frac{L}{|m|^{2M}} \quad , \quad \text{para} \quad |m| = |m_1|+\ldots+|m_n|$$

suficientemente grande.

Pois,

$$m_1^2+\ldots+m_n^2 \leq m_1^2+\ldots+m_n^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j\leq n}}^{n-1} |m_i|\,|m_j| =$$

$$= |m|^2 \leq m_1^2+\ldots+m_n^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j\leq n}}^{n-1} (m_i^2 + m_j^2) = n(m_1^2+\ldots+m_n^2) .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Suponha que existam b , L e M positivos tais que

$$|P(m)| \geq \frac{L}{|m|^{2M}} \qquad \text{se} \qquad |m| \geq b .$$

Assim, se $P(m) = 0$ implica que $m \in \{ m \in \mathbb{Z}^n ; |m| < b \} = A$ que é finito.

Seja $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(u) e_m \in P_T'$ tal que $Pu = f \in P_T$ .
Assim,

$$c_m(u)\, P(m) = c_m(f) \ .$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ , para todo $m \in \mathbb{Z}^n$ tal que $|m| \geq b$ , existe $C > 0$ tal que

$$|c_m(u)| = \left| \frac{c_m(f)}{P(m)} \right| \leq |c_m(f)| \ . \ \frac{|m|^{2M}}{L} \leq C \ . \ |m|^{-k}$$

pois, $c_m(f)$ é de decrescimento rápido.

Seja

$$C' = \max_{0<|m|<b} \{ C \ , \ |m|^k \ . \ |c_m(u)| \} \ .$$

Então

$$|c_m(u)| \leq C' |m|^{-k} \ , \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}^n \ , \ m \neq 0 \ .$$

Portanto, $u \in P_T$ .

Suponha que a condição (LM) seja falsa. Isto é , existe uma seqüência $(m_j) \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$|P(m_j)| \leq \frac{1}{|m_j|^{2j}}$$

e

$$|m_j^i| \to \infty \quad \text{para cada} \quad i = 1,\ldots,n \ .$$

Seja $u = \sum_{j=1}^{\infty} e_{m_j}$ .

Como

$$c_m(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = m_j \text{ , para algum } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } m \neq m_j \text{ , } j \in \mathbb{N} \text{ ,} \end{cases}$$

vemos que $u \in P_T'$ .

Além do mais, $u \notin P_T$ , já que a subseqüência $(c_{m_j}(u))$ não é de decrescimento rápido.

Porém,

$$P(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(u)\, P(m)\, e_m = \sum_{j=1}^{n} P(m_j) e_{m_j} = f$$

e

$$c_m(f) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq m_j \text{ , } j \in \mathbb{N} \\ P(m_j) & \text{se } m = m_j \text{ , para algum } j \in \mathbb{N} \text{ .} \end{cases}$$

Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ temos, para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, $m \neq 0$ que:

$$|c_m(f)| = 0 \quad \text{ou} \quad |c_m(f)| = |P(m)| \leq \frac{1}{|m|^{2k}} \text{ .}$$

De qualquer forma

$$|c_m(f)| \leq \frac{1}{|m|^{2k}} \text{ .}$$

Portanto, $f \in P_T$ .

## 3. EXEMPLOS DE OPERADORES GLOBALMENTE HIPOELÍTICOS

Considere o operador diferencial parcial

$$P = D_1 - \alpha D_2 \ , \quad \alpha \in \mathbb{C} \ , \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1,2 \ .$$

TEOREMA 1 .

a) Se $\alpha = a + ib$ , $a,b \in \mathbb{R}$ , $b \neq 0$ então $P$ é globalmente hipoelítico.

b) Se $\alpha \in \mathbb{Q}$ então $P$ não é globalmente hipoelítico.

c) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $P$ é globalmente hipoelítico se, e somente se, $\alpha$ não é um número de Liouville.

OBSERVAÇÃO: Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é de Liouville se para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $K > 0$ e uma infinidade de pares $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{K}{m^N}$ .

DEMONSTRAÇÃO:

a) Para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $|n| \geq \frac{1}{|b|}$ temos

$$|P(m,n)|^2 = |m - (a+ib)n|^2 = |m - an - ibn|^2 =$$

$$= (m - an)^2 + b^2n^2 \geq b^2n^2 \geq 1 \ .$$

Pelo Teorema 4 da seção anterior segue-se que $P$ é globalmente hipoelítico.

b) Seja $\alpha = \frac{m}{n}$ , $m, n \in \mathbb{Z}$ , $n \neq 0$ .

Então, para qualquer inteiro $\ell$ ,

$$P(\ell m, \ell n) = \ell m - \frac{m}{n} \cdot \ell n = 0 \ .$$

Como $P$ tem uma infinidade de zeros, pelo Teorema 4 segue-se que $P$ não é globalmente hipoelítico.

c) Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é de Liouville então para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $K > 0$ e uma seqüência $(n_j, m_j) \in \mathbb{Z}^2$ onde podemos supor $m_j > 0$ e $m_j \to +\infty$, tais que

$$\left|\alpha - \frac{n_j}{m_j}\right| < \frac{K}{m_j^N} .$$

Assim,

$$|P(n_j, m_j)| = |\alpha m_j - n_j| < \frac{K}{m_j^{N-1}} . \qquad (*)$$

Como $m_j \to +\infty$ quando $j \to \infty$, podemos supor que $\frac{K}{m_j^N} < 1$.

Desse modo,

$$|n_j| - |\alpha| m_j \leq |\alpha m_j - n_j| < \frac{K}{m_j^{N-1}} = m_j \frac{K}{m_j^N} < m_j .$$

Logo,

$$|n_j| \leq (1 + |\alpha|) m_j .$$

Daí,

$$n_j^2 + m_j^2 \leq [1 + (1 + |\alpha|)^2] m_j^2 ,$$

$$(n_j^2 + m_j^2)^{\frac{N-1}{2}} \leq [1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{N-1}{2}} \cdot m_j^{N-1}$$

e

$$\frac{1}{m_j^{N-1}} \leq \frac{[1 + (1 + |\alpha|^2]^{\frac{N-1}{2}}}{(n_j^2 + m_j^2)^{\frac{N-1}{2}}} .$$

De $(*)$ segue que

$$|P(n_j, m_j)| < \frac{K \cdot [1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{N-1}{2}}}{(m_j^2 + n_j^2)^{\frac{N-1}{2}}} . \qquad (**)$$

Assim, dados $L, M > 0$ tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{N-3}{2} > M$ e e $j$ suficientemente grande para que ocorra

$$\frac{K}{L} \cdot \frac{[1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{N-1}{2}}}{(m_j^2 + n_j^2)^{\frac{N-1}{2}}} < 1 .$$

Deste modo, por $(**)$

$$|P(n_j, m_j)| < \frac{K}{L} \cdot \frac{[1 + (1 + |\alpha|)^2]^{\frac{N-1}{2}}}{(m_j^2 + n_j^2)} \cdot \frac{L}{(m_j^2 + n_j^2)^{\frac{N-3}{2}}} <$$

$$< 1 \cdot \frac{L}{(m_j^2 + n_j^2)^{\frac{N-3}{2}}} \leq \frac{L}{(m_j^2 + n_j^2)^M} .$$

Portanto, $P$ não é globalmente hipoelítico.

Suponha agora que $P$ não seja globalmente hipoelítico, i.é., $P$ não satisfaz a condição (LM) do Teorema 4 da seção anterior.

Então, para todo $L > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ existe $(n_M, m_M) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $|n_M| \to \infty$, $m_M > 0$ e $m_M \to \infty$ quando $M \to \infty$ e

$$|P(n_M, m_M)| < \frac{L}{(n_M^2 + m_M^2)^M} \leq \frac{L}{m_M^{2M}} .$$

Logo,

$$|\alpha m_M - n_M| < \frac{L}{m_M^{2M}}$$

isto é,

$$|\alpha - \frac{n_M}{m_M}| < \frac{L}{m_M^{2M-1}}$$

ou seja, $\alpha$ é de Liouville.

<u>TEOREMA 2</u>. Seja $P = \sum_{j=o}^{m} a_j (\frac{\partial}{\partial x})^{m-j} (\frac{\partial}{\partial y})^j$ , $a_j \in \mathbb{C}$ um operador diferencial parcial a coeficientes constantes. Temos:

a) Se $a_o = a_m = 0$ então $P$ não é globalmente hipoelítico.

b) Se $a_o \neq 0$ ( ou $a_m \neq 0$ ) então $P$ se escreve como

$$P = a_o (\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}) \ldots (\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_m \frac{\partial}{\partial y})$$

$$( \text{ ou } \quad P = a_m (\frac{\partial}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial}{\partial x}) \ldots (\frac{\partial}{\partial y} - \beta_m \frac{\partial}{\partial x}) )$$

e $P$ não é globalmente hipoelítico se, e somente se, existe $\alpha_i$ ( ou existe $\beta_i$ ) tal que $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ (ou $\beta_i \in \mathbb{Q}$) ou $\alpha_i$ ( ou $\beta_i$ ) $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e é de Liouville.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

a) $P = \sum_{j=1}^{m-1} a_j (\frac{\partial}{\partial x})^{m-j} . (\frac{\partial}{\partial y})^j$ .

Seja $u = |\cos x| \in P'_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \setminus P_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ como $1 \leq j \leq m-1$ temos

$$(\frac{\partial}{\partial x})^{m-j} . (\frac{\partial}{\partial y})^j |\cos x| = 0 .$$

Logo

$$Pu = 0 \in P_{2\pi}(\mathbb{R}^2) .$$

b) Se $a_o \neq 0$ então

$$P(\xi,\eta) = \sum_{j=o}^{m} a_j \, \xi^{m-j} \, \eta^j = \eta^m \sum_{j=o}^{m} a_j \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{m-j} =$$

$$= \eta^m \left[ a_o \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^m + a_1 \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{m-1} + \ldots + a_m \right] =$$

$$= \eta^m a_o \left(\frac{\xi}{\eta} - \alpha_1\right) \ldots \left(\frac{\xi}{\eta} - \alpha_m\right) = a_o(\xi - \alpha_1 \eta) \ldots (\xi - \alpha_m \eta) \; .$$

e

$$P = a_o \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_m \frac{\partial}{\partial y}\right) \; .$$

Seja $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de Liouville.

Como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}\right) . \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

temos:

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_{i-1} \frac{\partial}{\partial y}\right) . \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_{i+1} \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_m \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}\right) \; .$$

Existe $u \in P_T' \setminus P_T$ tal que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}\right) u = g \in P_T \; .$$

Desse modo,

$$Pu = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_{i-1} \frac{\partial}{\partial y}\right) . \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_{i+1} \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_m \frac{\partial}{\partial y}\right) g = f \in P_T \; .$$

Assim $P$ não é globalmente hipoelítico. Agora, se para todo $i = 1,\ldots,n$ tivéssemos $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ ou $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ não de Liouville então $P_i = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial y}$ seria globalmente hipoelítico. Como a composição de operadores globalmente hipoelíticos resulta num operador globalmente hipoelítico ( Teorema 3 da seção anterior ) teríamos

$$P = P_1 \circ \ldots \circ P_m$$

globalmente hipoelítico.

Em alguns dos exemplos que seguem usaremos o fato de que se $p$ é um primo então $\alpha = \sqrt{p}$ é um irracional não de Liouville, pois, $\alpha$ é um número algébrico [ ver: [3] ] .

<u>EXEMPLO 1</u> :

Seja $\alpha = \sqrt{p}$ , $p$ primo.

Como os operadores

$$P_1 = \alpha \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad P_2 = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

são globalmente hipoelíticos, temos que

$$P = P_1 \circ P_2 = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

também o é.

<u>EXEMPLO 2</u> :

Sejam $P_2 = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , $\alpha^2 = p$ primo e $P_o = -1$ .

Então $P = P_2 + P_o = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1$ não é (GH).

De fato, $P(m,n) = n^2 - \alpha^2 m^2 - 1 = 0$ ( equação de Pell ) tem infinitas soluções [ ver: [6] ] .

Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{2}$

$$n_k = \sum_{\substack{j=o \\ j \text{ par}}}^{k} \binom{k}{j} 3^{k-j} 2^{\frac{3}{2}j}$$

$$m_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{k} \binom{k}{j} 3^{k-j} 2^{\frac{3j-1}{2}}$$

$k = 1,2,3, \ldots$

Este exemplo ilustra o fato de que se a um operador globalmente hipoelítico de segunda ordem for adicionado um operador de ordem zero, o resultado pode ser um operador não regular.

<u>EXEMPLO 3</u> :

Sejam $P_2 = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , $\alpha^2 = p$ , primo $P_1 = 2i \frac{\partial}{\partial y}$.

Então $P = P_2 + P_1$ não é globalmente hipoelítico. De fato,

$$P(m,n) = -\alpha^2 m^2 + n^2 - 2n = (n-1)^2 - \alpha^2 m^2 - 1 = 0$$

tem infinitas soluções.

No caso $\alpha = \sqrt{2}$

$$n_k = 1 + \sum_{\substack{j=o \\ j \text{ par}}}^{k} \binom{k}{j} 3^{k-j} 2^{\frac{3j}{2}}$$

$$m_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ímpar}}}^{k} \binom{k}{j} 3^{k-j} 2^{\frac{3k-1}{2}}$$

$k = 1,2, \ldots$

Assim, se adicionarmos a um operador globalmente hipoelítico de segunda ordem um operador de primeira ordem, o resultado poderá ser não globalmente hipoelítico.

EXEMPLO 4 :

Seja $P_N$ um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes reais, homogêneo, de ordem par e GH .

Se $P_1 = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ , $\alpha_j \in \mathbb{R}$ , $j = 1,2, \ldots ,n$ então $P = P_N + P_1$ é globalmente hipoelítico.

De fato, usando a condição (LM) do Teorema 4 da seção anterior, temos:

$$P(m) = P_N(m) + i\,(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n)$$

$$|P(m)| = \sqrt{(P_N(m))^2 + (\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n)^2} \geq$$

$$\geq |P_N(m)| \geq \frac{L}{|m|^{2M}}$$

para $|m|$ grande.

Logo, $P$ é globalmente hipoelítico.

Os dois exemplos que seguem mostram como que a soma de operadores de ordem um podem afetar a não hipoeliticidade global de um certo operador diferencial parcial.

EXEMPLO 5 :

Sejam $P_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ e $P_1 = -i\frac{\partial}{\partial y}$ .

$P_2$ não é globalmente hipoelítico, pois,

$$P_2|\cos y|^3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}|\cos y|^3 = 0 \in P_{2\pi}$$

e

$$|\cos y|^3 \in P'_{2\pi} \setminus P_{2\pi} .$$

Seja $P = P_2 + P_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\frac{\partial}{\partial y}$ .

Afirmação: $P$ não é globalmente hipoelítico.

De fato,

$$u = \sum_{n=o}^{\infty} \cos nx \; e^{in^2y} \in P'_{2\pi} \setminus P_{2\pi} ,$$

pois a seqüência dos coeficientes da série parcial de Fourier é de crescimento lento e não decresce rapidamente.

$$Pu = -\sum_{n=o}^{\infty} n^2 \cos nx \; e^{in^2y} - i\sum_{n=o}^{\infty} in^2 \cos nx \; e^{in^2y} =$$

$$= 0 \in P_{2\pi} .$$

EXEMPLO 6 :

Sejam $P_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ e $P_1 = \alpha\frac{\partial}{\partial y}$ , $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

Então, $P = P_2 + P_1$ é globalmente hipoelítico.

De fato,

$$P(m,n) = -m^2 + i\alpha n$$

$$|P(m,n)| = m^4 + \alpha^2 n^2 \geq m^2 + \alpha^2 n^2 \geq \min\{1,\alpha^2\}\,|(m,n)|^2 \quad .$$

O Exemplo 1 serviu para nos mostrar um operador hiperbólico que é globalmente hipoelítico. Os Exemplos 2 e 3 mostraram que a adição de operadores de ordem 0 e 1, respectivamente, ao operador do Exemplo 1 pode resultar em um operador não globalmente hipoelítico. Vejamos agora que se um operador é elítico isto não pode acontecer, i.é., qualquer operador elítico é globalmente hipoelítico (quando somamos a um operador elítico de ordem N um operador de ordem menor do que N o operador resultante será, ainda, elítico).

Seja $P = P_m + P_{m-1}$ um operador diferencial parcial elítico, onde $P_m$ é homogêneo de ordem $m$ e $P_{m-1}$ é de ordem no máximo $m-1$.

Como $P$ é elítico temos que:

$$\inf_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| = c_o > 0 \quad \text{e se} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

então

$$|P_m(\xi)| \geq c_o\,|\xi|^m \quad .$$

Também existe $M > 0$ tal que

$$|P_{m-1}(\xi)| \leq M|\xi|^{m-1} \quad \text{se} \quad |\xi| \geq 1 \quad .$$

Seja $C = \max\{1, \frac{2M}{c_o}\}$ .

Assim, se $|\xi| \geq C$

$$|P(\xi)| \geq |P_m(\xi)| - |P_{m-1}(\xi)| \geq c_o|\xi|^m - |P_{m-1}(\xi)| \quad .$$

Mas

$$- |P_{m-1}(\xi)| \geq -M|\xi|^{m-1} = -\frac{c_o}{2} \cdot \frac{2M}{c_o} |\xi|^{m-1} \geq$$

$$\geq -\frac{c_o}{2} \cdot C |\xi|^{m-1} \geq -\frac{c_o}{2} |\xi|^m \quad .$$

Logo, se $|\xi| \geq C$ temos que

$$|P(\xi)| \geq \frac{c_o}{2} |\xi|^m \quad .$$

Assim, se $\ell \in \mathbb{Z}^n$ e $|\ell| \geq C$ então

$$|P(\ell)| \geq \frac{c_o}{2} |\ell|^m \quad .$$

Logo, $P$ é globalmente hipoelítico.

## 4. UM EXEMPLO DE OPERADOR DIFERENCIAL PARCIAL A COEFICIENTES VARIÁVEIS GLOBALMENTE HIPOELÍTICO

Sejam $\phi$ , $a \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais tais que:

i) $\phi(0) \neq 0$

ii) $\phi(x) = 0$ se $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Então o operador $P$ , dado por

$$Pu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \phi^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x) \frac{\partial u}{\partial y}$$

é globalmente hipoelítico.

Tomemos as séries parciais de Fourier, com respeito a $y$, de $u$ e $f$.

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n u_n \quad \text{e} \quad f(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)\, e^{iny}$$

onde $u_n \in P'_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $f_n \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Lembremos que $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{Z}}$ é de decrescimento rápido para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora,

$$P(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [-u_n''(x) + (n^2\phi^2(x) + ina(x))\, u_n(x)]\, e^{iny} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)\, e^{iny} .$$

Logo,

$$Lu_n = [-u_n'' + (n^2\phi^2(x) + ina(x))\, u_n(x)] = f_n(x) .$$

Como o operador diferencial ordinário $L$ é hipoelítico, temos que $u_n \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Para provarmos que $u \in P_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, faremos estimativas sobre o crescimento de $(u_n)$.

Escrevamos

$$u_n(x) = u_n(t) + \int_t^x u_n'(s)\,ds ,$$

onde $t \in [-\delta, \delta]$ e $\delta > 0$ é tal que: se $t \in [-\delta, \delta]$ então $\phi^2(t) \geq \dfrac{\phi^2(0)}{2} > 0$.

Assim,

$$|u_n(x)|^2 = |u_n(t)|^2 + \left| \int_t^x u_n'(s)ds \right|^2 + 2\,|u_n(t)| \,.$$

$$\cdot \left| \int_t^x u_n'(s)ds \right| \leq 2|u_n(t)|^2 + 2\left| \int_t^x u_n'(s)ds \right|^2 \leq$$

$$\leq 2|u_n(t)|^2 + 2\left(\int_t^x |u_n'(s)|ds\right)^2 \leq 2|u_n(t)|^2 +$$

$$+ 2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(s)|ds\right)^2 \leq |u_n(t)|^2 + 2\int_{-\pi}^{\pi} ds \int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(s)|^2 ds \leq$$

$$\leq 4\pi\left(|u_n(t)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(s)|^2 ds\right) .$$

Integrando em $t$ sobre $[-\delta,\delta]$ temos:

$$2\delta|u_n(x)|^2 \leq 4\pi\left(\int_{-\delta}^{\delta} |u_n(t)|^2 dt + 2\delta\int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(s)|^2 ds\right) \leq$$

$$\leq 4\pi\left(\frac{2}{\phi^2(0)}\int_{-\delta}^{\delta} |u_n(t)|^2 \phi^2(t)dt + 2\delta\int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(s)|^2 ds\right) \leq$$

$$\leq 4\pi\left(\frac{2}{\phi^2(0)}\int_{-\pi}^{\pi} |u_n(t)|^2 \phi^2(t)dt + 2\delta\int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(s)|^2 ds\right) \leq$$

$$\leq cte\int_{-\pi}^{\pi} \left(|u_n(t)|^2\phi^2(t) + |u_n'(t)|^2\right) .$$

Se chamarmos

$$\|u_n\|_\phi = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(|u_n(t)|^2\phi^2(t) + |u_n'(t)|^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

então poderemos dizer que existe $C > 0$ tal que

$$|u_n(x)| \leq C\,\|u_n\|_\phi \,.$$

Se multiplicamos a equação $Lu_n = f_n$ por $\bar{u}_n$ e integramos sobre $[-\pi,\pi]$ obteremos:

$$- \int_{-\pi}^{\pi} u_n''(x)\overline{u_n}(x)\,dx + n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \phi^2(x)\,|u_n(x)|^2\,dx +$$

$$+ \text{in} \int_{-\pi}^{\pi} a(x)\,|u_n(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\overline{u_n}(x)\,dx \qquad (*)$$

Mas,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n''(x)\overline{u_n}(x)\,dx = u_n'(x)\overline{u_n}(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u_n'(x)\,\overline{u_n'(x)}\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |u_n'(x)|^2\,dx \ .$$

Assim, $(*)$ se reescreve como:

$$\|u_n\|_\phi^2 + \text{in} \int_{-\pi}^{\pi} a(x)\,|u_n(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\,\overline{u_n}(x)\,dx \ .$$

Definamos $\|g\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}$ e observemos que existe $C > 0$ tal que

$$\|g\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx \leq C\,\|g\|_\phi^2 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi C\,\|g\|_\phi^2 \ .$$

Podemos escrever

$$\|u_n\|_\phi^4 \leq \|u_n\|_\phi^4 + n^2 \left( \int_{-\pi}^{\pi} a(x)\,|u_n(x)|^2\,dx \right)^2 =$$

$$= \left| \ \|u_n\|_\phi^2 + \text{in} \int_{-\pi}^{\pi} a(x)\,|u_n(x)|^2\,dx \ \right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\,\overline{u_n}(x)\,dx \right|^2 \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^2\,dx \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(x)|^2 dx \right)^2 =$$

$$= \|f_n\|_2^2\ \|u_n\|_2^2 \leq C^2\,\|f_n\|_2^2 \cdot \|u_n\|_\phi^2 \quad \text{para algum } C > 0 \ .$$

Logo, se $u_n \neq 0$ ,

$$\|u_n\|_\phi \leq C \|f_n\|_2 .$$

Estamos agora em condições de mostrar que $(u_n)$ é de decrescimento rápido.

Seja $k \in \mathbb{N}$ então

$$|u_n(x)| \leq cte \|u_n\|_\phi \leq cte \|f_n\|_2 \leq \frac{cte}{(1+|n|)^k} .$$

Pois, como $f_n$ é de decrescimento rápido,

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^2 dx \leq \frac{cte}{(1+|n|)^{2k}} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{cte}{(1+|n|)^{2k}} .$$

Mostremos agora que $(u_n')$ é de decrescimento rápido.

Seja $v_n = u_n'$ .

Então,

$$L v_n(x) = -v_n''(x) + (n^2 \phi^2(x) + ina(x)) v_n(x) =$$

$$= -u_n'''(x) + (n^2 \phi^2(x) + ina(x)) u_n'(x) =$$

$$= \frac{d}{dx} [-u_n''(x) + (n^2 \phi^2(x) + ina(x)) u_n(x)] -$$

$$- [2n^2 \phi(x)\phi'(x) + ina'(x)] u_n(x) =$$

$$= f_n'(x) - [2n^2 \phi(x)\phi'(x) + ina'(x)] u_n(x) .$$

Mas,

$$|(2n^2\phi(x)\phi'(x) + ina'(x)| \; |u_n(x)| \leq C . n^2 . |u_n(x)|$$

e como $(n^2 u_n)$ e $(f_n')$ são de decrescimento rápido, segue-se que

$$g_n(x) = f_n'(x) - [\, 2n^2 \phi(x)\phi'(x) + ina'(x) \,] \,.\, u_n(x)$$

também é de decrescimento rápido.

Logo, $v_n$ é tal que $Lv_n = g_n$ , onde $g_n$ é de decrescimento rápido.

Portanto, usando o mesmo argumento que foi utilizado para mostrar que $u_n$ era de decrescimento rápido, concluímos que $v_n$ decresce rapidamente.

Para mostrar que $u_n^{(k)}$ é de decrescimento rápido procederemos por indução sobre $k \in \mathbb{N}$ .

Notemos que, se $v_n = u_n^{(k)}$ então

$$Lv_n(x) = - u_n^{(k+2)}(x) + ( n^2 \phi^2(x) + ina(x) ) u_n^{(k)}(x) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^k [ - u_n''(x) + ( n^2 \phi^2 (x) + ina(x) u_n(x) ] -$$

$$- \sum_{j=o}^{k-1} \binom{k}{j} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} ( n^2 \phi^2(x) + ina(x) ) \left(\frac{d}{dx}\right)^j u_n(x) =$$

$$= f_n^{(k)}(x) - \sum_{j=o}^{k-1} \binom{k}{j} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} ( n^2 \phi^2(x) + ina(x) ) \left(\frac{d}{dx}\right)^j u_n(x) =$$

$$= g_n(x) \,.$$

Se admitirmos que $\left(\frac{d}{dx}\right)^j u_n(x)$ é de decrescimento rápido para $j = 0,1,\ldots,k-1$ então $g_n$ também o será.

Assim $Lv_n = g_n$ , $g_n$ de decrescimento rápido.

Usando as estimativas

$$|v_n(x)| \leq \text{cte}\, \|v_n\|_\phi \leq \text{cte}\, \|g_n\|_2 \leq \text{cte}\, (1+|n|)^{-p}$$

para cada $p \in \mathbb{N}$ e todo $n \in \mathbb{N}$ concluímos que $u_n^{(k)} = v_n$ decresce rapidamente.

Logo, $U(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)\, e^{iny}$ é de classe $C^\infty$ .

## 5. OUTROS EXEMPLOS

Nesta seção apresentaremos duas famílias de operadores diferenciais parciais lineares, ambas indexadas em $[0,1]$ , cujos elementos são quase sempre globalmente hipoelíticos.

EXEMPLO 1 :

Considere a família

$$(P_\alpha)_{\alpha \in [0,1]} \qquad \text{onde} \qquad P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \quad .$$

Já sabemos que $P_\alpha$ é globalmente hipoelítico se, e somente se, $\alpha \in [0,1]$ é irracional não de Liouville.

Como o conjunto dos números de Liouville tem medida nula [ ver: [8] ] concluímos que $P_\alpha$ é globalmente hipoelítico para quase todo $\alpha$ .

EXEMPLO 2 :

Seja $Q = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha$ , $a_\alpha \in \mathbb{R}$ .

Então para quase todo $a \in [0,1]$ $P = Q + a$ é globalmente hipoelítico.

Se $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ é tal que $|Q(m,n)| \geq 2$ então

$$|P(m,n)| = |Q(m,n) + a| \geq |Q(m,n)| - |a| \geq 1 \quad .$$

Seja

$$A = \{ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \; ; \; |Q(m,n)| < 2 \} = \{ (m_j,n_j) \in \mathbb{Z}^2 \; , \; j \in \mathbb{N} \}$$

onde

$$|m_j| + |n_j| \leq |m_{j+1}| + |n_{j+1}|$$

Considere

$$f_k(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}\,(n_j^2 + m_j^2)^2} \quad .$$

Para cada $(m_j,n_j) \in A$ a função $g_j(a) = \dfrac{1}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}}$ é integrável em $[0,1]$, pois, se $Q(m_j,n_j) \notin [-1,0]$ ela é contínua e, caso contrário,

$$\int_0^1 \frac{da}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}} = \lim_{b \to -Q(m_j,n_j)_-} \int_0^b \frac{da}{\sqrt{-Q(m_j,n_j) - a}} +$$

$$+ \lim_{b \to -Q(m_j,n_j)_+} \int_b^1 \frac{da}{\sqrt{a + Q(m_j,n_j)}} =$$

$$= 2\,[\sqrt{-Q(m_j,n_j)} + \sqrt{1 + Q(m_j,n_j)}] \quad .$$

Também, para todo $j$ vale:

$$\left| \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}} \right| \leq 2\,[\sqrt{(Q(m_j,n_j)} + \sqrt{|1 + Q(m_j,n_j)|} \quad .$$

Temos que

$$f_k(a) \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}\ (m_j^2 + n_j^2)^2}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona

$$\int_0^1 \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|} \cdot (m_j^2 + n_j^2)^2} \right) da =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}\ (m_j^2 + n_j^2)^2} \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|1 + Q(m_j,n_j)|} + \sqrt{|Q(m_j,n_j)|}}{(m_j^2 + n_j^2)^2} \leq$$

$$\leq 2\,(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \sum \frac{1}{(m_j^2+n_j^2)^2} \leq 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} < \infty .$$

Pois,

$$|Q(m_j,n_j)| < 2 \qquad \text{e} \qquad |1 + Q(m_j,n_j)| < 3 .$$

Assim, para quase todo $a \in [0,1]$ a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}\ (m_j^2 + n_j^2)^2}$$

é finita.

Logo, existe $M_a > 0$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{|a + Q(m_j,n_j)|}\ (m_j^2 + n_j^2)^2} \leq M_a .$$

Ou seja,

$$|P(m_j,n_j)| = |a + Q(m_j,n_j)| \geq \frac{1}{M_a^2(m_j^2 + n_j^2)^4} \quad .$$

Seja $L_a = (\max\{M_a^2, 1\})^{-1}$ . Então, se $(m,n) \neq (0,0)$

$$|P(m,n)| \geq 1 \geq L_a|(m,n)|^{-8} \quad \text{se} \quad (m,n) \notin A$$

$$|P(m,n)| \geq L_a|(m,n)|^{-8} \quad \text{se} \quad (m,n) \in A \quad .$$

Logo,

$$|P(m,n)| \geq L_a|(m,n)|^{-8} \ , \quad \forall\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad .$$

# A P Ê N D I C E

Vimos na seção 5 do Capítulo I que $s = s(\mathbb{Z}^n;\mathbb{C})$ é isomorfo a $P_T = P_T(\mathbb{R}^n)$ e que $s' = s'(\mathbb{Z}^n;\mathbb{C})$ é isomorfo a $P'_T = P'_T(\mathbb{R}^n)$. Neste apêndice mostraremos que $s$ é homeomorfo a $P_T$ bem como $s'$ a $P'_T$.

Consideraremos em $s$ as semi-normas

$$p_k(c) = \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} (1 + |m|)^k \, |c_m| \quad ,$$

onde $c = (c_m) \in s$ e $k = 0,1,2,\ldots$ .

$s$ é metrizável através da distância

$$d(c,b) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{p_k(c-b)}{2^k(1 + p_k(c-b))} \quad .$$

Em $P_T$ usaremos as semi-normas usuais

$$p_k(\phi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha \phi(x)| \quad .$$

Considere o isomorfismo algébrico $A : s \to P_T$ dado por $A(c) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m \, e_m$ .

Seja $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $s$, onde $c_j = (c_{m,j})_{m \in \mathbb{Z}^n}$, tal que $c_j \to 0$ em $s$, i.é., para cada $k \in \mathbb{N}$ $p_k(c_j) \to 0$ quando $j \to \infty$ .

Sejam $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ .

Assim, se $|\alpha| \leq k$

$$|D^\alpha A(c_j)| = |\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} m^\alpha c_{m,j} e_m| \leq$$

$$\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |m^\alpha| \, |c_{m,j}| \leq \text{cte} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (1 + |m|)^k \, |c_{m,j}| \; .$$

Porém, existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_o$ então

$$(1 + |m|)^{n+1+k} \, |c_{m,j}| \leq p_{n+1+k}(c_j) < \varepsilon \; .$$

Logo, para $j \geq j_o$

$$|D^\alpha A(c_j)| \leq \text{cte}\ \varepsilon \, . \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1 + |m|)^{n+1}} \; .$$

Portanto, $P_k(A(c_j)) \to 0$ quando $j \to \infty$ .

Assim, $A$ é contínuo.

Mostremos agora que

$$A^{-1} : P_T \longrightarrow s$$

$$\phi \longmapsto (c_m(\phi)) \qquad \text{é contínuo.}$$

Seja $(\phi_j)$ uma seqüência de $P_T$ tal que $\phi_j \to 0$ em $P_T$ .

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ temos

$$|m^\alpha c_m(\phi_j)| = |\frac{1}{T^n} \int_{[0,T]^n} \phi_j(x) \, m^\alpha \, e^{iwmx} \, dx| =$$

$$= \frac{1}{T^n \, w^{|\alpha|}} \, |\int_{[0,T]^n} \phi_j(x) \, D^\alpha \, e^{iwmx} \, dx| =$$

$$= \frac{1}{T^n w^{|\alpha|}} \left| \int_{[0,T]^n} D^\alpha \phi_j(x) \cdot e^{iwmx} \, dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T^n w^{|\alpha|}} \int_{[0,T]^n} |D^\alpha \phi_j(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{w^{|\alpha|}} \sup |D^\alpha \phi_j(x)| \, .$$

Assim, se $|\alpha| \leq k$

$$(1 + |m|)^k \, |c_m(\phi_j)| = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} |m|^\ell \, |c_m(\phi_j)| =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \left( \sum_{|\beta|=\ell} \frac{\ell!}{\beta!} |m^\beta| \right) |c_m(\phi_j)| =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{|\beta|=\ell} \binom{k}{\ell} \frac{\ell!}{\beta!} |m^\beta c_m(\phi_j)| \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{|\beta|=\ell} \binom{k}{\ell} \frac{\ell!}{\beta!} \frac{1}{w^{|\beta|}} \sup |D^\beta \phi_j| \to 0$$

quando $j \to \infty$ .

Logo, $p_k(A^{-1}(\phi_j)) \to 0$ quando $j \to \infty$ e, portanto , $A^{-1}$ é contínuo.

Antes de mostrarmos que $s'$ é homeomorfo a $P_T'$ mostremos que $s'$ é homeomorfo a $s^*$ , o dual de $s$ .

Considere a aplicação

$$L : s' \longrightarrow s^*$$

$$c \longmapsto L(c)$$

dada por $< L(c) , d > = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m d_m$ onde $c = (c_m) \in s'$ e $d = (d_m) \in s$ .

$L(c)$ está bem definido pois existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|c_m| \leq C (1 + |m|)^k$ . Também existe $C' > 0$ tal que $|d_m| \leq C' (1 + |m|)^{-k-n-1}$ .

Logo, $|c_m d_m| \leq C . C' (1 + |m|)^{-n-1}$ .

É fácil verificar que $L$ é linear.

$L$ é sobrejetora pois, se $f \in s^*$ considere $c_m = <f, \tilde{e}_m>$ e $c = (c_m)$ , onde $\tilde{e}_m = (\tilde{e}_{m,j})$ e $\tilde{e}_{m,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = j \\ 0 & \text{se } m \neq j \end{cases}$ .

Como $f \in s^*$ , i.é., $f : s \to \mathbb{C}$ é linear e contínuo existe semi-norma $p_k$ de $s$ tal que $|<f,d>| \leq C . p_k(d)$ para $C > 0$ para toda $d \in s$ .

Assim,

$$|c_m| = |<f , \tilde{e}_m>| \leq c . p_k(\tilde{e}_m) = c . \sup_{j \in \mathbb{N}^n} (1 + |j|)^k .$$

$$. |\tilde{e}_{m,j}| = C . (1 + |m|)^k .$$

Logo $c \in s'$ e

$$< L(c) , d > = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m d_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} < f , \tilde{e}_m > dm = <f,d> .$$

$L$ é injetora pois, se $c \in s'$ e $c = (c_m) \neq 0$ então $c_m \neq 0$ para algum $m \in \mathbb{Z}^n$ . Assim,

$$< L(c) , \tilde{e}_m > = c_m \neq 0 \quad , \quad \text{i.é.} , \quad L(c) \neq 0 .$$

Portanto, $L$ é um isomorfismo entre $s'$ e $s^*$ .

$$|(\tilde{B}(f_j), \theta)| = |(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f_j, \tilde{e}_m \rangle e_m, \theta)| =$$

$$= |\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f_{m,j} (e_m, \theta)| = T^n |\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f_{m,j} \, c_m(\theta)| =$$

$$= T^n q_d(f_j) \to 0$$

quando $j \to \infty$ .

Logo, $Q_\theta(\tilde{B}(f_j)) \to 0$ quando $j \to \infty$ e, portanto, $\tilde{B}$ é contínuo.

Mostremos que

$$\tilde{B}^{-1} : P'_T \longrightarrow s^*$$

$$u \longmapsto f$$

onde, para cada $d = (d_m) \in s$

$$\langle \tilde{B}^{-1}(u), d \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(u) d_m \quad \text{é contínuo.}$$

Seja $u_j \to 0$ em $P'_T$ .

Para cada $d \in s$ existe $\theta \in P_T$ tal que $d_m = c_m(\theta)$ .

Assim,

$$q_d(\tilde{B}^{-1}(u_j)) = |\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(u_j) d_m| =$$

$$= T^n |\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(u_j) (\theta, e_m)| =$$

$$= T^n |(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m(u_j) e_m, \theta)| = T^n |(u_j, \theta)| =$$

$$= T^n Q_\theta(u_j) \to 0 \qquad \text{quando} \quad j \to \infty \ .$$

Logo, $\tilde{B}^{-1}$ é contínuo.

# B I B L I O G R A F I A


[ 1 ] DUGUNDJI, J. - "Topology", Allyn and Bacon, Inc., Boston.

[ 2 ] EDWARDS, R.E. - "Fourier Series - A Modern Introduction", vol. I,II, Holt, Rinehart and Winton, Inc., EUA, 1967.

[ 3 ] FIGUEIREDO, D.G. - "Números Irracionais e Transcendentes", IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

[ 4 ] FUJIWARA, D. and OMORI, H. - "An Example of a Globally Hypoelliptic Operator", Hokkaido Mathematical Journal, 12 (1983), 293-297.

[ 5 ] GREENFIELD, S.J. and WALLACH, N.R.-"Global Hipoellipticity and Liouville Numbers",Proc. Amer. Math. Soc., 31 (1972), 112-114.

[ 6 ] GRIFFIN, H. - "Elementary Theory of Numbers", Mc. Graw--Hill Book Co., N. York, 1954, 172-176.

[ 7 ] HOUNIE, J. - "Teoria Elementar das Distribuições", 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[ 8 ] MAÑÉ, R. - "Introdução à Teoria Ergódica", Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1984.

[ 9 ] SANTOS NETO, C. - "Distribuições Periódicas e Hipoelitici dade", Dissertação de Mestrado, ICMSC, 1985.

[10] SCHWARTZ, L. - "Méthodes Mathématiques pou les sciences physiques", 2ª ed., Hermann, Paris, 1965.

[11] ZEMANIAN, A.H. - "Distribution Theory and Transform Analysis", Mc. Graw-Hill, N. York.