UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Subvariedades com fibrado normal flat em espaços produto

Estela Garcia

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Estela Garcia

Subvariedades com fibrado normal flat em espaços produto

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fernando Manfio

USP – São Carlos
Março de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G216s

Garcia, Estela
Subvariedades com fibrado normal flat em espaços produto / Estela Garcia; orientador Fernando Manfio. -- São Carlos, 2023.
64 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Fibrado normal flat. 2. Subvariedades Einstein. 3. Curvatura média paralela. 4. Classe A. 5. Espaços produto. I. Manfio, Fernando, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Estela Garcia

Submanifolds with flat normal bundle in product spaces

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Fernando Manfio

USP – São Carlos
March 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Leonirdo e Rosa, por mais que a distância nos separem, tenho certeza que estão e sempre estarão torcendo por mim. Agradeço ao meu irmão Estevan e meu irmão de coração Ricardo, pelo apoio, cuidado e companheirismo de toda a vida.

Agradeço a minha turma do doutorado, Estefani, Eder e Javier, os quais estiveram por perto nos momentos difíceis e também nos diversos momentos de alegria.

Agradeço aos professores do ICMC que tive contato durante o doutorado e que contribuíram na minha jornada. Especialmente ao meu orientador, Fernando Manfio, pelo incentivo, ideias, conversas, conselhos e ensinamentos.

Por fim, agradeço ao auxílio financeiro da CAPES e do CNPq.

"A beleza da matemática só
se mostra aos seguidores mais pacientes."
(Maryam Mirzakhani)

RESUMO

GARCIA, E. **Subvariedades com fibrado normal flat em espaços produto**. 2023. 64 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho apresentamos alguns resultados da teoria de subvariedades em espaços produto do tipo $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. No primeiro resultado central estudamos subvariedades em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ que admitem campos normais principais. Provamos que o correspondente autoespaço é uma distribuição esférica e estudamos o comportamento das correspondentes folhas. Em nosso segundo resultado obtemos uma classificação daquelas subvariedades com fibrado normal flat e que admitem, exatamente, duas normais principais distintas. Finalmente, em nosso terceiro resultado principal, realizamos um estudo sobre subvariedades Einstein com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo, estendendo o trabalho de Onti (ONTI, 2018) em espaços de forma.

Palavras-chave: Fibrado normal flat, Subvariedades Einstein, Curvatura média paralela, Classe $\mathscr{A}$, Espaços produto.

ABSTRACT

GARCIA, E. **Submanifolds with flat normal bundle in product spaces**. 2023. 64 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work we prove some results in submanifold theory for isometric immersions into product spaces $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. In our first main theorem we study submanifols in $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ carrying a principal curvature normal. We prove that the corresponding eigenbundle is a spherical distribution. Moreover, we study the behavior of the corresponding leaves. In our second main result, we get a classification of those submanifolds with flat normal bundle and that have exactly two distinct principal normal vector fields. Finally, in our third main result, we carry out a study about Einstein submanifolds with flat normal bundles and parallel mean curvature vector vector, extending the work in space forms by Onti (ONTI, 2018).

Keywords: Flat normal bundle, Einstein submanifolds, Parallel mean curvature, Class $\mathscr{A}$, Product spaces.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A teoria de subvariedades surgiu como um desenvolvimento natural do estudo clássico de curvas e superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, e desde então essa teoria sempre focou no estudo das propriedades gerais de imersões isométricas de variedades Riemannianas em espaços de forma $\mathbb{Q}_c^n$. Nos últimos anos, com as contribuições recentes de alguns autores (DANIEL, 2009), (LIRA; TOJEIRO; VITÓRIO, 2010), (PICCIONE; TAUSK, 2008), com as quais foi possível obter teoremas do tipo Bonnet para imersões isométricas em espaços mais gerais, foi possível vislumbrar uma teoria de subvariedades em espaços produto do tipo $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, e vários resultados têm sido obtidos.

Dado uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, dois campos vetoriais surgem naturalmente: um campo tangente T e um campo normal η, que são obtidos pelas projeções ortogonais do campo unitário $\frac{\partial}{\partial t}$, que gera o fator $\mathbb{R}$, sobre os fibrados tangente e normal de f, respectivamente. Um problema básico que surge é o de determinar as imersões isométricas f para os quais o campo tangente T é direção principal de todos os operadores de forma. O caso de hipersuperfícies é particularmente interessante, pois esta propriedade é equivalente à hipersuperfície M^m, quando vista no ambiente flat $\mathbb{E}^{m+2}$ com codimensão igual a 2, ter fibrado normal flat. Este fato foi provado por Tojeiro em (TOJEIRO, 2010), e tal classe de hipersuperfícies foi denominada de *classe* $\mathscr{A}$. Exemplos importantes de hipersuperfícies que pertencem a essa classe especial estão as hipersuperfícies rotacionais (DILLEN; FASTENAKELS; VEKEN, 2009), hipersuperfícies de curvatura seccional constante (MANFIO; TOJEIRO, 2011), hipersuperfícies de ângulo constante (TOJEIRO, 2010) e hipersuperfícies de Einstein (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021). O caso de codimensão maior do que 1 é um pouco mais delicado, pois envolve uma condição adicional. No entanto, algumas classes já têm sido estudadas, como as subvariedades rotacionais (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014), subvariedades de curvatura seccional constante (CANEVARI; TOJEIRO, 2020) e subvariedades biconservativas (MANFIO; TURGAY; UPADHYAY, 2019).

Uma classe importante de subvariedades, que estende naturalmente aquelas de curvatura seccional constante, é aquela constituída das subvariedades de Einstein. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser uma *variedade de Einstein* se $Ric(g) = \lambda g$, para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Variedades com curvatura seccional constante c são exemplos simples de variedades de Einstein; neste caso, tem-se $\lambda = c(n-1)$. Reciprocamente, para o caso $n = 3$, toda variedade Riemanniana conexa e de Einstein tem curvatura seccional constante.

Uma subvariedade $f : M^m \to \tilde{M}^n$ é dita ser uma *subvariedade de Einstein* se a variedade M^m, com a métrica induzida, é uma variedade de Einstein. Hipersuperfícies de Einstein em espaços de forma são bem conhecidas. Por exemplo, para uma hipersuperfície de Einstein $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, a constante λ é sempre não-negativa. Além disso, se $\lambda = 0$ então M^n é localmente isométricas a $\mathbb{R}^n$, e se $\lambda > 0$, M^n está contida em uma esfera (ver Seção 5.1 para mais detalhes). Mais recentemente, Onti apresentou em (ONTI, 2018) uma classificação de subvariedades de Einstein em espaços de forma, com fibrado normal flat e curvatura média paralela.

Em espaços produtos $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, o estudo das subvariedades de Einstein é mais recente. Em (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021), Leandro-Pina-dos Santos provaram que toda hipersuperfícies de Einstein em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ tem curvatura seccional constante. De fato, o resultado central de (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021) é que toda hipersuperfícies de Einstein em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ pertence à classe $\mathscr{A}$. Mais recentemente, Lima-Manfio-dos Santos consideraram em (LIMA; MANFIO; SANTOS, 2022) hipersuperfícies de Einstein em produtos warped $I \times_\omega \mathbb{Q}^n_\varepsilon$. Um dos resultados centrais de (LIMA; MANFIO; SANTOS, 2022) é que, para toda constante $c \in \mathbb{R}$ (resp. $c > 0$), existem hipersuperfícies rotacionais de curvatura seccional constante c em $I \times_\omega \mathbb{H}^n$ e $I \times_\omega \mathbb{R}^n$ (resp. $I \times_\omega \mathbb{S}^n$).

O resultado central dessa tese é um estudo acerca de subvariedades de Einstein em espaços produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo. O teorema generaliza o resultado central de (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021) e, além disso, nos dá uma extensão natural do resultado de Onti (ONTI, 2018). Mais precisamente, obtemos o seguinte

Teorema 1.1. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma subvariedade Einstein, $m \geq 3$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo. Então, $\tilde{f}$ é, localmente, um produto warped de imersões isométricas.

Nosso segundo resultado central dessa tese é uma classificação parcial das subvariedades em espaços produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ que admitem duas normais principais distintas.

Teorema 1.2. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat. Assuma que f tem exatamente dois normais principais ξ_1 e ξ_2, que são linearmente independentes e de Dupin. Se $\eta = \phi(\xi_1 - \xi_2)$, com $\phi \in C^\infty(M)$, então $f = i \circ g$, onde $g : M^m \to \mathbb{Q}^m_{\tilde{c}} \times \mathbb{R}$ é uma cíclide de Dupin e $i : \mathbb{Q}^m_{\tilde{c}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ é uma inclusão umbílica.

Finalmente, o terceiro resultado central dessa tese é um teorema acerca de subvariedades em espaços produto que admitem normais principais de Dupin. Mais precisamente,

Teorema 1.3. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica que admite um campo normal principal de Dupin $\xi \in TM^\perp$ não-nulo, e com multiplicidade $q \geq 2$. Então, E_ξ é uma distribuição esférica e f transforma as folhas de E_ξ em esferas extrínsecas de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Reciprocamente, se E_ξ é uma distribuição esférica e f transforma as folhas de E_ξ em esferas extrínsecas de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, então ξ é um campo normal principal de Dupin.

Faremos a seguir uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo.

O Capítulo 2 tem como objetivo apresentar ao leitor uma breve introdução a teoria das subvariedades. Destacamos os temas mais recorrentes nesta tese e que são necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

No Capítulo 3, tratamos das imersões isométricas no espaço produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Destacamos as equações de Gauss, Codazzi, Ricci e mais duas equações, as quais definem a métrica (a menos de isometrias) e por isso são chamadas de equações fundamentais. Em seguida destacamos os resultados relacionados a classe $\mathscr{A}$ que aparecem em diversos artigos aqui citados, especialmente (TOJEIRO, 2010) e (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014). Por fim, apresentamos os primeiros resultamos desta tese, para imersões em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ com fibrado normal flat.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo dos normais principais. Conhecer as propriedades das distribuições associadas a um normal principal é uma boa ferramenta para entender a geometria da subvariedade. Aqui apresentamos uma demonstração intrínseca para o produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ de um resultado bem conhecido em espaços de formas (DAJCZER; TOJEIRO, 2019, Proposição 1.22).

No Capítulo 5, provamos que subvariedades Einstein na classe $\mathscr{A}$ de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat e curvatura média paralela são localmente isométricas a uma métrica produto warped $\Pi_{i=1}^s M_i$, onde cada M_i é umbílica (veja Teorema 5.4). Por fim, provamos que toda subvariedade de Einstein em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo, quando vista no ambiente flat, é um produto warped de imersões isométricas.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as noções básicas da teoria de subvariedades e fixaremos as notações que serão utilizadas ao longo do texto. O leitor interessado pode consultar mais detalhes em (DAJCZER; TOJEIRO, 2019).

2.1 Imersões isométricas

Uma aplicação diferenciável $f: M^m \to \tilde{M}^n$ entre variedades Riemannianas é dita ser uma *imersão* se a diferencial $df(x): T_xM \to T_{f(x)}\tilde{M}$ é uma aplicação injetora, para todo $x \in M^n$. Uma imersão $f: M^m \to \tilde{M}^n$ entre variedades Riemannianas é chamada uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y \rangle = \langle f_*X, f_*Y \rangle, \tag{2.1}$$

para quaisquer $x \in M$ e $X, Y \in T_xM$. Na equação (2.1) fica subentendido que f_*X significa $df(x) \cdot X$.

Se $f: M^m \to \tilde{M}^n$ é simplesmente uma imersão e $\langle , \rangle$ é uma métrica Riemanniana em $\tilde{M}$, a relação (2.1) define uma métrica Riemanniana em M, chamada a *métrica induzida* por f, em relação a qual f torna-se uma imersão isométrica. O número $p = n - m$ é chamado de *codimensão* de f. É usual nos referirmos a f ou a $f(M)$ como subvariedade.

Dado uma imersão isométrica $f: M \to \tilde{M}$, denotaremos por $f^*T\tilde{M}$ o fibrado vetorial induzido sobre M, cuja fibra no ponto $x \in M$ é $T_{f(x)}\tilde{M}$. O complemento ortogonal de f_*T_xM em $T_{f(x)}\tilde{M}$ é chamado o *espaço normal* de f em x, e será denotado por $T_xM^\perp$. O *fibrado normal* $TM^\perp$ de f é o subfibrado vetorial de $f^*T\tilde{M}$ cuja fibra em um ponto $x \in M$ é $T_xM^\perp$.

A conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{M}$ induz uma única conexão $\hat{\nabla}$ em $f^*T\tilde{M}$ de modo que

$$\hat{\nabla}_X(Z \circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X} Z,$$

para quaisquer $x \in M$, $X \in T_xM$ e $Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Identificaremos as conexões $\hat{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$, e denotaremos a primeira também por $\tilde{\nabla}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos decompor

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T + (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\perp,$$

em relação à decomposição ortogonal

$$f^*T\tilde{M} = f_*TM \oplus TM^\perp.$$

É fácil verificar que a aplicação

$$\nabla_X Y = f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_*Y)^T$$

define uma conexão simétrica e compatível com a métrica de M e, portanto, coincide com a conexão de Levi-Civita de M.

Definição 2.1. A aplicação $\alpha_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(TM^\perp)$ definida por

$$\alpha_f(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\perp$$

é chamada a segunda forma fundamental de f.

Obtemos, assim, a equação

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha_f(X,Y), \tag{2.2}$$

conhecida como *fórmula de Gauss* da imersão f. Observe que, como

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y - \tilde{\nabla}_Y f_*X = f_*[X,Y],$$

segue que α_f é simétrica. Além disso, α_f é $C^\infty(M)$-linear, logo o valor de $\alpha_f(X,Y)$ em um ponto $x \in M$ depende somente dos valores de X e Y em x.

O *operador de forma* de f num ponto $x \in M$, e em relação a um vetor $\xi \in T_xM^\perp$, é o operador linear $A_\xi : T_xM \to T_xM$ definido pondo

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha_f(X,Y), \xi\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in TM^\perp$, temos:

$$\langle \tilde{\nabla}_X \xi, f_*Y\rangle = -\langle \xi, \tilde{\nabla}_X f_*Y\rangle = -\langle \xi, \alpha_f(X,Y)\rangle = -\langle A_\xi X, Y\rangle.$$

Assim, a componente tangente de $\tilde{\nabla}_X \xi$ é $-f_*A_\xi X$. Por outro lado, a componente normal

$$\nabla_X^\perp \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$$

define uma conexão compatível em $TM^{\perp}$, chamada a *conexão normal* de f. Com isso, podemos escrever a equação

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_* A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi, \tag{2.3}$$

conhecida como a *fórmula de Weingarten*.

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, podemos obter as equações de compatibilidade de uma dada imersão isométrica $f : M \to \tilde{M}$. Mais precisamente, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$R(X,Y)Z = (\tilde{R}(X,Y)Z)^T + A_{\alpha_f(Y,Z)}X - A_{\alpha_f(X,Z)Y}, \tag{2.4}$$

$$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z), \tag{2.5}$$

e

$$(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi - \alpha(X, A_\xi Y) + (A_\xi X, Y), \tag{2.6}$$

onde

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

As equações (2.4), (2.5) e (2.6) são conhecidas como *equações de Gauss*, *Codazzi* e *Ricci*, respectivamente. Tomando o produto interno em ambos os lados da equação de Ricci (2.6), com $\eta \in \Gamma(N_f M)$, obtemos a seguinte forma equivalente da equação de Ricci,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle. \tag{2.7}$$

Por outro lado, calculando a componente tangente de $\tilde{R}(X,Y)\xi$, obtemos

$$(\tilde{R}(X,Y)\xi)^T = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi), \tag{2.8}$$

onde

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X.$$

É fácil ver que (2.8) é apenas uma forma equivalente da equação de Codazzi (2.5).

Uma variedade Riemanniana completa, conexa e com curvatura seccional constante é usualmente chamada de *espaço de forma*. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, a esfera $\mathbb{S}^n_c$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n_c$ são os únicos espaços de forma simplesmente conexos, e aqui serão denotados por $\mathbb{Q}^n_c$. No caso em que o espaço ambiente $\tilde{M}^m = \tilde{M}^m_c$ tem curvatura seccional constante, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci se simplificam. A *equação de Gauss* torna-se

$$R(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y,$$

onde

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y,$$

ou equivalentemente,

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X\wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(Y,Z), \alpha(X,W)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle.$$

As duas versões equivalentes da *equação de Codazzi* são:

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z)$$

e

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi).$$

A *equação de Ricci* reduz-se a

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X,A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X,Y),$$

ou equivalentemente,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle. \tag{2.9}$$

Supondo que M^m seja simplesmente conexa, o seguinte resultado, conhecido como *Teorema fundamental das subvariedades*, diz que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci determinam completamente uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon$, a menos de isometrias de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon$.

Teorema 2.2. Sejam M^m uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, E um fibrado vetorial Riemanniano de rank k sobre M com conexão compatível ∇^E e tensor de curvatura R^E, e seja α^E uma seção simétrica do espaço Lin $(TM \times TM; E)$. Para cada $\xi \in \Gamma(E)$, defina um operador $A^E_\xi \in$ Lin (TM,TM), pondo

$$\langle A^E_\xi X,Y\rangle = \langle \alpha^E(X,Y),\xi\rangle.$$

Suponha que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas. Então:

Existência: Existem uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^{m+p}_c$ e uma isometria de fibrados vetoriais $\phi : E \to N^f M$, tais que,

$$\alpha^f = \phi \circ \alpha^E, \qquad \nabla^{\perp}\phi = \phi\nabla^E.$$

Unicidade: Sejam $f,g : M^m \to \mathbb{Q}^{m+p}_c$ imersões isométricas. Assuma que existe uma isometria de fibrados vetoriais $\phi : N^f M \to N^g M$ tal que

$$\phi \circ \alpha^f = \alpha^g, \qquad \phi\, {}^f\nabla^{\perp} = {}^g\nabla^{\perp}\phi.$$

Então, existe uma isometria $\tau : \mathbb{Q}^{m+p}_c \to \mathbb{Q}^{m+p}_c$, tal que, $\tau \circ f = g$ e $\tau_*|_{N^f M} = \phi$.

2.2 Normais principais

Seja $f : M^m \to \tilde{M}^n$ uma imersão isométrica. Fixado um ponto $x \in M$, dizemos que um vetor $\xi \in T_x M^{\perp}$ é um *normal principal* de f em x se o subespaço

$$E_\xi(x) = \{Z \in T_x M : \alpha(Z,X) = \langle Z,X\rangle\xi, \forall X \in T_x M\}$$

é não-trivial. Um campo $\xi \in TM^\perp$ é dito um *campo normal principal* de f, com multiplicidade $q > 0$, se $E_\xi(x)$ tem dimensão q em todo ponto $x \in M^m$. Observe que

$$E_\xi(x) = \bigcap_{\gamma \in T_xM^\perp} \ker(A_\gamma - \langle \gamma, \xi \rangle I). \tag{2.10}$$

Um campo normal principal $\xi \in TM^\perp$ é chamado de *campo normal principal de Dupin* se ξ é paralelo na conexão normal ao longo de E_ξ, isto é, se

$$\nabla_Z^\perp \xi = 0,$$

para todo $Z \in E_\xi$. Uma distribuição diferenciável E em uma variedade Riemanniana M^n é dita *umbílica* se existe uma seção diferenciável $\delta \in E^\perp$, conhecido como campo de curvatura média de E, tal que

$$\langle \nabla_Z W, X \rangle = \langle Z, W \rangle \langle \delta, X \rangle,$$

para quaisquer $Z, W \in \Gamma(E)$ e $X \in \Gamma(E^\perp)$. Finalmente, dizemos que distribuição umbílica E é *esférica* se satisfaz

$$(\nabla_Z \delta)_{E^\perp} = 0,$$

para todo $Z \in \Gamma(E)$.

Exemplo 2.3. Dado uma distribuição diferenciável E em M, seja $\beta : E \times E \to E^\perp$ uma aplicação bilinear tal que $\beta(X,Y) = 0$ para todo par ortogonal $X, Y \in \Gamma(E)$. Então, existe $\delta \in \Gamma(E^\perp)$ tal que

$$\beta(X,Y) = \langle X, Y \rangle \delta,$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(E)$. De fato, se $\{X_1, \ldots, X_k\}$ é um referencial ortonormal que gera E, temos que $\beta(X_i, X_i) = \beta(X_j, X_j)$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$. Neste caso, basta tomar $\delta = \beta(X_i, X_i)$, para algum $1 \leq i \leq k$.

Uma classe importante de subvariedades $f : M^m \to \tilde{M}^n$ são aquelas que possuem *fibrado normal flat*, ou seja, aquelas imersões isométricas cujo tensor de curvatura normal $R^\perp$ é identicamente nulo. Imersões isométricas em espaços de forma $\mathbb{Q}_c^n$ são particularmente interessantes. De fato, decorre da equação de Ricci (2.9) que uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_c^n$ tem fibrado normal flat em $x \in M^m$ se, e somente se, os operadores de forma

$$\{A_\xi ; \xi \in T_xM^\perp\}$$

são simultaneamente diagonalizáveis. Ou, de forma equivalente, existe uma base ortonormal $\{X_1, \ldots, X_m\}$ de T_xM tal que

$$\alpha(X_i, X_j) = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq m.$$

Disso decorre que em cada ponto $x \in M^m$, onde $R^{\perp}(x) = 0$, o espaço tangente T_xM se decompõe ortogonalmente como

$$T_xM = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_s(x), \tag{2.11}$$

com a propriedade que, para cada vetor normal $\zeta \in T_xM^{\perp}$, existem números reais $\lambda_i(\zeta)$, com $1 \leq i \leq s = s(x)$, tal que

$$A_\zeta|_{E_i(x)} = \lambda_i(\zeta)I,$$

e as aplicações

$$\zeta \in T_xM^{\perp} \mapsto \lambda_i(\zeta) \in \mathbb{R}$$

são distintas entre si. Como tais aplicações são lineares, existem únicos vetores, dois a dois distintos, $\xi_i(x) \in T_xM^{\perp}$, $1 \leq i \leq s$, chamados de normais principais de f em x, tais que

$$\lambda_i(\zeta) = \langle \xi_i(x), \zeta \rangle, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Portanto,

$$E_i(x) = E_{\xi_i}(x) = \{X \in T_xM; \alpha(X,Y) = \langle X,Y \rangle \xi_i(x), \forall Y \in T_xM\},$$

e a segunda forma fundamental de f pode ser escrita de forma mais simples como

$$\alpha(X,Y) = \sum_{i=1}^{s} \langle X^i, Y^i \rangle \xi_i(x),$$

onde $X \mapsto X^i$ denota a projeção ortogonal de X sobre $E_i(x)$. Equivalentemente,

$$A_\zeta X = \sum_{i=1}^{s} \langle \zeta, \xi_i(x) \rangle X^i,$$

para quaisquer $X \in T_xM$ e $\zeta \in T_xM^{\perp}$.

Na Seção 3.3 estudaremos imersões isométricas em espaços produtos $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ com fibrado normal flat, e veremos que as propriedades mencionadas acima continuam válidas. Além disso, apresentaremos propriedades básicas de tais imersões que serão importantes na sequência dessa tese.

2.3 Produtos warped

É usual em matemática tentar estudar um objeto complicado fatorando-o em um produto de objetos mais simples. Em geometria Riemanniana, o resultado mais conhecido neste sentido é o Teorema de De Rham sobre a fatoração de uma variedade Riemanniana em um produto Riemanniano, embora exista outras noções de decomposições de variedades Riemannianas que estendem a noção de produto Riemanniano. Uma extensão que atende aos objetivos deste trabalho surge com o conceito de produto *warped*.

Definição 2.4. Sejam $(L, \langle , \rangle_L)$ e $(N, \langle , \rangle_N)$ variedades Riemannianas. Uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ na variedade produto $L \times N$ é chamada uma *métrica produto warped* de $\langle , \rangle_L$ e $\langle , \rangle_N$ se existe uma função positiva $\rho \in C^\infty(L)$ tal que

$$\langle , \rangle = \pi_L^* \langle , \rangle_L + (\rho \circ \pi_L)^2 \pi_N^* \langle , \rangle_N.$$

Nesta situação, $(L \times N, \langle , \rangle)$ é chamada uma *variedade produto warped* e ρ a *função warping*. Utiliza-se a notação $L \times_\rho N$.

Uma variedade produto Riemanniano é um caso particular de variedade produto warped no qual a função warping, ρ, é constante igual a 1. Se ρ é uma função constante, não necessariamente igual a 1, a variedade produto warped é essencialmente um produto Riemanniano, basta corrigir a métrica do segundo fator. Em uma variedade produto warped $L \times_\rho N$, as fibras horizontais são todas isométricas à variedade L, pois, dado y em N, a aplicação $x \in L \mapsto (x, y) \in L \times \{y\}$ é uma isometria, enquanto que as fibras verticais são homotéticas à variedade N, uma vez que, dado x em L, a aplicação $y \in N \mapsto (x, y) \in \{x\} \times N$ define uma homotetia com fator de escala $\rho(x)^2$. Em particular, as curvaturas seccionais de uma fibra vertical $\{x\} \times N$ satisfazem à seguinte relação:

$$K_{\{x\} \times N} = \frac{1}{\rho(x)^2} K_N.$$

Lembre que uma homotetia é um difeomorfismo $\varphi : M^n \to \tilde{M}^n$ entre variedade Riemannianas tal que

$$\langle \varphi_* X, \varphi_* Y \rangle_L \tilde{M} = k \langle X, Y \rangle_M, \forall X, Y \in T_p M, \forall p \in M,$$

para algum $k \neq 0$.

Exemplo 2.5. (Coordenadas esféricas) Seja $\rho : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definida por $\rho(t) = t$. Então, $(0, \infty) \times_\rho \mathbb{S}^2$ é uma variedade produto warped tal que a aplicação

$$(t, x) \in (0, \infty) \times_\rho \mathbb{S}^2 \mapsto tx \in \mathbb{R}^3$$

é uma isometria sobre o aberto denso $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$ do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.6. (Coordenadas cilíndricas) Seja ρ definida por $\rho(t_1, t_2) = t_2$, para $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2_+$, onde $\mathbb{R}^2_+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_2 > 0\}$ é o semi-plano superior de $\mathbb{R}^2$. Neste caso, obtemos a variedade produto warped $\mathbb{R}^2_+ \times_\rho \mathbb{S}^1$, onde a aplicação

$$(t_1, t_2, x) \in \mathbb{R}^2_+ \times_\rho \mathbb{S}^1 \mapsto (t_1, t_2 x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$$

é uma isometria sobre um aberto denso do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Diz-se que a métrica produto warped de $(L \times_\rho N, \langle , \rangle)$ está normalizada com relação a $x \in L$ se $\rho(x) = 1$. Se $\langle , \rangle = \langle , \rangle_L + \rho^2 \langle , \rangle_N$ não está normalizada com relação a um $x_0 \in L$, defina

$\tilde{\rho}: L \to (0,\infty)$ por $\tilde{\rho}(x) = \dfrac{\rho(x)}{\rho(x_0)}$ e defina uma nova métrica $\langle,\rangle_N'$ em N por $\langle,\rangle_N' = \rho(x_0)^2\langle,\rangle_N$. Então, $\langle,\rangle = \langle,\rangle_L + \tilde{\rho}^2\langle,\rangle_N'$ está normalizada com relação a x_0 para uma nova métrica produto warped. Vale observar que, quando a métrica produto warped de $L\times_\rho N$ está normalizada com relação a $x \in L$, a fibra $\{x\}\times N$ é isométrica à variedade N.

O conhecido Teorema de De Rham pode ser estendido para variedades que são produto warped. Este resultado é chamado de Teorema de Hiepko e pode ser encontrado em (DAJCZER; TOJEIRO, 2019, Teorema 10.4).

Teorema 2.7. (DAJCZER; TOJEIRO, 2019) Seja $(M,\langle\cdot,\rangle)$ uma variedade riemanniana e $\varepsilon = \{E_i\}_{\{i:1,\ldots,s\}}$ uma rede ortogonal, tal que, E_i é esférica (totalmente geodésica) e $E_i^\perp$ é totalmente geodésica, $\forall 2 \le i \le s$. Então, para todo ponto $p \in M$, existe localmente uma representação produto $g : \Pi_{i=1}^s M_i \to U$ de ε com $p \in U \subset M$, que é uma isometria com respeito a uma métrica produto warped (Riemanniano) em $\Pi_{i=1}^s M_i$.

2.3.1 Produtos warped de imersões

A noção de produto warped de imersões no espaço euclidiano é definida a seguir.

Considere uma decomposição ortogonal

$$\mathbb{R}^m = \Pi_{j=0}^r \mathbb{R}^{m_j},$$

com $\mathbb{R}^{m_0}$ possivelmente trivial, e imersões isométricas $\tilde{f}_a : M_a \to \mathbb{R}^{m_a}$, $1 \le a \le r$. Assuma que existem $1 \le s \le r$, tais que, $\tilde{f}_a(M_a) \subset \mathbb{S}^{m_a-1}$, para $1 \le a \le s$, assim existem imersões isométricas $f_a : M_a \to \mathbb{S}^{m_a-1}$ tais que $\tilde{f}_a = i_a \circ f_a$, $1 \le a \le s$, onde $i_a : \mathbb{S}^{m_a-1} \to \mathbb{R}^{m_a}$ é a inclusão. Seja $f_a = \tilde{f}_a$ e seja $i_a : \mathbb{R}^{m_a} \to \mathbb{R}^{m_a}$ a aplicação identidade para $s+1 \le a \le r$ se $s < r$. Agora seja $\tilde{f} : \tilde{M} = \Pi_{a=1}^r M_a \to \mathbb{R}^m$ o produto extrínseco de $f_1,\ldots,f_r$ dado por

$$\tilde{f}(x_1,\ldots,x_r) = (0,\tilde{f}_1(x_1),\ldots,\tilde{f}_r(x_r))$$

para todo $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_r) \in \tilde{M}$. O subfibrado L de $N_f\tilde{M}$ cuja fibra em $\tilde{x}$ é

$$L(\tilde{x}) = \mathbb{R}^{m_0} \oplus \operatorname{span}\{\tilde{f}_1(x_1),\ldots,\tilde{f}_s(x_s)\}$$

é paralelo e plano, então existe uma isometria paralela de fibrados vetoriais

$$\varphi : \tilde{M} \times \mathbb{R}^k \to L,$$

onde $k = s + m_0$. Sejam $e_1,\ldots,e_s \in \mathbb{R}^k$ tais que $\varphi_{\tilde{x}}(e_a) = \tilde{f}_a(x_a)$ para $1 \le a \le s$ e defina

$$\Omega_0(\tilde{f}) = \{Y \in \mathbb{R}^k; \langle Y, e_a\rangle > 0, \text{ para todo } 1 \le a \le s\}.$$

Dada uma imersão isométrica $f_0 : M_0 \to \Omega_0(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}^k$, a aplicação $f : M = \Pi_{i=0}^r M_i \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$f(x_0,x_1,\ldots,x_r) = f(x_0,\tilde{x}) = (0,\ldots,0,\tilde{f}_{s+1}(x_{s+1}),\ldots,\tilde{f}_r(x_r)) + \varphi_{\tilde{x}}(f_0(x_0))$$

é chamada de produto warped de $f_0, f_1, \dots, f_r$.

A seguir, enunciamos o Teorema de Nolker, que nos dá uma decomposição para imersões isométricas de variedades produto warped no espaço euclidiano. O mesmo também é válido para os demais espaços de forma.

Teorema 2.8. Seja $f : M \to \mathbb{R}^m$ uma imersão isométrica de uma variedade produto warped, cuja a segunda forma fundamental é adaptada a rede produto de M. Então, f é um produto warped de imersões.

CAPÍTULO

3

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$

Neste capítulo iremos somente recapitular alguns fatos e resultados básicos acerca de imersões isométricas em espaços produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathbb{Q}^n_\varepsilon$ as variedades $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$, ou $\mathbb{H}^n$, de acordo com o valor de ε, respectivamente, $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0$, ou $\varepsilon = -1$.

3.1 Equações fundamentais

Dada uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, seja $\frac{\partial}{\partial t}$ o campo vetorial unitário tangente ao segundo fator. Assim, um campo vetorial tangente T em M^m e um campo vetorial normal η ao longo de f são definidos por

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_*T + \eta. \tag{3.1}$$

O campo $\frac{\partial}{\partial t}$ é paralelo em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, isto é, $\tilde{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R})$, onde $\tilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Usando este fato e diferenciando a equação (3.1), obtemos:

$$\nabla_X T = A_\eta X \tag{3.2}$$

e

$$\alpha_f(X,T) = -\nabla^\perp_X \eta, \tag{3.3}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. As Equações de Gauss, Codazzi e Ricci para f são, respectivamente:

$$R(X,Y)W = \varepsilon(X \wedge Y - \langle Y,T\rangle X \wedge T + \langle X,T\rangle Y \wedge T)W + A^f_{\alpha(Y,W)}X - A^f_{\alpha(X,W)}Y, \tag{3.4}$$

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,W) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,W) = \varepsilon(\langle X,W\rangle\langle Y,T\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,T\rangle)\eta, \tag{3.5}$$

e

$$R^\perp(X,Y)\xi = \alpha(X,A^f_\xi Y) - \alpha(A^f_\xi X,Y). \tag{3.6}$$

A equação de Codazzi pode também ser escrita como

$$(\nabla_X A^f)(Y,\xi) - (\nabla_Y A^f)(X,\xi) = \varepsilon\langle \eta,\xi\rangle (X\wedge Y)T, \tag{3.7}$$

onde

$$(X\wedge Y)T = \langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y.$$

Supondo que M^m seja simplesmente conexa, o seguinte resultado diz que as equações (3.2)–(3.6) determinam completamente uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.1. (LIRA; TOJEIRO; VITÓRIO, 2010) Sejam M^m uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, E um fibrado vetorial Riemanniano de rank k sobre M com conexão compatível ∇^E e tensor de curvatura R^E, e seja α^E uma seção simétrica do espaço Lin $(TM\times TM;E)$. Para cada $\xi \in \Gamma(E)$, defina um operador $A_\xi^E \in$ Lin (TM,TM), pondo

$$\langle A_\xi^E X, Y\rangle = \langle \alpha^E(X,Y),\xi\rangle.$$

Considere um campo $T \in \mathfrak{X}(M)$ e uma seção $\eta \in \Gamma(E)$, tais que $\langle T,T\rangle + \langle \eta,\eta\rangle = \varepsilon$ e suponha que as equações de (3.2) à (3.6) sejam satisfeitas. Então:

Existência: Existem uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ e uma isometria de fibrados vetoriais $\phi : E \to N^f M$, tais que,

$$\alpha^f = \phi\circ\alpha^E, \qquad \nabla^\perp\phi = \phi\nabla^E$$

e $f_*T + \phi\eta$ é um campo vetorial unitário que gera o fator $\mathbb{R}$.

Unicidade: Sejam $f,g : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ imersões isométricas. Assuma que existe uma isometria de fibrados vetoriais $\phi : N^f M \to N^g M$ tal que

$$\phi\circ\alpha^f = \alpha^g, \qquad \phi\, {}^f\nabla^\perp = {}^g\nabla^\perp\phi.$$

Assuma também que os pares (T_f,η_f) e (T_g,η_g) dados por

$$f_*T_f + \eta_f = \frac{\partial}{\partial t} = g_*T_g + \eta_g,$$

onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é um campo vetorial unitário que gera o fator $\mathbb{R}$, satisfazem $T_f = T_g$ e $\eta_g = \phi\eta_f$. Então, existe uma isometria $\tau : \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, tal que, $\tau\circ f = g$ e $\tau_*|_{N^f M} = \phi$.

Dado uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, considere a composição $\tilde{f} = i\circ f$, onde $i : \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ denota a inclusão canônica. Relacionemos agora as segundas formas fundamentais e as conexões normais de f e $\tilde{f}$. Inicialmente, note que $\hat{v} = \pi\circ i$ é um campo unitário normal à inclusão i, onde $\pi : \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+1}$ denota a projeção. Temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_Z \hat{\nu} &= \pi_* i_* Z \\ &= i_* Z - \left\langle i_* Z, i_* \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle i_* \frac{\partial}{\partial t} \\ &= i_* \left(Z - \left\langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t} \right),\end{aligned}$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{E}^{n+2}$. Logo, para todo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R})$, temos que

$$A^i_{\hat{\nu}} Z = -Z + \left\langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3.8}$$

Os espaços normais, $N^f M$ e $N^{\tilde{f}} M$, de f e $\tilde{f}$, respectivamente, são relacionados por

$$N^{\tilde{f}} M = i_* N^f M \oplus span\{\nu\},$$

onde $\nu = \hat{\nu} \circ f = \pi \circ \tilde{f}$. Dado $\xi \in \Gamma(N^f M)$, obtemos de (3.8) que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X i_* \xi &= i_* \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_i(f_* X, \xi) \\ &= -\tilde{f}_* A^f_\xi X + i_* \nabla^\perp_X \xi + \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu,\end{aligned}$$

donde segue que

$$A^{\tilde{f}}_{i_* \xi} = A^f_\xi$$

e

$$\tilde{\nabla}^\perp_X i_* \xi = i_* \nabla^\perp_X \xi + \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu,$$

onde $\tilde{\nabla}^\perp$ é a conexão normal de $\tilde{f}$. Por outro lado,

$$\tilde{\nabla}_X \nu = \tilde{\nabla}_X \hat{\nu} \circ f = \tilde{\nabla}_{f_* X} \hat{\nu} = f_*(X - \langle X, T \rangle T) - \langle X, T \rangle i_* \eta,$$

logo

$$A^{\tilde{f}}_\nu X = -X + \langle X, T \rangle T.$$

Tomando as componentes tangentes e normal, obtemos

$$A^{\tilde{f}}_\nu T = -\|\eta\|^2 T\,, \qquad A^{\tilde{f}}_\nu X = -X, \text{ se } X \in \{T\}^\perp \tag{3.9}$$

e

$$\tilde{\nabla}^\perp_X \nu = -\langle X, T \rangle i_* \eta.$$

3.2 A classe $\mathscr{A}$

Uma classe interessante de subvariedades em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ é aquela formada pelas imersões isométricas $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ com a propriedade que o campo T, definido em (3.1), é direção principal de todos os operadores de forma de f. Essa família de imersões, denominada de *classe* $\mathscr{A}$, foi inicialmente estudada para o caso de hipersuperfícies em (TOJEIRO, 2010) e, posteriormente, estudada para subvariedades com codimensão maior do que 1 em (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014).

Exemplos simples de imersões na classe $\mathscr{A}$ são os cilindros sobre imersões isométricas $g: N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon$, para os quais M^m é uma variedade produto $N^{m-1} \times \mathbb{R}$ e $f = g \times id$, em que $id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação identidade. Em tais exemplos, o campo de vetores normais η em (3.1) é identicamente nulo. Exemplos mais interessantes são construídos como segue.

Seja $g: N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon$ uma imersão isométrica. Suponha que exista um conjunto ortonormal $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ de campos de vetores normais paralelos ao longo de g. Esta hipótese é satisfeita localmente, por exemplo, se g possui fibrado normal flat. Assim, o subfibrado vetorial E de posto k do fibrado normal N^gN de g, gerado por $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$, é paralelo e flat. Sejam $j: \mathbb{Q}^n_\varepsilon \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ e $i: \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ as inclusões canônicas, e $\tilde{j} = i \circ j$. Defina $\tilde{\xi}_i = \tilde{j}_* \xi_i, 1 \leq i \leq k, \tilde{\xi}_0 = \tilde{g} := \tilde{j} \circ g$ e $\tilde{\xi}_{k+1} = i_* \frac{\partial}{\partial t}$. Então, o subfibrado vetorial $\tilde{E}$ de $N^{\tilde{g}}N$ cuja fibra $\tilde{E}(x)$, em $x \in N^{m-1}$, gerada por $\{\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{k+1}\}$, é também paralelo e plano. Defina uma isometria de fibrados vetoriais $\varphi: N^{m-1} \times \mathbb{E}^{k+2} \to \tilde{E}$ por

$$\varphi_x(y) := \varphi(x,y) = \sum_{i=0}^{k+1} y_i \tilde{\xi}_i,$$

para $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) \in \mathbb{E}^{k+2}$. Seja $f: M^m := N^m \times I \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x,s) := (i \circ f)(x,s) = \varphi_x(\gamma(s)) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i(s) \tilde{\xi}_i(x), \tag{3.10}$$

em que $\gamma: I \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1})$, é uma curva regular suave tal que $\varepsilon\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_k^2 = \varepsilon$ e γ_{k+1} possui derivada não nula em todo ponto.

Geometricamente, $\tilde{f}(M)$ é gerada pelo transporte paralelo da curva γ em uma subvariedade produto $\mathbb{Q}^k_\varepsilon \times \mathbb{R}$ de um espaço normal fixado de $\tilde{g}$ com respeito a sua conexão normal.

Teorema 3.2. (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014) A aplicação f define, em pontos regulares, uma imersão na classe $\mathscr{A}$. Reciprocamente, qualquer imersão isométrica $f: M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, $m \geq 2$, na classe $\mathscr{A}$ é, localmente, dada desta forma.

O resultado seguinte nos dá condições equivalentes para f pertencer à classe $\mathscr{A}$.

Teorema 3.3. (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) O campo T em (3.1) é não nulo e $\tilde{f}$ possui fibrado normal flat;

(ii) f possui fibrado normal flat e pertence à classe $\mathscr{A}$;

(iii) $\tilde{f}$ é localmente dada como em (3.10) em termos de uma imersão isométrica $g: N^{m-1} \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon$ com fibrado normal flat e uma curva regular suave $\gamma: I \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}, \gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1})$, com γ'_{k+1} não nulo em todo ponto.

Para o caso de hipersuperfícies, o Teorema 3.3, obtido inicialmente em (TOJEIRO, 2010), se traduz da seguinte maneira.

Teorema 3.4. Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, tal que $T(x) \neq 0$, para todo $x \in M^n$. Então, f pertence à classe $\mathscr{A}$ se, e somente se, $\tilde{f} = i \circ f$ tem fibrado normal flat em $\mathbb{E}^{n+2}$.

Como veremos a seguir, exemplos importantes de hipersuperfícies na classe $\mathscr{A}$ são as rotacionais (DILLEN; FASTENAKELS; VEKEN, 2009), as hipersuperfícies de ângulo constante (MANFIO; TOJEIRO, 2011), as hipersuperfícies de curvatura seccional constante (MANFIO; TOJEIRO, 2011) e as hipersuperfícies de Einstein (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021). No caso de hipersuperfícies a decomposição (3.1) se torna:

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_* T + \nu N, \tag{3.11}$$

onde N é um campo unitário normal a f e ν é a função diferenciável, dada por $\nu = \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$.

Definição 3.5. Uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ é chamada de hipersuperfície de ângulo constante se a função ν em (3.11) é constante.

Conforme (TOJEIRO, 2010, Corolário 2) toda hipersuperfície de ângulo constante $f : M^n \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ ou é um aberto de um slice $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times t_0$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, ou um aberto do produto $M^{n-1} \times \mathbb{R}$, onde M^{n-1} é uma hipersuperfície de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon$, ou é localmente dada como abaixo.

Analisemos agora a construção (3.10) para o caso de hipersuperfícies. Seja $g : M^{n-1} \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon$ uma hipersuperfície e sejam $g_s : M^{n-1} \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon$ a família de hipersuperfícies paralelas, isto é,

$$g_s(x) = C_\varepsilon(s) g(x) + S_\varepsilon(s) N(x),$$

onde N é o campo vetorial unitário normal a g e

$$C_\varepsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \cosh(s), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\varepsilon(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \sinh(s), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases}.$$

Defina

$$f : M^n = M^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R},$$

por

$$f(x,s) = g_s(x) + a(s) \frac{\partial}{\partial t},$$

para alguma função diferenciável $a : I \to \mathbb{R}$, tal que a derivada nunca se anula.

Pelo (TOJEIRO, 2010, Teorema 1), temos que:

Teorema 3.6. (TOJEIRO, 2010) A aplicação f define, em pontos regulares, uma hipersuperfície que tem T como direção principal. Reciprocamente, toda hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ tal que a função ν não se anula e tem T como direção principal, é dada localmente como a descrição acima.

Em particular, concluímos que as hipersuperfícies de ângulo constante estão na classe $\mathscr{A}$.

No caso de hipersuperfície com curvatura constante M^n_c, temos que f pertence à classe $\mathscr{A}$, conforme (MANFIO; TOJEIRO, 2011, Lemas 2 e 7), descritos abaixo.

Lema 1. (MANFIO; TOJEIRO, 2011) Seja $f : M^n_c \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície de dimensão $n \geq 3$ e curvatura seccional $c \neq 0$. Assuma que $T \neq 0$ em $x \in M^n_c$. Então, T é uma direção principal em x.

Lema 2. (MANFIO; TOJEIRO, 2011) Seja $f : M^n_c \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície flat de dimensão $n \geq 3$. Assuma que $T \neq 0$ em $x \in M^n_0$.

(i) Se $\varepsilon = 1$, então ν se anula em x.

(ii) Se $\varepsilon = -1$, ou ν se anula em x ou $A_N = A_\xi$, para alguma das duas possibilidades de vetor normal unitário N de f em x.

Em qualquer caso, T é uma direção principal de f em x.

Conforme (DILLEN; FASTENAKELS; VEKEN, 2009, Teorema 5), uma hipersuperfície rotacional em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, tem fibrado normal flat em $\mathbb{E}^{n+2}$. Assim, em particular obtemos que f está na classe $\mathscr{A}$, pelo Teorema 3.3. A definição de hipersuperfície rotacional em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ é dada a seguir.

Seja P_3 um subespaço de dimensão 3 de $\mathbb{E}^{n+2}$ que contém a direção $\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$. Então, $(\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}) \cap P_3 = \mathbb{Q}^1_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Seja P_2 um subespaço de P_3 de dimensão 2 que também contém o eixo $\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$. Denote por $\mathscr{I}$ o grupo de isometrias de E^{n+2} que fixa x, para todo $x \in P_2$. Considere uma curva regular $\gamma \in \mathbb{Q}^1_\varepsilon \times \mathbb{R} \subset P_3$, com $\gamma \cap P_2 = \emptyset$.

Definição 3.7. A órbita de γ sob a ação de $\mathscr{I}$ é chamada de hipersuperfície de rotação de M^n em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com perfil γ em torno de P_2.

3.3 Imersões em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ com fibrado normal flat

Nesta seção veremos algumas propriedades acerca de imersões isométricas em espaços produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ com fibrado normal flat, i.e., imersões cujo tensor de curvatura do fibrado normal é identicamente nulo.

Proposição 3.8. Uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ tem fibrado normal flat num ponto $x \in M^m$ se, e somente se, os operadores de forma

$$\{A_\xi : \xi \in T_xM^\perp\}$$

são simultaneamente diagonalizáveis. De forma equivalente, se, e somente se, existe uma base ortonormal $\{X_1, \ldots, X_m\}$ para T_xM tal que

$$\alpha(X_i, X_j) = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq m$.

Demonstração. Decorre da equação de Ricci (3.6) que

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi, \zeta\rangle = \langle [A_\xi, A_\zeta]X, Y\rangle,$$

para quaisquer $X, Y \in T_xM$ e $\xi, \zeta \in T_xM^\perp$. Ou seja, o tensor de curvatura normal $R^\perp$ se anula em $x \in M^m$ se, e somente se, todos operadores de forma A_ξ, com $\xi \in T_xM^\perp$, comutam. □

Uma aplicação simples da Proposição 3.8 é o seguinte

Exemplo 3.9. Toda superfície $f : M^2 \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ na classe $\mathscr{A}$, com $T \neq 0$, tem fibrado normal flat. De fato, dado um campo unitário $Y \in TM$ e ortogonal a T, tem-se

$$\langle \alpha(T,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi T, Y\rangle = \lambda\langle T, Y\rangle = 0,$$

para todo $\xi \in N^fM$. Assim, $\{T/\|T\|, Y\}$ é um referencial ortonormal de TM que verifica as condições da Proposição 3.8.

Decorre da Proposição 3.8 que em cada ponto $x \in M$, onde $R^\perp(x) = 0$, o espaço tangente T_xM se decompõe ortogonalmente como

$$T_xM = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_s(x), \tag{3.12}$$

A decomposição (3.12) tem a propriedade que, para cada $\xi \in T_xM^\perp$, existem números reais $\lambda_i(\xi)$, com $1 \leq i \leq s = s(x)$, tais que

$$A_\xi|_{E_i(x)} = \lambda_i(\xi) Id$$

e as aplicações $\xi \mapsto \lambda_i(\xi)$ são duas a duas distintas. Como tais aplicações são lineares, existem únicos e distintos vetores $\xi_i(x) \in T_xM^\perp$, $1 \leq i \leq s$, chamados os *normais principais de f em x*, tais que

$$\lambda_i(\xi) = \langle \xi_i(x), \xi\rangle,$$

para todo $1 \leq i \leq s$. Assim, podemos escrever

$$E_i(x) = E_{\xi_i}(x) = \{X \in T_xM : \alpha(X,Y) = \langle X, Y\rangle \xi_i(x), \forall\, Y \in T_xM\},$$

e a segunda forma fundamental de f tem uma representação simples como

$$\alpha(X,Y) = \sum_{i=1}^{s} \langle X^i, Y^i\rangle \xi_i(x), \tag{3.13}$$

onde $X \mapsto X^i$ denota a projeção ortogonal de X sobre $E_i(x)$. De forma equivalente,

$$A_\xi X = \sum_{i=1}^{s} \langle \xi, \xi_i(x) \rangle X^i, \tag{3.14}$$

para quaisquer $X \in T_xM$ e $\xi \in T_xM^\perp$. Consequentemente, tem-se

$$A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y = \sum_{i,j=1}^{s} \langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle (X^i \wedge Y^j)Z, \tag{3.15}$$

para quaisquer $X,Y,Z \in T_x(M)$. De fato, usando (3.13) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y &= \sum_{i=1}^{s} \langle \alpha(Y,Z), \xi_i(x) \rangle X^i - \sum_{j=1}^{s} \langle \alpha(X,Z), \xi_j(x) \rangle Y^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{s} \big(\langle Y^j, Z^j \rangle \langle \xi_j(x), \xi_i(x) \rangle X^i - \langle X^i, Z^i \rangle \langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle Y^j \big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{s} \langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle (\langle Y^j, X^j \rangle X^i - \langle X^i, Z^i \rangle Y^j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{s} \langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle (X^i \wedge Y^j)Z, \end{aligned}$$

como queríamos. Assim, usando a igualdade (3.15), a equação de Gauss (3.4) toma a forma

$$R(X,Y)Z = (\tilde{R}(X,Y)Z)^T + \sum_{i,j=1}^{s} \langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle (X^i \wedge Y^j)Z, \tag{3.16}$$

para quaisquer $X,Y,Z \in T_xM$, onde R e $\tilde{R}$ denotam os tensores de curvatura de M e $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, respectivamente. Em particular, para $X \in E_i(x)$ e $Y \in E_j(x)$ unitários, decorre da equação de Gauss (3.4) que a curvatura seccional $K(X,Y)$ de M é dada por

$$K(X,Y) = \varepsilon(1 - \langle X,T \rangle^2 - \langle Y,T \rangle^2) + \langle \xi_i(x), \xi_j(x) \rangle. \tag{3.17}$$

Se $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ é uma imersão isométrica com fibrado normal flat em todo ponto $x \in M^m$, a função

$$x \in M^m \mapsto s(x) \in \{1, \dots, m\}$$

é semi-contínua inferiormente. Assim, se M_s denota o interior do subconjunto onde essa função assume o valor s, então $\cup_{s=1}^m M_s$ é aberto e denso em M^m. Em cada subconjunto M_s, as aplicações

$$x \mapsto \xi_i(x), \ 1 \leq i \leq s,$$

definem campos normais diferenciáveis, chamados os *campos normais principais de* f, e cada aplicação

$$x \mapsto E_i(x), \ 1 \leq i \leq s,$$

define uma distribuição diferenciável.

Lema 3. Em cada aberto M_s, a equação de Codazzi (3.5) pode ser escrita das seguintes formas:

$$\langle X_j, Y_j\rangle(\nabla^\perp_{X_i}\xi_j + \varepsilon\langle X_i, T\rangle\eta) = \langle \nabla_{X_j} Y_j, X_i\rangle(\xi_j - \xi_i), \tag{3.18}$$

com $1 \le i \ne j \le s$, onde $X_i \in \Gamma(E_i)$ e $X_j, Y_j \in \Gamma(E_j)$, e

$$\langle \nabla_{X_j} X_i, X_k\rangle(\xi_i - \xi_k) = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k\rangle(\xi_j - \xi_k), \tag{3.19}$$

com $1 \le i \ne j \ne k \le s$, onde $X_i \in \Gamma(E_i)$, $X_j \in \Gamma(E_j)$ e $X_k \in \Gamma(E_k)$.

Demonstração. Da equação de Codazzi (3.5), fazendo $X = X_i$, $Y = X_j$ e $W = Y_j$, obtemos

$$(\nabla^\perp_{X_i}\alpha)(X_j, Y_j) - (\nabla^\perp_{X_j}\alpha)(X_i, Y_j) = -\varepsilon\langle X_j, Y_j\rangle\langle X_i, T\rangle\eta,$$

onde

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_{X_i}\alpha)(X_j, Y_j) &= \nabla^\perp_{X_i}\alpha(X_j, Y_j) - \alpha(\nabla_{X_i}X_j, Y_j) - \alpha(X_j, \nabla_{X_i}Y_j)\\
&= \nabla^\perp_{X_i}\langle X_j, Y_j\rangle\xi_j - \langle \nabla_{X_i}X_j, Y_j\rangle\xi_j - \langle X_j, \nabla_{X_i}Y_j\rangle\xi_j\\
&= \langle X_j, Y_j\rangle\nabla^\perp_{X_i}\xi_j + X_i\langle X_j, Y_j\rangle\xi_j - X_i\langle X_j, Y_j\rangle\xi_j\\
&= \langle X_j, Y_j\rangle\nabla^\perp_{X_i}\xi_j
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_{X_j}\alpha)(X_i, Y_j) &= \nabla^\perp_{X_j}\alpha(X_i, Y_j) - \alpha(\nabla_{X_j}X_i, Y_j) - \alpha(X_i, \nabla_{X_j}Y_j)\\
&= \nabla^\perp_{X_j}\langle X_i, Y_j\rangle\xi_i - \langle \nabla_{X_j}X_i, Y_j\rangle\xi_j - \langle X_i, \nabla_{X_j}Y_j\rangle\xi_i\\
&= \langle \nabla_{X_j}Y_j, X_i\rangle\xi_j - \langle X_i, \nabla_{X_j}Y_j\rangle\xi_i\\
&= \langle X_i, \nabla_{X_j}Y_j\rangle(\xi_j - \xi_i).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle X_i, Y_j\rangle(\nabla^\perp_{X_i}\xi_j + \varepsilon\langle X_i, T\rangle\eta) = \langle X_i, \nabla_{X_j}Y_j\rangle(\xi_j - \xi_i),$$

o que prova a equação (3.18). Agora, fazendo $X = X_i$, $Y = X_j$ e $W = X_k$, obtemos

$$(\nabla^\perp_{X_i}\alpha)(X_j, X_k) - (\nabla^\perp_{X_j}\alpha)(X_i, X_k) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_{X_i}\alpha)(X_j, X_k) &= \nabla^\perp_{X_i}\alpha(X_i, X_k) - \alpha(\nabla_{X_i}X_j, X_k) - \alpha(X_j, \nabla_{X_i}X_k)\\
&= -\langle \nabla_{X_i}X_j, X_k\rangle\xi_k + \langle X_k, \nabla_{X_i}X_j\rangle\xi_j\\
&= \langle X_k, \nabla_{X_i}X_j\rangle(\xi_j - \xi_k)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_{X_j}\alpha)(X_i, X_k) &= \nabla^\perp_{X_j}\alpha(X_i, X_k) - \alpha(\nabla_{X_j}X_i, X_k) - \alpha(X_i, \nabla_{X_j}X_k)\\
&= -\langle \nabla_{X_j}X_i, X_k\rangle\xi_k + \langle X_k, \nabla_{X_j}X_i\rangle\xi_i\\
&= \langle \nabla_{X_j}X_i, X_k\rangle(\xi_i - \xi_k).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \rangle (\xi_i - \xi_k) = \langle X_k, \nabla_{X_i} X_j \rangle (\xi_j - \xi_k),$$

o que prova a equação (3.19). $\square$

Finalizamos essa seção relacionando imersões isométricas em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ com fibrado normal flat e a classe $\mathscr{A}$ vista na seção anterior. Mais precisamente, em relação à decomposição (3.12), temos a seguinte

Proposição 3.10. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com fibrado normal flat. Então, $f \in \mathscr{A}$ se, e somente se, $T \in \Gamma(E_{\xi_i})$, para algum $1 \leq i \leq s$.

Demonstração. Suponha, inicialmente, que $f \in \mathscr{A}$. Dado $\xi \in TM^\perp$, tem-se $A_\xi T = \lambda T$, para alguma função $\lambda = \lambda(\xi) \in C^\infty(M)$. Por outro lado,

$$A_\xi T = \sum_{i=1}^{s} \langle \xi, \xi_i \rangle T^i, \tag{3.20}$$

onde $T \mapsto T^i$ é a projeção ortogonal sobre E_i. Tomando o produto interno com T^i em (3.20), obtemos

$$\lambda \|T^i\|^2 = \langle \xi, \xi_i \rangle \|T^i\|^2. \tag{3.21}$$

Sejam $1 \leq i, j \leq s$ tais que $T^i \neq 0$ e $T^j \neq 0$. Decorre de (3.21) que $\langle \xi, \xi_i \rangle = \langle \xi, \xi_j \rangle$. Em particular, tomando $\xi = \xi_i$ e, em seguida, $\xi = \xi_j$, obtemos $\|\xi_i\|^2 = \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \|\xi_j\|^2$. Isso implica que $\|\xi_i - \xi_j\|^2 = 0$, logo, $\xi_i = \xi_j$. Reciprocamente, suponha $T \in E_i$, para algum $1 \leq i \leq s$. Assim,

$$\alpha(X, T) = \langle X, T \rangle \xi_i,$$

para todo $X \in TM$. Assim, dado $\xi \in TM^\perp$, tem-se

$$A_\xi T = \langle \xi, \xi_i \rangle T,$$

mostrando que T é autovetor do operador de forma A_ξ, qualquer que seja o campo normal $\xi \in TM^\perp$. $\square$

3.4 Imersões em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ com duas normais principais

Nesta seção apresentaremos alguns resultados iniciais acerca de subvariedades em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ que admitem direções umbílicas. O resultado seguinte caracteriza subvariedades rotacionais em termos de normais principais.

Teorema 3.11. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica na classe $\mathscr{A}$, com $m \geq 2, T \neq 0$ e fibrado normal flat. Então, f é uma subvariedade rotacional cuja geratriz é uma curva em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}^{n-m+1}_\varepsilon \times \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ se, e somente se, f é umbílica ou tem dois normais principais, com $E_1 = \operatorname{span}\{T\}$.

Demonstração. Suponha por absurdo que f tem mais de dois normais principais, ou seja, $s > 2$. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$A_\xi X = \langle \xi, \xi_1 \rangle X^1 + \langle \xi, \xi_2 \rangle X^2 + \cdots + \langle \xi, \xi_s \rangle X^s,$$

para todo $\xi \in N^f M$. Segue de (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014, Corolário 1.5), que existe um $\delta \in N^f M$, tal que

$$A_\xi X = \langle \xi, \delta \rangle X,$$

para todo $X \in \{T\}^\perp$ e todo $\xi \in N^f M$. Logo, $\langle \xi, \delta \rangle = \langle \xi, \xi_i \rangle$, para todo $i = 1, \ldots, s$, tal que $E_i \cap \operatorname{span}\{T\} \neq 0$. O que implica que $\delta = \xi_i$, para todo $i = 1, \ldots, s$, tal que $E_i \cap \operatorname{span}\{T\} \neq 0$. Contradição, uma vez que $T \in \Gamma(E_1)$ e $\xi_i \neq \xi_j$, sempre que $i \neq j$. Assim, f é umbílica ou tem dois normais principais. Note ainda que no segundo caso, necessariamente $E_1 = \operatorname{span}\{T\}$. Reciprocamente, quando f tem apenas um normal principal, temos que f é umbílica. Quando f tem dois normais principais, com $E_1 = \operatorname{span}\{T\}$, tomamos δ como o normal principal ξ_2. Assim, em ambos os casos, $A_\xi X = \langle \xi, \delta \rangle X$, para todo $X \in \{T\}^\perp$ e todo $\xi \in N^f M$. □

Corolário 3.12. Seja $f : M^2 \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica na classe $\mathscr{A}$. Então, f é umbílica ou f é uma superfície rotacional cuja geratriz é uma curva em uma hipersuperfície $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, ou em uma hipersuperfície $\mathbb{Q}^{n-1}_\varepsilon \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Se f não é umbílica, tem-se que $\dim \operatorname{span}\{T\} = 1$. Assim, decorre do Exemplo 3.9 e Teorema 3.11 que f é uma superfície rotacional cuja geratriz é uma curva em uma hipersuperfície totalmente geodésica $\mathbb{Q}^{n-1}_\varepsilon \times \mathbb{R}$ contida em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon$. Usando a equação de Codazzi (3.5), é fácil ver que uma hipersuperfície totalmente geodésica satisfaz $T = 0$ ou $\eta = 0$. Assim, o resultado segue de (MANFIO; TOJEIRO, 2011, Proposição 1). □

Proposição 3.13. Sejam $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica e $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ um campo umbílico e unitário. Se ξ é paralelo na conexão normal e ortogonal a η, então $f(M)$ está contida em uma hipersuperfície totalmente geodésica $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \{t_0\}$ de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ tal que $A_\xi = \lambda I$, para algum $\lambda \in C^\infty(M)$, onde I é o endomorfismo identidade. Como ξ é paralelo na conexão normal e ortogonal a η, segue da equação de Codazzi (3.5) que λ é constante. Seja $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ é a inclusão canônica. Obtemos

$$\tilde{\nabla}^\perp_X i_* \xi = i_* \nabla^\perp_X \xi + \varepsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\tilde{\nabla}^\perp$ é a conexão normal de $\tilde{f}$. Isso implica que $\tilde{f}(M)$ está contida em uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^{n+1}_{\tilde{c}}$ de $\mathbb{E}^{n+2}$, onde $\tilde{c} = \lambda^2$. Portanto, $f(M) \subset (\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}) \cap \mathbb{Q}^{n+1}_{\tilde{c}} = \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. □

No resultado seguinte, obtido inicialmente para espaços de forma por Lobos e Tojeiro em (LOBOS; TOJEIRO, 2006), apresentamos uma classificação das subvariedades em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat, e que admitem exatamente duas direções normais principais distintas. Seguindo (CECIL, 1992), uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ é chamada uma *cíclide de Dupin* se admite, exatamente, dois autovalores distintos, ambos constantes aos longo dos correspondentes autoespaços.

Definição 3.14. O primeiro espaço normal $N_1(x)$ de uma imersão isométrica $f : M^m \to \tilde{M}^n$ em $x \in M$ é o subespaço do espaço normal $N^f M(x)$ gerado pela imagem da segunda forma fundamental α em x, isto é,

$$N_1(x) = \text{span}\{\alpha(X,Y); X,Y \in T_x M\}.$$

Note que o complemento ortogonal de $N_1(x)$ em $N^f M(x)$ é

$$N_1^\perp(x) = \{\xi \in N^f M(x); A_\xi = 0\}.$$

Teorema 3.15. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat. Assuma que f tem exatamente dois normais principais ξ_1 e ξ_2, que são linearmente independentes e de Dupin. Se $\eta = \phi(\xi_1 - \xi_2)$, com $\phi \in C^\infty(M)$, então $f = g \circ i$, onde $g : M^m \to \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^m \times \mathbb{R}$ é uma cíclide de Dupin e $i : \mathbb{Q}_{\tilde{c}}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ é uma inclusão umbílica.

Demonstração. Primeiramente, note que N_1 é um subfibrado paralelo na conexão normal. De fato, dado $\nu \in N_1$, escrevemos $\nu = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\infty(M)$. Assim, para todo $X \in \Gamma(E_1)$, obtemos pela Equação de Codazzi (3.18) que

$$\nabla_X^\perp \nu = X(\lambda_1)\xi_1 + X(\lambda_2)\xi_2 + \lambda_2(\langle \nabla_Y Y, X\rangle(\xi_2 - \xi_1) - \varepsilon\langle X, T\rangle\eta) \in N_1,$$

com $Y \in \Gamma(E_2)$ unitário. De modo análogo, $\nabla_Y^\perp \nu \in \Gamma(E_2)$, para todo $Y \in \Gamma(E_2)$. Portanto, N_1 é paralelo. Seja ξ o vetor normal unitário em N_1 ortogonal a $\xi_1 - \xi_2$. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, note que $A_\xi X = \langle \xi, \xi_1\rangle X_1 + \langle \xi, \xi_2\rangle X_2 = \lambda X$, com $\lambda = \langle \xi, \xi_1\rangle = \langle \xi, \xi_2\rangle$, ou seja, ξ é umbílico. Observe ainda pela Equação de Codazzi (3.18), que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{X_i}^\perp \xi_j, \xi\rangle \\ &= X_i\langle \xi_j, \xi\rangle - \langle \xi_j, \nabla_{X_i}^\perp \xi\rangle \\ &= X_i\langle \xi_i, \xi\rangle - \langle \xi_j, \nabla_{X_i}^\perp \xi\rangle \\ &= \langle \xi_i - \xi_j, \nabla_{X_i}^\perp \xi\rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\nabla_{X_i}^\perp \xi$ é ortogonal a $\xi_i - \xi_j$. Além disso, $\nabla_{X_i}^\perp \xi$ é ortogonal a ξ, uma vez que $0 = X\langle \xi, \xi\rangle = \langle \nabla_{X_i}^\perp \xi, \xi\rangle$. Portanto, segue do paralelismo de N_1 que $\nabla_{X_i}^\perp \xi = 0$, para $i = 1, 2$. Agora, aplicando o resultado anterior, obtemos o desejado. □

CAPÍTULO

4

SUBVARIEDADES QUE ADMITEM FOLHEAÇÕES EXTRÍNSECAS

Neste capítulo estudaremos subvariedades em espaços produto $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ que admitem folheações extrínsecas. De forma mais precisa, estudaremos aquelas subvariedades de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ que admitem normais principais paralelas na conexão normal.

Dados uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ e um ponto $x \in M$, lembremos que um vetor $\xi \in T_xM^\perp$ é chamado um *normal principal* de f em x se o subespaço

$$E_\xi(x) = \{X \in T_xM : \alpha(X,Y) = \langle X,Y\rangle \xi, \forall\, Y \in T_xM\}$$

é não-trivial. De forma equivalente,

$$E_\xi(x) = \bigcap_{\gamma \in T_xM^\perp} \ker(A_\gamma - \langle \gamma, \xi\rangle I). \tag{4.1}$$

A prova do resultado seguinte é essencialmente a mesma do caso de imersões em espaços de forma. Por questão de completude, incluiremos ela aqui.

Proposição 4.1. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com um campo normal principal ξ de multiplicidadde k. Então, a distribuição $x \in M^m \mapsto E_\xi(x)$ é diferenciável.

Demonstração. Dado um ponto $x \in M$, note que

$$E_\xi^\perp(x) = \operatorname{span}\{B_\gamma X : X \in T_xM \text{ e } \gamma \in T_xM^\perp\},$$

onde $B_\gamma = A_\xi - \langle \gamma, \xi\rangle I$. Então, existem vetores tangentes $X_1, \ldots, X_{m-k} \in T_xM$ e vetores normais $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-k} \in T_xM^\perp$ tais que

$$E_\xi^\perp(x) = \operatorname{span}\{B_{\gamma_j} X_j : 1 \le j \le m-k\}.$$

Considere extensões diferenciáveis de $X_1,\dots,X_{m-k}$ e $\gamma_1,\dots,\gamma_{m-k}$ em uma vizinhança de x. Pela continuidade, os campos $\{B_{\gamma_j}X_j : 1 \le j \le m-k\}$ são linearmente independentes em uma vizinhança de x. Assim, $E_\xi^\perp$, e consequentemente E_ξ, é uma distribuição diferenciável. □

Lema 4. Sejam $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica e ξ um campo normal principal de f com multiplicidade $q \ge 2$. Valem as seguintes propriedades:

(a) $\nabla_Z^\perp \xi = -\varepsilon\langle Z,T\rangle\eta$, para todo $Z \in \Gamma(E_\xi)$.

(b) ξ é normal principal de Dupin se, e somente se, $T \in \Gamma(E_\xi^\perp)$ ou $\eta = 0$.

Demonstração. Dado um campo $Z \in \Gamma(E_\xi)$, considere $W \in \Gamma(E_\xi)$, unitário e ortogonal a Z. Aplicando a equação de Codazzi (3.5), obtemos

$$(\nabla_Z^\perp)\alpha(W,W) - (\nabla_W^\perp)\alpha(Z,W) = -\varepsilon\langle Z,T\rangle\eta. \tag{4.2}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (4.2), tem-se

$$\begin{aligned}(\nabla_Z^\perp)\alpha(W,W) - (\nabla_W^\perp)\alpha(Z,W) &= \nabla_Z^\perp\xi - 2\langle\nabla_Z W,W\rangle\xi + \langle\nabla_W Z,W\rangle\xi + \langle Z,\nabla_W W\rangle\xi \\ &= \nabla_Z^\perp\xi - Z\langle W,W\rangle\xi + W\langle Z,W\rangle\xi \\ &= \nabla_Z^\perp\xi.\end{aligned}$$

Isso prova o item (a). O item (b) segue imediatamente do item (a). □

Corolário 4.2. Sejam $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica e $\xi \in TM^\perp$ um normal principal de Dupin, com multiplicidade $q \ge 2$. Para os campos T e η, definidos em (3.1), valem as seguintes propriedades:

(i) η é paralelo ao longo de E_ξ, isto é, $\nabla_Z^\perp\eta = 0, \forall Z \in \Gamma(E_\xi)$;

(ii) $Z\langle T,X\rangle = \langle T,[Z,X]\rangle, \forall Z \in \Gamma(E_\xi)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. O item (i) segue da equação (3.3) do item (b) do Lema 4. Por outro lado, pelo item (b) do Lema 4, temos, em particular, que $0 = X\langle T,Z\rangle$, o que implica que

$$\langle\nabla_X T,Z\rangle = -\langle\nabla_X Z,T\rangle.$$

Disso e da equação (3.2), decorre que

$$\begin{aligned}Z\langle T,X\rangle &= \langle\nabla_Z T,X\rangle + \langle T,\nabla_Z X\rangle \\ &= \langle A_\eta Z,X\rangle + \langle T,\nabla_Z X\rangle \\ &= \langle A_\eta X,Z\rangle + \langle T,\nabla_Z X\rangle \\ &= \langle\nabla_X T,Z\rangle + \langle T,\nabla_Z X\rangle \\ &= -\langle\nabla_X Z,T\rangle + \langle T,\nabla_Z X\rangle \\ &= \langle T,[Z,X]\rangle,\end{aligned}$$

e isso prova o item (ii). $\square$

Uma imersão isométrica $f : M^m \to \tilde{M}^n$ entre variedades Riemannianas é chamada de *esfera extrínseca* se f é umbílica e seu campo de curvatura média é paralelo na conexão normal de f. Um fato conhecido é que uma subvariedade umbílica de dimensão maior ou igual a dois, em um espaço de forma, é uma esfera extrínseca. Em um espaço produto $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, decorre da equação de Codazzi (3.5) e da relação

$$\alpha(X,Y) = m\langle X,Y\rangle H,$$

para quaisquer $X,Y \in TM$, que

$$m\nabla^\perp_X H = -\langle X,T\rangle\eta, \tag{4.3}$$

para todo $X \in TM$, onde H é o campo curvatura média de f. Disso, segue que H é paralelo na conexão normal ao longo de $\{T\}^\perp$. Para $X = T$, obtemos

$$m\nabla^\perp_T H = -\|T\|^2\eta. \tag{4.4}$$

Decorre de (4.3) e (4.4) que uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ é uma esfera extrínseca se, e somente se, $f(M^m)$ é um subconjunto aberto de um slice $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \{t_0\}$, ou é um subconjunto aberto de um produto Riemanniano $M^{m-1} \times \mathbb{R}$, onde M^{m-1} é uma esfera extrínseca de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon$.

Teorema 4.3. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica que admite um campo normal principal de Dupin $\xi \in TM^\perp$ não-nulo, e com multiplicidade $q \geq 2$. Então, E_ξ é uma distribuição esférica e f transforma as folhas de E_ξ em esferas extrínsecas de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Reciprocamente, se E_ξ é uma distribuição esférica e f transforma as folhas de E_ξ em esferas extrínsecas de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, então ξ é um campo normal principal de Dupin.

Demonstração. Escreva, inicialmente, $\xi = \lambda\rho$, onde ρ é um campo unitário. Como ξ é de Dupin, temos que ξ é paralelo na conexão normal ao longo de $\Gamma(E_\xi)$. Assim,

$$0 = \nabla^\perp_Z(\lambda\rho) = Z(\lambda)\rho + \lambda\nabla^\perp_Z\rho,$$

para todo $Z \in \Gamma(E_\xi)$. Fazendo o produto interno com ρ, obtemos que $Z(\lambda) = 0$, e consequentemente, $\nabla^\perp_Z\rho = 0$, para todo $Z \in \Gamma(E_\xi)$. Observe que

$$\langle \operatorname{grad}\lambda, Z\rangle = Z(\lambda) = 0,$$

ou seja, $\operatorname{grad}\lambda \in \Gamma(E^\perp_\xi)$. Tomando a W-componente da equação de Codazzi (3.7), para (A_ρ, Z, X), para todo $W,Z \in \Gamma(E_\xi)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\langle(\nabla_X A^f)(Z,\rho) - (\nabla_Z A^f)(X,\rho), W\rangle = \varepsilon\langle\eta,\rho\rangle\langle(Z\wedge X)T, W\rangle.$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_X A^f)(Z,\rho)-(\nabla_Z A^f)(X,\rho),W\rangle &= \langle\nabla_Z A_\rho X - A_\rho\nabla_Z X,W\rangle - \langle\nabla_X A_\rho Z \\
&\quad -A_\rho\nabla_X Z - A_{\nabla^\perp_X\rho}Z,W\rangle \\
&= Z\langle A_\rho X,W\rangle - \langle A_\rho X,\nabla_Z W\rangle - \langle\alpha(\nabla_Z X,W),\rho\rangle \\
&\quad -X\langle\alpha(Z,W),\rho\rangle + \langle\alpha(Z,\nabla_X W),\rho\rangle + \lambda\langle\nabla_X Z,W\rangle \\
&= \lambda Z(\langle X,W\rangle) - \langle A_\rho X,\nabla_Z W\rangle - \langle\alpha(\nabla_Z X,W),\rho\rangle \\
&\quad -\langle Z,W\rangle X(\lambda) - \lambda X(\langle Z,W\rangle) + \lambda\langle Z,\nabla_X W\rangle \\
&\quad +\lambda\langle\nabla_X Z,W\rangle \\
&= \lambda\langle\nabla_Z W,X\rangle - \langle A_\rho X,\nabla_Z W\rangle - \langle Z,W\rangle\langle\operatorname{grad}\lambda,X\rangle,
\end{aligned}$$

enquanto que,

$$\begin{aligned}
\varepsilon\langle\eta,\rho\rangle\langle(Z\wedge X)T,W\rangle &= \varepsilon\langle\eta,\rho\rangle[\langle X,T\rangle\langle Z,W\rangle + \langle Z,T\rangle\langle X,W\rangle] \\
&= \varepsilon\langle\eta,\rho\rangle\langle X,T\rangle\langle Z,W\rangle,
\end{aligned}$$

pois Z é ortogonal a T, conforme o Lema 4. Portanto, concluímos que

$$\langle A_\rho X,\nabla_Z W\rangle - \lambda\langle\nabla_Z W,X\rangle = -\langle Z,W\rangle[\langle\operatorname{grad}\lambda,X\rangle - \varepsilon\langle\eta,\rho\rangle\langle X,T\rangle],$$

ou seja,

$$(A_\rho-\lambda I)\nabla_Z W = -\langle Z,W\rangle[\operatorname{grad}\lambda - \varepsilon\langle\eta,\rho\rangle T]. \tag{4.5}$$

De modo análogo, fazendo a W-componente da equação de Codazzi (3.7), para (A_θ,Z,X), para qualquer $\theta\in TM^\perp$, com θ ortogonal a ξ, obtemos

$$\langle A_\theta\nabla_Z W,X\rangle = \langle Z,W\rangle[\lambda\langle\nabla^\perp_X\theta,\rho\rangle - \varepsilon\langle\eta,\theta\rangle\langle X,T\rangle], \tag{4.6}$$

para quaisquer $Z,W\in\Gamma(E_\xi)$ e $X\in\mathfrak{X}(M)$. Considerando um par $Z,W\in\Gamma(E_\xi)$ ortogonal, em razão da igualdade (4.1), segue de (4.5) e (4.6), que

$$\nabla_Z W\in\Gamma(E_\xi). \tag{4.7}$$

Defina uma aplicação $\beta:\Gamma(E_\xi)\times\Gamma(E_\xi)\to\Gamma(E_\xi^\perp)$ pondo

$$\beta(Z,W) = (\nabla_Z W)_{E_\xi^\perp}.$$

Pelo Exemplo 2.3, concluímos que E_ξ é uma distribuição umbílica, com vetor curvatura média $\delta\in\Gamma(E_\xi^\perp)$, e satisfazendo:

$$(A_\rho-\lambda I)\delta = -(\operatorname{grad}\lambda - \varepsilon\langle\eta,\rho\rangle T). \tag{4.8}$$

e

$$\langle A_\theta\delta,X\rangle = \lambda\langle\nabla^\perp_X\theta,\rho\rangle - \varepsilon\langle\eta,\theta\rangle\langle X,T\rangle. \tag{4.9}$$

Agora, tomando a δ-componente na equação de Codazzi (3.7), para (A_ρ, Z, X), obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Z (A_\rho - \lambda I)X, \delta\rangle &= \langle (A_\rho - \lambda I)\delta, [Z,X]\rangle - \varepsilon\langle \eta,\rho\rangle\langle X,T\rangle\langle Z,\delta\rangle \\ &= \langle (A_\rho - \lambda I)\delta, [Z,X]\rangle,\end{aligned}$$

pelo fato que $\delta \in \Gamma(E_\xi^\perp)$. Disso segue que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Z A_\delta, (A_\rho - \lambda I)X\rangle &= Z\langle (A_\rho - \lambda I)\delta, X\rangle - \langle \delta, \nabla_Z (A_\rho - \lambda I)X)\rangle \\ &= Z\langle (A_\rho - \lambda I)\delta, X\rangle - \langle (A_\rho - \lambda I)\delta, [Z,X]\rangle.\end{aligned}$$

Desta forma, usando (4.8) e o Corolário 4.2, tem-se

$$\langle \nabla_Z \delta, (A_\rho - \lambda I)X\rangle = 0. \tag{4.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Z \delta, (A_\rho - \lambda I)X\rangle &= Z\langle \operatorname{grad}\lambda, X\rangle - \langle \operatorname{grad}\lambda, [Z,X]\rangle - \varepsilon Z(\langle \eta,\rho\rangle\langle T,X\rangle) \\ &\quad +\varepsilon\langle \eta,\rho\rangle\langle T,[Z,X]\rangle \\ &= -Z(X(\lambda)) + [Z,X](\lambda) - \varepsilon\langle \eta,\rho\rangle[Z(\langle T,X\rangle - \langle T,[Z,X]\rangle)] \\ &\quad -\varepsilon\langle T,X\rangle Z(\langle \eta,\rho\rangle) \\ &= -\varepsilon\langle T,X\rangle\langle \nabla_Z^\perp \eta,\rho\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

De modo análogo, tomando a δ-componente da equação de Codazzi (3.7), para (A_θ, Z, X), obtemos

$$\begin{aligned}\langle \delta, \nabla_Z A_\theta X\rangle &= \langle A_{\nabla_Z^\perp \theta}\delta, X\rangle + \langle A_\theta \delta, [Z,X]\rangle - \varepsilon\langle \eta,\theta\rangle\langle X,T\rangle\langle Z,\delta\rangle \\ &= \langle A_{\nabla_Z^\perp \theta}\delta, X\rangle + \langle A_\theta \delta, [Z,X]\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Z \delta, A_\theta X\rangle &= T\langle A_\theta \delta, X\rangle - \langle \delta, \nabla_Z A_\theta X\rangle \\ &= T\langle A_\theta \delta, X\rangle - \langle A_{\nabla_Z^\perp \theta}\delta, X\rangle - \langle A_\theta \delta, [Z,X]\rangle.\end{aligned}$$

Finalmente, usando (4.9), Corolário 4.2, e a equação de Ricci (3.6), obtemos que

$$\langle \nabla_Z \delta, A_\theta X\rangle = 0, \quad \forall Z \in \Gamma(E_\xi) \quad \text{e} \quad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.11}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Z \delta, A_\theta X\rangle &= \lambda Z(\langle \nabla_X^\perp \theta,\rho\rangle) - \varepsilon Z(\langle \eta,\theta\rangle\langle X,T\rangle) - \lambda\langle \nabla_X^\perp \nabla_Z^\perp \theta,\rho\rangle \\ &\quad +\varepsilon\langle \eta, \nabla_Z^\perp \theta\rangle\langle X,T\rangle - \lambda\langle \nabla_{[Z,X]}^\perp \theta,\rho\rangle + \varepsilon\langle \eta,\theta\rangle\langle [Z,X],T\rangle \\ &= \lambda\langle (R^\perp(Z,T)\theta),\rho\rangle - \varepsilon\langle X,T\rangle[Z\langle \eta,\theta\rangle - \langle \eta,\nabla_Z^\perp \theta\rangle] \\ &= \varepsilon\langle X,T\rangle\langle \nabla_Z^\perp \eta,\theta\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pelo fato que

$$E_\xi^\perp(x) = \operatorname{span}\left\{ \bigcup_{\gamma\in T_xM^\perp} Im(A_\gamma - \langle \gamma, \xi\rangle I)\right\},$$

para todo $x \in M$, segue de (4.10) e (4.11) que $\nabla_Z\delta \in \Gamma(E_\xi)$, para qualquer $Z \in \Gamma(E_\xi)$. Isso prova que E_ξ é esférica. Agora, se $\tilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_Z f_*W &= f_*(\nabla_Z W)_{E_\xi} + f_*(\nabla_Z W)_{E_\xi^\perp} + \alpha(Z,W)\\
&= f_*(\nabla_Z W)_{E_\xi} + \langle Z,W\rangle(f_*\delta + \xi).
\end{aligned}$$

Usando que $\nabla_Z^\perp \xi = 0 = \alpha(Z,\delta)$, obtemos que

$$\tilde{\nabla}_Z(f_*\delta+\xi) = f_*\nabla_Z\delta - f_*A_\xi Z = -(f_*\|\delta\|^2 + \|\xi\|^2)f_*Z.$$

Assim, $f_*\delta+\xi$ é paralelo na conexão normal de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, o que prova que a restrição de f a cada folha de E_ξ é uma esfera extrínseca de $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Reciprocamente, considere uma folha $\mathscr{L}$ de E_ξ e seja $\tilde{f} = f \circ i$, onde $i : \mathscr{L} \to M^m$ denota a inclusão de $\mathscr{L}$ em M^m como uma esfera extrínseca. Dados $X, Y \in \Gamma(E_\xi)$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_{\tilde{f}}(X,Y) &= f_*\alpha_i(X,Y) + \alpha_f(i_*X, i_*Y)\\
&= \langle X,Y\rangle(f_*\delta+\xi).
\end{aligned}$$

Isso implica que $\tilde{f}$ é umbílica. Como f transforma $\mathscr{L}$ em uma esfera extríseca, obtemos que

$$\nabla_X^\perp \sigma = 0, \tag{4.12}$$

para todo $X \in \Gamma(E_\xi)$. Por outro lado, temos

$$\nabla_X^\perp \sigma = f_*\big({}^i\nabla_X^\perp\delta - A_\xi i_*X|_{T\mathscr{L}_i^\perp}\big) + {}^f\nabla_{i_*X}\xi, \tag{4.13}$$

para todo $X \in \Gamma(E_\xi)$. Segue de (4.12) e (4.13) que ξ é normal principal de Dupin. □

Proposição 4.4. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Se η é não-nulo e $E_\eta \neq \emptyset$, então η não é de Dupin.

Demonstração. Note que

$$\nabla_X^\perp \eta = -\alpha(T,X) = -\langle X,T\rangle\eta,$$

para todo $X \in \Gamma(E_\eta)$. Assim, η é de Dupin se, e somente se, X é ortogonal a T. Supondo que η é de Dupin, temos também que $T \in \Gamma(E_\eta^\perp)$. Conforme as notações e a demonstração da Proposição 4.3, são válidas as equações (4.8) e (4.9). Assim, tomando a T-componente em (4.8) segue que

$$\langle (A_\rho - \lambda I)\delta, T\rangle = -\langle \operatorname{grad}\lambda, T\rangle + \varepsilon\lambda\|T\|^2,$$

onde $\delta \in \Gamma(E_\eta^\perp)$ é a curvatura média de E_η. Fazendo $X = T$ em (4.9),

$$\langle A_\theta \delta, T\rangle = \lambda \langle \nabla_T^\perp \theta, \rho\rangle,$$

para todo θ ortogonal a η. Observando que

$$\langle \operatorname{grad} \lambda, T\rangle = T(\lambda) = T\langle \eta, \rho\rangle = \langle \nabla_T^\perp \eta, \rho\rangle + \langle \eta, \nabla_T^\perp \rho\rangle = -\langle \alpha(T,T), \rho\rangle$$

e

$$\lambda \langle \nabla_T^\perp \theta, \rho\rangle = -\langle \theta, \nabla_T^\perp \eta\rangle = \langle \theta, \alpha(T,T)\rangle,$$

obtemos, respectivamente:

$$\langle \alpha(T, \delta - T), \rho\rangle = \lambda \langle T, \delta - T\rangle \quad \text{e} \quad \langle \alpha(T, \delta - T), \theta\rangle = 0,$$

para todo θ ortogonal a η. Portanto, $\alpha(T, \delta - T) = \langle T, \delta - T\rangle \eta$. De modo análogo, para $X \in \Gamma(E_\eta^\perp)$, com X ortogonal a T, temos que $\alpha(X, \delta - T) = \langle X, \delta - T\rangle \eta$. Assim, $(\delta - T) \in \Gamma(E_\eta)$. Como $\delta, T \in \Gamma(E_\eta^\perp)$, segue que $\delta = T$, ou seja, T é a curvatura média de E_η. Consequentemente, dados $Z, W \in \Gamma(E_\eta)$, vale que $\langle \nabla_Z W, T\rangle = \langle Z, W\rangle \|T\|^2$. Por outro lado, temos

$$\langle \nabla_Z W, T\rangle = -\langle W, \nabla_Z T\rangle = -\langle W, A_\eta Z\rangle = -\langle Z, W\rangle \|\eta\|^2,$$

o que é uma contradição, pois $\|T\| \neq -\|\eta\|$. Logo, η não pode ser de Dupin. $\square$

O resultado seguinte nos dá uma condição equivalente para uma imersão isométrica pertencer à classe $\mathscr{A}$.

Teorema 4.5. Considere uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, com $T \neq 0$, e suponha $E_\eta = \operatorname{span}\{X_1, \ldots, X_k\} \neq \emptyset$. Então, f está na classe $\mathscr{A}$ se, e somente se, $T \in \Gamma(E_\eta)$.

Demonstração. Se $T \in \Gamma(E_\eta)$, então

$$\nabla_Y^\perp \eta = -\alpha(T, Y) = -\langle T, Y\rangle \eta = 0,$$

para todo $Y \in \{T\}^\perp$, mostrando que f pertence a classe $\mathscr{A}$. Reciprocamente, se $f \in \mathscr{A}$, então para cada $\xi \in TM^\perp$, existe uma função diferenciável λ_ξ tal que $A_\xi T = \lambda_\xi T$. Observe que

$$\langle \alpha(X, Y), \xi\rangle = \langle X, Y\rangle \langle \xi, \eta\rangle,$$

para quaisquer $X \in \Gamma(E_\eta)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in TM^\perp$, ou seja, $A_\xi X = \langle \xi, \eta\rangle X$. Decompondo $T = T_1 + T_2$, onde $T_1 \in \Gamma(E_\eta)$ e $T_2 \in \Gamma(E_\eta^\perp)$, tem-se que $T_1 \neq 0$, pois caso contrário η seria de Dupin. Além disso,

$$\langle A_\xi T, T_1\rangle = \lambda_\xi ||T_1||^2,$$

enquanto que $\langle A_\xi T_1, T\rangle = \langle \xi, \eta\rangle ||T_1||^2$. Assim, como $||T_1|| \neq 0$, segue que $\lambda_\xi = \langle \xi, \eta\rangle$. Portanto, $\langle \alpha(T, Y), \xi\rangle = \langle \eta, \xi\rangle \langle T, Y\rangle$, para quaisquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in TM^\perp$, mostrando $T \in \Gamma(E_\eta)$. $\square$

Corolário 4.6. Seja $f : M^m \to \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Se $E_\eta \neq \emptyset$, a multiplicidade q de E_η é igual a 1. Além disso, f pertence à classe $\mathscr{A}$ se, e somente se, $E_\eta = \operatorname{span}\{T\}$.

Demonstração. Por definição de E_η, e usando (3.3), tem-se

$$\nabla^\perp_X \eta = -\alpha(T, X) = -\langle X, T\rangle \eta, \tag{4.14}$$

para todo $X \in \Gamma(E_\eta)$. Por outro lado, se $q \geq 2$, segue do Lema 4 que

$$\nabla^\perp_X \eta = \langle X, T\rangle \eta, \tag{4.15}$$

para todo $X \in \Gamma(E_\eta)$. De (4.14) e (4.15) decorre que $\nabla^\perp_X \eta = 0$, para todo $X \in \Gamma(E_\eta)$, contradizendo a Proposição 4.4. Portanto, E_η tem multiplicidade 1. Além disso, como η não é de Dupin, temos que T não é ortogonal a E_η, e a conclusão segue do Teorema 4.5. $\square$

CAPÍTULO

5

SUBVARIEDADES DE EINSTEIN COM CURVATURA MÉDIA PARALELA

O objetivo central deste capítulo é apresentar uma caracterização das subvariedades de Einstein em $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo.

5.1 Resultados preliminares

Lembremos que uma variedade Riemanniana $(M^n, \langle,\rangle)$ é chamada uma *variedade de Einstein* quando seu tensor de Ricci satisfaz

$$Ric_M(X,Y) = \rho\langle X,Y\rangle,$$

para quaisquer $X,Y \in TM$ e para alguma constante $\rho \in \mathbb{R}$. Variedades Riemannianas M^n com curvatura seccional constante c são exemplos simples de variedades de Einstein, onde $\rho = (n-1)c$. Reciprocamente, para $n = 3$, toda variedade de Einstein conexa tem curvatura seccional constante. Uma imersão isométrica $f : M^m \to \tilde{M}^n$ é dita ser uma *subvariedade de Einstein* quando M^m é uma variedade de Einstein na métrica induzida.

Hipersuperfícies de Einstein no espaço Euclidiano foram classificadas por Thomas (THOMAS, 1936), Fialkow (FIALKOW, 1938) e Ryan (RYAN, 1969). Mais precisamente, para uma hipersuperfície de Einstein M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$, ou a curvatura de Ricci ρ é identicamente nula, e neste caso a hipersuperfície é flat, ou $\rho > 0$ e, neste caso, a hipersuperfície é um subconjunto de uma esfera. Para os demais espaços de forma, este problema também foi considerado por Fialkow (FIALKOW, 1938) e Ryan (RYAN, 1969). Finalmente, observamos que subvariedades de Einstein em espaços de forma, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralela foram estudadas e classificadas por Onti (ONTI, 2018).

Quando o ambiente é o produto $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, hipersuperfícies de Einstein foram estudadas em (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021), onde os autores provam que tais hipersuperfícies pertencem à classe $\mathscr{A}$. Mais precisamente, o resultado central de (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021) é que toda hipersuperfície de Einstein em $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, com $n \geq 4$, tem curvatura seccional constante.

O que faremos nessa seção é estender o resultado básico de (LEANDRO; PINA; SANTOS, 2021) para subvariedades de Einstein em $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat.

Lema 5. O tensor de Ricci de uma imersão isométrica $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ é dado por

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) =&\varepsilon(m-1-\|T\|^2)\langle X,Y\rangle + \varepsilon(2-m)\langle X,T\rangle X, Tr\langle T,T\rangle \\ &+m\langle H, \alpha(X,Y)\rangle - III(X,Y), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde

$$III(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha(X,X_i), \alpha(Y,X_i)\rangle$$

denota a terceira forma fundamental de f escrita em termos de um referencial ortonormal $\{X_1, \ldots, X_m\}$ de M.

Demonstração. Seja $\{X_1, \ldots, X_m\} \subset TM$ um referencial ortonormal. Então,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} \langle R(X_i,X)Y, X_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\langle \varepsilon(X_i \wedge X)Y - \varepsilon\langle X,T\rangle(X_i \wedge T)Y + \varepsilon\langle X_i,T\rangle(X\wedge T)Y \\ &+ A_{\alpha(X,Y)}X_i - A_{\alpha(X_i,Y)}X, X_i\rangle] \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\varepsilon(\langle X,Y\rangle\langle X_i,X_i\rangle - \langle X,X_i\rangle\langle Y,X_i\rangle) - \varepsilon\langle X,T\rangle(\langle Y,T\rangle\langle X_i,X_i\rangle - \langle Y,X_i\rangle\langle T,X_i\rangle) \\ &+ \varepsilon\langle T,X_i\rangle(\langle Y,T\rangle\langle X,X_i\rangle - \langle X,Y\rangle\langle T,X_i\rangle) + \langle \alpha(X_i,X_i), \alpha(X,Y)\rangle \\ &- \langle \alpha(X,X_i), \alpha(Y,X_i)\rangle \\ &= \varepsilon(m-1)\langle X,Y\rangle - \varepsilon\langle X,T\rangle(m\langle Y,T\rangle - \langle Y,T\rangle) + \varepsilon\langle Y,T\rangle\langle X,T\rangle - \varepsilon\langle X,Y\rangle\|T\|^2 \\ &+ m\langle H, \alpha(X,Y)\rangle - III(X,Y) \\ &= \varepsilon(m-1-\|T\|^2)\langle X,Y\rangle + \varepsilon(2-m)\langle X,T\rangle\langle Y,T\rangle + m\langle H,\alpha(X,Y)\rangle - III(X,Y). \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica de uma variedade Einstein M^m, $m \geq 3$, com fibrado normal flat num ponto $x \in M$. Se $T \neq 0$ em $x \in M$, então T é direção principal de todos os operadores de forma de f em x.

Demonstração. Como f tem fibrado normal flat em $x \in M$, decorre da Proposição 3.8 que existe uma base ortonormal

$$\{X_1, \ldots X_m\} \subset T_xM \tag{5.2}$$

que diagonaliza todos os operadores de forma ou, equivalentemente,

$$\alpha(X_i, X_j) = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq m. \tag{5.3}$$

Como M^m é de Einstein, tem-se

$$Ric(X_i, X_j) = \rho\delta_{ij}, \tag{5.4}$$

para algum $\rho \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$Ric(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{m} \langle R(X_k, X_i)X_j, X_k\rangle = \rho\delta_{ij}.$$

Escrevendo $T(x) = \sum t_k X_k$, e aplicando o tensor de Ricci à base (5.2), obtemos

$$Ric(X_i, X_j) = \left[\varepsilon(m-1-\|T\|^2) + m\lambda_i\right]\delta_{ij} + \varepsilon(2-m)t_it_j - III(X_i, X_j). \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5), obtemos:

$$\left[\varepsilon(m-1-\|T\|^2) + m\lambda_i - \rho\right]\delta_{ij} + \varepsilon(2-m)t_it_j - III(X_i, X_j) = 0. \tag{5.6}$$

Note que a terceira forma fundamental $III(X_i, X_j)$, expressa em termos da base (5.2), é sempre igual a zero para $i \neq j$. Portanto, segue de (5.6) que

$$t_it_j = 0,\ 1 \leq i \neq j \leq m.$$

Como $t(x) \neq 0$, concluímos que existe somente um índice $1 \leq k \leq m$, com $t_k \neq 0$. Isso implica que $T(x) = t_kX_k$, como queríamos. $\square$

Decorre do Teorema 5.1 que toda subvariedade de Einstein em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat, pertence à classe $\mathscr{A}$. Assim, sem perda de generalidade, sempre que $f \in \mathscr{A}$, fixaremos que $T \in E_1$.

Observação 5.2. Seja $Y \in \Gamma(E_k) \cap \{T\}^\perp$, com $1 \leq k \leq s$. Então, para todo X ortogonal a Y, tem-se

$$\nabla_X Y \in \{T\}^\perp \quad \text{e} \quad \nabla_X T \in \{Y\}^\perp.$$

De fato,

$$\langle \nabla_X Y, T\rangle = -\langle Y, \nabla_X T\rangle = -\langle Y, A_\eta X\rangle = \langle \alpha(X,Y), \eta\rangle = 0.$$

Além disso,

$$\langle \nabla_Y T, T\rangle = \langle A_\eta Y, T\rangle = \langle \alpha(Y,T), \eta\rangle = 0,$$

ou seja, $Y(\|T\|^2) = 0$, para todo $Y \in \{T\}^\perp$. Assim, $\|T\|$ e consequentemente $\|\eta\|$, são constantes ao longo de $\{T\}^\perp$.

5.2 Subvariedades de Einstein

Lema 6. Sejam M^m uma variedade Einstein conexa, com $m \geq 3$, e $f : M^m \to \mathbb{Q}^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com fibrado normal flat, $T \neq 0$ e vetor de curvatura média paralelo.

(a) Se $\dim E_1 > 1$, então $\left\|\xi_1 - \frac{m}{2}H\right\|^2 = \left\|\frac{m}{2}H\right\|^2 - \lambda + (m-2)\varepsilon + \|\eta\|^2\varepsilon$.

(b) Para todo $2 \leq k \leq s$, vale que $\left\|\xi_k - \frac{m}{2}H\right\|^2 = \left\|\frac{m}{2}H\right\|^2 - \lambda + (m-2)\varepsilon + \|\eta\|^2\varepsilon$.

Demonstração. Como M^m é Einstein conexa, com $m \geq 3$, temos que $\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda\langle X,Y\rangle$, com λ constante. Além disso, conforme o Lema 5, temos que $f \in \mathscr{A}$, e equivalentemente, $T \in \Gamma(E_1)$.

(a) Seja $Y \in \Gamma(E_1)$ unitário, com Y ortogonal a T. Considere uma base ortonormal $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, onde $X_1 = \frac{T}{\|T\|}$, $X_2 = Y$ e cada X_i pertence à algum $\Gamma(E_j)$. Usando a equação de Gauss (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
\lambda &= \mathrm{Ric}(X_2,X_2) = \sum_{i=1}^{m}\langle R(X_i,X_2)X_2,X_i\rangle \\
&= \langle R(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle + \langle R(X_2,X_2)X_2,X_2\rangle + \sum_{i=3}^{m}\langle R(X_i,X_2)X_2,X_i\rangle \\
&= \varepsilon(1-\|T\|^2) + \|\xi_1\|^2 + 0 + \sum_{j=2}^{s}[\varepsilon + \langle\xi_j,\xi_1\rangle]\dim E_j + [\varepsilon + \|\xi_1\|^2](\dim E_1 - 2) \\
&= \varepsilon\|\eta\|^2 + \|\xi_1\|^2(\dim E_1 - 1) + (m-2)\varepsilon + \sum_{j=2}^{s}\langle\xi_j,\xi_2\rangle\dim E_j
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\xi_1\|^2(\dim E_1 - 1) + \sum_{j=2}^{s}\langle\xi_j,\xi_2\rangle\dim E_j = \lambda - (m-2)\varepsilon - \|\eta\|^2\varepsilon. \tag{5.7}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
m\langle\xi_1,H\rangle &= |\xi_1\|^2\dim E_1 + \sum_{j=2}^{s}\langle\xi_j,\xi_1\rangle\dim E_j \\
&= \lambda - (m-2)\varepsilon - \|\eta\|^2\varepsilon + \|\xi_1\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|\xi_1 - \frac{m}{2}H\right\|^2 = \left\|\frac{m}{2}H\right\|^2 - \lambda + (m-2)\varepsilon + \|\eta\|^2\varepsilon.$$

(b) Considere uma base ortonormal $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, onde $X_1 = \frac{T}{\|T\|}$ e cada X_i pertence à algum $\Gamma(E_j)$. Se existir $Y \in \Gamma(E_1)$ unitário, com Y ortogonal a T, fixamos que $X_2 = Y$.

Usando a equação de Gauss (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
\lambda &= \mathrm{Ric}(X_k,X_k) = \sum_{i=1}^{m}\langle R(X_i,X_k)X_k,X_i\rangle \\
&= \langle R(X_1,X_k)X_k,X_1\rangle + \langle R(X_k,X_k)X_k,X_k\rangle + \sum_{k\neq i=2}^{m}\langle R(X_i,X_k)X_k,X_i\rangle \\
&= \varepsilon(1-\|T\|^2) + \langle\xi_1,\xi_k\rangle + 0 + \sum_{k\neq j=2}^{s}[\varepsilon+\langle\xi_j,\xi_k\rangle]\dim E_j + [\varepsilon+\|\xi_k\|^2](\dim E_k - 1) \\
&+ [\varepsilon+\langle\xi_1,\xi_k\rangle](\dim E_1 - 1) \\
&= \varepsilon\|\eta\|^2 + \langle\xi_1,\xi_k\rangle\dim E_1 + (m-2)\varepsilon + \sum_{k\neq j=2}^{s}\langle\xi_j,\xi_k\rangle\dim E_j + \|\xi_k\|^2(\dim E_k - 1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\dim E_1\langle\xi_1,\xi_k\rangle + \sum_{k\neq j=2}^{s}\langle\xi_j,\xi_k\rangle\dim E_j + \|\xi_k\|^2(\dim E_k-1) = \lambda-(m-2)\varepsilon-\|\eta\|^2\varepsilon. \tag{5.8}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
m\langle\xi_k,H\rangle &= \dim E_1\langle\xi_1,\xi_k\rangle + \sum_{k\neq j=2}^{s}\langle\xi_j,\xi_k\rangle\dim E_j + \|\xi_k\|^2(\dim E_k-1) + \|\xi_k\|^2 \\
&= \lambda-(m-2)\varepsilon-\|\eta\|^2\varepsilon+\|\xi_k\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|\xi_k-\frac{m}{2}H\right\|^2 = \left\|\frac{m}{2}H\right\|^2 - \lambda + (m-2)\varepsilon + \|\eta\|^2\varepsilon.$$

□

Em particular, a importância do Lema 6, é o fato de que $\|\xi_k-\frac{m}{2}H\|^2$ é constante ao longo de $\{T\}^\perp$, e independe de k, com $2\le k\le s$. No caso em que $\dim E_1>1$, o mesmo vale para $k=1$.

Lema 7. Sejam M^m uma variedade Einstein conexa, com $m\geq 3$, e $f: M^m\to\mathbb{Q}^n_\varepsilon\times\mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat e campo de curvatura média paralelo. Então, ξ_i é paralelo na conexão normal, ao longo de $\{T\}^\perp$, para todo $1\le i\le s$.

Demonstração. Primeiramente, consideramos $X,Y\in\Gamma(E_i)$, com $2\le i\le s$ e $Z\in\Gamma(E_k)\cap\{T\}^\perp$, com $1\le i\neq k\le s$. Da equação de Codazzi (3.18), segue que

$$\langle X,Y\rangle\nabla^\perp_Z\xi_i = \langle\nabla_X Y,Z\rangle(\xi_i-\xi_k). \tag{5.9}$$

Como H é paralelo, obtemos que

$$\langle X,Y\rangle\nabla^\perp_Z\left(\xi_i-\frac{m}{2}H\right) = \langle\nabla_X Y,Z\rangle(\xi_i-\xi_k).$$

Disso, segue que

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle\left\langle\xi_i-\xi_k,\xi_i-\frac{m}{2}H\right\rangle=\langle X,Y\rangle Z\left(\|\xi_i-\frac{m}{2}H\|^2\right), \tag{5.10}$$

onde

$$\left\|\xi_i-\frac{m}{2}H\right\|^2=\|\frac{m}{2}H\|^2-\lambda+(m-2)\varepsilon+\|\eta\|^2\varepsilon. \tag{5.11}$$

Note que (5.11) é constante ao longo de Z, assim o lado direito de (5.10) se anula. Usando (5.11), observamos que

$$\left\langle\xi_i-\xi_k,\xi_i-\frac{m}{2}H\right\rangle=\left\|\xi_i-\frac{m}{2}H\right\|^2-\left\langle\xi_i-\frac{m}{2}H,\xi_k-\frac{m}{2}H\right\rangle\neq 0.$$

Concluímos assim que $\langle\nabla_X Y, Z\rangle=0$, para todos $X,Y\in\Gamma(E_i)$, com $2\leq i\leq s$. Conforme a Equação 5.9, temos que $\nabla^\perp_Z\xi_i=0$, para todo $Z\in\Gamma(E_k)\cap\{T\}^\perp$, com $1\leq i\neq k\leq s$. Agora, para $Z\in E_i$, obtemos que

$$0=\nabla^\perp_Z H=\sum_{i\neq k=1}^{s}\dim E_k\nabla^\perp_Z\xi_k+\dim E_i\nabla^\perp_Z\xi_i,$$

o que implica que $\nabla^\perp_Z\xi_i=0$, com $Z\in\Gamma(E_i)$. Portanto, para $2\leq i\leq s$, temos que ξ_i é paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$.

Agora, para $i=1$, obtemos da Equação de Codazzi (3.18), que

$$\|T\|^2\nabla^\perp_Z\xi_1=\langle\nabla_T T,Z\rangle(\xi_1-\xi_k),$$

para todo $Z\in\Gamma(E_k)$, com $2\leq k\leq s$. Conforme a Observação 5.2, segue que $\nabla^\perp_Z\xi_1=0$, para todo $Z\in\Gamma(E_k)$. Note ainda que, se existe $X\in\Gamma(E_1)\cap\{T\}^\perp$, então

$$\dim E_1\nabla^\perp_X\xi_1=\nabla^\perp_X H-\sum_{k=2}^{s}\dim E_k\nabla^\perp_X\xi_k.$$

Conforme o caso anterior, $\nabla^\perp_X\xi_k=0$, para $2\leq k\leq s$. Logo, $\nabla^\perp_X\xi_1=0$. Isto prova que ξ_1 também é paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$. □

Em particular, para $i\neq 1$, temos que ξ_i é normal principal de Dupin.

Proposição 5.3. Sejam M^m uma variedade Einstein conexa, com $m\geq 3$, e $f: M^m\to\mathbb{Q}^n_\varepsilon\times\mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat e campo de curvatura média paralelo. Então:

(a) E_k é esférica, para todo $k=2,\cdots,s$.

(b) $E_k^\perp$ é totalmente geodésica, para todo $k=2,\cdots,s$.

Demonstração. (a) Dados $X,Y \in \Gamma(E_k)$, temos que

$$\langle \nabla_X Y, T\rangle = -\langle X,Y\rangle\langle T,\langle \eta,\xi_k\rangle T\rangle \frac{1}{\|T\|^2} = \langle X,Y\rangle\langle T,\delta\rangle, \tag{5.12}$$

onde $\delta = -\frac{1}{\|T\|^2}\langle \eta,\xi_k\rangle T \in \Gamma(E_k^{\perp})$. Para $Z \in \Gamma(E_i) \cap \{T\}^{\perp}$, com $1 \leq i \neq k \leq s$, temos pelo Lema 7, que $\nabla_Z^{\perp}\xi_k = 0$. Assim, a Equação de Codazzi implica que $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = 0 = \langle X,Y\rangle\langle Z,\delta\rangle$. Disso, e de (5.12), concluímos que E_k é umbílica, com vetor de curvatura média $\delta = -\frac{1}{\|T\|^2}\langle \eta,\xi_k\rangle T$. Agora, vamos mostrar que $\langle \nabla_X \delta, Z\rangle = 0$, para todo $X \in \Gamma(E_k)$ e $Z \in \Gamma(E_k^{\perp})$. Pela Observação 5.2, obtemos que

$$\langle \nabla_X \delta, Z\rangle = -\frac{1}{\|T\|^2} X\langle \eta,\xi_k\rangle\langle T,Z\rangle = -\frac{\langle T,Z\rangle}{\|T\|^2}\langle \eta,\nabla_X^{\perp}\xi_k\rangle = 0,$$

conforme o Lema 7. Portanto, E_k é esférica.

(b) Sejam $X \in \Gamma(E_i), Y \in \Gamma(E_j)$ e $Z \in \Gamma(E_k)$, com $1 \leq i,j \leq s$ e $i,j \neq k$. Basta mostrarmos que $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = 0$. Para $1 \leq i = j \leq s$, segue do Lema 7 e da Equação de Codazzi.

Agora, considerando $1 \leq i \neq j \leq s$, dividimos nos seguintes casos:

1º Caso: Sejam $j = 1$ e $Y = \lambda T$, para algum $\lambda \in C^{\infty}(M)$. Então,

$$\langle \nabla_X \lambda T, Z\rangle = \lambda\langle A_\eta X, Z\rangle = 0.$$

2º Caso: Sejam $i = 1$ e $X = \lambda T$, para algum $\lambda \in C^{\infty}(M)$. Pela Equação de Codazzi (3.19), segue que

$$\langle \nabla_{\lambda T} Y, Z\rangle(\xi_j - \xi_k) = \langle \nabla_Y \lambda T, Z\rangle(\xi_i - \xi_k) = 0,$$

conforme o caso anterior.

3º Caso: Sejam $X,Y \in \{T\}^{\perp}$. Como $1 \leq i \neq j \leq s$, a Equação de Codazzi (3.19), diz que

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle(\xi_j - \xi_k) = \langle \nabla_Y X, Z\rangle(\xi_i - \xi_k). \tag{5.13}$$

Afirmamos que $\xi_i - \xi_k$ e $\xi_j - \xi_k$ são linearmente independentes.

De fato, suponha o contrário, logo existe $u \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que

$$\xi_i - \xi_k = u(\xi_j - \xi_k).$$

Disso, obtemos

$$(1-u)\left(\xi_k - \frac{m}{2}H\right) = \xi_i - \frac{m}{2}H - u\left(\xi_j - \frac{m}{2}H\right).$$

Tomando a norma e usando o Lema 6, concluímos que $\xi_i = \xi_j$, o que é uma contradição.

Portanto, de (5.13), temos que $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = 0$.

□

Teorema 5.4. Sejam M^m uma variedade de Einstein conexa, com $m \geq 3$, e $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat e campo de curvatura média paralelo. Então M é localmente isométrica a uma variedade produto warped $\Pi_{i=1}^s M_i$, onde cada M_i é umbílica.

Demonstração. Pela Proposição 5.3, a rede ortogonal $\varepsilon = \{E_i\}_{\{i:1,\dots,s\}}$, satisfaz às condições do Teorema 2.7. Portanto, localmente existe uma isometria com respeito a uma métrica produto warped em $\Pi_{i=1}^s M_i$. □

No caso particular em que M é um produto Riemanniano, obtemos algumas características interessantes, que são descritas nos resultados abaixo.

Proposição 5.5. Sejam M^m uma variedade de Einstein conexa, com $m \geq 3$, e $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat e campo de curvatura média paralelo. Então M é localmente isométrica a uma variedade produto Riemanniano $\Pi_{i=1}^s M_i$, onde cada M_i é umbílica se, e somente se, $\langle \xi_k, \eta \rangle = 0$, para todo $2 \leq k \leq s$.

Demonstração. Nestas condições, o produto $M = \Pi M_i$ é Riemanniano se, e somente se, as distribuições E_k são totalmente geodésicas, para todo $2 \leq k \leq s$.

Conforme a demonstração da Proposição 5.3, cada E_k é esférica com vetor de curvatura média $\delta = -\frac{1}{\|T\|^2}\langle \eta, \xi_k \rangle T \in \Gamma(E_k^\perp)$. Assim, E_k é totalmente geodésica se, e somente se, $\delta = 0$, ou equivalentemente, η é ortogonal a ξ_k. □

Corolário 5.6. Sejam M^m uma variedade de Einstein conexa, com $m \geq 3$, e $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, com fibrado normal flat e campo de curvatura média paralelo. Se M é localmente isométrica a uma variedade produto Riemanniano $\Pi_{i=1}^s M_i$, onde cada M_i é umbílica, então são satisfeitas:

(a) $\langle \xi_i, \eta \rangle = 0$, para todo $1 \leq i \leq s$, em particular, $A_\eta \equiv 0$ e $\langle H, \eta \rangle = 0$.

(b) $\|T\|$ é constante.

(c) $\langle \xi_i, \xi_j \rangle$ é constante, para todos $1 \leq i, j \leq s$. Em particular ξ_i tem norma constante.

Demonstração. (a) Usando a Proposição 5.5 na Equação de Codazzi 3.18, segue que

$$\nabla_T^\perp \xi_k = -\varepsilon \|T\|^2 \eta, \qquad \forall 2 \leq k \leq s. \tag{5.14}$$

Consequentemente, obtemos que $\nabla_T^\perp H = \nabla_T^\perp \xi_1 - (m-1)\varepsilon \|T\|^2 \eta$, assim,

$$\nabla_T^\perp \xi_1 = (m-1)\varepsilon \|T\|^2 \eta. \tag{5.15}$$

Além disso, $T\langle \xi_k, \eta \rangle = 0$ implica que $\langle \nabla_T^\perp \xi_k, \eta \rangle = -\langle \xi_k, \nabla_T^\perp \eta \rangle$. Logo,

$$-\varepsilon \|T\|^2 \|\eta\|^2 = \|T\|^2 \langle \xi_k, \xi_1 \rangle. \tag{5.16}$$

Assim, $T(\|\eta\|^2) = -\varepsilon T\langle \xi_k, \xi_1 \rangle$. Por um lado, temos que $T\|\eta\|^2 = 2\langle \nabla_T^\perp \eta, \eta \rangle$, ou seja, $T\|\eta\|^2 = -2\|T\|^2\langle \xi_1, \eta \rangle$. Mas usando as Equações (5.14) e (5.15), segue que

$$T\langle \xi_k, \xi_1 \rangle = \langle \nabla_T^\perp \xi_k, \xi_1 \rangle + \langle \xi_k, \nabla_T^\perp \xi_1 \rangle = -\varepsilon \|T\|^2 \langle \eta, \xi_1 \rangle. \tag{5.17}$$

Portanto, $\langle \eta, \xi_1 \rangle = 0$.

(b) Conforme a Observação 5.2, $\|T\|$ é constante se, e somente se, $T\|T\|^2 = 0$. Mas note que $T\|T\|^2 = 2\langle \nabla_T T, T \rangle = 2\langle A_\eta T, T \rangle = 2\|T\|^2\langle \eta, \xi_1 \rangle$.

Logo, segue do item anterior que $\|T\|$ é constante.

(c) Pela Equação (5.14), temos que $T\langle \xi_k, \xi_j \rangle = \langle \nabla_T^\perp \xi_k, \xi_j \rangle + \langle \nabla_T^\perp \xi_j, \xi_k \rangle = -\varepsilon\|T\|^2\langle \eta, \xi_k \rangle - \varepsilon\|T\|^2\langle \eta, \xi_j \rangle = 0$, para todo $2 \leq k, j \leq s$. Da Equação (5.17), temos que $T\langle \xi_k, \xi_1 \rangle = 0$, para todo $2 \leq k \leq s$. Além disso, da Equação (5.15), segue que

$$T\|\xi_1\|^2 = 2\langle \nabla_T^\perp \xi_1, \xi_1 \rangle = 2(m-1)\varepsilon \|T\|^2 \langle \eta, \xi_1 \rangle.$$

Disso e do Lema 7, concluímos que $\langle \xi_i, \xi_j \rangle$ é constante, para todo $1 \leq i, j \leq s$.

□

5.3 O teorema principal

O objetivo dessa seção é provar que toda subvariedade de Einstein em $\mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo, quando vista no ambiente flat, é um produto warped de imersões isométricas.

Dado $n > 0$, seja

$$\mathbb{E}^{n+2} = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+2}, & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \mathbb{L}^{n+2}, & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

munido da métrica flat

$$ds^2 = \varepsilon dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{n+2}^2.$$

Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com fibrado normal flat e suponha que f esteja na classe $\mathscr{A}$. Assim, em virtude de (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014, Corollary 1.3), a composta $\tilde{f} = i \circ f$ também tem fibrado normal flat, onde $i : \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ denota a inclusão canônica. Denote por $\bar{N} = \pi \circ i$ o campo unitário, normal à inclusão i, onde $\pi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a projeção dada por $\pi(x) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0)$. Considere a decomposição

$$T_x M = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_s(x),$$

para a imersão f associada aos normais principais $\xi_1, \ldots, \xi_s$, conforme visto na Seção 3.3. Suponhamos, como antes, que $T \in \Gamma(E_1)$.

Lema 8. Nas considerações acima, temos:

(a) Se $\dim E_1 = 1$, então

$$T_xM = E_1(x) \oplus \ldots \oplus E_s(x),$$

também é uma decomposição para $\tilde{f}$, cujos normais principais são

$$i_*\xi_1 - \|\eta\|^2\bar{N}, i_*\xi_1 - \bar{N}, \ldots, i_*\xi_s - \bar{N}.$$

(b) Se $\dim E_1 \geq 2$, então

$$T_xM = \mathrm{span}\{T\}(x) \oplus E_1 \cap \mathrm{span}\{T\}^{\perp}(x) \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_s(x),$$

é uma decomposição para $\tilde{f}$, cujos normais principais são

$$i_*\xi_1 - \|\eta\|^2\bar{N}, i_*\xi_1 - \bar{N}, i_*\xi_2 - \bar{N}, \ldots, i_*\xi_s - \bar{N}.$$

Demonstração. De fato, dado $X \in \Gamma(E_i)$, para $1 \leq i \leq s$, com X ortogonal a T, temos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\tilde{f}}(X,Y) &= i_*\alpha_f(X,Y) + \alpha_i(f_*X, f_*Y) \\
&= i_*\langle X,Y\rangle\xi_i - \langle X,Y\rangle\bar{N} + \langle X,T\rangle\langle Y,T\rangle\bar{N} \\
&= \langle X,Y\rangle(i_*\xi_i - \bar{N}),
\end{aligned}$$

para todo $Y \in TM$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_{\tilde{f}}(T,Y) &= i_*\alpha_f(T,Y) + \alpha_i(f_*T, f_*Y) \\
&= i_*\langle T,Y\rangle\xi_1 - \langle T,Y\rangle\bar{N} + \langle T,T\rangle\langle Y,T\rangle\bar{N} \\
&= \langle T,Y\rangle(i_*\xi_1 - \|\eta\|^2\bar{N}),
\end{aligned}$$

para todo $Y \in TM$. □

Neste contexto, denotaremos $E_0 = \mathrm{span}\{T\}$ e, com um abuso de notação, manteremos a notação de E_1 para $E_1 \cap E_0^{\perp}$. Assim,

$$T_xM = E_0(x) \oplus E_1(x) \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_s(x), \tag{5.18}$$

é uma decomposição para $\tilde{f}$, cujos normais principais são

$$i_*\xi_1 - \|\eta\|^2\bar{N}, i_*\xi_1 - \bar{N}, i_*\xi_2 - \bar{N}, \ldots, i_*\xi_s - \bar{N},$$

onde eventualmente pode ocorrer $E_1 = \{0\}$.

O lema seguinte afirma que o vetor curvatura média $\tilde{H}$ da imersão isométrica $\tilde{f}$ é paralelo na conexão normal de $\tilde{f}$ se, e somente se, $\eta = 0$.

Lema 9. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma subvariedade de Einstein, $m \geq 3$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média H paralelo. Suponha $T \neq 0$ e seja $\tilde{H}$ o vetor curvatura média da imersão isométrica $\tilde{f} = i \circ f$. Então:

(a) $\tilde{\nabla}^\perp_X \tilde{H} = 0$, para todo X ortogonal a T.

(b) $\tilde{\nabla}^\perp_T \tilde{H} = \varepsilon \|T\|^2 \langle H, \eta \rangle \bar{N} + \frac{1}{m}[2\langle \eta, \xi_1 \rangle \|T\|^2 \bar{N} + (m - \|T\|^2)\|T\|^2 i_* \eta]$.

Demonstração. Considerando a decomposição dada em relação f em (5.18), obtemos que

$$\tilde{H} = \frac{1}{m}[i_*\xi_1 - \|\eta\|^2\bar{N} + \dim(E_0 - 1)(i_*\xi_1 - \bar{N}), \dim(E_1) i_*\xi_1 - \bar{N}, \ldots, \dim(E_s)(i_*\xi_s - \bar{N})].$$

Desta forma, dado $X \in \Gamma(E_j)$, com $0 \leq j \leq s$, segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^\perp_X \tilde{H} &= \tilde{\nabla}^\perp_X i_* H - \frac{1}{m}[(m-1)\tilde{\nabla}^\perp_X \bar{N} + \|\eta\|^2 \tilde{\nabla}^\perp_X \bar{N} + X(\|\eta\|^2)\bar{N}] \\
&= i_* \nabla^\perp_X i_* H + \varepsilon \langle X, T \rangle i_* \langle H, \eta \rangle \bar{N} - \frac{1}{m}[-(m - \|T\|^2)\langle X, T \rangle i_* \eta + 2\langle \tilde{\nabla}^\perp_X i_* \eta, i_* \eta \rangle \bar{N}] \\
&= \varepsilon \langle X, T \rangle i_* \langle H, \eta \rangle \bar{N} + \frac{1}{m}[(m - \|T\|^2)\langle X, T \rangle i_* \eta + 2 i_* \langle \alpha(T, X), \eta \rangle \bar{N}] \\
&= \varepsilon \langle X, T \rangle i_* \langle H, \eta \rangle \bar{N} + \frac{1}{m}[(m - \|T\|^2)\langle X, T \rangle i_* \eta + 2\langle X, T \rangle i_* \langle \xi_j, \eta \rangle \bar{N}].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\nabla}^\perp_X \tilde{H} = 0,$$

para todo X ortogonal a T, e

$$\tilde{\nabla}^\perp_T \tilde{H} = \varepsilon \|T\|^2 i_* \langle H, \eta \rangle \bar{N} + \frac{1}{m}[2 i_* \langle \eta, \xi_1 \rangle \|T\|^2 \bar{N} + (m - \|T\|^2)\|T\|^2 i_* \eta],$$

como queríamos. □

De modo análogo a Proposição 5.3, obtemos o mesmo resultado em relação as distribuições de $\tilde{f}$.

Proposição 5.7. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma subvariedade de Einsten conexa, $m \geq 3$, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo. Em relação à decomposição (5.18) para $\tilde{f}$, temos:

(a) E_k é uma distribuição esférica, $k = 1, \ldots, s$,

(b) $E_k^\perp$ é uma distribuição totalmente geodésica, $k = 1, \ldots, s$.

Demonstração. (a) Dados $X, Y \in \Gamma(E_k)$, com $1 \leq k \leq s$, temos que

$$\langle \tilde{\nabla}_X Y, T \rangle = -\langle Y, \tilde{\nabla}_X T \rangle = -i_* \langle Y, \tilde{A}_\eta X \rangle = -\langle X, Y \rangle i_* \langle \eta, \xi_k \rangle.$$

Assim, considere $\delta = -i_*\langle \eta, \xi_k \rangle \frac{T}{\|T\|^2}$. Para $Z \in \Gamma(E_i)$, com $1 \le i \ne k \le s$, temos que $\tilde{\nabla}^{\perp}_Z i_*\xi_k = \nabla^{\perp}_Z \xi_k = 0$, conforme o Lema 7. Assim, a Equação de Codazzi implica que $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = 0 = \langle X, Y \rangle \langle Z, \delta \rangle$. Dessa forma, $\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = \langle X, Y \rangle \langle Z, \delta \rangle$, ou seja, E_k é uma distribuição umbilíca. Mostremos que $\langle \nabla_X \delta, Z \rangle = 0$, para todo $X \in \Gamma(E_k)$ e $Z \in \Gamma(E_k^{\perp})$. Usando o Lema 7, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\nabla}_X \delta, Z \rangle &= -\left\langle X \langle i_*\xi_k, i_*\eta \rangle \frac{T}{\|T\|^2} + \frac{\langle i_*\xi_k, i_*\eta \rangle}{\|T\|^2} \tilde{\nabla}_X T, Z \right\rangle \\
&= -\frac{\langle T, Z \rangle}{\|T\|^2} (\langle \tilde{\nabla}^{\perp}_X i_*\xi_k, i_*\eta \rangle + \langle i_*\xi_k, \tilde{\nabla}^{\perp}_X i_*\eta \rangle) + \frac{\langle i_*\xi_k, i_*\eta \rangle}{\|T\|^2} i_*\langle A_\eta X, Z \rangle \\
&= -\frac{\langle T, Z \rangle}{\|T\|^2} (i_*\langle \nabla^{\perp}_X \xi_k, \eta \rangle + i_*\langle \xi_k, \nabla^{\perp}_X \eta \rangle) \\
&= \frac{\langle T, Z \rangle}{\|T\|^2} i_*\langle \xi_k, \alpha(X, T) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, E_k é esférica. Sejam $X \in \Gamma(E_i), Y \in \Gamma(E_j)$ e $Z \in \Gamma(E_k)$, com $0 \le i, j \le s$ e $i, j \ne k$. Basta mostrarmos que $\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = 0$. Para $1 \le i = j \le s$, segue do Lema 7 e da Equação de Codazzi em espaços de forma. Agora, considerando $0 \le i \ne j \le s$, dividimos nos seguintes casos:

1º Caso: Sejam $j = 0$ e $Y = \lambda T$, para algum $\lambda \in C^\infty(M)$. Então,

$$\langle \tilde{\nabla}_X \lambda T, Z \rangle = \lambda i_* \langle A_\eta X, Z \rangle = 0.$$

2º Caso: Sejam $i = 0$ e $X = \lambda T$, para algum $\lambda \in C^\infty(M)$. Pela Equação de Codazzi em espaços de forma, segue que

$$\langle \tilde{\nabla}_{\lambda T} Y, Z \rangle (i_*\xi_j - \bar{N} - (i_*\xi_k - \bar{N})) = \langle \tilde{\nabla}_Y \lambda T, Z \rangle (i_*\xi_1 - \|\eta\|^2 \bar{N} - (i_*\xi_k - \bar{N})) = 0,$$

conforme o caso anterior.

3º Caso: Sejam $1 \le i \ne j \le s$, a Equação de Codazzi em espaços de forma, diz que

$$\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle (i_*\xi_j - \bar{N} - (i_*\xi_k - \bar{N})) = \langle \tilde{\nabla}_Y X, Z \rangle (i_*\xi_i - \bar{N} - (i_*\xi_k - \bar{N})).$$

Como mostrado anteriormente, $\xi_i - \xi_k$ e $\xi_j - \xi_k$ são linearmente independentes. Portanto, obtemos que $\langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle = 0$. □

Finalmente, podemos provar o resultado central do capítulo.

Teorema 5.8. Seja $f : M^m \to \mathbb{Q}^n_\varepsilon \times \mathbb{R}$ uma subvariedade de Einstein, $m \ge 3$, completa e simplesmente conexa, com fibrado normal flat e vetor curvatura média paralelo. Então, $\tilde{f} = i \circ f$ é um produto warped de imersões isométricas.

Demonstração. Em virtude da Proposição 5.7, segue do teorema de Hiepko que existe uma isometria ψ de um produto warped $M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \cdots \times_{\rho_s} M_s$ sobre M^m. Considere então a imersão

$$F = \tilde{f} \circ \psi : M_0 \times_{\rho_1} M_1 \times \cdots \times_{\rho_s} M_s \to \mathbb{E}^{n+2}.$$

F é uma imersão isométrica definida num produto warped, cuja segunda forma fundamental é adaptada segundo à decomposição (5.18). Decorre do teorema de Nolker que F é um produto warped de imersões isométricas $f_0, f_1, \ldots, f_s$. Mais precisamente, o perfil f_0 é uma curva $f_0 : M_0 \to \mathbb{E}^{n_0}$ gerada pelo campo T, e as imersões f_i, com $1 \leq i \leq s$, são imersões isométricas $f_i : M_i^{n_i} \to \mathbb{Q}_{\varepsilon_i}^{n_i+k_i}$. $\square$

REFERÊNCIAS

CANEVARI, S.; TOJEIRO, R. Isometric immersions of space forms into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. **Mathematische Nachrichten**, v. 293, p. 1259–1277, 2020. Citado na página 15.

CECIL, T. E. **Lie sphere geometry**. [S.l.]: Springer, 1992. Citado na página 40.

DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. **Submanifold Theory Beyond an Introduction**. [S.l.]: Springer, 2019. Citado nas páginas 17, 19 e 26.

DANIEL, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 361, p. 6255–6282, 2009. Citado na página 15.

DILLEN, F.; FASTENAKELS, J.; VEKEN, J. Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Note Mat.**, v. 29, p. 41–54, 2009. Citado nas páginas 15, 33 e 34.

FIALKOW, A. Hypersurfaces of a space of constant curvature. **Annals of Mathematics**, v. 39, 1938. Citado na página 49.

LEANDRO, B.; PINA, R.; SANTOS, J. P. dos. Einstein hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, v. 52, p. 537–546, 2021. Citado nas páginas 15, 16, 33, 49 e 50.

LIMA, R. F.; MANFIO, F.; SANTOS, J. P. dos. Einstein hypersurfaces of warped product spaces. **Results Math**, v. 77, p. 228, 2022. Citado na página 16.

LIRA, J.; TOJEIRO, R.; VITÓRIO, F. A bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms. **Archiv der Mathematik**, v. 95, p. 469–479, 2010. Citado nas páginas 15 e 30.

LOBOS, G. A.; TOJEIRO, R. Pseudo-parallel submanifolds with flat normal bundle of space forms. **Glasgow Mathematical Journal**, Cambridge University Press, v. 48, n. 1, p. 171–177, 2006. Citado na página 39.

MANFIO, F.; TOJEIRO, R. Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 55, p. 397–415, 2011. Citado nas páginas 15, 33, 34 e 39.

MANFIO, F.; TURGAY, N.; UPADHYAY, A. Biconservative submanifolds in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **J. Geom. Anal.**, v. 29, p. 283–298, 2019. Citado na página 15.

MENDONÇA, B.; TOJEIRO, R. Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 66, p. 400–428, 2014. Citado nas páginas 15, 17, 32, 39 e 57.

ONTI, C.-R. Einstein submanifolds with parallel mean curvature. **Archiv der Mathematik**, v. 110, p. 523–531, 2018. Citado nas páginas 9, 11, 16 e 49.

PICCIONE, P.; TAUSK, D. V. An existence theorem for g-structure preserving affine immersions. **Indiana Univ. Math. Journal.**, v. 57, p. 1431–1465, 2008. Citado na página 15.

RYAN, P. J. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces. **Tohoku Mathematical Journal**, p. 363—-388, 1969. Citado na página 49.

THOMAS, T. On closed spaces of constant mean curvature. **Am. J. Math.**, v. 58, p. 702—-704, 1936. Citado na página 49.

TOJEIRO, R. On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, v. 41, p. 199–209, 2010. Citado nas páginas 15, 17, 32 e 33.

ICMC USP
SÃO CARLOS