Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de campos vetoriais complexos

Lorena Soriano Hernandez

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Lorena Soriano Hernandez

Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de campos vetoriais complexos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva

USP – São Carlos
Setembro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H634r

Hernandez, Lorena Soriano
Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de campos vetoriais complexos / Lorena Soriano Hernandez; orientador Paulo Leandro Dattori da Silva; coorientador Evandro Raimundo da Silva. - São Carlos - SP, 2016.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Resolubilidade. 2. conjunto característico. 3. campo vetorial complexo. I. Silva, Paulo Leandro Dattori da, orient. II. Silva, Evandro Raimundo da, coorient. III. Título.

Lorena Soriano Hernandez

Solvability near the characteristic set for a class of complex vector fields

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
Co-advisor: Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva

USP – São Carlos
September 2016

As minhas mães
María Blanca e
María Esperanza.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, cada dia renova minhas forças para conquistar meus sonhos.

Ao programa de pós-graduação do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, pela oportunidade de continuar meus estudos.

Agradeço ao professor Paulo Leandro Dattori da Silva sua valiosa orientação, sempre com diligente disponibilidade e amabilidade. Cada seminario e conversa enriqueceram minha formação matemática.

Um especial agradecimento aos que nem deixaram perceber a sua distancia, minha madrinha, quem considero mais uma mãe, também minha mãe e meu irmão. A eles agradeço o amor, a compreensão, constantes cuidados e apoio incondicional.

Também sou grata com meus amigos Martin, Paula, Omar, Carolina e Sergio, sempre ofreceram-me sua sincera ajuda, compartilhei bons momentos de descontração e ótimas sessões de estudo.

Agradeço o apoio parcial da CAPES.

"Nós precisamos especialmente a imaginação na ciência.
Nem tudo é matemática e não tudo é simples lógica,
é também um pouco de beleza y poesia."
Maria Montessori.

RESUMO

SORIANO, H. L. **Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de campos vetoriais complexos**. 2016. 73 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Esta dissertação expõe sobre a resolubilidade do campo vetorial complexo

$$\mathsf{L} = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, \quad b \not\equiv 0$$

definido em $\Omega_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, perto do conjunto característico $\Sigma = \{0\} \times S^1$, sendo a e b funções de classe C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon)$ a valores reais.

Os resultados apresentados mostram que a resolubilidade de L em uma vizinhança cheia de Σ depende da relação entre as ordens de anulamento de a e b em $x = 0$.

Palavras-chave: Resolubilidade, conjunto característico, campo vetorial complexo.

ABSTRACT

SORIANO, H. L. **Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de campos vetoriais complexos**. 2016. 73 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

This dissertation deals with the solvability of complex vector field

$$\mathsf{L} = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, \quad b \not\equiv 0$$

defined on $\Omega_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, near the characteristic set $\Sigma = \{0\} \times S^1$, where a and b are C^∞ real-valued functions in $(-\epsilon, \epsilon)$.

The presented results show that solvability of L in a full neighborhood of Σ depends on the interplay between the order of vanishing of the functions a and b at $x = 0$.

Key-words: Solvability, characteristic set, complex vector field.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Seja

$$\mathsf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a(x) + ib(x))\frac{\partial}{\partial x}, \quad b \not\equiv 0, \tag{1}$$

um campo vetorial complexo definido em $\Omega_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, sendo a e b funções a valores reais de classe C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon)$.

Definimos o *conjunto característico* de L, o qual denotamos por $\mathcal{C}(\mathsf{L})$, como o conjunto dos pontos $(x,t) \in \Omega_\epsilon$, onde L deixa de ser elíptico, i.e.,

$$\mathcal{C}(\mathsf{L}) = \left\{(x,t) \in \Omega_\epsilon; \mathsf{L}_{(x,t)} \text{ e } \overline{\mathsf{L}}_{(x,t)} \text{ são linearmente dependentes } \right\}.$$

Note que $(x,t) \in \mathcal{C}(\mathsf{L})$ se, e somente se, $b(x) = 0$. De fato, se L e $\overline{\mathsf{L}}$ não forem linearmente independente em (x,t), existiria um escalar $\gamma \neq 0$ tal que

$$Re(\mathsf{L})(x,t) = \gamma Re(\overline{\mathsf{L}})(x,t) \quad \text{e} \quad Im(\mathsf{L})(x,t) = \gamma Im(\overline{\mathsf{L}})(x,t);$$

da primeira igualdade temos $\gamma = 1$; então, na segunda igualdade teremos

$$Im(\mathsf{L})(x,t) = \gamma Im(\overline{\mathsf{L}})(x,t) = -Im(\mathsf{L})(x,t),$$

isto é, $ib(x) = -ib(x)$; isto ocorre se, e somente se, $b(x) = 0$. Consequentemente,

$$\mathcal{C}(\mathsf{L}) = \{(x,t) \in \Omega_\epsilon; b(x) = 0\}.$$

Seja $\Sigma = \{0\} \times S^1$. Iremos assumir que $\mathcal{C}(\mathsf{L}) = \Sigma$. Em particular, L é elíptico em $\Omega_\epsilon \setminus \Sigma$.

Assumimos também que $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + x^m b_0(x)$ para todo $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, sendo m, n inteiros positivos e a_0, b_0 funções de classe C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon)$.

Uma propriedade importante do campo vetorial L sobre Ω_ϵ é que pode ser interpretado como um operador $\mathsf{L} : C^\infty(\Omega_\epsilon) \to C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

Sob nossas hipóteses, L satisfaz a bem conhecida condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves. Para L dado por (1) a condição $(\mathcal{P})$ é satisfeita em Ω_ϵ se, e somente se, a função b não muda de sinal ao longo das curvas integrais do campo vetorial real $\frac{\partial}{\partial t} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$. (ver [5], Teorema 3.7).

Dizemos que L é resolúvel em Σ se para cada $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ satisfazendo as condições de compatibilidade

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{(j)} f}{\partial x^j}(0,t)dt = 0, \quad j = 0, \cdots, r-1, \tag{2}$$

existe uma função $u \in C^{\infty}(\Omega_{\epsilon})$ que resolve a equação $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ.

A dissertação é dedicada ao estudo da resolubilidade em Σ de L.

Será visto no capítulo 3, que se n e m são as ordens de anulamento das funões a e b, respectivamente, e se $2 \leq m < 2n-1$, então para $f \in C^{\infty}(\Omega_{\epsilon})$ satisfazendo (2), existe uma função u de classe C^{∞} que resolve $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ.

No capítulo 4 provaremos que se $m = 2n-1$, então dada $f \in C^{\infty}(\Omega_{\epsilon})$ satisfazendo (2), e dado $k \in \mathbb{Z}_{+}$, existe uma função u de classe C^{k} que resolve $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ. Porém, não podemos encontrar solução C^{∞} em geral.

Os resultados descritos aqui podem ser encontrados em [1] e [2].

Embora nesta dissertação não seja tratado o caso $m \geq 2n$ informamos que, neste caso, [3] apresenta o seguinte resultado: se $m \geq 2n$, então dado f pertencente a $C^{\infty}(\Omega_{\epsilon})$ e satisfazendo (2), existe uma função $u \in L^{\infty}$ que resolve $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ. Contudo, não é possível encontrar solução de contínua em geral.

CAPÍTULO

1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados de cálculo diferencial, geometria diferencial, análise funcional e topologia que serão utilizados no estudo de certa classe de campos vetoriais, que realizaremos posteriormente.

1.1 Alguns resultados clássicos da análise

Teorema 1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \in X'$. Se, para todo $x \in X, x \neq p$, tivermos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e, além disso, tivermos

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = a,$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = a.$$

Teorema 2. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é crescente em I. Neste caso, f possui uma inversa f^{-1}, definida no intervalo $f(I) = J$, a qual é diferenciável em J, com $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ para todo $y = f(x) \in J$.

Definição 1. Dize-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge *uniformemente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, seja qual for $x \in X$.

Teorema 3. (TESTE DE WEIERSTRASS) Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas sobre X, e suponha que $\{M_n\}$ é uma sequência numérica tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ para todo } x \in X \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Suponha, também, que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Então, para todo $x \in X$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (de fato converge absolutamente), e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em X para a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Definição 2. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$, dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 4. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

Teorema 5. Se $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente em X e todas as f_n são contínuas no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.

Corolário 1. O limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 6. Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e vale

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Em resumo:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

desde que $\lim f_n$ seja integrável.

Teorema 7. Seja (f_n) uma sequência de funções no intervalo $[a, b]$. Se para um certo $c \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e a sequência das derivadas f_n' convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g, então (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função derivável f, tal que $f' = g$. Em resumo $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, desde que as derivadas f_n' convirjam uniformemente.

Teorema 8. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo e limitado. Se a sequência de aplicações diferenciáveis $f_k : U \to \mathbb{R}^n$ converge num ponto $c \in U$ e a sequência das derivadas $f_k' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ converge uniformemente em U para uma aplicação $g : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, então (f_k) converge uniformemente em U para uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, a qual é diferenciável, com $f' = g$.

1.2 Fórmula de Taylor

Sejam $G \subset \mathbb{R}^2$ e $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^k(G)$. Então, a *fórmula de Taylor* de f em uma vizinhança $V \subset G$ de (a,b) é dada por

$$f(x,t) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial t}(a,b)(t-b) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a,b)(t-b)^2\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(a,b)(x-a)(t-b) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{\partial^{k-1-i} f}{\partial x^{k-1-i}}(a,b).\frac{\partial^i f}{\partial t^i}(a,t)(x-a)^{k-1-i}(t-b)^i + R_k(x,t).$$

Logo, para todo (x,b) pertencente ao segmento $[(a,b),(x_0,b)] \subset G$, tem-se

$$f(x,b) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial t}(a,b)(b-b) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a,b)(b-b)^2\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(a,b)(x-a)(b-b) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{\partial^{k-1-i} f}{\partial x^{k-1-i}}(a,b).\frac{\partial^i f}{\partial t^i}(a,b)(x-a)^{k-1-i}(b-b)^i +$$

$$+(x-a)^k.\frac{k}{k!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a+r(x-a),b)dr;$$

portanto,

$$f(x,b) = \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)(x-a)^n + \frac{(x-a)^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a+r(x-a),b)dr. \quad (1.1)$$

1.3 Topologia Quociente

Os seguintes resultados se acham também em [7].

Definição 3. Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto, e seja $p : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva. Dizemos que a aplicação p é uma *aplicação quociente* se um subconjunto U de Y é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(U)$ é aberto em X.

Definição 4. Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma *aplicação aberta* se para cada conjunto aberto U de X, o conjunto $f(U)$ é aberto em Y.

Segue imediatamente da definição que se $p : X \to Y$ é uma aplicação quociente e injetiva então p é uma aplicação aberta.

Proposição 1. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação aberta. Se A é aberto em X então a aplicação $q : A \to p(A)$, obtida ao restringir p, é uma aplicação aberta.

Se X é um espaço topológico, Y um conjunto e $p : X \to Y$ é uma aplicação quociente. Indicamos como τ a coleção dos subconjuntos $U \subset Y$ tais que $p^{-1}(U)$ é aberto em X. Verifica-se que τ é uma topologia em Y chamada de *topologia quociente*.

Relativamente à topologia τ, a aplicação $p : X \to Y$ é uma aplicação contínua.

Teorema 9. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Seja Z um espaço topológico e seja $g : X \to Z$ uma função contínua e constante em cada conjunto $p^{-1}(y)$, para $y \in Y$. Então, g induz uma aplicação contínua $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

1.4 Espaço de Fréchet

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [8].

Definição 5. Um *espaço vetorial topológico* é um espaço vetorial E sobre o campo dos números complexos $\mathbb{C}$ munido de uma topologia $\mathscr{T}$, que é compatível com a estrutura linear de E, isto é, as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar em E, $A : E \times E \to E$ dada por $A(x, y) = x + y$ e $M : \mathbb{C} \times E \to E$ definida por $M(\lambda, x) = \lambda y$, são contínuas em $E \times E$ com a topologia produto $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$, e em $\mathbb{C} \times E$ com a topologia produto $\mathscr{C} \times \mathscr{T}$, respectivamente, onde $\mathscr{C}$ é a topologia usual no plano complexo $\mathbb{C}$. E, além disso, para todo $x \in E$ o conjunto $\{x\}$ é fechado.

Espaço vetorial topológico será notado abreviadamente EVT.

Definição 6. Um *sistema fundamental de vizinhanças* de um ponto $x \in E$ é uma coleção γ de vizinhanças de x com a seguinte propriedade: dada qualquer vizinhança U de x no expaço E, existe uma vizinhança $V \in \gamma$ tal que $V \subset U$. Um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto é também chamado de *base local*.

Em particular, diz-se que x possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças quando existe una coleção enumerável $\gamma = \{V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots\}$ de vizinhanças de x tais que, dada qualquer vizinhança U de x em X, existe V_n com $V_n \subset U$.

A topologia de um EVT é completamente determinada por qualquer sistema fundamental de vizinhanças da origem.

Definição 7. Seja E um EVT, dizemos que $B \subset E$ é *equilibrado* quando para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq 1$ tem-se que $\lambda B \subset B$.

Proposição 2. Dizemos que um EVT E é um espaço de Hausdorff se, e somente se, para todo $x \neq 0$ existe uma vizinhança U de 0 tal que $x \notin U$.

Definição 8. Dizemos que um EVT E é um espaço *localmente convexo* se existe um sistema fundamental de vizinhanças em E que consiste em conjuntos convexos.

Definição 9. Uma função não negativa $x \mapsto p(x)$ sobre um espaço vetorial E é chamada de *seminorma* se satisfaz as seguintes condições:

1. p é subaditiva, i.e., para cada $x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

2. p é positivamente homogênea, i.e., para todo $x \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\lambda x) \leq |\lambda|\, p(x)$.

Definição 10. Uma família $\mathscr{P}$ de seminormas contínuas sobre um espaço localmente convexo E será chamada de *base de seminormas contínuas em* E se para toda seminorma contínua p sobre E existe uma seminorma $q \in \mathscr{P}$ e uma constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in E$, $p(x) \leq Cq(x)$.

Definição 11. Dizemos que um EVT E é *metrizável* se $\mathscr{T}$ é compatível com alguma métrica d.

Teorema 10. Se E é um EVT com uma base local enumerável, então existe uma métrica d em E que satisfaz:

1. d é compatível com a topologia de E,

2. as bolas abertas centradas em zero são equilibradas, e

3. d é invariante: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para todo $x, y, z \in E$. Se, além disso, E é localmente convexo, então d pode ser escolhida satisfazendo 1, 2, 3 e

4. todos os conjuntos abertos são convexos.

Definição 12. Dizemos que uma família $\mathscr{P}$ de seminormas em E é *separante* se para cada $x \neq 0$ existe $p \in \mathscr{P}$ com $p(x) \neq 0$.

Teorema 11. Suponha $\mathscr{P}$ uma família separante de seminormas sobre um espaço vetorial E. Associe a cada $p \in \mathscr{P}$ e cada inteiro positivo n o conjunto

$$V(p, n) = \left\{ x; p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todas as interseções finitas dos conjuntos $V(p, n)$. Então, $\mathcal{B}$ é uma base local convexa balanceada para a topologia $\mathscr{T}$ em E, que torna E em um espaço localmente convexo tal que

1. cada $p \in \mathscr{P}$ é contínua, e

2. um conjunto $X \subset E$ é limitado se, e somente se, $p \in \mathscr{P}$ é limitada em X.

Observação 1. Se $\mathscr{P} = \{p_j : j \in \mathbb{Z}_+\}$ é uma família separante de seminormas em E, o Teorema 11 mostra que $\mathscr{P}$ induz uma topologia τ com uma base local enumerável, pelo Teorema 10, τ é metrizável. Então, uma métrica invariante por translações compatível pode ser definida em termos de $\{p_j\}$. Mais especificamente

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}.$$

Definição 13. Um *espaço de Fréchet* é um EVT com as seguintes propriedades: metrizável (em particular é Hausdorff), localmente convexo e completo.

1.5 Variedades diferenciáveis.

Definição 14. Uma *variedade diferenciável*, de dimensão m, é um conjunto M junto com uma coleção de funções $\phi_\gamma : U_\gamma \longrightarrow M$, sendo cada U_γ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, satisfazendo as seguintes condições:

1. cada função $\phi_\gamma : U_\gamma \longrightarrow V_\gamma = \phi_\gamma(U_\gamma)$ é injetiva,

2. se $V_\gamma \cap V_\beta \neq \emptyset$, então existe uma função diferenciável

$$\theta_{\gamma\beta} : \phi_\beta^{-1}(V_\gamma \cap V_\beta) \longrightarrow \phi_\gamma^{-1}(V_\gamma \cap V_\beta)$$

tal que $\phi_\beta = \phi_\gamma \circ \theta_{\gamma\beta}$.

3. $M = \bigcup\limits_{\gamma} \phi_\gamma(U_\gamma)$.

As funções $\phi_\gamma : U_\gamma \longrightarrow V_\gamma$ são chamadas *parametrizações locais*. As coordenadas $(x_1, \ldots, x_m) = \phi_\gamma^{-1}(p)$, de um ponto $p \in V_\gamma$ são chamadas de *coordenadas locais* de p, e a função inversa $\phi_\gamma^{-1} : V_\gamma \longrightarrow U_\gamma$ é chamada de *carta* ou *sistema de coordenadas locais*. Quando todas as *mudanças de coordenadas* $\theta_{\gamma\beta}$ são de classe C^k, $(k \geq 1)$, dizemos que M é uma variedade de classe C^k. Neste trabalho, consideraremos apenas variedades de classe C^∞.

Sejam M e N variedades de dimensão m e n, respectivamente, de classe C^∞. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é diferenciável se para cada ponto $p \in M$ existem parametrizações locais $\phi : U \longrightarrow V$ em M, e $\psi : U' \longrightarrow V'$ em N, com $p \in V$ e $f(p) \subset V'$, tais que $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^m \to U' \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $\phi^{-1}(p)$.

Definição 15. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é uma *submersão* se todo $c \in N$ for valor regular de f. Isto é equivalente a dizer que para cada $p \in M$ a derivada $f' : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é sobrejetiva.

Proposição 3. Seja $f : M \to N$ uma submersão sobrejetiva de classe C^∞. Uma aplicação $g : N \to P$ é de classe C^∞ se, e somente se, $g \circ f : M \to P$ é de classe C^∞.

Corolário 2. Seja M uma variedade de classe C^∞, N um conjunto e $f : M \to N$ uma aplicação sobrejetiva. Então, existe no máximo uma estrutura de variedade de classe C^∞ em N que torna f uma submersão de classe C^∞.

1.6 Teorema de Borel.

Denotamos $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos inteiros não negativos e $\mathbb{Z}_+^n$ o produto cartesiano de $\mathbb{Z}_+$ n vezes.

$\mathcal{P}_T(\mathbb{R})$ denotará o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ formado pelas funções T-periódicas em cada variável, sendo $T > 0$.

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_c^\infty(U)$ o espaço das *funções-teste* em U, i.e., o subespaço de $C^\infty(U)$, formado pelas funções que tem suporte compacto em U. Lembramos que o suporte de uma função contínua $f(x)$, é o fecho do conjunto $\{x; f(x) \neq 0\}$, e se denota $S(f)$.

Os próximo Teorema é conhecido como Teorema de Borel, e apresentamos sua demonstração como fornecida por [4].

Teorema 12. Sejam $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$ um aberto contendo x_0. Então, existe $r > 0$ e uma função $v(x,t)$ em $C^\infty(A \times \mathbb{R})$, $2\pi-$periódica na variável t, que satisfaz $S(v) \subset [x_0 - r, x_0 + r] \times \mathbb{R} \subset A \times \mathbb{R}$ e

$$(\partial_x^j v)(x_0, t) = v_j(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $j \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Utilizando a translação $x \mapsto x - x_0$ se é necessário, podemos supor que $x_0 = 0$.

Sejam $r \in (0,1)$ tal que $[-r, r] \subset A$ e $g \in C_c^\infty((-r, r))$ constante igual a 1 em uma vizinhança de $\left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]$. Para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ e $(x,t) \in A \times \mathbb{R}$, defina

$$g_j(x,t) = \frac{g\left(\frac{x}{\epsilon_j}\right) x^j v_j(t)}{j!},$$

sendo $\epsilon_j \in (0,1)$ a ser escolhido mais adiante.

Cada função g_j pertence a $C^\infty(A \times \mathbb{R})$, pois existem e são contínuas todas as derivadas parciais. Mais ainda, $S(g_j) \subset (-r\epsilon_j, r\epsilon_j) \times \mathbb{R}$ e $g_j(x,t) = g_j(x, t + 2\pi n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, pois $v_j \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Para o que segue vamos estimar $|(\partial^\alpha g_j)(x,t)|$, $j > 1$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ com $|\alpha| < j - 1$. Para $(x,t) \in (-r\epsilon_j, r\epsilon_j) \times \mathbb{R}$ temos

$$\begin{array}{rcl}
|(\partial^\alpha g_j)(x,t)| & = & \frac{1}{j!}\left|\partial^{\alpha_2} v_j(t) \partial^{\alpha_1}(g(x/\epsilon_j)x^j)\right| \\
& = & \frac{1}{j!}\left|\partial^{\alpha_2} v_j(t)\right| \left|\sum_{l \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{l} \partial^l(x^j) \partial^{\alpha_1 - l}(g(x/\epsilon_j))\right| \\
& = & \frac{1}{j!}\left|\partial^{\alpha_2} v_j(t)\right| \left|\sum_{l \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{l} \frac{j!}{(j-l)!} x^{j-l}.\epsilon_j^{l-\alpha_1} (\partial^{\alpha_1 - l} g)(x/\epsilon_j)\right| \\
& \leq & \left\|\partial^{\alpha_2} v_j\right\|_\infty \alpha_1! \sum_{l \leq \alpha_1} r^{j-l}.\epsilon_j^{j-\alpha_1} \left\|\partial^{\alpha_1 - l} g\right\|_\infty \\
& \leq & \left\|\partial^{\alpha_2} v_j\right\|_\infty \alpha_1! \epsilon_j^{j-\alpha_1} \sum_{l \leq \alpha_1} \left\|\partial^{\alpha_1 - l} g\right\|_\infty \\
& \leq & C_{\alpha,j}.\epsilon_j^{j-\alpha_1},
\end{array}$$

sendo $C_{\alpha,j}$ uma constante que independe de $(x,t) \in (-r\epsilon_j, r\epsilon_j) \times \mathbb{R}$ e ϵ_j.

Como $S(g_j) \subset (-r\epsilon_j, r\epsilon_j) \times \mathbb{R}$, temos

$$|(\partial^\alpha g_j)(x,t)| \leq C_{\alpha,j}.\epsilon_j^{j-\alpha_1},$$

para $j > 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ com $|\alpha| < j - 1$ e qualquer $(x,t) \in A \times \mathbb{R}$.

Escolhendo cada $\epsilon_j \in (0,1)$ suficientemente pequeno, obtemos

$$|(\partial^\alpha g_j)(x,t)| \leq 2^{-j},$$

para $j > 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1) \in \mathbb{Z}^2_+$ com $|\alpha| < j - 1$ e qualquer $(x,t) \in A \times \mathbb{R}$.

Segue da estimativa acima que, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^2_+$ a série $\sum_{j=0}^{\infty} (\partial^\alpha g_j)$ é uniformemente convergente em $A \times \mathbb{R}$. Definindo

$$v(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x,t)$$

para $(x,t) \in A \times \mathbb{R}$, e utilizando o Teorema 8 segue que v é uma função de $C^\infty(A \times \mathbb{R})$; mais ainda, $S(v) \subset (-r, r) \times \mathbb{R}$ e

$$(\partial^j_x v)(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\partial^j_x g_k)(0,t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $j \in \mathbb{Z}_+$.

Utilizando a regra de Leibniz verifica-se que

$$(\partial^j_x g_k)(0,t) = \left\{ \begin{array}{rl}
0, & se \quad j < k \\
v_k(t).g(0) = v_k(t), & se \quad j = k \\
\binom{j}{k} v_k(t).\epsilon_j^{k-j} (\partial^{j-k} g)(0) = 0 & se \quad j > k.
\end{array} \right.$$

Assim a função $v(x,t) \in C^\infty(A \times \mathbb{R})$ é 2π-periódica na variável t, está suportada em $(-r,r) \times \mathbb{R}$ e satisfaz $(\partial_x^j v)(0,t) = v_j(t)$, para todo $\mathbb{R}$ e $j \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

A ordem de anulamento, é um fator importante quando se deseja dividir uma função $f \in C^\infty(I)$ por uma função $g \in C^\infty(I)$. As próximas duas proposições consideram o caso em que g possui apenas zeros de ordem finita e fornecem condições suficientes para poder dividir f por g.

Proposição 4.

1. Se $g \in C^\infty(I)$ for uma função que se anula apenas em $x_0 \in I$, o qual é um zero de ordem finita $n \geq 1$ e $f \in C^\infty(I)$ for uma função que se anula em x_0 de ordem maior que n, então existirá $h \in C^\infty(I)$ satisfazendo $gh = f$, $f^{-1}(0) = h^{-1}(0)$ e a ordem de anulamento de h em cada zero $x \in h^{-1}(0)$ será igual à ordem de anulamento de f menos a ordem de anulamento de g em x.

2. Se $g \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R})$ possuir apenas zeros de ordem finita, $f \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R})$ for uma função tal que $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ e se a ordem de anulamento de f em cada $x \in g^{-1}(0)$ for maior que a ordem de anulamento da função g, então existirá $h \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R})$ tal que $gh = f$, $f^{-1}(0) = h^{-1}(0)$ e ordem de anulamento h em cada zero $x \in h^{-1}(0)$ será igual à ordem de anulamento de f menos a ordem de anulamento de g em x.

Demonstração. Ver [4]. $\square$

1.7 Mudança de variáveis em campos vetoriais

Os resultados desta seção foram tomados de [9] e adaptados ao nosso caso.

Definição 16. Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial complexo sobre M é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\begin{array}{rcl} L : C^\infty(M,\mathbb{C}) & \longrightarrow & C^\infty(M,\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & Lf \end{array}$$

que satisfaz a regra de Leibniz:

$$L(f \cdot g) = L(f) \cdot g + f \cdot L(g),$$

para todo $f, g \in C^{\infty,\mathbb{C}}$.

Considere o campo vetorial vetorial

$$\mathsf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a+ib)(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

em $\Omega = \mathbb{R} \times S^1$, com $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sejam U e $\tilde{U}$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$. Daqui em diante, denotaremos por (x,t) um ponto de U e por (u,v) um de $\tilde{U}$.

Considere $f : U \to \tilde{U}$ um difeomorfismo C^∞ dado por

$$f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t)) = (u,v), \quad \forall (x,t) \in U.$$

Seja $\phi \in C^\infty(\tilde{U})$; segue que $\phi \circ f \in C^\infty(U)$. Logo, aplicando o campo vetorial L em $\phi \circ f$ temos

$$\mathsf{L}(\phi \circ f) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \circ f) + (a+ib)(x)\frac{\partial}{\partial x}(\phi \circ f)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(\phi \circ f)(x,t) &= \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x,t)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x,t)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial t}(x,t) \\
&\quad + (a+ib)(x)\left[\frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x,t)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x,t)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,t)\right] \\
&= \left[\frac{\partial f_1}{\partial t}(x,t) + (a+ib)(x)\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,t)\right]\frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x,t)) \\
&\quad + \left[\frac{\partial f_2}{\partial t}(x,t) + (a+ib)(x)\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,t)\right]\frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x,t)) \\
&= \mathsf{L}f_1(x,t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x,t)) + \mathsf{L}f_2(x,t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x,t)) \\
&= (\mathsf{L}f_1) \circ \left(f^{-1} \circ f\right)(x,t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x,t)) + (\mathsf{L}f_2) \circ \left(f^{-1} \circ f\right)(x,t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x,t)) \\
&= ((\mathsf{L}f_1) \circ f^{-1}) \circ (f(x,t)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(x,t)) + ((\mathsf{L}f_2) \circ f^{-1}) \circ (f(x,t)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(x,t)) \\
&= \left(\left((\mathsf{L}f_1) \circ f^{-1}\right)(u,v) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} + \left((\mathsf{L}f_2) \circ f^{-1}\right)(u,v) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}\right)(f(x,t))
\end{aligned} \tag{1.2}$$

para todo $(x,t) \in U$.

Agora, definamos o campo vetorial $\tilde{\mathsf{L}} : C^\infty(\tilde{U}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\tilde{U}, \mathbb{C})$ dado por

$$\tilde{\mathsf{L}} = (\mathsf{L}f_1) \circ f^{-1}(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial u} + (\mathsf{L}f_2) \circ f^{-1}(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial v}.$$

Assim, para $\phi \in C^\infty(\tilde{U})$ temos

$$\tilde{\mathsf{L}}\phi = (\mathsf{L}f_1) \circ f^{-1}(u,v) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} + (\mathsf{L}f_2) \circ f^{-1}(u,v) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}. \tag{1.3}$$

Dos resultados anteriores, temos a seguinte Proposição:

Proposição 5. Sejam $\phi \in C^\infty(\tilde{U})$, $\psi \in C^\infty(U)$ e $f : U \longrightarrow \tilde{U}$ um difeomorfismo. Então:

1. $\mathsf{L}(\phi \circ f) = (\tilde{\mathsf{L}}\phi) \circ f$;

2. $(\mathsf{L}\psi) \circ f^{-1} = \tilde{\mathsf{L}}(\psi \circ f^{-1})$.

Demonstração. 1. Segue da equações (1.2).

2. Considere $\psi \circ f \in C^\infty(U)$, logo temos $\phi = \psi \circ f^{-1} \in C^\infty(\tilde{U})$. Assim, pelo item (1) temos
$$\mathsf{L}\psi = \tilde{\mathsf{L}}(\psi \circ f^{-1}) \circ f; \tag{1.4}$$
portanto,
$$(\mathsf{L}\psi) \circ f^{-1} = \tilde{\mathsf{L}}(\psi \circ f^{-1});$$

□

1.8 Condição ($\mathcal{P}$) de Nirenberg-Treves para campos vetoriais

Definição 17. Dizemos que o operador $\mathsf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a+ib)(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $b \not\equiv 0$ satisfaz a condição ($\mathcal{P}$) em Ω_ϵ se, e somente se, a função b não muda de sinal ao longo das curvas integrais do campo vetorial real $\frac{\partial}{\partial t} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$. (ver [5], Teorema 3.7).

Definição 18. Dizemos que L é resolúvel em Σ se existe $F \subset C^\infty(\Omega_\epsilon)$ subespaço de codimensão finita tal que para cada $f \in F$, existe $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ solução de $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ.

Sob nossas hipóteses, L satisfaz a condição ($\mathcal{P}$) de Nirenberg-Treves.

Vale a pena mencionar que a condição ($\mathcal{P}$) é necessária para a resolubilidade semiglobal.

1.9 Soluções fundamentais de operadores diferenciais

Os seguintes teoremas foram extraídos da referência [6].

Definição 19. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(U) \to \mathbb{C}$ é chamado uma distribuição em U. O espaço das distribuições em U é denotado por $\mathscr{D}'(U)$.

Exemplo: Considere $U = \mathbb{R}^n$ e defina $\langle \delta, f \rangle = f(0)$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. O funcional δ é linear e contínuo. Esta distribuição é chamada *delta de Dirac*.

Definição 20. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental de P se
$$P(D)E = \delta.$$

Definição 21. Se $u \in \mathscr{D}'(U)$ definimos o *suporte* de u como a interseção de todos os fechados de U fora dos quais u é nula.

Definição 22. Denotamos com $\mathscr{E}'(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, o subespaço de $\mathscr{D}'(U)$ das *distribuições de suporte compacto.*

Se f e g são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e uma delas tem suporte compacto, a convolução de f e g se define como

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Isto leva á seguinte definição

Definição 23. Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n))$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}^n))$ denotaremos com $u * f(a)$ a função definida por

$$u * f(a) = \left\langle u, \check{f}_a \right\rangle$$

onde $\check{f}_a(x) = f(a-x)$.

Teorema 13. Se E é uma solução fundamental de $P(D)$ e $v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, a equação $P(D)u = v$ tem uma solução dada por $E * v$. Além disso, se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $P(D)u = v$, então $u = E * v$.

Teorema 14. Toda solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ é da forma $\frac{1}{\pi z} + U(z)$, com $U(z)$ inteira.

Teorema 15. Todo operador diferencial com coeficientes constantes admite uma solução fundamental.

CAPÍTULO

2

ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Neste capítulo descrevemos o espaço de funções complexas infinitamente diferenciáveis definidas na variedade $\Omega = \mathbb{R} \times S^1$, denotado por $C^\infty(\Omega)$.

2.1 O espaço W

Seja
$$W = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2); f(x, y) = f(x, y + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
É fácil ver que W é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Definimos em W a família de seminormas,

$$\rho_j(f) = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} |(\partial^\alpha f)(x, y)|,$$

sendo $\mathbb{K}_j = [-j-1, j+1] \times \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Se f não é nula em $\mathbb{R}^2$ existem (x, y) e $j \in \mathbb{Z}_+$ tais que $(x, y) \in \mathbb{K}_j$ e

$$0 < |f(x, y)| \leq \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} |(\partial^\alpha f)(x, y)| = \rho_j(f);$$

logo, $\{\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma família separante de seminormas em W.

Para cada j e n inteiros positivos definimos o conjunto

$$V(\rho_j, n) = \left\{ f \in W; \rho_j(f) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Seja

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{m} V(\rho_{j_i}, n_i); j_i, n_i \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Proposição 6. Cada elemento de $\mathcal{B}$ é convexo e equilibrado.

Demonstração. Basta mostrar que para cada j e cada $n \in \mathbb{Z}_+$ o conjunto $V(\rho_j, n)$ é convexo e equilibrado, pois a interseção de convexos equilibrados é um convexo equilibrado. Dados j e $n \in \mathbb{Z}_+$, sejam $f, g \in V(\rho_j, n)$ e $t \in (0,1)$. Temos $(1-t)f + tg \in V(\rho_j, n)$, pois

$$\rho_j((1-t)f + tg) \leq (1-t)\rho_j(f) + t\rho_j(g) < (1-t)\frac{1}{n} + \frac{t}{n} = \frac{1}{n};$$

portanto, $V(\rho_j, n)$ é convexo.

Agora, seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| < 1$. Temos $\rho_j(\lambda f) = |\lambda|\, \rho_j(f) < |\lambda| \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$, para toda $f \in V(\rho_j, n)$; logo, $\lambda f \in V(\rho_j, n)$ e, portanto, $V(\rho_j, n)$ é equilibrado.

$\square$

Segue do Teorema 11 que:

- $\mathcal{B}$ é uma base local para uma topologia τ sobre W, onde $A \subset W$ é aberto se, e somente se, A é vazio ou união de translações de elementos de $\mathcal{B}$.
- Além disso, τ torna cada seminorma ρ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, em uma função contínua.
- $\mathcal{B}$ é uma base local de τ cujos elementos são convexos, isto é, W é um espaço localmente convexo.

Pelo Teorema 10 existe uma métrica d em W que é compatível com a topologia τ, invariante por translações; pela Observação 1, tal métrica é dada por:

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\rho_j(f-g)}{1+\rho_j(f-g)}.$$

Portanto, W é um EVT metrizável.

Definição 24. Dizemos que uma sequência $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset W$ é convergente em W se existir $\theta \in W$ tal que para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$, $(\partial^\alpha \theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \theta$ em $\mathbb{K}_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 16. Seja $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em W e seja $\theta \in W$. Temos que $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para θ se, e somente se, $\rho_j(\theta_i - \theta)$ converge para zero, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Assuma que $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset W$ converge para $\theta \in W$. Fixe $j \in \mathbb{Z}_+$. Para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, dado $\epsilon > 0$ existe $i_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que para todo $(x,y) \in \mathbb{K}_j$

$$i > i_\alpha \Longrightarrow |\partial^\alpha \theta_i(x,y) - \partial^\alpha \theta(x,y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $n = \max\{i_\alpha; |\alpha| \leq j\}$

$$i \geq n \Longrightarrow |\partial^\alpha \theta_i(x,y) - \partial^\alpha \theta(x,y)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{K}_j;$$

daí,

$$i \geq n \Longrightarrow \rho_j\left(\theta_i - \theta\right) = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} \left|\partial^\alpha \theta_i(x,y) - \partial^\alpha \theta(x,y)\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Como ϵ pode ser escolhido arbitrariamente, $\rho_j\left(\theta_i - \theta\right)$ converge para zero quando i tende ao infinito.

Reciprocamente, fixado $j \in \mathbb{Z}_+$, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ tal que $|\alpha| \leq j$ tem-se: dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i > n_0 \Longrightarrow \rho_j(\theta_i - \theta) = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} \left|\partial^\alpha \theta_i(x,y) - \partial^\alpha \theta(x,y)\right| < \epsilon;$$

note que para cada multi-índice β tal que $|\beta| \leq j$

$$i > n_0 \Longrightarrow \sup_{(x,y)\in\mathbb{K}_j} \left|\partial^\beta \theta_i(x,y) - \partial^\beta \theta(x,y)\right| \leq \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} \left|\partial^\alpha \theta_i(x,y) - \partial^\alpha \theta(x,y)\right| < \epsilon;$$

mais ainda, para cada $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ tal que $|\beta| \leq j$ e $(x,y) \in \mathbb{K}_j$

$$i > n_0 \Longrightarrow \left|\partial^\beta \theta_i(x,y) - \partial^\beta \theta(x,y)\right| \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{K}_j} \left|\partial^\beta \theta_i(x,y) - \partial^\beta \theta(x,y)\right| < \epsilon.$$

Assim, a sequência $(\partial^\alpha \theta_i)$ converge uniformemente em $\mathbb{K}_j$; portanto, (θ_i) converge em W. $\square$

Definição 25. Seja $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em W. Dizemos que $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em W, se para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para $l, m \geq n$ tem-se

$$d(\theta_l, \theta_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1 + \rho_j(\theta_l - \theta_m)} < \epsilon.$$

Teorema 17. Uma sequência $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset W$ é uma sequência de Cauchy em W se, e somente se, é uma sequência de Cauchy em cada seminorma ρ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Assuma que $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset W$ é de Cauchy em W. Dados $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, existe $N = N(\epsilon, k) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$l, m > N \Longrightarrow d(\theta_l, \theta_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1 + \rho_j(\theta_l - \theta_m)} < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Note que

$$\frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(\theta_l - \theta_m)}{1 + \rho_k(\theta_l - \theta_m)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1 + \rho_j(\theta_l - \theta_m)} < \frac{\epsilon}{2^{k+1}};$$

então, $\dfrac{\rho_k(\theta_l - \theta_m)}{1 + \rho_k(\theta_l - \theta_m)} < \dfrac{\epsilon}{2}$ sempre que $l, m > N$. Logo, para $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned} \rho_k(\theta_l - \theta_m) &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2}\rho_k(\theta_l - \theta_m) \\ \left(1 - \tfrac{\epsilon}{2}\right) \rho_k(\theta_l - \theta_m) &< \tfrac{\epsilon}{2} \\ \rho_k(\theta_l - \theta_m) &< \tfrac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy com cada seminorma ρ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$.

($\Leftarrow$) Primeiro observe-se que para $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1+\rho_j(\theta_l - \theta_m)} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k};$$

além disso, dado $\epsilon > 0$, pela propriedade arquimediana existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k_0-1}} < \epsilon$. Logo,

$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1+\rho_j(\theta_l - \theta_m)} \leq \frac{1}{2^{k_0}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, assuma que $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy para cada seminorma ρ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$; logo, para k_0 dado acima, dado $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$l, m \geq M \Longrightarrow \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_{k_0} \\ |\alpha|\leq k_0}} |\partial^\alpha \theta_l(x,y) - \partial^\alpha \theta_m(x,y)| = \rho_{k_0}(\theta_l - \theta_m) < \frac{\epsilon}{2};$$

mais ainda, se $j < k_0$, então $\rho_j(\theta_l - \theta_m) \leq \rho_{k_0}(\theta_l - \theta_m) < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $l, m \geq M$. Consequentemente,

$$l, m \geq M \Longrightarrow \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1+\rho_j(\theta_l - \theta_m)} < \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} = \frac{\epsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{k_0}}\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $l, m > M$ então

$$\begin{aligned} d(\theta_l, \theta_m) &= \textstyle\sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(\theta_l-\theta_m)}{1+\rho_j(\theta_l-\theta_m)} + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(\theta_l-\theta_m)}{1+\rho_j(\theta_l-\theta_m)} \\ &< \textstyle\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy com a métrica d. □

Teorema 18. (W, d) é completo.

Demonstração. Seja $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em W. Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se $l, m \geq n$ então

$$d(\theta_l, \theta_m) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\rho_j(\theta_l - \theta_m)}{1+\rho_j(\theta_l - \theta_m)} < \epsilon;$$

o que pelo Teorema 17 é equivalente a

$$l, m \geq n(\epsilon, j) \Rightarrow \rho_j(\theta_l - \theta_m) = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} |\partial^\alpha \theta_l(x,y) - \partial^\alpha \theta_m(x,y)| < \epsilon,$$

note que para cada multi-índice $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ tal que $|\beta| \leq j$, fixo j,

$$l, m > N \Longrightarrow \sup_{(x,y)\in\mathbb{K}_j} \left|\partial^\beta \theta_l(x,y) - \partial^\beta \theta_m(x,y)\right| \leq \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{K}_j \\ |\alpha|\leq j}} |\partial^\alpha \theta_l(x,y) - \partial^\alpha \theta_m(x,y)| < \epsilon,$$

sendo $N = \max\{n(\epsilon, i); i \leq j\}$. Portanto, $\left(\partial^\beta \theta_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $(C^0(\mathbb{K}_j), \|\cdot\|_\infty)$ o qual é um espaço completo implicando que a sequência $\left(\partial^\beta \theta_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a uma função γ_β. Consequentemente, (pela Definião 24.) existe $\theta \in W$ tal que $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para θ. A convergência uniforme da sequência de funções $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ implica a convergência pontual. Assim aplicando recursivamente o Teorema 8, obtemos que $\partial^\beta\theta = \gamma_\beta$ em $\mathbb{K}_j$, para todo $\beta \in \mathbb{Z}^2_+$.

Como o resultado acima se tem para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, então $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Agora provaremos que θ é periódica. De fato, como θ_i é periódica, para cada $i \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\theta(x, y + 2m\pi) = \lim_{i\to\infty} \theta_i(x, y + 2m\pi) = \lim_{i\to\infty} \theta_i(x, y) = \theta(x, y), m \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $\theta \in W$ e, assim, W é um EVT completo. □

Como consequência dos Teoremas acima temos o seguinte resultado.

Teorema 19. *W é um espaço de Fréchet.*

2.2 O espaço $C^\infty(\Omega)$.

Consideremos em $\mathbb{R}$ a relação de equivalência $t \sim y$ se, e somente se, $t - y = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Denotamos o conjunto das classes de equivalência por $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Seja a aplicação projeção $\mathfrak{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definida por

$$\mathfrak{p}(t) = [t] \doteq \{y \in \mathbb{R}; t - y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Evidentemente, $\mathfrak{p}$ é sobrejetora.

Consideramos em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ a topologia quociente co-induzida por $\mathfrak{p}$. Em outras palavras, dizemos que o conjunto $A \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é aberto quando $\mathfrak{p}^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Proposição 7. *A sobrejeção $\mathfrak{p}$ é um homeomorfismo local.*

Demonstração. Considere $B(t, \pi) = \{y \in \mathbb{R} : |t - y| < \pi\}$. Mostraremos que para todo $t \in \mathbb{R}$, a restrição $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\mid_{B(t,\pi)}$ é um homeomorfismo.

Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ e seja $\mathfrak{q} : B(t_0, \pi) \longrightarrow \mathfrak{p}\left(B(t_0, \pi)\right)$, dada por $\mathfrak{q}(t) = \mathfrak{p}|_{B(t_0,\pi)}(t)$. Temos que $\mathfrak{q}$ é injetiva. De fato, sejam a, $b \in (t_0 - \pi, t_0 + \pi)$, com $a \neq b$. Podemos supor $a > b$ (o caso $a < b$ é análogo). Temos $0 < a - b < t_0 + \pi - b$. Como $t_0 - \pi < b < t_0 + \pi$ então $-t_0 - \pi < -b < -t_0 + \pi$; logo $0 < a - b < 2\pi$. Portanto, $\mathfrak{p}(a) \neq \mathfrak{p}(b)$, isto é, $\mathfrak{q}(a) \neq \mathfrak{q}(b)$.

A função $\mathfrak{q}$ é sobrejetiva, pois $\mathfrak{p}$ é sobrejetiva. Consequentemente $\mathfrak{q}$ é bijetiva.

Afirmamos que $\mathfrak{q}$ é uma função contínua. De fato, seja A um aberto em $\mathfrak{p}(t_0-\pi, t_0+\pi)$ então $A = U \cap \mathfrak{p}(t_0 - \pi, t_0 + \pi)$ onde U é um aberto en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{q}^{-1}(A) & = & \mathfrak{q}^{-1}(U \cap \mathfrak{p}(t_0 - \pi, t_0 + \pi)) \\ & = & \mathfrak{p}^{-1}(U \cap \mathfrak{p}(t_0 - \pi, t_0 + \pi)) \\ & = & \mathfrak{p}^{-1}(U) \cap \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}(t_0 - \pi, t_0 + \pi)) \\ & = & \mathfrak{p}^{-1}(U) \cap (t_0 - \pi, t_0 + \pi); \end{array}$$

portanto, $\mathfrak{q}^{-1}(A)$ é um aberto em $(t_0 - \pi, t_0 + \pi)$; assim, $\mathfrak{q}$ é contínua com a topologia quociente do subespaço $\mathfrak{p}(t_0 - \pi, t_0 + \pi)$. Segue da injetividade de $\mathfrak{q}$, que $\mathfrak{q}$ é uma aplicação aberta e, portanto, $\mathfrak{q}^{-1}$ também é contínua. Concluímos que a função $\mathfrak{p}$ é um homeomorfismo local. □

Proposição 8. O espaço quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é uma variedade de dimensão 1.

Demonstração. Consideramos as seguintes restrições de $\mathfrak{p}$:

$$\begin{array}{rccl} \phi_1 : & (0, 2\pi) & \to & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ & t & \mapsto & \phi_1(t) = \mathfrak{p}(t) = [t] \end{array} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \phi_2 : & (-\pi, \pi) & \to & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ & t & \mapsto & \phi_2(t) = \mathfrak{p}(t) = [t] \end{array} \tag{2.2}$$

as quais pela prova da Proposição 7 são homeomorfismos.

Denotamos $\dot{t}$ o representante de cada classe $[t] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Note que as imagens diretas das parametrizações são:

$$\phi_1((0, 2\pi)) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}, \quad \phi_2((-\pi, \pi)) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[\pi]\}.$$

Definimos as inversas das parametrizações assim:

$$\begin{array}{rccl} \phi_1^{-1} : & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0]\} & \to & (0, 2\pi) \\ & [t] & \mapsto & \phi_1^{-1}([t]) = \dot{t} \end{array}$$

e $\phi_2^{-1} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[\pi]\} \to (-\pi, \pi)$ definida por

$$\phi_2^{-1}([x]) = \begin{cases} \dot{t} & \texttt{se } \dot{t} \in [0, \pi) \\ \dot{t} - 2\pi & \texttt{se } \dot{t} \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Então $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}) \cap (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[\pi]\}) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0], [\pi]\}$; portanto, a pré-imagem do aberto $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0], [\pi]\}$ por meio das parametrizações locais é:

$$\phi_1^{-1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0], [\pi]\}) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \quad \text{e} \quad \phi_2^{-1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \setminus \{[0], [\pi]\}) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Daí as mudanças de coordenadas são:

$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \to (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ definida por

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in (0,\pi) \\ t - 2\pi & \text{se } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

e

$\phi_1^{-1} \circ \phi_2 : (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \to (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ definida por

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1(x) = \begin{cases} t + 2\pi & \text{se } t \in (-\pi, 0) \\ t & \text{se } t \in (0, \pi) \end{cases}.$$

As mudanças de coordenadas são infinitamente diferenciáveis em cada aberto onde estão definidas. Portanto, $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ e $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ são difeomorfismos de classe C^{∞}.

Então, a família $\mathfrak{B} = \{((0, 2\pi), \phi_1), ((-\pi, \pi), \phi_2)\}$ fornece a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de uma estrutura diferenciável de classe C^{∞} em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Consequentemente, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é uma variedade de dimensão 1.

$\square$

Chamaremos ao espaço topológico $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de *cilindro*, e denotaremos por $\mathbb{R} \times S^1$.

Proposição 9. $\mathbb{R} \times S^1$ é uma variedade produto.

Demonstração. Como sabemos $\mathbb{R}$ e S^1 são variedades; logo, muniremos ao espaço topológico produto $\mathbb{R} \times S^1$ uma estrutura de variedade produto, dada pelos seguintes sistemas de coordenadas:

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{P}_1 : & \mathbb{R} \times (0, 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times S^1 \\ & (x,t) & \longmapsto & \mathcal{P}_1(x,t) = (Id(x), \phi_1(t)) = (x, [t]) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{P}_2 : & \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times S^1 \\ & (x,t) & \longmapsto & \mathcal{P}_2(x,t) = (Id(x), \phi_2(t)) = (x, [t]), \end{array}$$

sendo, as funções ϕ_1 e ϕ_2 são as restrições (2.1) e (2.2) e, portanto, homeomorfismos, e a função Id a identidade em $\mathbb{R}$. Logo, as parametrizações $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são homeomorfismos.

Note que as imagens diretas dos conjuntos $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ e $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ pelas parametrizações locais são respectivamente: $\mathcal{P}_1(\mathbb{R} \times (0, 2\pi)) = \mathbb{R} \times (S^1 \setminus \{[0]\})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)) = \mathbb{R} \times (S^1 \setminus \{[\pi]\})$.

Definimos $A_0 = S^1 \setminus \{[0]\}$ e $A_\pi = S^1 \setminus \{[\pi]\}$.

A partir das definições de ϕ_1^{-1} e ϕ_2^{-1} segue que as inversas das paratetrizações são:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_1^{-1}: & \mathbb{R}\times A_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}\times(0,2\pi) \\ & (x,[t]) & \longmapsto & \mathcal{P}_1^{-1}(x,[t]) = (Id(x),\phi_1^{-1}([t])) = (x,\dot{t}), \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_2^{-1}: & \mathbb{R}\times A_\pi & \longrightarrow & \mathbb{R}\times(-\pi,\pi) \\ & (x,[t]) & \longmapsto & \mathcal{P}_2^{-1}(x,[t]) = (Id(x),\phi_2^{-1}([t]))\begin{cases}(x,\dot{t}) & \texttt{se } (x,\dot{t})\in\mathbb{R}\times[0,\pi), \\ (x,\dot{t}-2\pi) & \texttt{se } (x,\dot{t})\in\mathbb{R}\times[\pi,2\pi). \end{cases} \end{array}$$

Agora temos que $(\mathbb{R}\times A_0)\cap(\mathbb{R}\times A_\pi) = \mathbb{R}\times(A_0\cap A_\pi) = \mathbb{R}\times(S^1\setminus\{[0],[\pi]\})$ e calculamos as imagens inversas do conjunto pelas parametrizações

$$\mathcal{P}_1^{-1}(\mathbb{R}\times(A_0\cap A_\pi)) = \mathbb{R}\times(0,\pi)\cup\mathbb{R}\times(\pi,2\pi) = \mathbb{R}\times((0,\pi)\cup(\pi,2\pi)),$$

$$\mathcal{P}_2^{-1}(\mathbb{R}\times(A_0\cap A_\pi)) = \mathbb{R}\times(-\pi,0)\cup\mathbb{R}\times(0,\pi) = \mathbb{R}\times((-\pi,0)\cup(0,\pi)).$$

Nas regiões onde as imagens de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ se sobrepõem, $\mathbb{R}\times(A_0\cap A_\pi)$, a aplicação $\mathcal{P}_1$ pode ser obtida a partir de $\mathcal{P}_2$ composto com a seguinte mudanças de coordenadas: $\mathcal{P}_2^{-1}\circ\mathcal{P}_1 : \mathbb{R}\times[(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)] \longrightarrow \mathbb{R}\times[(-\pi,0)\cup(0,\pi)]$ dada por

$$\mathcal{P}_2^{-1}\circ\mathcal{P}_1(x,t) = (Id(x),\phi_2^{-1}\circ\phi_1(t)) = \begin{cases}(x,t) & \texttt{se } (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\pi), \\ (x,t-2\pi) & \texttt{se } (x,t)\in\mathbb{R}\times(\pi,2\pi). \end{cases}$$

Note que a função $\mathcal{P}_2^{-1}\circ\mathcal{P}_1$ está definida apropriadamene em um domínio aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2\circ(\mathcal{P}_2^{-1}\circ\mathcal{P}_1)$.

De forma similar a mudança de coordenadas

$\mathcal{P}_1^{-1}\circ\mathcal{P}_2 : \mathbb{R}\times[(-\pi,0)\cup(0,\pi)] \longrightarrow \mathbb{R}\times[(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)]$ é dada por:

$$\mathcal{P}_1^{-1}\circ\mathcal{P}_2(x,t) = (Id(x),\phi_1^{-1}\circ\phi_2(t)) = \begin{cases}(x,t+2\pi) & \text{se } (x,t)\in\mathbb{R}\times(-\pi,0) \\ (x,t) & \text{se } (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\pi). \end{cases}$$

A função $\mathcal{P}_1^{-1}\circ\mathcal{P}_2$ está definida apropriadamene em um domínio aberto de $\mathbb{R}^2$ que é a preimagem de $\mathbb{R}\times(A_0\cap A_\pi)$ pela função $\mathcal{P}_2$. Além disso, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\circ(\mathcal{P}_1^{-1}\circ\mathcal{P}_2)$.

As funções Id, $\phi_2^{-1}\circ\phi_1$ e $\phi_1^{-1}\circ\phi_2$ sao difeomorfismos de classe C^∞ nos abertos onde cada uma delas está definida. Portanto $\mathcal{P}_1^{-1}\circ\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_1^{-1}\circ\mathcal{P}_2$ são difeomorfismos de classe C^∞.

Segue-se do anterior que $\mathbb{R}\times S^1$ é uma variedade suave de dimensão 2.

$\square$

Definição 26. Seja $\Omega = \mathbb{R} \times S^1$. Definimos $C^\infty(\Omega)$ o espaço formado por todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que são de classe C^∞ em Ω.

Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \Omega \\ & (x,t) & \longmapsto & (id(x), \mathfrak{q}(t)) = (x,[t]) \end{array}$$

sendo $\mathfrak{q}$ alguma restrição da aplicação projeção $\mathfrak{p}$ que seja homeomorfismo.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & C^\infty(\Omega) & \longrightarrow & W \\ & f & \longmapsto & \Lambda(f) \doteq f \circ \mathcal{P} \end{array}$$

Teorema 20. Λ é bem definida; além disso, Λ é bijeção.

Demonstração. Note que para cada $(x, t + 2k\pi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\Lambda(f)(x, t + 2k\pi) \doteq f \circ \mathcal{P}(x, t + 2k\pi) = f(x, [t]) = f \circ \mathcal{P}(x, t) \doteq \Lambda(f)(x, t);$$

logo $\Lambda(f)$ é 2π-periódica na segunda variável.

Afirmação 1: Λ é injetiva.

De fato, se $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ então para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\Lambda(f)(x,t) = \Lambda(g)(x,t)$; logo, $f \circ \mathcal{P}(x,t) = g \circ \mathcal{P}(x,t)$, isto é, $f(x,[t]) = g(x,[t])$, $\forall (x,[t]) \in \Omega$ e, portanto $f = g$.

Afirmação 2: Dada $g \in W$, existe $f \in C^0(\Omega)$ tal que $f \circ \mathcal{P} = g$.

De fato, seja $g \in W$; note que para um x_0 fixo, g é constante em cada conjunto $\mathcal{P}^{-1}(x_0, [t])$, para cada $(x_0, [t])$. Além disso, é fácil ver que $\mathcal{P}$ é uma aplicação quociente. Logo, pelo Teorema 9 g induz uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \circ \mathcal{P} = g$.

Para mostrar que Λ é bijeção, resta provar que f é infinitamente diferenciável. Isto será uma consequência da Proposição:

Proposição 10. A aplicação quociente $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \to \Omega$ é uma submersão.

Demonstração. Observe que $\mathbb{R}^2$ é uma variedade de classe C^∞ e que $\mathcal{P}$ é uma aplicação sobrejetiva. Então, pelo Corolário 2, existe no máximo uma estrutura de variedade de classe C^∞ em Ω que torna $\mathcal{P}$ uma submersão C^∞.

A função $\mathcal{P}$ é homeomorfismo em $\mathbb{R}^2$; logo, com certas restrições de $\mathfrak{p}$ definimos $\mathcal{P}^{-1} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{P}^{-1}(x,[t]) = (x, \mathfrak{q}^{-1}([t]))$, sendo $\mathfrak{q}$ a restrição apropriada de $\mathfrak{p}$, descrita na Proposição 7.

Portanto, $\mathcal{P}^{-1}$ é uma carta local da variedade Ω, implicando a diferenciabilidade de $\mathcal{P}$, pois $\mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{P} = I$ onde I é a função identidade em $\mathbb{R}^2$. Além disso, a derivada da identidade tem posto máximo igual a 2; portanto, tem derivada sobrejetiva. □

Final da demonstração do Teorema 20:

Como $\mathcal{P}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega$ é uma submersão sobrejetiva de classe C^∞, aplicando a Proposição 3, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ é de classe C^∞ se, e somente se, $f\circ\mathcal{P}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ é de classe C^∞. Portanto, $f\circ\mathcal{P} = g \in W$ então $f \in C^\infty(\Omega)$, i.e, Λ é sobrejetiva. A demonstração do Teorema 20 está completa. □

Observação 2. Como consequencia do Teorema 20, $C^\infty(\Omega)$ e W são homeomorfos.

2.3 Série Parcial de Fourier de funções em W

Os seguintes resultados são uma adaptação dos Teoremas de [10] da seções I.5 e I.6, para o espaço W.

Definição 27. Dizemos que uma sequência numérica $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ é *rapidamente decrescente* se para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ existir $C > 0$ tal que $|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k}$ para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Teorema 21. Seja $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ uma sequência rapidamente decrescente. Então $f(y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imy}$ pertence a $C^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Considere $S_p(y) = \sum_{|m|\leq p} c_m e^{imy}$. Como a sequência $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ é rapidamente decrescente, temos que, existe $C > 0$ tal que

$$\left|c_m e^{imy}\right| = |c_m| < \frac{C}{|m|^2}, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Note que $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{C}{|m|^2}$ converge; logo, pelo critério de Weierstrass 3, a sequência de funções $(S_p(y))$ converge uniformemente para a função

$$f(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imy},$$

a qual é contínua por ser o limite uniforme de funções contínuas (Corolário 1).

É fácil ver que $f(y)$ é periódica.

Agora, $S_p'(y) = \sum_{|m|\leq p} imc_m e^{imy}$. Novamente, segue de (c_m) rapidamente decrescente que existe $C > 0$ tal que

$$\left|imc_m e^{imy}\right| = |m|\,|c_m| \leq \frac{C}{|m|^3} = \frac{C}{|m|^2}, \text{ para todo } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

logo, novamente pelo critério de Weierstrass (ver Teorema 3), temos

$$\lim_{p\to\infty} S_p'(y) \longrightarrow g(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} imc_m e^{imy}$$

uniformemente. Aplicando o Teorema 7 às sequêcias $(S_p(y))$ e $\left(S_p'(y)\right)$ temos que $f'(y) = g(y)$, i. e., f é diferenciável.

Repetindo o procedimento anterior iteradamente com as sequências de derivadas obtemos que f é de classe C^∞. □

Dada $f \in W$ considere para cada $x \in \mathbb{R}$ a função

$$\begin{array}{rcl} g_x : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & g_x(t) = f(x,t) \end{array}.$$

É fácil ver que $g_x \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$. Defina

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_x(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t)e^{-ikt}dt.$$

As funções $f_k(x)$ são chamadas *coeficientes parciais de Fourier* de f. A série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k(x)e^{ikt}$ é chamada de *série parcial de Fourier* de f em relação a t.

Lema 1. Seja $\varphi \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$. Se $\hat{\varphi}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ então, $\varphi(0) = 0$.

Demonstração. Observe que $\hat{\varphi}(k) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{ikt}dt = 0$ implica que para toda

$$p(t) = \textstyle\sum_{|k|\leq n} b_k e^{ikt},\ b_k \in \mathbb{C},$$

tem-se

$$\frac{1}{2\pi}\int_y^{2\pi+y} \varphi(t)p(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_y^{2\pi+y} \varphi(t)\sum_{|k|\leq n} b_k e^{ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leq n} b_k \int_y^{2\pi+y} \varphi(t)e^{ikt}dt$$

$$= \sum_{|k|\leq n} a_k\hat{\varphi}(k) = 0. \tag{2.3}$$

Por contradição suponha que $\varphi(0) = C \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $C > 0$, pois $\wedge(-\varphi)(k) = -\hat{\varphi}(k)$. Pela continuidade da função φ temos que existe $0 < \delta < \pi$ tal que, se $|t| < \delta$, então $|\varphi(t) - C| < \frac{C}{2}$; isto implica que

$$\varphi(t) > \frac{C}{2},\ \text{se } t,\quad |t| < \delta. \tag{2.4}$$

Defina

$$\begin{array}{rcl} p : [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & p(t) = 1 + \cos t - \cos\delta \end{array}$$

É fácil ver que $p(t)$ é decrescente em $0 \leq t \leq \pi$; mais ainda, é uma função par. Se $\delta \leq t \leq \pi$ então

$$-1 \leq \cos t \leq \cos\delta < 1$$

$\Rightarrow$
$$-1 - \cos\delta \leq \cos t - \cos\delta \leq 0 < 1 - \cos\delta$$
$\Rightarrow$
$$-1 < -\cos\delta \leq p(t) \leq 1 < 2 - \cos t.$$
Note que pelo feito acima temos
$$0 < p(t) \leq 1, \qquad \text{se } \delta \leq t \leq \pi;$$
como $p(t) = p(-t)$, temos
$$0 < p(t) \leq 1, \qquad \text{se } \delta \leq |t| \leq \pi. \qquad (*)$$

Se $0 \leq |t| \leq \delta$ então,
$$\cos t \geq \cos\delta$$
$\Rightarrow$
$$\cos t - \cos\delta \geq 0$$
$\Rightarrow$
$$p(t) = 1 + \cos t - \cos\delta \geq 1. \qquad (**)$$
Como a função $p(t)$ é decrescente, para cada real $x > 1$ defina
$$q(x) \doteq \min\left\{p(t); -\frac{\delta}{x} \leq t \leq \frac{\delta}{x}\right\} = p\left(\frac{\delta}{x}\right) = 1 + \cos\frac{\delta}{x} - \cos\delta > 1. \tag{2.5}$$
Também
$$d = \max\{p(t); -\delta \leq t \leq \delta\} = p(0) = 2 - \cos\delta > 1. \tag{2.6}$$
Além disso,
$$\lim_{x\to\infty} q(x) = 2 - \cos\delta = d; \tag{2.7}$$
então,
$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{q(x)} = 1$$
e para $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{d}{q(x)}\right)^{2(n-1)} = 1. \tag{2.8}$$
O limite (2.7) implica que dado $\epsilon = \frac{d-1}{2} > 0$ existe x_1 tal que
$$x \geq x_1 \Rightarrow |q(x) - d| < \frac{d-1}{2};$$
então, $q(x) > \frac{d+1}{2}$ sempre que $x \geq x_1$.

Do limite em (2.8) obtemos que existe x_2 tal que
$$x \geq x_2 \Rightarrow \left|\left(\frac{d}{q(x)}\right)^{2(n-1)} - 1\right| < \frac{d-1}{2};$$

então, $\left(\frac{d}{q(x)}\right)^{2(n-1)} < \frac{d+1}{2}$ sempre que $x \geq x_2$.

Seja $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$. Logo,

$$x \geq x_0 \Rightarrow \left(\frac{d}{q(x)}\right)^{2(n-1)} < \frac{d+1}{2} < q(x)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{q(x)} < q(x)^{\frac{1}{2(n-1)}}$$

$\Rightarrow$

$$d < q(x)^{1+\frac{1}{2(n-1)}}.$$

Assim, se $x \geq x_0$ e $t \in [-\frac{\delta}{x}, \frac{\delta}{x}]$ tem-se, por definição de d em (2.6), que

$$p(t) \leq d < q(x)^{1+\frac{1}{2(n-1)}};$$

além disso, por definição de $q(x)$ em (2.5), $q(x) \leq p(t) \leq q(x)^{1+\frac{1}{2(n-1)}}$.

Tome $x = x_0$. Podemos escrever

$$p(t) = 1 + \cos t - \cos\delta = 1 + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - \cos\delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$P_n(t) = (p(t))^n.$$

Note que P_n se escreve na forma

$$P_n = \sum_{|k| \leq n} b_k e^{ikt}.$$

Agora,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)P_n(t)dt = \int_{-\pi}^{-\delta} \varphi(t)P_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)P_n(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi(t)P_n(t)dt.$$

Para cada $t \in [-\frac{\delta}{x_0}, \frac{\delta}{x_0}]$ as equações (2.5) e (2.4) implicam respectivamente

$$P_n(t) = (p(t))^n \geq (q(x))^n > 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(t) > \tfrac{C}{2}.$$

Logo, $\varphi(t)P_n(t) > \frac{C}{2}$ em $0 < |t| < \frac{\delta}{x_0}$. Portanto, para $-\delta < t < \delta$,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)P_n(t)dt \geq \int_{\frac{-\delta}{x_0}}^{\frac{\delta}{x_0}} \varphi(t)P_n(t)dt > \frac{C.(q(x_0))^n.\delta}{x_0}.$$

Em (*) concluímos que se $\delta \leq |t| \leq \pi$ então $p(t) \leq 1$; logo, sabendo que

$$-\varphi(t)P_n(t) \leq |\varphi(t)P_n(t)|$$

tem-se

$$\begin{aligned} -\int_{\delta}^{\pi} \varphi(t)P_n(t)dt &\leq \int_{\delta}^{\pi} |\varphi(t)|\,|P_n(t)|\,dt = \int_{\delta}^{\pi} |\varphi(t)|\,|p(t)|^n\,dt \\ &\leq \int_{\delta}^{\pi} |\varphi(t)|\,dt \\ &\leq (\pi-\delta) \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)| \\ &< \pi \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)| \end{aligned}$$

o que implica

$$\int_{\delta}^{\pi} \varphi(t)P_n(t)dt \quad > \quad -\pi. \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)|\,.$$

Com um raciocínio similar obtemos $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi(t)P_n(t)dt > -\pi. \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)|$. Assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)P_n(t)dt \geq \frac{C.(q(x_0))^n.\delta}{x_0} - 2\pi. \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)| = (q(x_0))^n \left[\frac{C\delta}{x_0} - \frac{2\pi. \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)|}{(q(x_0))^n}\right]$$

Como $(q(x_0))^n > 1$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} (q(x_0))^n \left[\frac{C\delta}{x_0} - \frac{2\pi. \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)|}{(q(x_0))^n}\right] = \infty;$$

portanto, dado $M = 1$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ então

$$(q(x_0))^n \left[\frac{C\delta}{x_0} - \frac{(\pi) \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi(t)|}{(q(x_0))^n}\right] > 1;$$

em outras palavras, existe N_0 tal que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)P_{N_0}(t)dt > 1$, o que contradiz (2.3). Portanto, concluímos que $\varphi(0) = 0$.

$\square$

Teorema 22. Seja $\varphi \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\varphi}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Então, $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Considere para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_{-x} : P_{2\pi}(\mathbb{R}) &\longrightarrow P_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto (T_{-x}\varphi)(t) = \varphi(t+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(T_{-x}\varphi)}(k) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T_{-x}\varphi)(t) e^{-ikt} dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t+x) e^{-ikt} dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_x^{2\pi+x} \varphi(z) e^{-ik(z-x)} dz && (z = t+x) \\ &= \tfrac{1}{2\pi} e^{ikx} \int_x^{2\pi+x} \varphi(z) e^{-ikz} dz \\ &= \tfrac{1}{2\pi} e^{ikx} \hat{\varphi}(k); \end{aligned}$$

logo, pela hipótese $\widehat{(T_{-x}\varphi)}(k) = 0$ e pelo lema 1, isto implica que

$$0 = (T_{-x}\varphi)(0) = \varphi(0 + x) = \varphi(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

□

Teorema 23. Seja $f \in W$. Então, $\hat{f}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x,t)e^{-ikt}dt$ forma uma sequência rapidamente decrescente e

$$f(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(x)e^{ikt}.$$

Demonstração. Primeiro note que para n fixado

$$\begin{aligned}
2\pi ik\hat{f}_k(x) &= ik\int_0^{2\pi} f(x,t)e^{-ikt}dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\left(e^{-ikt}\right) f(x,t)dt \\
&= -\left[e^{-ikt}f(x,t)\right]\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt \\
&= 2\pi\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}_k(x).
\end{aligned}$$

Fazendo iteradas derivadas e definindo que $\frac{\partial^0 f}{\partial t^0} = f$ temos para todo $j \in \mathbb{N}$ que

$$(ki)^j\hat{f}_k(x) = \widehat{\left(\frac{\partial^j f}{\partial t^j}\right)}_k(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|k|^j\left|\hat{f}_k(x)\right| &= \left|\widehat{\left(\frac{\partial^j f}{\partial t^j}\right)}_k(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)\right| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{-ikt}\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)\right| dt \\
&= \sup_{(x,t)\in\mathbb{K}_j}\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)\right| = C(j).
\end{aligned}$$

Como $C(j)$ não depende de k, a sequência de funções $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é rapidamente decrescente; com isto o Teorema 21 implica que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k(x)e^{ikt} \to \psi(x,t)$ uniformemente e $\psi \in W$.

Observe-se

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_k(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x,t)e^{-ikt}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{f}_l(x)e^{ilt}\right)e^{ikt}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\hat{f}_k(x)\int_0^{2\pi}e^{i(k-k)t}dt\\ &= \hat{f}_k(x).\end{aligned}$$

Agora vamos provar a igualdade de funções

$$\hat{\psi}_k(x) = \hat{f}_k(x), \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = \hat{\psi}_k(x) - \hat{f}_k(x) = (\widehat{\psi - f})(x), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Seja $h = \psi - f$ então, equivalentemente mostraremos o seguinte:

Afirmação: Dada $h \in W$ se $\hat{h}_k(x) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ então $h = 0$.

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ considere a função

$$\begin{aligned} g_x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto g_x(t) = h(x,t).\end{aligned}$$

Como $g_x \in P_{2\pi}(\mathbb{R})$ então,

$$\left(\hat{g_x}\right)_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x,t)e^{-ikt}dt = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

logo, pelo Teorema 22, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos $g_x \equiv 0$.

Portanto, $h(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

□

2.4 Funções flat em W

Proposição 11. Seja $f \in W$ e seja $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função que possua apenas zeros de ordem finita. Se f for flat em $g^{-1}(0) \times \mathbb{R}$, então existirá $h \in W$, flat em $g^{-1}(0) \times \mathbb{R}$ e tal que $g(x)h(x,t) = f(x,t)$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Sejam $a \in g^{-1}(0)$ de ordem $n < \infty$ e I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ tais que $I \cap g^{-1}(0) = \{a\}$. A fórmula de Taylor de g em torno de a é

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n g^{(n+1)}(a+s(x-a))ds.(x-a)^{(n+1)};$$

fatorando $(x-a)^n$ e definindo

$$h_n(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n g^{(n+1)}(a+s(x-a))ds.(x-a)$$

podemos exprimir $g(x) = h_n(x)(x-a)^n$, sendo $h_n(x) \neq 0$ para $x \in I$.

Observe que f é uma função constante igual a zero para todo (a,t), $t \in \mathbb{R}$. Assim para cada t consideremos a série de Taylor da função f, em torno de (a,t) em uma vizinhança do segmento $[(a,t),(x_0,t)] \subset \mathbb{R}^2$, pela fórmula de Taylor na equação (1.1) e sendo f flat em $a \times \mathbb{R}$ tomamos $k > n$. Então: $f(x,t) = (x-a)^k h_k(x,t)$, sendo

$$h_k(x,t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a+r(x-a),t)dr.$$

Logo, pela Proposição 4 para cada $x \in I$ existe $H_x(t) = (x-a)^{k-n}\dfrac{h_k(x,t)}{h_n(x)}$ que pertence a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Se definimos $h(x,t) \doteq H_x(t)$ então $h \in W$ e, além disso, h satisfaz $gh = f$.

Observe que $h(x,t)$ é flat em $\{a\} \times \mathbb{R}$, pois $h_k(x,t)$ é flat em $\{a\} \times \mathbb{R}$, $h^{-1}(0) = \{a\} \times \mathbb{R}$. Além disso, a ordem de anulamento de h em $\{a\} \times \mathbb{R}$ é $k-n$.

$\square$

CAPÍTULO

3

RESOLUBILIDADE C^∞

Considere a variedade $\Omega_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, e

$$\mathsf{L} = \partial/\partial t + (a + ib)(x)\partial/\partial x, \tag{3.1}$$

um campo vetorial complexo sobre Ω_ϵ, sendo a e b funções de classe C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon)$ e a valores reais. Assuma que $\Sigma = \{0\} \times S^1$ é o conjunto característico de L, isto é, $b(0) = 0$ e $b(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. Também assumiremos que $a(0) = 0$. Nestas condições L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ (ver Definição 17).

Neste capítulo assumimos que b se anula de ordem $m \geq 2$ em $x = 0$. Assim, usando a fórmula de Taylor podemos escrever

$$(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + x^m b_0(x), \ \ \forall x \in (-\epsilon, \epsilon),$$

sendo n a ordem de anulamento de a em $x = 0$ quando a é flat em $x = 0$ e $n \geq m$ quando a é flat em $x = 0$.

Mostraremos que L é resolúvel em Σ se, $2 \leq m < 2n - 1$. (Ver Definição 18).

Observação 3. Se dada $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ exitir $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, solução de $\mathsf{L}u = f$, em uma vizinhança de Σ, então

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, t)dt = 0, \qquad j = 0, \cdots, r - 1,$$

sendo $r = \min\{m, n\}$. De fato,

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, t)dt & = & \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j (\mathsf{L}u)}{\partial x^j}(0, t)dt \\
& = & \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (a + ib)\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0, t)\right) dt \\
& = & \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(0, t)dt \\
& = & \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, 2\pi) - \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, 0) \\
& = & 0.
\end{array}$$

Dadas $f,\, g \in C^\infty$ denotaremos $f \cong g$ quando $\partial^\alpha f(0,t) = \partial^\alpha g(0,t)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^2_+$. Ou, equivalentemente $f \cong g$ quando $f - g$ é flat em Σ.

Proposição 12. Assuma que em $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$ tenhamos $(a+ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$ sendo a_0 e b_0 pertencente a $C^\infty(I_\epsilon)$ e que ocorre,

1. $a_0(0) \neq 0$ e $1 \leq n \leq m$, ou
2. $b_0(0) \neq 0$ e $2 \leq m$.

Seja $r = \min\{m, n\}$. Então, dada $f \in C^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0,t)dt = 0, \qquad j = 0, \cdots, r-1, \tag{3.2}$$

existe $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ tal que a função $\mathsf{L}u - f$ é flat em $\Sigma = \{0\} \times S^1$.

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ satisfazendo (3.2). Vamos procurar por $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ tal que $\mathsf{L}u - f$ é flat em Σ. Para isso consideramos as seguintes expansões de Taylor:

$$u_j(t) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0,t), \qquad u \cong \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t)x^j;$$

$$f_j(t) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0,t), \qquad f \cong \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)x^j;$$

$$c_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^j a}{\partial x^j}(0) + i\frac{\partial^j b}{\partial x^j}(0)\right), \qquad a+ib \cong \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j.$$

Note que sendo $x = 0$ zero de ordem r de $a+ib$ temos que $c_j = 0$ se $j = 0, \ldots, r-1$ e $c_r \neq 0$.

A expansão em Taylor de $\mathsf{L}u \cong f$ corresponde a

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j'(t)x^j + \sum_{j\geq r} c_j x^j \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\cdot u_{j+1}(t)x^j \cong \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)x^j; \tag{3.3}$$

fatorando cada x^j no segundo termo do lado esquerdo tem-se

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j'(t)x^j + \sum_{j=r}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{j-r}(j-r+1-k)c_{r+k}u_{(j-r+1-k)}(t)\right]x^j \cong \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t)x^j.$$

Logo, segue que

$$u_j'(t) = f_j(t), \qquad j = 0, \ldots, r-1; \tag{3.4}$$

recursivamente temos

$$\begin{aligned}
u_r'(t) + c_r u_1(t) &= f_r(t), & j &= r;\\
u_{r+1}'(t) + 2c_r u_2(t) + c_{r+1}u_1(t) &= f_{r+1}(t), & j &= r+1;\\
u_{r+2}'(t) + 3c_r u_3(t) + 2c_{r+1}u_2(t) + c_{r+2}u_1(t) &= f_{r+2}(t), & j &= r+2;
\end{aligned}$$

em geral,

$$u_j'(t) + \sum_{\alpha=r}^{j} (j-\alpha+1)c_\alpha u_{(j-\alpha+1)}(t) = f_j(t), \qquad \text{se} \qquad j \geq r. \tag{3.5}$$

As condições em (3.2) implicam que

$$\int_0^{2\pi} f_j(t)dt = 0, \ \text{para } j = 0, \cdots, r-1; \tag{3.6}$$

logo, podemos resolver (3.4) e obtemos $u_j \in C^\infty(S^1)$ dada por

$$u_j(t) = \int_0^t f_j(s)ds = 0, \ \text{para } j = 0, \cdots, r-1. \tag{3.7}$$

Por outro lado em (3.5) não temos argumentos para garantir que a função

$$f_j(t) - \sum_{\alpha=r}^{j} (j-\alpha+1)c_\alpha u_{j-\alpha+1}(t)$$

possui uma primitiva em $C^\infty(S^1)$.

Usando a série de Fourier de uma função $g \in C^\infty(S^1)$ podemos decompor g da seguinte forma: $g = g_0 + g_1$, sendo $g_0 = \hat{g}(0)$ e $g_1(t) = \sum_{k\neq 0} \hat{g}(k)e^{ikt}$; mais ainda, pela convergência uniforme e convergência absoluta da série de Fourier, g_1 tem primitiva $h \in C^\infty(S^1)$, dada por $h(t) = \sum_{k\neq 0}(\frac{\hat{g}(k)}{ik})e^{ikt}$; novamente as convergências uniforme e absoluta, implicam que h possui primitiva e mediante indução concluímos que g_1 possui primitivas de ordem arbitrária em $C^\infty(S^1)$.

Usaremos o fato acima para resolver de uma só vez (3.4) e (3.5). Assim usamos tal decomposição para

$$u_j(t) = u_{j,0} + u_{j,1}(t) \quad \text{e} \quad f_j(t) = f_{j,0} + f_{j,1}(t), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Vamos resolver separadamente para $u_{j,0}$ e $u_{j,1}$.

De (3.4) obtemos

$$0 = f_{j,0}, \qquad j = 1, \cdots, r-1. \tag{3.8}$$

e de (3.5) obtemos

$$\sum_{\alpha=r}^{j} (j-\alpha+1)c_\alpha u_{(j-\alpha+1),0}(t) = f_{j,0}, \qquad j \geq r;$$

da última igualdade, quando $j = \alpha = r$, temos $u_{1,0} = f_{r,0}(c_r)^{-1}$, pois $c_r \neq 0$, e podemos determinar recursivamente

$$u_{j,0} = \left(f_{(r+j-1),0} - \sum_{k=1}^{j-1} (j-k)c_{r+k}u_{(j-k),0} \right) [(j)c_r]^{-1}, \qquad j \geq 2.$$

Note que $u_{0,0}$ pode ser escolhida arbitrariamente.

As condições de compatibilidade (3.2) implicam a validade de (3.8). De fato,

$$f_{j,0} = \hat{f}_j(0) = \frac{1}{2\pi j!}\int_0^{2\pi} f_j(t)dt = \frac{1}{2\pi j!}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0,t)dt = 0, \qquad j = 0,\dots,r-1$$

(ver Obseravação 3).

Novamente de (3.4) obtemos

$$u'_{j,1} = f_{j,1}, \qquad j = 0,\cdots,r-1, \tag{3.9}$$

e de (3.5) obtemos

$$u'_{j,1} + \sum_{\alpha=r}^{j}(j-\alpha+1)c_\alpha u_{(j-\alpha+1),1} = f_{j,1}, \qquad j \geq r. \tag{3.10}$$

Note que $f_{j,1}$ em (3.9) possui primitiva em $C^\infty(S^1)$; logo temos

$$u_{j,1} = \sum_{k\neq 0}\frac{\hat{f}_j(k)}{ik}e^{ikt}, \qquad j = 0,\cdots,r-1.$$

Além disso, cada $u_{j,1}$ com $0 \leq j \leq r-1$, tem primitivas de ordem arbitrária em $C^\infty(S^1)$. Resolvendo indutivamente (3.10) obtemos

$$u_{j,1} = \sum_{k\neq 0}\frac{\hat{f}_j(k)}{ik}e^{ikt} - \sum_{\alpha=r}^{j}(j-\alpha+1)c_\alpha\left(\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{f}_{(j-\alpha+1)}(k)}{ik^2}e^{ikt}\right), \qquad j \geq r.$$

Logo $u_{j,0}$ e $u_{j,1}$ encontrados acima, definem uma sequência (u_j), com $u_j = u_{j,0} + u_{j,1}$, de funções de classe C^∞em S^1. Aplicando o Teorema de Borel 12 à sequência (u_j) obtemos que existem $\epsilon > 0$ e uma função $u(x,t) \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, $2\pi-$ periódica na segunda variável, que satisfaz

$$(\partial_x^j u)(0,t) = (j!u_j(t)),$$

para todo $t \in S^1$ e todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t)x^j$ é tal que $\mathsf{L}u - f$ é flat sobre o conjunto $\Sigma = \{0\} \times S^1$. □

Observação 4. Proseguindo como la demonstração da Proposição 12, para

$$\mathsf{L} = \frac{\partial}{\partial t} - i\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

seremos levamos a resolver

$$u'_j + ij\lambda u'_j = f_j \quad j \geq 1;$$

alguma condição diofantina deve ser imposta a λ para resolver a equação. Logo para $m = 1$ e $n \geq 2$ nem sempre vamos obter uma conclusão como da Proposição 12.

Observação 5. Da Proposição 12, para cada $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, satisfazendo (3.2), existe $w \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ tal que $\mathsf{L}w - f$ é flat em Σ. Seja $g = \mathsf{L}w - f$, se existe $v \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ solução de $\mathsf{L}v = g$ em uma vizinhança de Σ então $u = w - v$ é tal que $\mathsf{L}u = \mathsf{L}w - \mathsf{L}v = \mathsf{L}w - g = \mathsf{L}w - \mathsf{L}w + f = f$; portanto, quando estamos interessados em resolver a equação $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ, com $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ satisfazendo (3.2), basta considerar f flat em Σ.

Observação 6. É fácil ver que se f é flat em Σ, então $\hat{f}_k$ é flat em $x = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. A sua fórmula de Taylor em torno de zero fica $\hat{f}_k(x) = R_{k,j}(x)x^j$ com

$$\lim_{x \to 0} R_{k,j}(x) = 0.$$

Teorema 24. Seja $\mathsf{L} = \partial/\partial t + (a + ib)(x)\partial/\partial x$, $b \not\equiv 0$, campo vetorial complexo definido em Ω_ϵ, $\epsilon > 0$, sendo $a, b \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon); \mathbb{R})$. Assuma que:

1. O conjunto característico de L é $\Sigma = \{0\} \times S^1$.

2. $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$, para cada $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

3. $b_0(x) \neq 0$, para cada $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

4. Se a função a não é flat em $x = 0$, então n é a ordem de anulamento de a em $x = 0$; se a função a é flat em $x = 0$, então $n \geq m$.

5. $2 \leq m < 2n - 1$.

Então, para cada $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ que satisfaz as condições de compatibilidade (3.2), existe $u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ solução de $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ.

Demonstração. Pela observação 5, basta considerar f flat em $\Sigma = \{0\} \times S^1$. Considere as séries parciais de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(x) e^{ikt} \qquad \text{e} \qquad f(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(x) e^{ikt}.$$

Se for u solução de $\mathsf{L}u = f$ obtemos

$$\mathsf{L}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(x) e^{ikt}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(x) e^{ikt};$$

as convergências absoluta e uniforme das séries de Fourier implicam

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{u}_k(x)e^{ikt}\right) + (a+ib)(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{u}_k(x)e^{ikt}\right)\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(x) e^{ikt},$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(ik\hat{u}_k(x) + (a+ib)(x)\hat{u}_k'(x)\right) e^{ikt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k(x) e^{ikt}.$$

Definimos

$$\mathsf{L}_k\hat{u}_k(x) \doteq ik\hat{u}_k(x) + (a+ib)(x)\hat{u}_k'(x). \tag{3.11}$$

Então, $\mathsf{L}u = f$ se, e somente se, $(\hat{u}_k)$ satisfaz $\mathsf{L}_k\hat{u}_k(x) = \hat{f}_k(x)$ em uma vizinhança de $x = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e além disto, a série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k(x)e^{ikt}$ converge na topologia de C^∞ em uma vizinhança, de Σ.

Para provar o Teorema precisamos encontrar para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{u}_k$, solução de $\mathsf{L}_k\hat{u}_k(x) = \hat{f}_k(x)$ tal que (u_k) seja uma sequência de decaimento rápido.

Por hipótese estamos assumindo $b_0(x) \neq 0$ $\forall x$ e $2 \leq m < 2n - 1$.

Por hipótese a função $(a+ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$ tem ordem de anulamento $r = \min\{n, m\}$. Definindo $c_r(x) \doteq (x^{n-r}a_0(x) + x^{m-r}b_0(x))$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$, temos

$$\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x) = \frac{R_{k,(j+r)}(x)x^{j+r}}{c_r(x)x^r} = \frac{R_{k,(j+r)}(x)x^j}{c_r(x)}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{R_{k,(j+r)}(x)x^j}{c_r(x)}}{x^j} = \lim_{x\to 0} \frac{R_{k,(j+r)}(x)}{c_r(x)} = 0.$$

Portanto,

$$\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(x) = O(|x|^j), \text{ para cada } j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.12}$$

No caso $k = 0$, devemos resolver a equação $\mathsf{L}_0\hat{u}_0(x) = \hat{f}_0(x)$, isto é,

$$\frac{d}{dx}\hat{u}_0(x) = \frac{\hat{f}_0}{a+ib}(x).$$

Como f é flat em Σ então $\hat{f}_0(x)$ é flat em $x = 0$; portanto, $\dfrac{\hat{f}_0}{a+ib}$ é de classe C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon)$ e

$$\hat{u}_0(x) = \int_0^x \frac{\hat{f}_0}{a+ib}(y)dy \tag{3.13}$$

é uma solução em uma vizinhança de $x = 0$. Note que $u_0 \in C^\infty(-\epsilon, \epsilon)$.

Logo, pela igualdade (3.12) existe $M' > 0$ tal que $\left|\frac{\hat{f}_0}{a+ib}\right|(x) \leq M'|x|^j$; isto implica que o módulo de $\hat{u}_0(x)$ é

$$|\hat{u}_0(x)| \leq \int_0^x \left|\frac{\hat{f}_0}{a+ib}\right|(y)dy \leq M' \int_0^x |y|^j dy;$$

resolvemos a integral e temos

$$|\hat{u}_0(x)| \leq \frac{M'}{j+1}|x|^{j+1} \leq M'\delta|x|^j.$$

Então,

$$|\hat{u}_0(x)| = O\left(|x|^j\right), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.14}$$

Para $k \neq 0$ resolveremos $\mathsf{L}_k \hat{u}_k(x) = \hat{f}_k(x)$ com $x \in (-\delta, 0)$ para algum $\delta > 0$ pequeno; o caso em que $x \in (0, \delta)$ é análogo. Seja

$$ik\hat{u}_k(x) + (a+ib)(x)(\hat{u}_k)'(x) = \hat{f}_k(x).$$

Como L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$, podemos assumir $b(x) > 0$ para $x < 0$. Como $(a+ib)(x) \neq 0$ quando $-\delta < x < 0$ temos

$$(\hat{u}_k)'(x) + \frac{ik}{a+ib}\hat{u}_k(x) = \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x);$$

multiplicando ambos os lados por $e^{\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds}$, $-\delta < \eta < x < 0$, temos

$$e^{\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds}(\hat{u}_k)'(x) + \frac{ik}{a+ib}e^{\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds}\hat{u}_k(x) = e^{\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds}\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x);$$

isto é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds}(\hat{u}_k)(x)\right) = e^{\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds}\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x). \tag{3.15}$$

Assim,

$$\exp\left(\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\cdot \hat{u}_k(x) = \int_\nu^x \exp\left(\int_\eta^y \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, \qquad -\delta < \nu < x < 0;$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{u}_k(x) = \exp\left(-\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\cdot \int_\nu^x \exp\left(\int_\eta^y \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy. \tag{3.16}$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_k(x) &= \textstyle\int_\nu^x \exp\left(-\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds + \int_\eta^y \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy. \\
&= \textstyle\int_\nu^x \exp\left(\int_x^\eta \frac{ik}{a+ib}(s)ds + \int_\eta^y \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy \\
&= \textstyle\int_\nu^x \exp\left(ik\left(\int_x^y \frac{1}{a+ib}(s)ds\right)\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, \\
&= \textstyle\int_\nu^x \exp\left(ik\left(\int_x^y \frac{a-ib}{a^2+b^2}(s)ds\right)\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, \\
&= \textstyle\int_\nu^x \exp\left(ik\int_x^y \frac{a}{a+ib}(s)ds + k\int_x^y \frac{b}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy \\
&= \textstyle\int_\nu^x \exp\left(ik\int_x^y \frac{a}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy;
\end{aligned}$$

então, o módulo de $\hat{u}_k$ é

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_\nu^x \left|\exp\left(ik\int_x^y \frac{a}{a^2+b^2}(s)ds\right)\right|\cdot\exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy; \tag{3.17}$$

consequentemente,

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_\nu^x \exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy, \tag{3.18}$$

para $\frac{\nu}{2} < x < 0$. A integral do lado direito de (3.18) é igual a

$$\int_\nu^{2x} \exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy + \int_{2x}^x \exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy. \tag{3.19}$$

Para resolver (3.19) é preciso fazer a seguinte análise sobre as funções envolvidas.

Considere m par; o caso m ímpar é análogo. Da hipótese $2 \leq m < 2n-1 < 2n$, temos que $2n-m > 1 > 0$; então, se $l = \min\{2n-m, m\}$, l é par e $l \geq 2$. Note que

$$0 < \frac{b}{a^2+b^2}(x) = \frac{x^m b_0}{x^m(x^{2n-m}a_0^2 + x^m b_0^2)}(x), \qquad x \in (-\delta, 0).$$

Se $l = \min\{2n-m, m\}$ e $g(x) = \dfrac{b_0}{x^{2n-m-l}a_0^2 + x^{m-l}b_0^2}(x)$, então

$$\frac{b}{a^2+b^2}(x) = \frac{1}{x^l}\cdot g(x). \tag{3.20}$$

Se $l = m$,

$$0 < g(x) = \frac{b_0}{x^{2n-2m}a_0^2 + b_0^2}(x) \leq \frac{1}{b_0(x)}.$$

Se $l = 2n-m$,

$$0 < g(x) = \frac{b_0}{a_0^2 + x^{2m-2n}b_0^2}(x) \leq \frac{b_0}{a_0^2}(x).$$

Segue de l ser par que $\frac{1}{x^l} > 0$, para todo $x \in (-\delta, 0)$.

As funções $\frac{b}{a^2+b^2}$ e $\frac{1}{x^l}$ são contínuas em $(-\delta, 0)$, então g também é contínua em $(-\delta, 0)$; como $g(0) > 0$, por continuidade diminuindo $\delta > 0$ se necessário podemos assumir que existem α e β positivos, tais que $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ para todo $x \in (-\delta, 0)$. Logo, na igualdade (3.20) temos para todo $k > 0$

$$k\cdot\frac{\alpha}{x^l} \leq k\cdot\frac{b}{a^2+b^2}(x) \leq k\cdot\frac{\beta}{x^l}, \qquad \forall \ \ x \in (-\delta, 0)$$

$$0 > -\int_y^x k\cdot\frac{\alpha}{s^l}ds \geq -\int_y^x k\cdot\frac{b}{a^2+b^2}(s)ds \geq -\int_y^x k\cdot\frac{\beta}{s^l}ds, \qquad y \leq 2x < x < 0.$$

Então,

$$0 > k\cdot\int_x^y \frac{\alpha}{s^l}ds \geq k\cdot\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds \geq k\cdot\int_x^y \frac{\beta}{s^l}ds, \tag{3.21}$$

para todo y tal que $\nu \leq y \leq 2x < x < 0$. Logo,

$$\alpha\int_x^y \frac{1}{s^l}ds = \alpha\left[\frac{s^{-l+1}}{-l+1}\right]_x^y = -\alpha\left[\frac{1}{(l-1)s^{l-1}}\right]_x^y = \frac{\alpha}{l-1}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{y^{l-1}}\right]. \tag{3.22}$$

Por outro lado, como l é par temos $l-1$ ímpar; portanto, $\frac{1}{x^{l-1}} < 0$ em $(-\delta, 0)$. (Lembremos que se $x < y$ e n é ímpar, então $x^n < y^n$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$). Então,

$$\begin{array}{ccccccc} y & \leq & 2x & < & x & < & 0 \\ \frac{1}{x} & < & \frac{1}{2x} & \leq & \frac{1}{y} & < & 0. \end{array}$$

Como $l-1$ é ímpar

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{x^{l-1}} & < & \frac{1}{(2x)^{l-1}} & \leq & \frac{1}{y^{l-1}} & < & 0 \\ -\frac{1}{x^{l-1}} & > & -\frac{1}{(2x)^{l-1}} & \geq & -\frac{1}{y^{l-1}} & > & 0, \end{array}$$

obtendo a estimativa para (3.22)

$$0 \quad > \quad \frac{\alpha}{(l-1)}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{(2x)^{l-1}}\right] \quad \geq \quad \frac{\alpha}{(l-1)}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{y^{l-1}}\right];$$

portanto, a integral em (3.21) fica

$$k \cdot \int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds \leq \frac{k\cdot\alpha}{l-1}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{y^{l-1}}\right] \leq \frac{k\cdot\alpha}{(l-1)}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{(2x)^{l-1}}\right] < 0. \tag{3.23}$$

A monotonicidade da função exponencial implica

$$\exp\left(k \cdot \int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right) \leq \exp\left(\frac{k\cdot\alpha}{(l-1)x^{l-1}}\left[1 - \frac{1}{2^{l-1}}\right]\right), \qquad \forall \;\; y \leq 2x. \tag{3.24}$$

Por um procedimento análogo ao anterior concluímos que se $2x < y \leq x$, então

$$\frac{\alpha}{(l-1)}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{y^{l-1}}\right] < 0;$$

isto implica que

$$\exp\left(k \cdot \int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right) \leq \exp\left(\frac{k\cdot\alpha}{l-1}\left[\frac{1}{x^{l-1}} - \frac{1}{y^{l-1}}\right]\right) < 1, \qquad \forall \;\; 2x < y. \tag{3.25}$$

As expressões em (3.24) e (3.25), fazem que $|\hat{u}_k(x)|$ em (3.18) seja estimado da seguinte forma:

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_\nu^{2x} e^{\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)} \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy + \int_{2x}^x e^{\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)} \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy$$

o que implica

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \exp\left(\frac{k\cdot\alpha}{(l-1)x^{l-1}}\left[1 - \frac{1}{(2)^{l-1}}\right]\right)\int_\nu^{2x}\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy + \int_{2x}^x \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy. \tag{3.26}$$

A função $\frac{\hat{f}_k}{a+ib}$ é limitada em $(\nu, 2x)$ e $x < 0$, então

$$\int_\nu^{2x}\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy < M. \tag{3.27}$$

Pela equação (3.12) no segundo termo da desigualdade (3.26) temos que

$$\int_{2x}^{x}\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy = O(|x|^j), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.28}$$

Por outro lado também

$$\exp\left(\frac{k\alpha}{(l-1)x^{l-1}}\left[1-\frac{1}{2^{l-1}}\right]\right) = O(|x|^j), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.29}$$

Assim (3.27), (3.28) e (3.29) implicam em (3.26)

$$|\hat{u}_k(x)| \leq M\exp\left(\frac{k\cdot\alpha}{(l-1)x^{l-1}}\left[1-\frac{1}{(2)^{l-1}}\right]\right) + \int_{2x}^{x}\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy = O\left(|x|^j\right), \ \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.30}$$

Portanto,

$$|\hat{u}_k(x)| = O\left(|x|^j\right), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.31}$$

No caso em que $k<0$, como assumimos $b>0$ em $(-\delta,0)$, então $k\int_\eta^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds \to -\infty$ quando $y\to 0$; a função exponencial é crescente; logo, $\exp\left(k\int_\eta^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right) < 1$ para todo $y\in(-\delta,0)$. Além disso, como f é flat em Σ, então $\hat{f}_k$ é flat em $x=0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, estes fatos permitem que a equação (3.15) seja integrável; assim,

$$\exp\left(\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)(\hat{u}_k)(x) = \int_x^0 \exp\left(\int_\eta^y \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy; \tag{3.32}$$

equivalentemente,

$$\hat{u}_k(x) = \exp\left(-\int_\eta^x \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\cdot\int_x^0 \exp\left(\int_\eta^y \frac{ik}{a+ib}(s)ds\right)\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy; \tag{3.33}$$

e pelos mesmos raciocínios feitos para (3.16), temos

$$\hat{u}_k(x) = \int_x^0 e^{-ik[C(x)-C(y)]}\frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, \text{ sendo } C(x) = \int_\eta^x \frac{1}{a+ib}(s)ds. \tag{3.34}$$

Logo,

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_x^0 \exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy; \tag{3.35}$$

como assumimos que $b(x)>0$ para todo $x\in(-\delta,0)$ então, $k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds<0$; portanto, $\exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right) < 1$ e, então,

$$|\hat{u}_k(x)| \leq \int_x^0 \exp\left(k\int_x^y \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds\right)\cdot\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy \leq \int_x^0\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(y)dy. \tag{3.36}$$

Assim, de (3.12) temos

$$|\hat{u}_k(x)| = O(|x|^j), \quad \forall\ j\in\mathbb{Z}_+ \text{ e } \forall\ k<0. \tag{3.37}$$

Resumindo, com os resultados obtidos até agora junto com os da referência [1] definimos

$$\hat{u}_k(x) = \begin{cases} \int_{-\epsilon}^{x} e^{-ik[C(x)-C(y)]} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, & \text{se } x \in (-\epsilon, 0) \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\int_{0}^{x} e^{-ik[C(x)-C(y)]} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, & \text{se } x \in (0, \epsilon) \end{cases}, \text{ se } k > 0,$$

$$\hat{u}_0(x) = \int_0^x \frac{\hat{f}_0}{a+ib}(y)dy$$

e

$$\hat{u}_k(x) = \begin{cases} \int_{x}^{0} e^{-ik[C(x)-C(y)]} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, & \text{se } x \in (-\epsilon, 0) \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\int_{x}^{\epsilon} e^{-ik[C(x)-C(y)]} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy, & \text{se } x \in (0, \epsilon) \end{cases}, \text{ se } k < 0,$$

sendo $C(x) = \displaystyle\int_\eta^x \frac{1}{a+ib}(s)ds$.

Agora, no que segue vamos mostrar que $\hat{u}_k^{(\nu)}(x) = O(|x|^j), \forall\ j \ \forall\ \nu \in \mathbb{Z}$. Começamos com $\nu = 1$. No caso $k = 0$ temos

$$\hat{u}_0'(x) = \frac{\hat{f}_0}{a+ib}(x). \tag{3.38}$$

Novamente de (3.12),

$$|\hat{u}_0'(x)| = \left|\frac{\hat{f}_0}{a+ib}\right|(x) = O\left(|x|^j\right), \forall j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.39}$$

Agora, considere a equação (3.34), (os outros casos são análogos). Temos

$$\hat{u}_k'(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{-ikC(x)} \int_x^0 e^{ikC(y)} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy\right]$$

$\Rightarrow$

$$\hat{u}_k'(x) = -ikC'(x)\left(e^{-ikC(x)} \int_x^0 e^{ikC(y)} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(y)dy\right) - e^{-ikC(x)}e^{ikC(x)} \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x)$$

$\Rightarrow$

$$\hat{u}_k'(x) = -ikC'(x)\hat{u}_k(x) - \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x) \tag{3.40}$$

Logo, $\hat{u}_k'(x)$ é C^∞ em $(-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$.

Estimemos o módulo de $\hat{u}_k'(x)$:

$$|\hat{u}_k'(x)| \leq \left|\frac{k}{a+ib}\right|(x)\,|\hat{u}_k(x)| + \left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(x);$$

lembre que em (3.31) concluímos que $|\hat{u}_k(x)| = O\left(|x|^j\right)$ e, na equação (3.12) tivemos $\left|\frac{\hat{f}_k}{a+ib}\right|(x) = O\left(|x|^j\right)$, $\forall j \in \mathbb{Z}_+$; além disso lembremos que $(a+ib)(x) = x^r c_r(x)$ e $c_r(x) \neq 0$ em $x \in [-\delta, \delta]$; logo, para j fixado, existem constantes M_0 e M_1 positivas tais que

$$|\hat{u}_k'(x)| \leq \left|\frac{k}{c_r(x)x^r}\right| M_0 \, |x|^{j+r} + M_1 \, |x|^j \, .$$

Como $c_r(x)$ é contínua em $[-\epsilon, \epsilon]$ existem constantes $\gamma, \mu > 0$, tais que $\gamma \leq |c_r(x)| \leq \mu$. Seja $M = \max\left\{\frac{|k| M_0}{\gamma}, M_1\right\}$ então,

$$|\hat{u}_k'(x)| \leq 2M \, |x|^{j+1} = O(|x|^j);$$

isto implica que

$$|\hat{u}_k'(x)| = O(|x|^j), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Agora, vamos considerar $\nu = 2$.

Para calcular a segunda derivada $\hat{u}_k$ consideramos (3.40) e derivando fica

$$\hat{u}_k''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{ik}{a(x)+ib(x)}\hat{u}_k(x) - \frac{\hat{f}_k}{a+ib}(x)\right) =$$

$$= \frac{ik(a'(x)+ib'(x))}{(a(x)+ib(x))^2}\hat{u}_k - \frac{ik}{a(x)+ib(x)}\hat{u}_k' - \frac{\hat{f}_k'(x)}{a(x)+ib(x)} - (a'(x)+ib'(x))\frac{\hat{f}_k(x)}{(a(x)+ib(x))^2}.$$

Veja $\hat{u}_k''$ estão dadas em termos de $\hat{u}_k$, $\hat{u}_k'$, $\frac{\hat{f}_k'}{a+ib}$ e $\frac{\hat{f}_k}{(a+ib)^2}$ as quais, pelos fatos mostrados acima, são $O(|x|^j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Fixado j, existem constantes positivas M_1, M_2, M_3 eM_4 tais que

$$|\hat{u}_k''| \leq \left|\frac{k(a'(x)+ib'(x))}{(c_r(x))^2 x^{2r}}\right| M_1 \, |x|^{j+2r} + \left|\frac{k}{c_r(x)x^r}\right| M_2 \, |x|^{j+r} + M_3 \, |x|^j + |a'(x)+ib'(x)| \, M_4 \, |x|^j \, ;$$

além disso, $a'(x)+ib'(x)$ e $c_r(x) \neq 0$ são limitadas. Assim, existem contantes positivas M_5 e γ tais que

$$|\hat{u}_k''| \leq \frac{|k| \, M_5}{\gamma^2} M_1 \, |x|^j + \frac{|k|}{\gamma} M_2 \, |x|^j + M_3 \, |x|^j + M_5 M_4 \, |x|^j \, .$$

Tome $M = \max\left\{\frac{|k| M_5}{\gamma^2} M_1, \frac{|k|}{\gamma} M_2, M_3, M_5 M_4\right\}$. Então,

$$|\hat{u}_k''(x)| \leq 4M \, |x|^j \, ;$$

portanto,

$$|\hat{u}_k''(x)| = O\left(|x|^j\right).$$

Segue que $\hat{u}_k''(x)$ é contínua em $(-\epsilon, \epsilon)$; assim, mostramos que $\hat{u}_k(x)$ é de classe $C^1((-\epsilon, \epsilon))$. Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\left|\hat{u}_k^{(\nu)}(x)\right| = O\left(|x|^j\right), \forall \nu \in \mathbb{Z}_+, \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Logo, $\hat{u}_k \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon))$.

Para terminar a demonstração, notemos que as estimativas acima juntamente com o fato de $\left(\hat{f}_k\right)$ ser de decaimento rápido, implicam que $(\hat{u}_k)$ é uma sequência de funções flat em $x = 0$, com decaimento rápido. Então, $(\hat{u}_k)$ define uma função u de classe C^∞, que é solução de $\mathsf{L}u = f$ em uma vizinhança de Σ.

$\square$

CAPÍTULO

4

RESOLUBILIDADE C^k

Neste capítulo assumiremos que $(a+ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^{2n-1} b_0(x)$, para $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $a_0(x) \neq 0 \neq b_0(x)$ para todo $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Note que $\mathsf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + (a_0(x)x^n + ib_0(x)x^m)\frac{\partial}{\partial x}$ é equivalente a

$$-i\mathsf{L} = -i\frac{\partial}{\partial t} + (b_0(x)x^m - ia_0(x)x^n)\frac{\partial}{\partial x},$$

e, além disso, $-i\mathsf{L}$ deixa de ser elíptico no conjunto $\Sigma = \{0\} \times S^1$.

Sob estas condições temos o seguinte resultado (fornecido em [2].):

Teorema 25. Seja

$$\mathsf{L} = -i\frac{\partial}{\partial t} + (b_0(x)x^{2n-1} - ia_0(x)x^n)\frac{\partial}{\partial x}, \quad n \geq 2,$$

um campo vetorial complexo definido em Ω_ϵ, sendo a_0, b_0 funções a valores reais de classe C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon)$, com $a_0(x) \neq 0$ e $b_0(x) \neq 0$, para todo x. Fixado $k \in \mathbb{Z}_+$, dada $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, satisfazendo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0,t)dt = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1, \tag{4.1}$$

existe $u \in C^k$ solução para $\mathsf{L}u = f$, em uma vizinhança de Σ.

Demonstração. Pela observação 5 do Capítulo 3, basta considerar $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ flat em $\Sigma = \{0\} \times S^1$ e de suporte compacto. Sem perda de generalidade podemos assumir $b_0(x) > 0$ para $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ e que a_0, $b_0 \in L^\infty([-\epsilon, \epsilon])$.

Considere

$$\Omega_\epsilon^+ = \{(x,t) \in \Omega_\epsilon; x > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_\epsilon^- = \{(x,t) \in \Omega_\epsilon; x < 0\}.$$

Defina

$$Z(x,t)=\begin{cases} e^{-\int_x^{\epsilon}\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy}\cdot e^{-i\left(t+\int_x^{\epsilon}\frac{a_0(y)y^n}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy\right)}, & x>0\\ 0, & x=0\,;\\ e^{\int_{-\epsilon}^{x}\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy}\cdot e^{-i\left(t-\int_{-\epsilon}^{x}\frac{a_0(y)y^n}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy\right)}, & x<0\end{cases}$$

evidentemente, $Z\in C^{\infty}(\Omega_{\epsilon}^{\pm})$.

Vamos aplicar o operador L ás funções Z e $\bar{Z}$. Denotemos

$$f_1(x,t)=e^{-\int_x^{\epsilon}\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy},\qquad g_1(x,y)=e^{-i\left(t+\int_x^{\epsilon}\frac{a_0(y)y^n}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy\right)},$$

$$f_2(x,y)=e^{\int_{-\epsilon}^{x}\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy},\qquad g_2(x,y)=e^{-i\left(t-\int_{-\epsilon}^{x}\frac{a_0(y)y^n}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy\right)}.$$

Se $x>0$, temos

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{L}Z &=& (-i)^2f_1(x,t)g_1(x,t)+\left(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n\right)\left(\frac{b_0(x)x^{2n-1}+ia_0(x)x^n}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}}\right)f_1(x,t)g_1(x,t)\\ &=& -f_1(x,t)g_1(x,t)+f_1(x,t)g_1(x,t)\\ &=& -Z+Z\\ &=& 0\end{array}. \tag{4.2}$$

Se $x<0$, temos:

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{L}Z &=& (-i)^2f_2(x,t)g_2(x,t)+\left(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n\right)f_2(x,t)g_2(x,t)\left(\frac{b_0(x)x^{2n-1}+ia_0(x)x^n}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}}\right)\\ &=& -f_2(x,t)g_2(x,t)+f_2(x,t)g_2(x,t)\\ &=& -Z+Z\\ &=& 0\end{array}. \tag{4.3}$$

Aplicando o operador L a $\bar{Z}$. Para $x>0$

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{L}\overline{Z} &=& -(i^2)f_1(x,t)\overline{g}_1(x,t)+\frac{\left(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n\right)^2}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}}f_1(x,t)\overline{g}_1(x,t)\\ &=& \overline{Z}\left(1+\frac{\left(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n\right)^2}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}}\right)\\ &=& \overline{Z}\left(\frac{2b_0(x)x^{2n-1}\left(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n\right)}{(b_0(x)x^{2n-1}+ia_0(x)x^n)(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n)}\right)\\ &=& \overline{Z}\frac{2b_0(x)x^{n-1}}{(b_0(x)x^{n-1}+ia_0(x))}\end{array}. \tag{4.4}$$

Quando $x<0$,

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{L}\overline{Z} &=& -(i)^2f_2(x,t)\bar{Z}+\bar{Z}\frac{\left(b_0(x)x^{2n-1}-ia_0(x)x^n\right)^2}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}}\\ &=& \overline{Z}\frac{2b_0(x)x^{n-1}}{(b_0(x)x^{n-1}+ia_0(x))}\end{array}. \tag{4.5}$$

Seja $F:(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow(0,1)$ dada por

$$F(x)=|Z(x,t)|=\begin{cases} e^{-\int_x^{\epsilon}\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy}, & x>0\\ 0, & x=0\\ e^{\int_{-\epsilon}^{x}\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy}, & x<0\end{cases}$$

É fácil ver que F é C^∞ em $(-\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$.

Afirmação: F é contínua em $(-\epsilon,\epsilon)$.

De fato, pela continuidade de a_0 e b_0 em $(-\epsilon,\epsilon)$, diminuindo $\epsilon>0$ se necessário, podemos assumir que existem reais α_1, α_2, $\beta_1>0$, $\beta_2>0$, tais que $\beta_1<b_0(x)<\beta_2$ e $\alpha_1^2<a_0^2(x)<\alpha_2^2$, para todo $x\in(-\epsilon,\epsilon)$. Então, no caso $x>0$ temos

$$\frac{\beta_1}{\alpha_2^2x+\beta_2^2x^{2n-1}}<\frac{b_0(x)}{a_0^2(x)x+b_0^2x^{2n-1}}<\frac{\beta_2}{\alpha_1^2x+\beta_1^2x^{2n-1}}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_2^2}\frac{1}{1+l_2^2x^{2n-2}}\cdot\frac{1}{x}<\frac{b_0(x)}{a_0^2(x)x+b_0^2x^{2n-1}}<\frac{\beta_2}{\alpha_1^2}\frac{1}{1+l_1^2x^{2n-2}}\cdot\frac{1}{x},$$

sendo $l_1=\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2}$ e $l_2=\frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2}$.

Logo, $\dfrac{1}{1+l_1x^{2n-2}}<1$ e $\dfrac{1}{1+l_2\epsilon^{2n-2}}<\dfrac{1}{1+l_2x^{2n-2}}$; isto implica que

$$0<\frac{\beta_1}{\alpha_2^2}\frac{1}{1+l_2^2\epsilon^{2n-2}}\cdot\frac{1}{x}<\frac{b_0(x)}{a_0^2(x)x+b_0^2x^{2n-1}}<\frac{\beta_2}{\alpha_1^2}\frac{1}{x};$$

integrando de x até ϵ

$$0<\frac{\beta_1}{\alpha_2^2}\frac{1}{1+l_2^2\epsilon^{2n-2}}\int_x^\epsilon\frac{1}{y}dy<\int_x^\epsilon\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2y^{4n-2}}dy<\frac{\beta_2}{\alpha_1^2}\int_x^\epsilon\frac{1}{y}dy;$$

por propriedade da integral definida, isto é equivalente a

$$0<\frac{\beta_1}{\alpha_2^2}\frac{1}{1+l_2^2\epsilon^{2n-2}}\left[-\int_\epsilon^x\frac{1}{y}dy\right]<\int_x^\epsilon\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2y^{4n-2}}dy<\frac{\beta_2}{\alpha_1^2}\left[-\int_\epsilon^x\frac{1}{y}dy\right];$$

fazendo a substituição $y=\frac{s}{\epsilon}$ na integral $\int_\epsilon^x\frac{1}{y}dy=\int_1^{\frac{s}{\epsilon}}\frac{1}{s}ds$, tem-se

$$0<\frac{\beta_1}{\alpha_2^2}\frac{1}{1+l_2^2\epsilon^{2n-2}}\left[-\int_1^{\frac{x}{\epsilon}}\frac{1}{y}dy\right]<\int_x^\epsilon\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2y^{4n-2}}dy<\frac{\beta_2}{\alpha_1^2}\left[-\int_1^{\frac{x}{\epsilon}}\frac{1}{y}dy\right];$$

equivalentemente,

$$\ln\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{r_1}<-\int_x^\epsilon\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2y^{4n-2}}dy<\ln\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{r_2}<0, \tag{4.6}$$

com $r_1=\frac{\beta_2}{\alpha_1^2}$ e $r_2=\frac{\beta_1}{\alpha_2^2}\frac{1}{1+l_2^2\epsilon^{2n-2}}$.

Similarmente se $x<0$, obtemos

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1^2x+\beta_1^2x^{2n-1}}<\frac{b_0(x)}{a_0^2(x)x+b_0^2x^{2n-1}}<\frac{\beta_1}{\alpha_2^2x+\beta_2^2x^{2n-1}}<0$$

e pelos mesmos argumentos mostrados acima chegamos a

$$\log\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)^{r_1}<\int_{-\epsilon}^x\frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2y^{4n-2}}dy<\log\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)^{r_2}<0, \tag{4.7}$$

sendo $r_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_1^2}\frac{1}{1+l_1^2\epsilon^{2n-2}}$ e $r_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_2^2}$.

Aplicando a função exponencial nas desigualdades (4.6) e (4.7) obtemos

$$\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)^{r_1} < F(x) < \left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)^{r_2}, \qquad \forall x \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}. \tag{4.8}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)^{r_1} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)^{r_2} = 0$ então,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0);$$

portanto, F é contínua em $(-\epsilon, \epsilon)$.

A equações (4.6) e (4.7), respectivamente, implicam

$$\exp\left(-\int_x^\epsilon \frac{b_0(x)x}{a_0^2(x)x^2 + b_0^2(x)x^2}\right) < 1 \tag{4.9}$$

e

$$\exp\left(-\int_{-\epsilon}^x \frac{b_0(x)x}{a_0^2(x)x^2 + b_0^2(x)x^2}\right) < 1. \tag{4.10}$$

Segue que $F(x) = |z|$, para algum $z \in D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Agora, consideremos

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{b_0(x)x^{2n-1}}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}} e^{-\int_x^\epsilon \frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy}, & x > 0 \\ 0, & x = 0\,; \\ \frac{b_0(x)x^{2n-1}}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}} e^{\int_{-\epsilon}^x \frac{b_0(y)y^{2n-1}}{a_0^2(y)y^{2n}+b_0^2(y)y^{4n-2}}dy}, & x < 0 \end{cases}$$

logo, $F'(x) > 0$ se $x > 0$; pelo Teorema 2 a restição $F|_{(0,\epsilon)}$ é crescente. Assim, podemos definir a inversa F_+^{-1} sobre o intervalo $F((0,\epsilon)) = J$ a qual é diferenciável em J. Analogamente, $F'(x) < 0$ se $x < 0$ e podemos concluir que $F|_{(-\epsilon,0)}$ é um difeomorfismo, com inversa F_-^{-1} sobre $F((-\epsilon,0))$. Portanto, F é um difeomorfismo local em $(-\epsilon,\epsilon)\setminus\{0\}$. Logo, se $x \neq 0$ então $x = F_\pm^{-1}(|z|)$, para algum $z \in D(0;1)$.

Por outro lado, consideremos os pontos dos conjuntos $Z(\Omega_\epsilon^\pm)$ denotados por $z = \xi + i\eta$. Temos

$$\xi = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{4.11}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

Segue da Proposição 5 ítem (1), que o campo vetorial

$$\tilde{\mathsf{L}} = C^\infty(Z(\Omega_\epsilon^\pm)) \longrightarrow C^\infty(Z(\Omega_\epsilon^\pm))$$

é o campo vetorial L mudado de coordenadas definido por

$$\tilde{\mathsf{L}} = (\mathsf{L}(\xi \circ Z)) \circ Z^{-1}(z)\frac{\partial}{\partial \xi} + (\mathsf{L}(\eta \circ Z)) \circ Z^{-1}(z)\frac{\partial}{\partial \eta},$$

para cada $z \in D(0;1) \setminus \{0\}$. Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathsf{L}} &= \mathsf{L}\xi\left(Z_{\pm}^{-1}(\xi,\eta)\right)\tfrac{\partial}{\partial \xi} + \mathsf{L}\eta\left(Z_{\pm}^{-1}(\xi,\eta)\right)\tfrac{\partial}{\partial \eta} \\
&= \mathsf{L}\xi(x,t)\tfrac{\partial}{\partial \xi} + \mathsf{L}\eta(x,t)\tfrac{\partial}{\partial \eta} \\
&= \mathsf{L}\left(\tfrac{z+\bar{z}}{2}\right)\left[\tfrac{\partial}{\partial z} + \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right] + \mathsf{L}\left(\tfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)\left[i\left(\tfrac{\partial}{\partial z} - \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right] \\
&= \mathsf{L}z\tfrac{\partial}{\partial z} + \mathsf{L}\bar{z}\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}.
\end{aligned}$$

Daí, em $Z(\Omega_{\epsilon}^{\pm})$ temos

$$\tilde{\mathsf{L}} = \frac{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}}{b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1} + \imath a_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))}\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{4.12}$$

para todo $z \in D(0;1) \setminus \{0\}$.

Logo, o pushforward de $\mathsf{L}u = f$ via Z é dado por $\tilde{\mathsf{L}}\tilde{u}^{\pm} = \tilde{f}^{\pm}$ sendo $\tilde{\mathsf{L}}$ dado em (4.12); portanto,

$$\frac{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}}{b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1} + ia_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))}\bar{z}\frac{\partial \tilde{u}^{\pm}}{\partial \bar{z}} = \tilde{f}^{\pm} \text{ em } D(0;1) \setminus \{0\}, \tag{4.13}$$

sendo $\tilde{u}^{\pm} = u \circ Z_{\pm}^{-1}$ e $\tilde{f}^{\pm} = f \circ Z_{\pm}^{-1}$ o pushforward das funções $u, f \in C^{\infty}(\Omega_{\epsilon}^{\pm})$, respectivamente.

Usando $z = |z|\, e^{i\theta}$ temos

$$\frac{\partial \tilde{u}^{\pm}}{\partial \bar{z}} = \frac{\left(b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1} + ia_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\right)e^{i\theta}}{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}|z|}\tilde{f}^{\pm} \text{ em } D(0;1) \setminus \{0\}. \tag{4.14}$$

Note que como $F_{\pm}^{-1}$ são difeomorfismos e $\tilde{f}^{\pm}$ é flat em $z = 0$

$$\frac{\left(b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1} + ia_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\right)e^{i\theta}}{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}|z|}\tilde{f}^{\pm} \in C_c^{\infty}(D(0;1)).$$

Observe que o operador em (4.14) é de coeficientes constantes e pelo Teorema 15, a equação (4.14) tem solução fundamental E, a qual pelo Teorema 14 é dada por $E = \frac{1}{\pi z}$. Pelo Teorema 13, obtemos uma solução C^{∞} de (4.14)

$$\tilde{u}^{\pm}(z) = \frac{1}{\pi z} * \frac{\left(b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1} + ia_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\right)e^{i\theta}}{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}|z|}\tilde{f}^{\pm},$$

sendo a convolução realizada na variável z, ficando da seguinte maneira

$$\tilde{u}^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\int_{D(0;1)} \frac{\left(b_0(F_{\pm}^{-1}(|\zeta|))\left[F_{\pm}^{-1}(|\zeta|)\right]^{n-1} + ia_0(F_{\pm}^{-1}(|\zeta|))\right)e^{i\theta}}{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|\zeta|))\left[F_{\pm}^{-1}(|\zeta|)\right]^{n-1}|\zeta|(\zeta - z)}\tilde{f}^{\pm}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}. \quad (4.15)$$

Agora, calculamos a fórmula de Taylor de $\tilde{u}^{\pm}$ no disco complexo $D(0;1)$ e nas variáveis $(z,\bar{z})$:

$$\tilde{u}^{\pm}(z,\bar{z}) = \tilde{u}^{\pm}(0,0) + \frac{\partial\tilde{u}^{\pm}}{\partial z}(0,0)z + \frac{\partial\tilde{u}^{\pm}}{\partial\bar{z}}(0,0)\bar{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}^{\pm}}{\partial z^2}(0,0)(z)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\tilde{u}^{\pm}}{\partial\bar{z}^2}(0,0)\bar{z}^2\right) + \frac{\partial^2\tilde{u}^{\pm}}{\partial z\partial\bar{z}}(0,0)|z|^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}\frac{\partial^{l-1-i}\tilde{u}^{\pm}}{\partial z^{l-1-i}}(0,0).\frac{\partial^i\tilde{u}^{\pm}}{\partial\bar{z}^i}(0,0)z^{l-1-i}\bar{z}^i + |z|^l\,\tilde{v}^{\pm}(z)).$$

Observe que $\frac{\partial\tilde{u}^{\pm}}{\partial\bar{z}}$ em (4.14) é flat en $z=0$, pois $\tilde{f}^{\pm}$ é flat em $z=0$; logo, $\frac{\partial^{\alpha}\tilde{u}^{\pm}}{\partial^{\beta}z\partial^{\alpha-\beta}\bar{z}}(0,0)=0$, para todos os multi-índices $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_{+}^{2}$, $|\alpha|\le l-1$ e $\beta\le\alpha$. A continuidade de cada derivada implica a igualdade das derivadas mistas de ordem $|\alpha|$ logo, elas também são nulas em $z=0$. Portanto,

$$\tilde{u}^{\pm}(z) = \sum_{j=0}^{l-1}c_j^{\pm}z^j + |z|^l\,\tilde{v}^{\pm}(z),$$

sendo $c_j = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j\tilde{u}^{\pm}}{\partial z^j}(0,0)$.

Se derivamos com relação a $\bar{z}$, temos

$$\frac{\partial\tilde{u}^{\pm}(z)}{\partial\bar{z}} = \sum_{j=0}^{l-1}c_j^{\pm}\frac{\partial(z^j)}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(|z|^l\,\tilde{v}^{\pm}(z)\right),$$

o que implica

$$\frac{\partial\tilde{u}^{\pm}(z)}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(|z|^l\,\tilde{v}^{\pm}(z)\right); \quad (4.16)$$

logo, $|z|^l\,\tilde{v}^{\pm}(z)$ é também solução de (4.14).

Agora considere

$$\frac{b_0(x)x^{2n-1}}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}} = \frac{1}{x}\left(\frac{b_0(x)}{a_0^2(x)+b_0^2(x)x^{2n-2}}\right),$$

aplicando a fórmula de Taylor no segundo fator do lado direito temos

$$\frac{b_0(x)x^{2n-1}}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}} = \frac{1}{x}\left(\frac{b_0(0)}{a_0^2(0)} + O\left(|x|\right)\right);$$

Defina $\beta = \frac{b_0(0)}{a_0^2(0)}$. Daí,

$$\frac{b_0(x)x^{2n-1}}{a_0^2(x)x^{2n}+b_0^2(x)x^{4n-2}} = \frac{\beta}{x} + \frac{O\left(|x|\right)}{x}.$$

Logo, podemos reescrever F na forma

$$F(x)=|Z(x,t)|=\begin{cases}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{\beta}e^{-\int_x^{\epsilon}\frac{O(|y|)}{y}dy}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \left(\frac{-x}{\epsilon}\right)^{\beta}e^{\int_{-\epsilon}^{x}\frac{O(|y|)}{y}dy}, & x<0\end{cases}.$$

Seja

$$u(x,t)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{l\beta}e^{-l\int_x^{\epsilon}\frac{O(|y|)}{y}dy}\tilde{v}^{+}(Z(x,t)), & x>0\\ 0, & x=0\\ \left(\frac{-x}{\epsilon}\right)^{l\beta}e^{l\int_{-\epsilon}^{x}\frac{O(|y|)}{y}dy}\tilde{v}^{+}(Z(x,t)), & x<0\end{cases}.$$

Temos que u satisfaz $\mathsf{L}u=f$ em uma vizinhança de Σ. De fato, $u(x,y)=|Z(x,y)|^{l}\,\tilde{v}^{\pm}(Z(x,y))$ e

$$\begin{aligned}\mathsf{L}u(x,y) &= \mathsf{L}\left(F^{l}\tilde{v}^{\pm}\circ Z\right)(x,y)\\ &= \tilde{\mathsf{L}}\left(F^{l}.\tilde{v}^{\pm}\circ Z\right)\circ\left(Z_{\pm}^{-1}(z)\right) && \text{(Prop. 5 item (2), eq. (1.4).)}\\ &= \frac{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}}{b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}+\imath a_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))}\overline{z}\frac{\partial\left(|z|^{l}\tilde{v}^{\pm}(z)\right)}{\partial\overline{z}} && \text{(Def. (4.12).)}\\ &= \frac{2b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}}{b_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))\left[F_{\pm}^{-1}(|z|)\right]^{n-1}+\imath a_0(F_{\pm}^{-1}(|z|))}\overline{z}\frac{\partial\left(\tilde{u}^{\pm}(z)\right)}{\partial\overline{z}} && \text{(Eq. (4.16).)}\\ &= \tilde{f}^{\pm}(z) && \text{(Eq. (4.13).)}\\ &= f\circ\left(Z_{\pm}^{-1}(\xi,\eta)\right) && \text{(Pushfoward de } f.\text{(4.16).)}\\ &= f(x,t).\end{aligned}$$

Então, é suficiente escolher um $l\geq\frac{k}{\beta}$ para obter $u\in C^{k}$. □

4.1 Exemplo.

Considere o campo vetorial

$$\mathsf{L}=-i\frac{\partial}{\partial t}+\left(x^{2n-1}-ix^{n}\right)\frac{\partial}{\partial x},\qquad n\geq 2;$$

definido em Ω_{ϵ}.

Consideremos os seguintes cálculos

$$\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+x^{4n-2}}=\frac{x}{x^{2}+x^{2n}}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{2x^{2}(1-n)}{\left(x^{2}+x^{2n}\right)x},$$

aplicando frações parciais podemos resolver a seguinte integral

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+x^{4n-2}}dx=-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{2x+2nx^{2n-1}}{x^{2}+x^{2n}}-\frac{2n}{x}dx=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\left[\ln(x^{2}+x^{2n})-2n.\ln(|x|)\right]+c_1=\ln\left(\frac{x^{2n}}{x^{2}+x^{2n}}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}+c_1.$$

tomando a constante $c_1 = 0$ e aplicando a função exponencial, tem-se

$$\exp\left(\int \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+x^{4n-2}}dx\right) = \left(\frac{x^{2n}}{x^2+x^{2n}}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}} = \frac{x}{(1+x^{2n-2})^{\frac{1}{2n-2}}}. \tag{4.17}$$

Também note que

$$\frac{x^n}{x^{2n}+x^{4n-2}} = \frac{1}{x^n+x^{3n-2}} = \frac{x^2}{x^{n+2}+x^{3n}} = \frac{x^2}{x^n\left(x^2+x^{2n}\right)}$$

aplicando frações parciais temos

$$\frac{x^2}{x^{n+2}+x^{3n}} = \frac{x^2}{x^n\left(x^2+x^{2n}\right)} = \frac{1}{x^n} - \frac{x^n}{(x^2+x^{2n})} = \frac{-1}{n-1}\frac{-(n-1)}{x^n} - \frac{1}{n-1}\frac{(n-1)x^{n-2}}{(1+x^{2(n-1)})}$$

agora é simples integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{x^{2n}+x^{4n-2}}dx &= -\frac{1}{n-1}\int \frac{-(n-1)}{x^n} + \frac{(n-1)x^{n-2}}{\left(1+x^{2(n-1)}\right)}dx \\ &= -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \arctan x^{n-1}\right) + c_2.\end{aligned}$$

Tomamos a constante $c_2 = 0$ e aplicamos a função exponencial, assim

$$\exp\left(\int \frac{x^n}{x^{2n}+x^{4n-2}}dx\right) = \exp\left(-\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \arctan x^{n-1}\right)\right). \tag{4.18}$$

Usando os resultados de (4.17) e (4.18) definimos

$$Z(x,t) = \frac{x}{(1+x^{2n-2})^{\frac{1}{2n-2}}}.e^{-i\left[t+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\arctan x^{n-1}\right)\right]}.$$

A função Z é definida em Ω_ϵ e chega em $D\left(0; \frac{\epsilon}{(1+\epsilon^{2n-2})^{\frac{1}{2n-2}}}\right) = D^\epsilon$.

Pelos resultados de (4.2) e (4.3), temos

$$\mathsf{L}Z = 0 \quad \text{e} \quad \mathsf{L}\overline{Z} = \frac{2x^{n-1}}{x^{n-1}+i}\overline{Z}.$$

Alem disso, definimos em $(-\epsilon, \epsilon)$

$$F(x) = |Z(x,t)| = \frac{x}{(1+x^{2n-2})^{\frac{1}{2n-2}}}$$

o qual é um difeomorfismo cuja inversa é dada por

$$x = \pm\frac{|Z|}{\left(1-|Z|^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2n-2}}}.$$

Dada $f \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ e flat sobre Σ. Segue da equação (4.13) que o pushforward de $\mathsf{L}w = f$ definido em $\Omega_\epsilon^\pm$ via a função Z é dado por

$$\frac{2\left(\frac{|z|}{\left(1-|z|^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right)^{n-1}}{\left(\frac{|z|}{\left(1-|z|^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right)^{n-1}+i}\bar{z}\frac{\partial\tilde{w}^+}{\partial\bar{z}} = \tilde{f}^+$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{2\left(\frac{|z|^{n-1}}{\left(1-|z|^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\left(\frac{|z|^{n-1}}{\left(1-|z|^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)+i}\overline{z}\frac{\partial\tilde{w}^{+}}{\partial\overline{z}}=\tilde{f}^{+}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{2\left|z\right|^{n-1}}{\left|z\right|^{n-1}+i\sqrt{1-\left|z\right|^{2n-2}}}\overline{z}\frac{\partial\tilde{w}^{+}}{\partial\overline{z}}=\tilde{f}^{+}\quad \text{em} \quad D^{\epsilon}\setminus\{0\}$$

e similarmente

$$\frac{2\left|z\right|^{n-1}}{\left|z\right|^{n-1}+i\left(-1\right)^{n-1}\sqrt{1-\left|z\right|^{2n-2}}}\overline{z}\frac{\partial\tilde{w}^{-}}{\partial\overline{z}}=\tilde{f}^{-}\quad \text{em} \quad D^{\epsilon}\setminus\{0\}$$

sendo $\tilde{w}^{\pm}$ e $\tilde{f}^{\pm}$ são o pushforward das funões w e f, respectivamente.

Fazendo $z=\left|z\right|e^{i\theta}$, temos as equações

$$\frac{\partial\tilde{w}^{+}}{\partial\overline{z}}=\frac{\left|z\right|^{n-1}+i\sqrt{1-\left|z\right|^{2n-2}}}{2\left|z\right|^{n}}e^{i\theta}\tilde{f}^{+}\quad \text{em} \quad D^{\epsilon}\setminus\{0\} \tag{4.19}$$

e

$$\frac{\partial\tilde{w}^{-}}{\partial\overline{z}}=\frac{\left|z\right|^{n-1}+i\left(-1\right)^{n-1}\sqrt{1-\left|z\right|^{2n-2}}}{2\left|z\right|^{n}}e^{i\theta}\tilde{f}^{-}\quad \text{em} \quad D^{\epsilon}\setminus\{0\}\,. \tag{4.20}$$

Cujas soluções são dadas em (4.15), assim

$$\tilde{w}^{+}=\frac{1}{2\pi i}\int\int_{D^{\epsilon}}\frac{\left|\zeta\right|^{n-1}+i\sqrt{1-\left|\zeta\right|^{2n-2}}}{2\left|\zeta\right|^{n}\left(\zeta-z\right)}e^{i\theta}\tilde{f}^{+}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}$$

e

$$\tilde{w}^{-}=\frac{1}{2\pi i}\int\int_{D^{\epsilon}}\frac{\left|\zeta\right|^{n-1}+i\left(-1\right)^{n-1}\sqrt{1-\left|\zeta\right|^{2n-2}}}{2\left|\zeta\right|^{n}\left(\zeta-z\right)}e^{i\theta}\tilde{f}^{-}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}$$

em virtude do Teorema 13, temos que a solução $\tilde{w}^{\pm}(z)$ são de classe $C^{\infty}(D^{\epsilon})$. Então, para $l\in\mathbb{Z}_{+}$ calculamos a fórmula de Taylor para $\tilde{w}^{\pm}$ em torno de zero

$$\tilde{w}^{\pm}(z)=\sum_{j=0}^{l-1}c_{j}^{\pm}z^{j}+\left|z\right|^{l}\tilde{v}^{\pm}(z),$$

e $\tilde{v}^{\pm}(z)$ pertence a $C^{\infty}(D^{\epsilon})$; note que $\left|z\right|^{l}\tilde{v}^{+}(z)$ e $\left|z\right|^{l}\tilde{v}^{-}(z)$ também satisfazem as equações (4.19) e (4.20), respectivamente. Então definimos

$$w(x,y)=\frac{\left|x\right|^{l}}{\left(1+\left|x\right|^{2n-2}\right)^{\frac{l}{2n-2}}}\tilde{v}^{+}\left(\frac{x}{\left(1+x^{2n-2}\right)^{\frac{1}{2n-2}}}.e^{-i\left[t+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}+\arctan x^{n-1}\right)\right]}\right),$$

se $x\neq 0$ e $w(0,t)=0$ para todo $t\in S^{1}$, satisfaz $\mathsf{L}w=f$ em uma vizinhança de Σ.

REFERÊNCIAS

[1] A. Bergamasco and P. L. Dattori da Silva. Global solvability for a special class of vector fields on the torus. *Contemporary Mathemathics*, 333:148–178, 2006.

[2] P. L. Dattori da Silva. Ck -solvability near the characteristic set for class of planar complex vector fields of infinite type. *Annali di Matematica*, 4:35–67, 2010.

[3] P. L. Dattori da Silva and E. R. Silva. Solvability near the characteristic set for a special class of complex vector fields. *Archiv der Mathematik*, 98:183 – 192, 2012.

[4] R. B. Gonzalez. Resolubilidade global de uma classe de campos vetoriais. Master's thesis, ICMC, 2011.

[5] L. Hörmander. Pseudo-differential operators of principal type. In *Nato Advanced Study Inst. on Singularities in Boundary Value Problems*, pages 69 – 96. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1981.

[6] J. Hounie. *Teoria elementar das Distribuições.* IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[7] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall Inc., United States of America, 2000.

[8] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill series in higher mathematics, United States of America, 1973.

[9] S. G. Suárez Calcina. Princípio da similaridade para classe de campos vetoriais complexos. Master's thesis, ICMC, 2014.

[10] S. L. Zani. Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem. Master's thesis, ICMC, 1988.