UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Integrabilidade em sistemas planares e existência de ciclos limites para o sistema de Rayleigh generalizado

Maíra Duran Baldissera

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Maíra Duran Baldissera

Integrabilidade em sistemas planares e existência de ciclos limites para o sistema de Rayleigh generalizado

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

USP – São Carlos
Outubro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

D948i

Duran Baldissera, Maíra
Integrabilidade em sistemas planares e existência de ciclos limites para o sistema de Rayleigh generalizado / Maíra Duran Baldissera; orientadora Regilene Oliveira. -- São Carlos, 2020.
94 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Sistemas diferenciais polinomiais planares. 2. curvas algébricas invariantes. 3. integrabilidade Darbouxiana. 4. ciclos limites. 5. compactificação de Poincaré. I. Oliveira, Regilene, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Maíra Duran Baldissera

Integrability in planar systems and existence of limit cycle in the generalized Rayleigh systems

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

USP – São Carlos
October 2020

Dedico este trabalho às mulheres da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Não existe um dia em que me considere uma pessoa de pouca sorte. Todo dia, tenho, no mínimo, uma pessoa maravilhosa me ajudando nessa tarefa de 23 anos (atualmente) que é me tornar um ser humano e realizar meus sonhos.

Obviamente, escrever este trabalho foi atividade comunitária. Seria impossível, no entanto, listar todas as pessoas e agradecer devidamente sua colaboração. Agradecerei, portanto, àqueles que tiveram participação mais marcante ou contínua nesse processo.

Agradeço, primeiramente, a uma das minhas professoras de PIC, Roseli. Sem ela, não saberia que seria possível transformar minha brincadeira favorita no meu ganha pão. Pensando ainda nos colegas de PIC, não poderia deixar de citar Danielle e Caren. Da perua da OBMEP para vida, essas meninas de riso solto são, mais que exemplos, pilares.

Agradeço ao professor de Física e Química do Ensino Médio, Laurentino, portador da biblioteca e personalidade mais empolgantes da minha adolescência. Não tenho palavras para descrever o entusiasmo que esse professor embutiu na minha vida acadêmica, muito menos as lições diárias de gentileza e humildade.

Agradeço aos professores da Matemática, Aurichi e Grossi, os semi-alunos que me ensinaram, incentivaram e fizeram rir sem moderação. Agradeço, também, ao Monitor de todas as matérias, Hugo, amigo e mentor das manhãzinhas, que nunca vê minhas recomendações de anime, mas ouve todas as minhas reclamações.

Agradeço aos meus amigos algebristas, Lucas, Léo e Edu, grandes entusiastas da arte ser bobo, arte que não vivo mais sem. Agradeço, também, ao amigo comunista, Caio, que esteve ao meu lado em muitos momentos importantes, ajudando-me a descobrir novas facetas da minha personalidade, bem como a aproveitar melhor mais aspectos da vida (com colaboração especial da médium mística Violeta).

Agradeço à minha namorada Fernanda pela paciência e carinho infinitos, alegria garantida de todos os dias.

Agradeço imensamente à minha orientadora Regilene, uma profissional em quem deposito grande admiração, tanto pela dedicação quanto pela excelência em tudo que faz, sem deixar de lado o aspecto humano das interações aluno-orientador. Sem dúvida, ganhei na loteria dos orientadores.

Agradeço, acima de tudo, à minha família. Ao meu pai, pelo jeito leve, sem preconceitos e afetuoso de encarar a vida. À minha tia Marilda, por ter sido uma segunda mãe em muitos momentos (e por não ter votado no Bolsonaro). Agradeço, claro, à minha mãe, mulher extremamente inteligente e determinada, que me ensinou, do jeito mais amoroso possível, a andar com minhas próprias pernas.

Agradeço à CAPES e ao PICME pelo financiamento do projeto de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Total ausência de humor torna a vida impossível.”
(Gabrielle Colette)

RESUMO

BALDISSERA, D. M. **Integrabilidade em sistemas planares e existência de ciclos limites para o sistema de Rayleigh generalizado**. 2020. 91 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Esta dissertação esta dividida em duas partes, ambas relacionados ao problema do foco centro e a ciclicidade em sistemas diferenciais planares, temas que pretendemos investigar em futuro próximo. Na primeira parte, a existência de uma integral primeira Darbouxiana em sistemas diferenciais polinomiais planares é investigada. O estudo realizado foi aplicado em um exemplo retirado da classificação dos sistema quadráticos com elipse invariantes. Na segunda parte da dissertação, investigamos a existência de ciclos limites no sistema diferencial de Rayleigh generalizado. Em (LINS; MELO; PUGH, 1977) os autores afirmam que este sistema possui um único ciclo limite. No entanto a prova apresentada por eles traz algumas falhas. Neste texto apresentamos uma prova completa e correta da existência e unicidade de ciclo limite para esta classe de sistemas.

Palavras-chave: Sistema diferencial polinomial planar; curva algébrica invariante; integrabilidade Darbouxiana; ciclo limite; compactificação de Poincaré.

ABSTRACT

BALDISSERA, D. M. **Integrability in planar systems and existence of limit cycle in the generalized Rayleigh systems**. 2020. 91 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This dissertation is divided in two parts, both of them are related with the center problem and the ciclicity in planar differential systems, subjects that we intent to investigate in short term. In the first part of this dissertation, the existence of a Darboux first integral in planar polynomial differential systems is investigated. Such study is applied in an example took from the classification of quadratic systems with invariant ellipses. In the second part of this dissertation, we investigate the existence of limit cycles in the generalized Rayleigh systems. In (LINS; MELO; PUGH, 1977) the authors stated that such system has a unique limit cycle. But the proof has some gaps. In this work we present a complete and correct proof of the existence and uniqueness of limit cycle for such class of systems.

Keywords: Planar polynomial differential system; invariant algebraic curve; Darboux integrability; limit cycle; Poincaré compactification.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17

2 SISTEMAS DIFERENCIAIS PLANARES POLINOMIAIS 19
2.1 Conceitos e definições iniciais 19
2.1.1 Sistemas polinomiais 19
2.1.2 Curvas integrais e invariantes 24
2.1.3 Fatores integrantes 24
2.1.4 Curvas algébricas invariantes 26
2.1.5 Fatores exponenciais 27
2.2 Teoria Darbouxiana de integrabilidade 29
2.3 Teorema de Kapteyn-Bautin 33
2.4 Lema de Darboux 35
2.4.1 Aplicações do Lema de Darboux 37
2.5 O problema inverso 44
2.6 Compactificação de Poincaré 45
2.6.1 Cartas locais 45
2.7 Blow up 50
2.7.1 Técnica do blow up homogêneo 51

3 UNICIDADE DE CICLOS LIMITES NO SISTEMA DE RAYLEIGH GENERALIZADO 61
3.1 Resultados auxiliares 62
3.2 Polígono de Newton 64
3.3 Campos vetoriais rotacionados 69
3.3.1 Definições de campos rotacionados 69
3.3.2 Comportamento global de ciclos limites 74
3.4 Existência e unicidade de ciclos limites em equações de Liénard generalizadas 77
3.5 Sistema de Rayleigh generalizado 84

REFERÊNCIAS 89

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

A teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO's) teve inicio no século XVII com os trabalhos de Newton e Leibniz sobre o cálculo diferencial. Ao longo dos anos, o desenvolvimento da teoria de equações diferenciais ordinárias tem contribuído com a investigação de muitos problemas em muitas áreas diferentes do conhecimento, por exemplo, fenômenos físicos, interação de espécies, transações comerciais e diversas situações em engenharia. Juntamente com a evolução dessa teoria e sua aplicação em muitas e distintas áreas, cresceu a dificuldade de encontrar e estimar as soluções para tais equações. Este fato motivou o surgimento da teoria qualitativa das equações diferenciais, introduzida por Poincaré no século XIX. A teoria qualitativa consiste em deduzir o comportamento das soluções de uma EDO sem encontrar uma solução para ela explicitamente, apenas conhecendo certas propriedades dos campos vetoriais que as definem. Com o desenvolvimento da teoria qualitativa dos sistemas diferenciais, nova gama de problemas surgiu. Entre eles, podemos mencionar os dois problemas mais investigados na teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos no plano, o 16º problema de Hilbert e o Problema do Foco-Centro. O XVI Problema de Hilbert discute o número de ciclos limites em sistemas polinomiais planares, e o Problema do Foco-Centro busca caracterizar os sistemas diferenciais não lineares que têm pontos singulares do tipo centro. Embora muitos pesquisadores estejam trabalhando nestes problemas, ambos não têm uma resposta completa e simples, portanto continuam abertos a investigações por famílias particulares de sistemas na expectativa de alcançar a compreensão clara dos mecanismos que possam resolvê-los.

Nesta dissertação tratamos de dois temas relacionados aos problemas mencionados. Investigamos a integrabilidade Darbouxiana em sistemas planares e a existência e unicidade de ciclos limites em sistemas de Rayleigh generalizados.

A dissertação está dividida em duas partes (dois capítulos). No Capítulo 2, estudamos resultados sobre a existência de curvas algébricas invariantes e fatores exponenciais em sistemas diferenciais planares. Importantes resultados encontrados na literatura sobre este tema foram estudados, resultados que garantem condições para que um dado sistema tenha uma integral Darbouxiana, assim como propriedades geométricas desses sistemas. Usando as ferramentas investigadas neste capítulo demonstramos a existência de integral primeira para o sistema quadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a + gx^2 \\ \dot{y} &= -a/g - x^2 + gxy - y^2, \end{aligned}$$

com $ag < 0$, encontrado em (OLIVEIRA *et al.*, 2020), onde os autores classificam os sistemas

diferenciais planares com elipses invariantes. Ainda neste capítulo estudamos outras ferramentas da Teoria qualitativa dos sistemas planares como a compactificação de Poincaré e *blow up*.

No Capítulo 3 investigamos o sistema de Rayleigh generalizado. Este sistema é um caso participar do sistema de Liénard. Ele foi estudado por diversos pesquisadores, por exemplo, (ZHIFEN, 1986). O sistema de Rayleigh aparece, entre outras aplicações, na modelagem de fenômemos acústicos. Em (LINS; MELO; PUGH, 1977) os autores afirmam que o sistema de Rayleigh generalizado (sistema (3.1) desta dissertação) admite um único ciclo limite. No entanto, a prova dada em (LINS; MELO; PUGH, 1977) apresenta duas falhas, a primeira delas é no sinal do parâmetro do sistema e sua relação com a estabilidade do ponto de equilíbrio finito e a segunda é na prova da unidade do ciclo limite. Nesta dissertação justificamos porque chamamos de falhas e apresentamos prova correta e completa para a existência e unicidade de ciclo limite no sistema de Rayleigh generalizado, com o seguinte teorema.

Teorema. O sistema diferencial de Rayleigh generalizado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a(x^{2n} - 1)x \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

tem um único ciclo limite se $0 < |a| \neq 2$. O ciclo limite é estável se $a < 0$ e instável se $a > 0$.

CAPÍTULO

2

SISTEMAS DIFERENCIAIS PLANARES POLINOMIAIS

Neste capítulo, apresentamos uma introdução ao estudo dos sistemas diferenciais planares polinomiais, dando ênfase em temas relacionados à integrabilidade Darbouxiana. Para esse estudo, baseamo-nos em (LLIBRE, 2004), complementando o estudo com as referências nele apresentadas. Nosso objetivo, é percorrer os resultados conhecidos na literatura sobre integrabilidade para sistemas polinomiais, fornecendo ferramentas para o tratamento qualitativo desses sistemas, e, por conseguinte, facilitando o esboço de seus retratos de fase. Nesse intuito, começamos enunciando definições e resultados da Teoria Qualitativa das EDO's, depois citamos alguns teoremas importantes relacionados a integrabilidade e, por fim, apresentamos as técnicas do *blow up* e da compactificação de Poincaré, úteis na classificação de singularidades bem como na visão global das órbitas dos sistemas.

2.1 Conceitos e definições iniciais

2.1.1 Sistemas polinomiais

As definições e resultados desta subseção podem ser encontrados em (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2013) e são necessários para a introdução dos resultados posteriores deste trabalho. Alguns detalhes e provas são omitidos sem prejuízo, mas são dados em (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2013). Escrito isso, iniciamos com uma definição.

Definição 2.1.1. Um *sistema diferencial planar polinomial* ou *sistema polinomial* é um sistema diferencial na forma

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x,y) \tag{2.1}$$

onde $P, Q \in \mathbb{R}(x,y)$. O *grau m* do sistema diferencial (2.1) será o grau máximo entre P e Q.

Associado a (2.1), temos o campo de vetores polinomial

$$\mathscr{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

e a 1-forma analítica

$$\omega = P(x,y)dy - Q(x,y)dx.$$

A existência de soluções para o sistema (2.1), para o campo de vetores $\mathscr{X}$ ou, equivalentemente, para a 1-forma ω, está garantida pelo Teorema da Existência e Unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Uma solução para o sistema (2.1) é uma função analítica $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ (sendo U o intervalo aberto máximo onde ϕ está bem definida) tal que $\frac{d\phi(t)}{dt} = \mathscr{X}(\phi(t))$, para todo $t \in U$.

Definição 2.1.2. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ uma solução de (2.1). Então, $\{\phi(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in U\}$ é uma *trajetória, curva integral* ou *órbita* do sistema (2.1) ou do campo de vetores $\mathscr{X}$.

As trajetórias ou órbitas do sistema (2.1) podem ser de três tipos, a menos de homeomorfismo, topologicamente equivalente a um ponto (órbitas singulares ou pontos críticos), a um intervalo de reta (trajetórias regulares) ou a uma circunferência (órbitas periódicas).

Definição 2.1.3. Um ciclo limite do sistema (2.1) é uma órbita periódica fechada isolada deste.

Definição 2.1.4. Um sistema Hamiltoniano em $\mathbb{R}^2$ é um sistema da forma

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y),$$

$$y' = \frac{-\partial H}{\partial x}(x,y),$$

onde $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ chamada *função Hamiltoniana*.

Exemplo 2.1.1. O oscilador não amortecido é dado por

$$x' = y$$

$$y' = -kx$$

onde $k > 0$. Uma função Hamiltoniana para o sistema é

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2.$$

A seguir, introduzimos uma importante definição, a qual auxiliará na simplificação dos sistemas de equações diferenciais ordinárias (ou sistemas de EDO's).

Definição 2.1.5. Duas matrizes reais A e B são *equivalentes* se existe uma matriz invertível T tal que $A = TBT^{-1}$.

E, então, ainda com intuito de simplificar sistemas de EDO's, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. Se T é uma matriz 2×2 invertível e $X(t)$ é solução de $X' = AX$, então $Y(t) = TX$ é solução de $Y' = TAT^{-1}Y$.

Observamos que, se duas matrizes A e B são equivalentes, então existe uma transformação linear que leva soluções da EDO $X' = AX$ nas soluções de $X' = BX$. Sendo assim, vemos que sistemas com matrizes equivalentes têm soluções de "comportamento"semelhante; no máximo, diferenciam-se por rotação, dilatação ou translação.

Além disso, uma matriz 2×2 invertível, a menos de mudança de base, é da forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

com $\beta \neq 0$ e $\lambda.\mu \neq 0$. Disso, segue que estudar o retrato de fase dos sistemas 2×2 dados pelas matrizes acima é suficiente para entendermos o comportamento de todos os sistemas 2×2 reais invertíveis.

No primeiro caso, temos um centro ($\alpha = 0$) ou espirais ($\alpha \neq 0$), e suas soluções têm forma geral

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} cos\beta t \\ -sen\beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} cos\beta t \\ sen\beta t \end{pmatrix}.$$

Logo,

- se $\alpha = 0$, temos como soluções círculos concêntricos, veja a Figura 1;
- se $\alpha > 0$, as soluções são espirais que divergem da origem conforme $t \to \infty$;
- se $\alpha < 0$, as soluções são espirais que convergem para a origem conforme $t \to \infty$.

No segundo caso, podemos ter $\lambda \neq \mu$, então seguem as três possibilidades

- $\mu < 0 < \lambda$ (sela): sua solução tem forma geral

  $$X(t) = \alpha e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

  assim, essa tende a ∞ na direção do eixo y (reta instável) conforme $t \to \infty$ e tende a ∞ na direção do eixo x (reta estável) conforme $t \to -\infty$.

- $\mu < \lambda < 0$ (atrator): aqui, a solução tem mesma forma geral. Contudo, todas as soluções tendem à origem tangenciando o eixo x se $t \to \infty$, veja a Figura 1.

- $0 < \mu < \lambda$ (repulsor): esse caso é análogo ao anterior, exceto pelo fato das soluções se afastarem da origem se $t \to \infty$, veja a Figura 1.

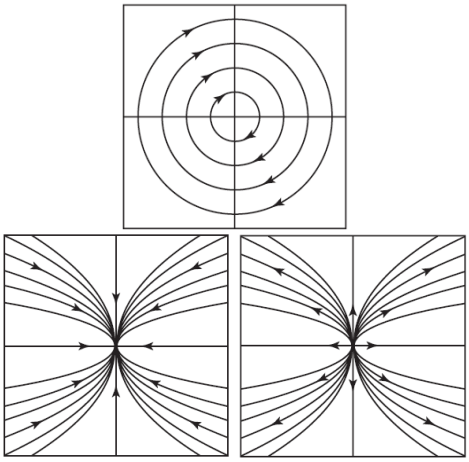

Figura 1 – Exemplo de centro, nó atrator e nó repulsor.

No caso de $\lambda = \mu \neq 0$, as soluções são retas passando pela origem. Por fim, com um sistema dado pela terceira e última matriz, temos a seguinte solução geral:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda > 0$, $X(t)$ se afasta da origem quando $t \to \infty$ e aproxima-se se $\lambda < 0$, sempre tangenciando o eixo x.

Teorema 2.1.2 (Teorema da existência e unicidade)**.** Considere o problema de valor inicial

$$X' = F(X),\ X(t_0) = X_0, \tag{2.2}$$

onde $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in C^1$. Então, existe uma solução desse problema de valor inicial, além disso, essa solução é única. Mais precisamente, existe $a > 0$ e uma única solução

$$X : (t_0 - a, t_0 + a) \to \mathbb{R}^n,$$

da equação diferencial, satisfazendo $X(t_0) = X_0$.

Teorema 2.1.3. Seja $A(t)$ uma família contínua de matrizes $n \times n$ definidas para $t \in [\alpha, \beta]$. Então, o problema de valor inicial,

$$X' = A(t)X,\ X(t_0) = X_0,$$

tem uma única solução que está definida em todo o intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.1.6. Seja $\phi_t(X_0)$ uma solução que satisfaz a condição inicial $\phi_{t_0}(X_0) = X_0$ e tem domínio $\mathbb{R}$. A função $\phi(t, X_0) = \phi_t(X_0)$ é chamada *fluxo local* da equação diferencial.

Definição 2.1.7. Suponha que $X' = AX$ e $X' = BX$ têm fluxos ϕ^A e ϕ^B, respectivamente. Os dois sistemas são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$\phi^B(t, h(X_0)) = h(\phi^A(t, X_0)),$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ e para todo $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Tal homeomorfismo h é chamado uma conjugação.

Definição 2.1.8. Um ponto P_0 do plano é dito regular quando o campo de vetores (2.1) avaliado em P_0 é não nulo. Se P_0 é não regular, P_0 é uma singularidade, ou um ponto crítico, ou, ainda, um ponto singular.

Definição 2.1.9. Uma matriz A é dita *hiperbólica* se todos os seus autovalores têm partes reais não nulas. Também dizemos que o sistema $X' = AX$ é hiperbólico.

Uma singularidade P_0 do sistema $X' = F(X)$, com $F \in C^1$, é hiperbólica quando $DF(X(P_0))$, a matriz jacobiana de $F(X)$ em P_0, é uma matriz hiperbólica, caso contrário, P_0 é uma singularidade não hiperbólica.

Estamos, então, em condições de classificar sistemas hiperbólicos em grupos de conjugação por meio do seguinte resultado.

Teorema 2.1.4. Sejam A_1 e A_2 duas matrizes hiperbólicas. Então, os sistemas lineares $X' = A_jX$ são conjugados se, e somente se, têm o mesmo número de autovalores com partes reais negativas.

Teorema 2.1.5. Considere $X' = F(X)$ nas hipóteses do Teorema da Existência e Unicidade. Suponha que $X(t)$ é uma solução de (2.2) definida em $[t_0, t_1]$, com $X(t_0) = X_0$. Então, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de X_0 e uma constante K tais que, se $Y_0 \in U$, existe uma única solução $Y(t)$ também definida em $[t_0, t_1]$ com $Y(t_0) = Y_0$ tal que

$$|Y(t) - X(t)| \leq K|Y_0 - X_0|e^{K(t-t_0)},$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Corolário 2.1.1 (Dependência contínua das condições iniciais)**.** Seja $\phi(t, X)$ o fluxo do sistema $X' = F(X)$, onde $F \in C^1$. Então, ϕ é contínua em X.

Teorema 2.1.6. Considere o sistema $X' = F(X)$ onde $F \in C^1$. Então, $\phi(t, X)$ é C^1.

Teorema 2.1.7 (Hartman-Grobman)**.** (DURMOTIER; LLIBRE; ARTéS, 2006) Um campo vetorial X, numa singularidade hiperbólica P_0, é localmente C^0-conjugado a sua parte linear $DX(P_0)$.

Definição 2.1.10. O conjunto de todos os pontos que são pontos limites de uma dada solução quando $t \to \infty$ (e quando $t \to -\infty$) é chamado ω-limite (respectivamente α- limite). Em outras palavras, $P \in \omega$-limite da solução ϕ se, e só se, existe uma sequência $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t) \to P$ quando $t_n \to \infty$, e $P \in \alpha$-limite da solução ϕ se, e só se, existe uma sequência $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t) \to P$ quando $t_n \to -\infty$.

No que segue, assuma Δ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\mathscr{X}$ um campo de vetores de classe C^r, $r \geq 1$, definido em $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Denotamos por γ_P^+ a semi-órbita positiva de $\mathscr{X}$ por P, isto é, $\phi_t(P)$ para $t \geq 0$, sendo $\phi_0(P) = P$.

Teorema 2.1.8 (Poincaré-Bendixson)**.** (DURMOTIER; LLIBRE; ARTéS, 2006) Seja $\phi(t)$ uma curva integral de $\mathscr{X}$ passando por p definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ está contida num conjunto compacto $K \subset \Delta$. Assuma que o campo vetorial $\mathscr{X}$ tem, no máximo, um número finito de singularidades em K. Então, uma das afirmações é satisfeita.

(i) Se $\omega(p)$ contém apenas pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

(ii) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ é formado por um conjunto de órbitas de $\mathscr{X}$, cada uma das quais tende a um dos pontos singulares em $\omega(p)$ conforme $t \to \pm\infty$.

(iii) Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ tem um único ponto singular.

2.1.2 Curvas integrais e invariantes

Feita essa breve síntese dos principais resultados introdutórios da Teoria Qualitativa da EDO's, podemos iniciar o estudo da integrabilidade Darbouxiana, o qual está dividido nas quatro próximas seções.

Definição 2.1.11. (DARBOUX, 1878) Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $L \subset \mathbb{R}^2$ de medida nula. O campo de vetores $\mathscr{X}$ ou, equivalentemente, sistema (2.1) é dito *integrável* em $U \setminus L$, se existe uma função analítica não constante $H : U \setminus L \to \mathbb{R}$, chamada *integral primeira* do sistema em $U \setminus L$, constante em todas as curvas soluções $(x(t), y(t))$ de $\mathscr{X}$ contidas em $U \setminus L$. Em outras palavras, H é uma integral primeira de $\mathscr{X}$ em $U \setminus L$ se, e só se,

$$\mathscr{X} H = 0, \qquad \text{ou} \qquad \omega \wedge dH = 0$$

em $U \setminus L$.

Exemplo 2.1.2. O sistema polinomial

$$\dot{x} = x(ax + c), \qquad \dot{y} = y(2ax + by + c), \tag{2.3}$$

tem integral primeira

$$H = \frac{(ax + c)(ax + by)}{x(ax + by + c)}$$

em $\mathbb{R}^2 \setminus L$, onde $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x(ax + by + c) = 0\}$, e o sistema

$$\dot{x} = -y - b(x^2 + y^2), \qquad \dot{y} = x, \tag{2.4}$$

tem integral primeira

$$H = \exp(2by)(x^2 + y^2).$$

Se H é integral primeira de (2.1), então $1/H, H^2, \sqrt{H}, e^H, lnH$ e $H + c$, com c constante real, são integrais primeiras de (2.1) em conjuntos abertos onde as funções estão bem definidas.

Definição 2.1.12. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Dizemos que uma função analítica $H(x, y, t) : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é um invariante do campo de vetores polinomial $\mathscr{X}$ em U se $H(x, y, t) =$constante para todos os valores de t para os quais a solução $(x(t), y(t))$ está bem definida e contida em U.

Exemplo 2.1.3. Se $aB - bA = 0$ e $bC - cB \neq 0$, o sistema polinomial

$$\dot{x} = x(ax + by + c), \qquad \dot{y} = y(Ax + By + C), \tag{2.5}$$

tem invariante

$$H = x^{B/(bC-cB)} y^{-b/(bC-cB)} e^t.$$

2.1.3 Fatores integrantes

Definição 2.1.13. O sistema (2.1) é *exato* se satisfaz

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Para tais sistemas, a 1-forma ω é fechada, i.e., $d\omega = 0$. Portanto, a função

$$H(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega,$$

obtida integrando-se ω ao longo de qualquer caminho começando no ponto (x_0,y_0) e terminando no ponto (x,y), está bem definida (ω é fechada e $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo). Então, $\omega = dH$ e $\omega \wedge dH = 0$, consequentemente H é uma integral primeira do sistema (2.1).

Sistemas exatos sugerem uma maneira de obter integrais primeiras para o sistema (2.1), mesmo quando ele não é exato, através da noção de fator integrante.

Definição 2.1.14. Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $R : U \to F$ função analítica não identicamente nula em U. A função R é um *fator integrante* do campo de vetores $\mathscr{X}$, da 1-forma ω ou do sistema (2.1) em U, se uma das seguintes e equivalentes condições são satisfeitas

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y},$$

$$div(RP,RQ) = 0,$$

$$\mathscr{R} = -Rdiv(\mathscr{X}),$$

$$d(R\omega) = d(RPdy - RQdx) = 0, \tag{2.6}$$

em U.

Dada a equação (2.1) e assumindo que R é fator integrante de (2.1), temos que tal sistema admite integral primeira H. De fato, a integral primeira H associada ao fator integrante R é dada por

$$H(x,y) = -\int R(x,y)P(x,y)dy + h(x), \tag{2.7}$$

satisfazendo $\partial H/\partial x = -RQ$. Então,

$$\dot{x} = RP = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = RQ = \frac{\partial H}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, dada uma integral primeira H, sempre podemos encontrar um fator integrante para o qual é observado (2.8).

Exemplo 2.1.4. Considere a equação diferencial polinomial

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x),$$

com a e b polinômios em x. A 1-forma associada ao sistema é dada por

$$\omega = dy - (a(x)y + b(x))dx.$$

Se $R = R(x)$ é um fator integrante, então

$$d(R\omega) = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + Ra(x)\right) dx \wedge dy = 0.$$

Portanto, temos o fator integrante

$$R(x) = \exp\left(-\int a(x)dx\right).$$

O seguinte resultado será útil nessa dissertação.

Proposição 2.1.1. (CHAVARRIGA H. GIACOMINI; LLIBRE, 2001) Se um campo vetorial $\mathscr{X}$ tem dois fatores integrantes R_1 e R_2, num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então R_1/R_2 é uma integral primeira no aberto $U - \{R_2 = 0\}$.

Demonstração. Como R_i é um fator integrante de $\mathscr{X}$, satisfaz $\mathscr{X} R_i = -R_i div(\mathscr{X})$ para $i = 1,2$. Portanto, a proposição segue imediatamente do seguinte cálculo

$$\mathscr{X}\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{(\mathscr{X} R_1)R_2 - R_1(\mathscr{X} R_2)}{R_2^2} = 0.$$

□

2.1.4 Curvas algébricas invariantes

Definição 2.1.15. (DARBOUX, 1878) Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$, $f(x,y) = 0$ é uma *curva algébrica invariante* do campo de vetores real $\mathscr{X}$ se, para algum polinômio $K \in \mathbb{C}[x,y]$, temos

$$\mathscr{X} f = Kf. \tag{2.9}$$

O polinômio K é chamado cofator da curva algébrica $f = 0$.

Note que, como o sistema polinomial tem grau m, o cofator tem, no máximo, grau $m-1$. Uma vez que nos pontos da curva $f = 0$, o gradiente $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ da curva é ortogonal ao campo de vetores $\mathscr{X} = (P,Q)$, o campo de vetores $\mathscr{X}$ é tangente à curva $f = 0$. Logo, a curva $f = 0$ é formada por trajetórias do campo de vetores $\mathscr{X}$. Isso justifica o nome "curva algébrica invariante", porque essa é invariante sob o fluxo definido por $\mathscr{X}$.

Exemplo 2.1.5. É fácil checar que o sistema (2.5) tem as seguintes cinco curvas algébricas invariantes: $f_1 = x = 0$, $f_2 = ax + c = 0$, $f_3 = y = 0$, $f_4 = ax + by = 0$, e $f_5 = ax + by + c = 0$, com os cofatores $K_1 = ax + c$, $K_2 = ax$, $K_3 = 2ax + by + c$, $K_4 = ax + by + c$ e $K_5 = ax + by$, respectivamente. Na verdade, todas as curvas integrais desse sistema são curvas algébricas, uma vez que podem ser escritas, a menos de $f_1 = 0$ e $f_5 = 0$, como $(ax + c)(ax + by) - hx(ax + by + c) = 0$, sendo h uma constante real qualquer.

Exemplo 2.1.6. O sistema (2.4) tem apenas duas curvas algébricas invariantes $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$, ou, equivalentemente, a curva algébrica invariante $x^2 + y^2 = 0$. Isso é fácil provar usando a integral primeira H.

Proposição 2.1.2. (CHAVARRIGA H. GIACOMINI; LLIBRE, 2001) O sistema (2.1) admite curva algébrica invariante $f = 0$ com cofator K se, e só se, $\overline{f} = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $\overline{K}$.

Demonstração. Decorre da seguinte igualdade

$$P\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + Q\frac{\partial \overline{f}}{\partial y} = \overline{K}.\overline{f}.$$

□

Lema 2.1.1. (DARBOUX, 1878) Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$. Assuma que f e g são relativamente primos no anel $\mathbb{C}[x,y]$. Então, para o sistema polinomial (2.1), $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_{fg} se, e só se, $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes com cofatores K_f e K_g, respectivamente. Além disso, $K_{fg} = K_f + K_g$.

Demonstração. Note que a seguinte igualdade é válida

$$\mathscr{X} fg = (\mathscr{X} f)g + f(\mathscr{X} g).$$

Segue, então, a prova do lema. □

Proposição 2.1.3. (DARBOUX, 1878) Suponha que $f \in \mathbb{C}[x,y]$ e seja $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$ sua decomposição em fatores irredutíveis sobre $\mathbb{C}[x,y]$. Então, para um sistema polinomial (2.1), $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_f se, e só se, $f_i = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_{f_i}, para $i \in \{1, \dots, r\}$, além disso, $K_f = n_1 K_{f_1} + \dots + n_r K_{f_r}$.

Demonstração. Pelo Lema 2.1.1, temos que $f = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator K_f se, e só se, $f_i^{n_i}$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_{f_i^{n_i}}$, para $i \in \{1, \dots, r\}$. Além disso, $K_f = K_{f_1^{n_1}} + \dots + K_{f_r^{n_r}}$.

Agora, assuma que $f_i^{n_i} = 0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_{f_i^{n_i}}$. Então,

$$K_{f_i^{n_i}} f_i^{n_i} = \mathscr{X}(f_i^{n_i}) = n_i f_i^{n_i - 1} \mathscr{X}(f_i).$$

Assim, temos a conclusão desejada. □

Uma curva algébrica invariante *irredutível* $f = 0$ é uma curva algébrica invariante tal que f é um polinômio irredutível no anel $\mathbb{C}[x,y]$.

2.1.5 Fatores exponenciais

Sejam $h = 0$ e $h + \varepsilon g = 0$ duas curvas algébricas invariantes, com cofatores K_h e $K_{h+\varepsilon g}$, em que $\varepsilon \in \mathbb{R}$ está numa vizinhança de zero. Sabendo que $\mathscr{X} h = K_h h$ e $\mathscr{X}(h + \varepsilon g) = K_{h+\varepsilon g}(h + \varepsilon g)$ e expandindo em série de potências em ε o cofator $K_{h+\varepsilon g}$, temos que $K_{h+\varepsilon g} = K_h + \varepsilon K + O(\varepsilon^2)$, sendo K algum polinômio de grau, no máximo, $m - 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right) &= \frac{\mathscr{X}(h+\varepsilon g)h-(h+\varepsilon g)\mathscr{X}h}{h^2} \\
&= \frac{K_{h+\varepsilon g}(h+\varepsilon g)h-(h+\varepsilon g)K_h h}{h^2} \\
&= \frac{(K_h+\varepsilon K+O(\varepsilon^2))(h+\varepsilon g)h-(h+\varepsilon g)K_h h}{h^2} \\
&= \varepsilon K+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}\left(\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right)^{1/\varepsilon}\right) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right)^{1/\varepsilon}\left(1+\varepsilon\frac{g}{h}\right)^{-1}\mathscr{X}\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right)^{1/\varepsilon}(1+O(\varepsilon))(\varepsilon K+O(\varepsilon^2)) \\
&= (K+O(\varepsilon))\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right)^{1/\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Portanto, a função

$$\left(\frac{h+\varepsilon g}{h}\right)^{1/\varepsilon}$$

tem cofator $K+O(\varepsilon)$. Quando ε tende a zero, a última expressão acima tende a

$$\exp\left(\frac{g}{h}\right), \tag{2.10}$$

logo concluímos que

$$\mathscr{X}\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K\exp\left(\frac{g}{h}\right), \tag{2.11}$$

pela continuidade de $\mathscr{X}$.

Note que (2.10) satisfaz a mesma equação que as curvas algébricas invariantes, com um cofator de grau, no máximo, $m-1$.

Definição 2.1.16. Tome $h,g\in\mathbb{C}[x,y]$ e assuma h,g relativamente primos em $\mathbb{C}[x,y]$. A função $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$ é chamada *fator exponencial* do sistema polinomial (2.1) se, para algum polinômio $K\in\mathbb{C}[x,y]$ de grau no máximo $m-1$, a equação (2.11) é satisfeita. Dizemos que K é *cofator* do fator exponencial $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$.

A definição acima é devida a Colin Christopher (CHRISTOPHER, 1994), onde a curva recebeu o nome de curva "degenerada".

Proposição 2.1.4. (CHAVARRIGA H. GIACOMINI; LLIBRE, 2001) Para um sistema polinomial real do tipo (2.1), a função $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$ é um fator exponencial com cofator K se, e só se, a função $\exp\left(\frac{\overline{g}}{\overline{h}}\right)$ é fator exponencial com cofator $\overline{K}$.

Demonstração. Assumimos que $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$ é um fator exponencial com cofator K. Como P e Q são polinômios de coeficientes reais, obtemos

$$P\frac{\partial \exp\left(\frac{\overline{g}}{\overline{h}}\right)}{\partial x}+Q\frac{\partial \exp\left(\frac{\overline{g}}{\overline{h}}\right)}{\partial y}=\overline{K}\exp\left(\frac{\overline{g}}{\overline{h}}\right).$$

Analogamente, obtemos resultado semelhante na direção contrária. □

Proposição 2.1.5. (CHAVARRIGA H. GIACOMINI; LLIBRE, 2001) Se $F=\exp\left(\frac{\overline{g}}{\overline{h}}\right)$ é um fator exponencial de cofator K_F para o sistema (2.1), então h é uma curva algébrica invariante de cofator K_h, e g satisfaz a equação

$$\mathscr{X}g=gK_h+hK_F.$$

Demonstração. Como F é fator exponencial de cofator K_F, temos

$$K_F\exp\left(\frac{g}{h}\right)=\mathscr{X}\exp\left(\frac{g}{h}\right)=\exp\left(\frac{g}{h}\right)\mathscr{X}\left(\frac{g}{h}\right)=\exp\left(\frac{g}{h}\right)\left(\frac{(\mathscr{X}g)h-g(\mathscr{X}h)}{h^2}\right)$$

ou, equivalentemente,

$$(\mathscr{X}g)h-g(\mathscr{X}h)=h^2K_F.$$

Como h e g são relativamente primos, obtemos que h divide $\mathscr{X}h$. Então, $h=0$ é uma curva algébrica invariante com cofator $K_h=\mathscr{X}h/h$. Agora, substituindo $\mathscr{X}h$ por K_hh na última equação, temos que $\mathscr{X}g=gK_h+hK_F$. □

2.2 Teoria Darbouxiana de integrabilidade

Notação. Se $S(x,y)=\sum_{i+j=0}^{m-1}a_{ij}x^iy^j$ é um polinômio de grau $m-1$, com $\frac{m(m+1)}{2}$ coeficientes em $\mathbb{C}$, escrevemos $S\in\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$.

Identificamos o espaço vetorial linear $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ com $\mathbb{C}^{m(m-1)/2}$ através do isomorfismo $S\to(a_{00},a_{10},a_{01},\ldots,a_{m-10},a_{m-21},\ldots,a_{0m-1})$.

Definição 2.2.1. Dizemos que r pontos $(x_k,y_k)\in\mathbb{C}^2, k=1,\ldots,r$, são independentes com respeito a $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ se a interseção dos r hiperplanos

$$\left\{(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m(m+1)/2}:\sum_{i+j=0}^{m-1}x_k^iy_k^ja_{ij}=0,k=1,\ldots r\right\}$$

é um subespaço linear de $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ de dimensão $m(m+1)/2-r>0$.

Observação. O número máximo de pontos singulares isolados do sistema polinomial (2.1) é m^2 (consequência do Teorema de Bezout), o número máximo de pontos singulares isolados independentes do sistema (2.1) é $m(m+1)/2-1$. Além disso, $m(m+1)/2<m^2$, para $m\geq 2$.

Definição 2.2.2. Um ponto singular (x_0, y_0) do sistema (2.1) é chamado ponto singular fraco se $div(P,Q)(x_0,y_0) = 0$.

Teorema 2.2.1 (Teoria Darbouxiana de integrabilidade)**.** (CHRISTOPHER; LLIBRE, 1999; CHRISTOPHER; LLIBRE, 2000) Suponha que um sistema $\mathbb{R}$-polinomial (2.1) de grau m admite p curvas algébricas invariantes $f_i = 0$, com cofatores K_i para $i = 1,...,p,q$ fatores exponenciais $\exp(g_j/h_j)$, com cofatores L_j, para $j = 1,..,q$, e r pontos singulares independentes (x_k, y_k) tais que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ para $i = 1,..,p$ e para $k = 1,...,r$. Note que os fatores irredutíveis dos polinômios h_j são alguns f_i's, como consequência das Proposições (2.1.3) e (2.1.5) .

(a) Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$ se, e só se, a função

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1} \dots \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q} \tag{2.12}$$

é uma integral primeira real do sistema (2.1).

(b) Se $p+q+r = [m(m+1)/2]+1$, então existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$.

(c) Se $p+q+r \geq [m(m+1)/2]+2$, então o sistema (2.1) tem uma integral primeira racional e, consequentemente, todas as trajetórias do sistema estão contidas em curvas algébricas invariantes.

(d) Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div(P,Q)$ se, e só se, a função (2.12) é um fator integrante do sistema (2.1).

(e) Se $p+q+r = m(m+1)/2$ e os r pontos singulares independentes são fracos, então (2.12), para $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos convenientes, é uma integral primeira do sistema (2.1) se $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$ ou é um fator integrante se $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div(P,Q)$.

(f) Existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -s$ para algum $s \in \mathbb{R} - \{0\}$ se, e só se, a função

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1} \dots \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q} \exp(st)$$

é um invariante real de (2.1).

Demonstração. Seja $F_j = \exp(g_j/h_j)$. Por hipótese, temos p curvas algébricas invariantes $f_i = 0$ com cofatores K_i e q fatores exponenciais F_j com cofatores L_j, isto é, os f_i's satisfazem $\mathscr{X} F_j = L_j F_j$. A primeira parte de (a) segue das seguintes expressões

$$\begin{aligned} \mathscr{X}(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) &= (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\mathscr{X} f_i}{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \frac{\mathscr{X} F_j}{F_j} \right) \\ &= (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j \right) \end{aligned}$$

Como o campo $\mathscr{X}$ é real e, se o sistema admite uma curva algébrica invariante complexa $f = 0$, então $\overline{f} = 0$ também é curva algébrica invariante do sistema, concluímos que em (2.12) temos o fator real $f^{\lambda}\overline{f}^{\overline{\lambda}}$, expresso como

$$[(Ref)^2 + (Imf)^2]^{Re\lambda} \exp(-2Im\lambda \arg(Ref + iImf)).$$

Se, dentre os fatores exponenciais de $\mathscr{X}$, ocorre um par complexo conjugado $F = \exp(h/g)$ e $\overline{F} = \exp(\overline{h}/\overline{g})$, a integral primeira (2.12) tem o fator real

$$\left(\exp\left(\frac{h}{g}\right)\right)^{\mu}\left(\exp\left(\frac{\overline{h}}{\overline{g}}\right)\right)^{\overline{\mu}} = \exp\left(2Re\left(\mu\frac{h}{g}\right)\right).$$

(b) Como os cofatores K_i e L_j são polinômios de grau $\leq m-1$, temos que $K_i, L_j \in \mathbb{C}_{m-1}[x,y]$. Note que a dimensão de $\mathbb{C}[x,y]$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ é $m(m+1)/2$.

Se (x_k, y_k) é um ponto singular do sistema (2.1), $P(x_k,y_k) = Q(x_k,y_k) = 0$. Então, de $\mathscr{X} f_i = P(\frac{\partial f_i}{\partial x}) + Q(\frac{\partial f_i}{\partial y}) = K_i f_i$, segue que $K_i f_i(x_k,y_k) = 0$. Por hipótese, $f_i(x_k,y_k) \neq 0$, portanto $K_i(x_k,y_k) = 0, i = 1,...,p$. Novamente, seguindo o mesmo raciocínio, obtemos que $L_j(x_k,y_k) = 0$, uma vez que a função exponencial não se anula.

Consequentemente, dado que os r pontos singulares são independentes, todos os K_i e L_j pertencem a um subespaço linear S de $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ de dimensão $[m(m+1)/2] - r$. Temos $p+q$ polinômios K_i e L_j, e, da hipótese, $p+q > [m(m+2)/2] - r$, obtemos que os $p+q$ polinômios devem ser linearmente dependentes em S. Então, existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$.

(c) Como o número de pontos singulares independentes $r < m(m+1)/2$, segue que $p+q > 2$. Sob as hipóteses de (c), aplicamos (b) a dois subconjuntos de $p+q-1 > 0$ funções definindo curvas algébricas invariantes ou fatores exponenciais. Logo, temos duas dependências lineares entre os cofatores correspondentes, as quais podemos escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} M_1 + \alpha_3 M_3 + \cdots + \alpha_{p+q-1} M_{p+q} &= 0 \\ M_2 + \beta_3 M_3 + \cdots + \beta_{p+q-1} M_{p+q} &= 0, \end{aligned}$$

onde M_l são os cofatores K_i e L_j, e α_l e β_l são números complexos. Então, por (a), segue que as duas funções

$$\ln(G_1 G_3^{\alpha_3} \ldots G_{p+q}^{\alpha_{p+q}}),\ \ln(G_2 G_3^{\beta_3} \ldots G_{p+q}^{\beta p+q}),$$

são integrais primeiras do sistema (2.1), onde G_l é o polinômio definindo uma curva algébrica invariante ou o fator exponencial de cofator $M_l, l = 1,...,p+q$. Então, tomando os logaritmos das duas integrais primeiras, obtemos que

$$\begin{aligned} H_1 &= \ln(G_1) + \alpha_3 \ln(G_3) + \cdots + \alpha_{p+q} \ln(G_{p+q}) \\ H_2 &= \ln(G_2) + \beta_3 \ln(G_3) + \cdots + \beta_{p+q} \ln(G_{p+q}), \end{aligned}$$

são integrais primeiras de (2.1). Cada uma delas fornece um fator integrante R_i tal que

$$R_i P = \frac{\partial H_i}{\partial y},\ R_i Q = -\frac{\partial H_i}{\partial x}.$$

Portanto, obtemos que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\partial H_1/\partial x}{\partial H_2/\partial x}.$$

Como as funções G_l são polinômios ou exponenciais de um quociente de polinômios, segue que as funções $\partial H_i/\partial x$ são racionais para $i = 1,2$. Então, pela última igualdade, temos que o quociente R_1/R_2 é uma função racional.

(d) Temos $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div(P,Q)$. Então, como no item (a), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) &= (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\mathscr{X} f_i}{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \frac{\mathscr{X} F_j}{F_j} \right) \\
&= (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j \right) \\
&= -(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) div(P,Q).
\end{aligned}$$

(e) Seja $K = div(P,Q)$, claramente $K \in \mathbb{C}_{m-1}[x,y]$. Assumindo que os r pontos singulares (x_k, y_k) são fracos, então $K(x_k, y_k) = 0$ para $k = 1, ..., r$. Consequentemente, K pertence ao subespaço linear S do item (b).

Por outro lado, como $dimS = p + q = [m(m+1)/2] - r \geq 0$ e temos $p+q+1$ polinômios $K_1, \dots, K_p, L_1, \dots, L_q, K \in S$. Portanto, obtemos $\lambda_i, \mu_j, \alpha \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j + \alpha K = 0.$$

Se $\alpha = 0$, então (2.12) é uma integral primeira. Caso contrário, podemos assumir, sem perda de generalidade, $\alpha = 1$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div(P,Q).$$

Assim, usando (d), segue (e).

(f) Temos $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -s$. Logo, de

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} e^{st}) &= \left(\mathscr{X} + \frac{\partial}{\partial t} \right) (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \\
&= (f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j + s \right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Definição 2.2.3. Uma função da forma (2.12) é chamada *função Darbouxiana*. A integral primeira associada a um fator integrante Darbouxiano é chamada *integral primeira Liouvilliana*.

Exemplo 2.2.1. A seguir, verificamos a integrabilidade de um sistema retirado de (OLIVEIRA *et al.*, 2020), sendo este:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a + gx^2 \\
\dot{y} &= -a/g - x^2 + gxy - y^2,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

com $ag < 0$.

Primeiramente, observe que o sistema (2.13) tem a seguinte elipse como curva algébrica invariante:

$$\frac{a}{g} + x^2 + y^2 = 0, \tag{2.14}$$

assim como as duas retas invariantes:

$$x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}=0 \text{ e}$$
$$x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}=0. \tag{2.15}$$

Sendo $K_1=2gx-2y$ cofator da elipse, uma vez que

$$\frac{\partial\left(\frac{a}{g}+x^2+y^2\right)}{\partial x}(a+gx^2)+\frac{\partial\left(\frac{a}{g}+x^2+y^2\right)}{\partial y}(-a/g-x^2+gxy-y^2)=(2gx-2y)\left(\frac{a}{g}+x^2+y^2\right).$$

Além disso, obtemos que $K_2=g\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)$ é cofator de $x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}$ e $K_3=g\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)$ é cofator de $x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}$, pois

$$\frac{\partial\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)}{\partial x}(a+gx^2)+\frac{\partial\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)}{\partial y}(-a/g-x^2+gxy-y^2)=$$

$$\frac{\partial\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)}{\partial x}(a+gx^2)+\frac{\partial\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)}{\partial y}(-a/g-x^2+gxy-y^2)=g\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right).$$

Note que $\alpha(2gx-2y)+\beta g\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)+\gamma g\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)=0$ não tem solução em α,β,γ, mas

$$\alpha(2gx-2y)+\beta g\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)+\gamma g\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)-2gx-gx-2y=0$$

tem solução $\alpha=-1,\beta=5/2,\gamma=5/2$. Assim, usando o Teorema (2.2.1), sabemos da existência do fator integrante

$$V(x,y)=\frac{\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)^5\left(x+\frac{\sqrt{-ag}}{g}\right)^5}}{\left(\frac{a}{g}+x^2+y^2\right)}.$$

Logo, o sistema (2.13) tem integral primeira dada pela forma (2.7).

2.3 Teorema de Kapteyn-Bautin

Como aplicação da Teoria de Integrabilidade de Darboux temos uma prova nova e mais curta das condições suficientes para o teorema de classificação de centros de sistemas diferenciais polinomiais devido a Kepteyn e Bautin (veja mais sobre essa prova em (CHRISTOPHER, 1994)). Tal teorema mostra-se relevante do ponto de vista qualitativo, visto que saber da existência de centros ajuda-nos a estudar o comportamento local de uma singularidade, e, por conseguinte, a esboçar o retrato de fase do sistema estudado. Escrito isso, enunciamos e provamos uma de suas afirmações.

Teorema 2.3.1 (Poincaré)**.** (DURMOTIER; LLIBRE; ARTéS, 2006) Um sistema polinomial que tem a forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + O(x,y),\\ \dot{y} &= x + O(x,y),\end{aligned}$$

onde $O(x,y)$ indica o monômios de grau maior ou igual a dois nas variáveis x, y, tem centro na origem se, e só se, existe $H(x,y)$, integral primeira do sistema, definida numa vizinhança da origem, da forma $H(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2} + O(x,y)$.

Teorema 2.3.2 (Kapteyn-Bautin)**.** Todo sistema quadrático candidato a ter um centro na origem pode ser escrito na seguinte forma

$$\dot{x} = -y - bx^2 - Cxy - dy^2, \quad \dot{y} = x + ax^2 + Axy - axy^2. \tag{2.16}$$

Tal sistema tem um centro na origem se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

I. $A - 2b = C + 2a = 0$,

II. $c = a = 0$,

III. $b + d = 0$,

IV. $C + 2a = A + 3b + 5d = a^2 + bd + 2d^2 = 0$.

As primeiras provas do Teorema de Kapteyn-Bautin podem ser encontradas em (KAPTEYN, 1911; KAPTEYN, 1912; BAUTIN, 1954). Ainda, seguinte resultado nos dá uma prova curta das condições suficientes desse teorema.

Teorema 2.3.3. Se o sistema (2.16) satisfaz uma das quatro condições do teorema de Kapteyn-Bautin, então tem um centro na origem.

Demonstração. Como o sistema (2.16) tem um centro linear na origem, tal sistema é um centro ou um foco. Consequentemente, para provar o teorema, basta mostrar que tem uma integral primeira numa vizinhança da origem.

Assuma que (2.16) satisfaz a condição I. Então, é fácil verificar que o sistema é Hamiltoniano, isto é, $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}$, com $H = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{a}{3}x^3 + bx^2y - axy^2 + \frac{d}{3}y^3$. Portanto, H é uma integral primeira definida numa vizinhança da origem.

Suponha que o sistema (2.16) satisfaz a condição II. Então, o sistema pode ser escrito na forma

$$\dot{x} = -y - bx^2 - dy^2, \ \dot{y} = x + Axy.$$

Se $A \neq 0$, o sistema tem a reta invariante $f_1 = 1 + Ay = 0$, com cofator $K_1 = Ax$. A divergência do sistema é $(A - 2b/A)K_1$. Então, obtemos que

$$(1+Ay)^{\frac{2b}{A}-1}$$

é um fator integrante. Como tal fator integrante não é nulo na origem, a integral primeira está definida numa vizinhança da origem e, consequentemente, a origem é um centro.

Podemos assumir que $A-2b \neq 0$, caso contrário, estaríamos sob as hipóteses do item I. Então, resta estudar o caso $A=0$ e $b \neq 0$. Assim, o sistema torna-se $\dot{x} = -y - bx^2 - dy^2, y = x$. Tal sistema tem a curva algébrica $f_1 = 2b^2(bx^2+dy^2)+(b-d)(2by-1) = 0$, com cofator $K_1 = -2bx$, o qual é igual à divergência do sistema. Portanto, f_1^{-1} é um fator integrante. Logo, a integral primeira associada a esse fator integrante está definida na origem se $b-d \neq 0$, e, consequentemente, a origem é um centro.

Se $b-d=0$, então o sistema torna-se $\dot{x} = -y - b(x^2+y^2)$, $\dot{y} = x$. Sabemos que $H = \exp(2by)(x^2+y^2)$ é uma integral primeira, a qual está definida na origem, e, portanto, a origem é um centro.

Assuma que o sistema (2.16) satisfaz a condição III. A forma $b+d=0$ é preservada sob uma rotação de eixos. Depois de realizada uma rotação de ângulo θ, o novo coeficiente a' de x^2 torna-se $a' = a\cos^3\theta + \alpha\cos^2\theta\sin\theta + \beta\cos\theta\sin^2\theta + d\sin^3\theta$. Portanto, se $a \neq 0$, podemos encontrar θ tal que $a' = 0$. Então, podemos assumir $a=0$, e, consequentemente, $C \neq 0$, senão estaríamos sob as hipóteses da condição II. O sistema

$$\dot{x} = -y - bx^2 - Cxy + by^2, \quad \dot{y} = x + Axy$$

tem as curvas algébricas $f_1 = 1+Ay = 0$, se $A \neq 0$, com cofator $K_1 = Ax$, e $f_2 = (1-by)^2 + C(1+by)x - b(A+b)x^2 = 0$, com cofator $K_2 = -2bx - Cy$. Como a divergência do sistema é igual a K_1+K_2, $f_1^{-1}f_2^{-1}$ é fator integrante. A integral primeira associada ao fator integrante está bem definida na origem, e, consequentemente, a origem é um centro.

Lembremos que, se $A=0$, f_1 não é uma curva algébrica do sistema, mas, então, a divergência do sistema é igual a K_2 e o fator integrante é f_2^{-1}.

Suponha que o sistema (2.16) satisfaz a condição IV. Então, se $d \neq 0$, o sistema torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{a^2+2d^2}{d}x^2 + 2axy - dy^2 \\ \dot{y} &= x + ax^2 + \frac{3a^2+d^2}{d}xy - ay^2. \end{aligned}$$

Notemos que, se $d=0$, então estamos sob as condições II. Tal sistema tem a curva algébrica $f_1 = (a^2+d^2)[(dy-ax)^2+2dy]+d^2 = 0$, com cofator $K_1 = 2(a^2+d^2)x/d$. Portanto, a divergência do sistema é igual a $\frac{5}{2}K_1$. Assim, a função $f_1^{\frac{-5}{2}}$ é um fator integrante. Como $d \neq 0$, sua integral primeira associada está definida numa vizinhança da origem. □

2.4 Lema de Darboux

Note que um aspecto relevante da Teoria de Integrabilidade Darbouxiana é descobrir a existência de curvas algébricas invariantes. Por conseguinte, é importante apresentar resultados que auxiliam nessa tarefa.

A presente seção introduz um lema necessário para apresentar resultados dessa categoria, além de resultados que auxiliam na descoberta de pontos singulares e caracterização de integrais primeiras, na subseção 2.4.1.

Cherchons, en premier lieu, quel sera le nombre de ces points singuliers. On peut rattacher cette recherche à un lemme relatif à six polynômes A, A′, B, B′, C, C′, de degrés l, l', m, m', n, n', satisfaisant à l'identité déjà considérée

$$AA' + BB' + CC' = 0; \tag{48}$$

il est évident que les degrés des produits AA′, BB′, CC′ sont égaux. On a donc déjà

$$l + l' = m + m' = n + n' = \lambda.$$

Cela posé, je dis que *la somme du nombre des points communs aux trois courbes*

$$A = 0, \quad B = 0. \quad C = 0,$$

et du nombre des points communs aux trois courbes

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0,$$

est égale à

$$\frac{lmn + l'm'n'}{\lambda}.$$

Figura 2 – Imagem retirada de (DARBOUX, 1878, p. 83).

Neste texto, tratamos tal resultado como Lema de Darboux, o qual pode ser estabelecido mais precisamente como segue.

Lema 2.4.1 (Lema de Darboux)**.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e tome A, B, C, A', B', C' seis polinômios homogêneos de graus l, m, n, l', m', n' em três variáveis com coeficientes em $\mathbb{K}$ tais que

(i) A, B, C são relativamente primos, assim como A', B', C';

(ii) $l + l' = m + m' = n + n' = r$, e a relação de ortogonalidade é válida

$$AA' + BB' + CC' = 0; \tag{2.17}$$

(iii) o ideal homogêneo (A, B, C, A', B', C') gerado por todos os seis polinômios não tem zero no plano projetivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Então, os ideais homogêneos gerados pelas triplas (A, B, C) e (A', B', C') têm apenas finitos zeros no plano projetivo.

Denotando por h e h' as multiplicidades de $I(A, B, C)$ e de $I(A', B', C')$ de tais ideais homogêneos no plano projetivo, existe a relação

$$h + h' = \frac{lmn + l'm'n'}{r} = r^2 - r(l + m + n) + (lm + mn + nl). \tag{2.18}$$

Jouanolou notou que a prova dada por Darboux estava incorreta e estabeleceu a fórmula (2.18) em seu livro (JOUANOLOU, 1979, p. 183-184). Uma prova mais simples que a apresentada por Jouanolou pode ser encontrada em (CHAVARRIGA; OLLAGNIER, 2001).

2.4.1 Aplicações do Lema de Darboux

A seguir, detalhamos como adotar coordenadas projetivas, visto que o espaço projetivo é compacto, e, nele, temos propriedades úteis como o Teorema de Bezout (veja (FULTON, 1969)), facilitando o enunciado e prova dos resultados posteriores desta subseção.

Sejam $p(x,y)$ e $q(x,y)$ polinômios com coeficientes complexos. Para o campo de vetores

$$\mathscr{X} = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.19}$$

ou, equivalentemente, para o sistema diferencial

$$\dot{x} = p(x,y),\ \dot{y} = q(x,y),$$

consideramos a 1-forma diferencial associada $\omega_1 = q(x,y)dx - p(x,y)dy$, e a equação diferencial

$$\omega_1 = 0. \tag{2.20}$$

Claramente, a equação (2.20) define uma folheação com singularidades em $\mathbb{C}^2$. O plano afim $\mathbb{C}^2$ é compactificado no espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2 = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/\sim$, onde $(X,Y,Z) \sim (X',Y',Z')$ se, e somente, $(X,Y,Z) = \lambda(X',Y',Z')$ para algum complexo $\lambda \neq 0$. A classe de equivalência de (X,Y,Z) será denotada por $[X:Y:Z]$.

A folheação definida pela equação (2.20) pode ser estendida a uma folheação singular em $\mathbb{CP}^2$, e a 1-forma ω_1 pode ser estendida a uma 1-forma meromorfa ω em $\mathbb{CP}^2$, a qual satisfaz uma equação $\omega = 0$, isto é,

$$A(X,Y,Z)dX + B(X,Y,Z)dY + C(X,Y,Z)dZ = 0, \tag{2.21}$$

cujos coeficientes A,B,C são polinômios homogêneos e satisfazem a relação

$$A(X,Y,Z)X + B(X,Y,Z)Y + C(X,Y,Z)Z = 0. \tag{2.22}$$

De fato, considere o mapa $i : \mathbb{C}^3 - \{Z=0\} \to \mathbb{C}^2$, dado por $i(X,Y,Z) = (X/Z, Y/Z) = (x,y)$ e suponha que $\max(\deg(p), \deg(q)) = m > 0$. Como $x = X/Z$ e $y = Y/Z$, temos

$$dx = (ZdX - XdZ)/Z^2,\ dy = (ZdY - YdZ)/Z^2,$$

o *pull-back* $i^*(\omega_1)$ tem polos em $Z=0$, e a equação (2.20) pode ser escrita como

$$i^*(\omega_1) = q(X/Z, Y/Z)(ZdX - XdZ)/Z^2 - p(X/Z, Y/Z)(ZdY - YdZ)/Z^2 = 0.$$

Então, a 1-forma $\omega = Z^{m+2}i^*(\omega_1)$ em $\mathbb{C}^3 - \{Z \neq 0\}$ tem coeficientes polinomiais homogêneos de grau $m+1$, e, para $Z=0$, as equações $\omega = 0$ e $i^*(\omega_1) = 0$ têm as mesmas soluções. Portanto, a equação diferencial $\omega = 0$ pode ser escrita como (2.21), onde

$$\begin{aligned} A(X,Y,Z) =& ZQ(X,Y,Z) = Z^{m+1}q(X/Z, Y/Z), \\ B(X,Y,Z) =& -ZP(X,Y,Z) = -Z^{m+1}p(X/Z, Y/Z), \\ C(X,Y,Z) =& YP(X,Y,Z) - XQ(X,Y,Z). \end{aligned}$$

Claramente, A,B,C são polinômios homogêneos de grau $m+1$ satisfazendo (2.22). Pontos singulares em $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ são pontos satisfazendo $A = B = C = 0$. Uma 1-forma homogênea

$$\omega = AdX + BdY + CdZ = 0,$$

onde A,B e C são polinômios homogêneos de grau $m+1$ é chamada projetiva se $XA+YB+ZC=0$, isto é, se existem três polinômios homogêneos L,M e N de grau m tais que

$$A = ZM - YN,\ B = XN - ZL,\ C = YL - XM,$$

ou, equivalentemente

$$(A,B,C) = (P,Q,R) \wedge (X,Y,Z).$$

Então, podemos escrever

$$\omega = p(YdZ - ZdY) + Q(ZdX - XdZ) + R(XdY - YdX). \tag{2.23}$$

O campo de vetores

$$\mathscr{X} = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y} + R\frac{\partial}{\partial Z}, \tag{2.24}$$

pode ser pensado como um campo de vetores polinomial homogêneo de $\mathbb{C}^3$ de grau m associado a $\omega = 0$.

Em resumo, vimos que o campo de vetores homogêneo (2.24) de grau m em $\mathbb{C}^3$ com

$$P = Z^m p(X/Z, Y/Z),\ Q = Z^m q(X/Z, Y/Z),\ R = 0, \tag{2.25}$$

está associado a 1-forma $\omega = 0$, e, consequentemente, ao campo de vetores (2.19).

Proposição 2.4.1 (Proposição de Darboux)**.** (LLIBRE, 2004) Para qualquer campo de vetores polinomial homogêneo (2.24) de grau m em $\mathbb{C}^3$ com finitos pontos singulares e satisfazendo (2.25), temos que seu número de pontos singulares considerando suas multiplicidades (ou números de interseção) satisfaz

$$\sum_p I(p, P \cap Q \cap R) = m^2 + m + 1.$$

Demonstração. Tome $A = P, B = Q, C = R, A' = X, B' = Y$ e $C' = Z$. Então, $AA' + BB' + CC' = 0$. Como não existem pontos comuns entre as curvas $A' = 0, B' = 0$ e $C' = 0$, segue que

$$h' = \sum_p I(p, A' \cap B' \cap C') = 0.$$

Portanto, do Lema de Darboux, obtemos

$$h = \sum_p I(p, A \cap B \cap C) = \frac{(m+1)^3 + 1}{m+2} = m^2 + m + 1.$$

□

Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$. A curva algébrica $f(x,y) = 0$ é uma curva algébrica invariante do campo vetorial polinomial $\mathscr{X}$ dado por (2.19) se para algum polinômio $k \in \mathbb{C}[x,y]$ (o cofator de $f = 0$), temos

$$\mathscr{X} f = \frac{\partial}{\partial x} p(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y} q(x,y) = k f(x,y).$$

É fácil verificar que , se $f(x,y) = 0$ é uma curva algébrica invariante de grau r para o campo de vetores polinomial $\mathscr{X}$ com cofator $k(x,y)$, então $F(X,Y,Z) = Z^r f(X/Z, Y/Z) = 0$

é uma curva algébrica invariante de grau r para seu campo vetorial projetivo com cofator $K(X,Y,Z) = Z^{m-1}k(X/Z,Y/Z)$, isto é

$$\mathscr{X} = \frac{\partial F}{\partial X}P(X,Y,Z) + \frac{\partial F}{\partial Y}Q(X,Y,Z) + \frac{\partial F}{\partial Z}R(X,Y,Z) = KF(X,Y,Z), \tag{2.26}$$

onde $R = 0$.

Tome $F(X,Y,Z) = 0$ uma curva algébrica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}$ de grau n. Seja $p = (X_0,Y_0,Z_0)$ um ponto de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Como as três coordenadas de p não podem ser nulas, sem perda de generalidade, assumimos que $p = (0,0,1)$. Então, suponha que a expressão de $F(X,Y,Z)$ restrita a $Z = 1$ é

$$F(X,Y,1) = F_i(X,Y) + F_{i+1}(X,Y) + \cdots + F_n(X,Y),$$

onde $0 \leq i \leq n$ e $F_j(X,Y)$ denota um polinômio homogêneo de grau j nas variáveis X e Y para $j = i,\ldots,n$, com F_i diferente do polinômio nulo. Dizemos que $i = m_p(F)$ é a multiplicidade da curva $F = 0$ no ponto p. Se $i = 0$, então o ponto p não pertence à curva $F = 0$. Se $i = 1$, dizemos que p é um ponto simples para a curva F. Se $i > 0$, dizemos que p é um ponto múltiplo.

Proposição 2.4.2. (CHRISTOPHER, 1994) Seja $f(x,y) = 0$ uma curva algébrica invariante irredutível de grau $n \geq 1$ sem pontos múltiplos para o campo de vetores polinomial afim $\mathscr{X}$ de grau m, então $n \leq m+1$.

Demonstração. Como $F = 0$ é uma curva algébrica invariante do campo $\mathscr{X}$ com cofator K, temos

$$\frac{\partial F}{\partial X}P(X,Y) + \frac{\partial F}{\partial Y}Q(X,Y) = KF(X,Y)$$

em $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Usando o Teorema de Euler para a função homogênea F de grau n, essa equação torna-se

$$\frac{\partial F}{\partial X}\left(P - \frac{1}{n}XK\right) + \frac{\partial F}{\partial Y}\left(Q - \frac{1}{n}YK\right) + \frac{\partial F}{\partial Z}\left(-\frac{1}{n}ZK\right) = 0. \tag{2.27}$$

Agora, pelo Lema de Darboux com

$$\begin{aligned} &A = \frac{\partial F}{\partial X},\ B = \frac{\partial F}{\partial Y},\ C = \frac{\partial F}{\partial Z}, \\ &A' = P - \frac{1}{n}XK,\ B' = Q - \frac{1}{n}YK,\ C' = -\frac{1}{n}ZK, \end{aligned}$$

temos

$$h = I(A \cap B \cap C),\ h' = I(A' \cap B' \cap C').$$

Notemos que, pelas hipóteses, h e h' são finitos. Além disso, como $A \cap B \cap C = \emptyset$, segue que $h = 0$.

Como A,A',B,B',C,C' satisfazem a igualdade (2.27), o Lema de Darboux pode ser usado para obtermos

$$h + h' = \frac{m^3 + (n-1)^3}{m+n-1} = m^2 + (n-1)(n-m+1). \tag{2.28}$$

Pelo Teorema de Bézout, o número de pontos de interseção de $A' = 0, B' = 0$ e $C' = 0$ é, no máximo, m^2 considerando suas multiplicidades, isto é, $h' \leq m^2$. Portanto, um limitante inferior para h é dado por: $0 = h \geq (n-1)(n-m-1)$, e $1 \leq n \leq m+1$.

□

Segue um resultado que fornece condições suficientes para a existência de uma integral primeira racional.

Teorema 2.4.1. (CHRISTOPHER, 1994) Seja $f(x,y)=0$ uma curva algébrica irredutível de grau $n>1$, a qual é invariante, com cofator $k\neq 0$, para o campo de vetores polinomial afim $\mathscr{X}$ de grau $m>1$. Se m^2 é o número total de soluções do sistema

$$nP-XK=0,\ nQ-YK=0,\ ZK=0, \tag{2.29}$$

no plano projetivo, levando em consideração suas multiplicidades ou números de interseção, então $\mathscr{X}$ tem uma integral primeira racional.

Demonstração. Como m^2 é o número de soluções de (2.29), pelo Teorema de Bézout, segue que o número de soluções dos sistemas

$$nP=XK=0,\ nQ-YK=0,\ Z=0, \tag{2.30}$$

e

$$P=0,\ Q=0,\ K=0, \tag{2.31}$$

são m e m^2-m, respectivamente, já que seu número máximo de soluções deve ser atingido para obtermos m^2 soluções em (2.29). Escrevemos

$$\begin{aligned}
P(X,Y,Z)&=p_0Z^m+p_1(X,Y)Z^{m-1}+\cdots+p_m(X,Y),\\
Q(X.Y,Z)&=q_0Z^m+q_1(X,Y)Z^{m-1}+\cdots+q_m(X,Y),\\
K(X,Y,Z)&=k_0Z^{m-1}+k_1(X,Y)Z^{m-2}+\ldots k_{m-1}(X,Y),
\end{aligned}$$

onde $A_i(x,y)$ denota um polinômio homogêneo de grau i e $A\in\{p,q,k\}$. Então, para $Z=0$, o sistema (2.30) torna-se

$$\begin{aligned}
np_m(X,Y)-Xk_{m-1}(X,Y)&=0,\\
nq_m(X,Y)-Yk_{m-1}(X,Y)&=0.
\end{aligned}$$

Como esse sistema de polinômios homogêneos de grau m nas variáveis X e Y tem m pontos de interseção, considerando suas multiplicidades, existe um polinômio homogêneo $A(X,Y)$ de grau m tal que

$$\begin{aligned}
p_m(X,Y)&=\lambda_1A(X,Y)+\frac{1}{n}Xk_{m-1}(X,Y),\\
q_m(X,Y)&=\lambda_2A(X,Y)+\frac{1}{n}Yk_{m-1}(X,Y),
\end{aligned}$$

onde $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ são não nulos.

O sistema polinomial associado ao campo de vetores $\mathscr{X}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=p_0+p_1(x,y)+\cdots+p_{m-1}(x,y)+\lambda_1A(x,y)+\frac{x}{n}k_{m-1}(x,y)=P(x,y,1),\\
\dot{y}&=q_0+q_1(x,y)+\cdots+q_{m-1}(x,y)+\lambda_2A(x,y)+\frac{1}{n}yk_{m-1}(x,y)=Q(x,y,1),
\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\dot{x} = p_0 + p_1 + \cdots + p_{m-1} - \frac{1}{n}x(k_0 + k_1 + \cdots + k_{m-2}) + \lambda_1 A + \frac{1}{n}xk,$$
$$\dot{y} = q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} - \frac{1}{n}y(k_0 + k_1 + \cdots + k_{m-2}) + \lambda_2 A + \frac{1}{n}yk.$$

Como $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ (caso contrário, o sistema (2.30) não teria m pontos de interseção), sem perda de generalidade, podemos assumir que $\lambda_1 \neq 0$. Passamos das variáveis (x,y) às variáveis (x,z) onde $z = \lambda_2 x - \lambda_1 y$. Nas novas variáveis, a segunda equação do sistema polinomial torna-se:

$$\dot{z} = \lambda_2 P(x,y,1) - \lambda_1 Q(x,y,1) = b(x,y) + \frac{1}{n}zk(x,y),$$

com $y = (\lambda_2 x - z)/\lambda_1$ e onde

$$b(x,y) = \lambda_2(p_0 + p_1 + \cdots + p_{m+1} - \frac{1}{n}x(k_0 + k_1 + \cdots + k_{m-2})) -$$

$$-\lambda_1(q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} - \frac{1}{n}y(k_0 + k_1 + \cdots + k_{m-2})).$$

Como, de (2.31), as curvas $\dot{x} = P(x,y,1) = 0$, $\dot{y} = Q(x,y,1)$ e $K(x,y,1) = k(x,y) = 1$ têm $m^2 - m$ pontos de interseção levando em consideração suas multiplicidades, segue que as curvas $P(x,y,1) = 0, b(x,y) + k(x,y)z/n = 0$ e $k(x,y) = 0$ têm o mesmo número de pontos de interseção, onde $y = (\lambda_2 x - z)/\lambda_1$. Portanto, o número de pontos de interseção das curvas $b(x,y) = 0$ e $k(x,y)$ é pelo menos $m^2 - m$. No entanto, pelo Teorema de Bézout, se essas duas curvas não têm uma componente em comum, então têm $(m-1)^2$ pontos de interseção. Como $m^2 - m > (m-1)^2$ se $m > 1$, segue que $b = 0$ e $k = 0$ têm uma componente máxima comum $c = 0$ de grau $r \geq 1$. Portanto, $b = \overline{b}c$ e $k = \overline{k}c$, onde $\overline{b}$ e $\overline{k}$ são polinômios de grau $m - r - 1$.

De (2.29), o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1) = 0$ e $Q(x,y,1) = 0$ com $k(x,y) = 0$ é maximal, isto é, $m^2 - m$, então o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1) = 0, Q(x,y,1) = 0$ e $\overline{k}(x,y) = 0$ é $m(m-r-1)$, e o número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1) = 0, Q(x,y,1) = 0$ e $c(x,y) = 0$ é mr. O número de pontos de interseção das curvas $P(x,y,1) = 0, b(x,y) + k(x,y)z/n = 0$ e $\overline{k}(x,y) = 0$ é $m(m-r-1)$, logo o número de pontos de interseção de $b(x,y) = 0$ e $\overline{k}(x,y) = 0$ é pelo menos $m(m-r-1)$. Por outro lado, $b = 0$ e $\overline{k} = 0$ não têm componentes em comum, assim, pelo Teorema de Bézout, elas se intersectam em $(m-1)(m-r-1)$ pontos. Portanto, como $m > 1$ e $m(m-r-1) > (m-1)(m-r-1)$, exceto se $r = (m-1)$, temos que $r = m-1$. Portanto, $b = ak$, com $a \in \mathbb{C}$. Dito isso, $\dot{z} = k(a + z/n)$, e, consequentemente, $z + an = \lambda_2 x - \lambda_1 y + an = 0$ é uma reta invariante com cofator k/n. Então, pela afirmação (a) do Teorema 2.2.1, obtemos que $H = f(x,y)(\lambda_2 x - \lambda_1 y + an)^{-n}$, e, consequentemente, H é uma integral primeira. □

Da prova do Teorema 2.4.1, segue que qualquer campo de vetores polinomial $\mathscr{X}$, nas hipóteses do teorema, tem uma reta invariante $ax + by + c = 0$ tal que uma integral primeira racional de $\mathscr{X}$ é da forma

$$H(x,y) = \frac{f(x,y)}{(ax + by + c)^n}.$$

Agora, voltamos a estudar o número de pontos múltiplos que uma curva algébrica invariante de grau n de campo vetorial polinomial de grau m pode ter em função de m e n.

Proposição 2.4.3. (CHRISTOPHER, 1994) Seja $f(x,y)=0$ uma curva algébrica invariante de grau n do campo de vetores polinomial

$$\mathscr{X} = p(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

de grau m com cofator k. Assuma que se

$$\begin{aligned} P(X,Y,Z) &= Z^m p\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right), \\ Q(X,Y,Z) &= Z^m q\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right), \\ K(X,Y,Z) &= Z^{m-1} k\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right), \end{aligned}$$

então

1. as curvas $nP-XK=0, nQ-YK=0, ZK=0$ não têm uma componente em comum, e
2. a curva $F(X,Y,Z)=Z^n f(X/Z,Y/Z)=0$ tem finitos pontos múltiplos em $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ considerando suas multiplicidades, digamos h.

   Então,
$$(n-1)(n-m-1) \leq h \leq m^2+(n-1)(n-m-1).$$

Demonstração. Como $F=0$ é uma curva algébrica invariante de (2.26) com cofator K, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial X}P(X,Y) + \frac{\partial F}{\partial Y}Q(X,Y) = KF(X,Y),$$

em $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Usando o Teorema de Euler para a função homogênea F de grau n, essa equação passa a

$$\frac{\partial F}{\partial X}\left(P-\frac{1}{n}XK\right) + \frac{\partial F}{\partial Y}\left(Q-\frac{1}{n}YK\right) + \frac{\partial F}{\partial Z}\left(-\frac{1}{n}ZK\right) = 0. \tag{2.32}$$

Agora, tomamos

$$\begin{aligned} &A = \frac{\partial F}{\partial X},\ B = \frac{\partial F}{\partial Y},\ C = \frac{\partial F}{\partial Z}, \\ &A' = P-\frac{1}{n}XK,\ B' = Q-\frac{1}{n}YK,\ C' = -\frac{1}{n}ZK, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h &= \sum_p I(p, A\cap B\cap C), \\ h' &= \sum_p I(p, A'\cap B'\cap C'). \end{aligned}$$

Notemos que pelas hipóteses h e h' são finitos.

Como A, A', B, B', C e C' satisfazem a igualdade (2.32), pelo Lema de Darboux, obtemos

$$h+h' = \frac{m^3+(n-1)^3}{m+n-1} = m^2+(n-1)(n-m+1).$$

Portanto, o limitante superior para h dado no enunciado do teorema está provado. Pelo Teorema de Bézout, o número de pontos de interseção das curvas $A' = 0, B' = 0$ e $C' = 0$ é, no máximo, m^2, levando em consideração suas multiplicidades, isto é, $h' \leq m^2$. Portanto, $h \geq (n-1)(n-m+1)$, e a proposição está provada. □

Da Proposição 2.4.3, segue como corolário a Proposição 2.4.2.

Corolário 2.4.1. Sob as hipóteses da Proposição 2.4.3, se $f(x,y) = 0$ é uma curva algébrica invariante de grau $n = m+1$ para o campo de vetores polinomial $\mathscr{X}$ de grau $m > 1$ tal que sua projetivização $F(X,Y,Z) = Z^n f(X/Z, Y/Z) = 0$ não tem pontos múltiplos, então $\mathscr{X}$ tem uma integral primeira racional.

Demonstração. Usando a mesma notação da Proposição 2.4.3, temos que $h' = m^2$, uma vez que, das hipóteses, $n = m+1$ e $h = 0$. Agora, como estamos nas hipóteses do Teorema 2.4.1, a afirmação segue. □

O último resultado desta seção sobre integrais primeiras racionais é o que segue.

Proposição 2.4.4. (CHRISTOPHER, 1994) Sob as hipóteses da Proposição 2.4.3, se $f(x,y) = 0$ é irredutível em $\mathbb{C}[x,y]$ e todos os pontos múltiplos de $F(X,Y,Z) = 0$ são duplos e ordinários, então $n \leq 2m$. além disso, se $n = 2m$, então $\mathscr{X}$ tem uma integral primeira racional.

Demonstração. Usamos a notação e os resultados introduzidos na prova da Proposição 2.4.3. Como todo ponto múltiplo p de $F(X,Y,Z) = 0$ é duplo e ordinário, segue que

$$I\left(p, \frac{\partial F}{\partial X} \cap \frac{\partial F}{\partial Y} \cap \frac{\partial F}{\partial Z}\right) = 1. \tag{2.33}$$

Se $F(X,Y) = 0$ é uma curva algébrica de grau n, sabemos que

$$\sum_p \frac{1}{2} m_p(m_p - 1) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \tag{2.34}$$

onde p é um ponto múltiplo de $F = 0$ e m_p denota a multiplicidade de p, para uma prova desse resultado, veja a seção 4 do Capítulo 5 de (FULTON, 1969). Como todo ponto múltiplo p de $F = 0$ é duplo, $m_p = 2$. Se h é o número de pontos múltiplos de $F = 0$ levando em consideração suas multiplicidades, de (2.33) e (2.34), segue que $h \leq (n-1)(n-2)/2$. Pela Proposição 2.4.3, temos $(n-1)(n-m-1) \leq h$. Consequentemente,

$$(n-1)(n-m-1) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Portanto, $n \leq 2m$, e a primeira parte da proposição está provada.

Agora, assumimos que $n = 2m$. Da prova da Proposição 2.4.3, temos que $h + h' = m^2 + (n-1)(n-m-1) = m^2 + (2m-1)(m-1)$. Portanto, como $h \leq (n-1)(n-2)/2 = (2m-1)(m-1)$, obtemos $h' \geq m^2$. Mas, por definição, $h' \leq m^2$. Logo, estamos nas hipóteses do Teorema 2.4.1, e, consequentemente, $\mathscr{X}$ tem uma integral primeira racional. □

2.5 O problema inverso

Nesta seção, estamos interessados nos sistemas diferenciais polinomiais que têm um dado conjunto de curvas algébricas invariantes, independentemente da sua integrabilidade. Logo, estudamos primeiro as formas normais dos campos de vetores polinomiais planares que têm um dado conjunto de curvas algébricas invariantes genéricas. Em outras palavras, de alguma forma, estamos interessados numa espécie de teoria inversa da teoria de integrabilidade de Darboux. O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 2.5.1. (CHRISTOPHER J. LLIBRE; ZHANG, 2002) Sejam $C_i = 0$ para $i = 1, \ldots, p$, curvas algébricas invariantes irredutíveis em $\mathbb{C}^2$, e tomemos $r = \sum_{i=i}^{p} \deg C_i$. Assumimos que todos os C_i satisfazem as seguintes condições genéricas:

(i) Não existem pontos nos quais C_i e suas derivadas primeiras se anulem simultaneamente.

(ii) Os termos de ordem mais alta de C_i não têm fatores repetidos.

(iii) Se duas curvas se intersectam num ponto no plano finito, elas são transversais neste ponto.

(iv) Não existem mais que duas curvas C_i se encontrando em qualquer ponto no plano finito.

(v) Não existem duas curvas com fator comum nos termos de ordem mais alta.

Então, qualquer campo de vetores polinomial $\mathscr{X}$ de grau m tangente a todos os $C_i = 0$ satisfaz uma das seguintes afirmações:

(a) Se $r < m+1$, então

$$\mathscr{X} = \left(\prod_{i=1}^{p} C_i\right) \mathscr{Y} + \sum_{i=1}^{p} h_i \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{p} C_j\right) \mathscr{X}_{C_i}, \tag{2.35}$$

onde $\mathscr{X}_{C_i} = (-C_{iy}, C_{ix})$ é um campo de vetores Hamiltoniano, os h_i's são polinômios de graus não maiores de $m-r+1$, e $\mathscr{Y}$ é um campo de vetores polinomial de grau menor ou igual a $m-r$.

(b) Se $r = m+1$, então

$$\mathscr{X} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{p} C_j\right) \mathscr{X}_{C_i}, \tag{2.36}$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

(c) Se $r > m+1$, então $\mathscr{X} = 0$.

A afirmação (b) do teorema tem um corolário devido a Christopher e Kooij (KOOIJ; CHRISTOPHER, 1993), mostrando que o sistema (2.36) tem o fator integrante $R = \left(\prod_{i=1}^{p} C_i\right)^{-1}$, e, consequentemente, é Darbouxiano integrável.

O seguinte teorema mostra que as condições genéricas do Teorema 2.5.1 são necessárias.

Teorema 2.5.2. (CHRISTOPHER J. LLIBRE; ZHANG, 2002) Se uma das condições (i)-(v) do Teorema 2.5.1 não é satisfeita, as afirmações do teorema não são verdadeiras.

Daremos dois exemplos de sistemas polinomiais satisfazendo todas as condições do Teorema 2.5.1 com $r = m+1$ exceto (ii) ou (iii) e que não são Darbouxiano integráveis.

Considere o seguinte sistema quadrático

$$\begin{cases} \dot{x} = y(ax - by + b) + x^2 + y^2 - 1, \\ \dot{y} = bx(y-1) + a(y^2 - 1) \end{cases} \tag{2.37}$$

o qual tem o círculo invariante $C_1 = x^2 + y^2 - 1$ com cofator $K_1 = 2(x + ay)$ e a outra reta invariante $C_2 = y - 1 = 0$ com cofator $K_2 = bx + ay + a$. Notemos que C_1 e C_2 são tangentes no ponto $(0,1)$.

Teorema 2.5.3. (CHRISTOPHER J. LLIBRE; ZHANG, 2002) Existem valores reais dos parâmetros a e b para os quais o sistema (2.37) não é Darbouxiano integrável.

Como um corolário, o seguinte resultado mostra que existem sistemas polinomiais com uma curva algébrica invariante cujo termo de ordem mais alta tem fatores repetidos e que não são Darbouxiano integráveis. Considere o seguinte sistema quadrático:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-b)(x^2 + 2y - 1) - (ax - b)(y - 1) = P(x,y), \\ \dot{y} = -(bx + 2ay - a)(y - 1) = Q(x,y) \end{cases} \tag{2.38}$$

o qual tem as curvas algébricas invariantes $C_1 = x^2 + 2y - 1$ com cofator $K_1 = 2[(1-b)x - ay + a]$ e $C_2 = y - 1 = 0$ com cofator $K_2 = -(bx + 2ay - a)$. Notemos que o termo de ordem mais alta de C_1 tem fator repetido x.

Corolário 2.5.1. Existem valores reais dos parâmetros a e b para os quais o sistema (2.38) não é Darbouxiano integrável.

Para a prova dos resultados anteriores, veja (CHRISTOPHER J. LLIBRE; ZHANG, 2002).

2.6 Compactificação de Poincaré

Esta seção é baseada no capítulo 5 do livro (DURMOTIER; LLIBRE; ARTéS, 2006).

O estudo de soluções que escapam para o infinito tem sido uma ferramenta importante para entender o comportamento global de um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. A técnica foi introduzida por Poincaré (POINCARé, 1891). Ela tem vantagens sobre outras formas de compactificar o plano, por exemplo, os pontos singulares no infinito estão distribuídos ao longo de uma curva invariante do sistema, o equador da esfera.

2.6.1 Cartas locais

A fim de ilustrar o retrato de fase de um campo de vetores, deveríamos trabalhar sobre o plano real completo $\mathbb{R}^2$, o que não é muito prático. Se as funções definindo o campo de vetores são polinômios, podemos aplicar a compactificação de Poincaré. Assim, podemos desenhar a região no infinito; mais ainda, a construção controla as órbitas que tendem a ou partem do infinito.

Neste capítulo denotamos as coordenadas de um ponto p do plano por (x_1,x_2). Seja $\mathbb{R}[x_1,x_2]$ o anel de polinômios com coeficientes reais. Como definido no Capítulo 2, um campo de vetores polinomial no plano é dado por

$$X = P(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + Q(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

onde $P,Q \in \mathbb{R}[x_1,x_2]$ ou ainda,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_1,x_2), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{2.39}$$

A compactificação de Poincaré é construída como segue. Identifique o plano $\mathbb{R}^2$ como conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ dado por $(y_1,y_2,y_3) = (x_1,x_2,1)$. Considere esfera $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 1\}$, chamada de esfera de Poincaré, note que S^2 é tangente a $\mathbb{R}^2$ no ponto $(0,0,1)$. Dividimos a esfera em 3 partes: H_+, H_- e S^1, onde $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$ é o hemisfério superior da esfera, $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$ é o hemisfério inferior e $S^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$ é a linha do equador.

Considere ainda, a projeção radial do campo de vetores X definido em $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{S}^2$ dada pelas projeções centrais $f^+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$. Em outras palavras, f^+ (respectivamente, f^-) é a interseção da reta que passa pelo ponto y e a origem com o hemisfério superior (respectivamente, inferior) da esfera $\mathbb{S}^2$, mais precisamente,

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}\right), \\ f^-(x) &= \left(-\frac{x_1}{\Delta(x)}, -\frac{x_2}{\Delta(x)}, -\frac{1}{\Delta(x)}\right), \end{aligned}$$

onde

$$\Delta(x) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+1}.$$

Dessa forma, obtemos campos vetoriais induzidos em cada hemisfério da esfera e analiticamente conjugados ao campo X. O campo vetorial induzido em H_+ é definido por $\overline{X}(y) = Df^+(x)X(x)$, onde $y = f^+(x)$, e em H_- é dado por $\overline{X}(y) = Df^-(x)X(x)$, onde $y = f^-(x)$. Note que $\overline{X}$ é um campo de vetores em $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$ que é tangente a $\mathbb{S}^2$ em cada ponto.

Observe que, segue desta construção que os pontos no infinito de $\mathbb{R}^2$ (dois para cada direção) estão em correspondência bijetiva com os pontos do equador de $\mathbb{S}^2$. O próximo passo agora é estender o campo de vetores induzido $\overline{X}$ de $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$ para toda a esfera $\mathbb{S}^2$. Note que o campo induzido não necessariamente permanece limitado quando nos aproximamos de $\mathbb{S}^1$, obstruindo a extensão. No entanto, se multiplicarmos o campo de vetores por um fator $\rho(x) = x_3^{d-1}$, com d grau do campo X, então a extensão torna-se possível. O campo estendido em $\mathbb{S}^2$ é chamado a compactificação de Poincaré do campo de vetores X em $\mathbb{R}^2$, e é denotado por $p(X)$. Em cada hemisfério, H_+ e H_-, o campo não é mais $\mathbb{C}^\omega$-conjugado a X, mas permanece $\mathbb{C}^\omega$-equivalente. Desta maneira, se estamos interessados no estudo do retrato de fase global do campo, este estudo pode ser realizado por meio desta compactificação.

A seguir, vamos buscar a expressão analítica do campo $p(X)$ acima descrito. Como é usual em superfícies, usamos cartas locais para descrever o campo. Para $\mathbb{S}^2$, usamos seis cartas locais dadas por

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_k < 0\},$$

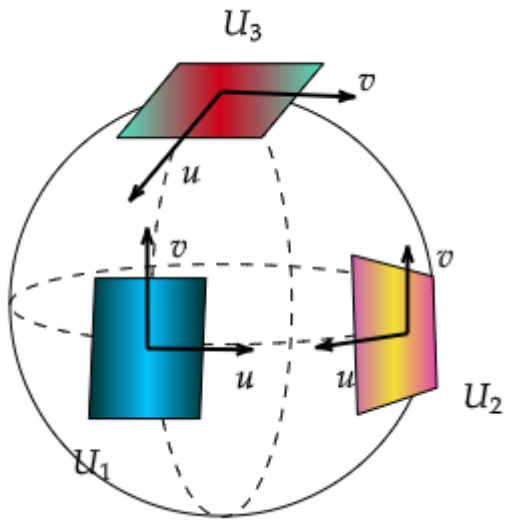

Figura 3 – As cartas locais (U_k, ϕ_k) com $k = 1,2,3$ para a esfera de Poincaré.

para $k = 1,2,3$. Os correspondentes mapas locais $\phi_k : U_k \to \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \to \mathbb{R}^2$ são definidos como

$$\phi_k(y) = -\psi_k(y) = (y_m/y_k, y_n/y_k),$$

para $m < n$ e $m,n \neq k$. Escrevemos $z = (u,v)$ para denotar $\phi_k(y)$ ou $\psi_k(y)$ para cada k, ou seja, (u,v) tem diferentes papéis dependendo da carta local que consideramos. Geometricamente, as coordenadas (u,v) podem ser expressas como na Figura 3. Vale observar que os pontos de $\mathbb{S}^1$ nas cartas locais sempre têm a coordenada v nula. Se temos $X(x) = (P(x_1,x_2), Q(x_1,x_2))$ então $\overline{X}(y) = Df^+(x)X(x)$ com $y = f^+(x)$ e

$$D\phi_1(y)\overline{X}(y) = D\phi_1(y) \circ Df^-(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Seja $\overline{X}|_{U_1}$ o sistema definido como $D\phi_1(y)\overline{X}(y)$. Então, como

$$(\phi \circ f^+)(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right) = (u,v),$$

temos

$$\begin{aligned}
\overline{X}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} x_2/x_1 & 1/x_1 \\ -1/x_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1,x_2) \\ Q(x_1,x_2) \end{pmatrix}, \\
&= \frac{1}{x_1^2}(-x_2P(x_1,x_2) + Q(x_1,x_2), -P(x_1,x_2)), \\
&= v^2\left(-\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)\right).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1}m(z),$$

onde $m(z) = (1+u^2+v^2)^{\frac{1-d}{2}}$. Consequentemente, temos

$$\rho(\overline{X}|_{U_1})(z) = v^{d+1}m(z)\left(-\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)\right).$$

A fim de garantir que a extensão de $\rho\overline{X}$ para $p(X)$ está bem definida em todo o $\mathbb{S}^2$, note que, $\overline{X}|_{U_1}$ pode não estar bem definido para $v=0$, mas $p(X)|_{U_1}=\rho\overline{X}|_{U_1}=\rho\overline{X}|_{U_1}$ está bem definido ao longo de $v=0$ uma vez que o fator v^{d+1} elimina qualquer fator de v que poderia aparecer no denominador. A construção nas demais cartas é análoga.

Para simplificar a extensão do campo vetorial podemos reparametrizar o tempo e eliminar o fator $m(z)$. Note que, por construção, o campo de vetores resultante em $\mathbb{S}^2$ é $\mathbb{C}^\omega$-equivalente a X em qualquer dos hemisférios H_+ e H_-.

A expressão do campo $p(X)$ na carta local (U_1,ϕ_1) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v^d\left(-uP\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)+Q\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)\right),\\ \dot{v}&=-v^{d+1}P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right).\end{aligned}\tag{2.40}$$

A expressão na carta local (U_2,ϕ_2) é

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v^d\left(P\left(\frac{u}{v},\frac{1}{v}\right)-uQ\left(\frac{u}{v},\frac{1}{v}\right)\right),\\ \dot{v}&=-v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v},\frac{1}{v}\right),\end{aligned}\tag{2.41}$$

e, na carta (U_3,ϕ_3) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{u}&=P(u,v),\\ \dot{v}&=Q(u,v).\end{aligned}\tag{2.42}$$

A expressão do campo $p(X)$ nas cartas locais (V_k,ψ_k) é a mesma que (U_k,ϕ_k) exceto pelo fator $(-1)^{d-1}$, para $k=1,2,3$. Desta maneira, para estudar o comportamento global do campo de vetores X em todo $\mathbb{R}^2$, incluindo seu comportamento próximo ao infinito, é suficiente trabalhar em $H_+\cup\mathbb{S}^1$, o que chamamos de disco de Poincaré. Para este estudo, precisamos estudar o campo em três cartas locais $(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)$ e (U_3,ϕ_3), onde os campos são expressos por (2.40), (2.41) e (2.42).

Observe que que em cada carta local o representante local do campo $p(X)$ é um campo vetorial polinomial.

Chamamos de pontos singulares finitos (respectivamente, infinitos) de X ou $p(X)$ os pontos singulares de $p(X)$ que estão em $\mathbb{S}-\mathbb{S}^1$ (respectivamente, $\mathbb{S}^1$). Note que se $y\in\mathbb{S}^1$ e um ponto singular infinito, então $-y$ é também um ponto singular. Como o comportamento local próximo a $-y$ é o comportamento local próximo a y multiplicado por $(-1)^{d-1}$, segue que a orientação das órbitas muda quando o grau é par. Por exemplo, se d é par e $y\in\mathbb{S}^1$ é um nó estável, então $-y$ é um nó instável. Devido ao fato de que pontos singulares infinitos aparecem em pares de pontos diametralmente opostos, é suficiente estudar o comportamento local de apenas metade dos pontos infinitos, e, usando o grau do campo de vetores, é possível determinar a outra metade.

Como já observamos, as curvas integrais de $\mathbb{S}^2$ são simétricas com respeito à origem, de forma que é suficiente representar o fluxo de $p(X)$ apenas no hemisfério superior fechado, o chamado disco de Poincaré. A fim de desenhá-lo, por razões práticas, como um disco no plano podemos projetar os pontos do hemisfério superior sobre o disco $\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : y_1^2+y_2^2\leq$

$1, y_3 = 0\}$. Isso pode ser feito projetando-se cada ponto da esfera sobre o disco usando-se uma reta paralela ao eixo y_3. Podemos, ainda, projetar usando uma família de retas passando por um ponto $(0,0,y_3)$ com $y_3 < 0$. Se y_3 é um valor próximo a $-\infty$, obtemos o mesmo resultado, mas, se y_3 é próximo a zero, podemos ter uma melhor representação na carta local U_3.

Exemplo 2.6.1. Neste exemplo, estudamos o comportamento dinâmico global das soluções do sistema (2.13), com $ag < 0$, pela compactificação de Poincaré. Vamos analisar as singularidades do disco de Poincaré e outras propriedades para verificar o comportamento global e esboçar o retrato de fase no disco. Note que, na parte finita do disco, temos quatro pontos singulares: $(\pm\sqrt{-a/g}, \pm\sqrt{-a/g}) = P\pm, (\pm\sqrt{-a/g}, 0) = Q\pm$. A matriz jacobiana do sistema é da forma

$$DF(X) = \begin{pmatrix} 2xg & 0 \\ -2x+gy & gx-2y \end{pmatrix}.$$

Escrito isso, verificando a expressão da matriz para cada ponto e encontrando seus autovalores como no início do capítulo, concluímos que todas as singularidades são hiperbólicas, portanto podemos usar a classificação dos pontos como foi introduzida anteriormente. Em resumo, temos

1. o ponto $(\sqrt{-a/g}, \sqrt{-a/g})$ é uma sela, pois $\lambda_1 = -\sqrt{-ag}$ e $\lambda_2 = 2\sqrt{-ag}$ são autovalores de $DF(X)_{P+}$,
2. o ponto $(-\sqrt{-a/g}, -\sqrt{-a/g})$ é uma sela, pois $\lambda_1 = \sqrt{-ag}$ e $\lambda_2 = -2\sqrt{-ag}$ são autovalores de $DF(X)_{P-}$,
3. o ponto $(\sqrt{-a/g}, 0)$ é um nó atrator, pois $\lambda_1 = \sqrt{-ag}$ e $\lambda_2 = 2\sqrt{-ag}$ são autovalores de $DF(X)_{Q+}$
4. o ponto $(-\sqrt{-a/g}, 0)$ é um nó repulsor, pois $\lambda_1 = -\sqrt{-ag}$ e $\lambda_2 = -2\sqrt{-ag}$ são autovalores de $DF(X)_{Q-}$.

De (2.40), segue que o comportamento do campo na carta local U_1 é dado por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{g + gu^2 + av^2 + aguv^2}{g}, \\ \dot{v} &= -v(g + av^2), \end{aligned}$$

ou seja, não temos pontos singulares em U_1, pois $g \neq 0$. Na carta local U_2, obtemos o sistema de (2.41)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{gu + gu^3 + agv^2 + auv^2}{g}, \\ \dot{v} &= -\frac{v(g - g^2u + gu^2 + av^2}{g}, \end{aligned}$$

assim, a origem é ponto singular. Além disso, tal singularidade é um nó atrator, pois $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$ são autovalores da matriz jacobiana do sistema em $(0,0)$.

Na seção 2.2, mostramos que o sistema (2.13) tem $r\pm : x \pm \dfrac{\sqrt{-ag}}{g} = 0$ como retas invariantes, assim como a elipse $E = \dfrac{a}{g} + x^2 + y^2 = 0$. Sendo que $P+ \in r-$, $P- \in r+$, $Q+ \in$

$E \cap r-$ e $Q- \in E \cap r+$. Reunindo tais informações, obtemos o retrato de fase do sistema (2.13) no disco de Poincaré como mostra a figura 4.

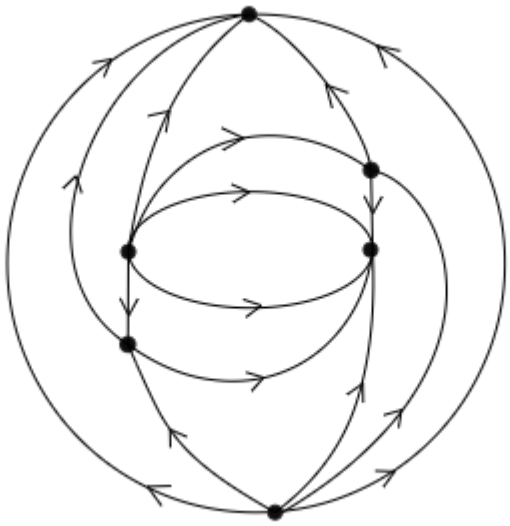

Figura 4 – Retrato de fase do sistema (2.13).

2.7 Blow up

Como já foi definido no início deste capítulo, um ponto P do plano é dito regular quando o campo de vetores (2.1) avaliado em P é não nulo. Se P é não regular, P é uma singularidade. Podemos classificar singularidades do plano de acordo com a matriz Jacobiana do campo de vetores. Se a matriz Jacobiana avaliada na singularidade tem ambos autovalores com partes reais não nulas, já sabemos que o ponto é hiperbólico, caso contrário, não hiperbólico.

Como consequência do Teorema de Hartman-Grobman, podemos classificar os pontos singulares hiperbólicos de campos de vetores planares reais $X = P\partial_x + Q\partial_y$ com relação a seu comportamento topológico. No caso de pontos singulares não degenerados não hiperbólicos, podemos ter um centro ou um foco. No entanto, é ainda um problema em aberto encontrar uma caracterização para distinguir os casos. Para pontos singulares degenerados, isto é, cuja matriz Jacobiana do campo de vetores anula-se no ponto, a estrutura local das órbitas pode ser mais complicada de ser determinada. Ela divide-se em três classes: semi-hiperbólica, nilpotente e linearmente nula.

Temos um ponto singular semi-hiperbólico quando o traço da matriz jacobiana do campo vetorial $(DF(X))$ no ponto é não nulo. A caracterização do comportamento local das órbitas para esse caso é feita por Andronov, Leontovich, Gordon e Maier em (ANDRONOV *et al.*, 1973), veja o Teorema 3.5.1.

Um ponto singular é nilpotente quando o traço de $DF(X)$ no ponto é nulo, mas $DF(X)$ é não nula. Andreev em (ANDREEV., 1958) fornece uma caracterização completa para o comportamento local das órbitas para tais pontos singulares.

Pontos singulares linearmente nulos têm $DF(X)$ nula quando calculada nos pontos. O estudo do comportamento das soluções de um campo de vetores próximas de pontos singulares linearmente nulos pode ser alcançado pela técnica do *blow up*, também conhecida como desin-

gularização, possibilitando um melhor esboço do comportamento qualitativo das soluções de X.

Grosseiramente falando, a ideia consiste em "explodir"a singularidade, através de uma mudança de variáveis (que não é um difeomorfismo local), em uma reta ou um círculo. Em seguida estudar os pontos singulares que aparecem nessa reta ou círculo que serão "menos"degenerados. Se algum desses novos pontos singulares ainda for degenerado, repetimos o processo até que tenhamos todos os pontos não degenerados. Durmotier provou que esse processo iterativo de desingularização é finito [Durmotier, 1977].

O objetivo desta seção é introduzir a técnica do *blow up* e apresentar alguns exemplos, com base em (ALVAREZ; FERRAGUT; JARQUE, 2011).

2.7.1 Técnica do blow up homogêneo

Considere um sistema diferencial polinomial planar da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y) = P_m(x,y) + \dots, \\ \dot{y} &= Q(x,y) = Q_m(x,y) + \dots, \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde P e Q são polinômios coprimos, P_m e Q_m são polinômios homogêneos de grau $m \in \mathbb{N}$, e os pontos significam termos de ordens mais altas em x e y. Assumimos que a origem é um ponto singular quando dizemos que $m > 0$. Aplicando coordenadas polares no sistema (2.43) e aplicando um re-escalonamento ao eliminar o termo r^{m-1} temos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R(\theta)r + \dots, \\ \dot{\theta} &= F(\theta) + \dots, \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde R e F são polinômios em $\cos\theta$ e $sen\theta$, e os pontos significam termos de ordens mais altas em r. Se $F \not\equiv 0$, dizemos que a origem é um ponto singular não dicrítico. Nesse caso, todas as soluções tendendo à origem para $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$ são tangentes às soluções $\theta^* \in [0, 2\pi)$ da equação $F(\theta) = 0$. Chamamos F de polinômio característico de (2.43) na origem e θ^* de direção característica. Em coordenadas cartesianas, F escreve-se como

$$F(x,y) = xQ_m(x,y) - yP_m(x,y). \tag{2.45}$$

Se $F \equiv 0$ a origem é um ponto singular dicrítico. Nesse caso, deduzimos de (2.45) que $P_m = xW_{m-1}$ e $Q_m = yW_{m-1}$, onde $W_{m-1} \not\equiv 0$ é um polinômio homogêneo de grau $m-1$. Se $y - vx$ é um fator de W_{m-1}, e $v = \tan\theta^*, \theta^* \in [0, 2\pi)$, então θ^* é uma direção singular.

O *blow up* polar homogêneo (ou *blow up* polar) é a aplicação definida por $(r,\theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$, com $r \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Essa aplicação transforma a origem do sistema (2.43) no círculo $r = 0$, o qual é chamado de divisor excepcional (veja a figura 5).

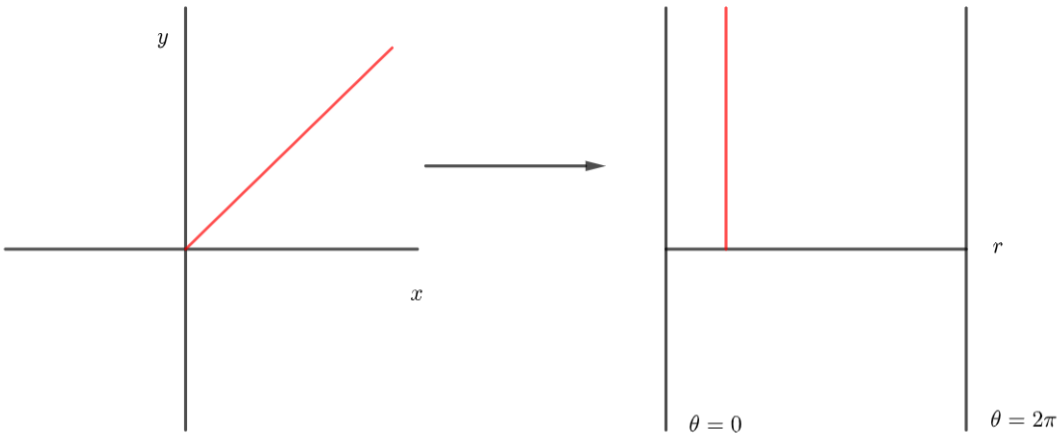

Figura 5 – *Blow up* polar: do plano para o cilindro.

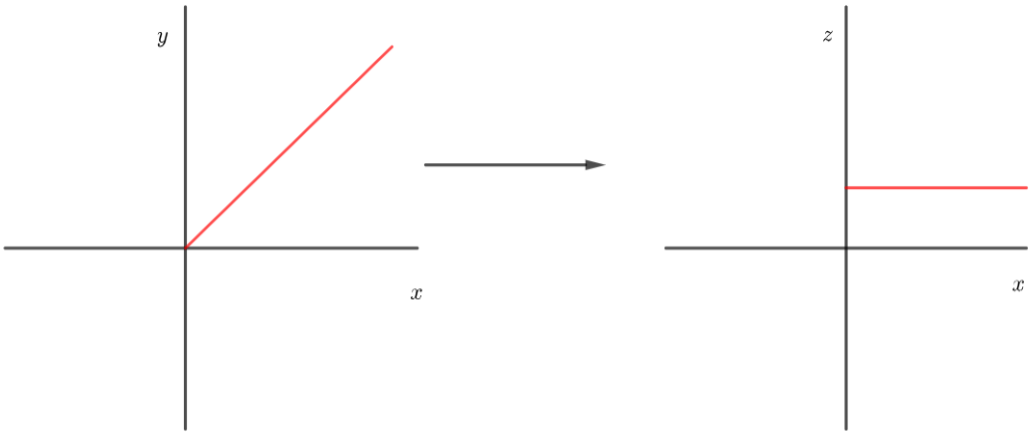

Figura 6 – O *blow up* direcional.

Após do *blow up* polar e cancelamento de um fator comum r^{m-1}, (2.43) passa para (2.44). Se $F \equiv 0$, então esse fator comum é r^m.

O *blow up* direcional homogêneo na direção x (ou *blow up* direcional na direção x) (respectivamente y) é a aplicação dada por $(x,z) \to (x,xz) = (x,y)$ (respectivamente $(z,y) \to (yz,y) = (x,y)$), onde z é uma nova variável. Essa aplicação transforma a origem de (2.43) na reta $x = 0$ (respectivamente $y = 0$). A expressão do sistema (2.43) após o *blow up* na direção x é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,xz), \\ \dot{z} &= \frac{Q(x,xz) - zP(x,xz)}{x}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

que está bem definida, pois estamos assumindo que a origem é uma singularidade. Após o *blow up*, o campo terá fator comum x^{m-1} (x^m se $F \equiv 0$) que pode ser eliminado por uma reparametrização do tempo. Além disso, a aplicação troca o segundo e o terceiro quadrantes no *blow up* x-direcional; e terceiro e quarto quadrantes no *blow up* y-direcional, o qual se escreve

como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{P(yz,y) - zQ(yz,y)}{y}, \\ \dot{x} &= P(yz,y). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Os *blow up*'s polar e direcional são equivalentes em $\{x \neq 0\}(\theta \neq \pi/2, 3\pi/2)$, uma vez que existe uma mudança de variáveis analítica ϕ levando (r,θ) em (x,y):

$$\begin{tikzcd} (r,\theta) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & (x,z) \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & (x,y) & \end{tikzcd}$$

onde $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, \tan\theta) = (x,z)$ e $\pi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ é *blow up* polar e $\pi_2(x,z) = (x,y)$ é o *blow up* x-direcional. No caso do *blow up* y-direcional, acontece algo análogo em $\{y \neq 0\}(\theta \neq 0, \pi)$. Na prática, usamos mais o *blow up* direcional do que o *blow up* polar, uma vez que as expressões são mais simples e manipuláveis neste caso.

A partir de agora, sempre que nos referirmos a *blow up* direcional, estaremos nos restringindo ao *blow up* x-direcional, no entanto, os resultados a seguir também são válidos para o *blow up* y-direcional.

Reproduzimos, assim, dois resultados conhecidos que nos dão a relação entre o ponto singular original do sistema (2.43) e as novas singularidades do sistema explodido (2.46); veja (ANDRONOV *et al.*, 1973).

Proposição 2.7.1. Seja $\varphi_t = (x(t), y(t))$ uma trajetória tendendo à origem do sistema (2.43), para $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. Suponha que $F \not\equiv 0$. Assuma que φ_t é tangente a uma das duas direções angulares $\tan\theta = v, v \neq \infty$. Então, as seguintes afirmações são válidas:

(i) As duas inclinações $\theta = \arctan v$ (em $[0, 2\pi)$) são direções características.

(ii) O ponto $(0,v)$ no plano (x,z) é uma singularidade isolada do sistema (2.46).

(iii) A trajetória φ_t corresponde a uma solução do sistema (2.46) tendendo à singularidade $(0,v)$.

(iv) Reciprocamente, qualquer solução do sistema (2.46) tendendo ao ponto singular $(0,v)$ no plano (x,z) corresponde uma solução do sistema (2.43) tendendo à origem em uma das direções angulares $\tan\theta = v$.

Proposição 2.7.2. Considere o sistema (2.43) e suponha que $F \equiv 0$. Então, para toda direção não singular existe exatamente um semi-caminho tendendo à origem na direção θ para $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. Se θ^* é uma direção singular, podem não existir semi-caminhos tendendo à origem na direção θ^*, ou um número finito ou infinito.

A conclusão das proposições anteriores é que, se queremos estudar o comportamento das soluções em torno da origem do sistema (2.43), é necessário estudar os pontos singulares

do sistema (2.46) no divisor excepcional. Eles correspondem a direções características no caso não dicrítico ou direções singulares no caso dicrítico. Pode acontecer de alguns desses pontos singulares serem degenerados. Se esse é o caso, então devemos estudá-los repetindo o processo.

Ilustramos a ideia da técnica do *blow up* com alguns exemplos.

Exemplo 2.7.1. Considere o sistema planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^2 - 2xy + \dots, \\ \dot{y} &= y^2 - axy + \dots, \end{aligned} \tag{2.48}$$

com $a \in \mathbb{R}^+$, onde os pontos significam termos de ordem mais alta em x e y. Estudamos o comportamento local desse sistema em torno da origem, a qual é um ponto singular degenerado. Desingularizamos tal ponto com o *blow up* direcional e polar.

O *blow up* polar transforma o sistema (2.48) em:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (a\cos^3\theta + \sin^3\theta - 2\cos^2\theta\sin\theta - a\cos\theta\sin^2\theta)r + \dots, \\ \dot{\theta} &= \cos\theta\sin\theta(3\sin\theta - 2a\cos\theta) + \dots, \end{aligned} \tag{2.49}$$

onde os pontos significam termos de ordem mais alta em r. A fim de desingularizar a origem do sistema (2.48), precisamos estudar os pontos singulares do sistema (2.49) ao longo do divisor excepcional $r = 0$, os quais são as soluções da equação

$$\cos\theta\sin\theta(3\sin\theta - 2a\cos\theta) = 0,$$

isto é, $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \arctan(2a/3), \arctan(2a/3) + \pi$. Verificamos que todos esses pontos são selas hiperbólicas. O retrato de fase do sistema (2.49) no cilindro é exibido na Figura (7) (a). Se fechamos o cilindro identificando $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, vemos o divisor excepcional como um círculo, veja a Figura (7) (b). Esse é o modo usual de visualizar $r = 0$ no sistema após o *blow up* para o caso polar. Nesse caso, o interior do círculo representa $r < 0$ e o exterior $r > 0$. Consequentemente, estamos interessados exclusivamente nas separatrizes do exterior do círculo.

Finalmente, retrocedendo o *blow up*, recuperamos o retrato de fase do sistema original (2.48) na Figura (7) (c). Como podemos ver neste exemplo, isso é facilmente feito reduzindo o círculo a um ponto.

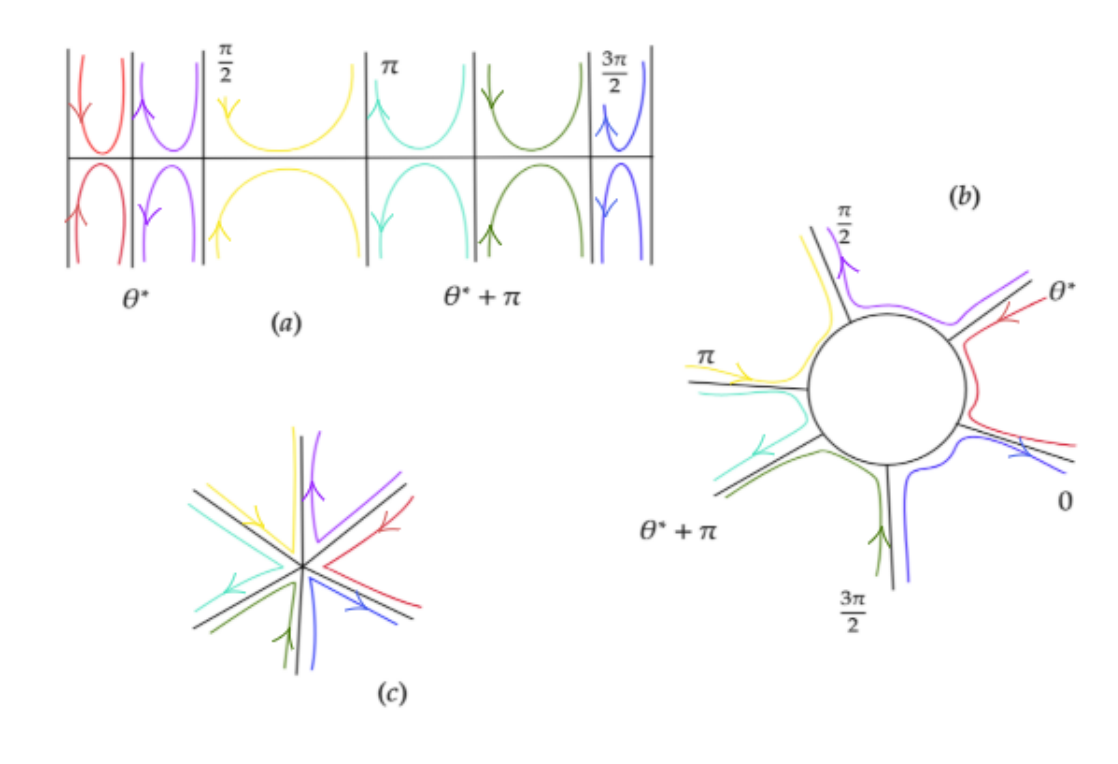

Figura 7 – A desingularização do exemplo (2.7.1) usando o *blow up* polar.

A seguir, usamos o *blow up* direcional para desingularizar a origem do sistema (2.48). O polinômio característico desse sistema é $F(x,y) = xy(3y-2ax)$. Portanto, precisamos realizar ambos os *blow up*'s direcionais a fim de completar o retrato de fase local em torno da origem, uma vez que $x = 0$ e $y = 0$ são direções características. Começamos com o *blow up* x-direcional $(x,y) \to (x,xz)$. O sistema (2.48) se escreve nas novas variáveis como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a-2z)+\dots, \\ \dot{z} &= z(3z-2a)+\dots, \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde um fator comum x foi cancelado. Estamos interessados nos pontos singulares que estão sobre o divisor excepcional $x = 0$, $(0,0)$ e $(0,2a/3)$. Ambos são pontos de sela. O retrato de fase do sistema (2.50) é exibido na Figura (8) (a).

A seguir, aplicamos o *blow up* y-direcional $(x,y) \to (yw,y)$, obtendo o sistema

$$\begin{aligned} \dot{w} &= w(2aw-3)+\dots, \\ \dot{y} &= y(1-aw)+\dots, \end{aligned} \tag{2.51}$$

onde o fator comum y foi cancelado. Nesse caso, apenas a origem é estudada. A origem do sistema (2.51) é também um ponto de sela. O retrato de fase do sistema (2.51) é exibido na Figura (8) (b).

Reunindo ambos os *blow ups* direcionais, obtemos o retrato de fase local do sistema original (2.48) como apresenta a Figura (7) (c). Tal retrato é topologicamente equivalente àquele obtido usando-se o *blow up* polar. O divisor excepcional reduz-se a um ponto, e então as órbitas são levemente modificadas. Seguindo a Proposição 2.7.2, o ponto singular $(0,2a/3)$ do sistema

(2.50) é transformado numa solução chegando à origem do sistema (2.48) com inclinação $2a/3$. As demais soluções se comportam da mesma maneira.

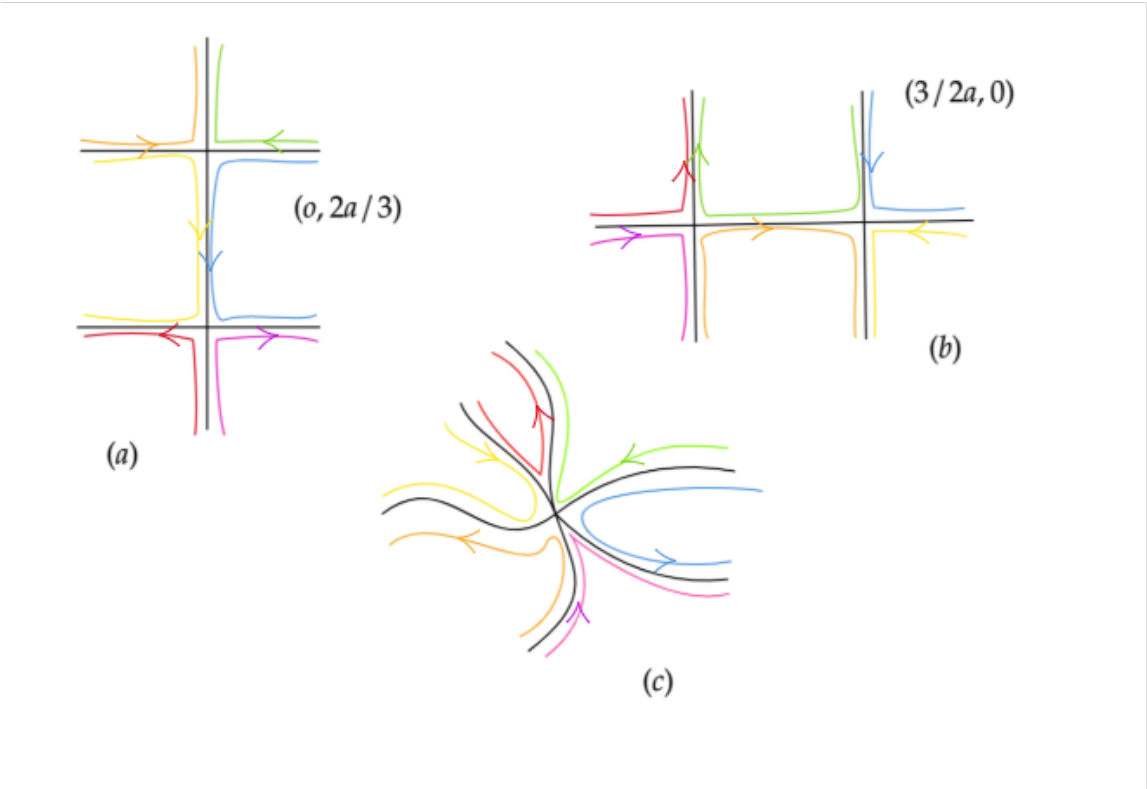

Figura 8 – A dessingularização do exemplo (2.7.1) usando *blow ups* direcionais.

Exemplo 2.7.2. (A cúspide). Considere o sistema diferencial quadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + xy. \end{aligned} \tag{2.52}$$

A origem é o único ponto singular do sistema e é nilpotente. Além disso, $F = y^2$, portanto apenas temos a direção característica $y = 0$. Se aplicarmos o *blow up* x-direcional $y = xz$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xz, \\ \dot{z} &= x + xz - z^2, \end{aligned} \tag{2.53}$$

que tem a origem como seu único ponto singular na reta $x = 0$. Tal ponto é degenerado, portanto realizamos o *blow up* novamente, mas, dessa vez, fazemos a mudança $x = zu$, uma vez que $x = 0$ é uma direção característica. De fato, $F = x^2$. Temos,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u^2 + 2uz - u^2 z, \\ \dot{z} &= z(u - z + uz). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Em $z = 0$, a origem é o único ponto singular, e é, novamente, degenerado. O polinômio característico é $F = uz(2u - 3z)$. Como z é um fator simples de F, não precisamos realizar o *blow up* z-direcional, mas sim na direção u. Após a mudança $z = uv$, o sistema (2.54) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(-1 + 2v - uv), \\ \dot{v} &= v(2 - 3v + 2uv), \end{aligned} \tag{2.55}$$

do qual obtemos duas selas em $(0,0)$ e $(0,2/3)$ com, respectivamente, autovalores $-1,2$ e $-2,1/3$.

Então, a desingularização da origem do sistema (2.52) está feita. A seguir, explicaremos como obter o comportamento local da origem. Temos seis regiões no plano (u,v). Quando voltamos ao plano (u,z), essas seis regiões podem mudar sua forma e posição no plano, como o segundo e terceiro quadrantes trocam de posição no plano (u,v); além disso, a separatriz do ponto singular $(0,2/3)$ no plano (u,v) torna-se a separatriz com inclinação $2/3$ no plano (u,z), digamos $u = 3z/2+\dots$. No próximo passo, o terceiro e quarto quadrantes são trocados de lugar, e a curva $u = 3z/2$ no plano (u,z) torna-se a curva $z = \pm\sqrt{2x/3}+\dots$ no plano (x,z), $x \geq 0$. A reta $z = 0$ é perdida como separatriz, uma vez que é divisor excepcional e passamos de seis a quatro regiões. Na última etapa, o segundo e terceiro quadrantes são trocados, a curva $z = \pm\sqrt{2x/3}+\dots$ torna-se a cúspide $y = \pm\sqrt{2x/3}x+\dots$, e $x = 0$ é perdida como separatriz. Nós mudamos de quatro regiões para duas, e, então, terminamos o processo. Os retratos de fase locais podem ser vistos na Figura 9.

Exemplo 2.7.3. Considere o sistema polinomial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^2 + x^7, \\ \dot{y} &= y^3(1+x^2). \end{aligned} \tag{2.56}$$

A origem é seu único ponto singular e é degenerada. O polinômio característico na origem é $F = y^3$, e, então, $y = 0$ é a única direção característica. Aplicamos o *blow up* x-direcional $(x,y) \to (x,xz)$ para obter (após cancelarmos um fator comum x^2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^5 + z^2), \\ \dot{z} &= -z(x^5 + z^2 - xz^2 - x^3z^2). \end{aligned}$$

A origem é o único ponto singular em $x = 0$ do novo sistema e é também degenerada, logo precisamos realizar outro *blow up*. O polinômio característico é, agora, $F = -2xz^3$. Obviamente, $x = 0$ é uma direção característica porque é invariante. Se o fator x está elevado a alguma potência maior que na expressão de F, isso significa que mais algumas órbitas chegariam na origem com a tangente vertical, então precisaríamos realizar um *blow up* na direção y. Como nesse caso isso é simples (x está elevado a um), não precisamos realizar um *blow up* nessa direção. Consequentemente, devemos aplicar apenas o *blow up* x-direcional $(x,z) \to (x,xt)$, do qual obtemos (após cancelarmos o fator comum x^2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(t^2 + x^3), \\ \dot{t} &= t(-2t^2 + t^2x - 2x^3 + t^2x^3). \end{aligned}$$

A origem desse sistema é, de novo, o único ponto singular em $x = 0$, e é também degenerado. Portanto, precisamos aplicar o *blow up* novamente. O polinômio caracterísco é $F = -3xt^3$. Novamente, temos $x = 0$ como uma direção característica simples, logo precisamos aplicar o *blow up* ao sistema apenas na direção x: $(x,t) \to (x,xu)$. Após cancelarmos o fator comum

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(u^2 + x), \\ \dot{u} &= u(u^2x^3 + u^2x - 3u^2 - 3x). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Mais uma vez, a origem é o único ponto singular em $x = 0$ e é degenerado. O novo polinômio característico é $F = -4x^2u$, assim temos que aplicar ambos os *blow ups* direcionais, porque a reta $x = 0$ não é mais uma direção característica simples. Portanto, aplicaremos o *blow up* u-direcional para estudar as órbitas chegando como tangentes a essa reta.

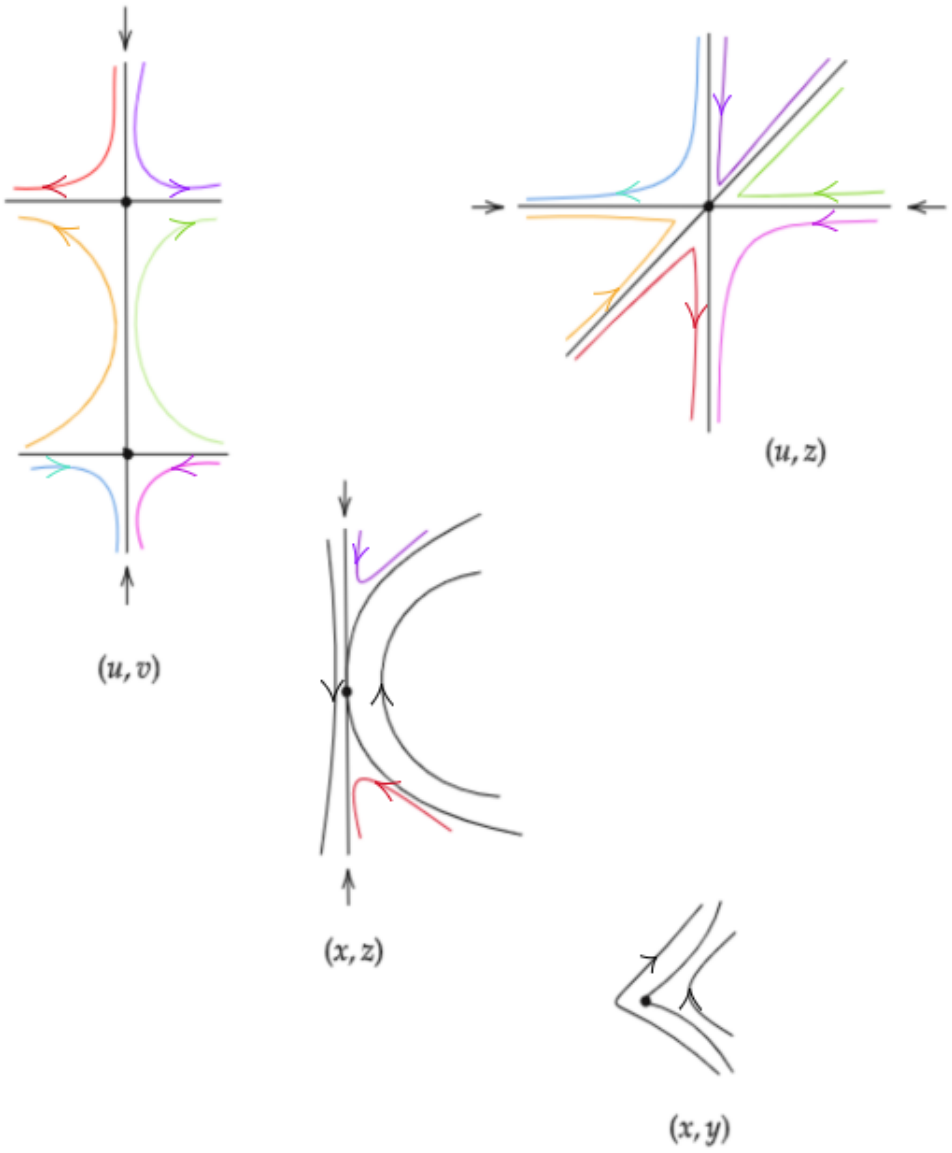

Figura 9 – A desingularização do exemplo (2.7.2).

Começamos com o *blow up* $(x,u) \to (x,xv)$, obtendo o sistema

$$\dot{x} = x(v^2x+1), \quad \dot{v} = v(v^2x^4+v^2x^2-4v^2x-4).$$

a origem é o único ponto singular, que é uma sela. Aplicamos o *blow up* u-direcional $(x,u) \to (uv_1,u)$ ao sistema (2.57) para obtermos

$$\dot{v}_1 = -v_1(u^4v_1^3+u^2v_1-4u-4v_1), \quad \dot{u} = u(u^4v_1^3+u^2v_1-3u-3v_1).$$

A origem é um ponto singular degenerado, então precisamos aplicar o *blow up* novamente. O polinômio característico é $F = -7uv_1(u+v_1)$. Devemos realizar o *blow up* apenas na direção u porque $u = 0$ é uma direção característica simples. Com esse *blow up* $(v_1,u) \to (uw,u)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -w_1(2u^6w_1^3+2u^2w_1-7w_1-7), \\ \dot{u} &= u(u^6w_1^3+u^2w_1-3w_1-3). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Esse sistema tem dois pontos singulares não degenerados: $(0,0)$, que é uma sela, e $(-1,0)$, que tem um autovalor nulo. Tomando a forma normal, veja (ANDRONOV *et al.*, 1973), sabemos que é um nó.

Finalmente, retrocedemos com todos os *blow ups* aplicados para obtermos os retratos de fase de todos os sistemas até obtermos o retrato de fase do sistema (2.56), veja a Figura 10.

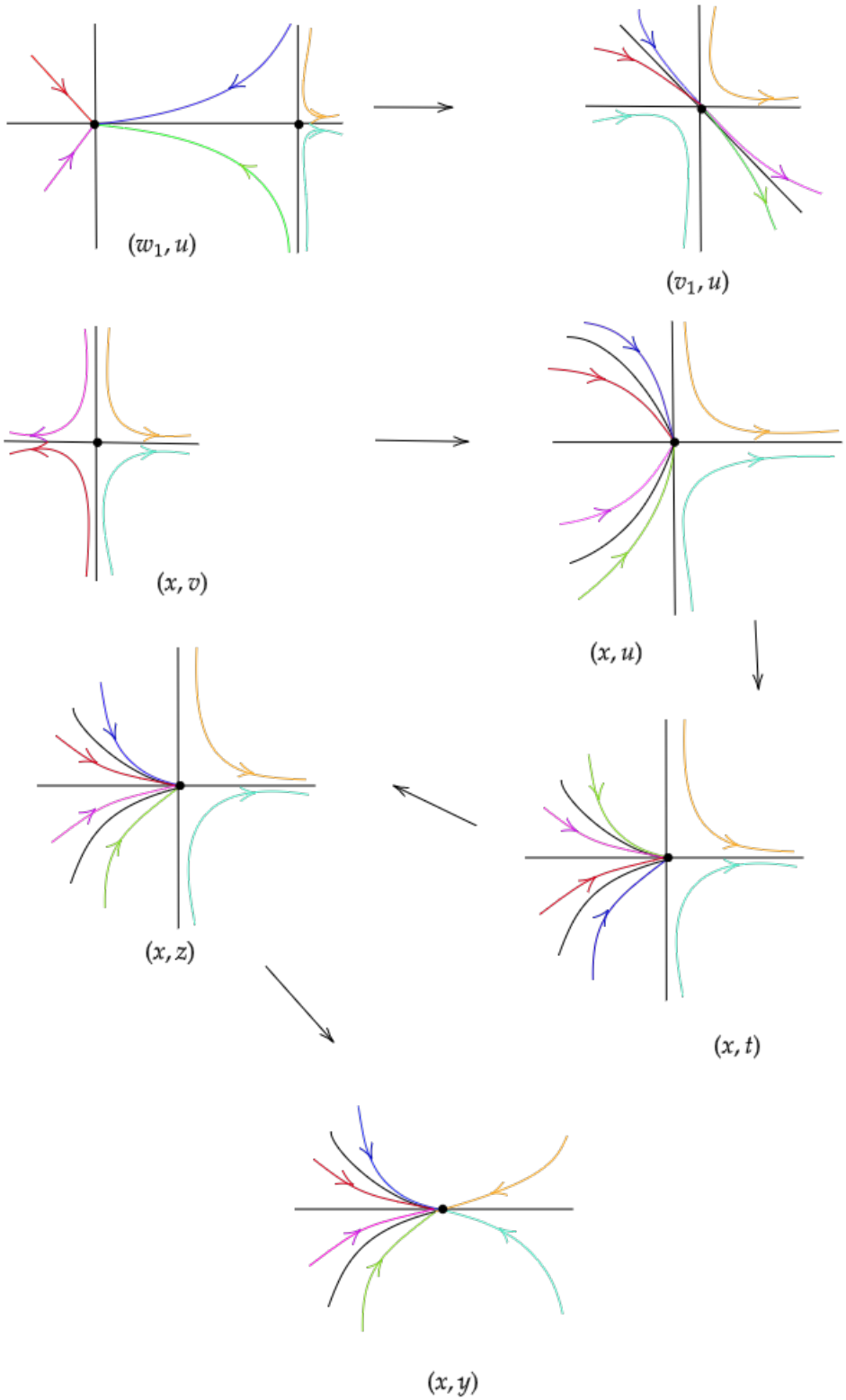

Figura 10 – A desingularização do exemplo (2.7.3).

CAPÍTULO

3

UNICIDADE DE CICLOS LIMITES NO SISTEMA DE RAYLEIGH GENERALIZADO

Neste capítulo apresentamos trabalho desenvolvido em colaboração com os professores Jaume Llibre (UAB, Espanha) e Regilene Oliveira (ICMC-USP, São Carlos), sobre a existência e unicidade de ciclo limite no sistema de Rayleigh generalizado.

A equação diferencial de segunda ordem dada por

$$\ddot{x} + x = a(1 - \dot{x}^{2n})\dot{x},$$

com n inteiro positivo e $a \in \mathbb{R}$, é conhecida como equação de Rayleigh generalizada. Esta equação diferencial aparece, por exemplo, na modelagem de processos químicos diabáticos através de duto de área constante, onde o efeito do acréscimo ou rejeição de calor é considerado. Denotando $\dot{x}$ por y mostramos que o sistema planar abaixo é equivalente a equação de Rayleigh generalizada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + a(1 - y^{2n})y, \end{aligned}$$

chamado de sistema de Rayleigh generalizado. Aplicando a mudança $x \to y, y \to x, t \to -s$, re-escrevemos o sistema acima na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a(x^{2n} - 1)x, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note que o sistema (3.1) é um sistema diferencial polinomial do tipo Liénard a um parâmetro. O sistema de Rayleigh generalizado foi estudado por Lins, Melo e Pugh em (LINS; MELO; PUGH, 1977). No entanto, neste trabalho existem duas falhas. Aqui, vamos apontá-las e corrigí-las. Nosso objetivo é provar a unicidade de ciclo limite no sistema (3.1) usando ferramentas de Teoria Qualitativa das EDO's. Vamos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 3.0.1. O sistema diferencial de Rayleigh generalizado (3.1) tem um único ciclo limite se $0 < |a| \neq 2$. O ciclo limite, quando exite, é estável se $a < 0$ e instável se $a > 0$.

Nesse intuito, precisamos do Teorema 3.4.1 (a ser introduzido nas próximas seções). Contudo, a fim de demonstrá-lo, é necessário fazer uma breve introdução aos campos vetoriais rotacionados. Assim, iniciamos o capítulo com duas subseções formadas por resultados preliminares à teoria dos campos vetoriais rotacionados, que são enunciados sem prova, mas também

sem comprometer a compreensão da teoria necessária. O polígono de Newton foi destacado em sua própria subseção para que houvesse uma breve ilustração da sua utilização através de um exemplo.

3.1 Resultados auxiliares

Como dito, começamos enunciando resultados importantes para introduzir a teoria de campos vetoriais rotacionados. Esta e a próxima subseção baseiam-se no livro (CHOW; HALE, 1983), onde podem ser encontrados todos os enunciados e demonstrações.

Teorema 3.1.1 (Teorema da Função Implícita - Cauchy-Dini)**.** Suponha que X, Y, Z são espaços de Banach, $U \subset X, V \subset Y$ conjuntos abertos, $F : U \times V \to Z$ continuamente diferenciável, $(x_0, y_0) \in U \times V$, $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_x F(x_0, y_0)$ tem uma inversa limitada. Então, existe uma vizinhança $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ de (x_0, y_0) e uma função $f : V_1 \to U_1$, $f(y_0) = x_0$ tal que $F(x, y) = 0$ para $(x, y) \in U_1 \times V_1$ se, e somente se, $x = f(y)$. Se $F \in C^k(U \times V, Z)$, $k \geq 1$ ou é analítica numa vizinhança de (x_0, y_0), então $f \in C^k(V_1, X)$ ou é analítica numa vizinhança de y_0.

Teorema 3.1.2. Suponha $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ analítica numa vizinhança de $(0,0)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &f(w,0) = w^k g(w), g \text{ analítica numa vizinhança de } 0 \in \mathbb{C}, \\ &g(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Então, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para todo $z, |z| < \delta$, existem exatamente k soluções $w_1(z), \ldots, w_k(z)$ de

$$f(w,z) = 0$$

satisfazendo $|w_j(z)| < \varepsilon, j = 1, 2, \ldots, k$. Além disso, cada $w_j(0) = 0$.

Considere um sistema $(n+1)$-dimensional

$$\dot{z} = Cz + w(t,z) + f(t,z), \tag{3.2}$$

onde $w, f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ são contínuas, assim como suas derivadas em z de ordem $k \geq 2$, 2π-periódicas em $t, w(t,0) = 0, \frac{\partial w(t,0)}{\partial z} = 0$ e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

onde os autovalores de B têm partes reais negativas. A função w é assumida fixada, e a função f é considerada um parâmetro variando numa vizinhança de zero no espaço de funções $\mathscr{F}_k = \{f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : f$ é contínua junto com suas derivadas em z de ordem $k \geq 2, 2\pi$-periódicas em $t\}$ com a topologia C^k. Tomemos $z = (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f = (g,h)$, $Im(g) \subset \mathbb{R}$, $Im(h) \subset \mathbb{R}^n$, $w = (u,v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$.

O método de Liapunov-Schimdt implica que existe $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança W de 0 em $\mathscr{P}_{2\pi} = \{z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} : z$ é 2π-periódica e contínua$\}$ tal que, para todo $f \in V(\varepsilon) = \{f : |f|_k < \varepsilon\}$,

toda solução 2π-periódica de (3.2) em W deve ser da forma $z(t,a,f), a \in \mathscr{U}(\varepsilon) = (-\varepsilon,\varepsilon)$, onde $z(.,a,f) = (x(.,a,f), y(.,a,f))$ satisfaz as equações

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t,a,f)dt = a, \\ &\dot{x} = u(t,z) + g(t,z) - G(a,f), \\ &\dot{y} = By + v(t,z) + h(t,z), \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

$$G(a,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(t,z(t,a,f) + g(t,z(t,a,f))]dt, \tag{3.4}$$

e a é um zero da *função bifurcação* $G(a,f)$, isto é,

$$G(a,f) = 0. \tag{3.5}$$

Reciprocamente, qualquer solução de (3.5) nos dá uma solução 2π-periódica de (3.2) em W. A função $G(a,f)$ é C^k em (a,f).

Considere, agora, um sistema 2-dimensional

$$\dot{x} = f(x,\mu), \tag{3.6}$$

onde $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in E$, um espaço de Banach, $f : \mathbb{R}^2 \times E \to \mathbb{R}^2$ é C^k, $k \geq 1$, e, para $\mu = 0$, o sistema

$$\dot{x} = f(x,0) \tag{3.7}$$

tem uma órbita periódica Γ. O objetivo é discutir o comportamento das órbitas de (3.6) para (x,μ) numa vizinhança de $\Gamma \times \{0\}$.

Para essa discussão, é conveniente usar um sistema de coordenadas diferente próximo a Γ. Suponha

$$\Gamma = \{u(t) : 0 \leq t < \omega\}, \tag{3.8}$$

onde ω é uma constante positiva (que pode ser tomada como 2π após uma reparametrização), $u(t)$ é ω-periódica e uma solução de (3.7), $u(t) \neq 0$ para todo t. Se $u = (u_1,u_2)$, tome $v(t) = (\dot{u}_2(t), -\dot{u}_1(t))$ e considere a transformação de variáveis de x para (θ,p) definida pela relação

$$x = u(\theta) + pv(\theta). \tag{3.9}$$

Uma aplicação do Teorema da Função Implícita implica que isso é um difeomorfismo de uma vizinhança de Ω em $[0,\omega) \times V$, onde V é uma vizinhança de $p = 0$. Identificando o ponto $\theta = 0$ com $\theta = \omega$, podemos definir a transformação (3.9) para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Tal transformação é ω-periódica em θ.

Apliquemos a transformação (3.9) a (3.6). Se x^T é a transposta de x e $|x|^2 = x^T x$, então as equações para θ, p são

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial u^T}{\partial \theta} f(u+pv,\mu)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2 + p\frac{\partial u^T}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]^{-1} := 1 + \Theta(\theta,p,\mu), \\ \dot{p} &= \frac{\left[-pv^T\frac{\partial v}{\partial \theta}\theta + v^T f(u+pv,\mu)\right]}{|v|^2}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

para p numa vizinhança da origem suficientemente pequena. A função $\Theta(\theta,p,\mu)$ se anula para $(p,\mu)=(0,0)$ e é 2π-periódica em θ. Portanto, para (p,μ) numa vizinhança suficientemente pequena da origem, podemos eliminar t em (3.10) para obter

$$\frac{dp}{d\theta}=R(\theta,p,\mu), \tag{3.11}$$

onde $R(\theta,p,\mu)=R(\theta+\omega,p,\mu)$ e $R(\theta,0,0)=0, \frac{\partial R}{\partial p}(\theta,0,0)=0$. As órbitas periódicas de (3.11) numa vizinhança de $\Gamma\times\{0\}$ estão numa bijeção com as soluções ω-periódicas de (3.11) numa vizinhança de $(p,\mu)=(0,0)$.

Assim, como R admite uma função bifurcação G, podemos usar os seguintes teoremas para estudarmos as soluções periódicas de (3.6):

Teorema 3.1.3. Seja $G(a,\mu)$ uma função bifurcação obtida pelo método de Liapunov-Schimidt. Existem vizinhanças $U\subset\mathbb{R}^2\times E$ de $\Gamma\times\{0\}, V\subset\mathbb{R}\times E$ de $(a,\mu)=(0,0)$ tais que as soluções periódicas de (3.6) em U estão em bijeção com os zeros de $G(a,\mu)$ em V. Além disso, as propriedades de estabilidade dessas soluções periódicas são as mesmas que as propriedades de estabilidade dos zeros de G como soluções da equação escalar

$$\dot{a}=G(a,\mu). \tag{3.12}$$

Ainda, no caso de $G(a,\mu)$ satisfazer

$$G(a,0)=\beta a^k+O(|a|^{k+1}), \beta\neq 0, \tag{3.13}$$

conforme $a\to 0$, temos o resultado a seguir:

Teorema 3.1.4. Se $G(a,\mu)$ satisfaz (3.13), então existe uma vizinhança U de $\Gamma\times\{0\}$ na qual (3.6) tem, no máximo k soluções periódicas. Se

$$f(x,\mu)=v(x)+\mu(x), \tag{3.14}$$

com $\mu\in E=C^{k+1}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, então, ou para k ímpar e $j=1,2,\ldots,k$, ou para k par e $j=0,1,\ldots,k$, existem uma $\mu\in E$ e exatamente j soluções periódicas $\{\phi_i\}$ de (3.6) com $(\pi_i,\mu)\in U$ para cada i.

3.2 Polígono de Newton

Nesta seção, supomos $f:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica numa vizinhança de $(0,0)$ satisfazendo as seguintes relações:

(i) $f(w,z)=w^k+a_{k-1}(z)w^{k-1}+\cdots+a_0(z)+a_{k+1}(z)w^{k+1}+\ldots,$

(ii) $a_j(z)=a_j^{(p_j)}z^{p_j}+a_j^{(p_{j+1})}z^{p_{j+1}}+\ldots,$

(iii) $a_0^{p_0}\neq 0,$

onde cada $a_j(z)$ é analítico numa vizinhança de $z = 0$.

Nosso objetivo é fornecer um método construtivo para encontrar as soluções de

$$f(\omega, z) = 0. \tag{3.15}$$

A dificuldade consiste em reconhecer nessa série de potências complicada quais termos são importantes e quais podem ser ignorados. Para termos uma ideia do que ocorre, consideramos alguns exemplos.

Para a equação

$$w^2 + a_0^{(1)} z + a_0^{(3)} z^3 = 0, \; a_0^{(1)} \neq 0, \tag{3.16}$$

o termo linear em z deve ser "mais importante"que o cúbico. Portanto, as soluções devem estar próximas das soluções de $w^2 + a_0^{(1)} z = 0$, as quais são funções de $z^{1/2}$. Se $w = z^{1/2} v$, então v satisfaz a equação:

$$v^2 + a_0^{(1)} + a_3^{(3)} z^2 = 0.$$

Como $a_0^{(1)} \neq 0$, essa equação tem duas soluções simples $\pm(-a_0^{(1)})^{1/2}$. Portanto, o Teorema 3.1.1 implica que existem duas soluções $v_j(z)$, analíticas em z, para $|z| < \delta$, suficientemente pequeno. Isso implica que as soluções w da equação (3.16) são dadas por $w_j(z) = z^{1/2} v_j(z), j = 1, 2$. Pelo Teorema 3.1.2, para δ suficientemente pequeno, existem apenas duas soluções, e, portanto, todas as soluções são obtidas dessa forma.

Como outro exemplo, considere a equação:

$$w^3 + a_2^{(1)} w^2 + a_1^{(3)} z^3 w + a_0^{(4)} z^4 = 0, \tag{3.17}$$

com todos os coeficientes não nulos. Não é mais claro como w deve depender de z. Assumimos, então, que $w = z^\alpha v$ e tentamos determinar $\alpha \in (0, \infty)$ e uma função $v(z)$ contínua em $z, v(0) \neq 0$, de forma que (3.17) seja satisfeito. Assim,

$$z^{3\alpha} v^3 + a_2^{(1)} z^{1+2\alpha} v^2 + a_1^{(3)} z^{3+\alpha} v + a_0^{(4)} z^4 = 0.$$

Como $v(0) \neq 0$ e desejamos obter uma solução $v(z)$ para $|z| < \delta$, a constante α deve certamente ser escolhida de forma que pelo menos dois dos expoentes de z sejam iguais. Para tal α, devemos dividir a equação por esse expoente comum. Para esse exemplo, $3\alpha = 1 + 2\alpha$ implica $\alpha = 1$ e os expoentes de z são $(3, 3, 4, 4)$, satisfazendo os requisitos especificados. Dividindo por z^3, temos

$$v^3 + a_1^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z v + a_0^{(4)} z = 0.$$

Essa equação, para $z = 0$, tem um zero simples $v = -a_2^{(1)}$. Portanto, o Teorema 3.1.1 implica que existe uma solução analítica $v(z)$ próxima a $z = 0$ com $v(0) = -a_2^{(1)}$. Uma solução de (3.17) é $w(z) = z v(z)$.

Checando outros possíveis valores para α, obtemos $1 + 2\alpha = 4, \alpha = \frac{3}{2}$ com os correspondentes expoentes para z sendo $(9/2, 4, 9/2, 4)$. Nossos requisitos para α são satisfeitos. Dividindo por z^4, obtemos

$$z^{1/2} v^3 + a_2^{(1)} v^2 + a_1^{(3)} z^{1/2} v + a_0^{(4)} = 0. \tag{3.18}$$

Para $z = 0$, existem duas soluções distintas $v = \pm(-a_0^{(4)}/a_2^{(1)})^{1/2}$. O Teorema 3.1.1 implica que existem duas funções $v_j(\psi), j = 1,2$, analíticas para ψ próximo de zero tais que a equação (3.18) tem a solução $v_j(z^{1/}), j = 1,2$, próximo de $z = 0$. Portanto, a equação original deve ter duas soluções distintas $w_j(z) = z^{3/2}v_j(z^{1/2}), j = 1,2$.

Essas duas soluções, mais a obtida anteriormente, nos dão três soluções da equação (3.17), as quais são todas as soluções pelo Teorema 3.1.2.

O Polígono de Newton sistematiza o procedimento usado para determinar os expoentes α nos exemplos acima e aplica-se à equação (3.15) onde f satisfaz (i), (ii) e (iii).

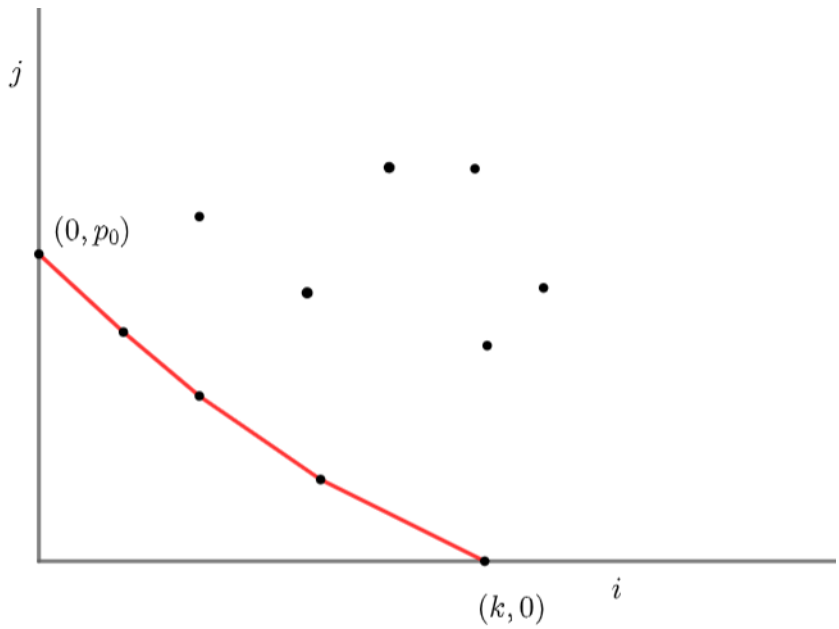

Figura 11 – Construindo o polígono de Newton.

Introduza as coordenadas retangulares (i, j) no plano e associe a todo termo da relação (i) um ponto A_i, com coordenadas $(i, p_i), i = 0, 1, ..., k$, onde p_i é o expoente de z no primeiro coeficiente não nulo da expansão em série de potências de $a_i(z)$. Se $a_i(z) = 0$ para todo z, não assinale nenhum ponto no plano. Considere a linha poligonal convexa L passando pelos pontos do conjunto $\{A_i\}$ ligando $(0, p_0)$ a $(k, 0)$ tais que cada A_i encontra-se acima de L ou em L. Essa linha poligonal convexa é conhecida como o polígono de Newton ou diagrama de Newton (veja a figura 11).

No exemplo (3.17), os A_i's são $(3,0), (2,0), (1,3), (0,4)$.

O polígono de Newton consiste num número finito de segmentos de reta L_j com pontos finais $(A_{i_{j-1}}, A_{i_j})$, inclinações $-\alpha_j$ e a distância entre $A_{i_{j-1}}$ e A_{i_j} sendo $n_j = i_j - i_{j-1}, j = 1, 2, \ldots, r$. Além disso, $A_{i_0} = (0, p_0), A_{i_r} = (k, 0)$.

Provamos, a seguir, que, correspondendo a cada L_j, existem n_j soluções de (3.15) da forma $z^{\alpha_j}v_{jl}(z), l = 1, 2, \ldots, n_j$, onde cada $v_{jl}(z)$ é analítica em alguma potência fracionária de z, numa vizinhança de $z = 0$. Como $\sum_{j=1}^{r} n_j = k$, segue do Teorema 3.1.2 que esse processo garantirá todas as soluções de (3.15).

Se α_j é um dos números definidos acima correspondendo ao segmento de reta L_j e pontos $A_{i_{j-1}} = (i_{j-1}, p_{i_{j-1}}, A_j = (i_j, p_{i_j})$, então $p_{i_{j-1}} + \alpha_j i_{j-1} \leq p_{i_j} + \alpha_j i_j \leq p_i + \alpha_j i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$. A igualdade pode valer aqui para alguns outros pontos A_i, mas, para simplicidade da notação, suponhamos que não. Por essa desigualdade, podemos tomar

$$w = z^{\alpha_i} v \tag{3.19}$$

na equação (3.15), dividindo a equação resultante por $z^{p_{j_i} + \alpha_j i_j}$ para obter uma equação "escalonada"para v na forma

$$a_{i_j}^{p_{i_j}} v^{i_j} + a_{i_{j-1}}^{p_{i_{j-1}}} v^{i_{j-1}} + g_{i_j}(z, v) = 0, \tag{3.20}$$

onde $g_{i_j}(z, v)$ é analítica em v em alguma potência fracionária de z próxima de $(0,0), g_{i_j}(0, v) = 0$.

Para $z = 0$, possíveis candidatos para soluções aproximadas de 3.20 são as soluções da equação

$$a_{i_j}^{p_{i_j}} v^{n_j} + a_{i_{j-1}}^{p_{i_{j-1}}} = 0, \tag{3.21}$$

com $n_j = i_j - i_{j-1}$. Essa equação tem n_j raízes distintas não nulas e o Teorema 3.1.1 implica que existe uma única solução de (3.20) correspondente a cada uma dessas raízes, as quais são analíticas em alguma potência fracionária de z. Retornando a variável original w dada por (3.19), obtemos n_j soluções de (3.15). Repetindo esse processo, para cada j, obtemos todas as soluções de (3.15).

Se mais do que dois dos números $p_i + \alpha_j i$ são iguais, então o resultado de (3.21) envolve mais potências de v, existindo a possibilidade de uma raiz múltipla da equação para $z = 0$. Próximo a essa raiz, devemos repetir o processo acima. Mais do que levar essa análise em detalhes, ilustramos o processo com um exemplo.

Considere a equação

$$f(w, z) := w^5 + 2zw^4 - 2w^2 - 2z^2 w - z^3 - z^4 = 0. \tag{3.22}$$

O diagrama de Newton é exibido na Figura 12. Da figura, obtemos $\alpha_1 = 1, n_1 = 2, \alpha_2 = 1/3, n_2 = 3$.

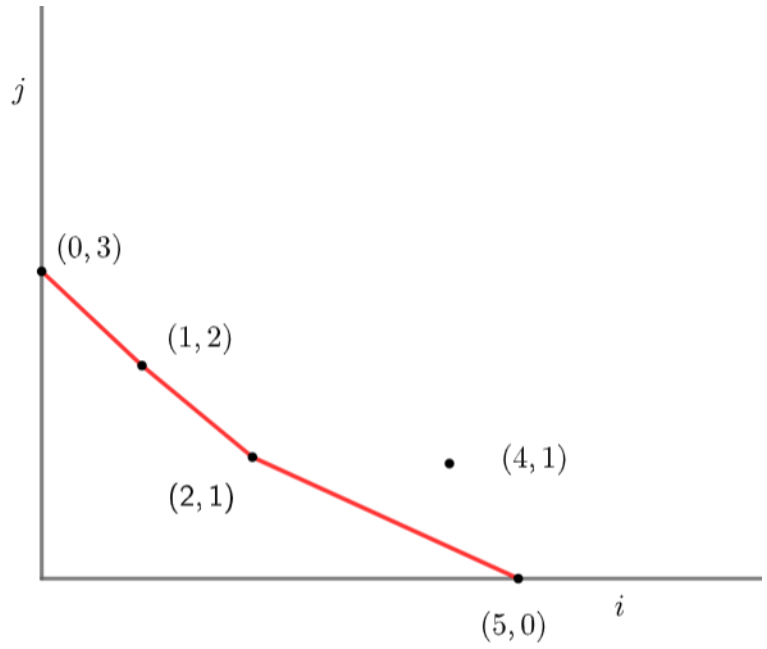

Figura 12 – Ilustrando o exemplo (3.22).

Se $w = z^{1/3}v$, então v satisfaz a equação "escalonada"

$$v^5 + 2z^{2/3}v^4 - v^2 - 2z^{2/3} - z^{4/3} - z^{7/3} = 0. \tag{3.23}$$

Para $z = 0$, essa equação tem três raízes não nulas distintas dadas pelas raízes de $v^3 - 1 = 0$. Portanto, o Teorema 3.1.1 implica que (3.23) tem três raízes $v_j(z^{1/3})$ analíticas em $z^{1/3}$ próximo a $z = 0$ e $v_j^3(0) = 1$. As funções $w_j(t) = z^{1/3}v_j(z^{1/3})$ fornecem três soluções da equação (3.22).

Se $w = zv$, então v satisfaz a equação "escalonada"

$$z^2v^5 + 2z^2v^4 - v^2 - 2v - 1 - z = 0.$$

Para $z = 0$, essa equação tem um zero duplo em $v = -1$. Se $v + 1 = \overline{v}$, então $\overline{v}$ satisfaz a equação

$$(1 - 2z^2)\overline{v}^2 + 3z^2\overline{v} + z - z^2 + O(z\overline{v}^3) = 0.$$

O polígono de Newton para essa equação é exibido na Figura 13. Disso, temos que $\alpha_1 = 1/2, n_1 = 2$. Se $\overline{v} = z^{1/2}\overline{\overline{v}}$, então $\overline{\overline{v}}$ satisfaz a equação "escalonada"

$$\overline{\overline{v}}^2 + 1 + O(z) = 0.$$

Essa equação tem duas soluções $\overline{\overline{v}}_j(z)$ analíticas em z, o que implica que (3.22) tem duas soluções da forma $w = z^{3/2}\overline{\overline{v}}_j(z)$. Essas duas soluções e as três soluções anteriores são todas as soluções de (3.22) próximas à origem.

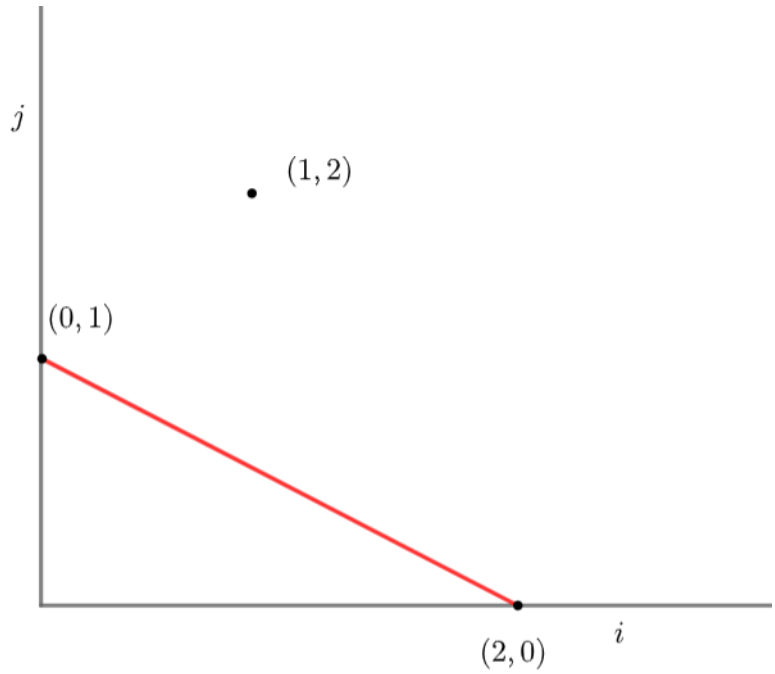

Figura 13 – Concluindo o exemplo (3.22).

3.3 Campos vetoriais rotacionados

Fazemos, aqui, uma introdução aos campos vetoriais rotacionados, com o propósito de apresentar algumas ferramentas usadas na demonstração do Teorema 3.4.1. Todavia, os resultados apresentados têm sua importância por si só dentro da Teoria Qualitativa das EDO's, visto que ajudam a compreender como ciclos limites comportam-se dentro de uma família de sistemas de EDO's com base na variação de um parâmetro. Basemo-nos em (HAN, 1999), onde estão todos os resultados desta seção.

3.3.1 Definições de campos rotacionados

A teoria de campos de vetores rotacionados foi iniciada por Duff (DUFF, 1953) em 1953 e foi estendida por Chen (CHEN, 1963a; CHEN, 1963b; CHEN, 1975) e Perko (PERKO, 1975; PERKO, 1993). Essa teoria mostrou-se imensamente útil na pesquisa envolvendo ciclos limites (veja (CHEN, 1963a; CHEN, 1963b; CHEN, 1975; DUFF, 1953; HAN; ZHU, 1994; PERKO, 1975; PERKO, 1993; PERKO, 1990; PERKO, 1991; YE, 1995; YE, 1986; ZHANG; DING, 1985)). Nesta subseção, primeiro introduzimos diferentes definições de campos de vetores rotacionados dadas por Duff, depois Perko, e, então, apresentamos uma definição mais geral e usada atualmente na literatura.

Desejamos estudar a seguinte família de sistemas de EDO's:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y,\lambda), \\ \dot{y} = Q(x,y,\lambda), \end{cases} \tag{3.24}$$

onde $x,y,\lambda \in \mathbb{R}$, λ um parâmetro e $P,Q \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e ponto indica a derivada com respeito a variável t.

Queremos analisar como os ciclos limites dependem do parâmetro λ. Como as mudanças são muito complicadas no caso geral, restringimos nossa atenção a uma família dos *campos de vetores rotacionados*.

Definição 3.3.1. (DUFF, 1953) Uma família de campos vetoriais rotacionados completa é aquela dada por (3.24), mas acompanhada das seguintes condições:

- seus pontos singulares são isolados e permanecem fixos conforme o parâmetro varia;
- em todos os pontos regulares,

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \lambda} & \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \end{vmatrix} > 0; \tag{3.25}$$

- e, por fim,

$$\begin{aligned} P(x,y,\lambda+T) &= -P(x,y,\lambda) \\ Q(x,y,\lambda+T) &= -Q(x,y,\lambda) \end{aligned} \tag{3.26}$$

para algum $T \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Logo, $P \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $Q \in C^1(\mathbb{R}^3)$ são funções de período $2T$.

Ainda, seja θ o ângulo entre o campo de vetores $\mathscr{X} = (P,Q)$ e o eixo x, então temos

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \arctan(Q/P)}{\partial \lambda} = \frac{1}{P^2+Q^2} \begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial P}{\partial \lambda} & \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Da expressão (3.25), sabemos que, em todo ponto $p = (x,y)$ regular, quando o parâmetro λ cresce, o campo de vetores (3.24) rotaciona no sentido anti-horário no ponto p.

Da condição (3.26), quando o parâmetro muda de λ para $\lambda + T$, o vetor (P,Q) rotaciona exatamente π radianos no sentido anti-horário no ponto p, e o comprimento do vetor permanece o mesmo.

Assim, entendemos o significado das palavras *"rotacionada"e "completa"*.

Em trabalhos posteriores, viu-se que é possível "relaxar"as exigências sobre os campos de vetores, resultando numa série de novas definições para campos de vetores rotacionados, mas ainda valendo os mesmos teoremas importantes da família completa.

Para as definições futuras, tomamos a seguinte notação para o sistema (3.24):

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\lambda), \tag{3.28}$$

com $x \in \mathbb{R}^2$ e $f(x,\lambda) = (P(x,\lambda), Q(x,\lambda))$, onde a função f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$.

Então (3.28) define um campo de vetores C^1, $F[\lambda] = f(\cdot,\lambda)$.

Definição 3.3.2. (CHEN, 1963a; CHEN, 1963b) $F[\lambda]$ constitui uma família de campos de vetores rotacionados para $\lambda \in [0,T]$, se:

a) Os pontos críticos de (3.28) são isolados e permanecem fixos conforme λ varia.

b) Para todos os pontos não críticos, $f(x,\lambda) \wedge f_\lambda(x,\lambda) \geq 0$ (ou ≤ 0) e $\not\equiv 0$ ao longo de qualquer curva fechada não trivial.

c) Para quaisquer $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < T$ e $x \in \mathbb{R}^2$,

$$0 \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \theta_\lambda(x,\lambda)d\lambda \leq \pi \quad \left(\text{ou } -\pi \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \theta_\lambda(x,\lambda)d\lambda \leq 0\right),$$

em que $\theta(x,\lambda)$ denota o ângulo de $f(x,\lambda)$ com relação à parte positiva do eixo x_1.

Chen (CHEN, 1975) também forneceu outra definição, a qual foi refinada em (ZHANG; DING, 1985) como segue.

Definição 3.3.3. (DUFF, 1953; ZHANG; DING, 1985) $F[\lambda]$ é dito constituir uma família de campos de vetores rotacionados para $\lambda \in (a,b)$ se:

a) Os pontos críticos de (3.28) são isolados e permanecem fixos para $\lambda \in (a,b)$.

b) Para quaisquer $a < \lambda_1 < \lambda_2 < b$, $f(x,\lambda_1) \wedge f(x,\lambda_2) \geq 0$ (ou ≤ 0) e $\not\equiv 0$ ao longo de qualquer órbita periódica de $F[\lambda_1]$ e $F[\lambda_2]$.

Em 1975, Perko (PERKO, 1975) introduziu a definição de uma família de campos rotacionados semi-completos como segue.

Definição 3.3.4. (PERKO, 1975) $F[\lambda]$ é dita uma família semi-completa de campos de vetores rotacionados se

a) $f(x,\lambda)$ é analítico e os pontos críticos de (3.28) permanecem fixos para $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Para todos os pontos não críticos $f(x,\lambda) \wedge f_\lambda(x,\lambda) > 0$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\tan\theta(x,\lambda) \to \pm\infty$ conforme $\lambda \to \pm\infty$.

De (CHEN, 1963a; CHEN, 1963b; CHEN, 1975; DUFF, 1953; HAN; ZHU, 1994; PERKO, 1975; PERKO, 1993; ZHANG; DING, 1985; ROUSSARIE, 1986) sabemos que as seguintes duas conclusões são válidas se as condições de uma das definições 3.3.1-3.3.4 são satisfeitas:

(i) Para $\lambda_1, \lambda_2 \in I, \lambda_1 \neq \lambda_2$, as órbitas periódicas de $F[\lambda_1]$ e $F[\lambda_2]$ não se intersectam, onde $I = [0,\pi], [0,T], (a,b)$ ou $(-\infty,+\infty)$.

(ii) Assuma que $F[\lambda_0]$ tem ciclo limite $L(\lambda_0)$, onde λ_0 é um ponto interior de I. Então, para $|\lambda - \lambda_0|$ suficientemente pequeno, (1) tem pelo menos um ciclo limite próximo de $L(\lambda_0)$ se $L(\lambda_0)$ é estável ou instável, e tem pelo menos dois ciclos limites para λ variando num certo sentido e nenhuma órbita periódica para λ variando no sentido oposto se $L(\lambda_0)$ é semi-estável.

Perko (PERKO, 1993) introduziu a seguinte definição:

Definição 3.3.5. (PERKO, 1993) O sistema (3.28) define uma família de campos de vetores rotacionados (mod $G = 0$) se a função $f(x,\lambda)$ é analítica e os pontos críticos de (3.28) permanecem fixos, e se $f(x,\lambda) \wedge f_\lambda(x,\lambda) > 0$ em todos os pontos regulares de (3.28) exceto aqueles no conjunto de curvas definidas por $G(x,y) = 0$, onde G é uma função analítica independente de λ.

Agora, apresentamos a definição mais geral.

Definição 3.3.6. Suponha que a função $f(x,\lambda)$ é analítica em $D \times I$, onde D é um conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ e I é um intervalo. Se os pontos críticos de (3.28) localizados no interior de D permanecem fixos, e se, para qualquer ponto interior $(x_0,\lambda_0) \in D \times I$ com x_0 um ponto regular, existe uma vizinhança $D_0 \subset D$ de x_0 e $\varepsilon > 0$ com $\lambda_0 + \varepsilon \in I$ tais que

$$f(x,\lambda_0) \wedge f(x,\lambda) \geq 0 \quad (\text{ou } \leq 0) \quad \text{para } x \in D_0, \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon) \tag{3.29}$$

e

$$f(x,\lambda_0) \wedge f(x,\lambda) \not\equiv 0 \text{ para } \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon) \tag{3.30}$$

ao longo de qualquer curva fechada não trivial invariante em D do campo de vetores $F[\lambda_0]$, dizemos que que o sistema (3.28) define uma família de campos de vetores rotacionados, com $(x,\lambda) \in D \times I$.

Perko (PERKO, 1993) estudou as bifurcações de ciclos limites para o tipo de sistema "$modG = 0$". A maioria dos resultados requer que $G(x,y) \not\equiv 0$ ao longo de quaisquer órbitas fechadas de (3.28). Essa condição não é dada explicitamente da Definição 3.3.5. Portanto, para mostrar que a Definição 3.3.6 é a mais geral, provamos a proposição a seguir, devida a Han.

Proposição 3.3.1. (HAN, 1999)

(i) Temos que (3.29) é válida se, e somente se,

$$f(x,\lambda) \wedge f_\lambda(x,\lambda) \geq 0 \quad (\text{ou } \leq 0) \quad \text{para } (x,\lambda) \in D \times I. \tag{3.31}$$

(ii) Assuma (3.29) válida. Se

$$f(x,\lambda) \wedge f_\lambda(x,\lambda) \not\equiv 0 \text{ para } \lambda \in I \tag{3.32}$$

ao longo de qualquer curva fechada não trivial invariante em D do campo de vetores $F[\lambda]$, então (3.30) é válida. No entanto, o inverso não é verdadeiro.

Demonstração. (i) Suponha que (3.29) é verdadeiro. Temos $f(x_0,\lambda_0)\wedge[f(x_0,\lambda)-f(x_0,\lambda_0)]\geq 0$ (ou ≤ 0) para $0<\lambda-\lambda_0<\varepsilon$. Isso nos diz que $f(x_0,\lambda_0)\wedge f_\lambda(x_0,\lambda_0)\geq 0$ (ou ≤ 0), e (3.3.1) segue. Tome, agora, (3.3.1) verdadeiro. De (3.27), temos que

$$\theta_\lambda(x,\lambda)\equiv\frac{1}{|f(x,\lambda)|}f(x,\lambda)\wedge f_\lambda(x,\lambda)\geq 0 \quad (\text{ ou } \leq 0) \tag{3.33}$$

em todos os pontos regulares. Sem perda de generalidade, podemos supor $\theta_\lambda(x,\lambda)\geq 0$. Seja (x_0,λ_0) um ponto interior de $D\times I$ com x_0 um ponto regular. Seja $\varepsilon^*>0$ tal que $\lambda_0+\varepsilon*\in I$. Se $\theta(x_0,\lambda)-\theta(x_0,\lambda_0)<\pi/2$ para todo $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon*]$, então $\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0)<0$ para todo $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon*]$ e x próximo a x_0. Se $\theta(x_0,\lambda)-\theta(x_0,\lambda_0)=\pi/2$ para algum $\lambda\in[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon*]$, então para x próximo a x_0, existe uma função contínua $\lambda=\lambda(x)\in(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon*)$ tal que $\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0)<\pi/4(=\pi/4)$ para $\lambda_0\geq\lambda<\lambda(x)(\lambda=\lambda(x))$. Logo, observando (3.33), existe uma vizinhança D_0 de x_0 e $\varepsilon>0$ com $\lambda_0+\varepsilon\in I$ tal que

$$0\leq\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0)<\pi/2, \qquad \text{para } x\in D_0,\lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon). \tag{3.34}$$

Note que $\tan\theta(x,\lambda)=f_2(x,\lambda)/f_1(x,\lambda)$. Temos

$$\begin{aligned}\tan(\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0)) &= \frac{\tan\theta(x,\lambda)-\tan\theta(x,\lambda_0)}{1+\tan\theta(x,\lambda)\tan\theta(x,\lambda_0)}\\ &= \frac{f(x,\lambda_0)\wedge f(x,\lambda)}{|f(x,\lambda_0)|.|f(x,\lambda)|\cos(\theta(x,\lambda)-\theta(x,\lambda_0))}.\end{aligned}$$

Então, por (3.34), $f(x,\lambda_0)\wedge f(x,\lambda)\leq 0, \quad \text{para } x\in D_0,\lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)$.

(ii) Suponha que (3.30) não é verdadeiro, então existe uma curva fechada invariante não trivial $L(\lambda_0)$ de $F[\lambda_0]$ e uma sequência $\lambda_n>\lambda_0$ com $\lambda\to 0$ tal que

$$f(x,\lambda_0)\wedge f(x,\lambda_n)=0, \qquad \text{para } x\in L(\lambda_0).$$

Logo, $f(x,\lambda_0)\wedge f_\lambda(x,\lambda_0)=0$, para $x\in L(\lambda_0)$. Assim, provamos que (3.32) implica (3.30). Para provarmos que a recíproca não é válida, considere a família de campos de vetores $F[\lambda]$ dada por

$$f(x,\lambda)=(x_2+x_1(x_1^2+x_2^2-\lambda)^3,-x_1)^T, \tag{3.35}$$

onde $x=(x_1,x_2),\lambda\in I=(0,+\infty)$. É imediato que

$$\begin{aligned}f(x,\lambda)\wedge f_\lambda(x,\lambda) &= -3x_1^2(x_1^2+x_2^2-\lambda)^2,\\ f(x,\lambda_1)\wedge f(x,\lambda_2) &= x_1^2(\lambda_1-\lambda_2)g(x_1^2+x_2^2,\lambda_1,\lambda_2),\end{aligned}$$

onde $g(u,\lambda_1,\lambda_2)=3u^2-3(\lambda_1+\lambda_2)u+\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2>0$ para $0<\lambda_1<\lambda_2$ e $n\geq 0$. Note que o círculo $x_1^2+x_2^2=1$ é a única órbita periódica do campo de vetores, o que pode ser verificado com o uso das coordenadas polares. De fato, tomando $x_1=r\cos\theta$ e $x_2=r\sin\theta$,

$$\begin{cases}\dot r=\dot x_1\cos\theta+\dot x_2\sin\theta\\ \dot\theta=\dfrac{1}{r}(\dot x_2\cos\theta-\dot x_1\sin\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot r=r\cos^2\theta(r^2-\lambda)^3\\ \dot\theta=-1-\cos\theta\sin\theta(r^2-\lambda)^3.\end{cases}$$

Vemos que (3.29) e (3.30) são verdadeiras para a dada família de campos de vetores, mas (3.32) não é válida. Por conseguinte, a prova está completa. □

Da proposição acima, vemos que a Definição 3.3.6 é mais geral que as Definições 3.3.1-3.3.5, mas menos geral que a definição de Chen, em que apenas a condição (3.29) foi exigida. Na próxima subseção, verificamos que as condições na Definição 3.3.6 mantêm a maioria das boas propriedades de campos de vetores rotacionados. Vamos também ilustrar que a condição (3.29) sozinha não é suficiente para manter algumas propriedades conhecidas de campos de vetores rotacionados.

3.3.2 Comportamento global de ciclos limites

Nesta subseção, estabelecemos uma teoria geral sobre o comportamento global de ciclos limites em campos de vetores rotacionados conforme o parâmetro varia. Quando discutimos campos de vetores rotacionados, sempre estamos assumindo as condições da Definição 3.3.6 como satisfeitas.

O seguinte resultado é fundamental:

Teorema 1 (Não interseção)**.** (HAN, 1999) Suponha que o sistema (3.28) define uma família de campos de vetores rotacionados com $(x,\lambda) \in D \times I$. Para $\lambda_1, \lambda_2 \in I, \lambda_1 \neq \lambda_2$, os campos de vetores $F[\lambda_1]$ e $F[\lambda_2]$ têm órbitas periódicas L_1 e L_2 em D, respectivamente. Então, ou (i) $L_1 = L_2$ ou (ii) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ se L_1 e L_2 têm a mesma orientação e circundam os mesmos pontos críticos de (3.28). Além disso, o caso (i) não pode ocorrer se $0 < |\lambda_1 - \lambda_2| << 1$.

Demonstração. Suponha que L_1 e L_2 têm a mesma orientação e circundam os mesmos pontos críticos. Sem perda de generalidade, podemos assumir que L_1 e L_2 são orientados na direção horária. Se a conclusão é falsa, então $L_1 \neq L_2$ e $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Repare que $f(x,\lambda)$ é analítica e L_1, L_2 têm a mesma orientação e circundam os mesmos pontos críticos, então existem dois casos a considerar (veja a Figura 14):

Caso (i). L_1 e L_2 são tangentes num ponto $A \in L_1 \cap L_2$, e ou (a) $L_2 - \{A\} \subset IntL_1$ ou (b) $L_1 - \{A\} \subset IntL_2$.

Caso (ii). Existe um arco $I_2 \subset L_2$ com pontos $A_1, A_2 \in L_2$ tais que $L_2 - \{A_1, A_2\} \subset IntL_1, A_1, A_2 \in L_1 \cap L_2$.

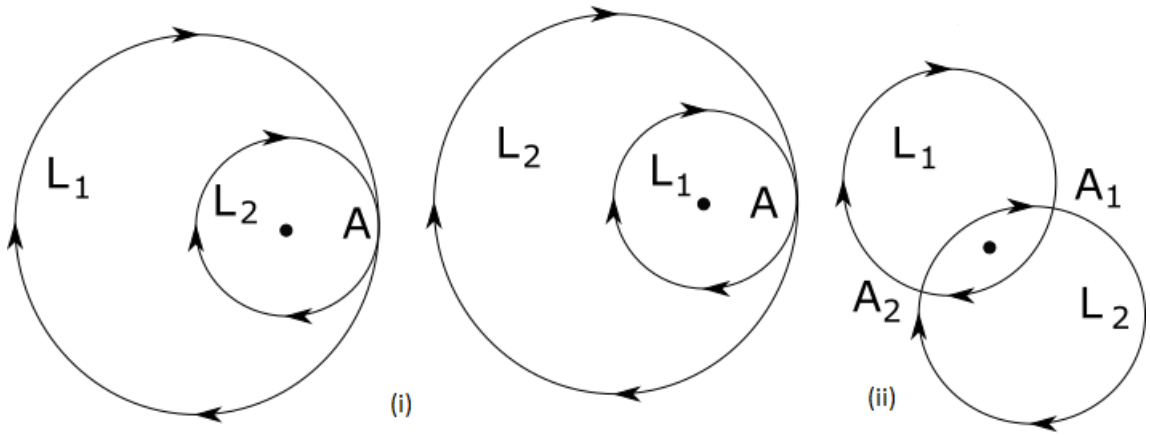

Figura 14 – Representação dos casos anteriores.

No caso (i)(a), para fixar, de (3.3.2) e (3.3.6), podemos supor

$$\lambda_1 < \lambda_2,\ \theta_\lambda(x,\lambda) = \frac{1}{|f(x,\lambda)|} f(x,\lambda) \wedge f_\lambda(x,\lambda) \geq 0. \tag{3.36}$$

Seja x_0 a coordenada de A. Então temos

$$\theta(x_0,\lambda_1) = \theta(x_0,\lambda_2) \equiv \theta_0. \tag{3.37}$$

Se $\theta_0 \neq 0 \pmod{2\pi}$, podemos supor

$$\theta(x,\lambda_i) \in (0,2\pi) \text{ para } |x-x_0| << 1, i = 1,2. \tag{3.38}$$

Se $\theta_0 = 0 \pmod{2\pi}$, podemos supor

$$\theta(x,\lambda_i) \in (-\pi,\pi),\ \text{para } |x-x_0| << 1, i = 1,2. \tag{3.39}$$

Então, de (3.36), (3.37) e (3.38) ou (3.39), temos

$$0 \leq \theta(x,\lambda_2) - \theta(x,\lambda_1) < 2\pi,\ \text{para } |x-x_0| << 1. \tag{3.40}$$

Isso implica que a órbita positiva de $F[\lambda_2]$ passando através de qualquer ponto de L_1 próximo a A deve atravessar L_1 de seu interior para seu exterior. Portanto, existe um ponto $B \in L_2$ próximo a A com $B \neq A$ tal que B está fora de L_1. Isso contradiz o fato de que $L_2 - \{A\} \subset IntL_1$. Logo, o caso (i)(a) não pode ocorrer. Da mesma forma, o caso (i)(b) não pode ocorrer.

Consideramos o caso (ii). Do Teorema da Continuidade para soluções, Teorema 2.1.5, deve existir um ponto $x_0 \in L \cap ExtL_2$ (aqui, $ExtL_2$ significa o exterior de L_2) tal que o campo de vetores $f(x_0,\lambda_2)$ é tangente a L_1 em x_0. Em outras palavras, temos

$$\theta(x_0,\lambda_2) = \theta(x_0,\lambda_1) \text{ ou } \theta(x_0,\lambda_2) - \theta(x_0,\lambda_1) = \pi,$$

onde usamos (3.36). No primeiro caso, temos que vale (3.32), o que leva a uma contradição, como no caso (i)(a). Portanto,

$$\theta(x_0,\lambda_2) - \theta(x_0,\lambda_1) = \pi. \tag{3.41}$$

Seja M (ou N) o número de pontos tangentes interiores (ou exteriores) localizados em $L_1 \cap ExtL_2$ e nos quais o vetor $f(x,\lambda_2)$ é tangente a L_1. Como f é analítica, os números M e N são finitos. Além disso, de (3.33) e da Figura 15, é fácil ver que M e N satisfazem $M = N+1$ (veja a Figura 15).

Seja $l_3 = ArcB_1B_2 \subset ExtL_2$ com $B_1, B_2 \in L_1$ um segmento de órbita do campo de vetores $F[\lambda]$ próximo a $l_2 = ArcA_1A_2 \subset IntL_1$. Os pontos B_1 e B_2 dividem L_1 em duas partes. Uma delas está no exterior de L_2, denotada por l_2. Quando l_3 e l_2 estão suficientemente próximos, os $M+N$ pontos tangentes interiores e exteriores estão todos em l_1. Podemos construir um segmento l_2^* entre l_2 e l_3 tal que (a) l_1 e l_2^* formam uma curva fechada suave, denotada por L^*, e tal que (b) existe um único ponto tangente de $F[\lambda_2]$ a l_2^* o qual é um ponto tangente exterior com respeito a $L^* = l_1 \cup l_2^*$. Segue que o campo de vetores $F[\lambda_2]$ tem exatamente M pontos de tangência interiores e $N+1$ pontos de tangência exteriores na curva fechada L^*. Portanto, pelo Teorema do Índice de Poincaré (veja (YE, 1995; ROUSSARIE, 1986)) a soma dos índices dos pontos críticos de $F[\lambda_2]$ no interior de L^* é $1 + \frac{1}{2}(M-N-1) = 1$. Isso garante que a curva L^* circunda pelo menos um ponto crítico de (3.28), contradizendo o fato de que L_1 e L_2 circundam os mesmos pontos críticos.

Agora, suponha $L_1 = L_2$ para dados λ_1, λ_2 com $0 < |\lambda_1 - \lambda_2| << 1$. Então, para qualquer $x \in L_1$, o campo de vetores $f(x,\lambda_1)$ e $f(x,\lambda_2)$ são sempre paralelos. Isso nos dá que $f(x,\lambda_1) \wedge f(x,\lambda_2) = 0$ para todos $x \in L_1$, contradizendo a condição (3.32). Isso encerra a prova. □

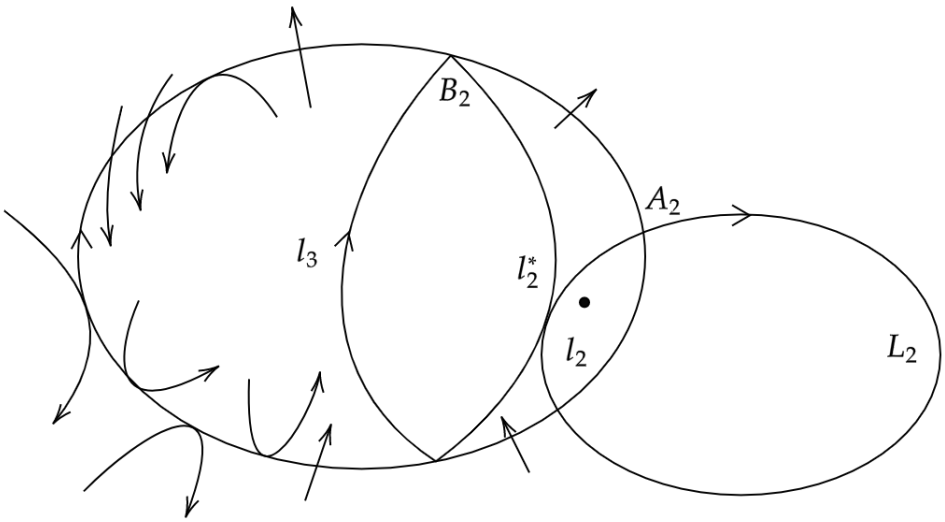

Figura 15 – $M = 3, N = 2$.

Teorema 3.3.1. (HAN, 1999) Suponha que (3.28) define uma família de campos vetoriais rotacionados com $(x,\lambda) \in D \times I$. Assuma que para $\lambda_0 \in IntI$, (3.28) tem uma órbita periódica $L_0 \subset IntD$. Então, para cada $\lambda \in I$ próximo a λ_0, as seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) Se L_0 é estável ou completamente instável, (3.28) tem um único ciclo limite $L(\lambda)$ que expande ou contrai de forma monótona conforme λ varia num sentido fixo.

(ii) Se L_0 é semi-estável, então é substituído por um ciclo limite estável e um ciclo limite instável conforme λ varia num sentido; e L_0 desaparece se λ varia no sentido oposto.

(iii) Se L_0 não é isolado, então (3.28) não tem órbitas periódicas numa vizinhança de L_0 para todo λ próximo a λ_0, com $\lambda \neq \lambda_0$.

A demonstração do Teorema 3.3.1 é dada em (HAN, 1999).

3.4 Existência e unicidade de ciclos limites em equações de Liénard generalizadas

A seguir, apresentamos e provamos o principal teorema usado na prova da unicidade do ciclo limite no sistema de Rayleigh generalizado.

Lembramos que uma equação da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0,$$

onde $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, é chamada equação de Liénard. Estas equações podem ser escritas em forma de sistema planar aplicando a mudança $y = \dot{x} + F(x)$, onde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$. Neste caso, o sistema se reduz ao sistema

$$\frac{dx}{dt} = -\phi(y) - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x). \tag{3.42}$$

Neste texto denotamos por Lip o conjunto das funções $f : I \subset \mathbb{R} \to R$ que são Lipschitzianas, isto é, para cada $f \in Lip$ existe constante real M tal que

$$||f(x) - f(y)|| \leq M||x - y||,$$

para todo $x, y \in I$, onde I é intervalo de $\mathbb{R}$.

O próximo teorema será ferramenta fundamental na prova da unicidade de ciclo limite para o sistema investigado.

Teorema 3.4.1. (ZHIFEN, 1986) Se, para o sistema (3.42), são satisfeitas as seguintes condições

1. $g(x) \in$ Lip em qualquer intervalo finito; $xg(x) > 0$, $x \neq 0$; $G(-\infty) = G(+\infty)$, onde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$,

2. $F'(x) = f(x) \in C^0(-\infty, +\infty)$; $F(0) = 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ é não crescente, quando x cresce em $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$; $\frac{f(x)}{g(x)} \neq$ constante, quando $0 < |x| << 1$,

3. $\phi(y) \in$ Lip em qualquer intervalo finito; $y\phi(y) > 0$, $y \neq 0$; $\phi(y)$ é não decrescente; $\phi(y)$ tem derivada à esquerda e à direita $\phi'_+(0)$ e $\phi'_-(0)$ no ponto $y = 0$; $\phi'_+(0).\phi'_-(0) \neq 0$, quando $f(0) = 0$.

Então, o sistema (3.42) tem, no máximo um ciclo limite, o qual, se existe, é estável.

As condições acima garantem a existência e unicidade para soluções do sistema (3.42) e que a origem $(0,0)$ é o único ponto singular do mesmo sistema, já que $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ não admitem outros zeros com as hipóteses do teorema.

Primeiramente, provamos o teorema quando $g(x) = x$ e sob a condição de que o ponto singular $(0,0)$ é instável. Mais tarde, provamos que, sob as condições do teorema, o ponto singular $(0,0)$ é instável ou o sistema (3.42) não tem órbitas periódicas não constantes, também transformamos (3.42) no caso $g(x) = x$ para a conclusão da prova.

Parte 1. Prova do teorema para o sistema

$$\frac{dx}{dt} = -\phi(y) - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = x, \tag{3.43}$$

assumindo $(0,0)$ instável.

Demonstração. Primeiro, assuma que o sistema (3.43) tem órbitas periódicas não constante.

Como $(0,0)$ é instável, segue que, se L_1 é a órbita mais próxima à origem, L_1 deve ser estável em seu interior, então pelo critério de Poincaré sobre estabilidade, devemos ter

$$\int_{L_1} f(x_1(t))dt \geq 0, \tag{3.44}$$

onde $x = x_1(t),\ y = y_1(t)$ é a equação de L_1.

Suponha que o sistema (3.43) tem outra órbita periódica L_2 limitando L_1, neste caso provamos que

$$\int_{L_2} f(x_2(t))dt > \int_{L_1} f(x_1(t))dt, \tag{3.45}$$

onde $x = x_2(t),\ y = y_2(t)$ é a equação de L_2 abaixo. Veja que (3.45) implica que L_2 deve ser estável. Então, se L_1 é estável, L_2 não pode existir, uma vez que duas órbitas periódicas com a mesma estabilidade não podem existir lado a lado. Se L_1 é semi-estável, fora de L_1 existe no máximo um ciclo limite estável. Mais tarde, provamos que o segundo caso não pode ocorrer, então o teorema está provado.

Antes de provar que o segundo caso não pode ocorrer, provamos a desigualdade (3.45).

Seja $L_1 \cap \{(x, F(x))\} = \{P_1, Q_1\}$, $x_{P_1} > 0$, $x_{Q_1} < 0$. Construímos uma nova função $f_1(x) = f(x) + ax$, onde $a = -\frac{f(x_{Q_1})}{x_{Q_1}}$. Então $f_1(x)$ tem as seguintes propriedades:

1. $f_1(0) = f(0) \leq 0$ (da monotonicidade de $f(x)/x$),
2. $\frac{f_1(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + a$ é não decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$,
3. $f_1(x_{Q_1}) = f_1(x_M) = 0$, onde M está no lado negativo do eixo x tal que $x_{Q_1} = x_M$ $f_1(x) \geq 0$, quando $x < x_M$, $f_1(x) \leq 0$, quando $x_M < x \leq 0$ (da monotonicidade de $f(x)/x$).

O gráfico da função $f_1(x)$ deve interceptar o eixo x em sua parte positiva num ponto N, onde $x_N < x_{P_1}$. De fato, se isso não ocorre, L_1 estará completamente na região onde $f_1(x) \leq 0, f_1(x) \not\equiv 0$, assim temos

$$\int_{L_1} f_1(x_1(t))dt < 0, \tag{3.46}$$

o que é impossível, uma vez que, ao longo de L_1,

$$\int_{L_i} x_i(t)dt = \int_{L_i} dy_i(t) = 0,\ i = 1,2, \tag{3.47}$$

e

$$\int_{L_i} f_1(x_i(t))dt = \int_{L_i} f(x_i(t))dt,\ i = 1,2, \tag{3.48}$$

mas, então, (3.46) e (3.48) contradizem a desigualdade (3.44). Note que, de (3.48), podemos provar apenas que

$$\int_{L_2} f_1(x_2(t))dt > \int_{L_1} f_1(x_1(t))dt \tag{3.49}$$

em vez da desigualdade (3.44). Para esse fim, considere a Figura 16.

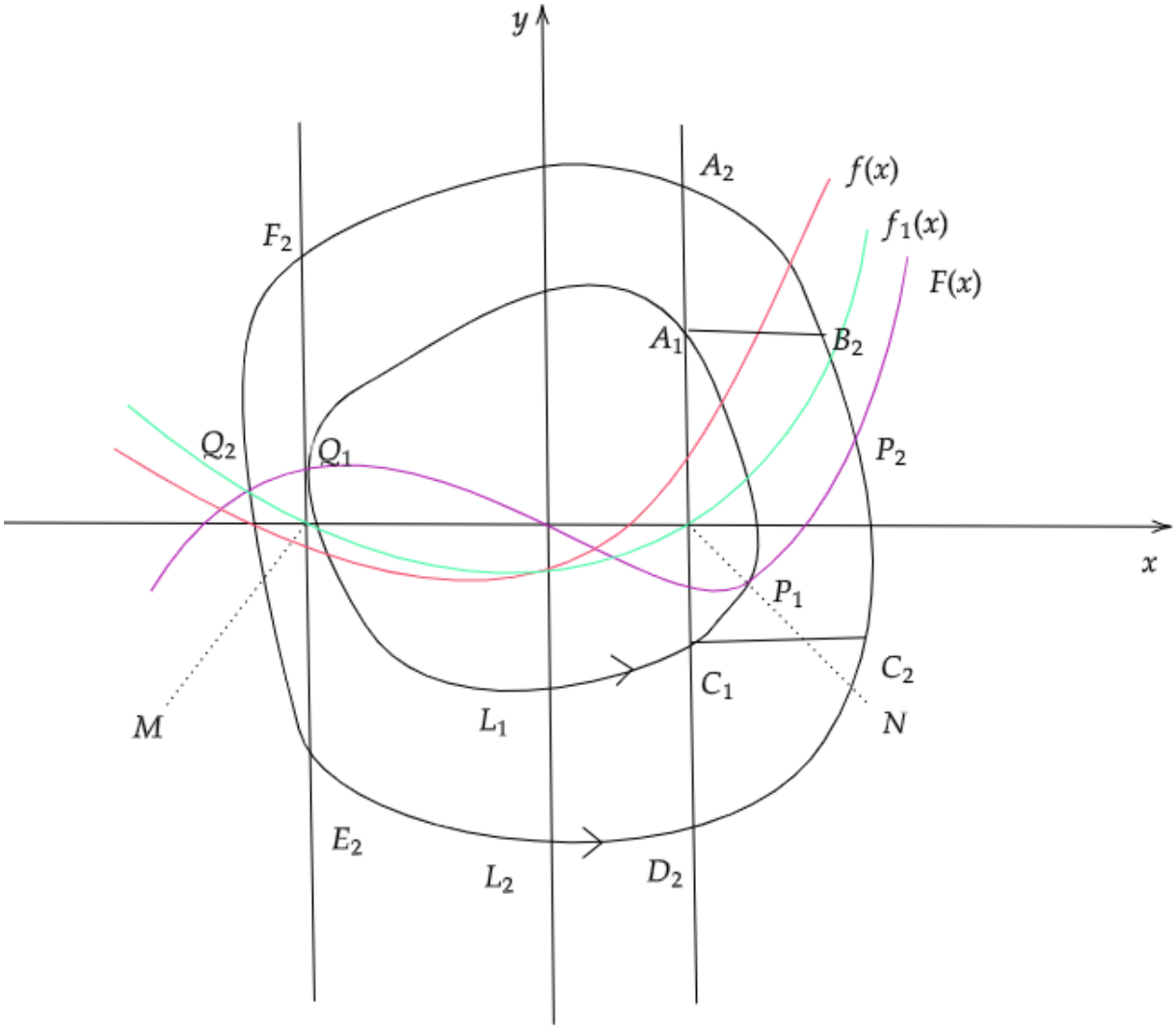

Figura 16 – Esboço da prova do Teorema 3.4.1.

Como $dx/dt < 0$ ao longo de $\widehat{Q_1A_1}$ e $\widehat{F_2A_2}$, esses arcos podem ser representados como

gráficos de $y=\overline{y_i}(x); i=1,2$, e $\overline{y_2}(x)>\overline{y_1}(x),\ x_M<x<x_N$. Então, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{A_2F_2}} f_1(x_2(t))dt-\int_{\widehat{A_1Q_1}} f_1(x_1(t))dt\\ =&\int_{x_M}^{x_N}\frac{-f_1(x)}{-\phi(\overline{y_2}(x))-F(x)}dx+\int_{x_M}^{x_N}\frac{-f_1(x)}{-\phi(\overline{y_1}(x))-F(x)}dx\\ =&\int_{x_M}^{x_N}\frac{-f_1(x)[\phi(\overline{y_2}(x))-\phi(\overline{y_1}(x))]}{[-\phi(\overline{y_2}(x))-F(x)][-\phi(\overline{y_1}(x))-F(x)]}dx>0.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Similarmente, temos

$$\int_{\widehat{E_2D_2}} f_1(x_2(t))dt-\int_{\widehat{Q_1C_1}} f_1(x_1(t))dt>0.\tag{3.51}$$

Os arcos $\widehat{C_2P_2B_2}$ e $\widehat{C_1P_1A_1}$ podem ser representados como gráficos de $x=\overline{x_i}(y),\ i=1,2$, e $\overline{x_2}(y)>\overline{x_1}(y)$, então temos

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{C_2P_2B_2}} f_1(x_2(t))dt-\int_{\widehat{C_1P_1A_1}} f_1(x_1(t))dt\\ =&\int_{y_{C_1}}^{y_{A_1}}\left(\frac{f_1(\overline{x_2}(y))}{\overline{x_2}(y)}-\frac{f_1(\overline{x_1}(y))}{\overline{x_1}(y)}\right)dy\geq 0.\end{aligned}\tag{3.52}$$

Como, ao longo de $\widehat{F_2Q_2E_2}$, $\widehat{D_2C_2}$ e $\widehat{B_2A_2}$, $f_1(x)\geq 0$, temos

$$\int_{\widehat{F_2Q_2E_2}\cup\widehat{D_2C_2}\cup\widehat{B_2A_2}} f_1(x_2(t))dt\geq 0.\tag{3.53}$$

As desigualdades (3.50)-(3.53) implicam (3.49) e, portanto, (3.45).

Agora, provamos que L_1 não pode ser semi-estável. Se L_1 é semi-estável, a ideia é perturbar $F(x)$ por um pequeno termo αx^2, a fim de dividir o ciclo limite semi-estável L_1 em duas órbitas periódicas.

Considere a reta $x=x_1>0$ intersectando L_1 e o novo sistema

$$\frac{dx}{dt}=-\phi(y)-F_\alpha(x),\quad \frac{dy}{dt}=x,\tag{3.54}$$

onde $F_\alpha(x)=F(x)+\alpha\gamma(x),\ 0\leq\alpha<<1$,

$$\gamma(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ (x-x_1)^2, & x\geq x_1.\end{cases}$$

Obviamente, a função $f_\alpha(x)=F'_\alpha(x)$ satisfaz todas as condições do Teorema 3.4.1 assim como a função $f(x)$. Como

$$\begin{vmatrix}-\phi(y)-F_{\alpha_1}(x) & x\\ -\phi(y)-F_{\alpha_2}(x) & x\end{vmatrix}\leq 0,\ \text{quando } \alpha_2>\alpha_1\geq 0,$$

$(-\phi(y)-F_\alpha(x),x)$ é um campo de vetores rotacionado (veja a Definição 3.3.6), e quando $\alpha=0$, o sistema (3.54) reduz-se ao sistema (3.43). Pela teoria de campos de vetores rotacionados, quando $0<\alpha<<1$, L_1 divide-se em pelo menos duas órbitas periódicas $L_1^{(2)}$ e $L_1^{(1)}$, de forma

de $L_1^{(2)}$ contém $L_1^{(1)}$. Além disso, $L_1^{(2)}$ é, pelo menos, instável no exterior, e $L_1^{(1)}$ é, pelo menos, estável no seu interior, então, pelo critério de Poincaré, temos

$$\int_{L_1^{(2)}} f_\alpha(x_1^{(2)}(t))dt \leq 0, \tag{3.55}$$

$$\int_{L_1^{(1)}} f_\alpha(x_1^{(1)}(t))dt \geq 0, \tag{3.56}$$

onde $x = x^{(i)}(t), y- = y^{(i)}(t)$ são as equações de $L_1^{(i)}$, $i = 1,2$.

Como (3.54) satisfaz todas todas as condições do teorema, então, similarmente à equação (3.45), devemos ter

$$\int_{L_1^{(2)}} f_\alpha(x_1^{(2)}(t))dt > \int_{L_1^{(1)}} f_\alpha(x_1^{(1)}(t))dt,$$

o que contra contradiz (3.55) e (3.56), então L_1 não pode ser semi-estável. Portanto, o teorema foi provado para sistema (3.43) sob a condição de que $(0,0)$ é instável. □

Parte 2. Agora, provamos que, sob as condições do Teorema 3.4.1, $(0,0)$ é instável ou o sistema (3.43) não tem órbitas periódicas não constantes. Para este fim, considere o lema a seguir.

Lema 3.4.1. (ZHIFEN, 1986) Considere o sistema de equações diferenciais (3.43). Se as seguintes condições são satisfeitas,

1. $\phi(y) \in \mathrm{Lip}(|y| \leq d_1)$, $d_1 > 0$; $y\phi(y) > 0$, $y \neq 0$; $\phi'_+(0)$ e $\phi'_-(0)$ existem,
2. $F(x) \in \mathrm{Lip}(|x| \leq d_2)$, $d_2 > 0$; $F(0) = 0$; $F(x) \leq F(-x)$, quando $0 < x < d_2$, mas $F(x) \neq F(-x)$, quando $0 < |x| << 1$;
3. $F(x) < a_1 x$, quando $0 < x < d_2$, onde $0 \leq a_1 \leq 2\sqrt{\phi'_-(0)}$; $F(x) > a_2 x$, quando $-d_2 < x < 0$, onde $0 \leq a_2 \leq 2\sqrt{\phi'_+(0)}$.

Então $(0,0)$ é um ponto singular instável de (3.43).

Demonstração. Sejam L_A^+ e L_A^- respectivamente as semi-órbitas positiva e negativa passando pelo ponto A. Para esse fim, consideramos a Figura 17,

1. L_A^+, onde $A = A(0,y)$, $y < 0$, $|y| << 1$, não pode tender a $(0,0)$ no plano $x > 0$.

   Assuma $\phi'_-(0) = 0$. Da condição 3 deste lema temos que $F(x) < 0$, quando $0 < x < d_2$. Seja $\lambda(x,y) = \Phi(y) + \frac{1}{2}x^2$, onde $\Phi(y) = \int_0^y \phi(s)ds$, então $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(3.43)} = -xF(x) > 0$, onde $0 < x < d_2$, então L_A^+ não pode tender a $(0,0)$ na região $x > 0$, $y < 0$, já que, avaliando λ num ponto de L_A^+, temos que λ aumenta quando estamos sobre a curva, no entanto, se avaliamos λ em pontos próximos de $(0,0)$, seu valor diminui, pois $\phi(y)$ é não decrescente. Isso implica que L_A^+ afasta-se da origem ou intersecta o eixo x na sua parte positiva num ponto B. Obviamente, L_A^+ também não pode tender a $(0,0)$ na região $x > 0$, $y < 0$ depois do ponto B.

   Assuma $\phi'_-(0) > 0$. Da condição 3 do Teorema 3.4.1 segue que $\phi(y) < (\phi'_-(0) - \varepsilon_1)y$, quando $y < 0$, $|y| << 1$, onde $0 < \varepsilon_1 << 1$ e $2\sqrt{\phi'_-(0) - \varepsilon_1} > a_1$.

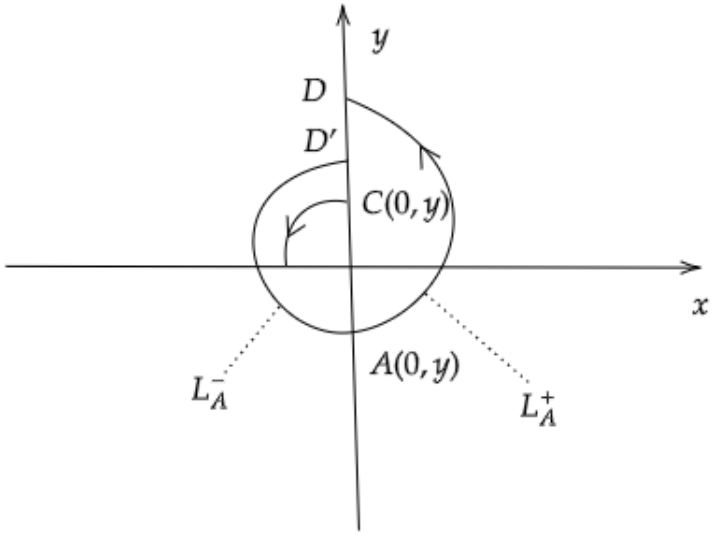

Figura 17 – Órbitas não se interceptam.

Comparando o sistema (3.43) com o sistema

$$\frac{dx}{dt} = -(\phi'_-(0) - \varepsilon_1)y - a_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = x, \tag{3.57}$$

obtemos

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(3.43)} > \left.\frac{dx}{dy}\right|_{(3.57)}, \; x > 0, \; y < 0.$$

Como $(0,0)$ é um foco do sistema (3.57), L_A^+ afasta-se da origem ou intersecta o eixo x em sua parte positiva. Obviamente, L_A^+ não pode tender a $(0,0)$ no semi-plano $x > 0$.

2. Similarmente, podemos provar que L_C^+, onde $C = C(0,y)$, $0 < y << 1$, não tende ao ponto singular $(0,0)$ no semi-plano $x < 0$.

3. Se ambos L_A^+ e L_A^- intersectam o eixo y em sua parte positiva nos pontos D e D' respectivamente, provamos que $y_D > y_{D'}$.

   Sob a transformação $(x,y) \to (-x,y)$, o sistema (3.43) é reduzido a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\phi(y) - F(-x)}{x}. \tag{3.58}$$

   Como $F(x) \lneq F(-x)$, quando $0 < x << 1$, então

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(3.43)} \gneq \left.\frac{dx}{dy}\right|_{(3.58)}, \; 0 < x << 1,$$

   obtemos $y_{D'} < y_D$.

De 1, 2 e 3, o Lema 3.4.1 está provado.

□

Lema 3.4.2. (ZHIFEN, 1986) Considere o sistema de equações diferenciais (3.43). Se todas as hipóteses do Teorema 3.4.1 são satisfeitas para o sistema (3.43), então $(0,0)$ é instável, ou o sistema (3.43) não tem curvas periódicas não constantes.

Demonstração. Da condição 2 do Teorema 3.4.1, temos $f(0) \leq 0$, já que, da continuidade de f, se $f(0) > 0$, $f(x) > 0$ para $x \in (-\delta, \delta)$, com δ suficientemente pequeno, assim não podemos ter $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{x}$ não crescente em $(-\infty, 0)$, já que podemos tomar $f(x) > M > 0$ para $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, para algum $0 < \varepsilon < \delta$. Assim, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, ou seja, $\dfrac{f(x)}{x}$ não pode ser não decrescente para x crescendo em $[-\varepsilon, 0]$.

Tome $\lambda(x,y) = \phi(y) + \frac{1}{2}x^2$, então $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(3.43)} = -xF(x)$.

1. Se $f(0) < 0$, ou $f(0) = 0$, mas $f(x) < 0$, quando $0 < |x| << 1$, temos $-xF(x) > 0$, então $(0,0)$ é instável.

2. Se $f(0) = 0$, $f(x) > 0$, quando $0 < |x| << 1$. Da monotonicidade de $\frac{f(x)}{x}$, teremos $f(x) > 0$, para todo $x \neq 0$, nesse caso, o sistema (3.43) não tem curvas periódicas não constantes.

3. Se $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$, quando $0 < |x| << 1$. Da monotonicidade de $\frac{f(x)}{x}$, $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ existem ($f'_-(0)$ pode ser infinito), além disso $F(x) \geq 0, F(x) \not\equiv 0$, quando $0 < |x| << 1$.

3.1. Se $f'_+(0) \geq f'_-(0)$, significa que $F''_+(0) \geq F''_-(0)$, então $F(x) \gneq F(-x)$, quando $0 < |x| << 1$. Novamente da monotonicidade de $\frac{f(x)}{x}$, temos $F(x) \geq F(-x)$, para todo $-\infty < x < +\infty$, então o sistema (3.43) não tem órbitas periódicas não constantes.

3.2. Se $f'_+(0) < f'_-(0)$, isso significa que $F''_+(0) < F''_-(0)$, então $F(-x) > F(x)$, $0 < x << 1$. Nesse caso, da condição 3, todas as condições do lema (3.4.1) são satisfeitas, então $(0,0)$ é instável.

O caso $f(0) = 0$, $xf(x) < 0$, quando $0 < |x| << 1$, pode ser discutido da mesma forma.

□

O Lema 3.4.2 está provado e como consequencia o Teorema 3.4.1 está provado para o sistema (3.43).

Parte 3. Por fim, provamos o teorema:

Prova do Teorema 3.4.1. Se todas as hipóteses deste teorema são satisfeitas para o sistema (3.42), sob a transformação

$$u = \sqrt{G(x)}sgnx, \tag{3.59}$$

onde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$, o sistema (3.42) é reduzido ao seguinte sistema:

$$\frac{du}{dt} = -\phi(y) - F(x(u)), \quad \frac{dy}{dt} = u, \tag{3.60}$$

onde $x = x(u)$ é a função inversa de $u = \sqrt{2G(x)}sgnx$.

O sistema (3.60) tem a mesma forma do sistema (3.43). Como $\frac{F_u'(x(u))}{u} = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{F_u'(x(u))}{u}$ é não decrescente no intervalo $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$; $F(x(0)) = F(0) = 0$, exceto pela continuidade da função $F_u'(x(u))$ em $u = 0$ e pela condição $\phi_+'(0).\phi_-'(0) \neq 0$, quando $F_u'(x(u)) = 0$, todas as hipóteses do teorema são satisfeitas para o sistema (3.60). Embora $F_u'(x(u))$ possa ser descontínua em $u = 0$, o teorema é verdadeiro para o sistema (3.42), se provamos que, depois da transformação (3.59), $(0,0)$ é um ponto singular instável de (3.60) ou o sistema (3.60) não tem órbitas periódicas não constantes.

Da monotonicidade de $\frac{F_u'(x(u))}{u}$, se $F_u'(x(0^+))$ ou $F_u'(x(0^-))$ não existe, devemos ter $F_u'(x(u)) < 0$, quando $u > 0$ (ou $u < 0$), $|u| << 1$. Se $F_u'(x(0^+))$ (ou $F_u'(x(0^-))$) existe, devemos ter $F_u - (x(0^+)) \leq 0$ (ou $F_u'(x(0^-))$). Ao mesmo tempo, devemos ter $f(0) \leq 0$.

Então, se

$$F_u'(x(u)) < 0, \text{ quando } 0 < |u| << 1 \text{ ou } f(0) < 0,$$

$(0,0)$ é instável; e se

$$F_u'(x(0^+)) = F_u'(x(0^-)) = f(0) = 0,$$

o Lema 3.4.2 é verdadeiro para o sistema (3.60).

Resta provar o caso em que $f(0) = 0$ e $F_u'(x(0^-)) = 0$, mas $F_u'(x(0^+))$ não existe (ou $F_u'(x(0^+)) = 0$, mas $F_u'(x(0^-))$ não existe). Nesses casos, temos $F(x(-u)) > F(x(u))$, $0 < u << 1$. Como $f(0) = 0$, da condição 3 do teorema, o Lema 3.4.1 é verdadeiro para o sistema (3.42).

Portanto, o teorema está provado para o sistema (3.42). □

3.5 Sistema de Rayleigh generalizado

Nesta seção, trabalhamos com a equação

$$\ddot{x} + x = a(1 - \dot{x}^{2n})\dot{x}, \text{ com } n \text{ inteiro positivo e } a \in \mathbb{R}.$$

Podemos transformar tal equação no sistema diferencial planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + a(1 - y^{2n})y, \end{aligned} \tag{3.61}$$

que chamamos de sistema de Rayleigh generalizado. Aplicando a mudança de coordenadas $x \to y, y \to x, t \to -t$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a(x^{2n} - 1)x, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Antes, enunciamos um teorema necessário sobre classificação de singularidades semi-hiperbólicas.

Teorema 3.5.1 (Classificação de singularidades semi-hiperbólicas)**.** (ANDRONOV *et al.*, 1973) Seja $(0,0)$ um ponto singular isolado do campo de vetores X dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x,y), \\ \dot{y} = \lambda y + B(x,y), \end{cases} \tag{3.63}$$

onde A e B são funções reais analíticas em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$, com $A(0,0) = B(0,0) = \nabla A(0,0) = \nabla B(0,0) = 0$ e $\lambda > 0$. Seja $y = f(x)$ a solução da equação $\lambda y + B(x,y) = 0$ em uma vizinhança de $(0,0)$ e suponhamos que a Fórmula de Taylor da função $g(x) = A(x, f(x))$ tenha a expressão

$$g(x) = a_m x^m + o(|x^m|), \tag{3.64}$$

onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então, uma das seguintes afirmações é verdadeira.

i) Se m é ímpar e $a_m < 0$, então existe uma vizinhança da origem na qual X é C^0-conjugado ao campo dado pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & -x, \\ \dot{y} = & y, \end{cases}$$

logo $(0,0)$ é um ponto de sela do sistema (3.63).

ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então existe uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ tal que X é C^0-conjugado ao campo dado pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & x, \\ \dot{y} = & y, \end{cases}$$

logo $(0,0)$ é um nó instável do sistema (3.63).

iii) Se m é par, então, fazendo a mudança de coordenadas $(x,y) \to (-x,y)$ se necessário, podemos supor que $a_m > 0$. Nesse caso, existe uma vizinhança da origem na qual o campo definido pelo sistema X é C^0-conjugado ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & x^2, \\ \dot{y} = & y, \end{cases}$$

logo $(0,0)$ é uma sela-nó do sistema.

Começamos provando um resultado auxiliar.

Proposição 3.5.1. As órbitas do sistema (3.61) numa vizinhança do infinito no disco de Poincaré se comportam como na Figura 19, a menos de um homeomorfismo.

Demonstração. Primeiramente, usamos a compactificação de Poincaré a fim de estudarmos o comportamento no infinito. Considere as cartas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3)$ definidas em $\mathbb{S}^2$ como na seção 2.6, isto é, $(y_1, y_2, y_3) \in U_k$, se, e só se, $y_k > 0$ e $\phi_k(y_1, y_2, y_3) = (y_i/y_k, y_j/y_k)$, $k \neq i < j \neq k, k \in \{1,2,3\}$. Para (U_1, ϕ_1), tomando $u = y_2/y_1$ e $v = y_3/y_1$, temos que o sistema 3.62 em U_1 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u^2 v^{2n} + (au - 1)v^{2n} - au, \\ \dot{v} &= -uv^{2n+1} + av^{2n+1} - av, \end{aligned} \tag{3.65}$$

e, em (U_2, ϕ_2),

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v^{2n} + au^{2n+1} - auv^{2n} + u^2 v^{2n}, \\ \dot{v} &= v^{2n+1} u. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Tomando $v = 0$, a única singularidade é $(0,0)$ na carta local (U_1, ϕ_1) e na carta (U_2, ϕ_2). A origem de U_1 do sistema (3.65) é hiperbólica, de fato, a matriz Jacobiana em $(0,0)$ é

$$\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix},$$

Logo, $(0,0)$ de U_1 é atrator se $a > 0$ e repulsor se $a < 0$. No entanto, a singularidade de (3.66) é degenerada e vamos estudá-la por *blow up*.

Aplicamos o *blow up* direcional homogêneo, usando as mudanças de variáveis $u = x$ e $v = zx$. Com uma reparametrização do tempo, podemos cancelar o fator x^{2n-1}, logo o sistema torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z^{2n}x + z^{2n}x^3 - ax^2z^{2n} + ax^2, \\ \dot{z} &= -azx - z^{2n+1} + az^{2n+1}x, \end{aligned}$$

onde, novamente, $(0,0)$ é a única singularidade do sistema e é degenerada, então precisamos aplicar o *blow up* mais uma vez. Tomar as coordenadas $x = w^{2n}r$ e $z = w$ é equivalente à aplicação de *blow ups* sucessivos. Logo, depois de reparametrizarmos o tempo para excluirmos o fator w^{2n}, o novo sistema admite forma

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -awr - w + aw^{2n+1} \\ \dot{r} &= (1+2n)r + w^{4n}r^3 - aw^{2n}r^2 - 2narw^{2n} + a(1+2n)r^2. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Note que o sistema (3.67) tem duas singularidades: $(0,0)$, com matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1+2n \end{bmatrix},$$

sendo, portanto, um ponto de sela. E, ainda, admite singularidade $(-1/a, 0)$, com matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{1}{a}(1+2n) \end{bmatrix},$$

A singularidade $(-1/a, 0)$ é, portanto, semi-hiperbólica. Usando a reparametrização $r \to s - 1/a, t \to -t$, estamos nas condições do Teorema 3.5.1. Assim, verificando que m é ímpar e $a_m < 0$, estamos no caso $i)$ do Teorema 3.5.1, ou seja, $(-1/a, 0)$ é ponto de sela. Assim, sabemos o comportamento numa vizinhança de $(0,0)$ após o *blowing down*, revertendo o processo da Figura 18.

□

Lema 3.5.1. A única singularidade finita do sistema (3.61) é a origem. A origem é um nó estável se $a > 2$, um nó instável se $a < -2$, um foco instável se $-2 < a < 0$, um foco estável se $0 < a < 2$ e um centro se $a = 0$.

Demonstração. Verificamos facilmente que o único ponto singular do sistema (3.61) é a origem. Além disso, a matriz Jacobiana deste sistema na origem é dada por

$$\begin{bmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo o Lema segue do Teorema de Hartman-Grobman 2.1.7. □

Continuamos com um teorema.

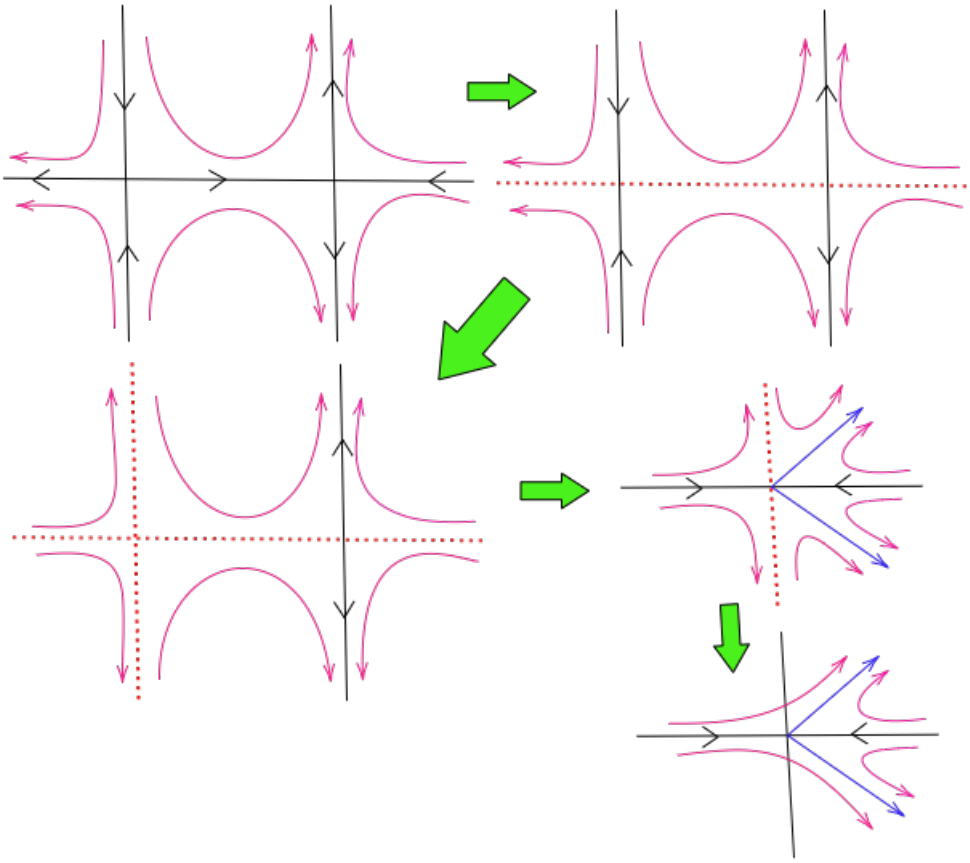

Figura 18 – Processo de *blow up* para o sistema (3.67) no caso $a < 0$.

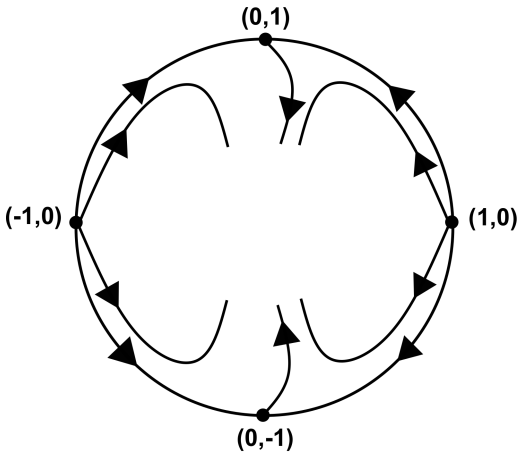

Figura 19 – Caso $a < 0$.

Teorema 3.5.2. O sistema diferencial de Rayleigh generalizado (3.62) tem pelo menos um ciclo limite se $|a| \neq 0$, estável se $a < 0$ e instável se $a > 0$.

Demonstração. Levando em consideração o tipo de estabilidade no infinito, e aquela na origem, pelo teorema de Poincaré-Bendixon 2.1.8, segue a existência de pelo menos um ciclo limite com o tipo de estabilidade mencionada. □

O teorema foi provado em (LINS; MELO; PUGH, 1977) para valores de $|a|$ suficientemente pequenos e não nulos usando-se Teoria da Média. Os autores de (LINS; MELO; PUGH, 1977) afirmaram, no seu teorema 2, que o ciclo limite encontrado é único, porém a teoria da média garante a existência de pelo menos um ciclo limite e não a unicidade dele em geral, ou seja, existe um ciclo e podem existir outros, o resultado não garante nada a este respeito.

O próximo passo é provar o Teorema 3.0.1.

Prova do Teorema 3.0.1. Para essa prova, usaremos o Teorema 3.4.1, no entanto precisamos verificar que a equação satisfaz as hipóteses do teorema. Começamos com o caso $a > 0$. Aplicando a mudança de coordenadas $(x,y,t) \to (x,y,-t)$ obtemos o sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + a(1-x^{2n})x \\ \dot{y} &= x. \end{aligned}$$

Note que isso não altera o número de ciclos limites do sistema, mas apenas a orientação das órbitas. Como $g(x) = x$, nesse caso, é imediato que $x \in Lip$ em qualquer intervalo finito, $xg(x) > 0$, para $x \neq 0$. Ainda, note que

$$\int_0^{-\infty} sds = \int_0^{+\infty} sds = +\infty.$$

Ainda, $f(x) = F'(x) = -a(1-x^{2n}) + a2nx^{2n} = -a + a(2n+1)x^{2n}$, ou seja, $f(x) \in C^0(-\infty,+\infty)$. $F(0) = 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-a+a(2n+1)x^{2n}}{x}$, isto é, a fração é não decrescente nos intervalos $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ e também não constante numa vizinhança de 0.

Aqui, $\phi(y) = y$, então $y\phi(y) = y^2 > 0$, para $y \neq 0$, $\phi(y) \in Lip$ em qualquer intervalo finito e $\phi(y)$ é não decrescente.

Assim, todas as condições do Teorema 3.4.1 são satisfeitas e temos garantida a existência de um único ciclo limite para o sistema (3.61) quando $a > 0$.

O caso $a < 0$ segue de maneira análoga, basta observar que o sistema (3.61) com $a > 0$ é topologicamente equivalente ao sistema (3.61) com $a < 0$, pela mudança de coordenadas $(x,y,t) \to (-x,y,-t)$.

Sendo assim temos provado Teorema 3.0.1

□

O físico-matemático britânico Lorde Rayleigh introduziu a equação de Rayleigh generalizada no seu caso particular,

$$\ddot{x} + x = a(1-\dot{x}^2)\dot{x}, \text{ com } n \text{ inteiro positivo e } a \in \mathbb{R},$$

a fim de modelar as oscilações da palheta de um clarinete (veja (RAYLEIGH, 1880)). Com o ciclo limite identificado no retrato de fase, concluímos que a palheta possui oscilações periódicas, a depender da posição inicial.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ, M. J.; FERRAGUT, A.; JARQUE, X. A survey on the blow up technique. **Int. J. Bifurcation and Chaos**, 2011. Citado na página 51.

ANDREEV., A. F. Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighbourhood of a singular point. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 1958. Citado na página 50.

ANDRONOV, A. A.; LEONTOVICH, E. A.; GORDON, I. I.; MAIER, A. G. Qualitative theory of 2nd order dynamic systems. J. Wiley Sons, 1973. Citado nas páginas 50, 53, 59 e 84.

BAUTIN, N. N. On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium of focus or center type. **English Transl. in Math.**, v. 100, p. 397–413, 1954. Citado na página 34.

CHAVARRIGA H. GIACOMINI, J. G. J.; LLIBRE, J. Darboux integrability and the inverse integrating factor. **J. Differential Equations**, v. 1, n. 261, p. 85–99., 2001. Citado nas páginas 26, 27, 28 e 29.

CHAVARRIGA, J. L. J.; OLLAGNIER, J. M. On a result of Darboux. **LMS J. Comput. Math.**, v. 4, n. 157, p. 85–99, 2001. Citado na página 36.

CHEN, X. Applications of rotated vector fields, i. **J. Nanjing University**, v. 1, 1963. Citado nas páginas 69 e 71.

____. Applications of rotated vector fields, ii. **J. Nanjing University**, v. 2, 1963. Citado nas páginas 69 e 71.

____. Generalized rotated vector fields. **J. Nanjing University**, v. 2, 1975. Citado nas páginas 69 e 71.

CHOW, S.-N.; HALE, J. K. **Methods of Bifurcation Theory**. New York and Berlin and Heidelderg: Springer-Verlag, 1983. Citado na página 62.

CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J. Algebraic aspects of integrability for polynomial systems. **Qualit. Theor. Dyn. Syst.**, 1999. Citado na página 30.

____. Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems. **Ann. Differ. Equat.**, 2000. Citado na página 30.

CHRISTOPHER, C. J. Invariant algebraic curves and conditions for a centre. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, n. 124, p. 1209–1229, 1994. Citado nas páginas 28, 33, 39, 40, 42 e 43.

CHRISTOPHER J. LLIBRE, C. P. C.; ZHANG, X. Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems. **J. Phys.**, v. 10, n. A 35, p. 2457–2476., 2002. Citado nas páginas 44 e 45.

DARBOUX, G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série**, n. 1, p. 60–96, 1878. Citado nas páginas 24, 26, 27 e 36.

DUFF, F. D. Limit cycles and rotated vector fields. **Ann. of Math**, v. 67, 1953. Citado nas páginas 69, 70 e 71.

DURMOTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTéS, J. C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. Citado nas páginas 23, 34 e 45.

FULTON, W. **Algebraic Curves**. [S.l.]: Benjamin–Cummings, 1969. v. 1. Citado nas páginas 37 e 43.

HAN; ZHU, D. Bifurcation theory of differential equations. **Coal Industry Publishing House**, 1994. Citado nas páginas 69 e 71.

HAN, M. Global behavior of limit cycles in rotated vector fields. **J. Differential Equations**, 1999. Citado nas páginas 69, 72, 74, 76 e 77.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. 3. ed. UK: Elsevier, 2013. Citado na página 19.

JOUANOLOU, J. **Equations de Pfaff Algébriques, Lectures Notes in Mathematics**. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1979. Citado na página 36.

KAPTEYN, W. On the midpoints of integral curves of differential equations of the first degree. **Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk.**, p. 1446–1457, 1911. Citado na página 34.

____. New investigations on the midpoints of integral curves of differential equations of the first degree. **Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk.**, v. 20, 1912. Citado na página 34.

KOOIJ, R.; CHRISTOPHER, C. Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems. **Appl. Math. Lett.**, v. 4, n. 6, p. 51–53., 1993. Citado na página 44.

LINS, A.; MELO, W. de; PUGH, C. C. On llenard's equation. **Lecture Notes in Math.**, v. 597, p. 335–357., 1977. Citado nas páginas 11, 13, 18, 61 e 88.

LLIBRE, J. **Handbook of Differential Equations**. 1. ed. 2004. Citado nas páginas 19 e 38.

OLIVEIRA, R. D. S.; REZENDE, A. C.; SCHLOMIUK, D.; VULPE, N. A characterization of quadratic differential systems with an invariant ellipse in terms of affine polynomials. Preprint. 2020. Citado nas páginas 17 e 32.

PERKO, L. M. Rotated vector fields and the global behavior of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane. **J. Differential Equations**, v. 18, p. 63–86, 1975. Citado nas páginas 69 e 71.

____. Global families of limit cycles of planar analytic systems. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 322, n. 1, p. 627–656, 1990. Citado na página 69.

____. Differential dynamical systems. **Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York**, v. 7, 1991. Citado na página 69.

____. Rotated vector fields. **J. Differential Equations**, v. 103, n. 1, p. 127–145, 1993. Citado nas páginas 69, 71 e 72.

POINCARé, H. Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré i and ii. **Rend. Circ. Mat. Palermo**, n. 5, p. 161–191, 1891. Citado na página 45.

RAYLEIGH, L. On the stability, or instability of certain fluid motions. **London Math. Soc. Proc**, v. 11, p. 57–70, 1880. Citado na página 88.

ROUSSARIE, R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields. **Bol. Soc. Brasil. Mat.**, v. 17, n. 2, p. 67–101, 1986. Citado nas páginas 71 e 76.

YE, Y. Theory of limit cycles. **Translation of Mathematical Monographs**, v. 66, 1986. Citado na página 69.

____. Qualitative theory of polynomial differential systems. **Shangai Science and Technology Publishing House**, 1995. Citado nas páginas 69 e 76.

ZHANG, Z.; DING. Qualitative theory of differential equations. **Science and Technology Publishing House**, 1985. Citado nas páginas 69 e 71.

ZHIFEN, Z. Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized lienard equations. **Appl. Anal.**, n. 1-2, p. 63–76, 1986. Citado nas páginas 18, 77, 81 e 83.

ICMC USP
SÃO CARLOS