UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Tópicos de Análise e Geometria: Operadores de Fredholm e Grassmannianas

Pedro Augusto da Silva Morelli

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Pedro Augusto da Silva Morelli

Tópicos de Análise e Geometria: Operadores de Fredholm e Grassmannianas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Igor Mencattini

USP – São Carlos
Março de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M842t

Morelli, Pedro Augusto da Silva
Tópicos de Análise e Geometria: Operadores de Fredholm e Grassmannianas / Pedro Augusto da Silva Morelli; orientador Igor Mencattini. -- São Carlos, 2022.
97 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Grassmanniana. 2. Operador de Fredholm . I. Mencattini, Igor, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Pedro Augusto da Silva Morelli

Topics on Analysis and Geometry: Fredholm Operators and Grassmannians

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Igor Mencattini

USP – São Carlos
March 2022

À minha família

AGRADECIMENTOS

Dedico essa página para agradecer:

1. Aos meus pais, Isabel e Augusto, pela confiança e apoio acima de tudo.
2. Às amizades que construí ao longo da minha trajetória, em particular ao Lucas, por toda ajuda e companhia nesse período de isolamento, apesar da distância, e à Luíza, pelas conversas e cursos que fizemos juntos.
3. Aos vários professores, desde a Educação Básica até o presente momento, que contribuíram para a minha formação. Agradeço também ao professor Igor, do ICMC, por aceitar orientar esse projeto e pelo período de convívio.
4. Aos amigos de Araraquara e São Carlos, com um grande desejo de revê-los em breve.
5. À Universidade de São Paulo, em particular ao ICMC, por fornecer a estrutura para a realização desse trabalho, e à CAPES, pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

MORELLI, P. A. S. **Tópicos de Análise e Geometria: Operadores de Fredholm e Grassmannianas**. 2022. 94 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Essa dissertação é fruto de atividades de estudo orientado e reuniões realizadas no período em que estive envolvido no programa de pós graduação em Matemática no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP) como aluno de Mestrado. A finalidade dele é introduzir um objeto de grande interesse na Matemática, a saber a Grassmanniana de um espaço de Hilbert. Para tanto, iniciamos o texto com um modelo finito-dimensional, onde mostramos, em partucular, que, nesse contexto, a Grassmanniana possui uma estrutura diferenciável natural. Em seguida, dispomos na parte central do texto as ferramentas de análise funcional necessárias para generalizar as noções do capítulo prévio em um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, o que, por fim, é abordado no capítulo subsequente.

Palavras-chave: Grassmanniana, Espaço de Hilbert, Operador de Fredholm.

ABSTRACT

MORELLI, P. A. S. **Topics on Analysis and Geometry: Fredholm Operators and Grassmannians**. 2022. 94 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

This dissertation is the result of guided studies activities and meetings by the time I was a Master student of the Institute of Mathematics and Computer Science (ICMC) of University of São Paulo (USP). Its aim is to introduce a mathematical object called the Grassmannian of a Hilbert Space. For this purpose, we begin studying the finite-dimensional case, where we showed that the Grassmannian has a natural differentiable structure and is a homogeneous space. Next, we introduce the necessary tools of functional analysis to generalize the notions of the previous chapter to te infinite-dimensional case, which is done after.

Keywords: Grassmannian, Hilbert Space, Fredholm Operator.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathrm{Gr}_{_K}(\mathbb{C}^n)$ — Grassmanniana dos k-planos de $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{E}\oplus\mathbb{F}$ — Soma direta dos espaços vetoriais $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$

$\texttt{graf}(T)$ — Gráfico do Operador Linear T

$\eta_{\mathbb{F}}(\mathbb{E},\mathbb{E}')$ — Isomorfismo entre $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ oriundo da igualdade $\mathbb{E}\oplus\mathbb{F}=\mathbb{E}'\oplus\mathbb{F}$

$\texttt{Hom}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ — Espaço vetorial dos operadores lineares entre $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$

$GL_n(\mathbb{C})$ — Grupo Linear dos isomorfismos de $\mathbb{C}^n$

$\texttt{orb}(\mathbb{E})$ — Órbita de $\mathbb{E}$ relativa a uma ação de um grupo de Lie

$\mathcal{LF}(\mathbb{H})$ — Conjunto dos operadores de posto finito em $\mathbb{H}$

$\mathcal{K}(\mathbb{H})$ — Conjunto dos operadores compactos em $\mathbb{H}$

B_{01} — Bola unitária fechada centrada na origem de um espaço de Banach

$\mathcal{HS}(\mathbb{H})$ — Conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt em $\mathbb{H}$

$\mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$ — Operadores de Fredholm em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$

$\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ — Conjunto dos operadores de Fredholm com o mesmo índice $n\in\mathbb{Z}$

$\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ — Grassmanniana de SSW de um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$

$GL_{\texttt{res}}(\mathbb{H})$ — Grupo Linear Restrito de um espaço de Hilbert

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade explorar uma classe de variedades chamadas as Grassmannianas de um espaço de Hilbert. O conceito da Grassmanniana de dimensão finita precede, inclusive, a noção de variedade. Entretanto, um dos primeiros registros do uso desse tipo de objeto no contexto de espaços de Hilbert de dimensão infinita foi no trabalho do matemático japonês Mikio Sato e de seus colaboladores, em que a noção de uma Grassmanniana de dimensão infinita fora usada na construção de soluções da equação KP, em particular as solitônicas, de grande interesse em outras áreas da Ciência, como por exemplo, a Física.

Sobre a estrutura do texto da dissertação, estudamos, no Capítulo 1, um modelo finito-dimensional da Grassmanniana, cujos elementos são os k-planos de um espaço vetorial, aqui representado por $\mathbb{R}^n$. Dentre os tópicos abordados destacam-se a estrutura de variedade natural em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{R}^n)$, uma caracterização dos vetores tangentes nesse espaço, a ação transitiva do grupo linear sobre a Grassmanniana e a trivialização local do fibrado tautológico.

Em seguida, na parte central do texto, introduzimos as noções relevantes de Análise Funcional para a definição e estudo da Grassmanniana de dimensão infinita. Entre elas, destacam-se os operadores de Fredholm, um aberto importante do espaço dos operadores lineares em um espaço de Hilbert separável $\mathbb{H}$, juntamente com a noção de índice de um operador. Além disso, outro conceito importante para generalizar as noções do capítulo 1 são os chamados operadores de Hilbert-Schmidt, que também são trabalhados no capítulo. Por fim, no capítulo final procuramos colher alguns frutos dos tópicos apresentados anteriormente, ao expor a definição e algumas propriedades da Grassmanniana de um espaço de Hilbert, vide a abordagem em (PRESSLEY; SEGAL, 1988).

CAPÍTULO

1

UM MODELO EM DIMENSÃO FINITA

Neste primeiro capítulo, abordaremos um conceito importante em Matemática denominado a **Grassmanniana** de um espaço vetorial de dimensão finita, aqui representado pelo espaço euclidiano $\mathbb{C}^n$, equipado com o produto Hermitiano usual. Suas aplicações vão desde a Geometria Diferencial, em que Grassmannianas são exemplos de variedades homogêneas, como veremos em breve como em outros campos da Matemática que fogem do escopo do texto, como na construção de algoritmos vindos da área de Otimização (veja, por exemplo, (ABSIL; MAHONY; SEPULCHRE, 2004)). A confecção desse capítulo foi inspirada em (PICCIONE; TAUSK, 2008), (KASMAN, 2010) e (COUTO, 2021).

1.1 A Grassmaniana de Dimensão Finita

Nesta primeira seção, iniciaremos nosso estudo sobre a Grassmaniana de dimensão finita. Mostraremos que existe uma estrutura natural de variedade e que ela pode ser identificada como um espaço homogêneo, o que nos fornece várias propriedades interessantes a respeito desse conjunto.

Definição 1.1. Sendo $k < n$ dois naturais, definimos a **Grassmanniana dos k-planos** de $\mathbb{C}^n$ como sendo o conjunto

$$\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) := \{V \subseteq \mathbb{C}^n \,|\, V \text{ é subespaço e } \mathtt{dim}(V) = k\}.$$

É interessante estudar as características sobre os pontos da grassmaniana que são dados por gráficos de operadores lineares, dado que estes serão fundamentais para definir uma estrutura diferenciável em $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$. Escrevendo $\mathbb{C}^n = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$ em uma certa decomposição em soma direta de sorte que $\mathtt{dim}(\mathbb{E}) = k$ (e, claro, $\mathtt{dim}(\mathbb{F}) = n - k$), o gráfico de um operador linear $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, definido pelo subespaço

$$\mathtt{graf}(T) := \{v + Tv \,|\, v \in E\}, \tag{1.1}$$

é um subespaço k-dimensional e, portanto, ponto da Grassmanniana. A proposição a seguir fornece um critério para distinguir os pontos da Grassmanniana que são gráficos de algum operador linear relativamente a alguma decomposição em soma direta.

Proposição 1.2. Um dado elemento $W \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ é o gráfico de algum operador linear $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ se, e somente se, W é **transversal** a $\mathbb{F}$, ou seja,

$$W \cap \mathbb{F} = \{0\}. \tag{1.2}$$

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponha que $W = \mathtt{graf}(T)$, para algum $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. Sendo $w \in W \cap \mathbb{E}$, ou seja $w = v + T(v)$, para algum $v \in \mathbb{E}$, temos que, em particular $v = w - T(v)$, de onde segue que $v \in \mathbb{F}$, e, portanto $v = 0$. Decorre disto que $w = 0$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{K}}(\mathbb{C}^n)$ é tal que $W \cap \mathbb{F} = \{0\}$, em particular temos que a projeção ortogonal de W em $\mathbb{E}$, denotada por $\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_W \colon W \subseteq \mathbb{E} \oplus \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ é um isomorfismo. Assim, a aplicação $T_W : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ dada por

$$T_W(v) = (\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_W)^{-1} \cdot v - v \tag{1.3}$$

é um operador linear cujo gráfico é, por construção, W. $\square$

Observação 1.3. Denotamos o conjunto de todos os subespaços transversais a $\mathbb{F}$ por $\mathcal{G}_0(\mathbb{F})$. O argumento exposto acima permite definir uma bijeção

$$\phi(\mathbb{E}, \mathbb{F}) : \mathcal{G}_0(\mathbb{F}) \to \mathtt{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$$

que associa a cada ponto da Grassmaniana transversal à $\mathbb{F}$ o respectivo operador do qual é gráfico. Ao variarmos a decomposição de $\mathbb{C}^n$ em soma direta, as aplicações $\phi(\cdot, \cdot)$ formam um atlas diferenciável em $\mathrm{Gr}_{\mathrm{K}}(\mathbb{C}^n)$. A fim de justificar a última afirmação, incorporemos alguma linguagem com a seguinte

Definição 1.4. Dados $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}' \subseteq \mathbb{C}^n$ com um subespaço complementar comum $\mathbb{F}$, ou seja,

$$\mathbb{E} \oplus \mathbb{F} = \mathbb{E}' \oplus \mathbb{F}, \tag{1.4}$$

o isomorfismo entre $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ obtido pela soma direta acima será referido como o **isomorfismo induzido** por $\mathbb{F}$ e denotado por $\eta_{\mathbb{F}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$.

Observemos que, pela notação acima, $\eta_{\mathbb{F}}^{-1}(\mathbb{E}, \mathbb{E}') = \eta_{\mathbb{F}}(\mathbb{E}', \mathbb{E})$. Ainda, note que, da álgebra linear, $\eta_{\mathbb{F}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ é dada explicitamente pela restrição a $\mathbb{E}$ pela projeção ortogonal em $\mathbb{E}'$ relativamente à soma direta $\mathbb{E}' \oplus \mathbb{F}$.

Teorema 1.5. Sendo $\mathbb{C}^n = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$ uma decomposição em soma direta e $\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}$, $\mathrm{pr}_{\mathbb{F}}$ as respectivas projeções, temos que $\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_W : W \to \mathbb{E}$ é um isomorfismo desde que W seja transversal a $\mathbb{F}$. Ainda, se $W = \mathrm{graf}(T)$, para algum operador $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, então

$$T = (\mathrm{pr}_{\mathbb{F}}|_W) \circ (\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}^{-1}|_W). \tag{1.5}$$

Demonstração.
A fim de demonstrar a primeira afirmação, é suficiente apenas verificar que $\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_W$ é injetora. Com efeito, dado $u \in W$, existem(e são únicos) $u_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ e $u_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ de forma que $u = u_{\mathbb{E}} + u_{\mathbb{F}}$. Logo, se $u_{\mathbb{E}} = \mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_W \cdot u = 0$, então $u \in \mathbb{F}$. Portanto, como W é transversal a $\mathbb{F}$, segue que $u = 0$ e $\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_W$ é isomorfismo, como queríamos.

Por outro lado, se $W = \mathtt{graf}(T)$, para algum $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, então dado $x \in \mathbb{E}$, a unicidade dos vetores oriundos das somas diretas fornece que

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}^{-1}|_W(x) = x + Tx. \tag{1.6}$$

Aplicando a projeção em $\mathbb{F}$ nos dois membros da igualdade, docorre que

$$Tx = (\mathrm{pr}_{\mathbb{F}}|_W) \circ (\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}^{-1}|_W) \cdot x, \tag{1.7}$$

de onde segue a segunda afirmativa, como queríamos. □

O lema seguinte será relevante no momento de definir a estrutura diferenciável da Grassmanniana dos k-planos de $\mathbb{C}^n$. Sua importância se dará na garantia da boa definição das mudanças de coordenadas locais.

Lema 1.6. Seja $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. A fim de que $\mathtt{graf}(T) \cap \mathbb{F}' = \{0\}$, é necessário e suficiente que a aplicação

$$\mathtt{id}_{\mathbb{E}} + (\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}) \circ T : \mathbb{E} \to \mathbb{E} \tag{1.8}$$

seja inversível. Aqui, $\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}$ denota a projeção em $\mathbb{E}$ relativamente à decomposição em soma direta $\mathbb{C}^n = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}'$.

Demonstração.
Verifiquemos ambas as implicações:

($\Longrightarrow$) Observe que $\mathtt{id}_{\mathbb{E}} + (\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}) \circ T$ é um operador linear entre espaços de mesma dimensão finita. Assim, basta verificar a injetividade. Com efeito, se $x \in \mathbb{E}$ é tal que

$$x + \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx = 0,$$

então, somando-se o termo $\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'} \cdot Tx \in \mathbb{F}'$, dado pela projeção $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}' \to \mathbb{F}'$ aplicada em Tx em ambos os membros da igualdade, obtemos que $x + Tx = \mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'} \in \mathbb{F}'$, ou seja, $x + Tx$ é elemento de $\mathbb{F}'$. Assim, $x + Tx = 0$, de onde segue, em virtude da decomposição $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$ ser direta, que $x = 0$, como queríamos.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $\mathtt{id}_{\mathbb{E}} + (\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}) \circ T$ for inversível e $x \in \mathtt{graf}(T) \cap \mathbb{F}$, temos que, em particular existe $v \in \mathbb{E}$, de sorte que

$$x = v + Tv. \tag{1.9}$$

Como $x \in \mathbb{F}$, temos que $\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}(x) = 0$, aplicando a projeção $\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}$ em ambos os membros da igualdade acima, segue que

$$v + \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}} \cdot Tv = 0. \tag{1.10}$$

Como, por hipótese o núcleo de $\mathtt{id}_{\mathbb{E}} + (\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}) \circ T$ é trivial, segue que $v = 0$, ou seja, $x = 0$, como queríamos. □

Continuando no caminho da preparação da estrutura diferenciável de $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, o resultado seguinte terá sua importância na construção de uma base enumerável para a topologia de variedade, a ser introduzida em breve, da Grassmanniana.

Lema 1.7 (Exercício B.9 de (LEE, 2003))**.** Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial, $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$ e $S \subseteq V$ um subespaço de dimensão k. Então, existem índices

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \tag{1.11}$$

de sorte que $\mathbb{V} = S \oplus \mathtt{span}\{e_{i_j} : 1 \leq j \leq k\}$.

Demonstração.
Observemos antes que, se $\{f_1, \ldots, f_M\} \subseteq \mathbb{V}$ é uma m-upla **ordenada** de vetores linearmente dependentes em $\mathbb{V}$ e $f_1 \neq 0$, então é verdade, ao menos para algum índice $j \in I_M$ que existem $\lambda_j \in \mathbb{C}$ de sorte que

$$f_j = \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_j f_k, \tag{1.12}$$

ou seja, f_j é combinação linear de seus antecessores. Com efeito, o fato de que $f_1 \neq 0$ fornece que $\{f_1\}$ é um conjunto linearmente independente. Como $\{f_1, \ldots, f_M\}$ não o é, existe $1 < q \leq M$ tal que

1. $\{f_1, \ldots, f_q\}$ é linearmente dependente,

2. $\{f_1, \ldots, f_{q-1}\}$ é linearmente independente.

Logo, $f_q = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_j f_k$, para certos $\lambda_j \in \mathbb{C}$. No contexto do lema, se $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq S$ é uma base de S, podemos repetir o argumento prévio com a $(m+k)$-upla ordenada $\{s_1, \ldots, s_k, e_1, \ldots, e_n\}$ para remover k elementos de $\mathscr{B}$ e concluir o resultado. □

Proposição 1.8. O conjunto das cartas locais $\mathscr{A} := \{\phi(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \,|\, \mathbb{C}^n = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}\}$ forma um atlas C^∞ em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$.

Demonstração.
Ao longo do argumento, faremos uso das seguintes notações: $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$, $\mathbb{E}' \oplus \mathbb{F}$, $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}'$ serão decomposições em soma direta de $\mathbb{C}^n$.

1. Se $\phi(\mathbb{E},\mathbb{F})$ e $\phi(\mathbb{E}',\mathbb{F})$ são cartas locais, então a mudança de coordenadas

$$\phi(\mathbb{E}',\mathbb{F})\circ\phi^{-1}(\mathbb{E},\mathbb{F})$$

avaliada em $T\in\mathtt{Hom}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ resulta no operador $g:=(\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}}|_{\mathbb{E}}+T)\circ\eta_{\mathbb{F}}(\mathbb{E},\mathbb{E}')$. De fato, sendo $G_T=\mathtt{graf}(T)$, mostremos que

$$\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}}|_{\mathbb{E}}\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{E}'}+T\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{E}'}=\left(\mathrm{pr}_{\mathbb{E}'}|_{G_T}\right)^{-1}-\mathtt{id}_{\mathbb{E}'}. \tag{1.13}$$

O lado esquerdo da última igualdade denota a expressão de g ao passo que seu lado esquerdo é dada pela aplicação T_{G_T}, vide a demonstração da Proposição 1.2. Observemos que, dado $x\in\mathbb{E}'$, existem, em virtude do gráfico de T ser transversal a $\mathbb{F}$, $v\in\mathbb{E}$ e $x_{\mathbb{F}}\in\mathbb{F}$ de sorte que

$$x=(v+Tv)\oplus x_{\mathbb{F}}. \tag{1.14}$$

O lado esquerdo da equação (1.13) é dado por

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}}|_{\mathbb{E}}\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{E}'}\cdot(v+Tv\oplus x_{\mathbb{F}})+T\circ\mathrm{pr}_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{E}'}\cdot(\underbrace{v}_{\in\mathbb{E}}+\underbrace{Tv\oplus x_{\mathbb{F}}}_{\in\mathbb{F}})\\ =\\ \mathrm{pr}'_{\mathbb{F}}(v)+T(v)\end{gathered}. \tag{1.15}$$

Como, da equação (1.14), $v=x-(Tv+x_{\mathbb{F}})$, segue que $\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}}(v)=-Tv-x_{\mathbb{F}}$ e, assim, a equação (1.15) se torna

$$\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}}(v)+T(v)=-x_{\mathbb{F}}. \tag{1.16}$$

O lado direito da equação (1.13), por outro lado, é dado por

$$v+Tv-(v+Tv+x_{\mathbb{F}})=-x_{\mathbb{F}}, \tag{1.17}$$

verificando, assim, a igualdade desejada.

2. Se $\mathbb{C}^n=\mathbb{E}\oplus\mathbb{F}=\mathbb{E}\oplus\mathbb{F}'$, mostremos que a mudança de coordenadas $\phi(\mathbb{E},\mathbb{F}')\circ\phi(\mathbb{E},\mathbb{F})^{-1}$, avaliada em $T\in\mathtt{Hom}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ resulta no operador $h=\eta_{\mathbb{E}}(\mathbb{F},\mathbb{F}')\circ T\circ(\mathtt{id}_{\mathbb{E}}+\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}\circ T)^{-1}$. Com efeito, analogamente ao caso anterior, é suficiente verificar que

$$\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'}|_{\mathbb{E}}\circ T\circ(\mathtt{id}_{\mathbb{E}}+\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}\circ T)^{-1}=\left(\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{G_T}\right)^{-1}-\mathtt{id}_{\mathbb{E}}. \tag{1.18}$$

Observe inicialmente que $\phi(\mathbb{E},\mathbb{F}')\circ\phi(\mathbb{E},\mathbb{F})^{-1}$ está definida no conjunto dos operadores $T\in\mathtt{Hom}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ de sorte que $\mathtt{graf}(T)\in\mathcal{G}_0(\mathbb{F}')$ o que, pelo Lema 1.6, é equivalente à bijetividade do operador $\mathtt{id}_{\mathbb{E}}+\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}\circ T$. Avaliando os lados esquerdo e direito da igualdade acima em $y=x+\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}\cdot Tx\in\mathbb{E}$, temos que, em particular, o lado esquerdo se torna

$$\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'}|_{\mathbb{E}}\circ T\circ(\mathtt{id}_{\mathbb{E}}+\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}}\circ T)^{-1}\cdot y=\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'}|_{\mathbb{E}}\cdot Tx, \tag{1.19}$$

que, por sua vez coincide com o lado direito, dado que, para cada $y = x + \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx \in \mathbb{E}$

$$\left[\left(\mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{G_T}\right)^{-1} - \mathtt{id}_{\mathbb{E}}\right] \cdot y = \left(\mathrm{pr}'_{G_T}|_{\mathbb{E}}\right) \cdot (x + \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx) - x - \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx$$
$$=$$
$$\left(\mathrm{pr}'_{G_T}|_{\mathbb{E}}\right) \cdot (\underbrace{x + \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx + \mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx}_{x+Tx \in G_T} - \underbrace{\mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx}_{\in \mathbb{F}'}) - x - \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx \tag{1.20}$$
$$=$$
$$x + Tx - x - \mathrm{pr}'_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{F}} \cdot Tx = \mathrm{pr}'_{\mathbb{F}'}|_{\mathbb{E}} \cdot Tx,$$

verificando, assim, a igualdade (1.18), como queríamos.

Assim, temos que, por transitividade, $\mathscr{A}$ é um atlas cujas cartas são C^∞-compatíveis. Mostremos agora que $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é um espaço de Hausdorff. Com efeito, dados $\mathbb{E}, \mathbb{F} \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, com $\mathbb{E} \neq \mathbb{F}$, seja X um subspaço complementar simultaneamente a $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$, ou seja,

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E} \oplus X = \mathbb{F} \oplus X. \tag{1.21}$$

Assim, $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$, estão localizados em uma mesma vizinhança $\mathcal{G}_0(X)$ com coordenadas locais dadas, digamos, por $\phi(\mathbb{E}, X) : \mathtt{V}(X) \to \mathtt{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{E}^\perp) \sim \mathbb{C}^{k\cdot(n-k)}$, por simplicidade, denotada por ϕ. Como $\mathbb{C}^{k\cdot(n-k)}$ é Hausdorff, existem abertos $U, V \subseteq \phi(\mathtt{V}(X))$, com $U \cap V = \varnothing$ de modo que $\phi(\mathbb{E}) \in U$ e $\phi(\mathbb{F}) \in V$. Logo, segue que $\phi^{-1}(\phi(\mathbb{E}))$ e $\phi^{-1}(\phi(\mathbb{F}))$ são abertos disjuntos de $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ contendo, respectivamente, os elementos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$, donde $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é Hausdorff, como queríamos.

Finalmente, a topologia de variedade de $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, pois, sendo $\mathscr{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$, temos que, dado $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, o Lema 1.7 fornece que

$$\mathbb{C}^n = W \oplus \mathtt{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}}\}, \tag{1.22}$$

para certos $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, de onde segue que, em particular

$$W \cap \mathtt{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}}\} = \{0\} \tag{1.23}$$

e, assim, W é gráfico de algum operador $\mathtt{T} : \mathtt{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}}\}^\perp \to \mathtt{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}}\}$, mostrando $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ possui base enumerável, como queríamos. □

Uma descrição explícita da topologia de variedade, digamos $\tau_{k,n}$, em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ pode ser encontrada, por exemplo, em (COUTO, 2021) ou (MILNOR; STASHEFF, 1974), através da chamada **variedade de Stiefel**, a saber o conjunto

$$V_k(\mathbb{C}^n) := \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n \mid \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}\} \tag{1.24}$$

formado pelas k-uplas de vetores ortonormados de $\mathbb{C}^n$ e munido da topologia de subespaço. Pode-se mostrar que $\tau_{k,n}$ consiste na topologia quociente relativa a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} : V_k(\mathbb{C}^n) &\to \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \\ (x_1, \ldots, x_k) &\mapsto \mathtt{span}\{x_1, \ldots, x_k\} \end{aligned}, \tag{1.25}$$

ou seja, $U \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é aberto se, e somente se, $\mathfrak{s}^{-1}(U)$ é aberto.

Observação 1.9. A descrição acima fornece, que $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ herda algumas propriedades topológicas de $V_K(\mathbb{C}^n)$, em particular a compacidade.

1.2 O Espaço Tangente a Grassmaniana

O objetivo desta seção é dar uma descrição do espaço tangente a um ponto da Grassmaniana de um espaço vetorial a manos de isomorfismo. Veremos que existe uma identificação desse conjunto como um espaço de operadores lineares que permite a obtenção de uma fórmula para a derivada de uma carta local.

Definição 1.10. Sendo V, W, V_1, W_1 espaços vetoriais, $L \in \mathtt{Hom}(V_1, V)$, $M \in \mathtt{Hom}(W, W_1)$, definimos a aplicação $\mathrm{Lin}(L, M)$ como segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin}(L,M) : \mathtt{Hom}(V,W) &\to \mathtt{Hom}(V_1,W_1) \\ T &\mapsto (M \circ T \circ L) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Proposição 1.11. Sendo $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, W_1 um subespaço complementar de W, ou seja, $\mathbb{C}^n = W \oplus W_1$ e $q_1 : W_1 \to \mathbb{C}^n/W$ a restrição da aplicação quociente $x \mapsto [x]$ a W_1, então

$$\mathrm{Lin}(\mathrm{id}, q_1) \circ d\phi(W, W_1)[W] : T_W \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \to \mathtt{Hom}(W, \mathbb{R}^n/W) \tag{1.27}$$

é um isomorfismo linear e, além disso, o isomorfismo (1.27) não depende da escolha de W_1.

Demonstração.
Primeiramente, observe que q_1 é um isomorfismo, uma vez que, como $W \cap \mathbb{F} = \{0\}$, q_1 é injetora. Ainda, lembremos cartas locais são sempre difeomorfismos entre seus respectivos domínios. Assim, $d\phi(W, W_1)$ é um isomorfismo e, portanto, a aplicação (1.27) é um isomorfismo. A independência da opção por W_1 segue do fato que, denotando, por simplicidade, $\eta := \eta_{W_0}(W_1, W_1')$

A1 : $d\phi(W_0, W_1')(W_0) = \mathrm{Lin}(\mathrm{id}, \eta) \cdot d\phi(W_0, W_1)(W_0)$

Pode ser verificada derivando-se a aplicação de transição $\phi(W_0, W_1') \circ \phi(W_0, W_1)^{-1}$, vide caso 2 da Proposição 1.8, no ponto $T = 0$.

A2 : $q_1 = q_1' \circ \eta_{W_0}(W_1, W_1')$

Pode ser verificada diretamente. com efeito, para cada $x \in W_1$, temos que $x - \mathrm{pr}_{W_1'}(x) \in W_0$, de onde segue que,

$$q_1(x) = [x] = [\mathrm{pr}_{W_1'}(x)] = [\eta(x)] = (q_1' \circ \eta) \cdot x \tag{1.28}$$

$$
\begin{aligned}
LD = \mathrm{Lin}(\mathrm{id}, q_1') \cdot d\phi(W_0, W_1')(W_0) = q_1' \circ d\phi(W_0, W_1')(W_0) \\
= \qquad\qquad & [\mathrm{A1}] \\
q_1' \circ \mathrm{Lin}(\mathrm{id}, \eta) \cdot d\phi(W_0, W_1)(W_0) \\
= \qquad\qquad & [\mathrm{A2}] \\
q_1 \circ \eta^{-1} \circ (\mathrm{Lin}(\mathrm{id}, \eta) \cdot d\phi(W_0, W_1)(W_0)) = q_1 \circ \eta^{-1} \eta \circ d\phi(W_0, W_1)(W_0) \\
= \\
q_1 \circ d\phi(W_0, W_1)(W_0) = \mathrm{Lin}(\mathrm{id}, q_1) \cdot d\phi(W_0, W_1)(W_0) = LE,
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

de onde segue o resultado desejado, como queríamos. $\square$

Proposição 1.12. Seja $W : I \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ e $w : I \to \mathbb{C}^n$ curvas definidas em algum intervalo $I \subseteq \mathbb{C}$ diferenciáveis em $t_0 \in I$. Suponha que $w(t) \in W(t)$, para cada $t \in I$. Então,

$$W'(t_0) \cdot w(t_0) = w'(t_0) + W(t_0) \in \frac{\mathbb{C}^n}{W(t_0)}.$$

Demonstração.
Seja $\mathbb{E} = W(t_0)$ e escolha um subespaço complementar W_1 de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{C}^n$. Ponha $T := \phi(\mathbb{E}, W_1) \circ W$, de forma que, para cada $t \in I$ em uma vizinhança de t_0, tenhamos que $W(t) = \mathtt{graf}(T(t))$. Denotando por pr_0 a projeção em $\mathbb{E}$ relativamente à decomposição posta, seja $u := \mathrm{pr}_0 \circ w$.

Como $w(t) \in W(t)$, seque que

$$w(t) = u(t) + T(t) \cdot u(t), \quad \forall t \in I. \tag{1.30}$$

Usando o isomorfismo prévio, temos que $W'(t_0) \in T_{\mathbb{E}} G_k(\mathbb{C}^n)$ pode ser identificado como o operador

$$\mathrm{Lin}(\mathrm{id}, q_1) \circ d\phi(\mathbb{E}, W_1)(\mathbb{E}) \cdot W'(t_0) = q_1 \circ T'(t_0). \tag{1.31}$$

Assim, resta mostrar que

$$q_1 \circ T'(t_0) \cdot w(t_0) = w'(t_0) + W_0.$$

Derivando a expressão (1.30) em $t = t_0$ e, notando que $T(t_0) = 0$, $u(t_0) = w(t_0)$, obtemos que

$$w'(t_0) = u'(t_0) + T'(t_0) \cdot w(t_0),$$

onde $u'(t_0) \in \mathbb{F}$, resultando na proposição, como queríamos. $\square$

O próximo resultado fornece uma interpretação da derivada de uma carta local da Grassmaniana com a identificação de um vetor tangente com uma respectiva aplicação linear.

Proposição 1.13. Sendo dada uma decomposição em soma direta $\mathbb{C}^n = W_0 \oplus W_1$ e W um subespaço transversal a W_1, ou seja, $W \cap \mathbb{F} = \{0\}$, então,

$$d\phi(W_0, W_1)(W) \cdot Z = q_1^{-1} \circ Z \circ \eta_{W_1}(W_0, W).$$

Demonstração.
Seja $t \mapsto \mathcal{W}(t)$ uma curva diferenciável em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ com $\mathcal{W}(0) = W$ e $\mathcal{W}'(0) = Z$. Ponha, para cada $t \in \mathbb{C}$, $T(t) = \phi(W_0, W_1)(\mathcal{W}(t))$, de modo que $\mathcal{W}(t) = \mathtt{graf}(T(t))$, em cada instante t. Observe que $T'(0) = d\phi(W_0, W_1)(W) \cdot Z$.

Seja $w \in W$. Como $W = \mathtt{graf}(T(0))$, podemos escrever $w = w_0 + T(0) \cdot w_0$, para algum $w_0 \in W_0$. Assim, $t \mapsto w(t) = w_0 + T(t) \cdot w_0$ é uma curva em $\mathbb{C}^n$ com $w(t) \in \mathcal{W}(t)$, para cada t e $w(0) = w$. Pela proposição prévia, temos que

$$\mathcal{W}'(t_0) \cdot w = Z \cdot w = w'(0) + W = T'(0) \cdot w + W.$$

O fato de que $w_0 = \eta_{W_1}(W, W_0) \cdot w$ fornece que

$$Z = q_1 \circ T'(t_0) \circ \eta_{W_1}(W, W_0),$$

de onde segue a conclusão que queríamos. □

1.3 Homogeneidade da Grassmaniana

Nesta seção, mostraremos que a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é um espaço homogêneo, ou seja, difeomorfo a um quociente de grupos de Lie. Para tanto, convém recordar a teoria básica de ações de grupos.

Ações de Grupos

Relembremos, brevemente, alguns resultados da teoria de ações de Grupos de Lie em variedades. Em nosso contexto G denotará um grupo de Lie. Uma ação à esquerda de G em M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \mu \colon G \times M &\to M \\ (g,p) &\mapsto g \cdot p \end{aligned}, \tag{1.32}$$

de sorte que cada $g_1, g_2 \in G$ e $p \in M$ cumpram as condições:

- $\mu(g_1 g_2, p) = \mu(g_1, \mu(g_2, p))$,
- $\mu(e, p) = p$.

Exemplo 1.14. Todo grupo de Lie G age sobre si mesmo através da translação a esquerda. Explicitamente, a aplicação

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned} \tag{1.33}$$

é uma ação à esquerda.

Exemplo 1.15. Sendo G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável, então a **ação trivial** de G em M é definida por

$$\begin{aligned} \mu : G \times M &\to M \\ (g,p) &\mapsto p \end{aligned} \tag{1.34}$$

Exemplo 1.16. A **ação natural** de $M_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}^n$ é dada pela multiplicação de matrizes, considerando a identificação de $x \in \mathbb{C}^n$ como uma matriz-coluna.

Definição 1.17. A **órbita** e o **estabilizador** de $p \in M$ são os subconjunto de, respectivamente M e G, definidos por $\mathtt{orb}(p) := \{\mu(g,p) \,|\, g \in G\}$ e $\mathtt{stab}(p) = \{g \in G \,|\, \mu(g,p) = p\}$.

Uma ação à esquerda $\mu : G \times M \to M$ é dita ser **transitiva** se $\mathtt{orb}(p) = M$, para todo $p \in M$. A condição de $\mathtt{orb}(p) = M$ para cada $p \in M$ é supérflua, dado que é suficiente que seja verificada para apenas um elemento. É fácil ver que o estabilizador de qualquer elemento é um subgrupo de G. Se μ é uma ação à esquerda em M, a aplicação

$$\begin{aligned} \mu_p \colon G/\mathtt{stab}(p) &\to \mathtt{orb}(p) \\ [g] \quad &\mapsto \mu(g,p) \end{aligned} \tag{1.35}$$

é um difeomorfismo. Em particular, temos o seguinte resultado

Teorema 1.18. Se G age de maneira transitiva em uma variedade diferenciável M, então M é homogênea, ou seja, difeomorfa a um quociente de grupos de Lie.

Seja $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Sabemos da álgebra linear que, dado $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, $M(W) \subseteq \mathbb{C}^n$ é um subespaço vetorial de dimensão k, ou seja, um ponto da Grassmanniana $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$. Podemos então definir

$$\begin{aligned} \mu \colon GL_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) &\to \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \quad . \\ (M,W) \quad &\mapsto \quad M(W) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Proposição 1.19. A aplicação μ previamente definida é uma ação diferenciável a esquerda e transitiva.

Demonstração.
De fato, a diferenciablilidade de μ em (A, W_0) pode ser verificada diretamente via coordenadas locais. Com efeito, sendo $W_1 \subseteq \mathbb{C}^n$ de sorte que $\mathbb{C}^n = A(W_0) \oplus W_1 = W_0 \oplus W_1$, temos que o domínio da carta local $\phi(W_0, W_1)$ contém W_0 e $A(W)$. Assim, escolhendo as cartas locais como no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \\ {\scriptstyle (\mathrm{id},\phi(W_0,W_1))}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi(W_0,W_1)} \\ GL_n(\mathbb{C}) \times \mathtt{Hom}(W_0,W_1) & \xrightarrow{\phi\circ\mu\circ(\mathrm{id},\phi)^{-1}} & \mathtt{Hom}(W_0,W_1) \end{array},$$

a representação de μ em relação às coordenadas locais é dada por

$$(M,T) \mapsto (M, \mathtt{graf}(T)) \mapsto M(\mathtt{graf}(T)) \mapsto (M_{01} + M_{11} \circ T) \circ (M_{00} + M_{10} \circ T)^{-1}. \tag{1.37}$$

Aqui, $M_{ij} : W_i \to W_j$ denota a componente de M relativamente a soma direta $W_0 \oplus W_1$, ou seja

$$M = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{10} \\ M_{01} & M_{11} \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

A única passagem não imediata é a última. A fim de constatar sua veracidade, basta observar que, dado $w \in W$, tem-se que

$$\begin{gathered} (M_{00}w + M_{10} \circ Tw) + (M_{01} + M_{10} \circ T)(M_{00} + M_{10} \circ T)^{-1}(M_{00}w + M_{10} \circ Tw) \\ = \\ (M_{00}w + M_{10} \circ Tw) + (M_{01} + M_{10} \circ T)(w) \\ = \\ \begin{pmatrix} M_{00} & M_{10} \\ M_{01} & M_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ Tw \end{pmatrix} \\ = \\ M(w + Tw), \end{gathered} \tag{1.39}$$

de onde segue que $\mathtt{graf}((M_{01} + M_{11} \circ T) \circ (M_{00} + M_{10} \circ T)^{-1}) = M(\mathtt{graf}(T))$. Como as operações de inversão e de tomar a componente ij de um isomorfismo são diferenciáveis, segue que (1.37) é diferenciável, ou seja, μ também o é.

Mostremos agora que μ é uma ação transitiva. Com efeito, lembremos que basta mostrar que $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é a órbita de algum de seus pontos. Tomemos, por simplicidade o ponto $\mathbb{E} = \mathrm{span}\{e_j \,|\, 1 \leq j \leq k\}$ e vejamos que $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) = \mathtt{orb}(\mathbb{E})$, analisando ambas as inclusões.

($\supseteq$) Evidente, dado que a ação μ toma valores na Grassmanniana.

($\subseteq$) De fato, dado $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, seja $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$ um conjunto linearmente independente de sorte que $W = \mathtt{span}\{\xi_j \,|\, 1 \leq j \leq k\}$. Completando a uma base de $\mathbb{C}^n$, defina

$$\mathcal{E} = \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \rho_{k+1}, \ldots, \rho_n\} \tag{1.40}$$

e tome A como sendo a matriz de mudança de base de $\mathcal{E}$ para a base canônica $\mathcal{E}_{can}$ de $\mathbb{C}^n$. Assim, a construção de A fornece que

$$\mu(A, \mathbb{E}) = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{E}\} = W, \tag{1.41}$$

obtendo, assim, a inclusão desejada e finalizando a prova da proposição, como queríamos. $\square$

Corolário 1.20. $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é uma variedade homogênea.

Demonstração.
De fato, da teoria de ações de Grupos de Lie em variedades, tem-se que

$$\frac{GL_n(\mathbb{C})}{\mathtt{stab}(\mathbb{E})} \simeq \mathtt{orb}(\mathbb{E}) = \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n), \tag{1.42}$$

como queríamos. $\square$

Observação 1.21. Uma adaptação do argumento exposto ao longo da seção fornece que a restrição de μ ao subconjunto e $SU(n)$ definem, da mesma forma, uma ação transitiva, de modo que a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é também um espaço homogêneo associado a esse grupo. Em particular, a compacidade desses grupos fornece que a Grassmanniana dos k-planos de $\mathbb{C}^n$ é uma variedade compacta.

De fato, sendo $W, W' \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é possível construir $\{b_j \,|\, 1 \leq j \leq n\}$, $\{b'_j \,|\, 1 \leq j \leq n\}$ bases ortonormais de $\mathbb{C}^n$ de sorte que $\{b_j \,|\, 1 \leq j \leq n\}$ e $\{b'_j \,|\, 1 \leq j \leq n\}$ sejam bases, respectivamente de W e W', e o isomorfismo linear $b_j \mapsto b'_j$ seja uma transformação unitária, de modo que existe $A \in SU(n)$ tal que $A(W) = W'$, como queríamos.

Observação 1.22. Finalizamos essa seção observando que uma das motivações para definirmos a estrutura de variedade em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ consiste no seguinte resultado.

Proposição 1.23. (HELGASON, 1979) Seja G um grupo de Lie, H um subgrupo fechado munido da única estrutura diferenciável que o faz um subgrupo de Lie, $\pi : G \to G/H$ a projeção natural, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ as respectivas álgebras de Lie e $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ um subespaço de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Então, existe uma vizinhança U de $0 \in \mathfrak{m}$ que é aplicada homeomorficamente sobre $\mathtt{exp}(U)$ via aplicação exponencial que, por sua vez, é aplicado homeomorficamente sobre uma vizinhança de $\pi(e)$ via a projeção canônica.

Aplicando a proposição acima ao caso em que $G = U(n)$ e $H = U(k) \times U(n-k)$, obtemos que cada elemento do grupo quociente $U(n)/U(k) \times U(n-k)$ admite uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathtt{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{n-k})$, a saber o modelo que foi usado para definir a estrutura diferenciável em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$. Assim, a construção aparentemente arbitrária das cartas locais em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é necessária para obtermos uma estrutura de variedade homogênea, como vimos no Corolário 1.20. Lembramos que a estrutura topológica em G/H provém da seguinte proposição.

Proposição 1.24. (HELGASON, 1979) Seja G um grupo de Lie, H um subgrupo fechado munido da única estrutura diferenciável que o faz um subgrupo de Lie e $\pi : G \to G/H$ a projeção natural. Então existe uma única estrutura diferenciável em G/H de sorte que

$$\begin{aligned} f : G \times G/H &\to G/H \\ (g, [h]) &\mapsto [gh] \end{aligned} \tag{1.43}$$

seja diferenciável.

1.4 A Aplicação de Plücker

Uma constatação a respeito das variedades Grassmannianas é que tal conceito é uma generalização dos chamados espaços projetivos. Nessa seção, mostraremos que $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ é, em particular, aplicada em um subconjunto fechado de um espaço projetivo. Sendo $\mathbb{E}$ um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita, provido da relação de equivalência $x \sim y$ se, e somente se, existe $\lambda \neq 0$ de modo que $x = \lambda y$, a **projetivização** de $\mathbb{E}$ é o conjunto

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) := \frac{\mathbb{E} \setminus \{0\}}{\sim}. \tag{1.44}$$

Definição 1.25. A **aplicação de Plücker** é definido como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} : \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) &\to \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n) \\ W &\mapsto [v_1 \wedge \ldots \wedge v_k] \end{aligned}, \tag{1.45}$$

onde $\{v_j \,|\, 1 \leq j \leq k\} \subseteq \mathbb{C}^n$ é algum subconjunto linearmente independente que gera W.

Proposição 1.26. A função (1.45) está bem definida e é uma aplicação injetiva entre as variedades $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ e $\mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n)$.

Demonstração.
A primeira afirmação segue do fato que, se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\{w_1, \ldots, w_k\}$ são bases distintas de W, temos que

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = \mathtt{det}(A) \cdot w_1 \wedge \ldots \wedge w_k, \tag{1.46}$$

onde A é a matriz que relaciona tais bases, de onde segue que as mesmas estão na mesma classe de equivalência do projetivizado de $\wedge^k \mathbb{C}^n$ e, portanto, representam o mesmo elemento, atestando, assim, a boa definição de $\mathfrak{p}$.

Sobre a injetividade, sendo $V = \mathtt{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $W = \mathtt{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$ de sorte que $\mathfrak{p}(V) = \mathfrak{p}(W)$, a definição da classe de equivalência de $\mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n)$ fornece que

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_k = \lambda v_1 \wedge \ldots \wedge v_k, \tag{1.47}$$

para algum escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, segue que, para cada $1 \leq j \leq k$,

$$v_j \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge w_r) = 0 \Longrightarrow v_j \in \mathtt{span}(w_1, \ldots, w_r) = W, \tag{1.48}$$

de onde segue que $V = \mathtt{span}(v_1, \ldots, v_r) = \mathtt{span}(w_1, \ldots, w_r) = W$, como queríamos. $\square$

A proposição seguinte tem por finalidade auxiliar na obtenção de uma inversa da aplicação de Plücker.

Proposição 1.27. Seja $\omega \in \wedge^k \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Então, o subespaço

$$L_\omega := \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, \omega \wedge v = 0\} \tag{1.49}$$

possui dimensão, no máximo, igual a k, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, ω for decomponível, isto é, $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$, para certos $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$.

Demonstração.
Seja $\{v_1,\ldots,v_s\}$ uma base de L_ω e $\{v_1,\ldots,v_n\}$ algum completamento a uma base de $\mathbb{C}^n$. Escrevendo $I=\{i_1<\ldots<i_k\}\subseteq\mathbb{N}_{\leq n}$ e $\omega_I=v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}$, temos que

$$\omega=\sum_{\mathtt{len}(I)=k} c_I\,\omega_I, \tag{1.50}$$

para certos $c_I\in\mathbb{C}$. Ainda, para cada $1\leq j\leq n$, vale

$$\omega\wedge v_j=\left(\sum_{\mathtt{len}(I)=k} c_I\,\omega_I\right)\wedge v_j=\sum_{\mathtt{len}(I)=k} c_I\,(\omega_I\wedge v_j)=\sum_{j\notin I} c_I\,(\omega_I\wedge v_j). \tag{1.51}$$

A igualdade acima fornece que, se $c_I\neq 0$, então $I\supseteq\{1,\ldots,s\}$. Com efeito, do contrário, ou seja, se existe $j\leq s$, ou seja, de modo que $j\notin I$, a condição $v_j\in L_\omega$ implica que $\omega\wedge v_j=0$ e, portanto $c_I=0$, para cada k-índice I tal que $j\notin I$, contrariando a afirmação inicial. Assim, supondo por absurdo que $s=\mathtt{dim}(L_\omega)>k$, o fato de $\omega\neq 0$ atesta a existência de um k-índice I de modo que $c_I\neq 0$, donde, pelo argumento prévio, $I\supseteq\{1,\ldots,s\}$. Logo,

$$k=\mathtt{len}(I)\geq\mathtt{len}\{1,\ldots,s\}=s>k, \tag{1.52}$$

uma clara contradição, oriunda de supormos que $s>k$, ou seja, $s\leq k$.

Mostremos agora que a igualdade ocorre apenas no caso ω decomponível. Se $s=k$ o único k-índice que contém $\{1,\ldots,s\}$ é o próprio $\{1,\ldots,s\}$, de onde segue que ω é um múltiplo escalar de $v_1\wedge\ldots\wedge v_k$. Por outro lado, se existem $w_1,\ldots,w_k\in\mathbb{C}^n$ de forma que $\omega=w_1\wedge\ldots\wedge w_k$, então $w_j\in L_\omega$, para cada $1\leq j\leq k$, de onde segue que $\mathtt{dim}(L_\omega)\geq k$, em particular $\mathtt{dim}(L_\omega)=k$, como queríamos. $\square$

Observação 1.28. A inversa da aplicação de Plücker sobre sua imagem consiste na correspondência $[\omega]\in\mathbb{P}(\wedge^k\mathbb{C}^n)\mapsto L_\omega\in\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$.

Nesta seção, mostramos, em particular, que a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ pode ser aplicada sobre um subconjunto fechado do espaço projetivo $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{C}^n)$. Pode-se mostrar, além disso, que $\mathfrak{p}$ é um mergulho, no sentido diferencial, como feito, por exemplo, em (WELLS; GARCÍA-PRADA, 1980), tornando, assim, a Grassmanniana uma de variedade projetiva algébrica.

1.5 Fibrados Vetoriais em $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$

Fibrados vetoriais são objetos que surgem naturalmente em diversos campos da Matemática. É parte de sua confecção, em particular, uma variedade chamada **base** do fibrado. Fibrados vetoriais que possuem a Grassmanniana como base são ferramentas da teoria de sistemas integráveis através das chamadas **seções** dos fibrados utilizados. Nessa seção, introduziremos o conceito de fibrado vetorial e que, sobre $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, está definida uma aplicação que possui tal estrutura. Verificaremos, em particular que tal estrutura é localmente trivial e induz o fibrado realmente importante nas variadas áreas da Matemática. Comecemos introduzindo a notação e nomenclatura.

Definição 1.29. Sejam E,B variedades diferenciáveis e $\pi : E \to B$ uma aplicação suave. A terna (π,E,B) é dita ser um **fibrado vetorial real(respectivamente complexo)** se forem cumpridas as seguintes condições:

1. Existe um espaço vetorial real(respectivamente complexo) V, dito a **fibra** de (E,π) de sorte que, para cada $p \in E$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real (respectivamente complexo) isomorfo a V.

2. Todo ponto $p \in B$ pertence a alguma vizinhança $U \subseteq B$ de sorte que exista um difeomorfismo $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ tal que
$$\mathrm{pr}_1 \circ \phi_U = \pi.$$
Aqui, $\mathrm{pr}_1 : U \times V \to U$ denota a projeção na primeira coordenada.

3. $\phi_U|_{E_p} : E_p \to V$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Informalmente, um fibrado vetorial pode ser entendido como uma família de espaços vetoriais parametrizada de forma diferenciável por uma variedade B fixada. Em geral, utliza-se, e adotaremos ao longo do texto, a notação $E \xrightarrow{\pi} B$ para se referir a um fibrado vetorial. Denotando por $\mathcal{A} := \{U_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ a cobertura formada pelos abertos trivializantes, temos que $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ é da forma
$$\begin{aligned} \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k &\to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \\ (p,v) &\mapsto (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot v) \end{aligned}, \tag{1.53}$$
onde $g_{\alpha\beta}(p)$ é um isomorfismo linear.

A correspondência $p \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto g_{\alpha\beta}(p) \in GL(k,\mathbb{C})$ recebe o nome de **aplicação de transição** entre U_α e U_β. Um fibrado vetorial é completamente caracterizado por suas aplicações de transição (veja, por exemplo, em (ZINGER, 2010)). Em particular, temos que estão definidas operações sobre os fibrados vetoriais, tais como a soma direta de fibrados ou a potência exterior de um fibrado vetorial. Em todos esses casos, as trivializações locais são herdadas da estrutura anterior. Como um exemplo, temos que

Exemplo 1.30. Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to B$ de dimensão n, considere a aplicação
$$\begin{aligned} \mathfrak{d} : \bigsqcup_{b \in B} \{b\} \times \Lambda^n(\pi^{-1}(b)) &\to B \\ (b,v) &\mapsto b \end{aligned}. \tag{1.54}$$
Nessas condições, a terna $(\sqcup_{b\in B}\{b\} \times \Lambda^n(\pi^{-1}(b)), \mathfrak{d}, B)$ é um fibrado vetorial de dimensão 1, em virtude da potência exterior máxima de um espaço de dimensão finita ser unidimensional.

No caso acima, as aplicações de transição são da forma $\tilde{\phi}_{\alpha\beta}(p) = \Lambda^n \phi_{\alpha\beta}(p)$, onde $\phi_{\alpha\beta}$ é uma transição de $E \xrightarrow{\pi} B$. Fibrados unidimensionais como o do exemplo anterior são costumeiramente referidos na literatura como **fibrados de linha**. Existem outros exemplos de fibrados vetoriais importantes que poderíamos comentar, tais como os fibrados tangente e cotangente.

Exemplo 1.31 (Fibrado Trivial)**.** Sendo M uma variedade diferenciável n-dimensional, a terna $(M \times \mathbb{C}^n, \pi, M)$, com $\pi(p,v) = p$, é um fibrado vetorial de dimensão n.

Exemplo 1.32. Denotemos o **espaço projetivo complexo de dimensão *n*** por $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, munido da topologia quociente. Recordemos que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}{\sim}$, onde $x \sim y$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de sorte que $y = \lambda x$. Seja $\lambda_n = \{(p,v) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \,|\, v \in p\}$. A projeção

$$\begin{aligned} \pi : \lambda_n &\to \mathbb{C}\mathrm{P}^n \\ (p,v) &\mapsto p \end{aligned} \tag{1.55}$$

define um fibrado vetorial de dimensão 1. Mostraremos, na realidade um resultado que generaliza esse exemplo no contexto das Grassmannianas(observe que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ pode ser identificado como $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^{n+1})$). A proposição a seguir se aproxima do ambiente do texto, introduzindo um dos importantes fibrados vetoriais sobre a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, sendo uma generalização do exemplo anterior.

Proposição 1.33. Definimos $Q := \{(p,v) \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \,|\, v \in p\}$. Nesse contexto, afirmamos que

$$\begin{aligned} \pi : Q &\to \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \\ (p,v) &\mapsto p \end{aligned} \tag{1.56}$$

é um fibrado vetorial de dimensão k.

Demonstração.
Dado $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$, denote por $\pi_W : \mathbb{C}^n \to W$ a projeção ortogonal em W e considere o conjunto

$$U_W := \{W' \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \,|\, \mathtt{dim}(\pi_W(W')) = k\}. \tag{1.57}$$

Observe inicialmente que $U_W \neq \varnothing$, uma vez que $W \in U_W$. Os conjuntos da forma U_W, para $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{C}^n)$ serão os candidatos a vizinhanças de trivializações locais. Mostremos que, U_W é aberto, Com efeito, temos que

$$\mathfrak{s}^{-1}(U_W) = \{(v_1, \ldots, v_k) \in V_k(\mathbb{C}^n) \,|\, \{\pi_W(v_j)\} \text{ é linearmente independente}\}, \tag{1.58}$$

onde $\mathfrak{s}$ é a aplicação definida em 1.25. Seja A a matriz de π_W relativa a base canônica de $\mathbb{C}^k$ e àlguma base arbitrária de W. Assim, a condição (1.58) fornece que, dada k-upla $(v_1, \ldots, v_k) \in$

$\mathfrak{s}^{-1}(U_W)$, a matriz $M = (Av_1, \ldots, Av_n)$ possui determinante não-nulo, ou seja $\mathfrak{s}^{-1}(U_W)$ é aberto e, por conseguinte, U_W também o é. Afirmamos agora que, para cada $W \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, a aplicação

$$\begin{aligned} h : \pi^{-1}(U_W) &\to U_W \times W \\ (W', v) &\mapsto (W', \pi_W(v)) \end{aligned} \tag{1.59}$$

é uma trivialização local de Q. De fato, denotando por $\mathrm{pr}_1 : U_W \times W \to U_W$ a projeção na primeira coordenada, temos que $(\mathrm{pr}_1 \circ h) \cdot (W', v) = \mathrm{pr}_1(W', \pi_W(v)) = W' = \pi(W', v)$ e, além disso, para cada $p \in \mathrm{Gr}_{\kappa}(\mathbb{C}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} h|_{E_p} : E_p &\to \{p\} \times W \\ (p, v) &\mapsto (p, \pi_W(v)) \end{aligned} \tag{1.60}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais, dado que, $\mathtt{dim}(p) = \mathtt{dim}(W)$. Ainda, h é diferenciável, pois cada uma de suas funções-coordenada o é, e bijetiva (vide (HATCHER, 2003)). $\square$

O fato do fibrado tautológico sobre $\mathrm{Gr}_{\kappa}(\mathbb{C}^n)$ ser localmente trivial, juntamente com as operações básicas definidas anteriormente, fornece que o fibrado $\mathrm{Det} \to \mathrm{Gr}_{\kappa}(\mathbb{C}^n)$, sobre a Grassmanniana, cujas fibras, denotadas por $\mathrm{Det}(W)$, com $W \in \mathrm{Gr}_{\kappa}(\mathbb{C}^n)$, são dadas pela potência exterior máxima do subespaço considerado, é também localmente trivial. Essa construção recebe o nome de **fibrado determinante** e, no contexto de espaços de Hilbert de dimensão infinita, as seções oriundas do fibrado dual dão origem a aplicações importantes na Matemática. Como um modelo finito-dimensional, temos o seguinte resultado.

Definição 1.34. Uma **variedade complexa** M é um conjunto munido de um atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, tal que, se $\alpha, \beta \in A$ são tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, então $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é holomorfa.

Assim como na Análise Complexa, existe também a noção de aplicação holomorfa no contexto de variedades. Mais precisamente, uma aplicação $f : M \to N$ entre variedades complexas é holomorfa se, em cada par de cartas locais (U, φ), (V, ψ), a representação de f, dada por $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ for uma aplicação holomorfa.

Exemplo 1.35. As aplicações de transição do atlas de $\mathrm{Gr}_{\kappa}(\mathbb{C}^n)$ são holomorfas, de modo que a Grassmanniana possui uma estrutura de variedade complexa.

Definição 1.36. Seja B uma variedade complexa, um **fibrado holomorfo** sobre B é um fibrado vetorial complexo $E \xrightarrow{\pi} B$, de sorte que esteja definida uma estrutura complexa sobre E e que, para cada $x \in B$, se $U \subseteq B$ é um aberto trivializante, com $x \in U$, e

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k \tag{1.61}$$

é uma trivialização local, então φ_U é bi-holomorfa.

Observação 1.37. Se $E \xrightarrow{\pi} B$ é um fibrado holomorfo de dimensão k com aplicações de transição $g_{\alpha\beta}$ relativas à cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ e $f : B \to E$ é uma seção, então as aplicações $f_\alpha := \varphi \circ f : U_\alpha \to \mathbb{C}^k$ são holomorfas e, além disso, pela definição de aplicação de transição,

$$f_\alpha(p) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot f_\beta(p), \quad \text{em } U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing. \tag{1.62}$$

Reciprocamente, se é dada uma família de aplicações holomorfas $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ cumprindo (1.62), pode-se associar uma seção holomorfa de $E \xrightarrow{\pi} B$.

Definição 1.38. Dado $\gamma = E \xrightarrow{\pi} B$ um fibrado vetorial, uma seção de γ é uma aplicação diferenciável $s : B \to E$ de sorte que $s(x) \in E_x$, para cada $x \in B$. Em síntese, seções de um fibrado são inversas a direita da projeção π. Em particular, o conjunto $\Gamma(E)$ das seções de E é um espaço vetorial.

Exemplo 1.39. Dado que a fibra E_x possui estrutura de espaço vetorial, com vetor nulo, digamos, $\mathbf{0}_x \in E_x$ sempre é possível obter uma seção, a saber a seção nula, $s(x) = \mathbf{0}_x$, para cada $x \in B$.

Exemplo 1.40. Seja $\mathfrak{L}$ o fibrado vetorial sobre $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ definido através das aplicações de transição da forma

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} : U_0 \cap U_1 &\to GL_1(\mathbb{C}) \\ (z_0 : z_1) &\mapsto \frac{z_\alpha}{z_\beta} \end{aligned}, \tag{1.63}$$

onde $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ e U_α denotam os domínios de cartas locais em $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$(veja o exemplo A.3 do Apêndice A). Se existisse uma seção holomorfa global de $\mathfrak{L}$, ou equivalentemente, aplicações holomorfas $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ satisfazendo a relação (1.62) teríamos que, em particular, $f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é holomorfa, para $\alpha \in \{0,1\}$. Assim, expandindo em série de Laurent, segue que

$$f_0 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{e} \qquad f_1 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \tag{1.64}$$

Aqui, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ denotam as cartas locais em $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, explicitamente:

$$\varphi_0(z_0 : z_1) = \frac{z_1}{z_0} \qquad \text{e} \qquad \varphi_1(z_0 : z_1) = \frac{z_0}{z_1}. \tag{1.65}$$

A condição de cociclo (1.62) fornece, então que:

$$\begin{gathered} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = f_0 \circ \varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) = (f_0 \circ \varphi_0^{-1})(\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1})(z) \\ = \\ g_{01}(\varphi_1^{-1}(z)) \cdot \left(f_1 \circ \varphi^{-1}\right)(z) \\ = \\ z \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \end{gathered} \tag{1.66}$$

de onde segue que $a_n = b_n = 0$ e, assim, a única seção holomorfa global possível de $\mathfrak{L}$ é a seção trivial.

A existência de seções não triviais em um fibrado holomorfo é um problema complicado de se resolver. A definição de fibrado não impõe barreiras para que seções holomorfas não triviais inexistam, como vimos no exemplo anterior. Finalizaremos esse capítulo com a verificação que este não é o caso do fibrado Det^* sobre a Grassmanniana. Para tanto, precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 1.41. Seja M, X variedades complexas e $N \subseteq M$ uma subvariedade conexa com codimensão $d > 1$. Se $f : M \setminus N \to X$ é holomorfa, então existe uma única aplicação $\tilde{f} : M \to X$ que é uma extensão de f.

Demonstração.
Veja, por exemplo, (MOVASATI, 2021). □

Proposição 1.42. O espaço $\Gamma(\mathrm{Det}^*)$ das seções holomorfas de Det^* sobre a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_\kappa(\mathbb{C}^n)$ é isomorfa a $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)^*$

Demonstração (Vide (PRESSLEY; SEGAL, 1988)).
Uma seção holomorfa de Det^* é uma aplicação holomorfa $s : \mathrm{Det} \to \mathbb{C}$ de sorte que a restrição em cada fibra seja linear. Ainda, um dado elemento do espaço total Det é representado na forma $\lambda v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v_1, \ldots, v_k$ é base de algum subespaço $W \in \mathrm{Gr}_\kappa(\mathbb{C}^n)$. Está bem definida, então, a aplicação

$$\begin{aligned} f : \Lambda^k(\mathbb{C}^n)^* &\to \Gamma(\mathrm{Det}^*) \\ \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k &\mapsto \begin{bmatrix} g : \mathrm{Det} \to \mathbb{C} \\ \lambda v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto \mathtt{det}(\langle \alpha_i, v_j \rangle) \end{bmatrix} \end{aligned}. \tag{1.67}$$

Afirmamos que f é um isomorfismo. Com efeito, a aplicação (1.67) é, por definição, injetora. Para provar a sobrejetividade, considere $U \subseteq \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n$ o subconjunto aberto formado pelas k-uplas de vetores linearmente independentes. Considerando π a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : U &\to \mathrm{Det} \\ (z_1, \ldots, z_k) &\mapsto z_1 \wedge \ldots \wedge z_k \end{aligned}, \tag{1.68}$$

temos que, se $s : \mathrm{Det} \to \mathbb{C}$ é uma seção de Det^*, sabemos que a composição se extende a uma aplicação k-linear $\mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. A última afirmação é consequência de, considerando $s(\pi(v_1, \ldots, v_k))$ como função de v_1, isto é, mantendo fixados os parâmetros v_j, para $2 \leq j \leq k$. O resultado desse processo é uma aplicação holomorfa h, definida no complemento do subespaço $\langle v_2, \ldots, v_k \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisfaz $h(\lambda v_1) = \lambda h(v_1)$, para cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Como $k < n$, temos que a codimensão do subespaço $\langle v_2, \ldots, v_k \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$ é maior do que 1, de onde segue que h se extende de maneira holomorfa a $\mathbb{C}^n$, em virtude do Teorema 1.41. Assim, podemos expandir h em série de potências em uma vizinhança da origem e, como $h(\lambda v_1) = \lambda h(v_1)$, segue que h é linear. Um argumento similar aplicado as outras variáveis fornece que $s \circ \pi$ é multilinear, como queríamos. □

Observação 1.43. A demonstração do teorema anterior foi baseada na afirmação de que uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Det}^*)$ pode ser representada por uma aplicação holomorfa $\alpha : \text{Det} \to \mathbb{C}$ que é linear em cada fibra. De fato,

- Dada $\sigma : \text{Gr}_K(\mathbb{C}^n) \to \text{Det}^*$ uma seção de Det^*, a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \text{Det} &\to \mathbb{C} \\ \lambda v_1 \wedge \ldots \wedge v_k &\mapsto (\sigma W) \cdot (v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \end{aligned}, \tag{1.69}$$

  onde $W = \texttt{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ é holomorfa e linear em cada fibra.

- Dada α : Det $\to \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa e linear em cada fibra de Det, está bem definida a seguinte seção

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Gr}_K(\mathbb{C}^n) &\to \text{Det}^* \\ W &\mapsto \left[\begin{aligned} T_W : \text{Det}(W) &\to \mathbb{C} \\ p &\mapsto \alpha(p) \end{aligned} \right] \end{aligned}. \tag{1.70}$$

CAPÍTULO

2

UMA MISCELÂNEA DE ANÁLISE FUNCIONAL

Neste capítulo, introduziremos os conceitos da Análise Funcional relevantes para abordar o tema relativo a Grassmanniana de dimensão infinita estudada por Sato e posterialmente pela colaboração entre os matemáticos Segal e Wilson. Especificamente, buscaremos um melhor entendimento dos chamados operadores de Fredholm, que, além de ser um tópico interessante por si, será importante para generalizar alguns conceitos do capítulo anterior. A confecção desse capítulo foi inspirada em (BREZIS, 2010), (OLIVEIRA, 2001), (DOUGLAS, 2012), (BREEN, 2016) e (MELROSE, 2010).

Definição 2.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{B}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de sorte que esteja definido em $\mathcal{B}$ uma operação binária $\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Diremos que $\mathcal{B}$ é uma **álgebra** sobre $\mathbb{K}$ se, para cada $x, y, z \in \mathcal{B}$ e $a, b \in \mathbb{K}$, as propriedades abaixo forem cumpridas

1. $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$
2. $z\cdot(x+y) = z\cdot x + z\cdot y$
3. $(ax)\cdot(by) = (ab)(x\cdot y)$

Se, além disso, $\mathcal{B}$ for um espaço de Banach e uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ com identidade e de sorte que, para todos $f, g \in \mathbb{B}$

1. $\|e\| = 1$
2. $\|f\cdot g\| \leq \|f\|\,\|g\|$,

então diremos que $\mathcal{B}$ é uma **álgebra de Banach**.

Exemplo 2.2. Sendo X um espaço topológico compacto, o conjunto $\mathscr{C}(X)$ das funções contínuas a valores complexos, onde, para cada $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

1. $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
2. $(\lambda f_1)(x) = \lambda f_1(x)$
3. $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$,

é uma álgebra de Banach.

Proposição 2.3. Sendo $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach e $f \in \mathcal{B}$ tal que $\|1-f\| < 1$, então f é inversível e, além disso,

$$\|f^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1-f\|}. \tag{2.1}$$

Demonstração.
Afirmamos inicialmente que a série $\sum_{n=0}^{\infty} (1-f)^n$ é somável e que seu valor, digamos g, é a inversa de f. Com efeito,

$$\begin{aligned} fg = [1-(1-f)]\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-f)^n\right) &= \lim_{N\to\infty}\left([1-(1-f)]\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(1-(1-f)^{N+1}\right) = 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} gf = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-f)^n\right)[1-(1-f)] &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n[1-(1-f)]\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(1-(1-f)^{N+1}\right) = 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Resta apenas mostrar que a sequência de somas parciais é convergente. De fato, pondo $\eta := \|1-f\| < 1$, temos que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n - \sum_{n=0}^{M}(1-f)^n\right\| = \left\|\sum_{n=M+1}^{N}(1-f)^n\right\| &\leq \sum_{n=M+1}^{N}\|1-f\|^n \\ = \sum_{n=M+1}^{N}\eta^n &\leq \frac{\eta^{M+1}}{1-\eta} \xrightarrow{M\to\infty} 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

de onde segue que $\left(\sum_{n=0}^{N}(1-f)^n\right)_N$ é uma sequência de Cauchy e, como $\mathfrak{B}$ é Banach, convergente, como queríamos. □

Denotaremos, em uma álgebra de Banach, por $\mathscr{G}$ o conjunto dos elementos inversíveis e por $\mathscr{G}_L$ (por $\mathscr{G}_R$) os respectivos elementos que são inversíveis à esquerda (à direita) porém não inversíveis. Uma álgebra de Banach é, evidentemente um espaço topológico, com a topologia induzida por sua norma. A proposição a seguir vem, como uma aplicação do resultado anterior, no sentido de inserir tais conjuntos nesse contexto.

Proposição 2.4. Os conjuntos $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}_L$ e $\mathscr{G}_R$ previamente definidos são abertos.

Demonstração.
De fato, sendo $f \in \mathscr{G}$, considere $r := 1/\|f\|^{-1}$. Assim, se $g \in B(f,r)$, temos, por definição que

$$\|f-g\| < \frac{1}{\|f\|^{-1}} \Longrightarrow 1 > \|f^{-1}\| \cdot \|f-g\| \geq \|1-f^{-1}g\|, \tag{2.5}$$

de onde segue que, em virtude da Proposição 2.3 que $f^{-1}g \in \mathscr{G}$ e, assim, $g = f \circ (f^{-1}g) \in \mathscr{G}$, verificando, portanto, que $\mathscr{G}$ é aberto.

Por outro lado, se $f \in \mathscr{G}_L$, ou seja, se existir $h \in \mathcal{B}$ de sorte que $hf = 1$, tome $r := 1/\|h\|$. Nesse contexto, teremos que, dado $g \in B(f,r)$,

$$\|f-g\| < \frac{1}{\|h\|} \Longrightarrow 1 > \|h\|\|f-g\| \geq \|hf-hg\| = \|1-hg\|, \tag{2.6}$$

donde, novamente pela proposição 2.3, o operador $\kappa := hg$ é inversível e, portanto, g é inversível à esquerda, dado que

$$(\kappa^{-1}h)g = 1. \tag{2.7}$$

Entretanto, g não é inversível, uma vez que, do contrário, teríamos que $h = kg^{-1}$ seria inversível e, por consequência f também seria, contradizendo o fato de que $f \in \mathscr{G}_L$. Assim, $g \in \mathscr{G}_L$ e $\mathscr{G}_L$ é aberto. Mudando o que deve ser modificado no argumento anterior, segue que $\mathscr{G}_R$ também é aberto, como queríamos. $\square$

Definição 2.5. Em álgebra de Banach $\mathcal{B}$, o grupo abstrato dos **índices** de $\mathcal{B}$, denotado por $\Lambda_{\mathcal{B}}$, ou simplesmente por Λ quando a álgebra está subentendida, é dado pelo quociente $\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}_0$, onde $\mathfrak{Y}$ denota os elementos inversíveis de $\mathcal{B}$ e $\mathfrak{Y}_0$ a componente conexa que contém a identidade. O homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathfrak{Y} &\to \Lambda \\ x &\mapsto [x] \end{aligned} \tag{2.8}$$

recebe o nome de índice abstrato.

2.1 Os conjuntos $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ e $\mathcal{LF}(\mathbb{H})$

Nesta seção, apresentamos um estudo a respeito dos chamados operadores compactos em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$. Em particular, mostramos que o conjunto dos operadores compactos é dado pelo fecho dos chamados operadores de posto finito.

Definição 2.6. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ um operador linear, diremos que T:

1. Possui **posto finito** se $\mathtt{ran}(T)$ for um subespaço finito-dimensional.
2. É **compacto** se $T(B_{01}) \subseteq \mathbb{H}$ for um subconjunto compacto.

Aqui, $B_{01} \subseteq \mathbb{H}$ denota a bola unitária fechada de raio 1 de $\mathbb{H}$. Observe que, por definição, todo operador de posto finito é compacto. Dizer que um operador $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é compacto é equivalente a $\overline{T(A)} \subseteq \mathbb{H}$ ser um subconjunto compacto, para cada $A \subseteq \mathbb{H}$ limitado.

Exemplo 2.7. Seja K uma função em $[0,1] \times [0,1]$ a valores complexos mensurável e com quadrado integrável relativamente a medida de Lebesgue. Definimos a transformação T_K em $L^2([0,1])$ de modo que

$$T_K f \cdot x = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy, \tag{2.9}$$

para $f \in L^2[0,1]$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz fornece que T_K é um operador limitado. De fato,

$$\int_0^1 |T_K f(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \right|^2 dx \tag{2.10}$$

$$\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right\} \left\{ \int_0^1 |f(y)|^2 dy \right\} dx \tag{2.11}$$

$$\leq \|f\|^2 \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy dx, \tag{2.12}$$

de onde segue que $\|T_K\| \leq \|K\|$. Tal operador é chamado de **operador integral com núcleo** K. O leitor pode conferir em (OLIVEIRA, 2001) que T_K é um operador compacto. A demonstração não é longa, entretanto, faz uso de resultados que não abordaremos ao longo do texto. A importância desse exemplo no nosso contexto é apresentar um operador compacto que não é de posto finito.

A próxima definição será útil para argumentarmos que os operadores compactos podem ser aproximados por operadores de posto finito.

Definição 2.8. Sendo $Q \subseteq \mathbb{H}$ um conjunto e $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal, diremos que Q é equi-próximo de $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ se,dado $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ de sorte que,

$$\sum_{k>N} |\langle u, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2, \quad \forall u \in Q. \tag{2.13}$$

Exemplo 2.9. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente, então sua imagem $\{u_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ é equi-próxima de toda sequência ortonormal $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Solução.
Escrevendo $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, queremos mostrar que se $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ortonormal, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{k>N} |\langle u_n, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Com efeito, a desigualdade de Bessel fornece que, para cada $x \in \mathbb{H}$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{2.15}$$

Em particular, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k>N'} |\langle u, e_k \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.16}$$

Ainda, o fato de que $u_n \to u$ fornece que $\left(\sum_{k>N'} |\langle u_n, e_k \rangle|^2\right) \to \left(\sum_{k>N'} |\langle u, e_k \rangle|^2\right)$, de onde segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que, para cada $n > n_0$, tenha-se que

$$\left| \sum_{k>N'} |\langle u_n, e_k \rangle|^2 - \sum_{k>N'} |\langle u, e_k \rangle|^2 \right| < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.17}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k>N'} |\langle u_n, e_k \rangle|^2 \right| &\leq \left| \sum_{k>N'} |\langle u_n, e_k \rangle|^2 - \sum_{k>N'} |\langle u, e_k \rangle|^2 \right| + \left| \sum_{k>N'} |\langle u, e_k \rangle|^2 \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{2.18}$$

para $n > n_0$. Por outro lado, se $1 \leq k \leq n_0$, o fato da série em (2.15) ser convergente para $x = u_k$ fornece que existe $N_k \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\sum_{j>N_k} |\langle u_k, e_j \rangle|^2 < \varepsilon^2. \tag{2.19}$$

Assim, tomando-se $N = \mathtt{max}\{N', N_j \,|\, 1 \leq j \leq n_0\}$, a desigualdade (2.14) está verificada para cada $n \in \mathbb{N}$, como queríamos. □

Proposição 2.10. Sendo $K \subseteq \mathbb{H}$, então K é compacto se, e somente se, é fechado, limitado e equi-próximo de toda sequência ortonormal completa de $\mathbb{H}$.

Observação 2.11. Lembremos que uma sequência ortonormal $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é dita ser **completa** se, dado $x \in \mathbb{H}$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2.$$

Demonstração.
Sabemos que um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado. Suponha, adicionalmente que a hipótese de equi-proximidade seja falsa relativamente a **alguma** base ortonormal $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Assim, para algum $\varepsilon > 0$ e cada $p \in \mathbb{N}$, existe $u_p \in K$ de forma que

$$\sum_{k>p} |(u_p, e_k)|^2 \geq \varepsilon^2.$$

Assim, considere $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a sequência induzida por esse processo. Por construção, nenhuma de suas subsequências tem imagem equi-próxima de $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Assim, pelo exemplo anterior $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ não possui nenhuma subsequência convergente e, assim, K não pode ser compacto.

Reciprocamente, suponha que K seja fechado, limitado, digamos, $K\subseteq B(0,C)$, para algum $C>0$, equi-próximo de toda base de Hilbert e considere $s:=(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ alguma sequência em K. Mostraremos que s admite uma subsequência convergente atestando, assim, a compacidade de K. Notemos que é suficiente mostrar que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ possui alguma subsequência de Cauchy, vide completude de $\mathbb{H}$. Ainda, observe que a sequência $(\langle u_n,e_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$, é limitada, dado que

$$|(u_n,e_1)|\leq\|u_n\|\leq C,$$

de onde segue que existe uma subsequência $s_1:=(u_j^{(1)})\subseteq s$ de sorte que $(\langle u_j^{(1)},e_1\rangle)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente.

Analogamente, para cada $k>1$, é possível extrair uma subsequência $s_k:=(u_j^{(k)})_j\subseteq s_{k-1}$ de sorte que $(\langle u_j^{(k)},e_k\rangle)_{j\in\mathbb{N}}$ seja convergente e, portanto, podemos considerar a subsequência diagonal, isto é, a sequência $(v_j)\subseteq s$ em que seu k-ésimo termo é dado pelo k-ésimo termo de s_k. Mostraremos que essa é a subsequência de Cauchy desejada de s. Com efeito, as identidades de Parseval e do paralelogramo fornecem que

$$\begin{aligned}\|v_n-v_{n+l}\|^2&=\sum_{k\leq N}|\langle v_n-v_{n+l},e_k\rangle|^2+\sum_{k>N}|\langle v_n-v_{n+l},e_k\rangle|^2\\&\leq\sum_{k\leq N}|\langle v_n-v_{n+l},e_k\rangle|^2+2\sum_{k>N}|\langle v_n,e_k\rangle|^2+2\sum_{k>N}|\langle v_{n+l},e_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

Para fazer com que essa soma seja majorada por ε^2, escolhamos $N\in\mathbb{N}$ grande o suficiente para que os dois últimos termos sejam menores do que $\varepsilon^2/2$ e isso pode ser feito para todos n,l devido a equi-proximidade de K. Agora, pela definição de sequência de Cauchy aplicada em (v_n,e_k), escolha n grande o suficiente para que o primeiro termo seja majorado por $\varepsilon^2/2N$, para cada $l>0$. Assim, $\{v_n\}$ é uma subsequência de Cauchy de (u_n) e, como observado, convergente em K e, assim, K é compacto, como queríamos. □

Indicaremos por $\mathcal{LF}(\mathbb{H})$ e $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ o conjunto dos operadores de posto finito e compactos, respectivamente. A proposição a seguir estabelece que $\mathcal{LF}(\mathbb{H})$, além de ser subconjunto, forma um ideal bilateral em $\mathtt{Hom}(\mathbb{H})$.

Proposição 2.12. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert, então $\mathcal{LF}(\mathbb{H})\subseteq\mathtt{Hom}(\mathbb{H})$ é um ideal bilateral.

Demonstração.
De fato, dados $R\in\mathcal{LF}(\mathbb{H})$ e $S\in\mathtt{Hom}(\mathbb{H})$, o fato de que $\mathtt{ran}(RS)\subseteq\mathtt{ran}(R)$ fornece que $\mathcal{LF}(\mathbb{H})$ é um ideal à esquerda. O leitor pode conferir em (DOUGLAS, 2012) que,

$$\mathtt{ran}(R^*)=T^*(\mathtt{ker}^{\perp}R^*)=R^*(\overline{\mathtt{ran}(R)}),$$

de onde segue que, nas hipóteses colocadas, $R^* \in \mathcal{LF}(\mathbb{H})$. Assim, recorrendo ao argumento anterior de que $\mathcal{LF}(\mathbb{H})$ é ideal à esquerda, temos que $SR = (R^*S^*)^* \in \mathcal{LF}(\mathbb{H})$, como queríamos. □

A proposição prévia fez uso apenas de resultados clássicos de álgebra linear. Veremos não muito em breve que $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ também é um ideal bilateral de $\mathtt{Hom}(\mathbb{H})$. Além dessa compatibilidade algébrica, qual a relação topológica entre esses subconjuntos de operadores? A resposta é dada pela

Proposição 2.13. Se $\mathbb{H}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita, então

$$\mathcal{K}(\mathbb{H}) = \overline{\mathcal{LF}(\mathbb{H})}.$$

Demonstração.
De início, observe que $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ pelo simples fato de que, se $K_n \to K$, onde (K_n) é uma sequência de operadores compactos e $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{H}$ é uma rede limitada, com $f_\lambda \xrightarrow{w} f \in \mathbb{H}$, temos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, e $\lambda \in \mathcal{A}$

$$\|Kf_\lambda - Kf\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desigualdade Triangular}}}{\leq} \|(K-K_N)f_\lambda\| + \|K_Nf_\lambda - K_Nf\| + \|(K_N-K)f\|. \tag{2.20}$$

Assim, pondo $M = \sup\{\|f\|, \|f_\lambda\| : \lambda \in \mathcal{A}\}$ (M está bem definido pois $(f_\lambda) \subseteq \mathbb{H}$ é limitada e $f \in \mathbb{H}$ está fixado.), escolha, para cada $\varepsilon > 0$, um natural $N \in \mathbb{N}$ de sorte que as seguintes condições sejam cumpridas:

1. Dada a convergência $K_n \to K$, imponha $\|K - K_N\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$
2. Dada a compacidade de K_N, imponha $\|K_Nf_\lambda - K_Nf\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Nessas condições, a desigualdade (2.20) se torna

$$\|Kf_\lambda - Kf\| \leq \varepsilon,$$

ou seja, K é compacto e, portanto, $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ é fechado. Em particular, como todo operador de posto finito é compacto, segue que $\overline{\mathcal{LF}(\mathbb{H})} \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Por outro lado, $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \overline{\mathcal{LF}(\mathbb{H})}$, uma vez que, dado $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ o fato de $K(B_{01})$ ser compacto implica que, dada uma base de Hilbert (e_j) e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\sum_{j>N} |(v,e_j)|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall v \in K(B_{01}) \Longleftrightarrow \sum_{j>N} |(K(u),e_j)|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall u \in B_{01}. \tag{2.21}$$

Nesse contexto, defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} K_n : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ u &\mapsto \sum_{j\leq n} (Ku,e_j)\,e_j \end{aligned} . \tag{2.22}$$

Observe que $K_n \in \mathcal{LF}(\mathbb{H})$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e que, pela identidade de Parseval,

$$\|Ku - K_n u\|^2 = \sum_{j>n} |(Ku, e_j)|^2 \quad \forall u \in \mathbb{H}. \tag{2.23}$$

Logo, $\|K - K_N\|^2 = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Ku - K_N u\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desigualdade (2.21)}}}{\leq} \varepsilon^2$ e, assim, $K_n \to K$, o que fornece a inclusão $\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \overline{\mathcal{LF}(\mathbb{H})}$, como queríamos. □

2.2 O conjunto $\mathcal{HS}(\mathbb{H})$

Nesta seção, discutiremos sobre uma importante classe de operadores, os chamados operadores de Hilbert-Schmidt.

Definição 2.14. Sendo $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ espaços de Hilbert, um operador $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ é dito ser de **Hilbert-Schmidt** se o número

$$\|T\|_{HS} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

for finito para alguma base ortonormal $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{H}_1$.

A identidade de Parseval garante que $\|T\|_{HS}$ não depende da base ortonormal escolhida. Com efeito, se $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ e $\{f_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ são duas bases ortonormais distintas, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |\langle Te_j, f_k \rangle|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |\langle e_j, T^* f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T^* f_k\|^2.$$

Lembremos que a identidade de Parseval fornece uma relação entre a norma oriunda de um espaço de Hilbert com uma base ortonormal arbitrária no seguinte sentido

Proposição 2.15 (Identidade de Parseval)**.** Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert e $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal em $\mathbb{H}$, então a fim de que $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{H}$, é necessário e suficiente que

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, u \rangle|, \quad \forall u \in \mathbb{H}$$

Exemplo 2.16. Se $\mathbb{H}$ possui dimensão finita, então a série em (2.24) possui finitos termos, de onde segue que, nesse caso, $\mathcal{HS}(\mathbb{H}) = \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$.

Exemplo 2.17. Sendo $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz infinita tal que $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ é finito, o operador $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ dado por $[T(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)]_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$ é um operador de Hilbert-Schmidt.

Exemplo 2.18. A identidade $\mathtt{id}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ não é um operador de Hilbert-Schmidt, dado que, para cada base ortonormal $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{H}$, tem-se

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathtt{id}(e_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} 1\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.25}$$

que não é convergente.

Teorema 2.19. O conjunto $\mathcal{HS}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ é um espaço de Hilbert relativamente a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$, proveniente do produto interno

$$\langle A,B\rangle_{\mathcal{HS}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, Be_n\rangle, \qquad A,B \in \mathcal{HS}(\mathbb{H},\mathbb{B}), \tag{2.26}$$

onde $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{H}$ é uma base ortonormal arbitrária.

Demonstração.
Se $T,S \in \mathcal{HS}(H_1,H_2)$, então para qualquer base ortonormal $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$, tem-se que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$\|T+\alpha S\|_{\mathcal{HS}} \leq \|T\|_{\mathcal{HS}} + |\alpha|\|S\|_{\mathcal{HS}}, \tag{2.27}$$

de onde segue que $\mathcal{HS}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ é um espaço vetorial. A fim de se mostrar que $\mathcal{HS}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ é um espaço de Hilbert, considere uma sequência de Cauchy $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{HS}(\mathbb{H},\mathbb{B})$. O fato de que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$ fornece que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathtt{Hom}(\mathbb{H},\mathbb{B})$, de onde segue que existe $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ de sorte que $T_n \to T$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe N de sorte que, para cada $m,n > N$, é verdade que $\|T_m - T_n\|^2_{\mathcal{HS}} < \varepsilon$. Considere uma base ortonormal $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Se $F \subseteq \mathbb{N}$ é finito, temos que

$$\sum_{k\in F} \|T_n e_k - T_m e_k\|^2 \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{HS}} < \varepsilon, \tag{2.28}$$

de onde segue que $\sum\limits_{k\in F} \|(T_n - T)e_k\|^2 \leq \varepsilon$, para cada subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$ e, assim:

$$\|T_n - T\|^2_{\mathcal{HS}} = \sum_{k=1}^{\infty} \|(T_n - T)e_k\|^2 \leq \varepsilon^2, \tag{2.29}$$

ou seja, $T_n - T \in \mathcal{HS}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ e $T - T_n \to 0$, relativamente a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{HS}}$, como queríamos. $\square$

Proposição 2.20. Se $K \in \mathcal{HS}(\mathbb{H})$ e $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, então KT e TK são operadores de Hilbert-Schmidt.

Demonstração.
De fato, sendo $\{e_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal, então

$$\|TK\|^2_{\mathcal{HS}} = \sum_{j=1}^{\infty} \|TK\cdot e_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T\|^2\|Ke_j\|^2 < \infty \tag{2.30}$$

De onde segue que $TK \in \mathcal{HS}(\mathbb{H})$. Como $\|KT\|_{\mathcal{HS}} = \|T^*K^*\|_{\mathcal{HS}} < \infty$, concluímos o mesmo para KT, como queríamos. $\square$

Proposição 2.21. Sendo $\mathbb{H}, \mathbb{B}$ espaços de Hilbert, então $\mathcal{HS}(\mathbb{H}, \mathbb{B}) \subseteq K(\mathbb{H}, \mathbb{B})$.

Demonstração.
De fato, se $T : \mathbb{H} \to \mathbb{B}$ é tal que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \tag{2.31}$$

seja convergente, para alguma base ortonormal $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{H}$, temos que $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, onde $T_n : \mathbb{H} \to \mathbb{B}$ é o operador de posto finito dado por

$$T_N \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, \tag{2.32}$$

sendo, assim, o limite de operadores de posto finito, donde compacto, em virtude da Proposição (2.13). □

Proposição 2.22. Sendo $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espaços normados, então $\mathcal{HS}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ é conexo por caminhos.

Demonstração.
De fato, dados $T_0, T_1 \in \mathcal{HS}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, considere, para cada $\lambda \in [0,1]$, a aplicação linear

$$\begin{aligned} T_\lambda : \mathbb{E} &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto (1-\lambda)T_0(x) + \lambda T_1(x) \end{aligned}, \tag{2.33}$$

ou seja, o segmento de reta conectando T_0 e T_1. A desigualdade de Minkowski (veja, por exemplo em (BREZIS, 2010)) fornece que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_\lambda(e_j)\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(1-\lambda)T_0(e_j) + \lambda T_1(e_j)\|^2 \right)^{1/2} \tag{2.34}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minkowski}}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|(1-\lambda)T_0(e_j)\|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda T_1(e_j)\|^2 \right)^{1/2} \tag{2.35}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_0(e_j)\|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_1(e_j)\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \tag{2.36}$$

de onde segue que $T_\lambda \in \mathcal{HS}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ o qual é, por conseguinte, conexo por caminhos, como queríamos. □

2.3 Operadores com Determinante e de Classe Traço

Nesta seção, recordaremos as noções e resultados básicos sobre os chamados operadores com determinante e de classe traço. As demonstrações a respeito desse tema serão omitidas e podem ser encontradas, em particular no livro de Reed e Simon (SIMON, 1977). Comecemos com o seguinte resultado.

Teorema 2.23. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert separável e $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal arbitrária de $\mathbb{H}$, então, para cada operador positivo $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$, o número $\mathtt{tr}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle$ possui as seguintes propriedades:

1. $\mathtt{tr}(T)$ não depende da base ortonormal escolhida.
2. Se $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é um operador positivo, então $\mathtt{tr}(T+S) = \mathtt{tr}(T) + \mathtt{tr}(S)$.
3. $\mathtt{tr}(\lambda T) = \lambda \mathtt{tr}(T)$, para cada $\lambda \geq 0$.
4. Se $U : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é um operador unitário, então $\mathtt{tr}(UTU^{-1})$.

Definição 2.24. Um operador linear $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ contínuo é dito ser de classe traço se $\mathtt{tr}(|T|) < \infty$, ou seja, se a série

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \langle |T| e_j, e_j \rangle \tag{2.37}$$

for convergente, para alguma base ortonormal $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{H}$. Aqui, $|T|$ denota o operador $\sqrt{T^*T}$. Indicamos o conjunto dos operadores de classe traço em $\mathbb{H}$ por $\mathtt{TrC}(\mathbb{H})$.

Analogamente ao argumentado na seção prévia sobre operadores de Hilbert-Schmidt, $\mathtt{TrC}(\mathbb{H})$ é um espaço de Banach, com norma definida pela equação (2.37).

Observação 2.25. Lembremos, que, se $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é um operador positivo, ou seja, satisfazendo $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, para cada $x \in \mathbb{H}$, então existe um, e apenas um, operador positivo $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de sorte que $T = S^2 := S \circ S$. Tal operador é denotado por $\sqrt{T}$. Em particular, para cada $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$, $\sqrt{T^*T}$ está definido.

Assim como a condição imposta na definição de operadores de Hilbert-Schmidt, o valor da série não depende da escolha das bases ortonormais e recebe o nome de **traço** de T. Sua convergência é verificada para toda escolha, uma vez que, sendo $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ outra sequência ortonormal, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle |T| e_j, e_j \rangle &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle |T|^{1/2} e_j, |T|^{1/2} e_j \rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle |T|^{1/2} f_j, |T|^{1/2} f_j \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle |T| f_j, f_j \rangle. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Exemplo 2.26. Se $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E})$ é arbitrário, onde $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, então a série (2.37) tem, na realidade, uma quantidade finita de parcelas, de onde segue que T é de classe traço.

Exemplo 2.27. Se $T = R \circ S$, onde $R, S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ são operadores de Hilbert-Schmidt, então T é de classe traço. Com efeito, o fato de que $R, S \in \mathcal{HS}(\mathbb{H})$ fornece que as séries

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle Re_j, Se_j \rangle| \quad \text{e} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle Re_j, Se_j \rangle \tag{2.39}$$

são convergentes, com valor independente da base escolhida. Assim, é suficiente que $|T|$ seja dado pelo produto de dois operadores de Hilbert-Schmidt. De fato, sabemos, em virtude do Teorema da Decomposição Polar[1], que $T = W|T|$, para alguma isometria parcial $W : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, de onde segue que $|T| = W^*T = W^* \circ R \circ S$, a saber, um operador de Hilbert-Schmidt, como queríamos.

Sendo $n \in \mathbb{N}$, e $T : E \to F$ uma aplicação linear entre os espaços de dimensão finita E e F, definimos

$$\begin{aligned} T_n : E \times \ldots \times E &\to \Lambda^n F \\ (v_1, \ldots, v_n) &\mapsto (Tv_1) \wedge \ldots \wedge (Tv_n) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pode-se mostrar que T_n é uma aplicação multi-linear alternada, de onde segue que existe uma, e apenas uma, aplicação linear $\Lambda^n T : \Lambda^n E \to \Lambda^n F$ de sorte que, para todos $v_1, \ldots, v_n$, tenha-se que

$$(\Lambda^n T) \cdot (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = Tv_1 \wedge \ldots \wedge Tv_n. \tag{2.41}$$

Operdadores da forma acima possuem uma conexão natural com determinantes de aplicações lineares em espaços de dimensão finita, através da seguinte

Proposição 2.28. (SIMON, 1977) Se $n = \mathtt{dim}(\mathbb{H})$ é finito e $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$, então $\Lambda^n T$ é dado pela multiplicação escalar por $\mathtt{det}(T)$.

Uma das utilidades dos operadores de classe traço é estender a noção de determinante para o contexto de dimensão infinita. É possível demonstrar que, se $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é um operador de classe traço em um espaço $\mathbb{H}$ de dimensão finita, digamos $n \geq 1$, então

$$\mathtt{det}(\mathtt{id} + T) = \sum_{j=0}^{n} \mathtt{tr}\left(\Lambda^j T\right). \tag{2.42}$$

Tendo como motivação a definição acima, diremos que um operador linear $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ **possui determinante** se $T = \mathtt{id} + A$, para algum operador $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de classe traço e o determinante de T é definido como sendo a série

$$\mathtt{det}(\mathtt{id} + A) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathtt{tr}\left(\Lambda^j A\right). \tag{2.43}$$

Mencionamos que a convergência da série (2.43) é consequência de que, se A é um operador de classe traço, vale a estimativa $\|\Lambda^k A\|_1 \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!}$. As propriedades do determinante de um operador em um espaço de Hilbert, vide (SIMON, 1977), são análogas ao conhecido caso finito-dimensional, como por exemplo:

[1] O Teorema da Decomposição Polar afirma que, dado um operador $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$, existe um operador positivo P e uma isometria parcial V de sorte que $T = VP$. A ideia da demonstração desse resultado é justamente considerar $P = |T|$ e, a partir de propriedades de P, construir diretamente V. A descrição completa desse processo se encontra em (DOUGLAS, 2012).

1. Se $R, S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ são operadores com determinante, então $R \circ S$ também o é e, além disso,

$$\mathtt{det}(R \circ S) = \mathtt{det}(R) \cdot \mathtt{det}(S). \tag{2.44}$$

2. Se R é um operador com determinante, então R é inversível se, e somente se, $\mathtt{det}(R) \neq 0$.

2.4 O conjunto $\mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$

Dado que, em um anel topológico o fecho de um ideal também é um ideal, o quociente $\frac{\mathtt{Hom}(\mathbb{H})}{\mathcal{K}(\mathbb{H})}$ é uma álgebra, chamada **álgebra de Calkin**, cujo nome é devido ao matemático estadunidense John Willians Calkin(1909-1964). A álgebra de Calkin tem uma conexão interessante com os chamados operadores de Fredholm, que possuem uma definição usual que remete às dimensões dos respectivos núcleo e co-núcleo, mas que pode ser formulada da seguinte forma.

Definição 2.29. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$, diremos que T é um **operador de Fredholm** se $\pi(T)$ for um elemento inversível da álgebra de Calkin de $\mathbb{H}$.

Indicaremos o conjunto dos operadores de Fredholm em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ por $\mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$. O lema a seguir será de grande utilidade para caracterizar os operadores de Fredholm em termos de seus núcleo e co-núcleo.

Lema 2.30. Se $\mathbb{H}$ tem dimensão infinita e $T \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$, então a imagem de T não contém subespaços fechados de dimensão infinita.

Demonstração.
Com efeito, se $M \subseteq \mathtt{ran}(T)$ é um subespaço fechado e $P_M : \mathbb{H} \to M$ denota a projeção de $\mathbb{H}$ sobre M, afirmamos inicialmente que $P_M \circ T$ é um operador compacto, limitado e sobrejetor. Em particular aberto, vide teorema de Banach-Schauder[2]. A última frase significa que existe $\delta > 0$ de modo que

$$P_M \circ T(B_{01}) \supseteq B(0, \delta).$$

Assim, a bola fechada $B[0, \delta]$ é subconjunto fechado do compacto $P_M \circ T(B_{01})$, sendo assim, compacta, de onde segue, devido ao Lema de Riesz, que M é finito-dimensional, como queríamos. $\square$

Proposição 2.31. $\mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$ é um subconjunto aberto de $\mathtt{Hom}(\mathbb{H})$.

Demonstração.
Indicando por Δ o conjunto dos elementos inversíveis da álgebra de Calkin, temos que $\mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}) =$

[2] O Teorema de Banach-Schauder, mais conhecido como o Teorema da Aplicação Aberta, diz que, se $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ são espaços de Banach e $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ é sobrejetora, então T é aberta

$\pi^{-1}(\Delta)$. Assim, é suficiente mostrar que Δ é aberto. Com efeito, dado $f \in \Delta$, $r = \frac{1}{\|f^{-1}\|}$ e $g \in B(f,r)$, temos, em particular, que

$$1 > \|f^{-1}\|\|f-g\| \geq \|1-f^{-1}g\|, \tag{2.45}$$

de onde segue que $f^{-1}g \in \Delta$ e, pela estrutura de álgebra, $g = ff^{-1}g \in \Delta$, ou seja, Δ é aberto, como queríamos. □

Lema 2.32. Sendo G,F subespaços, respectivamente, fechado e de dimensão finita de $\mathbb{H}$, então $F+G$ é fechado.

Demonstração.
Com efeito, o fato de G ser fechado implica que $\mathbb{H}/G$ possui estrutura de espaço normado com aplicação quociente $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/G$ contínua. Ainda, dados $f \in F$, $g \in G$, como $[f+g] = [f]$, temos que $F+G \subseteq \pi^{-1}(\pi(F))$.

Por outro lado, se $x \in E$ é tal que $[x] = [f]$, para algum $f \in F$, então $x = f+g$, para algum $g \in G$, de onde segue, em virtude do parágrafo prévio, que $F+G = \pi^{-1}(\pi(F))$, a saber, fechado, pois F tem dimensão finita, como queríamos. □

Proposição 2.33. Sejam $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espaços de Banach e $T \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Se existir um subespaço fechado $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{F}$ de sorte que

$$\mathbb{F} = \mathtt{ran}(T) \oplus \mathcal{Z}, \tag{2.46}$$

então $\mathtt{ran}(T)$ é fechado.

Demonstração.
Inicialmente, observe que a aplicação

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{T} : \frac{\mathbb{E}}{\mathtt{ker}(T)} &\to \mathbb{F} \\ [x] &\mapsto Tx \end{aligned} \tag{2.47}$$

está bem definida, é injetora e possui a mesma imagem de T. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade que $\mathtt{ker}(T) = \{0\}$. Nesse contexto, defina

$$\begin{aligned} v : \mathbb{E} \times \mathcal{Z} &\to \mathbb{F} = \mathtt{ran}(T) \oplus \mathcal{Z} \\ (x,z) &\mapsto Tx+z \end{aligned} . \tag{2.48}$$

O fato de T ser injetora fornece que v é um isomorfismo entre espaços de Banach(lembremos que subconjuntos fechados de espaços de Banach também o são!), de onde segue, pelo Teorema da Aplicação Aberta, que $v^{-1} \in \mathtt{Hom}(\mathbb{F}, \mathbb{E} \times \mathcal{Z})$. Estamos em condições de verificar que $\mathtt{ran}(T)$ é fechado. De fato, sendo $(x_n) \subseteq \mathbb{E}$ de sorte que a sequência $(Tx_n) \subseteq \mathtt{ran}(T)$ seja convergente a $b \in \mathbb{F}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(v^{-1} \cdot Tx_n\right) = v^{-1}(b). \tag{2.49}$$

Como $v^{-1}(Tx_n) = (x_n, 0)$, segue que $x_n \to x$, onde $x = \mathrm{pr}_{\mathbb{E}} \cdot v^{-1}(b)$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \times \mathcal{Z} &\to \mathbb{E} \\ (x,z) &\mapsto x \end{aligned} . \tag{2.50}$$

Logo,

$$b = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Tx \tag{2.51}$$

e, portanto, $\mathtt{ran}(T)$ é fechado, como queríamos. □

O próximo resultado facilita o trabalho de procurar exemplos de operadores de Fredholm. Seu nome é uma homenagem ao matemático britânico Frederick Valentine Atkinson(1916-2002). O que o teorema diz é que a condição de ser Fredholm depende apenas das nulidades do operador analisado e de seu adjunto.

Teorema 2.34 (Atkinson)**.** Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert, então $T \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$ se, e somente se, os respectivos núcleos $\mathtt{ker}(T)$ e $\mathtt{ker}(T^*)$ possuem dimensão finita.

Observação 2.35. É sabido da Análise Funcional que, dado um subespaço fechado $M \subseteq \mathbb{H}$, a restrição da aplicação quociente $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/M$ ao complemento ortogonal de M fornece um isomorfismo entre $M^{\perp}$ e $\mathbb{H}/M$. Assim, o teorema 2.34 pode ser reescrito substituindo-se $\mathtt{ker}(T^*)$ por $\mathtt{coker}(T)$. Ambas as formulações possuem a sua utilidade. Ainda, alguns textos incluem no Teorema 2.34 a condição de T ser um operador fechado. Entretanto, a Proposição 2.33 fornece que essa hipótese é redundante no contexto do teorema.

Demonstração do Teorema 2.34.
Mostremos ambas as implicações.

($\Longrightarrow$) Lembremos que T ser um operador de Fredholm significa que $[T]$ é um elemento inversível na álgebra de Calkin, isto é, existe $A \in \mathtt{Hom}(H)$ de sorte que

$$[A][T] = [\mathtt{id}] \Longrightarrow [AT] = [\mathtt{id}].$$

Assim, $AT = I + K$, para algum operador compacto $K : H \to H$. Por outro lado, como

$$\mathtt{ker}(T) \subseteq \mathtt{ker}(AT) = \mathtt{ker}(I+K) \underset{\substack{\uparrow \\ K(x) = -x \ \forall x \in \mathtt{ker}(I+K)}}{\subseteq} \mathtt{ran}(K),$$

de onde segue que, em virtude do lema 2.30, o núcleo de T possui dimensão finita. Analogamente, $\mathtt{ker}(T^*)$ possui dimensão finita.

($\Longleftarrow$) Suponha que $T : X \to Y$ seja tal que $\mathtt{dim}(\mathtt{ker}(T))$ e $\mathtt{dim}(\mathtt{coker}(T))$ sejam finitos e, usando a mesma notação, $T : \mathtt{ker}(T)^{\perp} \to \mathtt{ran}(T)$ o isomorfismo de espaços vetoriais obtido pela restrição dos domínio e contradomínio. Denote por $\tilde{T}$ a respectiva inversa dessa aplicação.

O Teorema da Aplicação Aberta fornece que T é contínua. Seja $P : Y \to \mathtt{ran}(T)$ a projeção ortogonal de Y em $\mathtt{ran}(T)$ (observe que $PT = T$). Pondo $A := \tilde{T}P$ e $x = x_1 + x_2$, onde $x_1 \in \mathtt{ker}(T)$ e $x_2 \in \mathtt{ker}(T)^\perp$, então o fato de que

$$ATx - x = \tilde{T}PT(x) - x = \tilde{T}Tx - x = x_2 - x = -x_1 \tag{2.52}$$

fornece que $AT - \mathtt{id} = -Q$, onde $Q : X \to \mathtt{ker}(T)$ denota a projeção ortogonal sobre $\mathtt{ker}(T)$. Analogamente,

$$TAy - y = T\tilde{T}P(y) = T\tilde{T}Py - y = T\tilde{T}y_1 - y = y_1 - y = -(\mathtt{id} - P)(y). \tag{2.53}$$

Aqui, $y_1 \in \mathtt{ran}(T)$ e $y_2 \in \mathtt{ran}(T)^\perp$ e, pela definição de P, segue que $\mathtt{id} - P$ é a projeção ortogonal sobre $\mathtt{ran}(T)^\perp = \mathtt{coker}(T)$. O fato de $\mathtt{dim}(\mathtt{ker}(T))$ e $\mathtt{dim}(\mathtt{coker}(T))$ serem finitos implica que $AT - \mathtt{id}$ e $TA - \mathtt{id}$ possuem posto finito, e são, em particular, compactos, de onde segue que $[T]$ é um elemento inversível da álgebra de Calkin, ou seja, Fredholm, como queríamos. □

Definimos, em virtude do teorema prévio, o **índice de Fredholm** de um operador $T \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$ como sendo o número inteiro

$$\mathtt{ind}(T) = \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(T)) - \mathtt{dim}(\mathtt{coker}(T)). \tag{2.54}$$

Exemplo 2.36. A aplicação identidade $\mathtt{id} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é um operador de Fredholm com índice zero, dado que $\mathtt{ker}(\mathtt{id}) = \mathtt{ker}(\mathtt{id}^*) = \{0\}$.

Exemplo 2.37. Considere $\mathbb{H} = l^2(\mathbb{Z}^+)$, ou seja, o conjunto das sequências reais ou complexas cujo quadrado do módulo é somável. Definamos

$$\begin{aligned} S_{-1} : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ (x_1, x_2, \ldots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \ldots) \end{aligned}. \tag{2.55}$$

Observe que S_{-1} é injetiva, de onde segue que, em particular, $\mathtt{ker}(S_{-1}) = \{0\}$. Por outro lado, temos que $\mathtt{coker}(S^{-1}) = \mathbb{H}/\mathtt{ran}(S_{-1}) = \mathbb{H}/\mathtt{span}\{e_n \,|\, n > 1\}$, a saber um espaço unidimensional. Portanto, $S_{-1} \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(l^2)$ e

$$\mathtt{ind}(S_{-1}) = 0 - 1 = -1. \tag{2.56}$$

Além disso, definindo $S_1 \cdot (x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$, temos que $S_1 = S_{-1}^*$ e, além disso, $\mathtt{ker}(S_1) = \mathtt{span}\{e_1\}$ e $\mathtt{coker}(S_1) = \{0\}$, de onde segue que S_1 também é um operador de Fredholm e $\mathtt{ind}(S_1) = 1$. Para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, os operadores S_n, dados por $(S_{-1})^n$, se $n > 0$ e $(S_1)^{-n}$, se $n < 0$ são do tipo Fredholm com índice n. Em particular, vale a relação

$$\mathtt{ind}(S_{m+n}) = \mathtt{ind}(S_m) + \mathtt{ind}(S_n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \tag{2.57}$$

Como todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isomorfo a $l^2(\mathbb{Z}^+)$, temos que, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, o operador S_n também está definido nesse contexto. Antes de prosseguir com mais detalhes sobre a teoria de Fredholm, é conveniente introduzir a seguinte noção.

Definição 2.38. Uma lista

$$V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \tag{2.58}$$

de espaços vetoriais V_j e de operadores $f_j \in \mathtt{Hom}(V_j, V_{j+1})$ é dita ser uma **sequência exata** se, para cada j, $\mathtt{ran}(f_{j-1}) = \mathtt{ker}(f_j)$.

Exemplo 2.39. Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial, $W \subseteq \mathbb{V}$ um subespaço, a sequência

$$0 \xrightarrow{i_1} W \xrightarrow{i_2} \mathbb{V} \xrightarrow{\pi} \mathbb{V}/W \xrightarrow{\equiv 0} 0 \tag{2.59}$$

é exata. Aqui, π denota a aplicação quociente e i_1 e i_2 as respectivas inclusões.

Caso os espaços vetoriais da definição 2.38 sejam finito-dimensionais, a proposição a seguir fornece uma relação entre suas respectivas dimensões, que será útil no estudo da compatibilidade da composição de operadores com o índice de Fredholm.

Proposição 2.40. Se $0 \to V_1 \to V_2 \to \dots \to V_n \to 0$ é uma sequência exata de espaços vetoriais de dimensão finita, então

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cdot \mathtt{dim}(V_j) = 0. \tag{2.60}$$

Demonstração.
Façamos uso da indução. Se $n = 1$, a sequência $0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} 0$ ser exata implica que $V_1 = \{0\}$, de onde segue a validade da fórmula (2.60). Por outro lado, se

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} 0 \tag{2.61}$$

é uma sequência exata no contexto da proposição e considere a lista exata dada por

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathtt{ker}(f_n) \longrightarrow 0. \tag{2.62}$$

A hipótese de indução fornece que

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \cdot \mathtt{dim}(V_j) \right) + (-1)^n \cdot \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(f_n)) = 0. \tag{2.63}$$

Ainda, a exatidão da lista (2.61) fornece que f_n é sobrejetiva e, portanto, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que

$$\mathtt{dim}(V_n) = \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(f_n)) + \mathtt{dim}(V_{n+1}). \tag{2.64}$$

Substituindo (2.64) em (2.63), temos que a fórmula (2.60) é verificada, e, assim, a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos. □

Proposição 2.41. Se $T, S \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$, então $S \circ T \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$ e, além disso,

$$\mathtt{ind}(S \circ T) = \mathtt{ind}(S) + \mathtt{ind}(T). \tag{2.65}$$

Demonstração.
Com efeito, o fato de que $\mathtt{dim}(\mathtt{ker}(S\circ T)) \leq \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(S)) + \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(T))$ fornece que $S\circ T$ é um operador de Fredholm . Por outro lado, a afirmação acerca de seu índice decorre de ser exata a seguinte sequência de espaços de dimensão finita:

$$0 \to \mathtt{ker}(T) \xrightarrow{i} \mathtt{ker}(ST) \xrightarrow{T} \mathtt{ker}(S) \xrightarrow{f} \mathtt{coker}(T) \xrightarrow{S} \mathtt{coker}(ST) \xrightarrow{p} \mathtt{coker}(S) \to 0. \tag{2.66}$$

Aqui,

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathtt{ker}(S) & \to & \mathbb{H}/\mathtt{ran}(T) \\ x & \mapsto & [x] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} p\colon \mathbb{H}/\mathtt{ran}(ST) & \to & \mathbb{H}/\mathtt{ran}(T) \\ [x]_{ST} & \mapsto & [x]_T \end{array}. \tag{2.67}$$

Pela Proposição 2.40, temos que

$$\begin{array}{c} 0 = -\mathtt{dim}(\mathtt{ker}(T)) + \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(ST)) - \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(S)) \\ + \\ \mathtt{dim}(\mathtt{coker}(T)) - \mathtt{dim}(\mathtt{coker}(ST)) + \mathtt{dim}(\mathtt{coker}(S)) \\ = \\ \mathtt{ind}(ST) - \mathtt{ind}(T) - \mathtt{ind}(S), \end{array} \tag{2.68}$$

resultando, assim, na igualdade desejada, como queríamos. □

Lema 2.42. Um operador $T \in \mathtt{Hom}(X,Y)$ é do tipo Fredholm se, e somente se, existem duas decomposições ortogonais $X = X_1 \oplus X_2$ e $Y = Y_1 \oplus Y_2$ de sorte que

1. X_1, Y_1 são subespaços fechados;

2. $\mathtt{dim}(X_2)$ e $\mathtt{dim}(Y_2)$ são finitos;

3. Relativamente a essas decomposições, T se expressa matricialmente da forma

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.69}$$

onde $T_{ij} \in \mathtt{Hom}(X_j, Y_i)$ e T_{11} é inversível.

Demonstração.
Se T é Fredholm, podemos considerar, por exemplo

$$\begin{array}{ll} X_1 = \mathtt{ker}(T)^{\perp} & Y_1 = \mathtt{ran}(T) \\ X_2 = \mathtt{ker}(T) & Y_2 = \mathtt{ran}(T)^{\perp} \end{array} \tag{2.70}$$

como os respectivos subespaços. Nesse contexto, as afirmativas (a) e (b) seguem da definição de operador do tipo Fredholm. Além disso, escrevendo

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

onde $T_{11} = T|_{X_1} : X_1 \to Y_1$, dada pela restrição de T ao complemento ortogonal de seu núcleo, é um isomorfismo, vemos que (c) também está verificada. Além disso,

$$\mathtt{ind}(T) = \mathtt{dim}(\mathtt{ker}(T)) - \mathtt{dim}(\mathtt{coker}(T)) = \mathtt{dim}(X_2) - \mathtt{dim}(Y_2), \tag{2.72}$$

como queríamos.

Reciprocamente, se as condições $(1)-(3)$ forem satisfeitas, ponhamos

$$A := \begin{pmatrix} T_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : Y \to X. \tag{2.73}$$

Nesse contexto, temos que

$$AT = \begin{pmatrix} T_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{id} & 0 \\ 0 & \mathtt{id} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_{11}^{-1}T_{12} \\ 0 & -\mathtt{id} \end{pmatrix}. \tag{2.74}$$

Dado que $\mathtt{dim}(X_2) < \infty$, então $T_{11}^{-1}T_{12} : X_2 \to X_1$ é de posto finito, bem como $-\mathtt{id}_{Y_2}$, por razão similar. Assim, $AT - I$ tem posto finito, da mesma maneira que $TA - I$, argumentado de forma análoga. Assim, $[T]$ é um elemento inversível da álgebra de Calkin e, portanto, do tipo Fredholm, como queríamos. □

A próxima proposição tem por finalidade mostrar que o índice de Fredholm é invariante por perturbações compactas.

Proposição 2.43. Sendo $F, T : \mathbb{H} \to \mathbb{B}$ operadores de Fredholm e $K : \mathbb{H} \to \mathbb{B}$ um operador compacto, então:

1. Existe $r > 0$ de modo que, para cada operador $\mathcal{E} \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H}, \mathbb{B})$, com $\|\mathcal{E}\| < r$, tenha-se que $F + \mathcal{E} \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{B})$.
2. $F + K \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{B})$ e $\mathtt{ind}(F + K) = \mathtt{ind}(F)$.

Demonstração.

1. Sabemos que é possível escrever F em formato matricial, relativamete a uma decomposição em soma direta como no Lema 2.42

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} : \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \to \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2. \tag{2.75}$$

Como o conjunto dos operadores inversíveis é aberto, existe $r > 0$ de sorte que $F_{11} + \mathcal{E}$ é inversível para cada operador $\mathcal{E} \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H}_1, \mathbb{B}_1)$ de sorte que $\|\mathcal{E}\| < r$. Em particular, dado $\mathscr{E} : \mathbb{H} \to \mathbb{B}$, com $\|\mathscr{E}\| < r$, temos que

$$F + \mathscr{E} = \begin{pmatrix} F_{11} + \mathscr{E}_{11} & F_{12} + \mathscr{E}_{12} \\ F_{21} + \mathscr{E}_{21} & F_{22} + \mathscr{E}_{22} \end{pmatrix} : \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \to \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2. \tag{2.76}$$

Logo, segue que $F_{11}+\mathscr{E}_{11}$ é inversível, e, assim, o Lema 2.42 fornece que $F+\mathscr{E} \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H},\mathbb{B})$, como queríamos.

2. O fato de $F+K$ ser um operador de Fredholm é consequência do fato que, sendo $A \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ de sorte que os operadores

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= AF - \mathtt{id} \\ \kappa_2 &= FA - \mathtt{id} \end{aligned} \tag{2.77}$$

sejam compactos, então $A(F+K)-\mathtt{id} = \kappa_1 + AK$ e $(F+K)A = \kappa_2 + KA$ e, portanto, também o são, atestando que $F+K$ é Fredholm. Além disso, pelo item prévio, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ t &\mapsto \mathtt{ind}(F+tK) \end{aligned} \tag{2.78}$$

é contínua, donde constante, pois $\mathbb{R}$ é conexo e, por conseguinte, $f(\mathbb{R})$ é constituído por apenas um ponto. Portando, $f(0) = \mathtt{ind}(F) = \mathtt{ind}(F+K) = f(1)$, como queríamos. □

2.4.1 Os conjuntos $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, defina $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ como sendo o subconjunto dos operadores de Fredholm com índice n. Procuraremos investigar, nessa seção, algumas das propriedades topológicas de $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ e usar os resultados obtidos para obtermos uma compatibilidade entre o índice de Fredholm oriundo de $\mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$ e o índice abstrato da álgebra de Calkin. Para tanto, é conveniente introduzir o seguinte conceito:

Definição 2.44. Um operador $V : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é dito ser uma isometria parcial se $\|Vx\| = \|x\|$, para cada $x \in \mathtt{EI}(V) := \mathtt{ker}(V)^{\perp}$. O conjunto $\mathtt{EI}(V)$ recebe o nome de **espaço inicial** de V.

Toda isometria é também uma isometria parcial. A próxima proposição vem no sentido de responder a um caso da questão relativa a existência de uma isometria parcial dados subespaços inicial e imagem. Nele, veremos que, em caso das respectivas dimensões coincidirem, a resposta é positiva.

Proposição 2.45. Se $M \subseteq \mathbb{H}$ e $N \subset \mathbb{H}$ forem subespaços fechados de mesma dimensão, então existe uma isometria parcial $V : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de modo que:

1. $\mathtt{EI}(V) = M$
2. $\mathtt{ran}(V) = N$.

Demonstração.
No contexto da proposição, considere $\mathscr{E} := \{e_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \subseteq M$ e $\mathscr{F} := \{f_\alpha \,|\, \alpha \in A\} \subseteq N$ bases

ortonormais dos subespaços M e N. Como $\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}$, então dado $x \in \mathbb{H}$ existem, e são únicos, $h \in M^{\perp}$ e $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \mathbb{C}$ de sorte que

$$x = h + \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha e_\alpha. \tag{2.79}$$

Nesse contexto, defina

$$\begin{aligned} V : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ h + \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha e_\alpha &\mapsto \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha f_\alpha \end{aligned} . \tag{2.80}$$

Observe que, por construção, $\mathtt{ker}(V) = M^{\perp}$, $\mathtt{ran}(V) = N$ e, pelo fato de $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ serem ortonormais, $\|Vx\| = \|x\|$, para cada $x \in \mathtt{ker}(V)^{\perp}$, como queríamos. □

Como uma aplicação dos resultados anteriores, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.46. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ é conexo por caminhos.

Demonstração.
Vamos mostrar que $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ é conexo por caminhos, mostrando que, cada um de seus operadores pode ser conectado continuamente a um operador inversível. Com efeito, dado $T \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$, temos, por definição, que

$$\mathtt{dim}(\mathtt{ker}T) = \mathtt{dim}(\mathtt{ker}T^*). \tag{2.81}$$

Assim, sendo $\{v_j \,|\, 1 \leq j \leq k\} \subseteq \mathtt{ker}(T)$ e $\{w_j \,|\, 1 \leq j \leq k\} \subseteq \mathtt{ker}(T^*)$ bases ortonormais para esses subespaços, ou seja, dado $x \in \mathbb{H}$, existem, em particular, únicos $x_0 \in (\mathtt{ker}(T))^{\perp}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ de sorte que

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_i, \tag{2.82}$$

defina o operador

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ \varphi\left(x_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_i\right) &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_i \end{aligned} . \tag{2.83}$$

Observe que, por construção, $\mathtt{ker}(\varphi) = (\mathtt{ker}T)^{\perp}$ e $\mathtt{ran}(\varphi) = \mathtt{ker}T^*$. Nesse contexto, dado $t > 0$, o operador $T + \varphi$ é inversível, uma vez que:

- Se $T(x) + \varphi(x) = 0$, então $Tx = -\varphi(x)$, de onde segue que

$$x \in \mathtt{ran}(T) \cap \mathtt{ran}(\varphi) = \mathtt{ran}(T) \cap \mathtt{ran}(T^*) = \mathtt{ran}(T) \cap \mathtt{ran}(T)^{\perp} = \{0\}, \tag{2.84}$$

  ou seja, $x = 0$, de onde segue que $T + \varphi$ é injetora.

- Para mostrar que $T+\varphi$ é sobrejetor, usaremos a notação introduzida em (2.82). Com efeito, vamos inicialmente verificar que $\mathtt{ran}(T)+\mathtt{ran}(\varphi)\subseteq\mathtt{ran}(T+\varphi)$ (Em geral apenas a inclusão contrária é válida!). Ora, dizer que $y\in\mathtt{ran}(T)+\mathtt{ran}(\varphi)$ é equivalente a existirem $x_0,y_0\in(\mathtt{ker}T)^{\perp}$ e $\lambda_j,\mu_j\in\mathbb{C}$, $1\leq j\leq k$ de sorte que

$$y=T\left(x_0+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j\right)+\varphi\left(y_0+\sum_{j=1}^{k}\mu_j v_j\right). \tag{2.85}$$

Tomando-se $x=x_0+\sum\limits_{j=1}^{k}\mu_j v_j$, temos que

$$\begin{gathered}(T+\varphi)(x)=T\left(x_0+\sum_{j=1}^{k}\mu_j v_j\right)+\varphi\left(x_0+\sum_{j=1}^{k}\mu_j v_j\right)\\ =\\ T(x_0)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j w_j=T\left(x_0+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v_j\right)+\varphi\left(y_0+\sum_{j=1}^{k}\mu_j v_j\right)=y,\end{gathered} \tag{2.86}$$

de onde segue a sobrejetividade e, que, por conseguinte, $(T+\varphi)$ é bijetora, como queríamos. Uma abordagem semelhante pode ser utilizada para verificar que, para cada $t>0$, $T+t\varphi$ também são isomorfismos lineares. Logo, a aplicação

$$\begin{aligned}\gamma:[0,1]&\to\mathscr{F}_0(\mathbb{H})\\ t&\mapsto T+t\varphi\end{aligned} \tag{2.87}$$

é um caminho conectando T ao operador inversível $T+\varphi$ e, portanto, a conexidade por caminhos de $\mathrm{GL}(\mathbb{H})\subseteq\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ é herdada em $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$, como queríamos.

Como consequência disso, vamos mostrar que $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ também é conexo por caminhos. Com efeito, se $n\geq 0$, $T\in\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ e denotando $S_n:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ o operador shift de grau n, a conclusão seguirá do fato que $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})=\mathscr{F}_0(\mathbb{H})\cdot S_n$, sendo, portanto um subconjunto conexo por caminhos.

($\subseteq$) Dado $T\in\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$, observe que, como $S_{-n}\circ S_n=\mathtt{id}_{\mathbb{H}}$, então $T=(TS_{-n})\circ S_n\in\mathscr{F}_0(\mathbb{H})\cdot S_n$, uma vez que $\mathtt{ind}(TS_{-n})=\mathtt{ind}(T)+\mathtt{ind}(S_{-n})=0$.

($\supseteq$) Segue diretamente da compatibilidade entre a composição de operadores e a adição de índices, verificada na Proposição 2.41. $\square$

Lema 2.47. Se $T\in\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$, então existe um operador de posto finito $F:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ e um isomorfismo $V:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ de sorte que

$$T=V+F \tag{2.88}$$

Demonstração.
Com efeito, o fato de que $T=\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ fornece que $\mathtt{dim}(\mathtt{ker}T)=\mathtt{dim}(\mathtt{ker}T^*)$, de onde segue que existe, em virtude da proposição 2.45 uma isometria parcial $V:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ de sorte que:

$$\begin{aligned}\mathtt{EI}(V)&=\mathtt{ker}(T)\\ \mathtt{ran}(V)&=\mathtt{ker}(T^*)\end{aligned}. \tag{2.89}$$

Observe ainda que as relações acima atestam que V é um operador de posto finito. Assim, se mostrarmos que $T+V$ é inversível a demonstração estará encerrada, uma vez que $T = (T+V)-V$.

1. (Injetividade)

   Lembremos que, como $\mathbb{H} = \mathtt{ker}(T) \oplus \mathtt{ker}(T)^{\perp}$, então, para cada $x \in \mathbb{H}$, existem, e são únicos, $x_{\mathtt{ker}} \in \mathtt{ker}(T)$ e $x_{\mathtt{ker}}^{\perp} \in \mathtt{ker}(T)^{\perp}$ de modo que

   $$x = x_{\mathtt{ker}} + x_{\mathtt{ker}}^{\perp}. \tag{2.90}$$

   Logo, se $(T+V)x = (T+V)(x_{\mathtt{ker}} + x_{\mathtt{ker}}^{\perp}) = 0$, o fato de que $\mathtt{ker}(V) = \mathtt{ker}(T)^{\perp}$ fornece que

   $$0 = (T+V)x = T(x_{\mathtt{ker}}^{\perp}) + V(x_{\mathtt{ker}}), \tag{2.91}$$

   de onde segue que, como $T(x_{\mathtt{ker}}^{\perp}) \in \mathtt{ran}(T)$, $V(x_{\mathtt{ker}}) \in \mathtt{ran}(V) = \mathtt{ker}(T^*) = (\mathtt{ran}(T))^{\perp}$ e $\mathbb{H} = \mathtt{ran}(T) \oplus (\mathtt{ran}(T))^{\perp}$, temos que $T(x_{\mathtt{ker}}^{\perp}) = V(x_{\mathtt{ker}}) = 0$ e, portanto,

   $$x_{\mathtt{ker}}^{\perp} \in \mathtt{ker}(T) \Longrightarrow x_{\mathtt{ker}}^{\perp} \in \mathtt{ker}(T) \cap \mathtt{ker}(T)^{\perp} \Longrightarrow x_{\mathtt{ker}}^{\perp} = 0$$
   ,
   $$x_{\mathtt{ker}} \in \mathtt{ker}(V) \Longrightarrow x_{\mathtt{ker}} \in \mathtt{ker}(T)^{\perp} \Longrightarrow x_{\mathtt{ker}} \in \mathtt{ker}(T) \cap \mathtt{ker}(T)^{\perp} \Longrightarrow x_{\mathtt{ker}} = 0$$

   e, portanto $x = x_{\mathtt{ker}} + x_{\mathtt{ker}}^{\perp} = 0$, ou seja, $T+V$ é injetora.

2. (Sobrejetividade)

   Com efeito, a condição (2.89) fornece que $\mathbb{H} = \mathtt{ker}(T) \oplus \mathtt{ker}(V) = \mathtt{ran}(T) \oplus \mathtt{ran}(V)$. Assim, dado $z \in \mathbb{H}$, temos que $z = Tx + Vy$, para certos $x, y \in \mathbb{H}$. Em particular, existem únicos $x_{\mathtt{KV}}, y_{\mathtt{KV}} \in \mathtt{ker}(V)$ e $x_{\mathtt{KT}}, y_{\mathtt{KT}} \in \mathtt{ker}(T)$ de sorte que

   $$x = x_{\mathtt{KV}} + x_{\mathtt{KF}} \quad \text{e} \quad y = y_{\mathtt{KV}} + y_{\mathtt{KT}}. \tag{2.92}$$

   Assim, na identidade $z = Tx + Vy$, não há perda de generalidade em supor que $x \in \mathtt{ker}(V)$ e $y \in \mathtt{ker}(T)$. Assim, tomando $\xi = x + y$, temos que

   $$(T+V)(\xi) = Tx + Vy = z, \tag{2.93}$$

   de onde segue que $T+V$ é sobrejetiva, como queríamos. □

Lema 2.48. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert, $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ e $\cup_{n \neq 0} \mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ são subconjuntos abertos de $\mathtt{Hom}(\mathbb{H})$.

Demonstração.
Mostremos cada uma das afirmativas:

($\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ é aberto)

De fato, dado $T \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$, seja F um operador de posto finito de sorte que $T+F$ seja inversível e $r = \frac{1}{\|(T+F)^{-1}\|}$. Nesse contexto, mostremos que $B(T,r) \subseteq \mathscr{F}_0(\mathbb{H})$. Com efeito, se $\|X-T\| < r$, então

$$\begin{aligned} 1 > \|(T+F)^{-1}\| \cdot \|T-X\| = \| (T+F)^{-1} \cdot [(T+F)-(X+F)] \| \\ = \\ \|1-(T+F)^{-1} \cdot (X+F)\|, \end{aligned} \tag{2.94}$$

de onde segue que $(T+F)^{-1} \cdot (X+F)$ é inversível e, em particular, $X+F$ é inversível. Assim, em virtude da Proposição 2.43, temos que

$$X = (X+F) - F \in \mathscr{F}_0(\mathbb{H}), \tag{2.95}$$

como queríamos.

($\cup_{n\neq 0}\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ é aberto)

De forma parecida ao feito anteriormente, dato $T \in \cup_{n\neq 0}\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$, procuraremos $r > 0$ tal que $B(T,r) \subseteq T \in \cup_{n\neq 0}\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$. Com efeito, se $n = \mathtt{ind}(T) \neq 0$, então, o operador $T \circ S_{-n}$ pertence a $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$, de onde segue que, em virtude do argumento prévio, existe um operador de posto finito $\tilde{F} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, de forma que

$$T \circ S_{-n} + \tilde{F} = \varphi, \tag{2.96}$$

onde $\varphi \in \mathtt{Hom}(\mathbb{H})$ é inversível e $S_{-n} = (S_{-1})^n$, sendo S_{-1} o operador *shift* à esquerda. A equação (2.96) fornece que

$$(T + \tilde{F} \circ S_n) \circ (S_{-n}\varphi^{-1}) = \mathtt{id}_{\mathbb{H}}, \tag{2.97}$$

ou seja, pondo $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ o operador de posto finito $F = \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$, $T+F$ é inversível à direita, porém não inversível pois, caso fosse, seria do tipo Fredholm com índice nulo e essa propriedade seria herdada para T, em virtude da Proposição 2.43. Nesse contexto, tome $r > 0$ de sorte que, para cada $X \in B(T+F, r)$, tenhamos

1. Dada a Proposição 2.4, X seja inversível a direita, porém não inversível;

2. Dada a Proposição 2.31, $X \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$.

O primeiro item garante que $\mathtt{ind}(X) \neq 0$ na segunda afirmação. Logo, se $\|T - X\| < r$, temos que $\|(T+F)-(X+F)\| < r$ e, por conta disso, $X+F \in \mathscr{F}_m(\mathbb{H})$, para algum $m \neq 0$, ou seja, $X \in \mathscr{F}_m(\mathbb{H}) \subseteq \cup_{n\neq 0}\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$, como queríamos. $\square$

Definição 2.49. Se $\mathbb{H}$ é um espaço de Hilbert, definimos o índice abstrado dos operadores de Fredholm como sendo a aplicação $i := \gamma \circ \pi : \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}) \to \Lambda$, onde γ denota o índice abstrato da álgebra de Calkin

Veremos no próximo resultado que, a menos de um isomorfismo, o índice abstrato dos operadores de Fredholm é identificado com o índice usual.

Teorema 2.50. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert, $\mathtt{ind} : \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}) \to \mathbb{Z}$ o índice de Fredholm e $i : \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}) \to \Lambda$ o índice abstrato, então existe um isomorfismo $\alpha : \mathbb{Z} \to \Lambda$ de sorte que $\alpha \circ \mathtt{ind} = i$.

Demonstração (Vide (DOUGLAS, 2012)).
Com efeito, definimos α como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{Z} &\to \Lambda \\ n &\mapsto i(T) \end{aligned}, \tag{2.98}$$

onde T é um operador arbitrário em $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$. Observe que, como cada conjunto $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$ é conexo por caminhos, segue então que α está bem definida pois, por continuidade e, como Λ é um conjunto discreto, segue que i é contante em $\mathscr{F}_n(\mathbb{H})$. Ainda, o exemplo 2.37 fornece que $\alpha(m+n) = \alpha(m) \cdot \alpha(n)$, para cada $m, n \in \mathbb{Z}$, de onde segue que α é um homomorfismo de grupos.

Resta mostrar que α é injetora, dado que a sobrejetividade de i implica na respectiva de α. Com efeito, sendo π a projeção natural da álgebra de Calkin, observe primeiramente que $\pi(\mathscr{F}_0(\mathbb{H}))$ e $\pi(\cup_{n\neq 0}\mathscr{F}_n(\mathbb{H}))$ são disjuntos, uma vez que se T é um operador de Fredholm com índice zero e $S \in \mathscr{F}_n(\mathbb{H})$, para algum $n \neq 0$, com $\pi(S) = \pi(T)$, então, em particular, existe um operador compacto $K : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de sorte que $T = S + K$. Como o índice de Fredholm é invariante por perturbações compactas, temos que $\mathtt{ind}(S) = 0$, uma contradição.

Por outro lado, denotando por Δ o conjunto dos elementos inversíveis da álgebra de Calkin $\frac{\mathtt{Hom}(\mathbb{H})}{\mathcal{K}(\mathbb{H})}$, temos que, como π é uma aplicação aberta, temos que, em virtude do Lema 2.48 que $\pi(\mathscr{F}_0(\mathbb{H}))$ e $\pi(\cup_{n\neq 0}\mathscr{F}_n(\mathbb{H}))$ são abertos disjuntos. Em particular, $\pi(\mathscr{F}_0(\mathbb{H}))$ é um subconjunto aberto e fechado de Δ, ou seja, é dado, em particular, pela componente conexa Δ_0 da identidade em $\frac{\mathtt{Hom}(\mathbb{H})}{\mathcal{K}(\mathbb{H})}$. Assim, π aplica $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ sobre Δ_0, de onde segue que i aplica $\mathscr{F}_0(\mathbb{H})$ sobre a identidade de Λ. Portanto, α é um isomorfismo, como queríamos. □

CAPÍTULO

3

APLICAÇÕES EM DIMENSÃO INFINITA

Finalizaremos este trabalho com um capítulo dedicado a definir e explorar algumas propriedades da Grassmanniana de um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Em geral, Grassmannianas desse tipo que são utilizadas como ferramenta de pesquisa nas áreas atuais da Matematica. Por exemplo, no campo das Equações Diferenciais Parciais, é sabido que as soluções da equação KP

$$u_{yy} = \frac{4}{3}u_{xt} - 2u_x^2 - 2uu_{xx} - \frac{1}{3}u_{xxxx} \tag{3.1}$$

podem ser obtidas através das soluções da chamada **Equação Bilinear de Hirota**, a saber

$$-3\tau_y^2 + 3\tau_{xx}^2 + 3\tau\tau_{yy} + 4\tau_t\tau_x - 4\tau\tau_{xt} - 4\tau_x\tau_{xxx} + \tau\tau_{xxxx} = 0, \tag{3.2}$$

a partir da relação $u(x,y,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau(x,y,t)$. Essas noções estão, em particular, conectadas com a Grassmanniana que estudaremos em sequência, de modo que a geometria desse objeto pode ser aproveitada e fornecer contribuições para a integrabilidade de sistemas como, por exemplo, a Hierarquia KP, da qual a equação (3.1) é um elemento. Esse tipo de abordagem, que consiste em associar pontos da Grassmanniana com objetos a que se tem pouca informação é também recorrente em outros campos (o leitor pode conferir alguns exemplos em (HARNAD; BALOGH, 2021)), daí a relevância de estudar as bases a respeito desse objeto chamado a Grassmaniana de um espaço de Hilbert. A confecção desse capítulo foi inspirada em (SEGAL; WILSON, 1985), (PRESSLEY; SEGAL, 1988), (SEMLALI, 1996) e (HARNAD; BALOGH, 2021).

3.1 A Grassmanniana de SSW

Seja $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert separável sobre o corpo dos complexos admitindo uma decomposição da forma $\mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-$, com $\mathbb{H}_\pm$ subespaços fechados e ortogonais de dimensão infinita. Decomposições desse tipo usualmente são referidas como uma **polarização** de $\mathbb{H}$. É um fato de Análise Funcional que todos os espaços de Hilbert dessa forma são isomorfos (veja, por exemplo, em (BREZIS, 2010)), sendo assim, caso seja conveniente, identifiquemos $\mathbb{H}$ por $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$, ou seja, o conjunto das aplicações complexas no círculo cujo quadrado do módulo é integrável. Considere $\mathcal{B} := \{\zeta^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{H}$ de sorte que $\mathbb{H}_+ = \overline{\mathtt{span}\{\zeta^n \,|\, n \geq 0\}}$ e $\mathbb{H}_- = \overline{\mathtt{span}\{\zeta^n \,|\, n \leq 0\}}$. Pela nossa identificação, para cada $n \in \mathbb{Z}$, um possível modelo de ζ^n é a aplicação

$$\begin{aligned} \zeta^n : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{int} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definição 3.1. $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ é o conjunto de todos os subespaços $W \subseteq \mathbb{H}$ de sorte que:

1. $\mathrm{pr}_+|_W$ é um operador de Fredholm.
2. $\mathrm{pr}_-|_W$ é um operador de Hilbert-Schmidt.

Chamaremos, durante o texto, $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ de **Grassmanniana SSW**, nome esse que homenageia os matemáticos Mikio Sato, Graeme Segal e George Wilson, que utilizaram esse objeto em algumas de suas contribuições, **Grassmanniana de Sato** ou simplesmente **Grassmanniana**, quando o contexto de dimensão infinita estiver subentendido. Convém mencionar que a Grassmanniana de Sato depende tacitamente da polarização escolhida. Considerando, por exemplo, $\mathcal{B} = \{e_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{H}$, e, considerando os subespaços

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+ &:= \overline{\mathtt{span}\{e_n \,|\, n \geq 0\}} \qquad & \mathbb{H}_- &:= \overline{\mathtt{span}\{e_n \,|\, n < 0\}} \\ \mathbb{V}_+ &:= \overline{\mathtt{span}\{e_n \,|\, n \text{ é par}\}} \qquad & \mathbb{V}_- &:= \overline{\mathtt{span}\{e_n \,|\, n \text{ é ímpar}\}} \end{aligned}, \tag{3.4}$$

temos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_- = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-$ e $\mathbb{H}_+$ pertence à Grassmanniana $\mathrm{Gr}(\mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-)$ mesmo não sendo elemento de $\mathrm{Gr}(\mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_-)$, uma vez que nenhum dos operadores $\mathrm{pr}_{V_+}|_{\mathbb{H}_+}$, $\mathrm{pr}_{V_-}|_{\mathbb{H}_+}$ são Fredholm. Fixada, então uma polarização $\mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-$, temos que, dado que $\mathrm{pr}_+|_W$ é um operador de Fredholm, definimos a **dimensão virtual** de W como o número inteiro

$$\mathtt{dim}^*(W) := \mathtt{ind}(\mathrm{pr}_+|_W) = \mathtt{dim}(\mathtt{ker}\,\mathrm{pr}_+|_W) - \mathrm{dim}(\mathtt{coker}\,\mathrm{pr}_+|_W), \tag{3.5}$$

Observação 3.2. Sendo $W \subseteq \mathbb{H}$, o fato de que

$$\begin{aligned} \mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_W) &= \mathtt{coker}(\mathrm{pr}_-|_{W^\perp}) \\ \mathtt{coker}(\mathrm{pr}_+|_W) &= \mathtt{ker}(\mathrm{pr}_-|_{W^\perp}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

implica que podemos reformular a definição 3.1 como segue, a fim de que $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, é necessário e suficiente que

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_+|_{W^\perp} : W^\perp \to \mathbb{H}_+ \text{ é Hilbert-Schmidt} \\ &\mathrm{pr}_-|_{W^\perp} : W^\perp \to \mathbb{H}_- \text{ é Fredholm} \end{aligned}. \tag{3.7}$$

Proposição 3.3. $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ se, e somente se, existe um operador linear contínuo $\omega : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}$, com $\mathtt{ran}(\omega) = W$ de sorte que

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_+ \circ \omega : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_+ \text{ seja Fredholm} \\ &\mathrm{pr}_- \circ \omega : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_- \text{ seja Hilbert-Schmidt.} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponha que $\mathrm{pr}_+|_W \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(W, \mathbb{H}_+)$, $\mathrm{pr}_-|_W \in \mathcal{HS}((W, \mathbb{H}_-))$ e que $\{\mathscr{E}_n \,|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ seja uma base ortonormal de W, vide que subespaços fechados de espaços de Hilbert também o são (e lembrando que todo espaço de Hilbert separável admite uma tal base). Defina

$$\begin{aligned} \omega \colon \mathbb{H}_+ &\to \mathbb{H}. \\ \zeta^n &\mapsto \mathscr{E}_n \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observe que, por construção, $\mathtt{ran}(\omega) = W$ e, alem disso, a aplicação $X := \mathrm{pr}_W \circ \omega$, onde pr_W denota a projeção ortogonal de $\mathbb{H}$ em W, define uma isometria entre $\mathbb{H}_+$ e W(note que $\omega = i_W \circ X$, onde i_W é a inclusão de W em $\mathbb{H}$). Nesse contexto, temos que

$$\mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_W \circ \omega) = \mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_W \circ i_W \circ X) = X^{-1} \cdot \left[\mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_W)\right]. \tag{3.10}$$

Como X é isometria o último membro da sequência de igualdades acima pode ser identificado como o núcleo de $\mathrm{pr}_+|_W$ e, como tal operador é Fredholm, por hipótese, segue que a dimensão de $\mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_W \circ \omega)$ é finita. Por outro lado, $\mathrm{pr}_-|_W \circ \omega$ é um produto de operadores no qual um dos fatores é de Hilbert-Schmidt, transmitindo, assim, esta propriedade para a composição, vide Proposição 2.20, verificando, assim, a primeira afirmativa.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se existir $\omega : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}$ de sorte que

- $W = \mathtt{ran}(\omega)$
- $\mathrm{pr}_+|_W \circ \omega \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}_+)$
- $\mathrm{pr}_-|_W \circ \omega \in \mathcal{HS}(\mathbb{H}_+, \mathbb{H}_-)$,

definamos, inicialmente a aplicação

$$\begin{aligned} X \colon \mathtt{ker}(\omega)^\perp &\to \mathtt{ran}(\omega), \\ p &\mapsto \omega(p) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ou seja, tome X como o isomorfismo que difere de ω apenas no contradomínio. Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_+ \circ X : \mathtt{ker}(\omega)^\perp \to \mathbb{H}_+ \text{ é Fredholm} \\ &\mathrm{pr}_- \circ X : \mathtt{ker}(\omega)^\perp \to \mathbb{H}_- \text{ é Hilbert-Schmidt,} \end{aligned} \tag{3.12}$$

de onde segue que, em particular $(\mathrm{pr}_- \circ X) \circ X^{-1} = \mathrm{pr}_-|_W$ é de Hilbert-Schmidt, por ser um produto de operadores com um dos fatores possuindo tal propriedade, e, além disso, $(\mathrm{pr}_+ \circ X) \circ X^{-1} = \mathrm{pr}_+|_W$ é de Fredholm, dado que X^{-1} é bijetiva, em particular Fredholm com índice nulo, e recorrendo à Proposição 2.41. □

Exemplo 3.4. Sendo $\mathbb{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ e $d \in \mathbb{N}$, o subespaço $W = \overline{\mathtt{span}\{\zeta^n \,|\, n \geq -d\}}$ possui dimensão virtual igual a d. Com efeito, observe que $\mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_W) = \mathtt{span}\{\zeta^n \,|\, -d \leq n < 0\}$, a saber finito-dimensional e que, além disso, o fato de que $\mathbb{H}_+ \subseteq W$ fornece que $\mathrm{pr}_+|_W$ é sobrejetiva, de onde segue $\mathtt{coker}(\mathrm{pr}_+|_W)$ também possui dimensão finita. Por outro lado, a projeção em $\mathbb{H}_-$, a saber $\mathrm{pr}_-|_W$ é um operador de posto finito, em particular Hilbert-Schmidt.

Proposição 3.5. Se $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ e $T \in \mathcal{HS}(W, W^\perp)$, então $\mathtt{graf}(T) \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$.

Demonstração.
Considere as aplicações

$$\begin{aligned} p_\pm : W &\to \mathbb{H}_\pm \\ x &\mapsto \mathrm{pr}_\pm(x) + \mathrm{pr}_\pm(Tx) \end{aligned} . \tag{3.13}$$

O fato de que um operador de Fredholm, ao ser somado com um operador de Hilbert-Schmidt permanece Fredholm fornece que p_+ é Fredholm. Por outro lado, como $\mathcal{HS}(W, \mathbb{H}_-)$ é um subespaço de $\mathrm{Hom}(W, \mathbb{H}_-)$, temos que p_- é de Hilbert-Schmidt. Ainda, dado que

$$\begin{aligned} \mathtt{ker}\,(\mathrm{pr}_+) &= \{x \in W \,|\, \mathrm{pr}_+(x + Tx) = 0\} = \mathtt{ker}(p_+) \\ \mathtt{coker}\,(\mathrm{pr}_+) &= \frac{\mathbb{H}_+}{\mathtt{ran}(\mathrm{pr}_+)} = \frac{\mathbb{H}_+}{\mathtt{ran}(p_+)} = \mathtt{coker}\,(\mathrm{p}\ _+) \end{aligned} , \tag{3.14}$$

segue que $\mathrm{pr}_+ \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathtt{graf}(T), \mathbb{H}_+)$. Finalmente, temos que $\mathrm{pr}_- = p_- \circ \pi$, onde

$$\begin{aligned} \pi : \mathtt{graf}(T) &\to W \\ x + Tx &\mapsto x \end{aligned} . \tag{3.15}$$

Observe que π está bem definida, uma vez que T toma valores em $W^\perp$. Assim, como $p_- \in \mathcal{HS}(W, \mathbb{H}_-)$, segue que $\mathrm{pr}_- \in \mathcal{HS}(\mathtt{graf}(T), \mathbb{H}_-)$, como queríamos. □

De forma análoga ao feito no capítulo 1, temos que $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ é uma variedade de Hilbert modelada, agora, no conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt. Para cada $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, definimos

$$U_W := \{\mathtt{graf}(T) \,|\, T \in \mathcal{HS}(W, W^\perp)\} \tag{3.16}$$

e a aplicação $\varphi_W : U_W \to \mathcal{HS}(W, W^\perp)$ que, associa a cada $\mathtt{graf}(T) \in U_W$ o respectivo operador $T : W \to W^\perp$ do qual o subespaço considerado é gráfico. Existe uma outra leitura do conjunto U_W que, em outros contextos, apresenta vantagens sobre a formulação definida acima.

Proposição 3.6. Sendo $W, W' \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, então, a fim de que $W' \in U_W$, é necessário e sufiente que a projeção ortogonal em W, a saber

$$\mathrm{pr}_W|_{W'} : W' \to W \tag{3.17}$$

seja um isomorfismo.

Demonstração.

($\Longleftarrow$) Se $W' \in U_W$, ou seja, se existe $T \in \mathcal{HS}(W, W^\perp)$ de sorte que $W' = \mathtt{graf}(T)$, a projeção ortogonal em W restrita a W' é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_W|_{W'} : \mathtt{graf}(T) &\to W \\ x + Tx &\mapsto x \end{aligned}, \tag{3.18}$$

uma vez que, como $Tx \in W^\perp$, para cada $x \in W$, o operador $\mathrm{pr}_W \circ T \equiv 0$. Nessas condições, (3.18) é sobrejetiva e injetiva, pois se $x = 0$, então

$$x + Tx = 0 + T(0) = 0, \tag{3.19}$$

ou seja $\mathrm{pr}_W|_{W'}$ é isomorfismo, como queríamos.

($\Longrightarrow$) Reciprocamente, se $\mathrm{pr}_W|_{W'}$ é um isomorfismo, defina, tendo como motivação o Teorema 1.5, a aplicação linear $T := \mathrm{pr}_{W^\perp}|_{W'} \circ (\mathrm{pr}_W|_{W'})^{-1}$. Da mesma forma que fora feito no caso finito-dimensional, temos que $W' = \mathtt{graf}(T)$. Resta apenas mostrar que T é um operador de Hilbert-Schmidt. Para tanto, observe que

$$T = (\mathrm{pr}_+ \circ T)|_W + (\mathrm{pr}_- \circ T)|_W. \tag{3.20}$$

A primeira parcela do operador acima é do tipo Hilbert-Schmidt, dado que, pela observação 3.2, $\mathrm{pr}_+|_{W^\perp}$ é um operador desse tipo e, portanto,

$$(\mathrm{pr}_+ \circ T)|_W = (\mathrm{pr}_+)|_{W^\perp} \circ T, \tag{3.21}$$

também o é, por ser um produto de operadores em que um de seus fatores é do tipo Hilbert-Schmidt.

Por outro lado, a segunda parcela de (3.20) é do tipo Hilbert-Schmidt, uma vez que:

$$\mathrm{pr}_-|_{\mathtt{graf}(T)} = \mathrm{pr}_-|_W + (\mathrm{pr}_- \circ T)|_W \tag{3.22}$$

e, assim, $(\mathrm{pr}_- \circ T)|_W$ é dada pela soma de operadores de Hilbert-Schmidt, sendo, assim, um operador dessa classe. Finalmente, temos que, como consequência do exposto que $T \in \mathcal{HS}(W, W^\perp)$, como queríamos. □

Observemos que todo operador linear $g \in GL(\mathbb{H})$ pode ser escrito como uma matriz de operadores

$$g = \begin{pmatrix} a_{++} & a_{-+} \\ a_{+-} & a_{--} \end{pmatrix},$$

onde $a_{ij} \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_i, \mathbb{H}_j)$, para $i, j \in \{+, -\}$. Por exemplo, temos que

$$\mathtt{id}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} \mathtt{id}_{\mathbb{H}_+} & 0 \\ 0 & \mathtt{id}_{\mathbb{H}_-} \end{pmatrix}.$$

A operação de composição de operadores respeita a multiplicação de matrizes. O grupo linear restrito de um espaço de Hilbert, denotado por $GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, consiste nos operadores $X \in GL(\mathbb{H})$ de sorte que $[J,X] := JX - XJ$ seja um operador de Hilbert-Schmidt. Aqui, $J : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ denota o operador em $\mathbb{H}$ com a seguinte representação matricial

$$J = \begin{pmatrix} \mathtt{id}_{\mathbb{H}_+} & 0 \\ 0 & -\mathtt{id}_{\mathbb{H}_-} \end{pmatrix}.$$

Proposição 3.7. Sendo $X \in GL(\mathbb{H})$, temos que $X \in GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ se, e somente se sua diagonal secundária consiste de operadores de Hilbert-Schmidt.

Demonstração.
De fato, se $[J,X] \in \mathcal{HS}(\mathbb{H})$ e a,b,c,d denotam as entradas de X, um cálculo simples fornece que

$$[J,X] = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para cada base ortonormal $\{e_j\}$, temos que

$$\left(\sum \|b(e_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum \|[J,X](e_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

de onde segue que $b \in \mathcal{HS}(\mathbb{H}_-, \mathbb{H}_+)$. Analogamente, temos que $c \in \mathcal{HS}(\mathbb{H}_+, \mathbb{H}_-)$, de onde segue a primeira implicação. Reciprocamente, se b,c forem operadores de Hilbert-Schmidt, temos que

$$\begin{aligned} \|[J,X]\|^2_{\mathcal{HS}} = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{HS}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} \cdot e_n \right\|^2 \\ &= \\ \sum_{n<0} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix} \right\|^2 &+ \sum_{n\geq 0} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &\leq \\ \|2b\|^2_{\mathcal{HS}} &+ \|2c\|^2_{\mathcal{HS}} < \infty, \end{aligned} \tag{3.23}$$

de onde segue que $[J,A] \in \mathcal{HS}(\mathbb{H})$ e, portanto, $X \in GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, como queríamos.

□

Observação 3.8. A menos da terminologia, não foi verificado que $GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ é de fato um subgrupo de $GL(\mathbb{H})$. Entretanto, usando apenas propriedades algébricas dos comutadores, verifica-se facilmente que, se $X,Y \in GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, então

$$[J,XY] = [J,X]Y + X[J,Y].$$

Assim, dado que o lado direito da igualdade prévia é uma soma de operadores de Hilbert-Schmidt, segue que $[J,XY]$ também o é e. Além disso, $X^{-1} \in GL_{\texttt{res}}(\mathbb{H})$, uma vez que,

$$\begin{aligned}[J,X^{-1}] &= JX^{-1} - X^{-1}J = X^{-1}(XJ - JX)X^{-1} \\ &= X^{-1}[J,X]X^{-1}\end{aligned}, \tag{3.24}$$

de onde segue que, Pela Proposição 2.20, $[J,X^{-1}]$ é um operador de Hilbert-Schmidt e, assim, $X^{-1} \in GL_{\texttt{res}}(\mathbb{H})$. Portanto, como $[J, \texttt{id}_{\mathbb{H}}] = 0$, em particular $\texttt{id}_{\mathbb{H}} \in GL_{\texttt{res}(\mathbb{H})}$, segue que $GL_{\texttt{res}}(\mathbb{H})$ é um subgrupo de $GL(\mathbb{H})$, como queríamos. Denotaremos por $U_{\texttt{res}}(\mathbb{H})$ o subgrupo $GL_{\texttt{res}}(\mathbb{H}) \cap U(\mathbb{H})$, onde $U(\mathbb{H}) \subseteq GL(\mathbb{H})$ denota o subgrupo dos operadores unitários em $\mathbb{H}$.

Proposição 3.9. Se $X \in GL_{\texttt{res}}(\mathbb{H})$, então os operadores da diagonal principal são Fredholm.

Demonstração.
De fato, escrevendo

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

temos que, como $XX^{-1} = \texttt{id}_{\mathbb{H}}$ e o produto de matrizes é compatível com a composição dos operadores, obtemos

$$a\alpha + b\gamma = \texttt{id}_{\mathbb{H}_+} \Longleftrightarrow a\alpha = \texttt{id}_{\mathbb{H}_+} - b\gamma.$$

Assim, $[a]$ é um elemento inversível da álgebra de Calkin, com inversa dada por $[\alpha]$ ou seja, a é Fredholm. Mudando o que deve ser modificado, também concluí-se que $d \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H})$, como queríamos □

Proposição 3.10. A aplicação $\mu : U_{\texttt{res}}(\mathbb{H}) \times \mathrm{Gr}(\mathbb{H}) \to \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ dada por $\mu(A,W) = A(W)$ é uma ação à esquerda transitiva tal que $\texttt{stab}(\mathbb{H}_+) = U(\mathbb{H}_+) \times U(\mathbb{H}_-)$.

Demonstração.
É suficiente mostrar que a órbita de $\mathbb{H}_+$ coincide com $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, ou seja

$$\{g \cdot \mathbb{H}_+ \,|\, g \in U_{\texttt{res}}(\mathbb{H})\} = \mathrm{Gr}(\mathbb{H}). \tag{3.25}$$

Verifiquemos ambas as inclusões.

($\subseteq$) Evidente, pois a ação μ toma valores em $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$.

($\supseteq$) Dado $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, seja $\{w_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{H}$ um subconjunto de sorte que

$$\begin{aligned}&\{w_n \,|\, n \geq 0\} \text{ seja uma base ortonormal de } W \\ &\{w_n \,|\, n < 0\} \text{ seja uma base ortonormal de } W^{\perp}\end{aligned}. \tag{3.26}$$

Observe que um subconjunto $\{w_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ com as propriedades descritas acima existe pois W possui dimensão infinita e subespaços fechados de espaços de Hilbert também o são, admitindo, assim, uma base ortonormal. Nesse contexto, definindo as aplicações

$$\begin{aligned} \omega\colon \mathbb{H}_+ &\to W \\ \zeta^n &\mapsto w_n \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \omega^\perp\colon \mathbb{H}_- &\to W^\perp, \\ \zeta^{-n} &\mapsto w_{-n} \end{aligned} \tag{3.27}$$

temos que

$$g := \begin{pmatrix} \mathrm{pr}_+|_W \circ \omega & \mathrm{pr}_+|_{W^\perp} \circ \omega^\perp \\ \mathrm{pr}_-|_W \circ \omega & \mathrm{pr}_-|_{W^\perp} \circ \omega^\perp \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

é um elemento de $GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, uma vez que $\mathrm{pr}_-|_W$ e $\mathrm{pr}_+|_{W^\perp}$ são operadores de Hilbert-Schmidt, o que fornece que a diagonal secundária de g é composta por tais tipos de operadores, vide Proposição 2.41. Ainda, temos que

$$\begin{gathered} g(\mathbb{H}_+) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{pr}_+|_W \circ \omega & \mathrm{pr}_+|_{W^\perp} \circ \omega^\perp \\ \mathrm{pr}_-|_W \circ \omega & \mathrm{pr}_-|_{W^\perp} \circ \omega^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} : p \in \mathbb{H}_+ \right\} \\ = \\ \{\mathrm{pr}_+|_W \circ \omega(p) + \mathrm{pr}_-|_W \circ \omega(p) \mid p \in \mathbb{H}_+\} \\ = \\ \{\omega(p) \mid p \in \mathbb{H}_+\} = \mathtt{ran}(\omega) = W. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Assim, $\mu(g, \mathbb{H}_+) = W$. Finalmente, o fato de ω e $\omega^\perp$ serem isometrias fornece que g é unitário, de onde segue que μ é transitiva, como queríamos.

Observemos que o grupo de isotropia, ou estabilizador de $\mathbb{H}_+$ em relação à ação μ é, por definição, o conjunto $\mathtt{stab}(\mathbb{H}_+) = \{A \in U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H}) \mid \mu(A, \mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+\}$. Assim, dado $A \in \mathtt{stab}(\mathbb{H}_+)$, vemos que, escrevendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

relativamente à decomposição canônica, vale, por definição,

$$A(\mathbb{H}_+) = \begin{pmatrix} a(\mathbb{H}_+) \\ c(\mathbb{H}_+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a é sobrejetiva e $c \equiv 0$. Em particular, temos também que $A^*(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$, donde, de forma análoga ao feito anteriormente, conclui-se que $b^* = 0$ e, por conseguinte, $b = 0$. Por fim, o fato de que A é unitário, ou seja $AA^* = A^*A = \mathtt{id}$ fornece que $aa^* = a^*a = \mathtt{id}$ e $dd^* = d^*d = \mathtt{id}$, isto é, $A \in U(\mathbb{H}_+) \times U(\mathbb{H}_-)$, como queríamos. □

Estamos em condições de definir o que será verificado ser uma estrutura diferenciável na Grassmanniana, como será abordado na seguinte proposição.

Proposição 3.11. O conjunto $\{(U_W, \varphi_W) \mid W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})\}$ é um atlas diferenciável para $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$.

Demonstração.
Mostremos que a aplicação de transição, ou seja,

$$(\varphi_{W_2} \circ \varphi_{W_1}^{-1}) : \varphi_{W_1}(U_{W_1} \cap U_{W_2}) \to \varphi_{W_2}(U_{W_1} \cap U_{W_2}) \tag{3.30}$$

é diferenciável. A fim de se obter uma expressão de (3.30) que permita constatar a diferenciabilidade, o argumento seguinte consistirá em mostrar que o domínio da mudança de coordenadas é, na verdade, o conjunto

$$\varphi_{W_1}(U_{W_1} \cap U_{W_2}) = \{T_1 \in \mathcal{HS}(W_1, W_1^{\perp}) \,|\, a + b \cdot T_1 \text{ é inversível}\}, \tag{3.31}$$

onde a, b serão operadores a serem definidos. Com efeito, se $W \in U_{W_1} \cap U_{W_2}$, isto é, se existem operadores $T_1 \in \mathcal{HS}(W_1, W_1^{\perp})$ e $T_2 \in \mathcal{HS}(W_2, W_2^{\perp})$ de sorte que $\mathtt{graf}(T_1) = \mathtt{graf}(T_2)$, considere as aplicações

$$\begin{aligned} g_1 : W_1 &\to \mathtt{graf}(T_1) & \qquad g_2 : W_2 &\to \mathtt{graf}(T_2) \\ w &\mapsto w + T_1(w) & w &\mapsto w + T_2(w) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Observe que g_1 e g_2 são isomorfismos entre seus respectivos espaços e $\mathrm{ran}(g_j) = W$, de onde segue que existe um isomorfismo $q : W_1 \to W_2$ de modo que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "q"'] & W \\ & W_2 \arrow[u, "g_2"'] \end{tikzcd} ,$$

ou seja, $g_1 = g_2 \circ q$. Ainda, lembremos que $\mathbb{H} = W_1 \oplus W_1^{\perp} = W_2 \oplus W_2^{\perp}$ e, relativamente a essas decomposições em soma direta, podemos reescrever (3.32) na forma matricial

$$\begin{aligned} g_1 : W_1 &\to W_1 \oplus W_1^{\perp} & \qquad g_2 : W_2 &\to W_2 \oplus W_2^{\perp} \\ w &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ T_1 \end{pmatrix} \cdot w & w &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ T_2 \end{pmatrix} \cdot w \end{aligned} . \tag{3.33}$$

Considere também a representação matricial da identidade em $\mathbb{H}$ relativamente às decomposições $\mathrm{id}_{\mathbb{H}} : W_1 \oplus W_1^{\perp} \to W_2 \oplus W_2^{\perp}$, ou seja, tome operadores $a : W_1 \to W_2$, $b : W_1^{\perp} \to W_2$, $c : W_1 \to W_2^{\perp}$ e $d : W_1^{\perp} \to W_2^{\perp}$, de sorte que

$$\mathrm{id}_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Nesse contexto, a comutatividade do diagrama discutida anteriormente é expressa da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ T_2 \end{pmatrix} \cdot q. \tag{3.35}$$

Realizando a multiplicação matricial, temos que

$$\begin{aligned} a + b \cdot T_1 &= q \\ c + d \cdot T_1 &= T_2 \cdot q \end{aligned} , \tag{3.36}$$

de onde segue que, pela primeira igualdade, $a+b\cdot T_1$ é inversível (atestando a primeira inclusão em (3.31)) e, em virtude da informação fornecida pela segunda igualdade,

$$T_2 = (c+d\cdot T_1)\circ(a+b\cdot T_1)^{-1}. \tag{3.37}$$

Por outro lado, se $W = \mathtt{graf}(\mathcal{T}_1)$, com $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{HS}(W_1, W_1^{\perp})$, $a+b\cdot\mathcal{T}_1$ inversível e definindo, de forma análoga a equação (3.37), $\mathcal{T}_2 := (c+d\cdot\mathcal{T}_1)\circ(a+b\cdot\mathcal{T}_1)^{-1}$, temos que, repetindo às avessas o argumento anterior que

$$W = \mathtt{graf}(T_2), \tag{3.38}$$

atestando a inclusão reversa em (3.31). Como consequência disso, para cada $T_1 \in \mathcal{HS}(W_1, W_1^{\perp})$ tal que $a+b\cdot T_1$ seja inversível, segue que

$$\varphi_{W_2}\circ\varphi_{W_1}^{-1}\cdot T_1 = T_2 = (c+d\cdot T_1)\circ(a+b\cdot T_1)^{-1}. \tag{3.39}$$

Como as operações de tirar a inversa, somar e compor com operadores fixados são diferenciáveis, segue que (3.39) é diferenciável, como queríamos. □

Observação 3.12. Analogamente ao caso de dimensão finita, o modelo que foi usado para obter uma estrutura diferenciável em $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ possui como justificativa o fato da variedade homogênea $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})/U(\mathbb{H}_+)\times U(\mathbb{H}_-)$ ser localmente modelada na álgebra de Lie de $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, dada pelo conjunto

$$\mathfrak{u}_{\mathtt{res}}(\mathbb{H}) = \{A\in\mathtt{Hom}(\mathbb{H})\,|\,A^* = -A \text{ e } A_{+-}, A_{-+} \text{ são operadores de Hilbert-Schmidt}\}, \tag{3.40}$$

como é possível concluir, por exemplo, em (HUCKLEBERRY; WURZBACHER, 2012). O fato da aplicação exponencial estar bem definida em $U(\mathbb{H})$, vide (MILNOR, 1984), fornece que, nesse caso, também vale a Proposição 1.23. Em particular, a aplicação exponencial $\mathtt{exp}$: $\mathfrak{u}_{\mathtt{res}}(\mathbb{H}) \to U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ fornece um exemplo de coordenadas analíticas-reais em $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$.

Proposição 3.13. *Seja $A\in GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, com representação matricial*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Então, para cada $W\in\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$,

$$\mathtt{dim}^* A(W) = \mathtt{dim}^*(W) + \mathtt{ind}(a). \tag{3.42}$$

Demonstração.
Observe que a proposição é válida para o caso em que $W = \mathbb{H}_+$, ou seja,

$$\mathtt{dim}^*(A\cdot\mathbb{H}_+) = \mathtt{ind}(a). \tag{3.43}$$

Por outro lado, para cada $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ arbitrário, existe $B \in GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ de forma que $W = B(\mathbb{H}_+)$. Escrevendo a representação matricial de B relativamente à decomposição em soma direta $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_-$, digamos,

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

segue que a dimensão virtual de $A(W)$ é dada por

$$\mathtt{dim}^*(A(W)) = \mathtt{dim}^*[(AB) \cdot \mathbb{H}_+] \ . \tag{3.45}$$

Realizando a multiplicação matricial, a expressão prévia se torna

$$\begin{gathered} \mathtt{dim}^*(A(W)) = \mathtt{ind}(a \circ \alpha) \\ = \\ \mathtt{ind}(\alpha) + \mathtt{ind}(a) = \mathtt{dim}^*(W) + \mathtt{ind}(a), \end{gathered} \tag{3.46}$$

como queríamos.

□

Proposição 3.14. Dado $S \subseteq \mathbb{Z}$, defina $H_S := \overline{\mathtt{span}\{\zeta^n \,|\, n \in S\}}$. Nessas condições, sendo $\mathscr{S}$ o conjunto $\mathscr{S} = \{S \subseteq \mathbb{Z} \,|\, H_S \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})\}$, temos que, para cada $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, existe $S \in \mathscr{S}$ de sorte que $\mathrm{pr}_S|_W : W \to \mathbb{H}_S$ é um isomorfismo. Além disso,

$$\mathscr{S} = \{S \subseteq \mathbb{Z} \,|\, S \setminus \mathbb{N} \text{ e } \mathbb{N} \setminus S \text{ são finitos}\}. \tag{3.47}$$

Demonstração.
Sabemos que o fato de que $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ fornece que $\mathrm{pr}_+|_W : W \to \mathbb{H}_+$ possui um subconjunto de dimensão finita como núcleo. Assim, existe $S_0 \in \mathscr{S}$ de modo que, relativamente a decomposição em soma direta $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{S_0} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{Z}\setminus S_0}$, a projeção ortogonal

$$\mathrm{pr}_{S_0}|_W : W \to \mathbb{H}_{S_0} \tag{3.48}$$

é injetiva. Se (3.48) também for sobrejetiva, a demonstração está encerrada. Do contrário, existe $s \in S_0$ de sorte que $\zeta^s \notin \mathrm{ran}(\mathrm{pr}_{S_0}|_W)$. Observe que, nesse contexto, se $S_1 := S_0 \setminus \{s\}$, a projeção ortogonal em S_1 relativamente a $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{S_1} \oplus \mathbb{H}_{\mathbb{Z}\setminus S_1}$ também é injetiva e podemos repetir o processo anterior. O fato de que $\mathtt{dim}(\mathrm{coker}(\mathrm{pr}_+|_W)) < \infty$ fornece que, a partir de uma quantidade finita de etapas, obteremos a sobrejetividade.

A segunda afirmativa segue do fato de que, para cada $S \subseteq \mathbb{Z}$ e, associado a S a projeção ortogonal $\mathrm{pr}_+|_{H_S} : H_S \to \mathbb{H}_+$, temos que $\mathtt{ker}(\mathrm{pr}_+|_{H_S})$ e $\mathtt{coker}(\mathrm{pr}_+|_{H_S})$ são os subespaços gerados por, $\{\zeta^k\}_k$, onde k é elemento, respectivamente, de $S \setminus \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus S$, de onde segue que $H_S \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ precisamente quando $\mathtt{card}(S \setminus \mathbb{N})$ e $\mathtt{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ são finitos, como queríamos. □

Em virtude da proposição anterior, para cada $S \in \mathscr{S}$, o número $\mathtt{card}^*(S) := \mathtt{card}(S \setminus \mathbb{N}) - \mathtt{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ é finito e recebe o nome de cardinalidade virtual do conjunto S.

Proposição 3.15. A Grassmaniana $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ é uma variedade de Hilbert que possui como modelo o conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt $\mathcal{HS}(\mathbb{H}_+, \mathbb{H}_-)$.

Demonstração.
Em virtude da Proposição 3.11, resta apenas mostrar que a topologia de variedade induzida por $\{(U_W, \varphi_W) \mid W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})\}$ é Hausdorff e possui base enumerável.

1. (Hausdorff) É possível mostrar que, dado $\xi \in \mathbb{H}$, a aplicação

$$\begin{aligned} p_\xi : \mathrm{Gr}(\mathbb{H}) &\to H \\ W &\mapsto \mathtt{dist}(\xi, W) \end{aligned}, \tag{3.49}$$

   onde $\mathtt{dist}(\xi, W)$ denota a distância entre ξ e W, é contínua (veja, por exemplo, em (LAU, 2015)). Assim, se $V, W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ são tais que $V \neq W$, então existe $\xi \in V \setminus W$. Nesse contexto, temos que $p_\xi(V) = 0$ e $p_\xi(W) = r > 0$. Logo, os conjuntos $U_1 := p_\xi^{-1}(-\infty, r/2)$ e $U_2 := p^{-1}(r/2, \infty)$ são abertos disjuntos que contém, respectivamente, V e W, de onde segue que $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ é um espaço de Hausdorff.

2. (Base Enumerável)

   Segue da Proposição 3.14. que $\mathscr{S}$ é uma base topológica de $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$. Vejamos que é enumerável. Com efeito, sendo F a coleção dos subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$, a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathscr{S} &\to F \times F \\ S &\mapsto (S \setminus \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus S) \end{aligned} \tag{3.50}$$

   é injetora, e como $F \times F$ é enumerável, segue o mesmo para $\mathscr{S}$, como queríamos. □

Vimos no capítulo prévio algumas propriedades a respeito do índice de Fredholm. Mostraremos na proposição seguinte que esse invariante também parametriza as componentes conexas de $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$. Mais precisamente,

Proposição 3.16. Dois subespaços $V, W \subseteq \mathbb{H}$ estão na mesma componente conexa de $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ se, e somente se, $\mathtt{dim}^*(V) = \mathtt{dim}^*(W)$.

Demonstração.
Observemos inicialmente que as componentes conexas de $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ são dadas pelos conjuntos

$$U_{\mathtt{res}}^k(\mathbb{H}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H}) \mid \mathtt{ind}(a) = k\}. \tag{3.51}$$

Com efeito, como o índice de Fredholm $T \mapsto \mathtt{ind}(T)$ e a projeção na primeira entrada

$$\begin{aligned} p : U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H}) &\to \mathscr{F}_{\mathscr{R}}(\mathbb{H}_+) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto a \end{aligned} \tag{3.52}$$

são operações contínuas, temos que cada componente conexa de $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ é subconjunto de $U^k_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, como $U^k_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ é conexo, vide (CAREY; HURST; O'BRIEN, 1982), segue que tal conjunto é, na verdade, uma componente conexa.

Por outro lado, como o grupo de isotropia da ação de $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ é dado pelo espaço contrátil $U(\mathbb{H}_+) \times U(\mathbb{H}_-)$, segue que $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ e $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ possuem o mesmo tipo de homotopia, de onde segue que as componentes conexas de $\mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ são os abertos

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}^k(\mathbb{H}) := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbb{H}_+ \,|\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H}) \text{ e } \mathtt{ind}(a) = k \} \\ = \\ \{ W \in \mathrm{Gr}(H) \,|\, \mathtt{dim}^*(W) = k \}, \end{aligned} \tag{3.53}$$

como queríamos. □

Observação 3.17. O fato do tipo de homotopia de $U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ ser determinado por $GL_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})$ é consequência de que existe uma seção global de $\frac{U_{\mathtt{res}}(\mathbb{H})}{U(\mathbb{H}_+)\times U(\mathbb{H}_-)}$, em virtude da topologia de $U(\mathbb{H})$ ser metrizável, vide (NEEB *et al.*, 1997) e o seguinte resultado:

Teorema 3.18. (PALAIS, 1966) Seja $\pi : E \to X$ um fibrado localmente trivial cuja fibra F seja uma variedade com topologia metrizável, assim como a base X; $A \subseteq X$ um subconjunto fechado e $s : A \to E$ uma seção contínua. Nessas condições, existe uma extensão contínua de s à base X do fibrado.

3.2 A Aplicação de Plücker na Grassmanniana de SSW

Assim como no caso finito-dimensional, a Grassmaniana de SSW também pode ser aplicada sobre um subconjunto de algum espaço projetivo. Para definir uma tal correspondência, precisaremos da noção de base **admissível** de um subespaço da Grassmaniana. Denote por d a dimensão virtual de $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$.

Definição 3.19. Dado $f \in \mathbb{H}$, diremos que f possui **ordem finita** se existem $s \in \mathbb{Z}$ e $f_k \in \mathbb{C}$, com $-\infty \leq k \leq s$ de sorte que

$$f = \sum_{k=-\infty}^{s} f_k \zeta^k. \tag{3.54}$$

Se $W = H_S = \overline{\mathtt{span}\{\zeta^k \,|\, k \in S\}}$, para algum $S \in \mathscr{S}$, então o conjunto dos elementos de ordem finita de W é, por definição de fecho, denso em W. Por outro lado, se $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ é escolhido arbitrariamente, vimos que, para uma escolha apropriada de $S \in \mathscr{S}$, a projeção ortogonal $\mathrm{pr}_S : W \to H_S$ é um isomorfismo, transmitindo a densidade dos elementos de ordem finita de H_S para W.

Sendo $S_W \subseteq \mathbb{Z}$ o subconjunto dos inteiros formado pelos índices $s \in \mathbb{Z}$ de sorte que W contém um elemento de ordem s e $w_s \in W$ um elemento da forma (3.54) com $f_s = 1$, o conjunto dos elementos de W com ordem finita, denotado por $W^{\mathtt{fin}}$, possui uma base, em particular, o conjunto dado por

$$\mathscr{C} := \{w_s \in W \,|\, s \in S_W\}. \tag{3.55}$$

Definição 3.20. Uma base $B = \{w_j \,|\, j \geq -d\} \subseteq W$ é dita ser **admissível** se cumprir as seguintes condições:

- A aplicação linear

$$\begin{aligned} w : e^{-idt}\mathbb{H}_+ &\to W \\ e^{int} &\mapsto w_n \end{aligned}, \tag{3.56}$$

  é um isomorfismo contínuo.

- A composição $\mathrm{pr} \circ w : e^{-idt}\mathbb{H}_+ \to e^{-idt}\mathbb{H}_+$, onde pr denota a projeção sobre $e^{-idt}\mathbb{H}_+$ é um operador com determinante

Exemplo 3.21. Sendo $\mathscr{C}$ uma base de W da forma (3.55), temos que a projeção ortogonal $\mathrm{pr} : W \to H_{S_W}$ é um isomorfismo. Escolhendo os elementos de $\mathscr{C}$ de sorte que $\mathrm{pr}(w_s) = \zeta^s$, temos que $\mathscr{C}$ se torna uma base admissível, no sentido da definição 3.20. Tal base é conhecida como a **base canônica** de W.

Observe que, pela escolha da definição, duas bases admissíveis de um subespaço $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ estão relacionadas por uma matriz com determinante, ou seja, se $\{w_1, w_2 \ldots\}$ e $\{v_1, v_2 \ldots\}$ são bases admissíveis, escrevendo

$$w_j = \sum_{i=1}^{\infty} V_{ij} e_i, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{3.57}$$

e denotando $V_j = (V_{1j}\; V_{2j}\; \ldots)^T$, a matriz infinita $(V_1\; V_2\; \ldots)$ possui determinante definido. Além disso, dados $S \in \mathscr{S}$ tal que $\mathtt{card}^*(S) = d$ e $B = \{w_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ uma base admissível de $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, a segunda condição da definição de base admissível fornece que $\mathrm{pr}_S : W \to H_S$ também é um operador com determinante.

Definição 3.22. A **coordenada de Plücker** de B induzida por S é o número

$$\pi_S(B) = \begin{cases} \mathtt{det}(\mathrm{pr}_S \circ w), & \text{se } \mathtt{card}^*(S) = d \\ 0, & \text{se } \mathtt{card}^*(S) \neq d \end{cases} \tag{3.58}$$

Proposição 3.23. Se B, B' são bases admissíveis de algum subespaço $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$ e $M_B^{B'}$ denota a respectiva matriz que as relaciona, então

$$\pi_S(B) = \mathtt{det}(M_B^{B'})\, \pi_S(B'). \tag{3.59}$$

Demonstração.
A proposição segue da compatibilidade entre determinantes e composições de operadores. Com efeito,

$$\begin{aligned}\pi_S(B) = \mathtt{det}(\mathrm{pr}_S \circ w) = \mathtt{det}(\mathrm{pr}_S \circ w' \circ w'^{-1} \circ w) &= \mathtt{det}(\mathrm{pr}_S \circ w')\,\mathtt{det}(w'^{-1} \circ w) \\ &= \mathtt{det}(M_B^{B'})\,\pi_S(B'),\end{aligned}$$

como queríamos. □

Dada uma base admissível $B \subseteq W$, a aplicação $\pi_{\cdot}(B) \in l^2(\mathscr{S})$, onde $\mathscr{S}$ está munido com a medida usual de contagem. Assim, pela proposição prévia, está demonstrado o seguinte resultado

Proposição 3.24. A aplicação

$$\begin{aligned}\pi : \mathrm{Gr}(\mathbb{H}) &\to \mathbb{P}(\mathcal{H}) \\ W &\mapsto [\pi_S(B)]\end{aligned}, \tag{3.60}$$

está bem definida. Aqui, B denota uma base admissível de W e $\mathcal{H} = l^2(\mathscr{S})$.

3.3 O Fibrado Determinante na Grassmanniana de SSW

Nesta última seção, falaremos um pouco sobre a teoria básica de um fibrado que possui como base a Grassmanniana e cujas seções são de grande interesse no estudo de alguns sistemas integráveis, como as hierarquias de equações diferenciais parciais KdV e KP, por exemplo e, em outros campos da Matemática, como se pode conferir em (HARNAD; BALOGH, 2021). Inicialmente, observemos que sobre a Grassmanniana de dimensão finita $\mathrm{Gr}_K(\mathbb{R}^n)$ estudada no capítulo 1, é possível definir um fibrado diferenciável unidimensional cuja fibra em cada ponto $W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{R}^n)$ consiste na potência exterior máxima de W. Explicitamente, a aplicação

$$\begin{aligned}p : \bigsqcup_{W \in \mathrm{Gr}_K(\mathbb{R}^n)} \{W\} \times \wedge^k W &\to \mathrm{Gr}_K(\mathbb{R}^n) \\ (W, p) &\mapsto W\end{aligned} \tag{3.61}$$

é um fibrado vetorial de dimensão 1. Lembremos que um dado elemento de $\Lambda^k W$ é da forma $\lambda\,(w_1 \wedge \ldots \wedge w_k)$, onde $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq W$ é uma base qualquer de W. A Grassmanniana de SSW também admite uma construção análoga de um fibrado vetorial unidimensional, referido na literatura como o **fibrado determinante**, justamente por ser uma generalização do exemplo anterior relativo às potências exteriores de dimensão finita. Para defini-lo adequadamente, é conveniente introduzir a seguinte noção:

Definição 3.25. Para cada $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, definimos $\mathrm{Det}(W)$ como sendo o conjunto

$$\mathrm{Det}(W) := \frac{\{(\lambda, w) \,|\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } w \subseteq W \text{ é admissível}\}}{\sim}, \tag{3.62}$$

onde $(\lambda, w) \sim (\mu, w')$ se, e somente se $\mu = \lambda \cdot \mathtt{det}(M_w^{w'})$. Denotaremos os elementos de $\mathrm{Det}(W)$ por, nas condições anteriores, $[\lambda, w]$. Obtemos, dessa forma, o seguinte fibrado vetorial.

Proposição 3.26. A aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \bigsqcup_{W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})} \{W\} \times \mathrm{Det}(W) &\to \mathrm{Gr}(\mathbb{H}) \\ (W, v) &\mapsto W \end{aligned} \tag{3.63}$$

é um fibrado vetorial de dimensão 1.

Demonstração.
A respeito da dimensão do fibrado, mostremos que $\mathtt{Det}(W)$ é um espaço vetorial unidimensional. Com efeito, fixada $w \subseteq W$ uma base admissível arbitrária e $[\lambda, w'] \in \mathtt{Det}(W)$, considere A a matriz mudança de base entre w e w'. Assim, temos que

$$[\lambda, w'] = [\lambda \mathtt{det}(A), w] = \lambda \mathtt{det}(A)[1, w], \tag{3.64}$$

de onde segue que $\mathrm{Det}(W)$ é gerado por $[1, w]$. Por outro lado, sobre a estrutura de fibrado vetorial, para cada subconjunto $S \in \mathscr{S}$, lembremos que o aberto U_S é identificado pelo conjunto $\mathcal{HS}(H_S, H_S^\perp)$. Ainda, para cada $T \in \mathcal{HS}(H_S, H_S^\perp)$, o gráfico de T possui uma base admissível, a saber, $w := \{w_j \,|\, j \geq -d\}$, onde

$$w_j = z^q + \sum_{p \notin S} T_{pq} z^q. \tag{3.65}$$

Aqui, $S = \{s_{-d}, s_{-d+1}, \ldots\}$, $q = s_i$ e $(T_{pq})_{p,q \in \mathbb{Z}}$ denota a matriz infinita que representa T. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_S : \mathbb{C} \times U_S &\to \mathrm{Det} \\ (\lambda, \mathtt{graf}(T)) &\mapsto [\lambda, w] \end{aligned}, \tag{3.66}$$

onde w denota a base admissível de $\mathtt{graf}(T)$ referida previamente. Observemos que a função (3.66) é injetora, em particular bijetora sobre sua imagem. A propriedade de trivialização local segue do fato que, se $\mathtt{graf}(T) \in U_S \cap U_{S'}$ e $\mathtt{graf}(T) = \mathtt{graf}(T')$, para algum $T' : H_{S'} \to H_{S'}^\perp$ operador de Hilbert-Schmidt, então, pela equação (3.37), segue que

$$T' = (c + dT) \circ (a + bT)^{-1}, \tag{3.67}$$

onde $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ denota a matriz de operadores que representa a identidade relativamente às decomposições $\mathtt{id} : H_S \oplus H_S^\perp \to H_{S'} \oplus H_{S'}^\perp$. Assim, a correspondência

$$(\lambda, \mathtt{graf}(T)) \in \mathbb{C} \times U_S \leftrightarrow (\lambda', \mathtt{graf}(T')) \in \mathbb{C} \times U_S, \tag{3.68}$$

onde $\lambda' = \lambda \mathtt{det}(a + bT)$ é holomorfa, como queríamos. $\square$

3.4 Comentário Final

Finalizamos esse trabalho com a observação de que o fibrado exposto na Proposição 3.26 é o que torna a Grassmanniana de Sato-Segal-Wilson um objeto interessante de ser estudado. As seções do fibrado dual de (3.63) induzem as chamadas funções τ de um subespaço $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, que constituem uma ferramenta essencial na teoria moderna de sistemas integráveis. Aplicações recentes dessa teoria podem ser encontradas, por exemplo, no artigo (AGOSTINI *et al.*, 2021), cujos resultados foram divulgados na última edição do Congresso de Matemática das Américas. Em particular, nesse artigo, para cada ponto $W \in \mathrm{Gr}(\mathbb{H})$, foram construídas uma função τ_W que satisfaz a equação de Hirota (3.2). Essa é uma, dentre muitas outras, aplicações da teoria de Fredholm trabalhada no segundo capítulo deste texto.

APÊNDICE

A

GRUPOS DE LIE

A.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção, daremos as definições básicas a respeito do cálculo elementar em variedades, a saber espaços topológicos de Hausdorff e com base enumerável onde cada ponto é centro do domínio de uma carta local e alguns tópicos a respeito de um caso particular de variedade, os chamados *grupos de Lie*. A confecção desse apêndice foi inspirada em (PICCIONE; TAUSK, 2008) e (LEE, 2003).

Definição A.1. Sendo M um conjunto, uma **carta local** em M é um par (U,ϕ), onde $U \subseteq M$, $\phi : U \to \phi(U)$, é uma bijeção e $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto.

Duas cartas locais (U,ϕ), (V,ψ), são ditas **compatíveis** se $U \cap V = \varnothing$ ou a **mudança de coordenadas**

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \tag{A.1}$$

é um difeomorfismo entre abertos de espaços euclidianos. A classe de diferenciabilidade, a menos de referido o contrário, será sempre assumida C^∞. Um **atlas diferenciável** consiste em um conjunto de cartas locais $\{(U_\alpha), V_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ duas-a-duas compatíveis de sorte que

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha. \tag{A.2}$$

Teorema A.2. Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ é um atlas diferenciável, então $\mathcal{A}$ induz uma única topologia de forma que, cada conjunto U_α seja aberto e ϕ_α, homeomorfismo, para cada $\alpha \in A$ e, além disso, tal topologia é dada explicitamente por

$$\tau_{\mathcal{A}} := \{V \subseteq M \,|\, \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ é aberto, para cada } \alpha \in A\} \tag{A.3}$$

Demonstração.
A família $\tau_{\mathcal{A}}$ é não-vazia, dado que, como, para cada $\alpha \in A$, $U_\alpha \cap \varnothing = \varnothing$ e $\alpha \in A$, $U_\alpha \cap M = U_\alpha$,

segue que $\varnothing$ e M pertencem a $\tau_{\mathcal{A}}$. A afirmação de que, cada U_α é aberto e φ_α é homeomorfismo segue do fato de que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$ se, e somente se $\varphi_\alpha(V)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$. A unicidade segue do fato que, sendo τ uma topologia que torna U_α aberto e φ_α homeomorfismo, mostremos que $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

($\subseteq$) Dado $V \in \tau$, temos que $V \cap U_\alpha \in \tau$, para cada $\alpha \in A$, de onde segue que $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, ou seja $V \in \tau_{\mathcal{A}}$ e, assim, $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$.

($\supseteq$) Reciprocamente, se $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, temos que, em particular, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, para cada $\alpha \in A$. Portanto, $V \cap U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \cdot (U_\alpha \cap V)$ é aberto em M, relativamente a topologia τ, para cada $\alpha \in A$. Assim, como $V = \cup_{\alpha \in A}(V \cap U_\alpha)$ é também um aberto da topologia τ, mostrando que $\tau_{\mathcal{A}} \subseteq \tau$, como queríamos. □

Assim, chamamos de **variedade diferenciável** um par $(M, \mathscr{A})$, onde M é um conjunto no qual está definido o atlas diferenciável $\mathscr{A}$.

Exemplo A.3. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ é definido como sendo $\frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$, onde $z \sim w$ se, e somente se $z = \lambda w$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, é uma variedade diferenciável de dimensão 1, com atlas dado por $\mathscr{A} = \{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$, onde, escrevendo $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ e denotando a classe de equivalência de z por $(z_0 : z_1)$, temos que $U_i := \{(z_0 : z_1) \,|\, z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$,

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U_0 &\to \mathbb{C} \\ (z_0 : z_1) &\mapsto \frac{z_1}{z_0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\to \mathbb{C} \\ (z_0 : z_1) &\mapsto \frac{z_0}{z_1} \end{aligned} \;. \tag{A.4}$$

Assim, temos que $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_0(z : 1) = 1/z$ e $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \varphi_1(1 : z) = z$ são difeomorfismos sobre suas imagens, de onde segue que $\mathscr{A}$ é de fato um atlas diferenciável.

Definição A.4. Sendo M uma variedade diferenciável e $N \subseteq M$, uma carta local (U, φ) é dita ser uma **sub-carta** para N se $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$, para algum $m \leq n$. Dizemos que N é uma subvariedade m-dimensional de M.

Definição A.5 (Espaço Tangente)**.** Sendo $p \in M$, o **espaço tangente** a M em p é o conjunto das classes de equivalência

$$T_pM = \{[\lambda] \,|\, \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ é diferenciável e } \lambda(0) = p\}, \tag{A.5}$$

onde $\lambda \sim \mu$ se, e somente se, $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$, para alguma carta local (U, φ).

A carta local (U, φ) da definição acima pode ser aproveitada para definir a bijeção

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : T_pM &\to \mathbb{R}^n \\ [\lambda] &\mapsto (\varphi \circ \lambda)'(0) \end{aligned} \;, \tag{A.6}$$

de onde segue que existe uma única estrutura de espaço vetorial em T_pM que torna $\overline{\varphi}$ um isomorfismo linear.

Definição A.6. Sendo M uma variedade diferenciável e $p \in M$, denotaremos por T_p^*M o dual do espaço tangente, o qual recebe o nome **espaço cotangente** a p.

Variedades de Banach

Na definição de variedade diferenciável que apresentamos no começo deste apêndice, podemos considerar, ao invés de $\mathbb{R}^n$, algum outro espaço de Banach. Nesse caso, é dito que M é **modelada** nesse espaço.

Definição A.7. Um espaço vetorial normado $\mathbb{E}$ é dito ser um **espaço de Banach** se cada sequência de Cauchy em $\mathbb{E}$ for convergente.

Sendo $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espaços de Banach e $U \subseteq \mathbb{F}$ aberto, uma aplicação $f : U \to \mathbb{F}$ é dita ser **diferenciável** em $p \in U$ se existe uma aplicação linear $df_p : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ de sorte que

$$f(p+v) = f(p) + df_p \cdot v + r(v).$$

Se a aplicação $p \in U \mapsto df_p \in \mathtt{Hom}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ for diferenciável, diremos que f é duas vezes diferenciável. Indutivamente, está bem definida a noção de diferenciabilidade C^∞ para aplicações em espaços de Banach.

Definição A.8. Sendo $\mathbb{H}$ um espaço de Banach e M um espaço topológico de Hausdorff e com base enumerável, diremos que M é uma **variedade de Banach** se, existe uma família de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to V_\alpha \subset \mathbb{H}$, onde cada U_α de sorte que:

1. U_α é aberto, para cada índice α e $M = \cup_\alpha U_\alpha$.
2. Dados $\alpha, \beta \in A$, a aplicação $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é diferenciável.

A.2 Grupos de Lie

Daremos uma descrição breve dos conceitos e notações relativos a teoria clássica de grupos e álgebras de Lie. Um **grupo de Lie** é um grupo G munido de uma estrutura diferenciável de sorte que a aplicação

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (\xi,\eta) &\mapsto \xi\eta^{-1} \end{aligned} \tag{A.7}$$

seja diferenciável. Denotamos por 1, como de costume, a unidade em um grupo de Lie. Um **homomorfismo de grupos de Lie** é um homomorfismo usual entre grupos de *Lie* que é diferenciável[1].

Exemplo A.9. O espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ e a esfera $\mathbb{S}^1$ são grupos de Lie, com a soma usual entre vetores e o produto, respectivamente.

[1] A condição de diferenciabilidade pode ser substituída, nesse contexto, pela continuidade de f, veja, por exemplo, em (LEE, 2003)

Exemplo A.10 (Grupo Linear)**.** Sendo $\mathbb{E}$ um espaço vetorial real, denotamos por $GL(\mathbb{E})$ o grupo dos automorfismos lineares de $\mathbb{E}$ com álgebra de Lie dada pelo espaço $\mathrm{Hom}(\mathbb{E})$ das aplicações lineares de E em si próprio.

Exemplo A.11. Sendo $\mathbb{E}$ um espaço vetorial real ou complexo, denotamos por $\mathrm{SL}(\mathbb{E})$ como o subgrupo de $GL(\mathbb{E})$ formado pelos isomorfirmos com determinante igual a 1. Além disso, o **grupo ortogonal**, $O(\mathbb{E})$ é o subgrupo de $GL(\mathbb{E})$ composto pelas aplicações ortogonais relativamente a um produto interno.

Exemplo A.12. A aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, dada por $\phi(t) = e^{it}$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

A.2.1 A Aplicação Exponencial

Nesta seção, introduziremos a aplicação exponencial de um grupo de Lie. Aqui, M denotará uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie abstrato e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais em M.

Definição A.13. Uma **álgebra de Lie** é um espaço vetorial real ou complexo $\mathfrak{v}$ munido de uma aplicação multi-linear $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ de sorte que

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x] + [z,[x,y]] = 0, \tag{A.8}$$

para cada $x,y,z \in \mathfrak{v}$. A relação (A.8) é conhecida como identidade de Jacobi.

Definição A.14. Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ em um grupo de Lie é dito ser invariante à esquerda se, para cada $g,h \in G$, seja válida a seguinte relação

$$dL_g(h) \cdot X(h) = X(gh), \tag{A.9}$$

onde $L_g : G \to G$ denota a multiplicação à esquerda em G.

Exemplo A.15. Sendo G um grupo de Lie, o conjunto $\mathfrak{g}$ formado pelos campos vetoriais invariantes à esquerda é uma álgebra de Lie, com o colchete de Lie usual. Lembremos que $\mathfrak{X}(G)$ pode ser identificado com o conjunto $\mathrm{Der}(G)$ das derivações em M[2], ou seja, operadores lineares do tipo $D : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ de modo que, para cada $f,g \in C^\infty(G)$, tenha-se que

$$D(fg) = D(f)g + fD(g). \tag{A.10}$$

Com essa identificação, dados dois campos vetoriais $X,Y \in \mathfrak{X}(G)$, o colchete de Lie entre X e Y é o campo vetorial

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)). \tag{A.11}$$

[2] Esse fato é válido, não apenas no contexto de grupos de Lie, mas também em variedades diferenciáveis abstratas, vide, por exemplo, (LEE, 2003)

Definição A.16. Sendo $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $X \in \mathfrak{X}(M)$, uma **curva integral** de X é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to M$ de modo que, para cada $t \in I$,

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)). \tag{A.12}$$

Teorema A.17. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então para cada $p \in M$, existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, com $0 \in I$, de modo que, em I está definida a única curva integral $\alpha : I \to M$ de X tal que $\alpha(0) = p$. Dizemos que α é a única curva integral de X passando por p.

Em um grupo de Lie G, todo campo de vetores $X \in \mathfrak{g}$ invariante à esquerda é completo. Assim, temos que as curvas integrais de X estão definidas em todo $\mathbb{R}$. Em particular, podemos definir a chamada aplicação **exponencial** de X.

Definição A.18. Sendo G um grupo de Lie, a aplicação exponencial $\texttt{exp} : \mathfrak{g} \to G$ é definida por

$$\texttt{exp}(X) = \gamma_X(1), \tag{A.13}$$

onde $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ denota a curva integral de X passando por $e \in G$.

APÊNDICE

B

ÁLGEBRA EXTERIOR

O objetivo desse apêndice é introduzir as definições e alguns resultados a respeito do chamado *produto wedge* entre dois vetores, cuja aparição se deu, em particular, na definição do fibrado determinante. Seja V um espaço vetorial real e $V^k = V \times \cdots \times V$ o produto cartesiano, que também tem estrutura de espaço vetorial. Uma função $f : V^k \to \mathbb{R}$ é dita linear na i-ésima variável se, para cada v_j, com $j \neq i$, a aplicação restrição $T : V \to \mathbb{R}$ é linear. A confecção desse apêndice foi inspirada em (LIMA, 2017).

Definição B.1. Dizemos que $f : V^k \to \mathbb{R}$ é k-linear se f é linear em cada uma de suas coordenadas.

Um tensor de ordem k é uma função multi-linear $f : V^k \to \mathbb{R}$. Denotaremos por $L_k(V)$ o conjunto dos tensores de ordem k em V. Em particular, se $k = 1$, $L_1(V) = V^*$ e o caso $k = 2$ representa o conjunto das formas bilineares de V.

Observação B.2. $L_k(V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a soma e produto por escalar (somas em cada coordenadas).

Por conta disso, se V tem dimensão finita, procuremos uma base para $L_k(V)$, a fim de se obter sua respectiva dimensão.

Dado um conjunto $I = \{1, \cdots, n\}$, uma $k-$lista é uma k-upla $(i_1, \cdots, i_k)$ de elementos de I. Nesse contexto, temos que, como consequência do respectivo resultado de álgebra linear que, se $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base de V. Se $f, g : V^k \to \mathbb{R}$ são k-tensores que coincidem em toda k-lista de B, então $f = g$.

Proposição B.3. O conjunto A formado pelas aplicações $\{\phi_I : I\ k\text{-lista de } 1, ..., n\}$ é uma base de $L_k(V)$. Aqui, ϕ_I denota o único tensor sobre V de sorte que $\phi_I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \delta_{IJ}$ e, assim, $\mathtt{dim}(L_k(V)) = n^k$.

A existência e unicidade do tensor ϕ_I são garantidas em virtude do argumento exposto no parágrafo prévio. Basta analisar no conjunto de todas as k-listas de uma base arbitrária e lembrar do resultado da base do dual do curso de álgebra linear(que corresponde ao caso $k = 1$).

B.1 Produto Tensorial

Se f é um k-tensor e g é um l-tensor, então, o $(k+l)$-tensor dado por

$$f \otimes g(v_1, \cdots, v_{k+l}) = f(v_1, \cdots, v_k) \cdot g(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}),$$

é dito ser o **produto tensorial** de f por g e, como é de fácil verificação que $f \otimes g$ é $(k+l)$-linear, está bem definido.

Teorema B.4. Se f, g, h são tensores em V, não necessariamente de mesma ordem, então:

1. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
2. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$
3. $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$ e a respectiva lei distributiva à esquerda
4. Dada uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V e I uma k-lista de $1, \cdots, n$, então

$$\phi_I = \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_k}.$$

Em geral o produto tensorial não é comutativo.

Definição B.5. Sendo V um espaço vetorial, um k-tensor é dito ser **alternado** se $f(v_1, \cdots, v_k) = 0$ sempre que $v_i = v_{i+1}$, para algum i. Todo 1-tensor é, por definição, alternado.

Nesse contexto, defina $A_k(V) \leq L_k(V)$ como o conjunto dos k-tensores alternados. Ainda, $f : V^k \to \mathbb{R}$ é um k-tensor alternado se, e somente se, para cada permutação $\sigma \in S_k$

$$\sigma f(v_1, \cdots, v_k) := f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathtt{sgn}(\sigma) \cdot f(v_1, \cdots, v_k).$$

Vamos agora investigar a dimensão do conjunto dos k-tensores em um espaço de dimensão finita V. Essa pergunta é particularmente interessante para o caso $k \leq n = \mathtt{dim}(V)$, dado que caso contrário A_k tem dimensão zero. Afirmamos que, no caso $1 \leq k \leq n$, então o conjunto das ψ_I, indexadas no conjunto das k-listas ascendentes, ou seja, aquelas da forma $\{i_1 < \cdots < i_k\}$. Aqui, ψ_I denota o único tensor alternado tal que

$$\psi_I(e_J) = \delta_{IJ}.$$

Como consequência, temos que $\mathtt{dim}(A_k(V)) = \binom{n}{k}$

B.2 Produto Exterior

Proposição B.6. Sendo $\varphi : \mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ uma aplicação k-linear alternada, com $n := \mathtt{dim}(\mathbb{E})$, são equivalentes:

1. Existe uma base $\{e_1,\cdots,e_n\}\subseteq\mathbb{E}$ de sorte que o conjunto

$$\{\varphi(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})\,|\,1\leq j_1<\cdots<k_k\leq n\} \tag{B.1}$$

   seja uma base de $\mathbb{F}$.

2. $\mathtt{ran}(\varphi)$ gera $\mathbb{F}$, $\mathtt{dim}(\mathbb{F})=\binom{n}{k}$ e a afirmação (1) é válida para toda base de $\mathbb{E}$.

Uma tal aplicação φ que cumpre as condições acima é dita ser um **produto exterior**, com $\mathbb{F}$ sendo uma ***k*-ésima potência exterior** de $\mathbb{E}$.

Proposição B.7. Sejam $\varphi : \mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ e $\widetilde{\varphi} : \mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}\to\widetilde{\mathbb{F}}$ dois produtos exteriores. Então, existe um único isomorfismo $\mathfrak{f}:\mathbb{F}\to\widetilde{\mathbb{F}}$ de sorte que

$$\mathfrak{f}\circ\varphi=\widetilde{\varphi}. \tag{B.2}$$

O significado da última proposição, mais precisamente da equação (B.2), é que produtos exteriores, ao existirem, são únicos a menos de isomorfismos, de onde segue que podemos introduzir uma notação única para tais aplicações e passar a nos referir a elas como **o produto exterior**.

Sendo $f\in A_k(V)$ e $g\in A_l(V)$, $f\otimes g$ não necessariamente é um tensor alternado(veja, por exemplo que $f\otimes f$ não é). Entretanto, temos a intenção de definir adequadamente um produto em $A_k(V)$. Considere, pois, $S_{k,l}\subseteq S_{k+l}$ como o conjunto das permutações $\sigma:\mathbb{N}_{\leq k+l}\to\mathbb{N}_{\leq k+l}$ de sorte que

$$\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)\quad \text{e}\quad \sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l).$$

Definição B.8. Definimos o **produto exterior** de f por g por:

$$f\wedge g\,(v_1,\cdots,v_{k+l}) := \sum_{\sigma\in S_{k,l}} \mathtt{sgn}(\sigma)\cdot\sigma f(v_1,\cdots v_k)\cdot\sigma g(v_{k+1}\cdots,v_{k+l})$$

A afirmação é que $f\wedge g$ é um tensor alternado de ordem $k+l$, ou seja, pertence à $A_{k+l}(V)$ e, assim, o produto exterior está bem definido. Em particular, se E é um espaço vetorial e $f_j\in E^*$, então

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_s(v_1,\cdots,v_n)=\mathtt{det}(f_i(v_j)).$$

Proposição B.9. Sejam f,g tensores alternados de ordens k e l respectivamente. Então:

$$f\wedge g=(-1)^{k+l}g\wedge f$$

Como consequência imediata, temos que se k é ímpar e $f \in A_k(V)$, então $f \wedge f = 0$. Ainda, é possível mostrar que sendo dada $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V e $\phi_1 \cdots, \phi_n$ sua respectiva base dual, se $I = (i_1, \cdots, i_k)$ é uma k-lista ascendente de $\mathbb{N}_{\leq n}$ com ψ_I seu k-tensor correspondente, então

$$\psi_I = \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_k}.$$

REFERÊNCIAS

ABSIL, P.-A.; MAHONY, R.; SEPULCHRE, R. Riemannian geometry of grassmann manifolds with a view on algorithmic computation. **Acta Applicandae Mathematica**, Springer, v. 80, n. 2, p. 199–220, 2004. Citado na página 19.

AGOSTINI, D.; FEVOLA, C.; MANDELSHTAM, Y.; STURMFELS, B. **KP Solitons from Tropical Limits**. 2021. Citado na página 81.

BREEN, J. Fredholm operators and the family index. **Department of Mathematics, Northwestern University**, 2016. Citado na página 39.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado nas páginas 39, 48 e 66.

CAREY, A.; HURST, C.; O'BRIEN, D. Automorphisms of the canonical anticommutation relations and index theory. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 360–393, 1982. Citado na página 77.

COUTO, I. T. Mergulhos clássicos de variedades grassmannianas: Uma visão geral. **Revista Matemática Universitária**, v. 1, 2021. Citado nas páginas 19 e 24.

DOUGLAS, R. **Banach Algebra Techniques in Operator Theory**. Springer New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781461216568. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=NJkRBwAAQBAJ>. Citado nas páginas 39, 44, 50 e 63.

HARNAD, J.; BALOGH, F. **Tau Functions and their Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2021. Citado nas páginas 65 e 79.

HATCHER, A. Vector bundles and k-theory. **Im Internet unter http://www. math. cornell. edu/~ hatcher**, 2003. Citado na página 35.

HELGASON, S. **Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces**. [S.l.]: Academic press, 1979. Citado na página 30.

HUCKLEBERRY, A.; WURZBACHER, T. **Infinite dimensional Kähler manifolds**. [S.l.]: Birkhäuser, 2012. v. 31. Citado na página 74.

KASMAN, A. **Glimpses of soliton theory: the algebra and geometry of nonlinear PDEs**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010. v. 54. Citado na página 19.

LAU, A. L. M. **On the Sato-Segal-Wilson Grassmannian and the infinite Grassmannian of type $I_{+,-}$**. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 76.

LEE, J. **Introduction to Smooth Manifolds**. Springer, 2003. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387954486. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=eqfgZtjQceYC>. Citado nas páginas 22, 83, 85 e 86.

LIMA, E. L. **Álgebra Exterior**. [S.l.]: Impa, 2017. Citado na página 89.

MELROSE, R. Functional analysis lecture notes for 18.102. **Cambridge**, v. 6, p. 2014, 2010. Citado na página 39.

MILNOR, J. Remarks on infinite-dimensional lie groups. In: **Relativity, groups and topology. 2**. [S.l.: s.n.], 1984. Citado na página 74.

MILNOR, J.; STASHEFF, J. Characteristic classes.(am-76). **Annals of Mathematics Studies**, JSTOR, v. 76, 1974. Citado na página 24.

MOVASATI, H. A course in complex geometry and holomorphic foliations. **IMPA**, v. 1, p. 184, 2021. Citado na página 37.

NEEB, K.-H. *et al.* On a theorem of s. banach. **Journal of Lie Theory**, Citeseer, v. 7, p. 293–300, 1997. Citado na página 77.

OLIVEIRA, C. R. D. **Introdução à análise funcional**. [S.l.]: Impa, 2001. Citado nas páginas 39 e 42.

PALAIS, R. S. Homotopy theory of infinite dimensional manifolds. **Topology**, Elsevier, v. 5, n. 1, p. 1–16, 1966. Citado na página 77.

PICCIONE, P.; TAUSK, D. V. **A student's guide to symplectic spaces, Grassmannians and Maslov index**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008. v. 1. Citado nas páginas 19 e 83.

PRESSLEY, A.; SEGAL, G. **Loop Groups**. Clarendon Press, 1988. (Oxford mathematical monographs). ISBN 9780198535614. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MbFBXyuxLKgC>. Citado nas páginas 17, 37 e 65.

SEGAL, G.; WILSON, G. Loop groups and equations of kdv type. **Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, Springer, v. 61, n. 1, p. 5–65, 1985. Citado na página 65.

SEMLALI, A. **Grassmanniennes de dimension infinie, groupes de lacets et opérateur vertex**. Tese (Theses) — Université Paul Verlaine - Metz, dez. 1996. Disponível em: <https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777159>. Citado na página 65.

SIMON, B. Notes on infinite determinants of hilbert space operators. **Advances in Mathematics**, v. 24, n. 3, p. 244–273, 1977. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870877900573>. Citado nas páginas 48 e 50.

WELLS, R. O.; GARCÍA-PRADA, O. **Differential analysis on complex manifolds**. [S.l.]: Springer New York, 1980. v. 21980. Citado na página 32.

ZINGER, A. Notes on vector bundles. In: . [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 33.