UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Terceira homologia de extensões centrais perfeitas

David Martín Carbajal Ordinola

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

David Martín Carbajal Ordinola

Terceira homologia de extensões centrais perfeitas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Behrooz Mirzaii

USP – São Carlos
Abril de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

O65t

Ordinola, David Martin Carbajal
Terceira homologia de extensões centrais perfeitas / David Martin Carbajal Ordinola; orientador Behrooz Mirzaii. -- São Carlos, 2021.
76 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Extensões centrais perfeitas. 2. Homologia integral de grupos. 3. Extensões centrais universais. I. Mirzaii, Behrooz, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

David Martín Carbajal Ordinola

Third homology of perfect central extensions

Thesis submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Doctor in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Behrooz Mirzaii

USP – São Carlos
April 2021

Dedico inteiramente este trabalho de pesquisa
a minha querida esposa Laura L. Arbulú Baquedano e a minha
filha Luciana, pelo apoio nesta etapa tão importante da minha vida,
por manter e cuidar nosso lar durante o tempo investido neste projeto,
e cujas presenças sempre representarão o mais importante na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço especial e principalmente a minha esposa Laura L. Arbulú Baquedano, e a minha pequena filha Luciana, por compreenderem os vários meses em que estive ausente devido ao desenvolvimento deste projeto de pesquisa, pela compreensão e paciência demonstrada nesta etapa tão importante da minha vida, pela constante presença e apoio durante minha realização profissional, e por tudo o que elas representam para mim.

Agradeço a meus pais Ethel e César, e a minha irmã Gabriela por sempre estar comigo ao longo de toda minha trajetória profissional, pelo apoio, exemplo de vida e por sua força de vontade nesta etapa. Um agradecimento especial a minha avó Albina, descanse em paz querida avó, graças a ela eu aprendi muitas coisas, me formei como matemático, e em homenagem a ela, continuarei estudando e me esforçando diariamente.

Agradeço a meu orientador o Prof. Dr. Behrooz Mirzaii por sempre acreditar em mim, e por conduzir meu projeto de pesquisa. Obrigado pelas muitas vezes que insistiu em me ensinar definições, propriedades e teoremas de maneiras didáticas. Sua paciência, dedicação e profissionalismo sempre me servirão como modelo ao longo de toda a minha vida.

Também agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro, e pela bolsa de estudos que possibilitou minha dedicação integral ao programa de pós-graduação e possibilitou a realização desta pesquisa.

Aos professores do programa de Matemática do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP–São Carlos), pela excelência da qualidade profissional e técnica de cada um deles, e por sempre transmitir seu saber com muito profissionalismo.

Não posso deixar de agradecer também a meus colegas e amigos: Pierre, Elvis, Juan Luis, Paulo, Omar, Pablo, Lito, entre outros. Muito obrigado por tudo aquilo que aprendi com vocês, por todos aqueles momentos que compartilhamos juntos.

"Algebra is the offer made by the devil to the mathematician.
The devil says: ***I will give you this powerful machine, it will answer***
any question you like. All you need to do is give me your soul,
give up geometry and you will have this marvellous machine.*"*
(ATIYAH, 2002)

RESUMO

DAVID CARBAJAL O. **Terceira homologia de extensões centrais perfeitas**. 2021. 76 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Os grupos de homologia (e cohomologia) associados a um grupo são invariantes algébricos importantes do grupo. Infelizmente, em muitos casos importantes, esses grupos são muito complicados para serem calculados explicitamente. Devido a isso, os resultados que permitem comparar os grupos de (co)homologia para grupos diferentes tornam-se muito importantes.

O interesse neste problema vem da K-teoria algébrica e do estudo dos K-grupos associados num anel, devido à existência de vários tipos de extensões centrais universais na K-teoria algébrica. Nesta tese, estudamos tais homomorfismos para os terceiros grupos de homologia de uma extensão central perfeita. Uma extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é chamada de perfeita se G é um grupo perfeito, ou seja, se $G = [G,G]$. Mais especificamente, estudamos os homomorfismos $H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})$ e $H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$, desde que $A \subseteq G'$.

Mostramos que se A é um subgrupo central de um grupo G tal que $A \subseteq G'$, por exemplo se G é um grupo perfeito, então a imagem do homomorfismo $H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ é 2-torção, onde $\rho : A \times G \to G$ é o produto usual. Em particular, se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central universal, então a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})$ é 2-torção.

Além disso, se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central perfeita, tal que $K(Q,1)^+$, a construção soma do espaço classificante de Q, é um H-espaço, então mostramos a existência da sequência exata $A/2 \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0$. Nessas hipóteses, mostramos que o homomorfismo $H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ é trivial. Em particular, se a extensão central for universal, então a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})$ também é trivial.

Finalmente, mostramos a existência de um homomorfismo natural $\varphi : H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}^1({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ tal que a imagem de φ coincide com a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$, onde ${}_{2^\infty}A$ é o subgrupo de torção de potências de 2 em A, $\Sigma_2 := \{id, \sigma^{\varepsilon}\}$ é o grupo simétrico com dois elementos e σ^{ε} sendo a involução em $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}^1({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)$ induzida pela involução $A \times A \to A \times A$, $(a,b) \mapsto (b,a)$.

Palavras-chave: Extensões centrais perfeitas, homologia integral de grupos, extensões centrais universais.

ABSTRACT

DAVID CARBAJAL O. **Third homology of perfect central extensions**. 2021. 76 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

The homology (and cohomology) groups associated to a group G are important algebraic invariants of G. Unfortunately, in many important cases these (co)homology groups are too complicated to be computed explicitly. Therefore in many cases results allowing to compare the homology groups for different groups become quite important.

The interest to this problem comes from algebraic K-theory and the study of K-groups of a ring where various type of universal central extensions appears. Here, we also study such homomorphism for the third homology groups of a perfect central extension. A central extension $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ is called perfect if G is a perfect group, i.e. if $G = [G,G]$. Here we study the maps $H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})$ and $H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$ for such extensions provided that $A \subseteq G'$.

In this thesis, we show that if A is a central subgroup of a group G such that $A \subseteq G'$, e.g. when G is a perfect group, then the image of the natural map $H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ is 2-torsion, where $\rho : A \times G \to G$ is the usual product map. In particular if $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ is a universal central extension, then the image of $H_3(A,,\mathbb{Z})$ in $H_3(G,,\mathbb{Z})$ is 2-torsion.

Furthermore, if $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ is a perfect central extension such that $K(Q,1)^+$, the plus-construction of the classifying space of Q, is an H-space, then we prove that there is the exact sequence $A/2 \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0$. Moreover, we prove that with this extra condition, the map $H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ is trivial. In particular, if the extension is universal then the image of $H_3(A,\mathbb{Z})$ in $H_3(G,\mathbb{Z})$ is trivial.

Finally, we show that there is a natural map $\varphi : H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}^1({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ such that the image of φ coincides with the natural image of $H_3(A,\mathbb{Z})$ in $H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$, where ${}_{2^\infty}A$ is the 2-power torsion subgroup of A, $\Sigma_2 := \{id, \sigma^{\varepsilon}\}$ is the symmetric group with two elements and σ^{ε} being the involution on $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}^1({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)$ induced by the involution $A \times A \to A \times A$, $(a,b) \mapsto (b,a)$.

Keywords: Perfect central extensions, integral homology of groups, universal central extensions.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

No trabalho sobre a generalização da sequência exata de Bloch-Wigner para qualquer corpo infinito (SUSLIN, 1991), utilizando técnicas da topologia algébrica, Suslin provou que para qualquer anel R com unidade, a sequência

$$K_2(R) \to K_3(R) \xrightarrow{h_3} H_3(E(R),\mathbb{Z}) \to 0, \tag{1.1}$$

é exata, onde $K_n(R)$ é o n-ésimo K-grupo do anel R, $E(R)$ é o subgrupo de $GL(R)$ gerado por matrizes elementares, e $h_3 : K_3(R) \to H_3(E(R),\mathbb{Z})$ é o homomorfismo de Hurewicz.

O grupo $E(R)$ é um grupo perfeito, e $E(R) = [GL(R), GL(R)]$. Se $St(R)$ é o grupo de Steinberg de R, então temos a extensão central universal

$$K_2(R) \rightarrowtail St(R) \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} E(R). \tag{1.2}$$

Usando resultados da K-teoria algébrica, podemos mostrar que

$$K_3(R) \cong H_3(St(R),\mathbb{Z}), \qquad \text{e} \qquad K_2(R) \cong H_2(E(R),\mathbb{Z}).$$

Então a sequência exata (1.1) induz a seguinte sequência exata

$$H_2(E(R),\mathbb{Z})/2 \to H_3(St(R),\mathbb{Z}) \overset{\alpha_*}{\twoheadrightarrow} H_3(E(R),\mathbb{Z}) \to 0. \tag{1.3}$$

É natural perguntar-se pela existência de um resultado similar para qualquer extensão central. Assim, nesta tese, estudaremos essa pergunta, e daremos uma resposta parcial a ela.

Observe que os grupos de homologia (e cohomologia) associados a um grupo são invariantes algébricos importantes do grupo. Infelizmente, em muitos casos importantes, esses grupos são muito complicados para serem calculados explicitamente. Devido a isso, os resultados que permitem comparar os grupos de (co)homologia para grupos diferentes tornam-se muito importantes.

A extensão $A \overset{\beta}{\rightarrowtail} G \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$ é dita central se A é um grupo abeliano e sua imagem está contida no centro de G, isto é, $A \cong \beta(A) \subseteq Z(G)$. A extensão central é chamada perfeita se $G = [G,G]$. A extensão central $A \overset{\beta}{\rightarrowtail} G \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$ é dita universal se ela é perfeita e $H_2(G,\mathbb{Z}) = 0$.

Mais especificamente, nosso interesse é saber se dada uma extensão central $A \overset{\beta}{\rightarrowtail} G \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$, qual informação obtemos dos homomorfismos de grupos induzidos

$$\beta_* : H_n(A,\mathbb{Z}) \to H_n(G,\mathbb{Z}), \qquad \text{e} \qquad \alpha_* : H_n(G,\mathbb{Z}) \to H_n(Q,\mathbb{Z}),$$

para $n \geq 0$. Nosso objetivo foi estudar os homomorfismos

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z}), \qquad \text{e} \qquad H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$$

para tais extensões.

Nos capítulos 2 e 3, lembramos as ferramentas necessárias para realizar o estudos desses homomorfismos com ajuda da teoria da topologia algébrica e da homologia de grupos.

No capítulo 4, mostramos que se A é um grupo central de G tal que $A \subseteq [G,G]$, então a imagem do homomorfismo natural

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})\right)$$

é um grupo de 2-torção, onde $\rho : A \times G \to G$ é dada por $(a,g) \mapsto ag$. Em particular, se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central universal, então a imagem do homomorfismo natural

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})$$

é um grupo de 2-torção.

No capítulo 5, tornamos esse resultado mais preciso. Primeiro, estudamos o funtor quadrático de Whitehead, e mostramos a existência de seguinte sequência exata

$$0 \to H_1(\Sigma_2, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to \Gamma(A) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A,\mathbb{Z}) \to 0,$$

onde $\Sigma_2 = \{1, \sigma\}$ é o grupo simétrico com dois elementos, e σ é induzida pela involução $A \times A \to A \times A, (a,b) \mapsto (b,a)$.

Usando esse resultado, construimos o homomorfismo

$$H_1(\Sigma_2, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})\right)$$

e mostramos que sua imagem coincide com a imagem do homomorfismo

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})\right).$$

Além disso, mostramos que se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central perfeita tal que Q é um H-grupo, então existe uma versão análoga da sequência exata (1.3)

$$A/2 \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*\left(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})\right) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Em particular, se a extensão é universal, então temos a seguinte sequência exata

$$A/2 \to H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Além disso, mostramos que com essa condição adicional, o homomorfismo

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$$

é trivial. Isto implica que se a extensão é universal, então a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})$ é trivial.

Observe que um grupo Q é chamado quase-perfeito se $Q' = [Q,Q]$ é um grupo perfeito. Um grupo quase-perfeito Q é um H-grupo, se a $+$-construção do espaço classificante de Q, em relação a Q, isto é, $K(Q,1)^+$, é um H-espaço. Por exemplo, os subgrupos elementares do grupo linear $GL(R)$, do grupo ortogonal $O(R)$ e do grupos simplético infinito $Sp(R)$, que apareceram na K-teoria, são H-grupos.

Finalmente, no capítulo 6, provamos uma versão cohomologica dos resultados anteriores. Primeiro, mostramos que se A é um subgrupo central de um grupo G tal que $A \subseteq G'$, então o homomorfismo de cohomologias

$$H^3(G,\mathbb{Z}) \to H^3(A,\mathbb{Z})$$

é trivial. Além disso, se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central perfeita tal que $K(Q,1)^+$ é um H-grupo, obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to H^3(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^*} (A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))^*,$$

onde para qualquer grupo abeliano M, M^* denota seu grupo dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$.

CAPÍTULO

2

TOPOLOGIA ALGÉBRICA

Este capítulo destina-se à apresentação de algumas definições e ferramentas topológicas que usaremos nos próximos capítulos. Em diante, considere $I = [0,1]$, $I^n = I \times I \cdots \times I$.

2.1 Homologia Singular

Dados espaços topológicos X e Y. Duas funções contínuas $f, g : X \to Y$ são ditas homotópicas se existe uma aplicação continua (chamada homotopia) $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. No caso afirmativo escrevemos $f \simeq g$. Dizemos que o espaço X é contrátil se $id_X \simeq c$, onde $c : X \to X$ é alguma função constante $c(x) = x_0$, para todo $x \in X$ e algum $x_0 \in X$.

Seja $A \subseteq X$ um subespaço topológico de X e seja $F : X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre funções contínuas $f, g : X \to Y$. Se $f|_A = g|_A = F|_{A \times [0,1]}$, então dizemos que F é uma homotopia relativa à A e escrevemos $f \simeq_A g$.

Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é dita uma equivalência homotópica se existe uma aplicação contínua $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$, e $g \circ f \simeq id_X$. Neste caso os espaços são chamados homotópicamente equivalentes ou que têm o mesmo tipo de homotopia, e são denotados por $X \simeq Y$.

Um n-simplexo Δ_n em $\mathbb{R}^{n+1}$, para $n \geq 0$, é o subconjunto

$$\Delta_n := \Big\{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, 0 \leq t_i \leq 1, i = 0, 1, \ldots, n\Big\}.$$

Dado um espaço topológico X, um n-simplexo singular em X é uma função $\phi : \Delta_n \to X$. Para um inteiro $0 \leq i \leq n$, definimos a i-ésima cara de ϕ, denotada $d_i\phi$, como sendo o $(n-1)$-simplexo singular em X dado por $d_i\phi(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1})$. Denotamos por $S_n(X)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto de todos os n-simplexos singulares em X.

Definimos a aplicação bordo $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ como sendo o homomorfismo definido por $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$. É fácil verificar que $(S_\bullet(X), \partial_\bullet)$

$$S_\bullet(X): \qquad \cdots \to S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \to \cdots \to S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0,$$

é um complexo de cadeias. Definimos o n-ésimo grupo de homologia singular de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$, denotado $H_n(X;\mathbb{Z})$, como sendo

$$H_n(X;\mathbb{Z}) := H_n(S_\bullet(X))$$

Toda aplicação continua $f : X \to Y$ induz, para todo $n \geq 0$, um homomorfismo de grupos de homologia

$$f_n : H_n(X,\mathbb{Z}) \to H_n(Y,\mathbb{Z}).$$

Se as aplicações continuas $f,g : X \to Y$ são homotópicas, então para todo $n \geq 0$, $f_n = g_n$

2.2 Sistema local de coeficientes

Seja X um espaço topológico, $x_0, x_1 \in X$ e defina-se

$$\Omega(X,x_0,x_1) := \{\lambda : I \to X \mid \lambda \text{é continua}, \lambda(0) = x_0, \lambda(1) = x_1\}.$$

Um sistema local de coeficientes $\underline{G} = \{G_x, h[\lambda]\}$ é uma coleção de grupos $\{G_x \mid x \in X\}$, junto com uma coleção de homomorfismos $\{h[\lambda] : G_x \to G_y\}_{\lambda \in \Omega(X,x,y)}$, satisfazendo as seguinte propriedades

- Se $\lambda_{x_0} \in \Omega(X,x_0,x_0)$ é o caminho constante, então $h[\lambda_{x_0}] = id_{G_{x_0}} : G_{x_0} \to G_{x_0}$.,
- Sej $\lambda, \lambda' \in \Omega(X,x_0,x_1)$ tais que $\lambda \simeq_{\{0,1\}} \lambda'$, então $h[\lambda] = h[\lambda']$,
- Se $\lambda \in \Omega(X,x_0,x_1)$, $\mu \in \Omega(X,x_1,x_2)$, então $h[\lambda * \mu] = h[\lambda] \circ h[\mu] : G_{x_2} \to G_{x_0}$.

A continuação apresentamos algumas propriedades dos sistemas locais de coeficientes.

- Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos e simplesmente conexo, e $\underline{G}$ um sistema local de coeficientes sobre X. Então $\underline{G}$ é isomorfo a um sistema local de coeficientes constante $\underline{G_0}$, isto é $G_x = G_0$, para algum grupo G_0 fixo e $h[\lambda] = id_{G_0} : G_0 \to G_0$.
- Seja X um espaço topológico e seja $\underline{G} = \{G_x, h_[\lambda]\}$ um sistema local de coeficientes sobre X. Para todo n-simplexo singular $\Delta_n \to X$, e para todo $0 \leq i \leq n$, escrevemos $\sigma_i = \sigma(i)$. Além disso, para todo $0 \leq i \leq j \leq n$, definimos o 1-simplexo singular $\sigma_{ij} : \Delta_1 \to X$ como sendo a composta

$$\begin{tikzcd} \Delta_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sigma_{ij}"'] & \Delta_n \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

onde a primeira aplicação $\Delta_1 \to \Delta_n$, é definido como sendo a aplicação afim que leva 0 e 1 para i e j respetivamente. Defina, para cada $n \geq 0$, definimos $C_n(X;\underline{G}) := \bigoplus_{\sigma:\Delta_n \to X} A_{\sigma_0}$, e defina $C_{-1}(X;\underline{G}) := 0$. Definimos também os operadores bordo $\partial : C_n(X;\underline{A}) \to C_{n-1}(X;A)$ como sendo $\partial_0 := 0$, e para todo $n > 0$, $\partial_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_n^i$, onde ∂_n^i é o único homomorfismo tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A_{\sigma_0} \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\ C_n(X;\underline{A}) \arrow[r, dashed, "\partial_n^i"] & C_{n-1}(X;\underline{A}) \end{tikzcd}$$

onde o mapa da aplicação da esquerda é definida por $A_{\sigma_0} \mapsto A_{(\sigma d_i)_0} = A_{\sigma_0}$, onde $d_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n, d_i(t_0,\ldots,t_{n-1}) = (t_0,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_{n-1})$, para todo $0 \leq i \leq n-1$. Assim, definido, $C_\bullet(X;\underline{G}) := \{C_n(X;\underline{G}), \partial\}$ é um complexo de cadeias.

- O $n-$ésimo grupo de homologia de X com coeficientes no sistema local $\underline{G}$ é definido por $H_n(X;\underline{G}) := H_n(C_\bullet(X;\underline{G}))$.

- Se $\underline{G}$ é um sistema local de coeficientes de grupos abelianos sobre X, então $H_n(X;\underline{G}) \cong H_n(X;\underline{G_x})$, para algum $x \in X$.

- Sejam X um espaço topológico e A um grupo abeliano. Então X é conexo por caminhos se, e somente se, $H_0(X;\underline{A}) \cong A$.

- Quando o sistema local de coeficientes é constante com valores em $\mathbb{Z}$, então $H_n(X;\underline{\mathbb{Z}}) \cong H_n(X;\mathbb{Z})$, sendo o último grupo a homologia singular do espaço topológico X com coeficientes no anel $\mathbb{Z}$.

Uma aplicação continua $p : E \to B$ é dita uma fibração de Serre se para toda homotopia $H : I^n \times I \to B$, e toda aplicação continua $\overline{h_0} : I^n \to E$ tal que $p \circ \overline{h_0} = H \circ i_0$, existe uma homotopia $\overline{H} : I^n \times I \to E$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "\overline{h_0}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & B \end{tikzcd}$$

onde $i_0 : I^n \to I^n \times I$, $i_0(x) = (x,0)$. Uma aplicação continua $p : E \to B$ é uma fibração se para todo espaço Y, para toda homotopia $H : Y \times I \to B$, e toda aplicação continua $\overline{h_0} : Y \to E$, tal que $p \circ \overline{h_0} = H \circ i_0$, existe uma homotopia $\overline{H} : Y \times I \to E$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\overline{h_0}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{H}"] & B \end{tikzcd}$$

onde $i_0 : Y \to Y \times I$, $i_0(x) = (x, 0)$. A fibra da fibração p é $F := p^{-1}(b_0)$, para algum $b_0 \in B$. Note que toda fibração é uma fibração de Serre. Usamos a notação $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ para descrever a fibração acima e sua fibra.

A continuação construiremos um exemplo importante para os próximos capítulos. Considere $p : E \to B$ uma fibração de Serre e $q \geq 0$. Para cada $b \in B$, denote a fibra de b sobre B por $F_b := p^{-1}(b)$. Definiremos um sistema local de coeficientes sobre B induzido pelas fibras da fibração: $\underline{G} = \{G_b, h[\lambda]\}$. Assim defina $G_b := H_q(F_b; \mathbb{Z})$ para todo $b \in B$; dado $\lambda \in \Omega(B, b_0, b_1)$, considere o produto fibrado de λ e p:

$$\begin{tikzcd} E_\lambda \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

A primeira projeção $pr_1 : E_\lambda \to I$ induz isomorfismos de grupos $p_1 : H_q(F_{b_0}; \mathbb{Z}) \to H_q(E_\lambda; \mathbb{Z})$ e $p_2 : H_q(F_{b_1}; \mathbb{Z}) \to H_q(E_\lambda; \mathbb{Z})$. Então definimos $h[\lambda] = p_2^{-1} \circ p_1 : H_q(F_{b_0}; \mathbb{Z}) \to H_q(F_{b_1}; \mathbb{Z})$.

A construção anterior define um sistema local de coeficientes sobre B induzido pela fibração de Serre $p : E \to B$. Denotamos esse sistema local por $\underline{H_q}(F)$ quando B for conexo por caminhos. Este sistema local aparece na sequência espectral de Serre (Teorema 18).

2.3 CW-complexos

Um espaço topológico X é chamado uma célula fechada de dimensão n se X é homeomorfo ao n-ésimo disco unitário $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$. Por exemplo, o n-cubo I^n e o n-simplexo padrão são n-células fechadas.

Um espaço topológico X é chamado uma célula aberta de dimensão n se X é homeomorfo à n-ésima bola aberta $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\}$. Por exemplo, o interior do n-cubo I^n é uma n-célula aberta.

Definição 1. Um complexo celular ou CW-complexo é um espaço topológico X e uma coleção de células abertas disjuntas e_α cuja união é X, satisfazendo as seguintes propriedades

- X é um espaço Hausdorff,
- Para cada n-célula aberta e_α da coleção, existe uma aplicação contínua $f_\alpha : D^n \to X$, chamada aplicação característica, tal que f mapea o interior de D^n homeomorficamente sobre e_α e mapea a fronteira de D^n em uma união finita de células abertas da coleção, cada uma de dimensão menor que n,
- Um conjunto A é fechado em X, sempre que $A \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em $\overline{e_\alpha}$, para cada α.

O k-esqueleto do complexo X é o conjunto de todas as n-células de X, com $0 \leq n \leq k$. Note que todo CW-complexo é um espaço topológico normal e são localmente contráteis, portanto são localmente conexos por caminhos. Consequentemente, as definições de conexidade e conexidade por caminhos coincidem sobre os CW-complexos.

2.4 Grupos de homotopia

Dados X e Y conjuntos, denota-se por Y^X ao conjunto de todas as funções $f : X \to Y$. Quando Y é um espaço topológico, uma topologia canónica sobre Y^X é a topologia produto. Uma sub-base para esta topologia é formada pela família de conjunto $U^x = \{f \in Y^X \mid f(x) \in U\}$, onde $x \in X$ e U é um conjunto aberto em Y. Suponha que X e Y sejam espaços topológicos, considere $C(X,Y) \subset Y^X$ consistido de todas as funções continuas de X em Y. Introduziremos uma topologia canónica sobre $C(X,Y)$, chamada topologia compacta-aberta, a qual é uma topologia que leva em consideração tanto a topologia de X quanto a topologia de Y, e generaliza a topologia produto.

Definição 2. A topologia compacta-aberta, denotada τ_{ca} sobre $C(X,Y)$ tem como sub-base a colecao dos conjuntos

$$(C,U) := \{f \in C(X,Y) \mid f(C) \subset U\},$$

onde $C \subset X$ é compacto, e U é aberto em Y.

Seja B um espaço topológico. O espaço dos caminhos em B baseados em b_0 é o espaço topológico

$$PB := \{\lambda : I \to B \mid \lambda \text{ é continua}, \lambda(0) = b_0\}$$

munido da topologia compacta-aberta.

A aplicação $p : PB \to B$, $p(\lambda) = \lambda(1)$ é uma fibração com fibra $\Omega B = p^{-1}(b_0)$, conhecido como o espaço dos laços em B com ponto base b_0:

$$\Omega B \hookrightarrow PB \xrightarrow{p} B. \tag{2.1}$$

Note que para todo espaço topológico com ponto base (B,b_0), o espaço de caminhos PB é contrátil, isto é, $H_0(PB;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, e $H_i(PB;\mathbb{Z}) = 0$, para todo $i > 0$. Usualmente denotamos $\Omega^n B$ como sendo $\Omega(\Omega^{n-1}B)$, para $n > 0$, e $\Omega^0 B = B$.

Definição 3. Para $n \geq 1$, o $n-$ésimo grupo de homotopia do espaço pontuado (B,b_0) define-se por $\pi_n(B,b_0) = \pi_1(\Omega^{n-1}B, \lambda_{b_0})$, o grupo fundamental do $(n-1)$-espaço de laços de B.

Quando B é conexo por caminhos denotamos $\pi_n(B,b_0)$ simplesmente por $\pi_n(B)$.

Teorema 1. Se $n \geq 2$, o conjunto $\pi_n(B,b_0)$ é um grupo, e $\pi_n(\Omega B, \lambda_{b_0}) \cong \pi_{n+1}(B,b_0)$ para $n \geq 1$.

Demonstração. Veja-se (HATCHER, 2005) □

A continuação damos uma definição equivalente dos n-ésimos grupos de homotopia. Para $n \geq 1$, defina-se o n-ésimo grupo de homotopia de X, respeito ao ponto base x_0, denotado $\pi_n(X,x_0)$, como sendo o grupo de todas as classes de homotopia $f : I^n \to X$ tal que $f(\partial I^n) = x_0$, onde ∂I^n é a fronteira de I^n, com a operação soma $+$ definida sobre as classes de homotopia, como sendo $[f]+[g] := [h] \in \pi_n(X,x_0)$, onde

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \begin{cases} f(2x_1,x_2,\ldots,x_n) & \text{se } x_1 \in [0,\frac{1}{2}], \\ g(2x_1-1,x_2,\ldots,x_n) & \text{se } x_1 \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

para todo $[f],[g] \in \pi_n(X,x_0)$. Quando o ponto base x_0 é conhecido, denotamos $\pi_n(X,x_0)$ simplesmente por $\pi_n(X)$.

Um espaço X é dito 0-conexo se X é conexo por caminhos, é dito 1-conexo, se X é conexo por caminhos e $\pi_1(X,x_0) = 0$ para qualquer ponto $x_0 \in X$. Em geral, X é dito n-conexo se X é conexo por caminhos, e $\pi_j(X,x_0) = 0$, para todo $j \leq n$, e para todo $x_0 \in X$.

Seja X um espaço topológico, e seja $x_0 \in X$ um ponto base. Então para todo $n \geq 1$, existe um homomorfismo natural

$$h_n : \pi_n(X,x_0) \to H_n(X;\mathbb{Z})$$

definido como segue: Se $f : I^n \to X$ é um representante de uma classe de homotopia $[f] \in \pi_n(X,x_0)$, então f induz uma aplicação $S^n = \dfrac{I^n}{\partial I^n} \to X$, e portanto uma aplicação $f_n : H_n(S^n;\mathbb{Z}) \to H_n(X;\mathbb{Z})$. Dado que $H_n(S^n,\mathbb{Z})$ é um grupo cíclico infinito, para cada $n \geq 1$, definimos $h_n[f] := f_n[S^n]$, onde $[S^n]$ é o gerador do grupo $H_n(S^n;\mathbb{Z})$. Os homomorfismos h_n são chamados homomorfismos de Hurewicz.

Proposição 1. A aplicação $h_n : \pi_n(X,x_0) \to H_n(X;\mathbb{Z})$ é um homomorfismo de grupos. Além disso, se X é n-conexo, para $n \geq 1$, então o homomorfismo de Hurewicz induz um isomorfismo $\pi_{n+1}(X,x_0) \to H_{n+1}(X;\mathbb{Z})$, e $H_j(X,\mathbb{Z}) = 0$ para todo $0 \leq j \leq n$.

Demonstração. Veja-se (HATCHER, 2005, Proposição 4.36, Teorema 4.37) □

2.5 Espaços Eilenberg-Maclane

Sejam G um grupo qualquer e X um espaço topológico conexo por caminhos satisfazendo que $\pi_i(X) = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\pi_1(X) \cong G$. Neste caso X é chamado espaço de Eilenberg-MacLane de tipo (G,1), ou simplesmente um $K(G,1)$-espaço. Em geral, temos a seguinte definição.

Definição 4 (Espaços de Eilenberg-Maclane)**.** Sejam G um grupo, n um número natural e X um espaço topológico conexo por caminhos tal que $\pi_i(X) = 0$ para todo $i \neq n$, e $\pi_n(X) = G$. Então X é chamado um $K(G,n)$-espaço.

Teorema 2. Sejam G um grupo e $n \geq 2$. Então

$$H_n(K(G,n);\mathbb{Z}) \cong \pi_n(K(G,n)) \cong G$$

$$H_j(K(G,n);\mathbb{Z}) = 0, \qquad 0 \leq j < n$$

Se $n = 1$

$$H_1(K(G.1);\mathbb{Z}) \cong \pi_1(K(G,1))_{ab} = G_{ab}$$

Além disso, $H_{n+1}(K(G,n);\mathbb{Z}) = 0$, para todo $n > 1$.

Demonstração. Veja-se (HATCHER, 2005) □

2.6 Espaços classificantes

Seja G um grupo agindo sobre X, isto é, X é um espaço topológico munido com uma aplicação $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto gx$, satisfazendo $1x = x$, para todo $x \in X$, e $g(g'x) = (gg')x$, para todos $g.g' \in G, x \in X$.

Dizemos que G age livre e propriamente descontínua sobre X, se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x com $x \in U$ tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G - \{1\}$.

Teorema 3. Seja G um grupo. Então existe um CW-complexo contrátil X_G tal que G age livre e celularmente sobre X_G (isto é a ação de G mapeia homeomorficamente cada célula numa outra célula, portanto G age propriamente descontínua) e X/G é um CW-complexo. Em particular, a aplicação quociente $p : X_G \to X_G/G$ é um recobrimento.

Demonstração. Veja-se (ROSENBERG, 1995, Teorema 5.1.15). □

O seguinte teorema mostra que X_G/G é único a menos de homotopia.

Teorema 4. Seja G um grupo e sejam X_1, X_2 espaços topológicos Hausdorff contráteis tais que G age livre e propriamente descontínua sobre X_1 e X_2. Se X_1/G e X_2/G são espaços paracompactos então X_1/G e X_2/G são homotópicamente equivalentes.

Demonstração. Veja-se (ROSENBERG, 1995, Teorema 5.1.5). □

Isto permite definir um espaço topológico associado a cada grupo G com algumas propriedades interessantes.

Definição 5 (Espaço Classificante)**.** Seja G um grupo. O espaço $BG := X_G/G$ é chamado o espaço classificante de G, e é único a menos de homotopia.

Note que como$p : EG = X_G \to BG$ um recobrimento com as propriedades da ação G sobre EG, temos que $\pi_n(BG, p(x_0)) = \pi_n(EG, x_0)$ para todo $n > 1$, e

$$G \cong \frac{\pi_1(BG, p(x_0))}{p_*(\pi_1(EG, x_0))} = \pi_1(BG, p(x_0)),$$

para todo ponto base $x_0 \in EG$, e qualquer ponto base $p(x_0) \in BG$. Assim

$$\pi_n(BG) \cong \begin{cases} G, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Este fato implica que BG é um espaço $K(G,1)$. Reciprocamente, dado um $CW-$complexo X' conexo tal que $\pi_1(X',x'_0) = G$ e para $n > 1$ $\pi_n(X',x'_0) = 0$ em algum ponto base $x'_0 \in X$, temos que o espaço de recobrimento universal de X' tem todos seus grupos de homotopia triviais e portanto é contrátil. Logo X' é um espaço classificante de G.

O seguinte teorema garante que a homotopia singular do espaço classificante de um grupo G não difere da homologia integral de G, isto é, conseguimos um isomorfismo entre a homologia de grupos (veja 3.1, a qual descrevemos no próximo capítulo) e a homologia singular.

Teorema 5. Se M é um G-módulo trivial, então existe um isomorfismo natural entre $H_\bullet(G,M)$ e $H_\bullet(BG;M)$. Em particular, para todo $n \geq 0$, $H_n(G,\mathbb{Z}) \cong H_n(BG;\mathbb{Z})$.

A construção do espaço classificante gera um funtor $B(-)$ da categoria dos grupos e os homomorfismos de grupos na categoria dos espaços topológicos e as classes de homotopia das funções continuas.

2.7 A $+$-construção

Definição 6 (D. Quillen)**.** Seja X um CW-complexo conexo, e seja $N \subset \pi_1(X)$ um subgrupo normal perfeito de $\pi_1(X)$. Definimos a $+$-construção de X, relativo a N, como sendo o CW-complexo X^+, único a menos de homotopia, tal que a inclusão $i : X \longrightarrow X^+$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\pi_1(X^+) \cong \pi_1(X)/N$, e o homomorfismo induzido $i_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X^+)$ é o mapa quociente $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/N$.
2. A inclusão i, induz um isomorfismo $H_\bullet(X;i^*(L)) \to H_\bullet(X^+;L)$, para quaisquer sistema local de coeficientes L sobre X^+.

Pelo item (2), em particular, temos que $H_*(X,\mathbb{Z}) \cong H_*(X^+,\mathbb{Z})$ isto é, X e X^+ não diferem no sentido da homologia.

A $+$-construção do espaço X, relativo a N, é tal que se $f : X \to Y$ é uma aplicação continua entre espaços topológicos conexos, tais que $f_*(N) = 0$ em $\pi_1(Y)$, então existe uma aplicação continua $f^+ : X^+ \to Y$, única a menos de homotopia, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & X^+ \arrow[d, dashed, "f^+"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Exemplo 1. Seja R um anel comutativo com unidade e considere $X = BGL(R)$, o espaço classificante do grupo linear geral estável $GL(R)$, e considere $N = E(R)$, o subgrupo elementar gerado por matrizes elementares. Sabe-se pelo Lema de Whitehead, que $E(R)$ é um subgrupo normal perfeito de $GL(R) = \pi_1(BGL(R))$, então temos garantida a existência da $+$-construção do espaço $BGL(R)$, relativa a $E(R)$, denotada por $BGL(R)^+$. Observe que para todo $n \geq 1$:

$$H_n(BGL(R)^+;\mathbb{Z}) = H_n(BGL(R);\mathbb{Z}) \simeq H_n(GL(R);\mathbb{Z}).$$

Em consequência, se Z é um recobrimento de X, tendo como grupo fundamental a N, então Z^+ é, ao menos de homotopia, um recobrimento de X^+. Por exemplo, um recobrimento de $BGL(R)^+$ é o espaço $BE(R)^+$, onde as construções são tomadas relativas ao subgrupo $E(R)$. Portanto para todo $n \geq 2$ temos que

$$\pi_n(BE(R)^+) \simeq \pi_n(BGL(R)^+).$$

2.8 H-espaço

Um grupo topológico A é um grupo (multiplicativo) A equipado com uma topologia tal que

(i) O produto $\mu : A \times A \to A$, $\mu(a,a') = aa'$, é uma aplicação contínua, onde $A \times A$ tem a topologia produto.

(ii) A aplicação inversão $i : A \to A$, $i(a) = a^{-1}$, é uma aplicação continua.

Definição 7. Um espaço com ponto base (X,x_0) é chamado H-espaço (ou espaço de Hopf) se existe uma aplicação contínua $m : (X \times X, (x_0,x_0)) \to (X,x_0)$ para o qual os mapas restringidos $m(-,x_0)$ e $m(x_0,-)$ sobre (X,x_0) são homotópicos a id_X relativo a $\{x_0\}$. Chamamos a x_0 de identidade homotópica.

Claramente, um grupo topológico com identidade x_0 e multiplicação m é um H-espaço. Pode-se mostrar que se (X,x_0) é um H-espaço, então $\pi_1(X,x_0)$ é abeliano. Logo se A é um grupo topológico então $\pi_1(A,1)$ é abeliano. Além disso, se A é um grupo topológico simplesmente conexo e N é um subgrupo normal discreto de A, então $\pi_1(A/N,1) \simeq N$.

Definição 8. Sejam G e G' dois H-espaços, com multiplicações m_G e $m_{G'}$. Uma aplicação contínua $f : G \to G'$ é um H-morfismo se o seguinte diagrama comuta homotópicamente

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m_G"] & G' \times G' \arrow[d, "m_{G'}"'] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd}$$

ou seja, $m_{G'} \circ (f \times f) \simeq f \circ m_G$.

Definição 9. Um H-espaço X com multiplicação m, é dito homotopicamente associativo, se $m\circ(m\times id_X)\simeq m\circ(id_X\times m)$.

Dada uma aplicação contínua $f: X\to Y$ entre um espaço topológico X e um H-espaço Y com multiplicação m, dizemos que f é homotopicamente inversível, se existe uma aplicação contínua $g: X\to Y$ tal que $m\circ(f\times g)\circ\Delta_X\simeq m\circ(g\times f)\circ\Delta_X$, onde $\Delta_X: X\to X\times X, x\mapsto(x,x)$ é a aplicação diagonal.

Definição 10. Um H-espaço X é um H-grupo, se é homotopicamente associativo e a aplicação identidade $id_X: X\to X$ é homotopicamente inversível.

Teorema 6. Seja X um espaço topológico qualquer. Se Y é um H-espaço, então o conjunto das classes de homotopia (relativas a um ponto base) de aplicações de X em Y, denotado $[X,Y]$, é um grupo com a operação induzida por Y, e o grupo $\pi_1(Y)$ age trivialmente sobre $[X,Y]$.

Demonstração. Veja-se (WHITEHEAD, 1978). □

Teorema 7. O espaço de laços $\Omega(X,x_0)$ é um e H-espaço, para qualquer espaço com ponto base (X,x_0).

Demonstração. Veja-se (WHITEHEAD, 1978). □

Teorema 8. Se G é um grupo abeliano e n é um inteiro positivo, então $K(G,n)$ é um H-espaço.

Demonstração. Veja-se (WHITEHEAD, 1978, Teorema 7.11, Cap. V) □

Teorema 9. Sejam (G,x) e (G',x') dois H-espaços, com multiplicações m_G e $m_{G'}$, e $f: G\to G'$ é um H-morfismo. Suponha que $f_k: H_k(G,\mathbb{Z})\to H_k(G',\mathbb{Z})$ é um isomorfismo para todo $k<n$ e um epimorfismo para $k=n$. Então para qualquer aplicação $g: G'\to K(A,n+1)$ tal que $g\circ f$ é homotópica a uma constante, então g é um H-morfismo.

Demonstração. Veja-se (ZABRODSKY, 1976, Proposição 2.3.1). □

CAPÍTULO

3

SEQUÊNCIAS ESPECTRAIS E HOMOLOGIA DE GRUPOS

3.1 Complexos de Cadeias

Seja R um anel, não necessariamente comutativo, com unidade. Um complexo de cadeias de R-módulos (à direita ou à esquerda) $(C_\bullet, d_\bullet)$ é uma sequência de R-módulos (à direita ou à esquerda) $C_\bullet = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e uma família de R-homomorfismos $d_\bullet = \{d_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que a composição de quaisquer dois morfismos consecutivos é zero, isto é, $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo n. Verificando que $\operatorname{im} d_{n+q} \subseteq \ker d_n$, definimos assim o n-ésimo grupo de homologia do complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ como o quociente

$$H_n(C_\bullet) := \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}}$$

Exemplo 2. (i) Se para todo n, $C_n = 0$ e $d_n = 0$, dizemos que o complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ é o complexo nulo e denotamos dele simplesmente por 0.
(ii) Sejam R e S anéis com unidade, $(C_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de cadeias de R-módulos e seja $F : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_S\mathrm{Mod}$ um funtor da categoria de R-módulos na categoria de S-módulos. Então $(F(C_\bullet), F(d_\bullet))$ é um complexo de cadeias de S-módulos, onde $F(C_\bullet)_n = F(C_n)$, e $F(d_\bullet)_n = F(d_n)$.

Um complexo de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$ é dito não negativo sempre que $C_n = 0$ para todo $n < 0$. Um morfismo de complexos de cadeias $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ entre os complexos de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ é uma família de R-homomorfismos $\{\alpha_n : C_n \to C'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\alpha_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ \alpha_n$. Assim, um morfismo de complexos de cadeia induz, para cada $n \in \mathbb{Z}$, um homomorfismo no nível da homologia $\alpha_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$, definido por $\alpha(x + \operatorname{im} d_{n+1}) = \alpha_n(x) + \operatorname{im} d'_{n+1}$, onde $x \in \ker d_n$. Os morfismos de complexos de cadeias satisfazem as seguintes propriedades

- Dados os morfismos de complexos $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ e $\beta_\bullet : (C'_\bullet, d'_\bullet) \to (C''_\bullet, d''_\bullet)$, então $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$.

- Dado o complexo de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$, então $(id_{C_*})_* = id_{H_n(C_\bullet)}$.

Considerando os complexos de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$, $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ e $(C''_\bullet, d''_\bullet)$, uma sequência curta de complexos é formada por morfismos de complexos de cadeias

$$0 \to C'_\bullet \xrightarrow{\alpha} C_\bullet \xrightarrow{\beta} C''_\bullet \to 0,$$

tais que $\beta_n \circ \alpha_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Uma sequência curta de complexos é exata se para todo $n \in \mathbb{Z}$, a sequência exata $0 \to C'_n \xrightarrow{\alpha} C_n \xrightarrow{\beta} C''_n \to 0$. O seguinte teorema estabelece a existência de uma sequência longa de homologia associada a uma sequência exata curta de complexos de cadeias.

Teorema 10. Seja $0 \to C'_\bullet \xrightarrow{\alpha} C_\bullet \xrightarrow{\beta} C''_\bullet \to 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeias de R-módulos. Então existe uma sequência exata longa de grupos de homologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_{n+1}(C'_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} H_{n+1}(C_\bullet) \xrightarrow{\beta_*} H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\beta_*} H_n(C''_\bullet) \to \cdots$$

Os homomorfismos $\delta : H_{n+1}(C''_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$ são chamados homomorfismos conectantes, e a sequência exata longa de homologias é natural no sentido que preserva quadrados comutativos.

Demonstração. Veja-se (BROWN, 1994, Proposição 4, Ch. 0) □

Sejam $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ morfismos de complexos de cadeias de R-módulos. Dizemos que $\alpha_\bullet$ é homotópica a $\beta_\bullet$ se para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe um homomorfismo $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ tal que $\alpha_n - \beta_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$. Dizemos que $\alpha_\bullet$ é homotopicamente nula se $\alpha_\bullet$ é homotópica ao morfismo nulo. A seguinte proposição estabelece quando dois morfismos de complexos induzem o mesmo homomorfismo no nível de homologia

Proposição 2. Sejam $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ morfismos de complexos de cadeias de R-módulos. Se $\alpha_\bullet$ é homotópica a $\beta_\bullet$, então $\alpha_* = \beta_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$.

Demonstração. Veja-se (BROWN, 1994). □

Seja M um R-módulo. Uma resolução de M é uma sequência exata da forma

$$C_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M : \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

Se para todo $n \geq 0$, C_n é um R-módulo projetivo (livre), então $C_\bullet \to M$ é dita uma resolução projetiva (livre) de M (sobre R). Lembremos que todo R-módulo M tem uma resolução livre, a qual também é uma resolução projetiva.

Teorema 11. Sejam $F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ e $F'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} M$ resoluções projetivas do R-módulo M. Então existe um morfismo de complexos de cadeias $\alpha_\bullet : (F_\bullet, d_\bullet) \to (F'_\bullet, d'_\bullet)$ tal que $\varepsilon' \circ \alpha_\bullet = \varepsilon$. O morfismo de complexos $\alpha_\bullet$ é único ao menos de homotopia.

Demonstração. Veja-se (BROWN, 1994, Teorema 7.5, Ch. I). □

Um morfismo de complexos de cadeias $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ é dito uma equivalência homotópica se existe um morfismo de complexos $\beta_\bullet : (C'_\bullet, d'_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$ tal que:

i) $\beta_\bullet \circ \alpha_\bullet$ é homotópica a $id_{C_\bullet} : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$,

ii) $\alpha_\bullet \circ \beta_\bullet$ é homotópica a $id_{C'_\bullet} : (C'_\bullet, d'_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$.

Por outro lado, se $\alpha_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$ é um isomorfismo para todo n, então $\alpha_\bullet$ é dita uma equivalência fraca. Toda equivalência homotópica é uma equivalência fraca.

Teorema 12. Sejam $F_\bullet \to M$ e $F'_\bullet \to M$ resoluções projetivas do $R-$módulo M. Então existe um morfismo de complexos $\alpha_\bullet : (F_\bullet, d_\bullet) \to (F'_\bullet, d'_\bullet)$ tal que para qualquer R-módulo à esquerda N o morfismo

$$\alpha_\bullet \otimes id_M : F_\bullet \otimes_R N \to F'_\bullet \otimes_R N.$$

é uma equivalência fraca. Em particular, $H_n(F_\bullet \otimes_R N) \cong H_n(F'_\bullet \otimes_R N)$ para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Veja-se (BROWN, 1994, Teorema 8.6, Ch. I). □

Seja $F_\bullet \to M$ uma resolução projetiva do R-módulo à direita M. Definimos para qualquer R-módulo à esquerda N e para todo $n \geq 0$, o $R-$módulo

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := H_n\left(F_\bullet \otimes_R N\right).$$

Pelo Teorema (12), o $R-$módulo $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ é independente da escolha da resolução projetiva de M.

Teorema 13. (i) Seja $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então para quaisquer R-módulo M, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_n^R(M,N') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Tor}_n^R(M,N'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M,N') \to \cdots$$

(ii) Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\beta'} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então para quaisquer R-módulo N, existe uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(M'',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_n^R(M',N) \xrightarrow{\alpha'_*} \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \xrightarrow{\beta'_*} \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M',N) \to \cdots$$

Demonstração. Veja-se (ROTMAN, 1979, Teorema 6.21). □

Os seguintes teoremas serão importantes na seguinte seção e nos próximos capítulos.

Teorema 14 (Fórmula de Künneth)**.** Seja $(P_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de cadeias de R-módulos planos tais que para todo n, $d_n(P_n) \subset P_{n-1}$ é um R-módulo plano. Então para todo n e para todo R-módulo M, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow H_n(P_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(P_\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), M) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994, Teorema 3.6.1). □

Teorema 15 (Teorema dos Coeficientes Universais)**.** Seja $(P_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}$-módulos livres. Então para cada n e cada $\mathbb{Z}$-módulo M, a fórmula de Künneth cinde e obtemos uma decomposição (não canônica)

$$H_n(P_\bullet \otimes M) \cong (H_n(P_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} M) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(P_\bullet), M).$$

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994, Teorema 3.6.2). □

3.2 Homologia de Grupos

Seja G um grupo escrito multiplicativamente. O anel do grupo de G, denotado $\mathbb{Z}G$, é o $\mathbb{Z}-$módulo livre gerado pelos elementos de G, $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z} \cdot g$, junto com a multiplicação:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G & \longrightarrow \mathbb{Z}G. \\ \left(\sum n_i g_i, \sum n_j g_j\right) & \longmapsto \sum n_i n_j g_i g_j \end{array}$$

Definimos um G-módulo à esquerda como sendo um grupo abeliano M junto com uma ação de G sobre M tal que $g \cdot (a+b) = g \cdot a + g \cdot b$, $a, b \in M$. Lembrando que G-módulos e $\mathbb{Z}G$-módulo são conceitos equivalentes. Além disso, se M é um G-módulo à esquerda, podemos definir uma estrutura de G-módulo à direita fazendo uso da ação: $a \cdot g := g^{-1} \cdot a$.

Um G-módulo trivial é um grupo abeliano M onde G age trivialmente sobre M, isto é, para todo $g \in G$ e para todo $a \in M$, $g \cdot a = a$. **Consideraremos sempre ao grupo $\mathbb{Z}$ como um G-módulo trivial.**

Para qualquer grupo G, definimos o homomorfismo de aumento (de G) como sendo o homomorfismo de anéis

$$\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum n_i g_i \longmapsto \sum n_i.$$

Assim também definimos o ideal de aumento como sendo $I_G := \ker \varepsilon$. Note que $\{g - 1 : g \in G\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de I_G. Por outro lado, definimos o grupo de coinvariantes do G-módulo M como sendo o grupo abeliano $M_G := M/I_G M$.

Na verdade, $I_G M$ é o submódulo de M gerado pelos elementos da forma $g \cdot m - m$, onde $g \in G$, $m \in M$. Note que M_G é o maior G-módulo quociente de M onde G age trivialmente satisfazendo $M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$.

Com estas ferramentas definimos a homologia de um grupo. Seja G um grupo e M um G-módulo. Para $n \geq 0$, definimos o n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M como

$$H_n(G,M) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = H_n\left(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} M\right) \tag{3.1}$$

onde $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Usaremos em diante a notação $M \otimes_G N := M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$. verificando que $M \otimes_G N \cong N \otimes_G M$. Desta maneira, temos

$$H_n(G,M) = H_n(P_\bullet \otimes_G M).$$

Note que

$$H_0(G,M) = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) \cong \mathbb{Z} \otimes_G M \cong M_G$$

Usando o Teorema 13 e a definição anterior, para cada sequência exata curta de G-módulos, temos associada uma sequência exata longa nos grupos de homologia de G com coeficientes no G-módulo em questão.

Proposição 3. Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de G-módulos. Então existe uma sequência exata longa natural de grupos de homologias:

$$\cdots \to H_{n+1}(G,M'') \xrightarrow{\delta} H_n(G,M') \xrightarrow{\alpha_*} H_n(G,M) \xrightarrow{\beta_*} H_n(G,M'') \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(G,M') \to \cdots \quad .$$

Exemplo 3. Se M é um G-módulo trivial, então $H_0(G,M) = M$. Em particular, $H_0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Pode-se mostrar que $H_1(G,\mathbb{Z}) = G_{ab} = G/[G,G]$. Por outro lado, se $G = \{1\}$, todo G-módulo M é sempre trivial, logo $H_n(\{1\},M) = 0$, se $n \neq 0$ e $H_0(\{1\},M) = M$.

Exemplo 4. Seja G é um grupo cíclico de ordem n com gerador σ. Considere $N = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$. Então o homomorfismo $N : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ definido por $N(g) = Ng$, e o homomorfismo $\sigma - 1 : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$, $g \mapsto (\sigma - 1)g$ definem uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G. Logo

$$H_k(G,M) \cong \begin{cases} M_G & k = 0 \\ \ker(\sigma - 1)/\mathrm{im}(N) & k \text{ é ímpar} \\ \ker(N)/\mathrm{im}(\sigma - 1) & k \text{ é par} \end{cases}$$

Por exemplo, $H_1(G,M) = M^G/\mathrm{im}(N)$, onde $M^G = \{m \in M : g \cdot m = m, \text{ para todo } g \in G\} = \ker(\sigma - 1)$. Em particular, se G é um grupo cíclico de ordem 2, então $H_1(G,M) = M^\sigma/(1 + \sigma)(M)$.

Exemplo 5. Seja M um G-módulo trivial e seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G. Então

$$H_n(G,M) = H_n(P_\bullet \otimes_G M) = H_n\left((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M\right).$$

Como $P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}-$módulos livres, usando o Teorema 15 temos

$$\begin{aligned} H_n(G,M) &\cong H_n\left((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M\right) \cong \left(H_n(P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M\right) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_{n-1}(P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}), M\right) \\ &\cong H_n(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_{n-1}(G,\mathbb{Z}), M\right). \end{aligned}$$

Em particular se $n = 1$, então

$$\begin{aligned} H_1(G,M) &\cong H_1(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_0(G,\mathbb{Z}),M) = (G/[G,G] \otimes_{\mathbb{Z}} M) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},M) \\ &= G/[G,G] \otimes_{\mathbb{Z}} M. \end{aligned}$$

Agora estudaremos os homomorfismos induzidos nos grupos de homologia pelos homomorfismos entre grupos. Sejam G e G' grupos multiplicativos e sejam M e M' quaisquer G-módulo e G'-módulo respetivamente. Um morfismo $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ está formado por um homomorfismo de grupos $\alpha : G \to G'$ e um homomorfismo de grupos abelianos $f : M \to M'$ tal que para todo $g \in G$ e para todo $m \in M$

$$f(g \cdot m) = \alpha(g) \cdot f(m).$$

Considere agora $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ e $P'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{Z}$ resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ sobre G e G' respetivamente. Dado que existe uma extensão de α para um homomorfismo de anéis $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G'$, então $P'_\bullet$ é um complexo de cadeias de G-módulos e portanto existe um morfismo de complexos de cadeias, único ao menos de homotopia, $\tau_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ compatível com α, isto é, $\varepsilon' \circ \tau_0 = \varepsilon$ e para todo $g \in G$ e para todo $x \in P_n$

$$\tau_n(g \cdot x) = \alpha(g) \cdot \tau_n(x).$$

Tensorizando com M e M', obtemos um morfismo de complexos de cadeias

$$\tau_\bullet \otimes_G f : P_\bullet \otimes_G M \to P'_\bullet \otimes_{G'} M'.$$

Assim para todo $n \geq 0$ temos um homomorfismo entre os $n-$ésimos grupos de homologia:

$$(\alpha, f)_* : H_n(G,M) \longrightarrow H_n(G',M'), \qquad \overline{z_n} \longmapsto \overline{(\tau_n \otimes f)(z_n)}.$$

Se $H \subseteq G$ é um subgrupo de G e M é um G-módulo, o homomorfismo natural $H_n(H,M) \to H_n(G,M)$ induzido pela inclusão $(H,M) \to (G,M)$, é chamado o homomorfismo correstrição, denotado por

$$cor_G^H : H_n(H,M) \to H_n(G,M).$$

Seja $H \subseteq G$ um subgrupo de G e seja E um conjunto de representantes das classes à direita Hg. Para qualquer $g \in E$, seja $\mathbb{Z}(Hg)$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base indexada por elementos na classe à direita Hg. Então $\mathbb{Z}(Hg)$ é um H-módulo usando $h' \cdot \sum a_h h_g = \sum a_h h' h_g$ e portanto $\mathbb{Z}H \cong \mathbb{Z}(Hg)$ (como H-módulos) via o homomorfismo $h \mapsto hg$. Segue-se

$$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} \mathbb{Z}(Hg) \cong \bigoplus_{g \in E} \mathbb{Z}H.$$

Assim, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre com base indexada em E. Agora, se $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G, dado que $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre, então $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre H. Logo para todo $n \geq 0$ e todo $G-$módulo M

$$H_n(G,M) = H_n(P_\bullet \otimes_G M), \qquad H_n(H,M) = H_n(P_\bullet \otimes_H M).$$

Lema 1 (Lema de Shapiro)**.** Seja $H \subseteq G$ subgrupo de G e seja M um H-módulo. Então:

$$H_n(H,M) \cong H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_H M).$$

Demonstração. Seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Usando o isomorfismo $P_\bullet \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_H M) \cong P_\bullet \otimes_H M$ temos $H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_H M) = H_n(P_\bullet \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_H M)) = H_n(P_\bullet \otimes_H M) = H_n(H,M)$. □

Resoluções padrão de $\mathbb{Z}$

Agora construimos dois importantes resoluções livres de $\mathbb{Z}$ sobre qualquer grupo G, considerando $\mathbb{Z}$ um G-módulo trivial.

- Seja $G^{(n)}$ o produto cartesiano de n copias do grupo G. Seja $C_n(G)$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre sobre $G^{(n+1)}$ junto com a ação de G dada por

  $$g \cdot (g_0, g_1, \dots, g_n) := (gg_0, gg_1, \dots, gg_n).$$

  $C_n(G)$ é um $G-$módulo livre com base $(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$, $g_i \in G$, satisfazendo $C_0(G) \cong \mathbb{Z}G$, via o isomorfismo $n_{g_0}(g_0) \mapsto n_{g_0}g_0$. Considere para todo $n \geq 1$ os homomorfismos $\delta_n : C_n(G) \to C_{n-1}(G)$ definidos como sendo

  $$\delta_n(g_0, \dots, g_n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n).$$

  Observe que $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$. O complexo

  $$C_\bullet(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}: \qquad \cdots \to C_n(G) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1}(G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(G) \xrightarrow{\delta_1} C_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

  é uma resolução de $G-$módulos livres chamada resolução padrão de $\mathbb{Z}$ sobre G. Note que $\varepsilon : C_0(G) \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo de aumento, $\varepsilon(n_g(g)) = n_g$.

- Agora vamos introduzir a notação barra: Considere o símbolo

  $$[g_1|g_2|\dots|g_n],$$

  satisfazendo que $[g_1|g_2|\dots|g_n] = 0$, sempre que $g_i = 1$ para algum i entre 1 e n. Considere $B_n(G)$ como o G-módulo livre gerado por todos os símbolos $[g_1|g_2|\dots|g_n]$. Note que $B_0(G)$ é o G-módulo livre com gerador [ ], isomorfo a $\mathbb{Z}G$.

  Para todo n, seja

  $$d_n([g_1|\dots|g_n]) := g_1[g_2|\dots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1|\dots|g_ig_{i+1}|\dots|g_n] + (-1)^n [g_1|,\dots,|g_{n-1}].$$

É fácil ver que $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Portanto o complexo de cadeias de G-módulos

$$B_\bullet(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}: \qquad \cdots \longrightarrow B_n(G) \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(G) \to \cdots \to B_1(G) \xrightarrow{d_1} B_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G chamada resolução barra de G, onde $\varepsilon : B_0(G) \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo de aumento.

Podemos verificar que o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} C_n(G) & \xrightarrow{\theta_n} & B_n(G) \\ (g_0, \ldots, g_n) & \longmapsto & [g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n] \end{array}$$

induz um morfismo de complexos $\theta_\bullet : C_\bullet(G) \to B_\bullet(G)$. Note que $\theta_n(1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1 \ldots g_n) = [g_1|g_2|\cdots|g_n]$. Assim, se M é um G-módulo então

$$H_n(G,M) \cong H_n(C_\bullet(G) \otimes_G M) \cong H_n(B_\bullet(G) \otimes_G M).$$

Fórmula de Künneth para Homologia de grupos

Se G e H são dois grupos, então temos os homomorfismos de anéis:

$$\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}[G \times H], \qquad \sum_{g \in G} n_g g \longmapsto \sum_{g \in G} n_g(g, 1)$$

$$\mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}[G \times H], \qquad \sum_{h \in H} n_h h \longmapsto \sum_{h \in H} n_h(h, 1)$$

que induzem o homomorfismo de anéis: $\mathbb{Z}G \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}[G \times H]$. Dado que os dois anéis tem a $G \times H$ como $\mathbb{Z}$-base, então

$$\mathbb{Z}[G \times H] \cong \mathbb{Z}G \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}H.$$

Assim se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são complexos de cadeias de $\mathbb{Z}G$-módulos e $\mathbb{Z}H$-módulos, respetivamente, então

$$P_\bullet \otimes_\mathbb{Z} Q_\bullet \cong (P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}G) \otimes_\mathbb{Z} (\mathbb{Z}H \otimes_H Q_\bullet) \cong (P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z}[G \times H]).$$

Logo

$$(P_\bullet \otimes_\mathbb{Z} Q_\bullet) \otimes_{G \times H} \mathbb{Z} \cong (P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z}). \tag{3.2}$$

Em particular, se $P_\bullet$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G e $Q_\bullet$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre H, então o complexo $P_\bullet \otimes_\mathbb{Z} Q_\bullet$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $G \times H$ e temos

$$H_n(G \times H) = H_n((P_\bullet \otimes_\mathbb{Z} Q_\bullet) \otimes_{G \times H} \mathbb{Z}) = H_n((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z})).$$

Dado que cada $P_n \otimes_G \mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre segue-se o seguinte resultado.

Proposição 4 (Fórmula de Künneth para Homologia Integral de grupos)**.** Para todos os grupos G e H, existe uma sequência exata que cinde:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(G,\mathbb{Z}) \otimes H_q(H,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H_n(G \times H,\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_{p'+q'=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_{p'}(G,\mathbb{Z}), H_{q'}(H,\mathbb{Z})\right) \longrightarrow 0.$$

O homomorfismo $\cup : H_p(G,\mathbb{Z}) \otimes H_q(H,\mathbb{Z}) \to H_{p+q}(G \times H,\mathbb{Z})$ é chamado produto cap.

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994, Teorema 3.6.3) □

3.3 Terceira homologia de grupos abelianos

Sejam A e B grupos abelianos. Para qualquer inteiro positivo n existe um homomorfismo natural

$$\tau_n : {}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB \to {}_n\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B),$$

onde ${}_nA = \{a \in A : na = 0\}$. Denotamos a imagem do elemento $a \otimes b$, via o homomorfismo τ_n, por $\tau_n(a,b)$. Para qualquer pares de inteiros positivos s e n, tais que $n = sm$, os homomorfismos τ_n e τ_s estão conectados pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & {}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_sB \arrow[dl, "p_m \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes i_m"] & \\ {}_sA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_sB \arrow[dr, "\tau_s"] & & {}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB, \arrow[dl, "\tau_n"] \\ & {}_n\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & {}_sA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes p_m"'] \arrow[dr, "i_m \otimes \mathrm{id}"] & \\ {}_sA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_sB \arrow[dr, "\tau_s"] & & {}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB, \arrow[dl, "\tau_n"] \\ & {}_n\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) & \end{tikzcd}$$

onde $i_m : {}_sA \to {}_nA$ e $p_m : {}_nA \to {}_sA$ são a inclusão e a aplicação induzida pela multiplicação por m respetivamente. A comutatividade desses diagramas expressam a seguinte relação

$$\tau_n(a,b) = \tau_s(ma,b), \quad \text{para } a \in {}_nA \text{ e } b \in {}_sB,$$

e

$$\tau_n(a',b') = \tau_s(a',mb'), \quad \text{para } a' \in {}_sA \text{ e } b' \in {}_nB.$$

Proposição 5. O homomorfismo induzido $\tau : \lim_I({}_nA \otimes {}_nB) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ é um isomorfismo, onde I é o sistema indutivo de objetos ${}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB$, determinado pelos diagramas anteriores percorrendo os valores de n.

Demonstração. Veja-se (BREEN, 1999, Proposition 3.5). □

Sejam $\sigma_0 : A \otimes B \to B \otimes A$, e $\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B,A)$ homomorfismos induzidos pela permutação dos grupos A e B. É conhecido que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} {}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\tau_n"] & {}_nB \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nA \arrow[d, "\tau_n'"] \\ {}_n\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \arrow[r, "-\sigma_1"] & {}_n\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B,A) \end{tikzcd}$$

Tomando o limite sobre o sistema indutivo, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \lim_I({}_nA \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nB) \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\tau"] & \lim_I({}_nB \otimes_{\mathbb{Z}} {}_nA) \arrow[d, "\tau'"] \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \arrow[r, "-\sigma_1"] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B,A). \end{tikzcd}$$

Note que o homomorfismo $\sigma_1 : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B,A)$ é induzido pela involução $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to B \otimes_{\mathbb{Z}} A$, definida por $a \otimes b \mapsto -b \otimes a$, e o homomorfismo $-\sigma_1$ é induzido pela involução $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

Observação 1. Considere Σ_2 como sendo o grupo simétrico de ordem 2. Para qualquer grupo abeliano A, Σ_2 age sobre $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ e $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)$, através dos homomorfismos σ_0 e σ_1. Denote o grupo simétrico Σ_2 por Σ_2^{ε}, quando ele age sobre $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)$ da seguinte maneira

$$(\sigma^{\varepsilon}, x) \mapsto -\sigma_1(x).$$

Seja A um grupo abeliano (aditivo). Definimos o subgrupo de torção de A como sendo $A_{\mathrm{T}} := \{a \in A : \text{ existe } n > 0 \text{ tal que } na = 0\}$. Dizemos que A é um grupo de torção, se $A = A_{\mathrm{T}}$, e dizemos que A é livre de torção se $A_{\mathrm{T}} = 0$. Mostra-se que $(A/(A_{\mathrm{T}}))_{\mathrm{T}} = 0$, logo $A/(A_{\mathrm{T}})$ é livre de torção. O seguinte lema permite reduzir os cálculo do Tor.

Lema 2. Sejam A e B grupos abelianos. Então $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_{\mathrm{T}}, B_{\mathrm{T}})$.

Nos próximos capítulos, precisaremos do seguinte lema referente à terceira homologia de grupos abelianos

Lema 3. Para qualquer grupo abeliano A, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}}^3 A \to H_3(A,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}} \to 0,$$

onde o primeiro homomorfismo é induzido pela multiplicação sobre A e o homomorfismo da direita é obtido pela composição

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Delta_{A*}} H_3(A \times A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A),$$

onde Δ_A é a aplicação diagonal $A \to A \times A$, $a \mapsto (a,a)$.

Demonstração. Veja-se (SUSLIN, 1991, Lema 5.5), (BREEN, 1999, Secção 6). □

3.4 Sequências Espectrais

Uma sequência espectral começando em $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$, é uma família $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos com $r \geq a$, junto com R-homomorfismos $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$, tais que $d^r_{p,q} \circ d^r_{p+r,q-r+1} = 0$, e $E^{r+1}_{p,q} \cong \dfrac{\ker d^r_{p,q}}{\operatorname{im} d^r_{p+r,q-r+1}}$.
Para cada $r \geq a$, a família $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ é chamada a $r-$ésima folha da sequência espectral, e os homomorfismos $d^r_{p,q}$ são chamados diferenciais da sequência espectral. Seja $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ uma sequência espectral começando em 0. A folha zero $(r = 0)$ desta sequência espectral é

$$\begin{tikzcd}
\cdots & E^0_{0,2} \arrow[d, "d^0_{0,2}"] & E^0_{1,2} \arrow[d, "d^0_{1,2}"] & E^0_{2,2} \arrow[d, "d^0_{2,2}"] & \cdots \\
\cdots & E^0_{0,1} \arrow[d, "d^0_{0,1}"] & E^0_{1,1} \arrow[d, "d^0_{1,1}"] & E^0_{2,1} \arrow[d, "d^0_{2,1}"] & \cdots \\
\cdots & E^0_{0,0} & E^0_{1,0} & E^0_{2,0} & \cdots
\end{tikzcd}$$

A primeira folha $(r = 1)$ desta sequência espectral é

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \arrow[l, "d^1_{0,2}"'] E^1_{0,2} & \arrow[l, "d^1_{1,2}"'] E^1_{1,2} & \arrow[l, "d^1_{2,2}"'] E^1_{2,2} & \arrow[l] \cdots \\
\cdots & \arrow[l, "d^1_{0,1}"'] E^1_{0,1} & \arrow[l, "d^1_{1,1}"'] E^1_{1,1} & \arrow[l, "d^1_{2,1}"'] E^1_{2,1} & \arrow[l] \cdots \\
\cdots & \arrow[l, "d^1_{0,0}"'] E^1_{0,0} & \arrow[l, "d^1_{1,0}"'] E^1_{1,0} & \arrow[l, "d^1_{2,0}"'] E^1_{2,0} & \arrow[l] \cdots
\end{tikzcd}$$

e a segunda folha $(r = 2)$ desta sequência espectral ê

$$\begin{tikzcd}
\cdots & E^2_{0,3} & E^2_{1,3} & E^2_{2,3} & E^2_{3,3} & E^2_{4,3} & \cdots \\
\cdots & E^2_{0,2} & E^2_{1,2} & E^2_{2,2} \arrow[ull, "d^2_{2,2}"'] & E^2_{3,2} \arrow[ull, "d^2_{3,2}"'] & E^2_{4,2} \arrow[ull, "d^2_{4,2}"'] & \cdots \\
\cdots & E^2_{0,1} & E^2_{1,1} & E^2_{2,1} \arrow[ull, "d^2_{2,1}"'] & E^2_{3,1} \arrow[ull, "d^2_{3,1}"'] & E^2_{4,1} \arrow[ull, "d^2_{4,1}"'] & \cdots \\
\cdots & E^2_{0,0} & E^2_{1,0} & E^2_{2,0} \arrow[ull, "d^2_{2,0}"'] & E^2_{3,0} \arrow[ull, "d^2_{3,0}"'] & E^2_{4,0} \arrow[ull, "d^2_{4,0}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Uma sequência espectral é dita limitada se para cada $n \in \mathbb{Z}$ existem somente um número finito de termos $E^r_{p,q}$ diferentes de zero com $p + q = n$. Nesse caso, então para cada p e q existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E^r_{p,q} \cong E^{r+1}_{p,q}$ para todo $r \geq r_0$. Denotamos o termo estável por $E^\infty_{p,q}$ e usamos $E^r_{p,q}$ para denotar a sequência espectral.

Seja $H_\bullet = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos. Dizemos que uma sequência espectral limitada $E^r_{p,q}$ (começando em $a \geq 0$) converge a $H_\bullet$ se para cada $n \in \mathbb{Z}$, existem $s,t \in \mathbb{Z}$ tais que H_n tem uma filtração da forma

$$0 = F_sH_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}H_n \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq \cdots \subseteq F_tH_n = H_n,$$

tal que para todo p,q,

$$E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_pH_{p+q}}{F_{p-1}H_{p+q}}.$$

No caso afirmativo, denotaremos a convergência desta sequência espectral por

$$E^a_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}.$$

Uma sequência espectral tal que $E^r_{p,q} = 0$ para todo $p < 0$ ou $q < 0$ é chamada a sequência espectral do primeiro quadrante. Logo para cada $n \geq 0$, os termos $E^r_{p,q}$ diferentes de zero tais que $p+q = n$ são ao máximo $n+1$. Portanto esta sequência espectral é limitada. Para $p,q \in \mathbb{Z}$ fixos, se $r_0 = \max\{p,q+1\}+1$, então $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$.

Exemplo 6. Seja $E^a_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}$ uma sequência espectral no primeiro quadrante (começando em a). Então para cada n, H_n tem uma filtração da forma

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}H_n \subseteq F_nH_n = H_n,$$

tal que $E^\infty_{p,n-p} = \dfrac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n}$. Note que $E^\infty_{0,n} \cong F_0H_n$ é um quociente de $E^a_{0,n}$ e $E^\infty_{n,0} \cong \dfrac{H_n}{F_{n-1}H_n}$ é um submódulo de $E^a_{n,0}$. Os homomorfismos $E^a_{0,n} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,n}$ e $E^\infty_{n,0} \hookrightarrow E^a_{n,0}$ são chamados os homomorfismos bordos.

Sejam $E^r_{p,q}$ e $\mathscr{E}^r_{p,q}$ sequências espectrais com diferenciais $d^r_{p,q}$ e $\overline{d}^r_{p,q}$ respetivamente. Um morfismo entre sequências espectrais é uma família de aplicações $\{f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ tais que

i) para todo $p,q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = \overline{d}^r_{p,q} \circ f^r_{p,q}$.

ii) para todo $p,q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f^{r+1}_{p,q}$ é dada por

$$\begin{aligned} f^{r+1}_{p,q} : E^{r+1}_{p,q} &\longrightarrow \mathscr{E}^{r+1}_{p,q}. \\ x + \operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} &\longmapsto f^r_{p,q}(x) + \operatorname{Im} \overline{d}^r_{p+r,q-r+1} \end{aligned}$$

Nas sequências espectrais limitadas com $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$, definimos

$$Z^\infty_{p,q} = Z^{r_0}_{p,q} := \operatorname{Ker} d^{r_0}_{p,q}, \qquad B^\infty_{p,q} = B^{r_0}_{p,q} := \operatorname{Im} d^{r_0}_{p+r_0,q-r_0+1}.$$

Seja $\{f_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}$ um morfismo de sequências espectrais limitadas. Suponha que para algum $r_0 \in \mathbb{N}$ fixo, $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}$ é um isomorfismo para todo $p,q \in \mathbb{Z}$. Então para $s \geq r_0$

temos que $f^s_{p,q} : E^s_{p,q} \to \mathscr{E}^s_{p,q}$ é um isomorfismo. Definimos para todo $p,q \in \mathbb{Z}$ o homomorfismo $f^\infty_{p,q} : E^\infty_{p,q} \to \mathscr{E}^\infty_{p,q}$ como sendo $f^\infty_{p,q}\left(x + B^\infty_{p,q}\right) = f^{r_0}_{p,q}(x) + \mathscr{B}^\infty_{p,q}$ para cada $x \in Z^\infty_{p,q}$, onde $\mathscr{E}^\infty_{p,q} = \dfrac{\mathscr{Z}^\infty_{p,q}}{\mathscr{B}^\infty_{p,q}}$. Note que $f^\infty_{p,q}$ é um isomorfismo.

Sejam $E^a_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}$ e $\mathscr{E}^a_{p,q} \Longrightarrow H'_{p+q}$ sequências espectrais limitadas. Dizemos que uma família de homomorfismos $h_\bullet : H_\bullet \to H'_\bullet$ é compatível com um morfismo de sequências espectrais $\{f_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$, se

i) para todo $p \in \mathbb{Z} : h_p(F_pH_n) \subseteq F'_pH'_n$,

ii) para todo $p,n \in \mathbb{Z}$, se $E^\infty_{p,n-p} \overset{\beta_{p,n-p}}{\cong} \dfrac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n}$ e $\mathscr{E}^\infty_{p,n-p} \overset{\beta'_{p,n-p}}{\cong} \dfrac{F'_pH'_n}{F'_{p-1}H'_n}$, então temos um morfismo bem definido $\overline{h}_p : \dfrac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n} \to \dfrac{F'_pH'_n}{F'_{p-1}H'_n}$ tal que

$$f^\infty_{p,n-p} \circ \beta_{p,n-p} = \beta'_{p,n-p} \circ \overline{h}_p$$

No caso afirmativo, escrevemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} E^a_{p,q} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "f^a_{p+q}"] & H_{p+q} \arrow[d, "h_{p+q}"] \\ \mathscr{E}^a_{p,q} \arrow[r, Rightarrow] & H'_{p+q} \end{tikzcd}$$

Teorema 16 (Teorema da comparação de Sequências Espectrais)**.** Sejam as sequências espectrais do primeiro quadrante $E^a_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ e $\mathscr{E}^a_{p,q} \Rightarrow H'_{p+q}$. Suponha dada uma família $h_\bullet : H_\bullet \to H'_\bullet$ compatível com um morfismo de sequências espectrais $\{f_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$. Se $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}$ é um isomorfismo para $r \in \mathbb{N}$ fixo e para todo $p,q \in \mathbb{Z}$, então h_n é um isomorfismo, para todo n.

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994) □

Teorema 17 (Sequência Espectral de Lyndon/Hochschild-Serre)**.** Para todo subgrupo normal H do grupo G e todo G-módulo M, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante

$$E^2_{p,q} = H_p\left(G/H, H_q(H,M)\right) \Longrightarrow H_{p+q}(G,M).$$

Esta sequência espectral implica a sequência exata

$$H_2(G,M) \longrightarrow H_2(G/H, M_H) \longrightarrow H_1(G,M)_{G/H} \longrightarrow H_1(G,M) \longrightarrow H_1(G/H, M_H) \longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994) □

Exemplo 7. Seja H um subgrupo normal de G tal que a seguinte sequência exata de grupos cinde

$$1 \to H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G/H \to 1,$$

onde $\alpha : G/H \to G$ é uma seção de g. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & G/H \arrow[r, "Id_{G/H}"] \arrow[d, "\alpha"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "Id_{G/H}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "f"] & G \arrow[r, "g"] & G/H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

com linhas exatas. Pelo Teorema 17 temos um morfismo de sequências espectrais de Lyndon/Hochschild-Serre

$$\begin{tikzcd} E^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(1,\mathbb{Z})) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "f^2_{p,q}"] & H_{p+q}(G/H,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\alpha_{p+q}"] \\ \mathscr{E}^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(H,\mathbb{Z})) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}(G,\mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Observe que $E^2_{p,0} = H_p(G/H,\mathbb{Z}) \simeq \mathscr{E}^2_{p,0}$. A partir do morfismo de sequências espectrais, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} E^2_{p,0} \arrow[r, "d^2_{p,0}"] \arrow[d, "\simeq"] & E^2_{p-2,1} = 0 \arrow[d, "0"] \\ \mathscr{E}^2_{p,0} \arrow[r, "d^2_{p,0}"] & \mathscr{E}^2_{p-2,1}. \end{tikzcd}$$

Isso implicaria que $d^r_{p,0} : \mathscr{E}^2_{p,0} \to \mathscr{E}^2_{p-r,r}$ é trivial para todo $r \geq 2$.

Enunciamos a seguir um dos importantes teoremas que usaremos para a presente tese, mais precisamente, para o cálculo de certos grupos de homologia de uma extensão central.

Teorema 18 (Sequência Espectral de Leray-Serre)**.** Seja G um grupo abeliano. Se $F \hookrightarrow E \to B$ é uma fibração tal que B e F são conexos por caminhos e a ação de $\pi_1(B)$ sobre $H_*(F,G)$ é trivial (por exemplo, se B for simplesmente conexo), então existe uma sequência espectral do primeiro quadrante

$$E^2_{p,q} = H_p\left(B; H_q(F;G)\right) \Longrightarrow H_{p+q}(E;G).$$

Demonstração. Veja-se (MCCLEARY, 2001, Teorema 5.1) □

Observe que pelo Teorema dos Coeficientes Universais, os termos da sequência espectral no Teorema 18 são expressados por

$$E^2_{p,q} \cong (H_p(B;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(F;\mathbb{Z})) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(B,\mathbb{Z}), H_q(F;\mathbb{Z})). \tag{3.4}$$

Corolário 1. Seja $p : E \to B$ uma fibração de Serre com fibra F, onde B é conexo por caminhos e simplesmente conexo. Então existe uma sequência espectral do primeiro quadrante

$$E^2_{p,q} = H_p\left(B; H_q(F;\mathbb{Z})\right) \Longrightarrow H_{p+q}(E;\mathbb{Z}).$$

CAPÍTULO

4

EXTENSÕES CENTRAIS

Nesta capítulo começamos estudar os objetos principais deste projeto de pesquisa: homologias das extensões centrais de grupos.

4.1 Extensão central

Sejam A e Q grupos. Uma extensão de A por Q é um grupo G tendo um subgrupo normal $N \simeq A$ com $G/N \simeq Q$. Em outras palavras uma extensão de A por Q é uma sequência exata curta de grupos

$$A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q. \tag{4.1}$$

Sem perda de generalidade assumimos que $A \subseteq G$ e a mapa $A \to G$ é a inclusão de A em G. Logo Q pode-se identificar com o quociente de G por A: $Q = G/A$. Dizemos que a extensão é central se $A \subseteq Z(G)$.

Dadas duas extensões $A \rightarrowtail G \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$ e $B \rightarrowtail G' \overset{\alpha'}{\twoheadrightarrow} Q$, um homomorfismo entre essas extensões é um homomorfismo de grupos $f : G \to G'$ tal que $\alpha' \circ f = \alpha$, equivalentemente se o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r] & G' \arrow[r, "\alpha'"] & Q \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

A extensão $A \rightarrowtail G \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} Q$ é dita extensão central universal se para qualquer outra extensão central $B \rightarrowtail G' \overset{\alpha'}{\twoheadrightarrow} Q$, existe um único homomorfismo de grupos $f : G \to G'$ sobre Q.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma extensão central universal de Q é que Q seja um grupo perfeito (WEIBEL, 1994). Note que se Q é um grupo perfeito, então suas extensões centrais são classificadas por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(Q,\mathbb{Z}),A)$.

Teorema 19. Uma extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é universal se, e somente se, $H_1(G,\mathbb{Z}) = H_2(G,\mathbb{Z}) = 0$.

Demonstração. Veja-se (ZABRODSKY, 1976, Corolário 2). □

Exemplo 8. O grupo simétrico em três elementos S_3 e o grupo cíclico de ordem seis, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ são extensões dos grupos cíclicos $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, por $Q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A extensão $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é central, embora a extensão $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \hookrightarrow S_3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ não é central.

Fazendo uso de ferramentas da teoria de homotopias e os espaços de Eilenberg-MacLane, temos o seguinte resultado.

Proposição 6. Para todo extensão $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, temos a seguinte fibração

$$K(A,1) \hookrightarrow K(G,1) \to K(Q,1). \tag{4.2}$$

Demonstração. Veja-se (ROSENBERG, 1995, Exercício 5.1.28). □

Observe que para um grupo G, temos que $BG = K(G,1)$.

Teorema 20. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços conexos tais que a fibra Ff é um espaço Eilenberg-MacLane $K(A,n)$ para algum grupo abeliano A e algum $n \geq 1$. Então existe uma fibração

$$X \hookrightarrow Y \to K(A,n+1)$$

Demonstração. Veja-se (MAY; PONTO, 2012, Lema 3.4.2). □

Em particular, aplicando o corolário anterior à fibração (4.2), obtemos

Corolário 2. Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão tal que A é um grupo abeliano. Então temos a fibração

$$K(G,1) \hookrightarrow K(Q,1) \to K(A,2) \tag{4.3}$$

Uma extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é dita perfeita, se G é um grupo perfeito, isto é, $G = [G,G]$.

Proposição 7. Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central com Q um grupo perfeito. Então

$$BA \to BG^+ \to BQ^+$$

é uma fibração. (A $+$-construção é tomada respeito ao subgrupo perfeito G e Q.)

Demonstração. Veja-se (WOJTKOWIAK, 1985, Proposição 1). □

A partir de agora, assumimos que todas as extensões são centrais.

Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central. Pela fibracao anterior (4.3), e a fibração associada ao espaço de caminhos de $K(A,2)$ (a fibração do espaço de laços 2.1), temos o seguinte diagrama de fibrações

$$\begin{tikzcd}
K(A,1)=\Omega K(A,2) \arrow[r] \arrow[d] & PK(A,2) \arrow[r] \arrow[d] & K(A,2) \arrow[d] \\
K(G,1) \arrow[r] & K(Q,1) \arrow[r] & K(A,2).
\end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 18, existem duas sequências espectrais do primeiro quadrante convergentes

$$\begin{tikzcd}
E^2_{p,q} = H_p\left(K(A,2), H_q(\Omega K(A,2),\mathbb{Z})\right) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H_{p+q}(PK(A,2),\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
\mathscr{E}^2_{p,q} = H_p\left(K(A,2), H_q(K(G,1),\mathbb{Z})\right) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}(K(Q,1),\mathbb{Z})
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Estudando a sequência espectral, pela observação da equação (3.4), temos que

$$\mathscr{E}^2_{p,q} = \left(H_p(K(A,2),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(G,\mathbb{Z})\right) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(K(A,2),\mathbb{Z}), H_q(G,\mathbb{Z})).$$

A segunda folha $\mathscr{E}^2_{p,q}$ é da forma

$$\begin{tikzcd}
H_2(G,\mathbb{Z}) & 0 & A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}) & * & * \\
H_1(G,\mathbb{Z}) & 0 & A \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z}) \arrow[ull, "\varphi=\partial^2_{2,1}"'] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, H_1(G,\mathbb{Z})) & * \\
\mathbb{Z} & 0 & A \arrow[ull, "\partial^2_{2,0}"'] & 0 & H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) \arrow[ull, "\tau=\partial^2_{4,0}"']
\end{tikzcd}$$

Estudando as filtrações de $H_1(Q,\mathbb{Z}) = H_1(K(Q,1),\mathbb{Z})$ e $H_2(Q,\mathbb{Z}) = H_2(K(Q,1),\mathbb{Z})$, conseguimos a seguinte sequência exata

$$H_2(G,\mathbb{Z}) \to H_2(Q,\mathbb{Z}) \to A \to H_1(G,\mathbb{Z}) \to H_1(Q,\mathbb{Z}) \to 0 \tag{4.5}$$

Note que o homomorfismo

$$\varphi = \partial^2_{2,1} : A \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z}) \to H_2(G,\mathbb{Z}),$$

coincide com a restrição do homomorfismo

$$\rho_* : H_2(A \times G,\mathbb{Z}) \to H_2(G,\mathbb{Z}),$$

induzido pelo produto usual $\rho : A \times G \to G, (a,g) \mapsto ag$.

Eckmann e Hilton mostraram que no caso de uma extensão central, a sequência (4.5) pode ser estendida pela esquerda.

Teorema 21. Para qualquer extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, existe um homomorfismo natural

$$\tau : H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z}),$$

e uma sequência exata natural

$$H_4(Q,\mathbb{Z}) \to \ker(\tau) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, H_1(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$$

$$\to \mathrm{coker}(\tau) \to H_2(G,\mathbb{Z}) \to H_2(Q,\mathbb{Z}) \to A \to H_1(G,\mathbb{Z}) \to H_1(Q,\mathbb{Z}) \to 0$$

Demonstração. Veja-se (ECKMANN; HILTON, 1971, Teorema 1.1). A demonstração segue do estudo das sequências espectrais (4.4). □

Corolário 3. Para qualquer extensão central perfeita $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, existe uma sequência exata natural

$$H_4(Q,\mathbb{Z}) \to H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Demonstração. Dado que a extensão central é perfeita, então $H_1(G,\mathbb{Z}) = 0$, logo o resultado é obtido pela aplicação desse fato no teorema anterior. □

Na sequência exata do corolário anterior, ressalta o grupo $H_4(K(A,2),\mathbb{Z})$, o qual será estudado nos próximos capítulos. Note que se a extensão central é perfeita, então temos a sequência exata

$$0 \to H_2(G,\mathbb{Z}) \to H_2(Q,\mathbb{Z}) \to A \to 0. \tag{4.6}$$

Além disso, observe que o homomorfismo

$$H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \tag{4.7}$$

é sobrejetivo.

4.2 Terceira homologia de extensões centrais

Seja A um subgrupo central de G, tal que $A \subseteq G' = [G,G]$, isto é, o homomorfismo induzido no grupos de homologia

$$H_1(A,\mathbb{Z}) \to H_1(G,\mathbb{Z})$$

é trivial. Assim, dado n inteiro não nulo, e usando o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{\mu} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \times G & \xrightarrow{\rho} & G, \end{array} \tag{4.8}$$

onde μ e ρ são os produtos usuais $\mu(a,b) = ab$, $\rho(a,g) = ag$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(A,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(A,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "=0"] & H_n(A \times A,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(A,\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H_{n-1}(A,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(A \times G,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(G,\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

O diagrama anterior mostra que a seguinte composição na parte superior é trivial

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge_{\mathbb{Z}}^n A \arrow[r] & H_n(A,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(G,\mathbb{Z}) \\
\bigwedge_{\mathbb{Z}}^{n-1} A \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge_{\mathbb{Z}}^1 A \arrow[r] \arrow[u, two heads] & H_{n-1}(A,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(A,\mathbb{Z}) \arrow[r, "=0"] \arrow[u] & H_{n-1}(A,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dado que

$$H_n(A,\mathbb{Z}) / \bigwedge_{\mathbb{Z}}^n A$$

é um grupo de torção (BROWN, 1994, Teorema 6.4, Cap. V), a imagem de $H_n(A,\mathbb{Z})$ em $H_n(G,\mathbb{Z})$ também é um grupo de torção. Em particular, os homomorfismos induzidos nos grupos de homologia

$$H_1(A,\mathbb{Z}) \to H_1(G,\mathbb{Z}) \quad e \quad H_2(A,\mathbb{Z}) \to H_2(G,\mathbb{Z})$$

são triviais. Além disso, se A é livre de torção, então $H_n(A,\mathbb{Z}) \to H_n(G,\mathbb{Z})$ é trivial para todo $n \geq 1$.

Proposição 8. Para qualquer extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, e para todo $n \geq 2$, temos

$$\operatorname{im}(H_2(A,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{n-2}(G,\mathbb{Z}) \to H_n(G,\mathbb{Z})) \subseteq \operatorname{im}(H_1(A,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{n-1}(G,\mathbb{Z}) \to H_n(G,\mathbb{Z}).)$$

Demonstração. Veja-se (STAMMBACH, 1973, Proposição 4.4, Cap V). □

No caso do terceiro nível de homologia temos o seguinte resultado.

Teorema 22 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020b))**.** Seja A um subgrupo central de G, tal que $A \subseteq G'$. Então a imagem do homomorfismo natural

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z}) / \rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$$

é um grupo de 2-torção.

Demonstração. Segundo a Lema 3, a seguinte sequência é exata

$$0 \to \bigwedge_{\mathbb{Z}}^3 A \to H_3(A,\mathbb{Z}) \to \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2} \to 0,$$

lembrando que $\Sigma_2 = \{\mathrm{id}, -\sigma\}$. Usando o diagrama (4.8), obtemos via restrição, o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_3(A\times A,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d] & H_3(A,\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
\widetilde{H}_3(A\times G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho_*"] & H_3(G,\mathbb{Z}),
\end{tikzcd}$$

onde

$$\widetilde{H}_3(A\times A,\mathbb{Z}) := \ker(H_3(A\times A,\mathbb{Z}) \overset{(p_{1*},p_{2*})}{\longrightarrow} H_3(A,\mathbb{Z})\oplus H_3(A,\mathbb{Z})) \subset H_3(A\times A,\mathbb{Z}),$$

$$\tilde{H}_3(A\times G,\mathbb{Z}) := \ker(H_3(A\times G,\mathbb{Z}) \overset{(p_{1*},p_{2*})}{\longrightarrow} H_3(A,\mathbb{Z})\oplus H_3(G,\mathbb{Z})) \subset H_3(A\times G,\mathbb{Z}).$$

Como foi visto no começo desta secção, a condição $A \subseteq G'$ implica que a composta

$$\textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}^3 A \to H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})$$

é trivial. Logo usando a formula de Künneth (veja-se a Proposição 4) sobre $\widetilde{H}_3(A\times A,\mathbb{Z})$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) \arrow[r, "\bar{\mu}_*"] \arrow[ddd, bend left] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2} \\
\tilde{H}_3(A\times A)/\bigoplus_{i=1}^2 H_i(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_{3-i}(A,\mathbb{Z}) \arrow[u, "\overset{\alpha}{\simeq}"] \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{inc}}_*"] & H_3(A,\mathbb{Z})/\bigwedge_{\mathbb{Z}}^3 A \arrow[u, "\overset{\beta}{\simeq}"'] \arrow[d, "\mathrm{inc}_*"] \\
\tilde{H}_3(A\times G)/\bigoplus_{i=1}^2 H_i(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_{3-i}(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, "\simeq"] & H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A\otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \\
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,H_1(G,\mathbb{Z})). &
\end{tikzcd}$$

Pela Proposição 8 temos

$$\mathrm{im}\,(H_2(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})) \subseteq \mathrm{im}\,(H_1(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z}))\,.$$

Dado que o homomorfismo

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(A,\mathbb{Z}),A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,H_1(G,\mathbb{Z}))$$

é trivial, temos que $\rho_*\circ\widetilde{\mathrm{inc}}_*\circ\alpha^{-1}$ também é trivial. Isto prova que a composta $\mathrm{inc}_*\circ\beta^{-1}\circ\bar{\mu}_*$ também é trivial. Segue-se que a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ no grupo $H_3(G,\mathbb{Z})$ coincide com a imagem de

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2}/\bar{\mu}_*\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A). \tag{4.9}$$

Observe que o homomorfismo

$$\bar{\mu}_* : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2}$$

é induzido pela composição

$$A \times A \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\Delta_A} A \times A,$$

isto é, $\bar{\mu}_* = (\Delta_A \circ \mu)_*$.

Considere o homomorfismo de extensões

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_1"] \arrow[d] & A \times A \arrow[r, two heads, "p_2"] \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[d] \\ A \arrow[r, tail, "="] & A \arrow[r, two heads] & \{1\}, \end{tikzcd}$$

onde temos a inclusão $i_1(a) = (a,1)$, a projeção $p_2(a,b) = b$, e o produto usual $\mu(a,b) = ab$.

Lembrando o que foi feito no início deste capítulo, temos o morfismo

$$\begin{tikzcd} K(A,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(A \times A,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(A,1) \arrow[d] \\ K(A,1) \arrow[r] & K(A,1) \arrow[r] & K(\{1\},1) \end{tikzcd}$$

Usando o Teorema 20, temos outro morfismo de fibrações

$$\begin{tikzcd} K(A \times A,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(A,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(A,2) \arrow[d] \\ K(A,1) \arrow[r] & K(\{1\},1) \arrow[r] & K(A,2). \end{tikzcd}$$

Assim, obtemos um morfismo das sequências espectrais de Leray/Serre (Teorema 18)

$$\begin{tikzcd} E^2_{p,q} = H_p\left(K(A,2), H_q(K(A \times A,1),\mathbb{Z})\right) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H_{p+q}(K(A,1),\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ \mathscr{E}^2_{p,q} = H_p\left(K(A,2), H_q(K(A,1),\mathbb{Z})\right) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}(K(\{1\},1),\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Logo a segunda folha $\mathscr{E}^2_{p,q}$ tem a forma seguinte

$$\begin{tikzcd} H_2(A,\mathbb{Z}) & 0 & * & * & * \\ H_1(A,\mathbb{Z}) & 0 & A \otimes_A A \arrow[llu] & * & * \\ \mathbb{Z} & 0 & A \arrow[llu] & 0 & H_4(K(A,2),\mathbb{Z}). \arrow[llu, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Analisando esta folha obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to \ker(\Psi) \to H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A,\mathbb{Z}) \to 0, \tag{4.10}$$

onde

$$\ker(\Psi) \simeq H_3(A,\mathbb{Z}) / \rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(A,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)).$$

Claramente

$$\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(A,\mathbb{Z})) \subseteq \bigwedge_{\mathbb{Z}}^{3} A \subseteq H_3(A,\mathbb{Z}),$$

logo

$$\ker(\Psi) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2}/(\Delta_A \circ \mu)_*(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)).$$

O que implica que $\ker(\Psi)$ é um grupo de 2-torção. □

Observação 2. Se A é um subgrupo central do grupo G, então repetindo os argumentos feitos na demonstração anterior, pode-se mostrar que a imagem do morfismo natural

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(\widetilde{H}_3(A \times G,\mathbb{Z}))$$

é um grupo de 2-torção.

Corolário 4. Se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central universal, então a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ no grupo $H_3(G,\mathbb{Z})$ é um grupo de 2-torção.

Demonstração. Se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é uma extensão central universal, então G é perfeito, e $H_2(G,\mathbb{Z}) = 0$. Isto implica que

$$A \subseteq G' \quad \text{e} \quad A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}) = 0.$$

Agora pelo teorema anterior a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ no grupo $H_3(G,\mathbb{Z})$ é um grupo de 2-torção. □

CAPÍTULO

5

O FUNTOR QUADRÁTICO DE WHITEHEAD

Neste capítulo mostraremos o resultado principal da tese.

5.1 O funtor quadrático Γ

Uma aplicação $\theta : A \to B$ entre dois grupos abeianos é dita quadrática se

(1) $\theta(-a) = \theta(a)$, para todo $a \in A$

(2) A aplicação $A \times A \to B$, $(a,b) \mapsto \theta(a+b) - \theta(a) - \theta(b)$ é bilinear.

Exemplo 9. Considere as aplicações $\phi : A \to A/2$, e $\psi : A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ definidas por

$$\phi(a) = \overline{a}, \qquad \psi(a) = a \otimes a$$

Note que

$$\phi(-a) = \overline{-a} = \overline{a} = \phi(a), \qquad \psi(-a) = (-a) \otimes (-a) = a \otimes a = \psi(a)$$

Por outro lado, observe que

$$\Phi(a,b) := \phi(a+b) - \phi(a) - \phi(b) = \overline{a+b} - \overline{a} - \overline{b} = 0$$

$$\Psi(a,b) := \psi(a+b) - \psi(a) - \psi(b) = (a+b) \otimes (a+b) - a \otimes a - b \otimes b = a \otimes b + b \otimes a$$

Agora é fácil verificar que Φ e Ψ são bilineares. Segue-se que as aplicações ϕ e ψ são aplicações quadráticas.

Para qualquer grupo abeliano A, existe uma propriedade universal que define um grupo $\Gamma(A)$ e uma aplicação quadrática que fatora toda aplicação quadrática $\theta : A \to B$ para qualquer grupo B.

Proposição 9 (Propriedade Universal de $\Gamma(A)$)**.** Para qualquer grupo abeliano A, existe um grupo abeliano $\Gamma(A)$ e uma aplicação quadrática

$$\gamma : A \to \Gamma(A)$$

tal que para qualquer aplicação quadrática $\theta : A \to B$, existe um único homomorfismo de grupos $\theta' : \Gamma(A) \to B$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\theta"'] & \Gamma(A) \arrow[d, dashed, "\theta'"] \\ & B \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

isto é, $\theta' \circ \gamma = \theta$.

Demonstração. Considere $\mathscr{A}$ o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos $\omega(a)$, $a \in A$. Defina $\Gamma(A) := \mathscr{A}/\mathscr{R}$, onde $\mathscr{R}$ é gerado pelos seguintes elementos

(1) $\omega(a) - \omega(-a)$,

(2) $\omega(a+b+c) - \omega(a+b) - \omega(a+c) - \omega(b+c) + \omega(a) + \omega(b) + \omega(c)$.

Defina a aplicação $\gamma : A \to \Gamma(A)$, dada por $\gamma(a) = \overline{\omega(a)}$. Note que

- $\gamma(-a) = \overline{\omega(-a)} = \overline{\omega(a)} = \gamma(a)$, para todo $a \in A$.
- Considere a aplicação $f : A \times A \to B$, $f(a,b) = \gamma(a+b) - \gamma(a) - \gamma(b) = \overline{\omega(a+b) - \omega(a) - \omega(b)}$.

  Mostraremos que f é bilinear. De fato, sejam $a, a', b, b' \in A$ então

  (i) $f(a+a',b) = \overline{\omega(a+a'+b) - \omega(a+a') - \omega(b)}$

  $$\begin{aligned} f(a+a',b) &= \overline{\omega(a+a') + \omega(a+b) + \omega(a'+b) - \omega(a) - \omega(a') - \omega(b) - \omega(a+a')\omega(b)} \\ f(a+a',b) &= \overline{\omega(a+b) - \omega(a) - \omega(b) + \omega(a'+b) - \omega(a') - \omega(b)} \\ f(a+a',b) &= \overline{\omega(a+b) - \omega(a) - \omega(b)} + \overline{\omega(a'+b) - \omega(a') - \omega(b)} = f(a,b) + f(a',b) \end{aligned}$$

  (ii) $f(a,b+b') = \overline{\omega(a+b+b') - \omega(a) - \omega(b+b')}$

  $$\begin{aligned} f(a,b+b') &= \overline{\omega(a+b) + \omega(b+b') + \omega(a+b') - \omega(a) - \omega(b) - \omega(b') - \omega(a) - \omega(b+b')} \\ f(a,b+b') &= \overline{\omega(a+b) - \omega(a) - \omega(b) + \omega(a+b') - \omega(a) - \omega(b')} \\ f(a,b+b') &= \overline{\omega(a+b) - \omega(a) - \omega(b)} + \overline{\omega(a+b') - \omega(a) - \omega(b')} = f(a,b) + f(a,b') \end{aligned}$$

  Logo a aplicação $f : A \times A \to B$ é bilinear.

Segue-se que a aplicação $\gamma : A \to \Gamma(A)$ é quadrática. Dada $\theta : A \to B$ uma aplicação quadrática qualquer, defina $\theta' : \Gamma(A) \to B$, $\theta'(\overline{\omega(a)}) = \theta(a)$. Note que $\theta'(\overline{\omega(-a)}) = \theta(-a) = \theta(a) = \theta'(\overline{\omega(a)})$. Além disso

$$\begin{aligned} \theta'(\overline{\omega(a+b+c)}) &= \theta(a+b+c) = \theta(a+b) + \theta(a+c) + \theta(b+c) - \theta(a) - \theta(b) - \theta(c) \\ \theta'(\overline{\omega(a+b+c)}) &= \theta'(\overline{\omega(a+b)}) + \theta'(\overline{\omega(a+c)}) + \theta'(\overline{\omega(b+c)}) - \theta'(\overline{\omega(a)}) - \theta'(\overline{\omega(b)}) - \theta'(\overline{\omega(c)}) \\ \theta'(\overline{\omega(a+b+c)}) &= \theta'(\overline{\omega(a+b)} + \overline{\omega(a+c)} + \overline{\omega(b+c)} - \overline{\omega(a)} - \overline{\omega(b)} - \overline{\omega(c)}) \\ \theta'(\overline{\omega(a+b+c)}) &= \theta'\left(\overline{\omega(a+b) + \omega(a+c) + \omega(b+c) - \omega(a) - \omega(b) - \omega(c)}\right) \end{aligned}$$

Da forma na qual foi definido, θ' é um homomorfismo de grupos, tal que $\theta' \circ \gamma = \omega$. É fácil verificar que θ' é única. $\square$

Aplicando a proposição anterior ao Exemplo 9, obtemos dois homomorfismos canónicos

$$\Phi : \Gamma(A) \to A/2, \quad \Psi : \Gamma(A) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

definidos por $\Phi(\gamma(a)) = \overline{a}$, $\Psi(\gamma(a)) = a \otimes a$. Note que Φ é sobrejetiva, e $\operatorname{coker}(\Psi) = \bigwedge_{\mathbb{Z}}^2 A \cong H_2(A, \mathbb{Z})$, obtendo assim a sequência exata

$$\Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A, \mathbb{Z}) \to 0. \tag{5.2}$$

A aplicação bilinear

$$[\,,\,] : A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \Gamma(A), \quad [a,b] := \gamma(a+b) - \gamma(a) - \gamma(b),$$

satisfaz nas seguintes propriedades:

- $[b,a] = \gamma(b+a) - \gamma(b) - \gamma(a) = \gamma(a+b) - \gamma(a) - \gamma(b) = [a,b]$,
- $[a+a',b] = \gamma(a+a'+b) - \gamma(a+a') - \gamma(b)$
$$\begin{aligned} &= \gamma(a+b) - \gamma(a) - \gamma(b) + \gamma(a'+b) - \gamma(a') - \gamma(b) \\ &= [a,b] + [a',b] \end{aligned}$$
- $\Phi \circ [\,,\,](a,b) = \Phi[a,b] = \overline{a+b} - \overline{a} - \overline{b} = 0$
- $\Psi \circ [\,,\,](a,b) = \Psi[a,b] = (a+b) \otimes (a+b) - a \otimes a - b \otimes b = a \otimes b + b \otimes a$
- $[a,b] = [a+0,b] = [a,b] + [0,b] \Longrightarrow [0,b] = 0 \Longrightarrow \gamma(0) = 0.$
- $\gamma(a) = \gamma(-a) = \gamma(a-a-a) = \gamma(0) + \gamma(0) + \gamma(-2a) - 3\gamma(a)$
$$2\gamma(a) = \gamma(2a) - 2\gamma(a) = [a,a].$$

Temos assim a composição

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{[\,,\,]} \Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A, \qquad a \otimes b \mapsto a \otimes b + b \otimes a.$$

Além disso, a composição

$$\Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{[\,,\,]} \Gamma(A),$$

coincide com o produto por 2. Isto mostra a exatidão da seguinte sequência

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{[\,,\,]} \Gamma(A) \xrightarrow{\Phi} A/2 \to 0 \tag{5.3}$$

Por outro lado, a composição

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{[\,,]} \Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

é tal que $a \otimes b \mapsto a \otimes b + b \otimes a$. A partir do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker([\,,]) \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_{\mathbb{Z}} A \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{im}([\,,]) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\Psi) \arrow[r] & \Gamma(A) \arrow[r, "\Psi"] & A \otimes_{\mathbb{Z}} A &
\end{tikzcd}$$

e usando a sequência exata (5.3), obtemos uma nova sequência exata

$$\ker(\Psi) \to A/2 \xrightarrow{\delta} (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_{\sigma} \to H_2(A, \mathbb{Z}) \to 0, \tag{5.4}$$

onde $(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_{\sigma} := (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)/\langle a \otimes b + b \otimes a | a, b \in A \rangle$, e $\delta(\overline{a}) = \overline{a \otimes a}$. Mas a sequência

$$0 \to A/2 \to (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_{\sigma} \to H_2(A, \mathbb{Z}) \to 0$$

é exata. Portanto o homomorfismo $\ker(\Psi) \to A/2$ é trivial. Este fato mostra que

$$\ker(\Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A) \subseteq im(A \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{[\,,]} \Gamma(A))$$

O seguinte resultado permite descrever o grupo $H_4(K(A,2), \mathbb{Z})$ como sendo o grupo $\Gamma(A)$, para um grupo abeliano A qualquer.

Proposição 10. Para qualquer grupo abeliano A, $\Gamma(A) \cong H_4(K(A,2), \mathbb{Z})$.

Demonstração. Veja-se (EILENBERG; MACLANE, 1954). □

Teorema 23 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020a))**.** Para qualquer grupo abeliano A, a seguinte sequência é exata

$$0 \to H_1(\Sigma_2, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)) \to \Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A, \mathbb{Z}) \to 0. \tag{5.5}$$

Demonstração. Para qualquer grupo abeliano A, a partir da sequência exata (5.2) e pela Proposição 10, conseguimos uma sequência exata equivalente a (4.10)

$$0 \to \ker(\Psi) \to \Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Repetindo os argumentos do Teorema 22, obtemos o homomorfismo

$$\ker(\Psi) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}}/(\Delta \circ \mu)_*(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)).$$

Vamos mostrar que o homomorfismo $\Delta_A \circ \mu : A \times A \to A \times A$, definido por $(a,b) \mapsto (ab, ab)$ induz o homomorfismo

$$\mathrm{id} + \sigma^{\varepsilon} : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A).$$

Estudando o homomorfismo

$$(\Delta_A \circ \mu)_* : H_2(A \times A) \to H_2(A \times A),$$

e usando o fato que

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq H_2(A \times A, \mathbb{Z})/(H_2(A, \mathbb{Z}) \oplus H_2(A, \mathbb{Z}))$$

(obtido pela formula de Künneth) podemos ver que $\Delta \circ \mu$ induz o homomorfismo

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad a \otimes b \mapsto a \otimes b - b \otimes a.$$

Isto significa que para estudar o homomorfismo induzido por $\Delta \circ \mu$ sobre $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, A)$, devemos estudar o homomorfismo induzido sobre $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, A)$ pelo homomorfismo

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad a \otimes b \mapsto a \otimes b + b \otimes a = (\mathrm{id} + \iota)(a \otimes b),$$

onde $\iota : A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ é definido por $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

Considere uma resolução livre de A dada por

$$0 \to F_1 \xrightarrow{\partial} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

Então podemos usar a seguinte sequência

$$0 \to F_1 \otimes F_1 \xrightarrow{\partial_2} F_0 \otimes F_1 \oplus F_1 \otimes F_0 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \otimes F_0 \to 0$$

para calcular $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, A)$, onde

$$\partial_2 = (\partial \otimes \mathrm{id}_{F_1}, -\mathrm{id}_{F_1} \otimes \partial), \;\; e \;\; \partial_1 = \mathrm{id}_{F_0} \otimes \partial + \partial \otimes \mathrm{id}_{F_0}.$$

O homomorfismo $\mathrm{id} + \iota : A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ pode ser estendido no seguinte homomorfismo de complexos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \otimes F_1 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"] & F_0 \otimes F_1 \oplus F_1 \otimes F_0 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] & F_0 \otimes F_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \otimes F_1 \arrow[r, "\partial_2"] & F_0 \otimes F_1 \oplus F_1 \otimes F_0 \arrow[r, "\partial_1"] & F_0 \otimes F_0 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

onde

$$\begin{aligned}
&f_0(x \otimes y) := x \otimes y + y \otimes x, \\
&f_1(x \otimes y, y' \otimes x') := (x \otimes y + x' \otimes y', y \otimes x + y' \otimes x'), \\
&f_2(x \otimes y) := x \otimes y - y \otimes x.
\end{aligned}$$

Pela observação (1) e dado que

$$f_1(x \otimes y, y' \otimes x') = (x \otimes y, y' \otimes x') + (x' \otimes y', y \otimes x),$$

então o homomorfismo $\Delta \circ \mu$ induz o homomorfismo $(\mathrm{id}+\sigma^{\varepsilon}) : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)$. Logo, pelo Exemplo 4

$$\ker(\Psi) \simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}}/(\mathrm{id}+\sigma^{\varepsilon})(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)) = H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)).$$

Finalmente, segundo o Lema 2, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_{\mathrm{T}},A_{\mathrm{T}})$, e dado que para qualquer grupo abeliano de torção B, temos que $B \simeq \bigoplus_{p \text{ primo}} {}_{p^\infty}B$, onde ${}_{p^\infty}B$ é o subgrupo de torção de todas as potências de p em B com p primo, portanto

$$H_1(\Sigma_2, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)) \simeq H_1(\Sigma_2, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)).$$

□

Corolário 5. Para todo grupo abeliano A, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \lim_I H_1(\Sigma_2, {}_{2^n}A \otimes_{\mathbb{Z}} {}_{2^n}A) \to \Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Em particular, se ${}_{2^\infty}A$ é finito, então temos a seguinte sequência exata

$$0 \to H_1(\Sigma_2, {}_{2^\infty}A \otimes_{\mathbb{Z}} {}_{2^\infty}A) \to \Gamma(A) \xrightarrow{\Psi} A \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Demonstração. O resultado segue do teorema anterior e com uso da Proposição 5. □

5.2 Terceira homologia de extensões stem

Uma extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é dita extensão *stem*, se o homomorfismo natural

$$A = H_1(A,\mathbb{Z}) \to H_1(G,\mathbb{Z})$$

é trivial (por exemplo, se $A \subseteq G'$), e é dita uma extensão *fracamente stem*, se o homomorfismo natural

$$A \otimes A \to A \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z})$$

é trivial (STAMMBACH, 1973).

Dizemos que uma extensão central $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é dita *quase-stem*, se o homomorfismo natural

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,A) \to \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A, H_1(G,\mathbb{Z}))$$

é trivial para $i = 0,1$. Em particular, extensões quase-stem são extensões fracamente stem; e extensões centrais universais são extensões quase-stem. O seguinte resultado generaliza o Teorema 22.

Teorema 24 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020a))**.** Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão quase-stem. Então existe um homomorfismo natural

$$\varphi : H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes H_2(G,\mathbb{Z}))$$

tal que a imagem de φ coincide com a imagem natural de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A\otimes H_2(G,\mathbb{Z}))$. Em particular, a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ sobre $H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A\otimes H_2(G,\mathbb{Z}))$ é um grupo de 2-torção.

Demonstração. Repetindo os argumentos iniciais do Teorema 22, temos diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A) \arrow[r, "\bar{\mu}_*"] \arrow[ddd, bend left] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}} \\
\tilde{H}_3(A\times A)/\bigoplus_{i=1}^{2} H_i(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_{3-i}(A,\mathbb{Z}) \arrow[u, "\overset{\alpha}{\simeq}"] \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{inc}}_*"] & H_3(A,\mathbb{Z})/\bigwedge_{\mathbb{Z}}^3 A \arrow[u, "\overset{\beta}{\simeq}"'] \arrow[d, "\mathrm{inc}_*"] \\
\tilde{H}_3(A\times G)/\bigoplus_{i=1}^{2} H_i(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_{3-i}(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, "\simeq"] & H_3(G,\mathbb{Z})/M \\
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,H_1(G,\mathbb{Z})), &
\end{tikzcd}$$

onde $M=\rho_*(A\otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$. Pela Proposição 8, para $n=3$, temos que

$$\mathrm{im}\,(H_2(A,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_1(G,\mathbb{Z})\to H_3(G,\mathbb{Z}))\subseteq M.$$

Por definição, o homomorfismo $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)\to\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,H_1(G,\mathbb{Z}))$ é trivial, o que implica que $\rho_*\circ\widetilde{\mathrm{inc}}_*\circ\alpha^{-1}=0$. Logo, a composta $\mathrm{inc}_*\circ\beta^{-1}\circ\bar{\mu}_*$ também é trivial, e a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ sobre $H_3(G,\mathbb{Z})/M$, coincide com a imagem de

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}}/\bar{\mu}_*\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)=\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}}/(\Delta_A\circ\mu)_*(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)).$$

Finalmente, basta lembrar que na demonstração do Teorema 23, mostramos que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A)^{\Sigma_2^{\varepsilon}}/(\Delta_A\circ\mu)_*(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,A))\simeq\ker(\Psi)\simeq H_1(\Sigma_2^{\varepsilon},\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A,{}_{2^\infty}A)).$$

□

Corolário 6. Seja $A\rightarrowtail G\twoheadrightarrow Q$ uma extensão central universal. Então a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})$ coincide com a imagem do mapa

$$\varphi: H_1(\Sigma_2^{\varepsilon},\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A,{}_{2^\infty}A))\to H_3(G,\mathbb{Z}).$$

Em particular, a imagem de $H_3(A,\mathbb{Z})$ em $H_3(G,\mathbb{Z})$ é um grupo de 2-torção.

Observação 3. Seja $A\rightarrowtail G\twoheadrightarrow Q$ uma extensão central perfeita. Estudando a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre (Teorema 17), obtemos as seguinte sequência exata

$$H_4(Q,\mathbb{Z})\to T\to H_3(G,\mathbb{Z})/N\to H_3(Q,\mathbb{Z})\to 0, \tag{5.6}$$

onde

$$T=\ker(A\otimes_{\mathbb{Z}} A\to H_2(A,\mathbb{Z}))=\langle a\otimes a: a\in A\rangle$$

e

$$N := \rho_*\Big(H_3(A,\mathbb{Z}) \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))\Big).$$

Pelo Corolário 3, temos a sequência exata

$$H_4(Q,\mathbb{Z}) \to \Gamma(A) \to H_3(G,\mathbb{Z})/M \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0,$$

onde $M := \rho_*\Big(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})\Big)$. Agora, combinando as duas sequências e a informação obtida, temos o seguinte diagrama comutativo com colunas e linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
 & & H_4(Q,\mathbb{Z}) \arrow[r, "="] \arrow[d] & H_4(Q,\mathbb{Z}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \arrow[r] & \Gamma(A) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H_3(A,\mathbb{Z})/\bigwedge_{\mathbb{Z}}^3 A \arrow[r] \arrow[u] & H_3(G,\mathbb{Z})/M \arrow[r] \arrow[d] & H_3(G,\mathbb{Z})/N \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & & H_3(Q,\mathbb{Z}) \arrow[r, "="] \arrow[d] & H_3(Q,\mathbb{Z}) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 10. Berrick e Miller (BERRICK; MILLER, 1992) construiram para qualquer sequência de grupos abeliano $A_2, A_3, \ldots$, um grupo perfeito Q tal que

$$H_n(Q,\mathbb{Z}) \cong A_n,$$

para todo $n \geq 2$. Em particular, para qualquer grupo abeliano A, temos um grupo perfeito Q tal que $H_2(Q,\mathbb{Z}) \cong A$, e $H_4(Q,\mathbb{Z}) = 0$.

Seja A um grupo abeliano. Escolha um grupo perfeito Q tal que $H_2(Q,\mathbb{Z}) \simeq A$, e $H_4(Q,\mathbb{Z}) = 0$. Então se $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é a extensão central universal de Q por A, pelo Teorema 21, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \Gamma(A) \to H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Como o homomorfismo $H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to \Gamma(A)$ é injetivo, o homomorfismo

$$\varphi : H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A)) \to H_3(G,\mathbb{Z})$$

também é injetivo. Isto mostra que o núcleo do homomorfismo natural $H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$ usualmente é maior que à imagem de φ sobre $H_3(G,\mathbb{Z})$.

O núcleo do homomorfismo $H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$

Seja Q um grupo, e considere $Q = F/S$ uma apresentação livre de Q. Pelo teorema de Hopf (BROWN, 1994, Teorema 5.3, Cap. II), sabe-se que

$$H_2(Q,\mathbb{Z}) \cong (S \cap [F,F])/[S,F].$$

Esse isomorfismo pode-se expressar explicitamente usando a seguinte fórmula

$$\begin{array}{rl} \Theta : (S\cap[F,F])/[S,F] & \xrightarrow{\cong} H_2(Q,\mathbb{Z}) = H_2(B_\bullet(Q)\otimes_Q \mathbb{Z}) \\ \left(\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]\right)[S,F] & \mapsto \sum_{i=1}^{g}\left([\overline{s}_{i-1} \mid \overline{a}_i] + [\overline{s}_{i-1}\overline{a}_i \mid \overline{b}_i] - [\overline{s}_i\overline{b}_i \mid \overline{a}_i] - [\overline{s}_i \mid \overline{b}_i]\right) \end{array}, \tag{5.7}$$

onde

$$s_i = [a_1,b_1]\cdots[a_i,b_i],$$

e para cada $x \in F$, defina-se: $\overline{x} = xS \in F/S$ (BROWN, 1994, Exercício 4.5, Cap. II). Note que $\overline{s}_g = 1$.

Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central, e considere $G = F/R$, $Q = F/S$, e $A = S/F$ uma apresentações livres de G, Q e A. Dado que A é central, temos que $[S,F] \subseteq R$, logo temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H_2(Q,\mathbb{Z}) \arrow[rr] & & A = S/R \\ & (S\cap[F,F])/[S,F] \arrow[ul, "\Theta"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

onde $(S\cap[F,F])/[S,F] \to S/R = A$, $s[S,F] \mapsto sR$. Para todo $a \in F$, denotemos $aR \in G = F/R$ por $\widehat{a}$, e para todo $s \in S\cap[F,F]$, denotemos $s[S,F]$ por $\tilde{s}$.

Uma extensão $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é dito cobrimento stem se o map natural $H_2(Q) \to A$ é um isomorfismo.

Proposição 11. Toda extensão stem $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é imagem epimorfica de algum cobrimento stem.

Demonstração. Veja-se (STAMMBACH, 1973, Proposição 5.2, Cap V). □

Teorema 25. [Mirzaii, Mokari, Ordinola] Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão stem. Então o núcleo de $H_3(G,\mathbb{Z}) \to H_3(Q,\mathbb{Z})$ é gerado pelas imagens de $A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})$, $H_1(\Sigma_2^{\varepsilon}, \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}({}_{2^\infty}A, {}_{2^\infty}A))$, e $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, H_1(G,\mathbb{Z}))$ em $H_3(G,\mathbb{Z})$ e o subgrupo

$$\left\langle \lambda(s) : s = \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i][S,F] \in (S\cap[F,F])/[S,F] \right\rangle \trianglelefteq H_3(G,\mathbb{Z}),$$

onde

$$\begin{aligned}
\lambda(s) := &[\hat{s}_g|\hat{s}_g^{-1}|\hat{s}_g]+\\
\sum_{i=1}^{g}\Big(&[\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_{i-1}^{-1}|\hat{s}_g]-[\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{s}_{i-1}^{-1}]-[\hat{a}_i^{-1}|b_i^{-1}\hat{s}_i^{-1}|\hat{s}_g]+[\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{b}_i^{-1}\hat{s}_i^{-1}]+\\
&[\hat{b}_i^{-1}|\hat{a}_i^{-1}\hat{s}_{i-1}^{-1}|\hat{s}_g]-[\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{a}_i^{-1}\hat{s}_{i-1}^{-1}]-[\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_i^{-1}|\hat{s}_g]+[\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{s}_i^{-1}]+\\
&[\hat{s}_g|\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_{i-1}^{-1}]-[\hat{s}_g|\hat{a}_i^{-1}|\hat{b}_i^{-1}\hat{s}_i^{-1}]+[\hat{s}_g|\hat{b}_i^{-1}|\hat{a}_i^{-1}\hat{s}_{i-1}^{-1}]-[\hat{s}_g|\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_i^{-1}]\Big).
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 11, a extensão $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é imagem epimorfica de um cobrimento stem, suponha $A_1 \rightarrowtail G_1 \twoheadrightarrow Q$ com $H_2(Q,\mathbb{Z}) \cong A_1$. Pelo sequencia exata (5.6), e o morfismo

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
H_4(Q,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & T_1 & \xrightarrow{\eta_1} & H_3(G_1,\mathbb{Z})/\widetilde{H}_3(A_1\times G_1,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_3(Q,\mathbb{Z})\\
\downarrow{=} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{=}\\
H_4(Q,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\eta} & H_3(G,\mathbb{Z})/\widetilde{H}_3(A\times G,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_3(Q,\mathbb{Z})
\end{array} \tag{5.8}$$

onde $T = \ker(A\otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_2(A,\mathbb{Z})) = \langle a\otimes a : a\in A\rangle$. Logo, podemos assumir que $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ é um cobrimento stem, isto é, $H_2(Q,\mathbb{Z}) \cong A$.

Considere a sequência spectral de Lyndon/Hochschild-Serre (Teorema 17)

$$\mathscr{E}^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(A,\mathbb{Z})) \Longrightarrow H_{p+q}(G,\mathbb{Z})$$

Então $H_3(G,\mathbb{Z})$ tem uma filtração

$$0 = F_{-1}H_3 \subseteq F_0H_3 \subseteq F_1H_3 \subseteq F_2H_3 \subseteq F_3H_3 = H_3(G,\mathbb{Z})$$

tais que

$$\mathscr{E}^\infty_{i,3-i} = F_iH_3/F_{i-1}H_3.$$

Analisando a sequência espectral, vemos que o homomorfismo η no diagrama (5.8) é dada pela composição

$$T \to \mathscr{E}^3_{2,1} \cong \mathscr{E}^\infty_{2,1} \cong F_2H_3/F_1H_3 \subseteq H_3(G,\mathbb{Z})/F_1H_3. \tag{5.9}$$

Por outro lado, considere $G = F/R$, $Q = F/S$, e $A = S/F$ apresentações livres de G, Q e A respetivamente, e considere também o homomorfismo Θ definido anteriormente (5.7).

Considere $s_g = \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i] \in S\cap[F,F]$. Precisamos calcular o homomorfismo $\eta : T \to H_3(G,\mathbb{Z})/F_1H_3$ e para isso necessitamos calcular

$$\eta(\Theta(\tilde{s}_g)\otimes\tilde{s}_g) \in H_3(G,\mathbb{Z})/F_1H_3.$$

Note que os termos da primeira folha da sequência espectral são da forma

$$E^1_{p,q} = H_q(B_q(Q) \otimes_Q B_\bullet(G)_A),$$

onde $B_\bullet(G) \to \mathbb{Z}$, e $B_\bullet(Q) \to \mathbb{Z}$ são as resoluções barra de G e Q respetivamente. Considere os seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \otimes_Q B_4(G)_A \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \otimes \partial_4"] & B_0(Q) \otimes_Q B_4(G)_A \arrow[l] \arrow[d] & & \\
\mathbb{Z} \otimes_Q B_3(G)_A \arrow[d] & B_0(Q) \otimes_Q B_3(G)_A \arrow[l, "\partial_0 \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \partial_3"] & B_1(Q) \otimes_Q B_3(G)_A \arrow[l] \arrow[d] & \\
\mathbb{Z} \otimes_Q B_2(G)_A & B_0(Q) \otimes_Q B_2(G)_A \arrow[l] & B_1(Q) \otimes_Q B_2(G)_A \arrow[l, "\partial_1 \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \partial_2"] & B_2(Q) \otimes_Q B_2(G)_A \arrow[l] \arrow[d] \\
 & & B_1(Q) \otimes_Q B_1(G)_A & B_2(Q) \otimes_Q B_1(G)_A \arrow[l, "\partial_2 \otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Para qualquer G-módulo M

$$\mathbb{Z} \otimes_Q M_A \cong \mathbb{Z} \otimes_Q (\mathbb{Z} \otimes_A M) \cong \mathbb{Z} \otimes_Q (\mathbb{Z}Q \otimes_G M) \cong \mathbb{Z} \otimes_G M.$$

Isto implica que a coluna do lado esquerdo do diagrama anterior geram a homologia integral do grupo G. Por outro lado, representando o elemento $\Theta(\tilde{s}_g) \otimes \widehat{s}_g \in T$ como sendo $\Theta(\tilde{s}_g) \otimes [\widehat{s}_g] \in B_2(Q) \otimes_{\mathbb{Z}} B_1(G)_A$. Temos

$$\begin{aligned}
(\partial_2 \otimes \mathrm{id}_{B_1(G)_A})(\Theta(\tilde{s}_g) \otimes [\widehat{s}_g]) \quad &= \sum_{i=1}^{g} [\overline{a}_i] \otimes (\widehat{s_{i-1}^{-1}}[\widehat{s}_g] - \widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}}[\widehat{s}_g]) \\
&+ \sum_{i=1}^{g} [\overline{b}_i] \otimes (\widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}}[\widehat{s}_g] - \widehat{s_i^{-1}}[\widehat{s}_g]).
\end{aligned}$$

Agora, se $X \in B_1(Q) \otimes B_2(G)_A$ é o elemento

$$\begin{aligned}
X \quad &= \sum_{i=1}^{g} [\overline{a}_i] \otimes \left([\widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s}_g] - [\widehat{s}_g \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - [\widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s}_g] + [\widehat{s}_g \mid \widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}}] \right) \\
&- \sum_{i=1}^{g} [\overline{b}_i] \otimes \left([\widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s}_g] - [\widehat{s}_g \mid \widehat{s_i^{-1}}] - [\widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s}_g] + [\widehat{s}_g \mid \widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}}] \right),
\end{aligned}$$

então

$$(\mathrm{id}_{B_1(Q)} \otimes \partial_2)(X) = (\partial_2 \otimes \mathrm{id}_{B_1(G)_A})(\Theta(\tilde{s}_g) \otimes [\widehat{s}_g]).$$

Realizando os cálculos, mostramos que $(\partial_1 \otimes \mathrm{id}_{B_2(G)_A})(X) = Y$, onde

$$\begin{aligned}
Y = [\,] \otimes \textstyle\sum_{i=1}^{g} \quad & \Big(\widehat{a_i^{-1}}[\widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s}_g] - \widehat{a_i^{-1}}[\widehat{s}_g \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - \widehat{a_i^{-1}}[\widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s}_g] + \widehat{a_i^{-1}}[\widehat{s}_g \mid \widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}}] - \\
& \widehat{b_i^{-1}}[\widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s}_g] + \widehat{b_i^{-1}}[\widehat{s}_g \mid \widehat{s_i^{-1}}] + \widehat{b_i^{-1}}[\widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s}_g] - \widehat{b_i^{-1}}[\widehat{s}_g \mid \widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}}] - \\
& [\widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s}_g] + [\widehat{t}_g \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] + [\widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s}_g] - [\widehat{s}_g \mid \widehat{b_i^{-1}}\widehat{s_i^{-1}}] + \\
& [\widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s}_g] - [\widehat{s}_g \mid \widehat{s_i^{-1}}] - [\widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s}_g] + [\widehat{s}_g \mid \widehat{a_i^{-1}}\widehat{s_{i-1}^{-1}}] \Big).
\end{aligned}$$

Além disso, temos que $(\mathrm{id}_{B_0(G)} \otimes \partial_3)(Z) = Y$, onde

$$
\begin{aligned}
Z \;&= [\,] \otimes [\widehat{s_g} \mid \widehat{s_g^{-1}} \mid \widehat{s_g}] + \\
&[\,] \otimes \sum_{i=1}^{g} \Big([\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s_g}] - [\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - [\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{b_i^{-1}} \widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s_g}] \\
&\quad [\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{b_i^{-1}} \widehat{s_i^{-1}}] + [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{a_i^{-1}} \widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s_g}] - [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{a_i^{-1}} \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - \\
&\quad [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s_g}] + [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{s_i^{-1}}] + [\widehat{s_g} \mid \widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - \\
&\quad [\widehat{s_g} \mid \widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{b_i^{-1}} \widehat{s_i^{-1}}] + [\widehat{s_g} \mid \widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{a_i^{-1}} \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - [\widehat{s_g} \mid \widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_i^{-1}}] \Big).
\end{aligned}
$$

Logo $(\partial_0 \otimes \mathrm{id}_{B_3(G)_A})(Z) = W$, onde

$$
\begin{aligned}
W \;&= 1 \otimes [\widehat{s_g} \mid \widehat{s_g^{-1}} \mid \widehat{s_g}] \\
&1 \otimes \textstyle\sum_{i=1}^{g} \Big([\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s_g}] - [\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - [\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{b_i^{-1}} \widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s_g}] + \\
&\quad [\widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{b_i^{-1}} \widehat{s_i^{-1}}] + [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{a_i^{-1}} \widehat{s_{i-1}^{-1}} \mid \widehat{s_g}] - [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{a_i^{-1}} \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - \\
&\quad [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_i^{-1}} \mid \widehat{s_g}] + [\widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_g} \mid \widehat{s_i^{-1}}] + [\widehat{s_g} \mid \widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - \\
&\quad [\widehat{s_g} \mid \widehat{a_i^{-1}} \mid \widehat{b_i^{-1}} \widehat{s_i^{-1}}] + [\widehat{s_g} \mid \widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{a_i^{-1}} \widehat{s_{i-1}^{-1}}] - [\widehat{s_g} \mid \widehat{b_i^{-1}} \mid \widehat{s_i^{-1}}] \Big).
\end{aligned}
$$

Dado que $\mathbb{Z} \otimes_Q B_\bullet(G)_A \cong \mathbb{Z} \otimes_G B_\bullet(G)$, W representa o elemento $\lambda(s_g)$ de $H_3(G,\mathbb{Z})$. □

5.3 Terceira homologia de extensões centrais sobre H-grupos

Definição 11. Um grupo Q é dito quase-perfeito se $Q' = [Q,Q]$ é um grupo perfeito. Um grupo quase-perfeito Q é um H-grupo se $K(Q,1)^+$, a $+$-construção do espaço classificante de Q, é um H-espaço.

Note que $K(Q,1)$ é um H-espaço se, e somente se, Q é um grupo abeliano.

Exemplo 11. (i) Berrick (BERRICK, 1987) construiu para qualquer grupo abeliano A, um grupo perfeito Q tal que $K(Q,1)^+$ é homotopicamente equivalente com $K(A,2)$, e portanto Q resulta ser um H-grupo.
(ii) Seja R um anel comutativo com unidade, então os grupos $GL(R)$, $O(R)$ e $Sp(R)$ e seus subgrupos elementares, são H-grupos.

Teorema 26 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020b))**.** Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central perfeita. Se Q é um H-grupo, então existe uma sequência exata

$$A/2 \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0. \tag{5.10}$$

Demonstração. Como Q é perfeita, pela Proposição 7, temos a seguinte fibração

$$K(A,1) \to K(G,1)^+ \to K(Q,1)^+.$$

Usando o Teorema 20, temos a seguinte fibração

$$K(G,1)^+ \to K(Q,1)^+ \to K(A,2).$$

Dado que a $+$-construção não muda a homologia de grupos, estudando a sequência espectral de Leray/Serre associada à fibração anterior

$$E^2_{p,q} = H_p\left(K(A,2), H_q(K(G,1),\mathbb{Z})\right) \Longrightarrow H_{p+q}(K(Q,1),\mathbb{Z})$$

e repetindo o processo feito no Corolário 3, obtemos a seguinte sequência exata

$$H_4(Q,\mathbb{Z}) \to H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A\otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Por outro lado, pelo Teorema 8, $K(A,2)$ é um H-espaço. Além disso, segundo a Proposição 9, a aplicação

$$K(Q,1)^+ = BQ^+ \to K(A,2)$$

é um H-morfismo. Logo a partir do seguinte diagrama comutativo de H-espaços e H-morfismos

$$\begin{array}{ccc} BQ^+ \times BQ^+ & \longrightarrow & BQ^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(A,2)\times K(A,2) & \longrightarrow & K(A,2), \end{array}$$

a menos de equivalências homotópicas, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_2(Q,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} H_2(Q,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_4(Q,\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A\otimes_{\mathbb{Z}} A & \longrightarrow & H_4(K(A,2),\mathbb{Z}). \end{array}$$

Usando a sequência exata

$$0 \to H_2(G,\mathbb{Z}) \to H_2(Q,\mathbb{Z}) \to A \to H_1(G,\mathbb{Z}) \to H_1(Q,\mathbb{Z}) \to 0,$$

e dado que $H_1(G,\mathbb{Z}) = 0$, obtemos que o homomorfismo

$$H_2(Q,\mathbb{Z}) \to A$$

é sobrejetivo, portanto obtemos um homomorfismo sobrejetivo a partir do diagrama anterior

$$H_4(K(A,2),\mathbb{Z})/\mathrm{im}(A\otimes_{\mathbb{Z}} A) \twoheadrightarrow H_4(K(A,2),\mathbb{Z})/\mathrm{im}(H_4(Q,\mathbb{Z})).$$

O resultado segue usando a sequência exata (5.3) e a Proposição 10. □

Observação 4. Considere o mapa

$$A/2 \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A\otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$$

do teorema anterior. Sejam $G = F/R$, $Q = F/S$, e $A = S/F$ apresentações livres de G, Q e A. Se $s_g = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \in S \cap [F,F]$, então pelo Teorema 25, a imagem dele em $H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$ é

$$\begin{aligned}
\lambda(s_g) := {} & [\hat{s}_g|\hat{s}_g^{-1}|\hat{s}_g] + \\
\Sigma_{i=1}^{g} \Big(& [\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_{i-1}^{-1}|\hat{s}_g] - [\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{s}_{i-1}^{-1}] - [\hat{a}_i^{-1}|b_i^{-1}\hat{s}_i^{-1}|\hat{s}_g] + [\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{b}_i^{-1}\hat{s}_i^{-1}] + \\
& [\hat{b}_i^{-1}|\hat{a}_i^{-1}\hat{s}_{i-1}^{-1}|\hat{s}_g] - [\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{a}_i^{-1}\hat{s}_{i-1}^{-1}] - [\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_i^{-1}|\hat{s}_g] + [\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_g|\hat{s}_i^{-1}] + \\
& [\hat{s}_g|\hat{a}_i^{-1}|\hat{s}_{i-1}^{-1}] - [\hat{s}_g|\hat{a}_i^{-1}|\hat{b}_i^{-1}\hat{s}_i^{-1}] + [\hat{s}_g|\hat{b}_i^{-1}|\hat{a}_i^{-1}\hat{s}_{i-1}^{-1}] - [\hat{s}_g|\hat{b}_i^{-1}|\hat{s}_i^{-1}] \Big).
\end{aligned}$$

Proposição 12 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020b)). Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central perfeita. Se Q é um H-grupo, então o homomorfismo natural

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$$

é trivial.

Demonstração. A partir do morfismo de extensões

$$\begin{array}{ccccc}
A & \rightarrowtail & A & \longrightarrow & \{1\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A & \rightarrowtail & G & \twoheadrightarrow & Q,
\end{array}$$

obtemos um morfismo de fibrações

$$\begin{array}{ccccc}
K(A,1) & \longrightarrow & K(A,1) & \longrightarrow & K(\{1\},1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K(A,1) & \longrightarrow & K(G,1) & \longrightarrow & K(Q,1).
\end{array}$$

Usando o Teorema 20, temos um morfismo de fibrações

$$\begin{array}{ccccc}
K(A,1) & \longrightarrow & K(\{1\},1) & \longrightarrow & K(A,2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K(G,1) & \longrightarrow & K(Q,1) & \longrightarrow & K(A,2).
\end{array}$$

Estudando as sequências espectrais de Leray/Serre associadas ao morfismo de fibrações anterior

$$\begin{array}{ccc}
E_{p,q}^2 = H_p\left(K(A,2), H_q(K(A,1),\mathbb{Z})\right) & \Longrightarrow & H_{p+q}(K(\{1\},1),\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{E}_{p,q}^2 = H_p\left(K(A,2), H_q(K(G,1),\mathbb{Z})\right) & \Longrightarrow & H_{p+q}(K(Q,1),\mathbb{Z})
\end{array}$$

obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\ker(\Psi) & \xrightarrow{\simeq} & \overline{H_3(A,\mathbb{Z})} \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})) \to H_3(Q,\mathbb{Z}) \to 0,
\end{array}$$

onde $\overline{H_3(A,\mathbb{Z})}$ é um quociente de $H_3(A,\mathbb{Z})$ e o homomorfismo

$$\Psi : \Gamma(A) = H_4(K(A,2),\mathbb{Z}) \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

aparece na sequência (4.10). Pela sequência (5.3), temos que

$$\Gamma(A)/[A,A] \simeq A/2.$$

Usando o Teorema 26, junto com o diagrama anterior, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \ker(\Psi) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \overline{H_3(A,\mathbb{Z})} \arrow[d] \\ A/2 \arrow[r] & H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})). \end{tikzcd} \tag{5.11}$$

Segue-se do diagrama (5.11), e a observação feita à sequência (5.4), que o homomorfismo

$$\overline{H_3(A,\mathbb{Z})} \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z})),$$

é trivial. Portanto, o homomorfismo

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})/\rho_*(A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))$$

também é trivial. □

Corolário 7. Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central universal. Se Q é um H-grupo, então o homomorfismo natural

$$H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})$$

é trivial.

Demonstração. Como a extensão central é universal, temos $H_2(G,\mathbb{Z}) = 0$. Agora e o resultado segue da proposição anterior. □

CAPÍTULO

6

TERCEIRA COHOMOLOGIA DE EXTENSÕES CENTRAIS PERFEITAS

Neste capítulo mostraremos resultados análogos, para a cohomologia de grupos, dos Teorema 22, Teorema 26, e da Proposição 12. Devido a isso precisamos estabelecer as principais definições e ferramentas que usaremos neste capitulo.

6.1 Cohomologia de grupos

Sejam R um anel, $(C_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de R-módulo, e M um R-módulo. Seja

$$C^n := \mathrm{Hom}_R(C_n, M)$$

e

$$\partial^n : C^n \to C^{n+1}, f \mapsto f \circ d_n.$$

É fácil ver que

$$\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0.$$

Portanto $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ é um cocomplexo, chamado dual de $(C_\bullet, d_\bullet)$ com coeficientes em M. Normalmente denotamos $(C^\bullet, \partial^\bullet)$ por $\mathrm{Hom}(C_\bullet, M)$.

Definimos o n-ésimo grupo de cohomologia do cocomplexo $\mathrm{Hom}(C_\bullet, M)$ como sendo o quociente

$$H^n(\mathrm{Hom}(C_\bullet, M)) := \frac{\ker \partial^n}{\mathrm{im}\, \partial^{n-1}}.$$

Dado um espaço topológico X. Definimos o n-ésimo grupo de cohomologia singular de X com coeficientes em grupo abeliano N, como sendo

$$H^n(X;N) = H^n(\mathrm{Hom}(S_\bullet(X), N)).$$

Dados os R-módulos M e N, definimos o grupo $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(M,N)$ como sendo

$$\operatorname{Ext}^n_R(M,N) = H^n\left(\operatorname{Hom}_R(P_\bullet, N)\right),$$

onde $P_\bullet$ é uma resolução projetiva do R-módulo M. Esta definição é independente da escolha da resolução projetiva $P_\bullet$. Note que $\operatorname{Ext}^i_R(A,B) = 0$, para $i > 0$, sempre que A é um R-módulo projetivo, ou B é um R-módulo injetivo. Observe que

$$\operatorname{Ext}^0_R(A,B) \simeq \operatorname{Hom}_R(A,B).$$

Teorema 27 (Teorema dos Coeficientes Universais para Cohomologia)**.** Seja $(C_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de R-módulos projetivos tal que todo $d_n(P_n)$ também é projetivo. Então para todo n e para todo R-módulo M, existe uma sequência exata

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), M) \to H^n(\operatorname{Hom}(C_\bullet, M)) \to \operatorname{Hom}_R(H_n(C_\bullet), M) \to 0,$$

que cinde.

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994, Teorema 3.6.5). □

Corolário 8. Se X é um espaço topológico, então

$$H^n(X;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}).$$

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994, Teorema 3.6.6). □

Exemplo 12. Se X é um espaço conexo por caminhos, então $H^1(X;\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$.

Proposição 13. Se $n \geq 1$, então para todo grupo abeliano A,

$$H^n(K(A,n);\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}).$$

Demonstração. Pelo Teorema de Hurewicz

$$H_n(K(A,n);\mathbb{Z}) \cong \pi_n(K(A,n)) \cong A$$

Pelo Corolario 8, temos que

$$H^n(K(A,n);\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(K(A,n);\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}).$$

□

Seja G um grupo e M um G-módulo. Para $n \geq 0$, definimos a n-ésima cohomologia de grupo de G com coeficientes em M como

$$H^n(G,M) := \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M). \tag{6.1}$$

Note que

$$H^0(G,M) = \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) \simeq M^G,$$

onde

$$M^G := \{m \in M : gm = m \text{ para todo } g \in G\}.$$

Além disso, se G age trivialmente sobre M, então

$$H^1(G,M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/[G,G],M).$$

Teorema 28. Seja G um grupo e M um G-módulo trivial. Então existe uma sequência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G,\mathbb{Z}),M) \to H^n(G,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(G,\mathbb{Z}),M) \to 0$$

que cinde. Em particular, se G é um grupo perfeito, então $H^2(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$.

Teorema 29 (Sequência Espectral de Lyndon/Hochschild-Serre para Cohomologia)**.** Para todo subgrupo normal H do grupo G e todo G-módulo M, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante

$$E_2^{p,q} = H^p\left(G/H, H^q\left(H,M\right)\right) \Longrightarrow H^{p+q}\left(G,M\right).$$

Esta sequência espectral implica a sequência exata

$$0 \to H^1(G/H,M^H) \to H^1(G,M) \to H^1(H,M)^{G/H} \to H^2(G/H,M^H) \to H^2(G,M) \tag{6.2}$$

Demonstração. Veja-se (WEIBEL, 1994). □

Teorema 30 (Sequência Espectral de Leray-Serre para Cohomologia)**.** Seja A um grupo abeliano. Se $F \hookrightarrow E \to B$ é uma fibração tal que B e F são conexos por caminhos e a ação de $\pi_1(B)$ sobre $H_*(F,A)$ é trivial (por exemplo, se B for simplesmente conexo), então existe uma sequência espectral do primeiro quadrante

$$E_2^{p,q} = H^p\left(B; H^q\left(F;A\right)\right) \Longrightarrow H^{p+q}\left(E;A\right).$$

Demonstração. Veja-se (MCCLEARY, 2001, Teorema 5.2) □

6.2 Terceira cohomologia de extensões centrais perfeitas

Para um grupo abeliano A, denotamos por A^* seu grupo dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z})$.

Proposição 14 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020b))**.** Seja A um subgrupo central de G tal que $A \subseteq G'$. Então o homomorfismo $H^3(G,\mathbb{Z}) \to H^3(A,\mathbb{Z})$ é trivial.

Demonstração. Considere a inclusão $i : A \to G$. Como foi visto ao começo da Secção 4.2, o homomorfismo $i_* : H_2(A,\mathbb{Z}) \to H_2(G,\mathbb{Z})$ é trivial, e a imagem de

$$i_* : H_3(A,\mathbb{Z}) \to H_3(G,\mathbb{Z})$$

é um grupo de torção. Logo, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{im}\,(i_*),\mathbb{Z}) = 0$. Segue-se que

$$i^* : H_3(G,\mathbb{Z})^* \to H_3(A,\mathbb{Z})^*$$

também é trivial. O resultado segue do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_2(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(G,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_3(G,\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle =0} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =0} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_2(A,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(A,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_3(A,\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

onde as linhas são exatas (veja-se o Teorema 28). □

Proposição 15 ((MIRZAII; MOKARI; ORDINOLA, 2020b))**.** Seja $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão central perfeita. Se Q é um H-grupo, então temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to H^3(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^*} (A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))^*.$$

Em particular, se a extensão é universal, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to H^3(G,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema dos coeficientes universais para cohomologias de grupos (Teorema 28), e as propriedades dos espaços de Eilenberg-MacLane, temos a seguinte informação

$$\begin{aligned}
H^1(G,\mathbb{Z}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{ab},\mathbb{Z}) = 0,\\
H^2(G,\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}),\\
H^1(K(A,2);\mathbb{Z}) &= 0,\\
H^2(K(A,2);\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}),\\
H^3(K(A,2);\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}),\\
H^4(K(A,2);\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma(A),\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Usando a fibração

$$K(G,1)^+ \to K(Q,1)^+ \to K(A,2),$$

(veja-se o Teorema 7) temos a seguinte sequência espectral de Lyndon/Serre para o caso da cohomologia (veja-se o Teorema 30)

$$E_2^{p,q} = H^p(K(A,2),H^q(G,\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(Q,\mathbb{Z}).$$

Estudando a segunda folha da sequência espectral anterior, obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to \ker\left(H^3(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,H^2(G,\mathbb{Z}))\right) \to \Gamma(A)^*.$$

Pela Proposição 13,

$$\mathrm{Hom}(A,H^2(G,\mathbb{Z})) \simeq \mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(H_2(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})) \simeq (A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))^*.$$

Portanto obtemos

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to \ker\left(H^3(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^*} (A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))^*\right) \to \Gamma(A)^*.$$

Suponha primeiro que a extensão é universal. Então $H_2(G,\mathbb{Z}) = 0$, logo a sequência exata anterior tem a forma

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to H^3(G,\mathbb{Z}) \to \Gamma(A)^*.$$

Nessas condições, na demonstração do Teorema 26, mostramos que o homomorfismo $\Gamma(A) \to H_3(G,\mathbb{Z})$ fatora-se através de $A/2 = \Gamma(A)/[A,A]$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(A) \arrow[r] \arrow[dr] & A/2 \arrow[d] \\ & H_3(G,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Este fato implica que o homomorfismo $H^3(G,\mathbb{Z}) = H_3(G,\mathbb{Z})^* \to \Gamma(A)^*$, fatora-se através de $(A/2)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A/2,\mathbb{Z}) = 0$, logo é trivial, e temos a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \to H^3(Q,\mathbb{Z}) \to H^3(G,\mathbb{Z}) \to 0.$$

No caso geral, dadas a extensão central perfeita $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, e a extensão central universal $A_1 \rightarrowtail G_1 \twoheadrightarrow Q$, onde $A_1 \simeq H_2(Q,\mathbb{Z})$, então temos o seguinte morfismo de extensões

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & G_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Q \arrow[d, "="] \\ A \arrow[r, tail] & G \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$

com $A_1 \to A$ sobrejetiva. Usando o Teorema dos coeficientes universais para cohomologia (veja-se o Teorema 28), temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(Q,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \widetilde{H}^3(G,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(A)^* \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_1,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^3(Q,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^3(G_1,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \Gamma(A_1)^*. \end{tikzcd}$$

onde

$$\widetilde{H}^3(G,\mathbb{Z}) := \ker\left(H^3(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho^*} (A \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(G,\mathbb{Z}))^*\right).$$

Note que dado que $A_1 \to A$ é sobrejetiva, então $\Gamma(A_1) \to \Gamma(A)$ também é sobrejetiva, o que implica que o homomorfismo $\Gamma(A)^* \to \Gamma(A_1)^*$ é injetivo. Pelo resultado para extensões universais, $H^3(G_1, \mathbb{Z}) \to \Gamma(A_1)^*$ é trivial, portanto $\widetilde{H}^3(G, \mathbb{Z}) \to \Gamma(A)^*$ também é trivial, e segue o resultado. $\square$

REFERÊNCIAS

ATIYAH, M. Mathematics in the 20th century. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Wiley, v. 34, n. 1, p. 1–15, jan. 2002. Citado na página 9.

BERRICK, A.; MILLER, C. Strongly torsion generated groups. **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc**, Citeseer, v. 111, p. 219–229, 1992. Citado na página 60.

BERRICK, A. J. Two functors from abelian groups to perfect groups. **Journal of Pure and Applied Algebra**, Citeseer, v. 44, n. 1-3, p. 35–43, 1987. Citado na página 64.

BREEN, L. On the functorial homology of abelian groups. **Journal of Pure and Applied Algebra**, Elsevier, v. 142, n. 3, p. 199–237, 1999. Citado na página 40.

BROWN, K. S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1994. (Graduate Texts in Mathematics # 87). Citado nas páginas 32, 33, 49 e 61.

ECKMANN, B.; HILTON, P. On central group extensions and homology. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 46, n. 1, p. 345–355, 1971. Citado na página 48.

EILENBERG, S.; MACLANE, S. On the groups H(π, n), II: methods of computation. **Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 70, n. 1, p. 49–139, 1954. Citado na página 56.

HATCHER, A. **Algebraic topology**. [S.l.: s.n.], 2005. Citado nas páginas 25, 26 e 27.

MAY, J. P.; PONTO, K. **More concise algebraic topology: localization, completion, and model categories**. Chicago, IL.: University of Chicago Press, 2012. (Chicago Lectures in Mathematics). Citado na página 46.

MCCLEARY, J. **A user's guide to spectral sequences**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. Citado nas páginas 44 e 71.

MIRZAII, B.; MOKARI, F. Y.; ORDINOLA, D. M. C. A note on whitehead's quadratic functor. **arXiv preprint arXiv:2007.11177**, 2020. Citado nas páginas 56 e 58.

____. Third homology of perfect central extensions. **arXiv preprint arXiv:2007.11165**, 2020. Citado nas páginas 49, 64, 66, 71 e 72.

ROSENBERG, J. **Algebraic K-theory and its applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 147. Citado nas páginas 27 e 46.

ROTMAN, J. J. **An introduction to Homological Algebra**. Urbana, Illinois: Academic Press, INC, 1979. (Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks # 85). Citado na página 33.

STAMMBACH, U. **Homology in group theory**. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1973. v. 359. (Lecture Notes in Mathematics, v. 359). Citado nas páginas 49, 58 e 61.

SUSLIN, A. K_3 of a field and the bloch group. In: **Proc. Steklov Inst. Math**. [S.l.: s.n.], 1991. v. 183, n. 4, p. 217–239. Citado nas páginas 17 e 40.

WEIBEL, C. A. **An Introduction to Homological Algebra**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1994. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics # 38). Citado nas páginas 34, 39, 43, 45, 70 e 71.

WHITEHEAD, G. W. **Elements of homotopy theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1978. v. 61. Citado na página 30.

WOJTKOWIAK, Z. Central extension and coverings. **Publicacions de la Secció de Matemàtiques Univ. Autónoma Barcelona**, JSTOR, v. 29, n. 2/3, p. 145–153, 1985. Citado na página 46.

ZABRODSKY, A. **Hopf spaces**. [S.l.]: Moth-Holland Publishing Company, 1976. Citado nas páginas 30 e 46.

ICMC USP
SÃO CARLOS