UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Análise harmônica sobre a esfera e aplicações

Isadora Zanato Leite

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Isadora Zanato Leite

Análise harmônica sobre a esfera e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
Abril de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Z27a

Zanato Leite , Isadora
Análise harmônica sobre a esfera e aplicações / Isadora Zanato Leite ; orientador Thaís Jordão. -- São Carlos, 2024.
75 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Análise harmônica. 2. Espaços zonais. 3. Operador multiplicativo. 4. Convoluções . 5. Coeficientes de Fourier. I. Jordão, Thaís , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Isadora Zanato Leite

Harmonic analysis on the sphere and applications

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Thaís Jordão

USP – São Carlos
April 2024

Este trabalho é dedicado a todos os autistas que,
assim como eu, já tiveram seus potenciais ignorados e suas dificuldades invalidadas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Andréa e Rodrigo, por serem meu lar, mesmo quando estamos distantes fisicamente. Obrigada por sempre me mostrarem o caminho e, também, por me deixarem livre para poder guiar meus próprios passos. Obrigada por sempre incentivarem meus estudos e por todo o suporte, pois eles foram, sem dúvidas, o meu combustível para chegar até aqui. Também gostaria de agradecer ao Chico, o meu cão de suporte emocional, pelo amor mais puro que eu já pude conhecer.

Acredito, com convicção, que este trabalho não teria sido realizado sem a presença do Lucas, meu namorado. Obrigada por ser a minha força, por me dar suporte, por me validar e por me ajudar, a cada dia, a me tornar uma versão melhor de mim mesma. Também não poderia deixar de agradecer pela ajuda com o LaTeX e pela revisão dessas páginas.

Serei eternamente grata ao Departamento de Computação e Matemática (DCM) da USP-Ribeirão Preto por ter sido a minha segunda casa durante a graduação. Agradeço a cada professor por todo zelo, conhecimento compartilhado e incentivo. Em especial, agradeço à Michelle por sempre ter sido um exemplo para mim. Agradeço pelo cuidado com cada aluno que cruza o seu caminho, pela amizade e por continuar presente em minha vida.

Agradeço à Marina, minha psicóloga, por me ajudar a me manter de pé nos últimos anos. Obrigada por me ajudar a desconstruir ideias e por me ensinar a valorizar coisas que antes eram invisíveis.

Agradeço à professora Thaís pela orientação e por toda a dedicação ao projeto. Agradeço também aos meus colegas do grupo de pesquisa, Bruna e Hermes, pelos momentos de descontração, pelas risadas e por tornarem essa jornada um pouco mais leve.

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), bolsas processos nº 131242/2021-0 e nº 131585/2023-1.

RESUMO

LEITE, I. Z. **Análise harmônica sobre a esfera e aplicações**. 2024. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Neste trabalho, exploramos o espaço de medidas definidas sobre a esfera d-dimensional que são invariantes por rotações que deixam o polo da esfera fixo, chamado de espaço das medidas zonais. Relacionamos as funções zonais com o espaço das funções definidas no intervalo $[-1, 1]$. Em seguida, introduzimos e relacionamos os conceitos de operador multiplicativo para funções integráveis e o de convolução com medidas zonais. A teoria de análise harmônica sobre a esfera desenvolvida é aplicada para estabelecer as séries de Fourier de funções integráveis e estudar a taxa de decaimento de sequências de autovalores de operadores integrais com núcleos suaves.

Palavras-chave: Análise harmônica, Espaços zonais, Operador multiplicativo, Convoluções, Coeficientes de Fourier.

ABSTRACT

LEITE, I. Z. **Harmonic analysis on the sphere and applications**. 2024. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

In this work, we explore the space of measures defined on the d-dimensional sphere that are invariant under all rotations leaving the pole of the sphere fixed, called the space of zonal measures. We relate the zonal functions spaces with the space of functions defined in the interval $[-1,1]$. Next, we introduce and relate the concepts of multiplicative operator for integrable functions and convolution with zonal measures. The theory of harmonic analysis on the sphere developed is applied to establish Fourier series of integrable functions and to study the decay rate of sequences of eigenvalues of integral operators with smooth kernels.

Keywords: Harmonic analysis, Zonal spaces, Multiplier operator, Convolutions, Fourier coefficients.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathscr{L}(E,F)$ — Definição 2.1.4

$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}$ — Definição 2.1.4

B_E — $\{$x$\in E : \|x\| \leq 1\}$

$C_c(\mathbb{R}^d)$ — $\{f \in C(\mathbb{R}^d) : f(x) = 0,$ para todo $x \in \mathbb{R}^d \setminus K,$ no qual K é compacto$\}$

E^* — Definição 2.1.9

$\|\cdot\|_{E^*}$ — Definição 2.1.9

T^* — Definição 2.1.10

$M(X)$ — Coleção das medidas de Borel que são regulares e finitas sobre X

$C_0(X)$ — $\{f \in C(X) : f$ se anula no infinito$\}$

$\rho(T), N(T)$ — Definição 2.1.16

$\sigma(T)$ — Definição 2.1.16

$\mathscr{B}_X$ — Definição 2.2.1

$E \setminus F, E\Delta F$ — Definição 2.2.7

$\mu \perp \nu$ — Definição 2.2.9

μ^+, μ^- — Variação positiva e negativa da medida μ, respectivamente

$|\mu|$ — Variação total de μ

Δ — Função modular de G

$\mathbb{S}^d$ — $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$

p — Polo norte de $\mathbb{S}^d$

$x \cdot y$ — Produto escalar usual de $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$

$d\omega_d$ — Elemento de volume da medida invariante e não normalizada ω_d

ω_d — Volume de $\mathbb{S}^d$ segundo a medida ω_d

$d\sigma_d$ — Elemento de volume da medida invariante e normalizada em $\mathbb{S}^d$

SO_{d+1} — Grupo de rotações de $\mathbb{R}^{d+1}$

$x\alpha$ — Imagem de $x \in \mathbb{S}^d$ por $\alpha \in SO_{d+1}$

ι — Elemento neutro de SO_{d+1}

SO_{d+1}^x — $\{\alpha \in SO_{d+1} : x\alpha = x\}$

R_α — Operador rotação por $\alpha \in SO_{d+1}$

$M(\mathbb{S}^d, p)$ — Definição 3.1.1

$F(\mathbb{S}^d; x)$ — Representação dos espaços $C(\mathbb{S}^d; x)$, $L^q(\mathbb{S}^d; x)$ ou $M(\mathbb{S}^d; x)$

φ_x — Aplicação tal que $\varphi_x f = R_\alpha f$, $f \in F(\mathbb{S}^d; p)$, $x\alpha = p$

$G \cdot x, X/G$ — Definição 3.1.3

I — Intervalo $[-1,1]$

Ψ_p — Corolário 3.1.5

$L_d^q(I)$ — Definição 3.1.6

$d\alpha$ — Medida de Haar normalizada em SO_{d+1}

χ_E — Função indicadora do conjunto E

$\mu * \nu$ — Definição 3.2.1

P_n^λ — Polinômio de Gegenbauer de índice λ

$\hat{\mu}_n$ — Definição 3.3.5

$\hat{f}_n$ — Definição 3.3.5

$B_{SO_{d+1}}(F)$ — $\{T \in \mathscr{L}(F) : TR_\alpha = R_\alpha T, \alpha \in SO_{d+1}\}$

$\mathscr{H}_d^k$ — Espaço dos harmônicos esféricos de grau k, $k = 0, 1, \ldots$, em $d+1$ variáveis

τ_d^k — Dimensão de $\mathscr{H}_d^k$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ — Produto interno usual de $L^2(\mathbb{S}^d)$

$\mathscr{Y}_k$ — Projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{S}^d)$ em $\mathscr{H}_d^k$

$\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \ldots, \tau_d^k\}$ — Base ortonormal de $\mathscr{H}_d^k$ com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$

$\hat{f}(k, j)$ — Coeficientes de Fourier de f

K — Núcleo em $L^2(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d)$

K^y — Função definida por $K^y(x) = K(x, y)$, $y \in \mathbb{S}^d$ fixado e $x \in \mathbb{S}^d$

$f(x) \lesssim g(x)$ — $f(x) = O(g(x))$, isto é, $f(x) \leq Cg(x)$ para alguma constante C

$\mathscr{K}$ — Definição 4.2.1

$f(x) \asymp g(x)$ — $f(x) \lesssim g(x)$ e $g(x) \lesssim f(x)$

$f(x) \sim g(x)$ — $f(x)/g(x) \to 1$, quando $x \to \infty$

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O termo "Análise harmônica"é flexível e pode ser usado para representar uma variedade de subáreas dentro da Análise. Na referência (FOLLAND, 1995), o autor apresenta uma teoria desenvolvida, principalmente, no período de 1927 até a década de 1960, na qual a ação de um grupo localmente compacto desempenha um papel essencial. Por outro lado, em (KATZNELSON, 2004), a Análise harmônica é exposta como o estudo de objetos, como funções e medidas, definidos em grupos topológicos. Em sua apresentação mais elementar, esta área da matemática se refere à exploração das séries de Fourier de funções periódicas na reta, as quais possuem interessantes aplicações. A teoria mostra como responder questões relevantes, como a existência de uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto e como encontrar, entre todas as curvas simples e fechadas no plano, a que maximiza sua área interna. Tais problemas podem ser encontrados em (STEIN; SHAKARCHI, 2003). Além disso, a pesquisas em Análise harmônica teve um enorme crescimento nos últimos anos e as suas implicações em outros campos da análise têm sido bastante diversificadas. Como podemos ver em (STEIN, 1993), desenvolvimentos posteriores da teoria de Calderón e Zygmund, inicialmente desenvolvida para equações elípticas, permitiram aplicações a equações parabólicas e aos operadores hipoelípticos gerais.

Neste trabalho, o termo Análise harmônica representa o estudo de funções e medidas definidas sobre a esfera d-dimensional do espaço euclidiano $d+1$-dimensional. A teoria básica foi desenvolvida por Charles Dunkl e, posteriormente, por diversos outros autores nas últimas duas décadas. Nesta teoria, o papel dos grupos ortogonais é de extrema importância e fornece a estrutura fundamental para a Análise de Fourier sobre esfera. A referência (DUNKL; XU, 2014) contém uma tratativa moderna dos temas e possui 128 citações no Mathscinet, das quais 20 citações foram no ano de 2023 em prestigiosos jornais. A Análise hamônica que será desenvolvida neste texto é considerada como contexto básico para o desenvolvimento da segunda parte do trabalho. Nesta parte, é obtida a taxa de decaimento de sequências de autovalores de operadores integrais gerados por núcleos que satisfazem uma condição de Hölder generalizada.

A condição de Hölder considerada neste trabalho é definida em termos de uma família de operadores multiplicativos que é admissível. Esta condição se estende à condição de Hölder usualmente utilizada na literatura moderna sobre tema (KÜHN, 1987; JORDÃO; MENEGATTO, 2016).

Esta dissertação apresenta conceitos e resultados da Análise harmônica sobre a esfera, propriedades de operadores multiplicativos e de convoluções em espaços zonais. O segundo capítulo é destinado a relembrar conceitos básicos, em sua maioria de Análise funcional e Teoria da medida, os quais serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. O terceiro capítulo consiste em apresentar a teoria básica de Análise harmônica na esfera, incluindo as definições de operador rotação, polinômios de Gegenbauer e espaços zonais e sua relação com funções definidas em $[-1,1]$. Por fim, o capítulo quatro se preocupa em estudar a taxa de decaimento de sequências de autovalores de operadores integrais gerados por núcleos que satisfazem uma condição de Hölder generalizada.

CAPÍTULO

2

CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo tem por objetivo relembrar e apresentar resultados de diferentes áreas da matemática que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Os conceitos e resultados estão agrupados por temas. Na Seção 2.1, apresentamos definições e resultados da teoria de operadores limitados. Na Seção 2.2, apresentamos alguns resultados da teoria de Medida e Integração e algumas propriedades das medidas de Haar são elencadas na Seção 2.3.

2.1 Topologia e Análise Funcional

Os resultados enunciados na sequência possuem como referência (MUNKRES, 2000, p. 166).

Teorema 2.1.1. A imagem de um espaço compacto sob uma aplicação contínua é compacto.

Teorema 2.1.2. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e bijetora. Se X é compacto e Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.

Os resultados de Análise Funcional abaixo podem ser encontradas em (BREZIS, 2011), Capítulos 1 a 6.

Definição 2.1.3. Seja $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados. Dizemos que T é **limitada** se existir $C \geq 0$ tal que

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \text{ para todo } x \in E.$$

Definição 2.1.4. Sejam E e F espaços vetoriais normados. Denotaremos por $\mathscr{L}(E,F)$ o espaço dos **operadores lineares limitados** de E em F munido com a norma

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Escreveremos $\mathscr{L}(E)$ quando $F = E$.

Definição 2.1.5. Um operador linear limitado $T : E \longrightarrow F$ é dito **compacto** se $T(B_E)$ tem fecho compacto em F (na topologia forte), em que $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Definição 2.1.6. Chamaremos $T \in \mathscr{L}(E,F)$ inversível com $T^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$ de **isomorfismo**. Um isomorfismo $T : E \longrightarrow E$ é denominado um **automorfismo** de E.

Observação 2.1.7. Temos, como corolário do Teorema da Aplicação Aberta, que se E e F são espaços de Banach e $T \in \mathscr{L}(E,F)$ é bijetora, então T é um isomorfismo, isto é, $T^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

Denotamos por $C_c(\mathbb{R}^d)$ o espaço de todas as funções contínuas em $\mathbb{R}^d$ com **suporte compacto**, isto é,

$$C_c(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d \setminus K, \text{ no qual } K \text{ é compacto}\}.$$

Teorema 2.1.8. O espaço $C_c(\mathbb{R}^d)$ é denso em $L^q(\mathbb{R}^d)$, para todo $q \in [1,\infty)$.

Definição 2.1.9. Seja E um espaço vetorial normado. Denotaremos por E^* o **espaço dual** de E, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares limitados em E. A norma dual em E^* é definida por

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|.$$

Quando não houver confusão, escreveremos $\|f\|$ no lugar de $\|f\|_{E^*}$.

Definição 2.1.10 (Adjunto)**.** Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in \mathscr{L}(E,F)$, definimos o **adjunto** de T como o operador linear

$$\begin{array}{rcl} T^* : F^* & \longrightarrow & E^* \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ T. \end{array}$$

Observação 2.1.11. Se T é um operador limitado, então T^* é, também, um operador limitado e

$$\|T^*\|_{\mathscr{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

Definição 2.1.12. Um operador limitado $T \in \mathscr{L}(H)$, com H espaço de Hilbert, é dito **autoadjunto** se $T^* = T$, isto é,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle,$$

para quaisquer $u, v \in H$.

Definição 2.1.13. Sejam H um espaço de Hilbert e $S \in \mathscr{L}(H)$. Dizemos que S é um operador linear **não-negativo**, e escrevemos $S \geq 0$, se $\langle Sx, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in H$. No caso particular em que $\langle Sv, v \rangle > 0$, para todo $v \neq 0$, diremos que S é um operador **positivo** e escreveremos $S > 0$.

Definição 2.1.14. Uma sequência em $\{e_n\}$ em H é dita **base ortonormal** de H (ou base de Hilbert) se satisfaz

(i) $|e_n| = 1$, para todo n, e $\langle e_m, e_n \rangle = 0$, sempre que $m \neq n$;

(ii) o espaço gerado por $\{e_n : n \geq 1\}$ é denso em H.

Proposição 2.1.15. Um espaço de Hilbert H é separável se, e somente se, admite base de Hilbert enumerável.

Daqui em diante, E e F denotarão dois espaços de Banach.

Definição 2.1.16. Seja $T \in \mathscr{L}(E)$. O **conjunto resolvente**, denotado por $\rho(T)$, é definido por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) \text{ é bijeção de } E \text{ em } F\}.$$

O **espectro**, denotado por $\sigma(T)$, é o complementar do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Um número real λ é chamado de **autovalor** de T se

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\},$$

em que $N(T)$ é o núcleo do operador T. O conjunto de todos os autovalores de T é denotado por $EV(T)$.

Teorema 2.1.17. Seja $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto com $\dim E = \infty$. Então, temos

(i) $0 \in \sigma(T)$.

(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV(T) \setminus \{0\}$.

(iii) Um dos seguintes casos acontece

- $\sigma(T) = \{0\}$;
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é um conjunto finito;
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é uma sequência convergindo a 0.

2.2 Teoria da medida e integração

A referência para os resultados é (FOLLAND, 1999), Capítulos 1 a 3.

Definição 2.2.1. Se X é um espaço topológico, a σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos em X é chamada de **σ-álgebra de Borel** em X e é denotada por $\mathscr{B}_X$. Os elementos dessa σ-álgebra são chamados de **conjuntos de Borel**.

Definição 2.2.2. As medidas em $\mathbb{R}$ com domínio $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ são chamadas de **medidas de Borel** em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.3. Sejam μ uma medida de Borel em X e E um subconjunto de Borel de X. A medida μ é **regular externa** em E se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ aberto}\}$$

e é **regular interna** em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Definição 2.2.4. Uma **medida de Radon** em X é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular externa em conjuntos de Borel e regular interna em conjuntos abertos.

No que segue, (X,M) é um espaço de medida.

Definição 2.2.5. Uma **medida com sinal** em (X,M) é uma função $\mu : M \longrightarrow [-\infty,\infty]$ tal que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) μ assume, no máximo, um dos valores $\pm\infty$;

(iii) se $\{E_j\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em M, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, em que a última soma converge absolutamente se $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)$ é finito.

Consequentemente, toda medida é uma medida com sinal.

Definição 2.2.6. Seja μ uma medida com sinal em (X,M).

(i) Dizemos que $E \in M$ é **positivo** para μ se $\mu(F) \geq 0$, para todo $F \in M$ com $F \subseteq E$.

(ii) Dizemos que $E \in M$ é **negativo** para μ se $\mu(F) \leq 0$, para todo $F \in M$ com $F \subseteq E$.

(iii) Dizemos que $E \in M$ é **nulo** para μ se $\mu(F) = 0$, para todo $F \in M$ com $F \subseteq E$.

Definição 2.2.7. Se E e F são conjuntos, denotamos sua **diferença** por $E \setminus F$,

$$E \setminus F = \{x : x \in E \text{ e } x \notin F\},$$

e sua **diferença simétrica** por $E\Delta F$,

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Teorema 2.2.8 (Decomposição de Hahn)**.** Se μ é uma medida com sinal em (X,M), então existem conjuntos P e N, positivo e negativo para μ, respectivamente, tais que

$$X = P \cup N \text{ e } P \cap N = \emptyset.$$

Além disso, se existem P' positivo e N' negativo para μ tais que

$$X = P' \cup N' \text{ e } P' \cap N' = \emptyset,$$

então $P\Delta P'$ e $N\Delta N'$ são nulos para μ.

Definição 2.2.9. Sejam μ e ν medidas com sinal em (X,M). Dizemos que μ e ν são **mutuamente singulares**, e escrevemos $\mu \perp \nu$, se existem $E,F \in M$ tais que $X = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$, E é nulo para μ e F é nulo para ν.

Teorema 2.2.10 (Decomposição de Jordan)**.** Se μ é uma medida com sinal, existem únicas medidas positivas, μ^+ e μ^-, tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $\mu^+ \perp \mu^-$.

As medidas μ^+ e μ^- são chamadas de **variação positiva** e **negativa** de μ e $\mu = \mu^+ - \mu^-$ é chamada de **decomposição de Jordan** de μ. Ademais, definimos a **variação total** de μ como sendo a medida $|\mu|$ definida por

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Teorema 2.2.11. (i) Se $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq f$ e $\phi_n \to f$ pontual e uniformemente em qualquer conjunto em que f é limitada.

(ii) Se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f|$ e $\phi_n \to f$ pontual e uniformemente em qualquer conjunto em que f é limitada.

O próximo teorema e seu corolário têm como referência (FOLLAND, 1999, p. 223).

Teorema 2.2.12 (Representação de Riesz)**.** Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto e $M(X)$ a coleção das medidas de Borel que são regulares e finitas sobre X. Para $\mu \in M(X)$ e $f \in C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ se anula no infinito}\}$, considere

$$I_\mu(f) = \int f d\mu.$$

Então, a aplicação $\mu \mapsto I_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $M(X)$ em $C_0^*(X)$.

Corolário 2.2.13. Se X é um espaço de Hausdorff compacto, então $C^*(X)$ é isometricamente isomorfo a $M(X)$.

O próximo teorema pode ser encontrado na referência (RUDIN, 1990, p. 269).

Teorema 2.2.14 (Fubini)**.** Sejam μ e λ medidas regulares em espaços de Hausdorff localmente compactos X e Y. Se $\mu,\lambda \geq 0$, f é uma função de Borel em $X \times Y$ e $f \geq 0$, então

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_X \int_Y f(x,y) d\lambda(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\lambda(y). \tag{2.1}$$

Se $\mu \in M(X)$, $\lambda \in M(Y)$, f é uma função de Borel em $X \times Y$ e

$$\int_X \int_Y |f(x,y)| d|\lambda|(y) d|\mu|(x) < \infty,$$

então (2.1) também vale.

2.3 Medida de Haar

A seguinte definição pode ser encontrada em (TU, 2011, p. 66).

Definição 2.3.1. Um **grupo topológico** G é um espaço topológico com uma estrutura de grupo tal que as operações

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab$$

e

$$i : G \to G, \quad i(a) = a^{-1}$$

são contínuas.

As próximas definições e resultados desta seção podem ser consultados em (FOLLAND, 1999, p. 339). A seguir, sejam G um grupo topológico, $A \subset G$ e $x \in G$, definimos

$$xA = \{xy : y \in A\}$$

e

$$Ax = \{yx : y \in A\}.$$

Definição 2.3.2. Seja G um conjunto localmente compacto. Uma medida de Borel μ em G é chamada **invariante à esquerda** (respectivamente **invariante à direita**) se $\mu(xE) = \mu(E)$ (respectivamente $\mu(Ex) = \mu(E)$), para todo $x \in G$ e $E \in \mathscr{B}_G$.

Definição 2.3.3. Uma **medida de Haar** à esquerda (respectivamente à direita) em um grupo topológico localmente compacto G é uma medida de Radon μ, $\mu > 0$, invariante à esquerda (respectivamente invariante à direita).

Proposição 2.3.4. Seja G um grupo topológico localmente compacto. Uma medida de Radon μ em G é uma medida de Haar à esquerda se, e somente se, a medida $\tilde{\mu}$ definida por $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ é uma medida de Haar à direita, em que $E^{-1} = \{x^{-1} : x \in E\}$.

Teorema 2.3.5. Todo grupo topológico localmente compacto possui uma medida de Haar à esquerda.

Teorema 2.3.6. Se μ e ν são medidas de Haar à esquerda em G, então existe c, $0 < c < \infty$, tal que $\mu = c\nu$.

Observe que se μ é uma medida de Haar à esquerda em G e $x \in G$, a medida $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ é também uma medida de Haar à esquerda devido à comutatividade das translações à esquerda e à direita, isto é, devido à lei associativa para elementos de um grupo. Com efeito, se μ é medida de Haar à esquerda, então $\mu(yE) = \mu(E)$, para todo $y \in G$ e $E \in \mathscr{B}_G$. Queremos provar que para $x \in G$, $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ é uma medida de Haar à esquerda, ou seja, que $\mu_x(E) = \mu_x(zE)$, para todo $z \in G$ e $E \in \mathscr{B}_G$. Observe que, para todo $z \in G$ e $E \in \mathscr{B}_G$,

$$\mu_x(zE) = \mu(zEx) = \mu(Ex) = \mu_x(E),$$

como queríamos. Consequentemente, existe um número positivo $\Delta(x)$ tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$.

A função $\Delta : G \longrightarrow (0,\infty)$, definida na demonstração acima, é independente da escolha de μ e é chamada de **função modular** de G.

Proposição 2.3.7. Δ é um homeomorfismo contínuo de G ao grupo multiplicativo de números reais. Além disso, se μ é uma medida de Haar à esquerda em G, para toda $f \in L^1(\mu)$ e $y \in G$, temos

$$\int R_y f d\mu = \Delta(y^{-1}) \int f d\mu,$$

em que $R_y f(x) = f(xy)$.

Observe que uma medida de Haar à esquerda em G é também uma medida de Haar à direita quando $\Delta \equiv 1$ e, neste caso, G é chamado unimodular.

Proposição 2.3.8. Se G é um grupo topológico compacto, então G é unimodular.

CAPÍTULO

3

OPERADORES E ANÁLISE HARMÔNICA NA ESFERA

Este capítulo é baseado na teoria básica de Análise Harmônica sobre a esfera desenvolvida em (DUNKL, 1965) e (DUNKL, 1966). Na Seção 3.1, apresentamos os espaços zonais e os relacionamos com um espaço de funções definidas em um intervalo da reta. Na sequência, a teoria desenvolvida é utilizada para fundamentar o conceito de convolução entre medidas e derivar importantes propriedades que são elencadas na Seção 3.2. Na Seção 3.3, estudamos a ortogonalidade dos polinômios ultraesféricos de índice $\lambda = (d-1)/2$ e definimos o n-ésimo coeficiente de Gegenbauer da medida μ. Finalmente, na Seção 3.4 apresentamos a caracterização de operadores multiplicativos que comutam com rotações, a qual é dada em termos de convolução com uma medida zonal.

3.1 Espaços de funções integráveis e de medidas zonais

Denotaremos por $\mathbb{S}^d$ a esfera unitária d-dimensional centrada na origem do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{d+1}$, para $d \geq 2$, ou seja,

$$\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\},$$

e consideraremos $p = (1,0,\ldots,0)$ o polo norte de $\mathbb{S}^d$. O produto escalar usual de $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ será denotado por $x \cdot y$. Escreveremos $d\omega_d$ para o elemento de volume da medida ω_d não normalizada e invariante em $\mathbb{S}^d$ induzida pela medida de Lebesgue (MORIMOTO, 1998, p. 15). Esta medida será utilizada para representar o volume de $\mathbb{S}^d$, isto é,

$$\omega_d := \int_{\mathbb{S}^d} d\omega_d = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}. \tag{3.1}$$

Denotaremos por $d\sigma_d$, ou simplesmente por dx quando o contexto permitir, a medida invariante e normalizada em $\mathbb{S}^d$, isto é,

$$d\sigma_d = \frac{1}{\omega_d} d\omega_d. \tag{3.2}$$

O grupo ortogonal de $\mathbb{R}^{d+1}$ exerce papel fundamental na construção da teoria e é definido a seguir. Escreveremos SO_{d+1} para representar o grupo de transformações lineares de $\mathbb{R}^{d+1}$ que preserva $\mathbb{S}^d$ e cuja matriz de transformação na base canônica possui determinante 1. Neste caso, SO_{d+1} é o **grupo de rotações** ou o **grupo ortogonal** de $\mathbb{R}^{d+1}$. A imagem de $x \in \mathbb{S}^d$ por $\alpha \in SO_{d+1}$ será representada por $x\alpha$ e $\iota \in SO_{d+1}$ representará o elemento neutro ou identidade. Para todo $x \in \mathbb{S}^d$, SO^x_{d+1} é o subgrupo fechado de SO_{d+1} que deixa x fixo, isto é,

$$SO^x_{d+1} := \{\alpha \in SO_{d+1} : x\alpha = x\}.$$

Observamos que se $\alpha_1 \in SO_{d+1}$ é tal que $x_1\alpha_1 = p$, então

$$\alpha_1^{-1} SO^{x_1}_{d+1} \alpha_1 = SO^p_{d+1}. \tag{3.3}$$

De fato, seja $\alpha \in \alpha_1^{-1} SO^{x_1}_{d+1} \alpha_1$, então $\alpha = \alpha_1^{-1}\beta\alpha_1$, em que $\beta \in SO^{x_1}_{d+1}$, ou seja, $\beta \in SO_{d+1}$ e $x_1\beta = x_1$. Para provar que $\alpha \in SO^p_{d+1}$ é suficiente mostrar que $p\alpha = p$, uma vez que $\alpha \in SO_{d+1}$. Note que

$$p = x_1\alpha_1 = x_1\beta\alpha_1 = x_1\alpha_1\alpha_1^{-1}\beta\alpha_1 = p\alpha_1^{-1}\beta\alpha_1 = p\alpha,$$

como queríamos. Agora, se $\alpha \in SO^p_{d+1}$, então $\alpha \in SO_{d+1}$ é tal que $p\alpha = p$. Para $\beta = \alpha_1\alpha\alpha_1^{-1}$, vale

$$x_1 = p\alpha_1^{-1} = p\alpha\alpha_1^{-1} = p\alpha_1^{-1}\beta\alpha_1\alpha_1^{-1} = p\alpha_1^{-1}\beta = x_1\beta.$$

Portanto, $\alpha \in \alpha_1^{-1} SO^{x_1}_{d+1} \alpha_1$.

Sejam $f : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e μ uma medida em $\mathbb{S}^d$. O **operador rotação** R_α é definido por

$$R_\alpha f(x) = f(x\alpha), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

e se $E \subset \mathbb{S}^d$ é um conjunto μ-mensurável e $E_\alpha = \{x\alpha : x \in E\}$, então definimos

$$R_\alpha \mu(E) := \mu(E_\alpha).$$

Definição 3.1.1. Seja $M(\mathbb{S}^d)$ a coleção das medidas de Borel que são regulares e finitas sobre $\mathbb{S}^d$. Escrevemos $M(\mathbb{S}^d; p)$ para o **espaço das medidas zonais** sobre $\mathbb{S}^d$, o qual é definido por

$$M(\mathbb{S}^d; p) = \left\{ \mu \in M(\mathbb{S}^d) : R_\alpha \mu = \mu, \text{ para toda } \alpha \in SO^p_{d+1} \right\}.$$

O **espaço das funções zonais** é definido como sendo o conjunto das funções em $\mathbb{S}^d$ satisfazendo a mesma condição de invariância.

Para $x \in \mathbb{S}^d$, consideraremos os seguintes espaços

$$C(\mathbb{S}^d;x) := \left\{ f \in C(\mathbb{S}^d) : R_\alpha f = f, \text{ para toda } \alpha \in SO_{d+1}^x \right\},$$

$$L^q(\mathbb{S}^d;x) := \left\{ f \in L^q(\mathbb{S}^d) : R_\alpha f = f, \text{ para toda } \alpha \in SO_{d+1}^x \right\},$$

para $1 \le q \le \infty$, e

$$M(\mathbb{S}^d;x) := \left\{ \mu \in M(\mathbb{S}^d) : R_\alpha \mu = \mu, \text{ para toda } \alpha \in SO_{d+1}^x \right\},$$

em que $L^q(\mathbb{S}^d)$ é o espaço das funções Borel mensuráveis f, tais que

$$\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^q d\sigma_d(x) < \infty, \quad \text{se } 1 \le q < \infty, \quad \text{e} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{S}^d} |f(x)| < \infty, \quad \text{se } q = \infty.$$

Em particular, para $x = p$ os espaços acima são os zonais. Além disso, $C(\mathbb{S}^d;x)$, $L^q(\mathbb{S}^d;x)$ e $M(\mathbb{S}^d;x)$ são subespaços fechados de $C(\mathbb{S}^d)$, $L^q(\mathbb{S}^d)$ e $M(\mathbb{S}^d)$, respectivamente. Consequentemente, são espaços de Banach sob as normas

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{S}^d} |f(x)|,$$

$$\|f\|_q = \left(\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^q d\sigma_d(x) \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{S}^d} |f(x)|, \quad \text{para } q = \infty,$$

e

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{S}^d),$$

respectivamente.

A seguir, escreveremos $F(\mathbb{S}^d;x)$ para representar qualquer um dos espaços $C(\mathbb{S}^d;x)$, $L^q(\mathbb{S}^d;x)$ ou $M(\mathbb{S}^d;x)$, para $x \in \mathbb{S}^d$.

Sejam $x \in \mathbb{S}^d$ e $\alpha \in SO_{d+1}$ tais que $x\alpha = p$, consideraremos a aplicação $\varphi_x : F(\mathbb{S}^d;p) \longrightarrow F(\mathbb{S}^d;x)$ definida por

$$\varphi_x f = R_\alpha f, \quad f \in F(\mathbb{S}^d;p). \tag{3.4}$$

Teorema 3.1.2. Para todo $x_1 \in \mathbb{S}^d$, a aplicação $\varphi_{x_1} : F(\mathbb{S}^d;p) \longrightarrow F(\mathbb{S}^d;x_1)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que $\varphi_{x_1} f \in F(\mathbb{S}^d;x_1)$, para $f \in F(\mathbb{S}^d;p)$. Para isto, basta mostrar que $R_\beta(\varphi_{x_1} f) = \varphi_{x_1} f$, para todo $\beta \in SO_{d+1}^{x_1}$. Para $\alpha_1 \in SO_{d+1}$ tal que $x_1\alpha_1 = p$,

$$x_1 \cdot x_1\beta^{-1}\alpha_1^{-1} = x_1\alpha_1 \cdot x_1\beta^{-1} = p \cdot x_1.$$

Ademais,

$$x_1 \cdot x_1\alpha_1^{-1}\beta^{-1} = x_1\beta \cdot x_1\alpha_1^{-1} = x_1 \cdot x_1\alpha_1^{-1} = x_1\alpha_1 \cdot x_1 = p \cdot x_1.$$

Dessa forma, $x_1 \cdot x_1\beta^{-1}\alpha_1^{-1} = x_1 \cdot x_1\alpha_1^{-1}\beta^{-1}$, isto é, $x_1 \cdot (x_1\beta^{-1}\alpha_1^{-1} - x_1\alpha_1^{-1}\beta^{-1}) = 0$, o que mostra que $x_1\beta^{-1}\alpha_1^{-1} = x_1\alpha_1^{-1}\beta^{-1}$. Portanto, para $x \in \mathbb{S}^d$,

$$x\alpha_1\beta \cdot x_1 = x \cdot x_1\beta^{-1}\alpha_1^{-1} = x \cdot x_1\alpha_1^{-1}\beta^{-1} = x\beta\alpha_1 \cdot x_1,$$

o que nos permite concluir que $x\alpha_1\beta = x\beta\alpha_1$, para todo $x \in \mathbb{S}^d$. Seja $\alpha \in SO^p_{d+1}$, podemos mostrar que $x\alpha_1\alpha = x\alpha\alpha_1$, para todo $x \in \mathbb{S}^d$, apenas trocando x_1 por p e β por α nas contas anteriores. Já vimos que para $\beta \in SO^{x_1}_{d+1}$, $\beta = \alpha_1\alpha\alpha_1^{-1}$, em que $\alpha \in SO^p_{d+1}$. Consequentemente,

$$R_\beta(\varphi_{x_1} f) = R_\beta(R_{\alpha_1} f) = R_{\beta\alpha_1} f = R_{\alpha_1\alpha} f = R_{\alpha_1} R_\alpha f = R_{\alpha_1} f = \varphi_{x_1} f.$$

Mostremos que φ_{x_1} está bem definida. Observamos que R_α é um automorfismo isométrico em $C(\mathbb{S}^d)$, $L^p(\mathbb{S}^d)$ e $M(\mathbb{S}^d)$ e sua inversa é $R_{\alpha^{-1}}$, para todo $\alpha \in SO_{d+1}$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in SO_{d+1}$ tais que $x_1\alpha_1 = p$ e $x_1\alpha_2 = p$, temos

$$p\alpha_2^{-1}\alpha_1 = x_1\alpha_1 = p,$$

e o que mostra que $\alpha_2^{-1}\alpha_1 \in SO^p_{d+1}$. Como $R_\alpha f = f$, para todo $\alpha \in SO^p_{d+1}$, em particular, vale

$$R_{\alpha_2^{-1}\alpha_1} f = f, \quad f \in F(\mathbb{S}^d; p). \tag{3.5}$$

Além disso, temos

$$p \cdot x_1\alpha_1^{-1}\alpha_2 = p\alpha_2^{-1} \cdot x_1\alpha_1^{-1} = x_1 \cdot x_1\alpha_1^{-1} = x_1\alpha_1 \cdot x_1 = p \cdot x_1 = p \cdot p\alpha_1^{-1} = p \cdot x_1\alpha_2\alpha_1^{-1},$$

o que nos permite concluir que $x_1\alpha_1^{-1}\alpha_2 = x_1\alpha_2\alpha_1^{-1}$. Assim,

$$x\alpha_2^{-1}\alpha_1 \cdot x_1 = x \cdot x_1\alpha_1^{-1}\alpha_2 = x \cdot x_1\alpha_2\alpha_1^{-1} = x\alpha_1\alpha_2^{-1} \cdot x_1, \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

isto é, $x\alpha_2^{-1}\alpha_1 = x\alpha_1\alpha_2^{-1}$, para todo $x \in \mathbb{S}^d$. Logo,

$$R_{\alpha_2^{-1}\alpha_1} f = R_{\alpha_1} R_{\alpha_2^{-1}} f = R_{\alpha_2^{-1}} R_{\alpha_1} f, \quad f \in F(\mathbb{S}^d; p). \tag{3.6}$$

Observe que (3.5), juntamente com (3.6), nos mostra que $R_{\alpha_1} f = R_{\alpha_2} f$, para toda $f \in F(\mathbb{S}^d; p)$.

Finalmente, φ_{x_1} é bijetora pois a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi_p : F(\mathbb{S}^d; x_1) & \longrightarrow & F(\mathbb{S}^d; p) \\ f & \longmapsto & R_{\alpha_1^{-1}} f \end{array}$$

é a inversa de φ_{x_1}. □

Mostraremos que o espaço das órbitas de $\mathbb{S}^d$ sob o grupo de rotação $SO^{x_1}_{d+1}$ é homeomorfo ao intervalo $I = [-1, 1]$. Para apresentar este resultado precisamos das seguintes definições.

A ação de um grupo $(G, \cdot)$ sobre conjunto X é uma aplicação $a : G \times X \to X$ satisfazendo:

(i) se e é a identidade de G, então $a(e, x) = x$, para todo $x \in X$;

(ii) $a(g \cdot h, x) = a(g, a(h, x))$, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$.

Definição 3.1.3. Seja G um grupo que age sobre um espaço X. O conjunto

$$G \cdot x = a(G \times \{x\}) = \{g \cdot x : g \in G\} \subset X$$

é chamado de **órbita** de $x \in X$ sob G. O **espaço das órbitas**, denotado por X/G, é a família de todas as órbitas de X.

Para cada $x \in \mathbb{S}^d$, o grupo de rotações SO^x_{d+1} age sobre $\mathbb{S}^d$, em termos da aplicação $a_x : SO^x_{d+1} \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$, dada por

$$a_x(\alpha, y) = y\alpha, \quad (\alpha, y) \in SO^x_{d+1} \times \mathbb{S}^d.$$

Nesse caso, o espaço da órbitas $\mathbb{S}^d/SO^x_{d+1}$ é dado por

$$\mathbb{S}^d/SO^x_{d+1} = \{a_x(SO^x_{d+1} \times \{y\}) : y \in \mathbb{S}^d\} = \{y \cdot SO^x_{d+1} : y \in \mathbb{S}^d\} = \{y\alpha : y \in \mathbb{S}^d, \alpha \in SO^x_{d+1}\}.$$

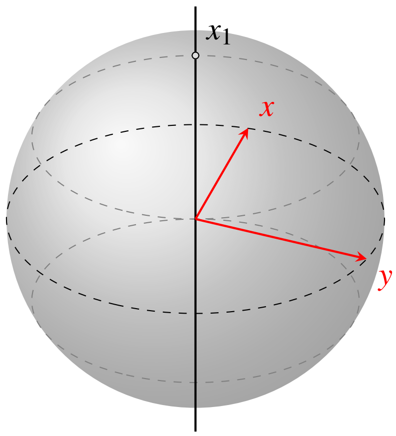

Figura 1 – Representação de algumas órbitas de $\mathbb{S}^2/SO^{x_1}_3$ em $\mathbb{S}^2$.

Mostraremos que a aplicação contínua $C_{x_1} : \mathbb{S}^d \longrightarrow I$, com $I = [-1, 1]$, definida por $x \mapsto x_1 \cdot x$ induz um homeomorfismo do espaço das órbitas $\mathbb{S}^d/SO^{x_1}_{d+1}$ em I, para todo $x_1 \in \mathbb{S}^d$.

Proposição 3.1.4. Para todo $x_1 \in \mathbb{S}^d$, a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{C}_{x_1} : \mathbb{S}^d/SO^{x_1}_{d+1} &\longrightarrow I \\ x \cdot SO^{x_1}_{d+1} &\longmapsto C_{x_1}(x) = x_1 \cdot x \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Para qualquer $\alpha \in SO^{x_1}_{d+1}$, vale

$$C_{x_1}(x\alpha) = x_1 \cdot x\alpha = x_1\alpha^{-1} \cdot x = x_1 \cdot x = C_{x_1}(x), \quad x \in \mathbb{S}^d.$$

Assim, C_{x_1} é constante em cada órbita de $\mathbb{S}^d$ sob $SO^{x_1}_{d+1}$ e $\bar{C}_{x_1}$ está bem definida.

Suponha agora que $C_{x_1}(x) = C_{x_1}(y)$, para $x, y \in \mathbb{S}^d$. Como $x_1 \cdot x = x_1 \cdot y$, temos que $x_1 \cdot (x - y) = 0$, isto é, $x_1 \perp (x - y)$. Neste caso, $y = x\alpha$, para algum $\alpha \in SO_{d+1}^{x_1}$ e, assim, $y \cdot SO_{d+1}^{x_1} = x \cdot SO_{d+1}^{x_1}$, mostrando que $\bar{C}_{x_1}$ é injetora.

Observe também que $\bar{C}_{x_1}$ é sobrejetora. De fato, para $t \in I$, tomando $y \in \mathbb{S}^d$ com t na primeira coordenada, temos que $p \cdot y = t$. Note que existe $\gamma \in SO_{d+1}$ tal que $x_1\gamma = p$ e que, para este γ, existe $x \in \mathbb{S}^d$ tal que $y\gamma^{-1} = x$. Assim,

$$p \cdot y = p \cdot x\gamma = p\gamma^{-1} \cdot x = x_1 \cdot x,$$

o que prova a sobrejetividade de C_{x_1} e, consequentemente, a sobrejetividade de $\bar{C}_{x_1}$.

Uma vez que $x \longmapsto x \cdot SO_{d+1}^{x_1}$ é contínua, pelo Teorema 2.1.1, $\mathbb{S}^d / SO_{d+1}^{x_1}$ é compacto. Por fim, pelo Teorema 2.1.2, $\bar{C}_{x_1}$ é um homeomorfismo, como queríamos. $\square$

O resultado acima nos permite agora relacionar funções zonais às funções definidas em I. Consideremos a aplicação C_p definida anteriormente. Sejam $t \in I$ e $x, y \in \mathbb{S}^d$ tais que $C_p(x) = C_p(y) = t$, então devemos ter $y = x\alpha$, para algum $\alpha \in SO_{d+1}^{p}$.

Além disso, se f é zonal, então $f(y) = f(x\alpha) = f(x)$. Portanto, f é constante em cada conjunto $C_p^{-1}(t)$, $t \in I$. Consequentemente, existe uma função $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(t) = f(x), \quad \text{com} \quad C_p(x) = t, \quad t \in I,$$

isto é, $\tilde{f}(t) = f(C_p^{-1}(t))$.

Corolário 3.1.5. A função $\Psi_p : F(\mathbb{S}^d; p) \longrightarrow F(I)$ definida por $\Psi_p(f) = \tilde{f}$ é uma bijeção.

Definição 3.1.6. Seja $1 \le q < \infty$. Denotaremos por $L_d^q(I)$ o espaço das funções Borel mensuráveis $\Psi_p(f)$ em I, satisfazendo

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\Psi_p f(p \cdot x)|^q dx < \infty.$$

Escreveremos

$$\|\Psi_p f\|_{q,d} = \left(\int_{\mathbb{S}^d} |\Psi_p f(p \cdot x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad \Psi_p(f) \in L_d^q(I).$$

O espaço das funções contínuas $\Psi_p(f)$ em I é denotado por $C(I)$ e a norma considerada é dada por

$$\|\Psi_p(f)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{S}^d} |\Psi_p f(p \cdot x)|, \quad \Psi_p(f) \in C(I).$$

Os espaços acima são os espaços de funções zonais no seguinte sentido.

Proposição 3.1.7. Seja $1 \le q < \infty$.

(a) $(L_d^q(I), \|\cdot\|_{q,d})$ é isomorfo ao espaço de Banach $(L^q(\mathbb{S}^d; p), \|\cdot\|_q)$.

(b) $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ é isomorfo ao espaço de Banach $(C(\mathbb{S}^d;p), \|\cdot\|_\infty)$.

As coordenadas polares $(x_1,x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ fornecem as coordenadas para $\mathbb{S}^1$, quando $r=1$. O sistema de coordenadas para $\mathbb{S}^d$, o qual pode ser consultado em (DAI; XU, 2013, p. 17), é dado por

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta_1 \\ x_2 = \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ x_d = \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-1}\cos\varphi \\ x_{d+1} = \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-1}\sin\varphi, \end{cases}$$

em que $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \theta_i \leq \pi$, para $i = 1,\ldots,d-1$. Além disso,

$$d\omega_d = \prod_{j=1}^{d-1}(\sin\theta_{d-j})^j d\theta_{d-1}\ldots d\theta_1 d\varphi. \tag{3.7}$$

Observe que (3.7), juntamente com (3.2), nos permite concluir que

$$d\sigma_d = \frac{1}{\omega_d}\sin\theta_{d-1}\ldots(\sin\theta_1)^{d-1}d\theta_{d-1}\ldots d\theta_1 d\varphi.$$

Usando o sistema de coordenadas acima e lembrando que $p = (1,0,\ldots,0)$, temos

$$\begin{aligned} p\cdot x &= 1\cos\theta_1 + 0(\sin\theta_1\cos\theta_2) + \ldots + 0(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-1}\sin\varphi) \\ &= \cos\theta_1. \end{aligned}$$

Assim, se $\Psi_p f \in L^q_d(I)$,

$$\begin{aligned} \|\Psi_p f\|^q_{q,d} &= \int_{\mathbb{S}^d} |\Psi_p f(p\cdot x)|^q d\sigma_d \\ &= \frac{1}{\omega_d}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}|\Psi_p f(\cos\theta_1)|^q\sin\theta_{d-1}\ldots(\sin\theta_1)^{d-1}d\theta_{d-1}\ldots d\theta_1 d\varphi. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança variáveis $t = \cos\theta_1$, obtemos $dt = -\sin\theta_1 d\theta_1$ e $\sin\theta_1 = \sqrt{1-t^2}$. Portanto,

$$\|\Psi_p f\|^q_{q,d} = \frac{1}{\omega_d}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}|\Psi_p f(t)|^q\prod_{j=1}^{d-2}(\sin\theta_{d-j})^j(1-t^2)^{(d-2)/2}d\theta_{d-1}\ldots d\theta_2 dt d\varphi.$$

Do Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \|\Psi_p f\|^q_{q,d} &= \frac{1}{\omega_d}\int_{-1}^{1}|\Psi_p f(t)|^q(1-t^2)^{(d-2)/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\prod_{j=1}^{d-2}(\sin\theta_{d-j})^j d\theta_{d-1}\ldots d\theta_2 d\varphi dt \\ &= \frac{1}{\omega_d}\int_{-1}^{1}|\Psi_p f(t)|^q(1-t^2)^{(d-2)/2}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}d\omega_{d-1}dt \\ &= \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d}\int_{-1}^{1}|\Psi_p f(t)|^q(1-t^2)^{(d-2)/2}dt. \end{aligned}$$

Consequentemente, as funções em $L_d^q(I)$ são exatamente as funções em $L^q(I;d\Omega_d)$, onde

$$d\Omega_d(t) = (1-t^2)^{(d-2)/2}dt,$$

o que prova a Proposição 3.1.7.

Da teoria de topologia, sabemos que espaços Hausdorff compactos são localmente compactos. Assim, uma vez que SO_{d+1} é compacto, pelo Teorema 2.3.5, temos que SO_{d+1} possui uma medida de Haar à esquerda. Além disso, pela Proposição 2.3.8, $\Delta \equiv 1$, o que nos permite concluir que a medida de Haar à esquerda é também a medida de Haar à direita. Denotaremos por $d\alpha$ a medida de Haar normalizada, isto é, $\int_{SO_{d+1}} d\alpha = 1$. Consequentemente,

$$\int_{SO_{d+1}} f(x\alpha)d\alpha = \int_{\mathbb{S}^d} f(x)d\sigma_d, \quad f \in L^1(\mathbb{S}^d).$$

Veremos, a seguir, que para toda $\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$, a bijeção $\Psi_p : M(\mathbb{S}^d;p) \longrightarrow M(I)$, estabelecida no Corolário 3.1.5, satisfaz

$$\int_{\mathbb{S}^d} fd\mu = \int_I \Psi_p f d(\Psi_p\mu), \quad f \in C(\mathbb{S}^d;p).$$

Lema 3.1.8. Seja $\theta : M(I) \longrightarrow M(\mathbb{S}^d;p)$ definida por

$$\int_{\mathbb{S}^d} fd(\theta\mu) = \int_I \Psi_p(\omega f)d\mu, \tag{3.8}$$

em que

$$\omega f(x) = \int_{SO_{d+1}^p} f(x\alpha)d\alpha, \quad f \in C(\mathbb{S}^d),$$

e $d\alpha$ é a medida de Haar normalizada de SO_{d+1}^p. Então, θ é linear e limitada.

Demonstração. Observe que

(i) $\omega f \in C(\mathbb{S}^d;p)$, uma vez que

$$R_\beta\omega f(x) = \omega f(x\beta) = \int_{SO_{d+1}^p} f(x\beta\alpha)d\alpha = \int_{SO_{d+1}^p} f(x\alpha)d\alpha = \omega f(x), \text{ para toda } \beta \in SO_{d+1}^p.$$

(ii) Se $g \in C(\mathbb{S}^d;p)$, então

$$\begin{aligned}
\omega g(x) &= \int_{SO_{d+1}^p} g(x\alpha)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}^p} R_\alpha g(x)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}^p} g(x)d\alpha \\
&= g(x)\int_{SO_{d+1}^p} d\alpha \\
&= g(x),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

uma vez que $\int_{SO_{d+1}^p} d\alpha = 1$.

Note que $\theta\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$. Primeiramente, veja que, para $E \subset \mathbb{S}^d$ e $\theta\mu$-mensurável,

$$\int_{\mathbb{S}^d} \chi_E d(R_\beta \theta\mu) = \int_I \Psi_p R_\beta(\omega\chi_E) d\mu, \text{ para toda } \beta \in SO^p_{d+1},$$

em que χ_E é a função indicadora do conjunto E. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} \chi_E d(R_\beta \theta\mu) &= R_\beta \theta\mu(E) \\ &= \theta\mu(E_\beta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \chi_{E_\beta} d(\theta\mu) \\ &= \int_I \Psi_p(\omega\chi_{E_\beta}) d\mu \\ &= \int_I \Psi_p R_\beta(\omega\chi_E) d\mu. \end{aligned}$$

Por argumento de densidade das funções simples, concluímos que, para $f \in C(\mathbb{S}^d)$,

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d(R_\beta \theta\mu) = \int_I \Psi_p R_\beta(\omega f) d\mu, \text{ para toda } \beta \in SO^p_{d+1}$$

e, consequentemente,

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d(R_\beta \theta\mu) = \int_I \Psi_p(\omega f) d\mu = \int_{\mathbb{S}^d} f d(\theta\mu), \text{ para toda } \beta \in SO^p_{d+1}.$$

Considere $\mu_1, \mu_2 \in M(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} f d\theta(\mu_1 + \lambda\mu_1) &= \int_I \Psi_p(\omega f) d(\mu_1 + \lambda\mu_2) \\ &= \int_I \Psi_p(\omega f) d\mu_1 + \lambda \int_I \Psi_p(\omega f) d\mu_2 \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} f d(\theta\mu_1) + \lambda \int_{\mathbb{S}^d} f d(\theta\mu_2), \end{aligned}$$

mostrando que θ é linear.

Ademais, uma vez que Ψ_p é limitada, existe $C \geq 0$ tal que

$$|\Psi_p f| \leq C\|f\|_\infty, \text{ para toda } f \in C(\mathbb{S}^d;p).$$

Em particular,

$$|\Psi_p 1| \leq C\|1\|_\infty = C.$$

Assim, para $\mu \in M(I)$,

$$\begin{aligned} \|\theta\mu\| &= |\theta\mu|(\mathbb{S}^d) = \int_{\mathbb{S}^d} 1 d|\theta\mu| \\ &= \int_I \Psi_p(1) d|\mu| \leq \int_I |\Psi_p(1)| d|\mu| \\ &\leq C \int_I 1 d|\mu| = C\|\mu\|, \end{aligned}$$

o que prova a limitação de θ. □

Teorema 3.1.9. Os espaços $M(\mathbb{S}^d;p)$ e $M(I)$ são isomorfos.

Demonstração. Seja $\Psi_p : M(\mathbb{S}^d;p) \longrightarrow M(I)$ a função estabelecida no Corolário 3.1.5. Podemos ver que, para $\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$ e E um conjunto de Borel em I,

$$\Psi_p\mu(E) = \mu(\{x : x\cdot p \in E\}),$$

isto é,

$$\int_I \chi_E d(\Psi_p\mu) = \int_{\mathbb{S}^d} (\Psi_p^{-1}\chi_E)d\mu,$$

uma vez que

$$\Psi_p^{-1}\chi_E(x) = \chi_E(p\cdot x) = \begin{cases} 1, \text{ se } p\cdot x \in E \\ 0, \text{ se } p\cdot x \notin E, \end{cases}$$

onde χ_E é a função característica de E. Por argumento de densidade, novamente, concluímos que vale

$$\int_I f d(\Psi_p\mu) = \int_{\mathbb{S}^d} (\Psi_p^{-1} f)d\mu, \quad f \in C(I). \tag{3.10}$$

Mostraremos que θ definida no Lema 3.1.8 é bijetora e que Ψ_p é sua transformação inversa. Suponha que ocorre

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d(\theta\mu) = 0, \text{ para toda } f \in C(\mathbb{S}^d).$$

Por (3.8),

$$\int_I \Psi_p(\omega f)d\mu = 0, \text{ para toda } f \in C(\mathbb{S}^d),$$

e, aplicando (3.9), temos

$$\int_I \Psi_p(f)d\mu = 0, \text{ para toda } f \in C(\mathbb{S}^d;p).$$

Do Corolário 3.1.5, segue que $\mu = 0$ e, consequentemente, θ é injetora. Agora, aplicando (3.8) para a medida $\theta\Psi_p\mu$, obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d(\theta\Psi_p\mu) = \int_I \Psi_p(\omega f)d(\Psi_p\mu).$$

De (3.10), segue que, se $f \in C(\mathbb{S}^d;p)$, então

$$\begin{aligned} \int_I \Psi_p(\omega f)d(\Psi_p\mu) &= \int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p^{-1}(\Psi_p(\omega f))d\mu \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \omega f d\mu \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} f d\mu. \end{aligned}$$

Logo, $\theta^{-1} = \Psi_p$ e Ψ_p é um isomorfismo. □

Corolário 3.1.10. O espaço dual de $C(\mathbb{S}^d;p)$ é isomorfo a $M(\mathbb{S}^d;p)$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.2.13, $C^*(I)$ é isomorfo a $M(I)$. Ademais, vimos anteriormente que Ψ_p é um isomorfismo de $C(\mathbb{S}^d;p)$ em $C(I)$. Com isso, afirmamos que

$$\Psi_p^* : C^*(I) \longrightarrow C^*(\mathbb{S}^d;p)$$

também é um isomorfismo. Com efeito, uma vez que o dual de um espaço normado é sempre Banach, é suficiente provar que Ψ_p^* é linear, limitada e bijetora, mas, como Ψ_p é linear e limitada, pela Observação 2.1.11, o mesmo vale para Ψ_p^*.

Sabemos que se E e F são Banach e $T \in \mathscr{L}(E,F)$ é bijetora, então T^* é bijetora. De fato, se E e F são Banach e $T \in \mathscr{L}(E,F)$ é bijetora, pela Observação 2.1.7, $T^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. Como $T^{-1}T = I_E$ e $TT^{-1} = I_F$, seque que $T^*(T^{-1})^* = I_{E^*}$ e $(T^{-1})^*T^* = I_{F^*}$, o que mostra que T^* é bijetora.

Dessa forma, Ψ_p^* é um isomorfismo. Do teorema anterior, $M(\mathbb{S}^d;p)$ é isomorfo a $M(I)$ e, portanto, $C^*(\mathbb{S}^d;p)$ é isomorfo a $M(\mathbb{S}^d;p)$, como queríamos. □

3.2 Convoluções em espaços de medidas zonais

O Corolário 3.1.10 é utilizado para definir a convolução em $M(\mathbb{S}^d;p)$ e, por restrição, em $L^1(\mathbb{S}^d;p)$.

Definição 3.2.1. Suponha que $\mu,\nu \in M(\mathbb{S}^d;p)$. Então, a aplicação

$$f \longmapsto \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\mu(x)d\nu(y),$$

para $f \in C(\mathbb{S}^d;p)$, define um funcional linear limitado em $C(\mathbb{S}^d;p)$ e, pelo Corolário 3.1.10, existe um único elemento $\mu * \nu \in M(\mathbb{S}^d;p)$ tal que

$$\int_{\mathbb{S}^d} fd(\mu*\nu) = \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Neste caso, $\mu*\nu$ é dita ser a **convolução** das medidas μ e ν.

Teorema 3.2.2. A convolução é comutativa, distributiva com adição e, satisfaz

$$\|\mu*\nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|.$$

Adicionalmente, se $\mu,\nu \geq 0$, então $\mu*\nu \geq 0$ e $\|\mu*\nu\| = \|\mu\|\|\nu\|$.

Demonstração. Considere $\mu,\nu \in M(\mathbb{S}^d;p)$ e $f \in C(\mathbb{S}^d;p)$. Usando o Teorema de Fubini e a comutatividade do produto interno, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} fd(\mu*\nu) &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\nu(y)d\mu(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(y\cdot x)d\nu(y)d\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d} fd(\nu*\mu).
\end{aligned}
$$

Portanto, a convolução é comutativa.

Para $\nu_1,\nu_2 \in M(\mathbb{S}^d;p)$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} fd(\mu*(\nu_1+\nu_2)) &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\mu(x)d(\nu_1+\nu_2)(y)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\mu(x)d\nu_1(y) + \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p f(x\cdot y)d\mu(x)d\nu_2(y)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d} fd(\mu*\nu_1) + \int_{\mathbb{S}^d} fd(\mu*\nu_2),
\end{aligned}
$$

o que mostra que a convolução é distributiva com adição.

Usando o Teorema 2.2.10 para as medidas μ e ν, temos que existem únicas medidas positivas μ^+,μ^-,ν^+ e ν^- tais que $\mu=\mu^+-\mu^-$ e $\nu=\nu^+-\nu^-$. Assim, uma vez que a convolução é distributiva com adição,

$$
\begin{aligned}
\mu*\nu &= (\mu^+-\mu^-)*\nu\\
&= \mu^+*\nu-\mu^-*\nu\\
&= \mu^+*(\nu^+-\nu^-)-\mu^-*(\nu^+-\nu^-)\\
&= \mu^+*\nu^+-\mu^+*\nu^--\mu^-*\nu^++\mu^-*\nu^-\\
&= (\mu^+*\nu^++\mu^-*\nu^-)-(\mu^+*\nu^-+\mu^-*\nu^+) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

e, pelo Teorema 2.2.10,

$$(\mu*\nu)^+ = \mu^+*\nu^++\mu^-*\nu^-$$

e

$$(\mu*\nu)^- = \mu^+*\nu^-+\mu^-*\nu^+.$$

Dessa forma, se $\mu,\nu\geq 0$, $\mu^-,\nu^-=0$ e $\mu*\nu=(\mu*\nu)^+=\mu^+*\nu^+$. Portanto, $\mu*\nu\geq 0$ e

$$
\begin{aligned}
|\mu*\nu|(\mathbb{S}^d) &= (\mu*\nu)^+(\mathbb{S}^d)\\
&= (\mu^+*\nu^+)(\mathbb{S}^d)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d} 1d(\mu^+*\nu^+).
\end{aligned}
$$

Agora, note que dada $\mu\in M(\mathbb{S}^d;p)$ temos, pela definição das partes positiva e negativa de uma medida, que $\mu^+,\mu^-\in M(\mathbb{S}^d;p)$. Deste modo, usando a Definição 3.2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mu*\nu|(\mathbb{S}^d) &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p(1)d\mu^+(x)d\nu^+(y)\\
&= \mu^+(\mathbb{S}^d)\nu^+(\mathbb{S}^d) = |\mu|(\mathbb{S}^d)|\nu|(\mathbb{S}^d),
\end{aligned}
$$

o que mostra que $\|\mu * \nu\| = \|\mu\|\|\nu\|$, uma vez que $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{S}^d)$.

Por fim, vamos estudar o caso geral. Sejam $\mu, \nu \in M(\mathbb{S}^d; p)$, utilizando (3.11) juntamente com a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\mu * \nu\| &\leq \|\mu^+ * \nu^+\| + \|\mu^+ * \nu^-\| + \|\mu^- * \nu^+\| + \|\mu^- * \nu^-\| \\
&= |\mu^+ * \nu^+|(\mathbb{S}^d) + |\mu^+ * \nu^-|(\mathbb{S}^d) + |\mu^- * \nu^+|(\mathbb{S}^d) + |\mu^- * \nu^-|(\mathbb{S}^d) \\
&= (\mu^+ * \nu^+)(\mathbb{S}^d) + (\mu^+ * \nu^-)(\mathbb{S}^d) + (\mu^- * \nu^+)(\mathbb{S}^d) + (\mu^- * \nu^-)(\mathbb{S}^d) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} 1 d(\mu^+ * \nu^+) + \int_{\mathbb{S}^d} 1 d(\mu^- * \nu^-) + \int_{\mathbb{S}^d} 1 d(\mu^+ * \nu^-) + \int_{\mathbb{S}^d} 1 d(\mu^- * \nu^+).
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
\|\mu * \nu\| &\leq \mu^+(\mathbb{S}^d)\nu^+(\mathbb{S}^d) + \mu^-(\mathbb{S}^d)\nu^-(\mathbb{S}^d) + \mu^+(\mathbb{S}^d)\nu^-(\mathbb{S}^d) + \mu^-(\mathbb{S}^d)\nu^+(\mathbb{S}^d) \\
&= (\mu^+(\mathbb{S}^d) + \mu^-(\mathbb{S}^d))(\nu^+(\mathbb{S}^d) + \nu^-(\mathbb{S}^d)) \\
&= |\mu|(\mathbb{S}^d)|\nu|(\mathbb{S}^d) \\
&= \|\mu\|\|\nu\|.
\end{aligned}$$

□

Lembre que existe uma imersão de $L^1(\mathbb{S}^d; p)$ em $M(\mathbb{S}^d; p)$, $f \mapsto m_f$, em que $dm_f(x) = f(x)dx$. Com isso em mente, podemos demonstrar o próximo resultado.

Teorema 3.2.3. Suponha que $f \in L^q(\mathbb{S}^d)$ $(C(\mathbb{S}^d))$, $1 \leq q \leq \infty$, e $\mu \in M(\mathbb{S}^d; p)$. Então, a fórmula

$$f * \mu(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) d\varphi_x \mu(y) \tag{3.12}$$

define um elemento de $L^q(\mathbb{S}^d)$ $(C(\mathbb{S}^d))$ e

$$\|f * \mu\|_q \leq \|f\|_q \|\mu\|.$$

Além disso, se f é zonal, então $f * \mu$ também é e $m_{(f*\mu)} = m_f * \mu$.

Demonstração. Seja $\alpha \in SO_{d+1}$, pela definição de φ_x dada no Teorema 3.1.2 e por (3.12),

$$\begin{aligned}
f * \mu(p\alpha) &= \int_{\mathbb{S}^d} f(y) d\varphi_{p\alpha} \mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dR_{\alpha^{-1}} \mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Se $f \in C(\mathbb{S}^d)$, então as integrais abaixo existem para todo $\alpha, \beta \in SO_{d+1}$, e vale

$$|f * \mu(p\alpha) - f * \mu(p\beta)| = \left| \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) d\mu(y) - \int_{\mathbb{S}^d} R_\beta f(y) d\mu(y) \right|.$$

Logo, se $f \in C(\mathbb{S}^d)$ e $\alpha, \beta \in SO_{d+1}$,

$$\begin{aligned} |f*\mu(p\alpha) - f*\mu(p\beta)| &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |(R_\alpha f - R_\beta f)(y)| d|\mu|(y) \\ &\leq \|R_\alpha f - R_\beta f\|_\infty \int_{\mathbb{S}^d} d|\mu|(y) \\ &\leq \|R_\alpha f - R_\beta f\|_\infty \|\mu\|. \end{aligned}$$

Assim, $|f*\mu(p\alpha) - f*\mu(p\beta)| \to 0$, quando $\beta \to \alpha$, uma vez que μ é finita e f é uniformemente contínua. Isso mostra que $f*\mu \in C(\mathbb{S}^d)$. Agora, para todo $\alpha \in SO_{d+1}$, temos

$$\begin{aligned} |f*\mu(p\alpha)| = \left| \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) d\mu(y) \right| &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |R_\alpha f(y)| d|\mu|(y) \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{S}^d} d|\mu|(y) \\ &\leq \|f\|_\infty \|\mu\|, \end{aligned}$$

portanto,

$$\|f*\mu\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\mu\|.$$

Além disso, se $f \in C(\mathbb{S}^d; p)$ e $\alpha \in SO_{d+1}^p$, então vale a igualdade

$$R_\alpha(f*\mu)(x) = f*\mu(x\alpha) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) d\varphi_{x\alpha}\mu(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dR_{\alpha^{-1}\beta}\mu(y),$$

em que $x\beta = p$. Mas,

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(y) dR_{\alpha^{-1}\beta}\mu(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dR_\beta R_{\alpha^{-1}}\mu(y) = \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) dR_\beta \mu(y)$$

e, como $R_\alpha f = f$, para toda $\alpha \in SO_{d+1}^p$, teremos

$$\int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) dR_\beta \mu(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dR_\beta \mu(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) d\varphi_x \mu(y) = f*\mu(x).$$

Dessa forma, $f*\mu \in C(\mathbb{S}^d; p)$.

Uma vez que a esfera é compacta, pelo Teorema 2.1.8, temos que se $f \in L^q(\mathbb{S}^d)$, $1 \leq q < \infty$, então $f*\mu \in L^q(\mathbb{S}^d)$, $\|f*\mu\|_q \leq \|f\|_q \|\mu\|$ e se f é zonal, então $f*\mu$ também é.

Além disso, se $f \in L^\infty(\mathbb{S}^d)$, seja $a := \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{S}^d} |f(x)|$. Denote por A o seguinte conjunto $\{x \in \mathbb{S}^d : f(x) > a\}$. Desse modo, teremos agora

$$\begin{aligned} |f*\mu(p\alpha)| = \left| \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) d\mu(y) \right| &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |R_\alpha f(y)| d|\mu|(y) \\ &\leq \int_A |R_\alpha f(y)| d|\mu|(y) + \int_{\mathbb{S}^d \setminus A} |R_\alpha f(y)| d|\mu|(y) \\ &\leq \int_A |R_\alpha f(y)| d|\mu|(y) + a \int_{\mathbb{S}^d \setminus A} d|\mu|(y) \\ &\leq \int_A |R_\alpha f(y)| d|\mu|(y) + a \int_{\mathbb{S}^d} d|\mu|(y). \end{aligned}$$

Segue que

$$|f*\mu(p\alpha)| \;=\; \left|\int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y)d\mu(y)\right| \leq \int_A |R_\alpha f(y)|d|\mu|(y) + \|f\|_\infty\|\mu\|.$$

A mensurabilidade de f, juntamente com o fato de A ter medida nula nos dá que

$$\int_A |R_\alpha f(y)|d|\mu|(y) = 0$$

e, portanto,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{S}^d} |f*\mu(x)| \leq \|f\|_\infty\|\mu\|.$$

Isso mostra que $f*\mu \in L^\infty(\mathbb{S}^d)$ e

$$\|f*\mu\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|\mu\|, \quad f\in L^\infty(\mathbb{S}^d).$$

A prova da zonalidade é imediata e foi omitida aqui.

Resta provar que $m_{(f*\mu)} = m_f*\mu$. Observe que é suficiente mostrar que, para toda $f\in L^1(\mathbb{S}^d;p)$ e $g\in C(\mathbb{S}^d;p)$, vale a igualdade

$$\int_{\mathbb{S}^d} gdm_{(f*\mu)} = \int_{\mathbb{S}^d} gd(m_f*\mu). \tag{3.13}$$

Para $\alpha\in SO_{d+1}$ tal que $y\alpha = p$, vale

$$x\cdot y = x\cdot y\alpha\alpha^{-1} = x\cdot p\alpha^{-1} = x\alpha\cdot p.$$

Logo, para $h\in F(\mathbb{S}^d;p)$, teremos

$$\Psi_p h(x\cdot y) = \Psi_p h(x\alpha\cdot p) = h(x\alpha) = R_\alpha h(x) = \varphi_y h(x). \tag{3.14}$$

Com isso, se $f\in L^1(\mathbb{S}^d;p)$ e $g\in C(\mathbb{S}^d;p)$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} gdm_{(f*\mu)} &= \int_{\mathbb{S}^d} g(x)(f*\mu)(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} g(x)\int_{\mathbb{S}^d} f(y)d\varphi_x\mu(y)dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} g(x)\varphi_x f(y)d\mu(y)dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} g(x)\Psi_p f(x\cdot y)dxd\mu(y)
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\int_{\mathbb{S}^d} gdm_{(f*\mu)} = \int_{\mathbb{S}^d} g*m_f(y)d\mu(y). \tag{3.15}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{S}^d} gd(m_f*\mu) \;=\; \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p g(x\cdot y)dm_f(x)d\mu(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \varphi_y g(x) dm_f(x) d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} g(x) d\varphi_y m_f(x) d\mu(y)
\end{aligned}
$$

e, neste caso, temos

$$\int_{\mathbb{S}^d} g d(m_f * \mu) = \int_{\mathbb{S}^d} g * m_f(y) d\mu(y). \tag{3.16}$$

Assim, das equações (3.15) e (3.16), a igualdade (3.13) está provada. □

Corolário 3.2.4. Sejam $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$ e $g, h \in L^1(\mathbb{S}^d; p)$. Então,

(i) $g * h(x) = \int_{\mathbb{S}^d} g(y)\varphi_x h(y) dy = \int_{\mathbb{S}^d} \Psi_p g(p \cdot y) \Psi_p h(y \cdot x) dy$.

(ii) $f * g(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y)\varphi_x g(y) dy = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) \Psi_p g(x \cdot y) dy$.

(iii) $R_\alpha(f * g) = (R_\alpha f) * g$, para toda $\alpha \in SO_{d+1}$.

Demonstração. (i) Observe que

$$g * h(x) = g * m_h(x) = \int_{\mathbb{S}^d} g(y) d\varphi_x m_h(y) = \int_{\mathbb{S}^d} g(y)\varphi_x h(y) dy.$$

Como h é zonal, aplicando a fórmula (3.14), obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^d} g(y)\varphi_x h(y) dy = \int_{\mathbb{S}^d} g(y) \Psi_p h(x \cdot y) dy.$$

Como $g \in L^1(\mathbb{S}^d; p)$, a igualdade $g(y) = \Psi_p g(p \cdot y)$ conclui a prova deste item.

(ii) Note que

$$f * g(x) = f * m_g(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) d\varphi_x m_g(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y)\varphi_x g(y) dy.$$

Da zonalidade de g e da equação (3.14), concluímos que

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(y)\varphi_x g(y) dy = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) \Psi_p g(x \cdot y) dy.$$

(iii) Se $\beta \in SO_{d+1}$ é tal que $x\beta = p$, então, para toda $\alpha \in SO_{d+1}$, vale

$$
\begin{aligned}
(R_\alpha f) * g(x) = \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y)\varphi_x g(y) dy &= \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) R_\beta g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} f(y) R_{\alpha^{-1}\beta} g(y) dy,
\end{aligned}
$$

além disso, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} f(y) R_{\alpha^{-1}\beta} g(y) dy = \int_{\mathbb{S}^d} f(y)\varphi_{x\alpha} g(y) dy &= f * g(x\alpha) \\
&= R_\alpha(f * g)(x).
\end{aligned}
$$

□

3.3 Coeficientes de Gegenbauer de medidas e de convoluções

Nesta seção definiremos e exploraremos algumas propriedades dos coeficientes de Gegenbauer de medidas e caracterizaremos os coeficientes das convoluções definidas anteriormente.

Trabalharemos com a classe de polinômios ortogonais chamados de polinômios de Gegenbauer com índice $\lambda = (d-1)/2$ (SZEGŐ, 1975, Seção 4.7). Os polinômios de Gegenbauer, com índice $\lambda = (d-1)/2$ são definidos pela relação

$$(1-2rt+r^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(2\lambda)} P_n^{\lambda}(t) r^n, \quad t \in [-1,1], \quad r \in [0,1).$$

Considerando

$$C_n^{\lambda}(t) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(2\lambda)} P_n^{\lambda}(t),$$

valem as identidades (ERDÉLYI *et al.*, 1981, p. 176),

$$C_n^{\lambda}(t) = (1-t^2)^{1/2-\lambda} \frac{d^n}{dt^n}[(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}] \frac{(-2)^n \Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2n)} \tag{3.17}$$

e

$$\frac{d^n}{dt^n}[C_n^{\lambda}(t)] = 2^n \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}. \tag{3.18}$$

Para todo $n, r \in \mathbb{N}$, aplicando a fórmula (3.17), obtemos

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(t) C_r^{\lambda}(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2} dt = \frac{(-2)^n \Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2n)} \int_{-1}^{1} C_r^{\lambda}(t) \frac{d^n}{dt^n}\left[(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}\right] dt.$$

Seja

$$I(n,r) := \int_{-1}^{1} C_r^{\lambda}(t) \frac{d^n}{dt^n}\left[(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}\right] dt,$$

integrando por partes n vezes a integral acima, concluímos que $I(n,r)$ é igual a

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} C_r^{\lambda}(t) \frac{d^{n-i-1}}{dt^{n-i-1}}[(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}]\right]\Bigg|_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} C_r^{\lambda}(t)(1-t^2)^{n+\lambda-1/2} dt,$$

e, uma vez que,

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} C_r^{\lambda}(t) \frac{d^{n-i-1}}{dt^{n-i-1}}[(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}]\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

concluímos que

$$I(n,r) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} C_r^{\lambda}(t)(1-t^2)^{n+\lambda-1/2} dt.$$

Logo,

$$\int_{-1}^{1} C_r^{\lambda}(t) \frac{d^n}{dt^n}\left[(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}\right] dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} C_r^{\lambda}(t)(1-t^2)^{n+\lambda-1/2} dt$$

e segue que

$$\int_{-1}^{1} C_n^\lambda(t) C_r^\lambda(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2}dt = \frac{2^n\Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2n)} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} C_r^\lambda(t)(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}dt \quad (3.19)$$

Se $n=r$, então a fórmula (3.18) implica que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} C_r^\lambda(t)(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}dt &= 2^n \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n+\lambda-1/2}dt \\
&= 2^n \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\lambda-1/2+1)}{\Gamma(n+\lambda-1/2+3/2)} \\
&= 2^n\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n+\lambda+1/2)}{\Gamma(n+\lambda+1)}.
\end{aligned}$$

Além disso, como consequência das fórmulas de recorrência de (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964, p. 256), temos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{e} \quad \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z), \quad z>0.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} [C_n^\lambda(t)]^2(1-t^2)^{\lambda-1/2}dt &= \frac{(-2)^n\Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{n!\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2n)} (-1)^n 2^n \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(n+\lambda+1/2)}{\Gamma(n+\lambda+1)} \\
&= \frac{2^{2n}\Gamma(\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n)}{n![\Gamma(\lambda)]^2\Gamma(2\lambda+2n)} \sqrt{\pi} \frac{2^{1-2(\lambda+n)}\sqrt{\pi}\Gamma(2\lambda+2n)}{\Gamma(n+\lambda+1)} \\
&= \frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(2\lambda+n)}{n![\Gamma(\lambda)]^2} \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(n+\lambda+1)}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\int_{-1}^{1} [C_n^\lambda(t)]^2(1-t^2)^{\lambda-1/2}dt = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(2\lambda+n)}{n!(\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^2}. \quad (3.20)$$

Se $n>r$, então a identidade (3.18) implica

$$\frac{d^n}{dt^n} C_r^\lambda(t) = 0$$

e, portanto,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} C_r^\lambda(t)(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}dt = 0.$$

Se $n<r$, então escrevemos

$$\int_{-1}^{1} C_n^\lambda(t) C_r^\lambda(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2}dt = \frac{(-2)^r\Gamma(\lambda+r)\Gamma(2\lambda+r)}{r!\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda+2r)} \int_{-1}^{1} C_n^\lambda(t) \frac{d^r}{dt^r}[(1-t^2)^{r+\lambda-1/2}]dt$$

e, pela equação (3.18), concluímos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^r}{dt^r} C_n^\lambda(t)(1-t^2)^{r+\lambda-1/2}dt = 0,$$

uma vez que vale

$$\frac{d^r}{dt^r} C_n^\lambda(t) = 0.$$

Assim, as identidades (3.19) e (3.20) garantem que

$$\int_{-1}^{1} C_n^\lambda(t) C_r^\lambda(t)(1-t^2)^{\lambda-1/2} dt = \begin{cases} 0, & n \neq r \\ \dfrac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(2\lambda+n)}{n!(\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^2}, & n = r. \end{cases} \tag{3.21}$$

Isso prova a ortogonalidade de $\{C_n^\lambda : n \in \mathbb{N}\}$ em $L^2(I)$ e, consequentemente, de $\{P_n^\lambda : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\Psi_p^{-1} P_n^\lambda(x) = P_n^\lambda(p \cdot x)$, obtemos a ortogonalidade de $\{\Psi_p^{-1} P_n^\lambda : n \in \mathbb{N}\}$ em $L^2(\mathbb{S}^d; p)$.

Com o objetivo de explorar propriedades relacionados aos coeficientes de Gegenbauer, que serão definidos em termos do sistema ortogonal completo anterior, e a caracterizar os coeficientes das convoluções, precisamos estabelecer alguns conceitos. A seguinte definição pode ser encontrada em (TU, 2011, p. 66).

Definição 3.3.1. Um **grupo de Lie** G é uma variedade C^∞, com uma estrutura de grupo, tal que as seguintes operações

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab$$

e

$$i : G \to G, \quad i(a) = a^{-1}$$

são infinitamente continuamente diferenciáveis.

Neste ponto, precisaremos da definição de função esférica (HELGASON, 1962, p. 360). No que segue, G é um grupo de Lie conexo e K é um subgrupo compacto.

Definição 3.3.2. Seja f uma função contínua a valores complexos definida em G, não identicamente nula. Dizemos que f é uma **função esférica** se

$$\int_K f(xky)dk = f(x)f(y),$$

para todos $x, y \in G$.

Sabe-se que SO_{d+1} é um grupo de Lie conexo e compacto e SO_{d+1}^p é um subgrupo compacto, por ser fechado. Se f é uma função esférica, então

$$\int_{SO_{d+1}^p} f(\alpha\gamma\beta)d\gamma = f(\alpha)f(\beta), \qquad \text{para todo } \alpha, \beta \in SO_{d+1}. \tag{3.22}$$

Teorema 3.3.3. Seja n um número inteiro não negativo. Então,

$$\int_{SO_{d+1}^p} P_n^\lambda(x \cdot y\alpha)d\alpha = P_n^\lambda(x \cdot p) P_n^\lambda(p \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{S}^d,$$

em que $d\alpha$ é a medida de Haar normalizada de SO_{d+1}^p.

Demonstração. Observamos que $\mathbb{S}^d \cong SO_{d+1}/SO_d$ ou, equivalentemente, $\mathbb{S}^d \cong SO_{d+1}/SO^p_{d+1}$, uma vez que $SO^p_{d+1} \cong SO_d$. Dado $x \in \mathbb{S}^d$, considere $\alpha_x \in SO_{d+1}$ tal que $p\alpha_x = x$. Assim, para uma $\bar{f} : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada, obtemos

$$\begin{aligned} f : SO_{d+1}/SO^p_{d+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ SO^p_{d+1}\alpha_x &\longmapsto \bar{f}(p\alpha_x). \end{aligned}$$

De modo equivalente, definimos

$$\begin{aligned} f : SO_{d+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha_x &\longmapsto \bar{f}(p\alpha_x), \end{aligned}$$

de forma que $f(\alpha_x) = f(\beta\alpha_x)$, para todo $\beta \in SO^p_{d+1}$. Assim, as funções em $\mathbb{S}^d$ correspondem às funções em SO_{d+1} que são invariantes à esquerda sob a ação de SO^p_{d+1}.

Como consequência da igualdade (3.22), concluímos que uma função esférica f é bi-invariante sob SO^p_{d+1}. De fato, já sabemos que f é invariante à esquerda e a invariância à direita segue do seguinte. Para todo $\alpha \in SO_{d+1}$ e $\beta \in SO^p_{d+1}$, vale

$$p\alpha\beta \cdot p = p\alpha \cdot p\beta^{-1} = p\alpha \cdot p,$$

o que implica que $p\alpha\beta = p\alpha$. Logo,

$$f(\alpha\beta) = \bar{f}(p\alpha\beta) = \bar{f}(p\alpha) = f(\alpha), \text{ para todo } \alpha \in SO_{d+1} \text{ e } \beta \in SO^p_{d+1},$$

o que prova que f é invariante à direita.

Escrevendo (3.22) em termos de $\bar{f}$, obtemos

$$\int_{SO^p_{d+1}} \bar{f}(p\alpha\gamma\beta)d\gamma = \bar{f}(p\alpha)\bar{f}(p\beta), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in SO_{d+1}. \tag{3.23}$$

Em (CARTAN, 1929, p. 225), é provado que $\{P^\lambda_n(p \cdot p\alpha) : \alpha \in SO^p_{d+1}\}$ é o conjunto das funções esféricas em SO^p_{d+1}. Assim, de (3.23), obtemos

$$\int_{SO^p_{d+1}} P^\lambda_n(p \cdot p\alpha\gamma\beta)d\gamma = P^\lambda_n(p \cdot p\alpha)P^\lambda_n(p \cdot p\beta), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in SO_{d+1}.$$

Equivalentemente,

$$\int_{SO^p_{d+1}} P^\lambda_n(p\beta^{-1} \cdot p\alpha\gamma)d\gamma = P^\lambda_n(p \cdot p\alpha)P^\lambda_n(p\beta^{-1} \cdot p), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in SO_{d+1}.$$

Tomando $p\beta^{-1} = x$ e $p\alpha = y$,

$$\int_{SO^p_{d+1}} P^\lambda_n(x \cdot y\gamma)d\gamma = P^\lambda_n(p \cdot y)P^\lambda_n(x \cdot p),$$

para todo $x, y \in \mathbb{S}^d$, como queríamos. □

Lema 3.3.4. Se $f \in C(\mathbb{S}^d)$ e $\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$, então

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d\mu = \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(x) \int_{SO^p_{d+1}} f(x\alpha)d\alpha.$$

Demonstração. Sejam $f \in C(\mathbb{S}^d)$ e $\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$, observamos que

(i) $\alpha \longmapsto \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f d\mu$ é uma função contínua de $\alpha \in SO_{d+1}$ e,

(ii) para todo $\alpha \in SO^p_{d+1}$, vale $\int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f d\mu = \int_{\mathbb{S}^d} f d\mu$.

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} f d\mu &= \int_{SO^p_{d+1}} d\alpha \int_{\mathbb{S}^d} f d\mu \\
&= \int_{SO^p_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} f d\mu d\alpha \\
&= \int_{SO^p_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f d\mu d\alpha \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{SO^p_{d+1}} R_\alpha f d\alpha d\mu \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{SO^p_{d+1}} f(x\alpha) d\alpha d\mu(x).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d\mu = \int_{\mathbb{S}^d} \int_{SO^p_{d+1}} f(x\alpha) d\alpha d\mu(x). \tag{3.24}$$

Relembramos que SO^p_{d+1} é compacto, uma vez que é um subgrupo fechado de SO_{d+1}, e, pelo Teorema 2.3.5, o grupo SO^p_{d+1} possui uma medida de Haar à esquerda. Além disso, pela Proposição 2.3.8, sabemos que SO^p_{d+1} é unimodular e vale

$$\int_{SO^p_{d+1}} f(x\alpha)d\alpha = \int_{\mathbb{S}^d} f(x)dx, \quad f \in L^1(\mathbb{S}^d). \tag{3.25}$$

Se $f \in C(\mathbb{S}^d)$, então é claro que $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$. Portanto, as equações (3.24) e (3.25) garantem a igualdade

$$\int_{\mathbb{S}^d} f d\mu = \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(x) \int_{SO^p_{d+1}} f(x\alpha)d\alpha.$$

□

Definição 3.3.5. Seja $n = 0,1,2,\ldots$, definimos o **n-ésimo coeficiente de Gegenbauer** de $\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$ por

$$\hat{\mu}_n = \int_{\mathbb{S}^d} P^\lambda_n(p \cdot x) d\mu(x)$$

e, para $f \in L^1(\mathbb{S}^d;p)$, definimos

$$\hat{f}_n = \int_{\mathbb{S}^d} P^\lambda_n(p \cdot x) f(x) dx.$$

De (MORIMOTO, 1998, p. 28), sabemos que $P_n^\lambda(1) = 1$ e $|P_n^\lambda(t)| \leq 1$, para $-1 \leq t \leq 1$. Logo, para toda $\mu, \nu \in M(\mathbb{S}^d; p)$ e $f \in L^1(\mathbb{S}^d; p)$, vale

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}_n| &= \left| \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot x) d\mu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{S}^d} |P_n^\lambda(p \cdot x)| d|\mu|(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^d} d|\mu|(x) = |\mu|(\mathbb{S}^d) = \|\mu\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n| &= \left| \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot x) f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{S}^d} |P_n^\lambda(p \cdot x)||f(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |f(x)| dx = \|f\|_1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

O seguite resultado estabelece o coeficiente de Gegenbauer de uma convolução de medidas zonais.

Teorema 3.3.6. Para $\mu, \nu \in M(\mathbb{S}^d; p)$,

$$\widehat{(\mu * \nu)}_n = \hat{\mu}_n \hat{\nu}_n, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\widehat{(\mu * \nu)}_n = \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot x) d(\mu * \nu)(x) = \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(x \cdot y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Aplicando o Lema 3.3.4, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{(\mu * \nu)}_n &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(x) \int_{SO_{d+1}^p} P_n^\lambda(x\alpha \cdot y) d\alpha d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(x) \int_{\mathbb{S}^d} \int_{SO_{d+1}^p} P_n^\lambda(x\alpha \cdot y) d\alpha d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} \int_{SO_{d+1}^p} P_n^\lambda(x\alpha \cdot y) d\alpha d\nu(y) d\mu(x), \end{aligned}$$

uma vez que para $y \in \mathbb{S}^d$ fixado, $P_n^\lambda(x \cdot y) \in L^1(\mathbb{S}^d)$. Pelo Teorema 3.3.3,

$$\begin{aligned} \widehat{(\mu * \nu)}_n &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot x) P_n^\lambda(p \cdot y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot y) d\nu(y) P_n^\lambda(p \cdot x) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot x) d\mu(x) \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p \cdot y) d\nu(y) \\ &= \hat{\mu}_n \hat{\nu}_n, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

Definição 3.3.7. Para $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, definimos

$$\tilde{f}_n(x) = f * \Psi_p^{-1} P_n^\lambda(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) P_n^\lambda(x \cdot y) dy, \quad x \in \mathbb{S}^d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $\{\Psi_p^{-1}P_n^\lambda : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $C(\mathbb{S}^d;p)$ (DUNKL, 1966, p. 254), usando o Corolário 3.2.4 temos a boa definição de $\tilde{f}_n$ e, para $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, vale

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-2}{n} \left(\frac{2n}{d-1}+1\right) \tilde{f}_n. \tag{3.26}$$

Proposição 3.3.8. Sejam $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, $\mu \in M(\mathbb{S}^d;p)$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(f*\mu)_n^\sim(x) = \hat{\mu}_n \tilde{f}_n(x).$$

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{S}^d$, considere $\beta \in SO_{d+1}$ tal que $p\beta = y$. Logo, do Teorema 3.2.3,

$$\begin{aligned}
(f*\mu)_n^\sim(x) &= \int_{\mathbb{S}^d} (f*\mu)(y) P_n^\lambda(x\cdot y)dy \\
&= \int_{SO_{d+1}} (f*\mu)(y\alpha) P_n^\lambda(x\cdot y\alpha)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} R_{\beta\alpha} f(z) P_n^\lambda(x\cdot y\alpha)d\mu(z)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} R_{\beta\alpha} f(z) P_n^\lambda(x\cdot p\beta\alpha)d\mu(z)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} f(z\alpha) P_n^\lambda(x\cdot p\alpha)d\mu(z)d\alpha.
\end{aligned}$$

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{S}^d$, existe uma rotação $\delta \in SO_{d+1}$ tal que $x\delta = y$ e $y\delta = x$. Assim, considere $\gamma \in SO_{d+1}$ tal que $z\gamma = p$ e $p\gamma = z$ e note que

$$\begin{aligned}
(f*\mu)_n^\sim(x) &= \int_{SO_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} f(p\gamma\alpha) P_n^\lambda(x\cdot z\gamma\alpha)d\mu(z)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}} \int_{\mathbb{S}^d} f(p\alpha) P_n^\lambda(x\cdot z\alpha)d\mu(z)d\alpha \\
&= \int_{SO_{d+1}} f(p\alpha) \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(x\cdot z\alpha)d\mu(z)d\alpha.
\end{aligned}$$

Além disso, vale

$$\int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(x\cdot z\alpha)d\mu(z) = \int_{\mathbb{S}^d} P_n^\lambda(p\cdot x\alpha^{-1}) P_n^\lambda(p\cdot z)d\mu(z) = \hat{\mu}_n P_n^\lambda(x\cdot p\alpha).$$

Portanto,

$$(f*\mu)_n^\sim(x) = \int_{SO_{d+1}} f(p\alpha)\hat{\mu}_n P_n^\lambda(x\cdot p\alpha)d\alpha = \hat{\mu}_n \tilde{f}_n(x).$$

□

3.4 Operadores multiplicativos

Nesta seção apresentamos a caracterização para operadores multiplicativos que comutam com rotações, dada em termos do conceito de convolução com uma medida zonal.

Definição 3.4.1. Seja T é uma transformação linear definida em um subespaço de $L^1(\mathbb{S}^d)$ com imagem sendo um subespaço de $L^1(\mathbb{S}^d)$. Dizemos que T é um **operador multiplicativo** se existir uma sequência de números complexos $\{t_n : n = 0, 1, \ldots\}$ tal que

$$(Tf)_n^{\sim}(x) = t_n \tilde{f}_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

A sequência $\{t_n\}$ é chamada de **sequência de multiplicadores de** T.

Uma importante classe de operadores multiplicativos é dada pela Proposição 3.3.8. Se $\mu \in M(\mathbb{S}^d; p)$, então

$$T_\mu(f) = f * \mu, \quad f \in L^1(\mathbb{S}^d),$$

define um operador multiplicativo $T_\mu : L^1(\mathbb{S}^d) \longrightarrow L^1(\mathbb{S}^d)$, com a sequência de multiplicadores $\{\hat{\mu}_n\}$, a sequência dos coeficientes de Gegenbauer de μ. Na verdade, a aplicação $f \mapsto T_\mu f = f * \mu$ define um operador multiplicativo limitado em $L^q(\mathbb{S}^d)$, $1 \le q \le \infty$, e em $C(\mathbb{S}^d)$.

Observamos que, para todo $\alpha \in SO_{d+1}$ e $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, $(R_\alpha f)_n^{\sim} = R_\alpha \left(\tilde{f}_n\right)$. Com efeito, seja $\alpha \in SO_{d+1}$,

$$(R_\alpha f)_n^{\sim}(x) = \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) P_n^\lambda(x \cdot y) dy = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) P_n^\lambda\left(x \cdot y\alpha^{-1}\right) dy = \tilde{f}_n(x\alpha) = R_\alpha \tilde{f}_n(x),$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$. Assim, um operador multiplicativo comuta com todas as rotações, uma vez que

$$(R_\alpha Tf)_n^{\sim}(x) = (Tf)_n^{\sim}(x\alpha) = t_n R_\alpha \tilde{f}_n(x) = t_n (R_\alpha f)_n^{\sim}(x) = (TR_\alpha f)_n^{\sim}(x),$$

para todo n e, então, $R_\alpha Tf = TR_\alpha f$.

Seja F um espaço de Banach de funções em $\mathbb{S}^d$, definimos

$$B_{SO_{d+1}}(F) = \{T \in \mathscr{L}(F) : TR_\alpha = R_\alpha T, \alpha \in SO_{d+1}\}.$$

Veremos que todos os elementos de $B_{SO_{d+1}}(L^1(\mathbb{S}^d))$, $B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$, e aqueles de $B_{SO_{d+1}}(L^\infty(\mathbb{S}^d))$ que são operadores multiplicativos, são dados por convoluções com um elemento de $M(\mathbb{S}^d; p)$.

Teorema 3.4.2. Os espaços $M(\mathbb{S}^d; p)$ e $B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$ são isomorfos segundo a aplicação $\mu \mapsto T_\mu$ $\left(T_\mu f = f * \mu\right.$, para toda $\left.f \in C(\mathbb{S}^d)\right)$. Assim, cada elemento de $B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$ é um operador multiplicativo.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.8 e pelo Teorema 3.2.3, temos que

$$\left(T_\mu f\right)_n^{\sim}(x) = \hat{\mu}_n \tilde{f}_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \text{e} \quad \|T_\mu f\|_\infty \le \|\mu\| \|f\|_\infty,$$

respectivamente. Consequentemente, $T_\mu \in B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$ e $\|T_\mu\| \le \|\mu\|$. É suficiente provar que, para cada $T \in B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$, existe $\mu \in M(\mathbb{S}^d; p)$ tal que $T = T_\mu$ e $\|\mu\| \le \|T\|$.

Sejam $T \in B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$ e $x \in \mathbb{S}^d$, a aplicação $f \mapsto Tf(x)$ é um funcional linear limitado em $C(\mathbb{S}^d)$ e, pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 2.2.12), existe uma medida $m_x \in M(\mathbb{S}^d)$, com $\|m_x\| = \|T\|$, tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dm_x(y).$$

Como $T \in B_{SO_{d+1}}(C(\mathbb{S}^d))$, vale $TR_\alpha = R_\alpha T$, para toda $\alpha \in SO_{d+1}$. Logo, para toda $f \in C(\mathbb{S}^d)$ e $x \in \mathbb{S}^d$, obtemos que

$$TR_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{S}^d} R_\alpha f(y) dm_x(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dR_\alpha^{-1} m_x(y),$$

e

$$R_\alpha Tf(x) = Tf(x\alpha) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) dm_{x\alpha}(y),$$

isto é, $R_\alpha^{-1} m_x = m_{x\alpha}$. Para $\mu = m_p$ e $\alpha \in SO_{d+1}^p$, temos

$$R_\alpha \mu = R_\alpha m_p = m_{p\alpha^{-1}} = m_p = \mu,$$

o que mostra que $\mu \in M(\mathbb{S}^d; p)$. Além disso,

$$m_{p\alpha} = R_\alpha^{-1} m_p = R_\alpha^{-1} \mu = \varphi_{p\alpha} \mu,$$

para toda $\alpha \in SO_{d+1}$. Consequentemente,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y) d\varphi_x \mu(y) = f * \mu(x) = T_\mu f(x)$$

e $\|\mu\| = \|T\|$. $\square$

As caracterizações a seguir são variações da apresentada anteriormente e podem ser encontradas em (DUNKL, 1966, p. 259).

Teorema 3.4.3. Suponha que $T \in B_{SO_{d+1}}(L^\infty(\mathbb{S}^d))$ é um operador multiplicativo. Então, $T = T_\mu$, para algum $\mu \in M(\mathbb{S}^d; p)$.

Teorema 3.4.4. Existe um isomorfismo entre $M(\mathbb{S}^d; p)$ e $B_{SO_{d+1}}(L^1(\mathbb{S}^d))$ dado por $\mu \mapsto T_\mu$. Então, cada elemento de $B_{SO_{d+1}}(L^1(\mathbb{S}^d))$ é um operador multiplicativo.

CAPÍTULO

4

ESTIMATIVAS PARA COEFICIENTES DE FOURIER

Este capítulo tem por objetivo apresentar os resultados da referência (JORDÃO; MENEGATTO, 2016). Estudaremos a taxa de decaimento de sequências de autovalores de operadores integrais gerados por núcleos que satisfazem uma condição de Hölder generalizada. Essa noção de suavidade empregada como condição, e inspirada por importantes exemplos, é determinada em termos de uma família admissível de operadores multiplicativos sobre o espaço de Hilbert de funções esféricas e quadrado integrável.

Denotaremos o espaço dos harmônicos esféricos de grau k, para $k = 0, 1, \ldots$, em $d+1$ variáveis por $\mathscr{H}_d^k$ e $\tau_d^k := \dim \mathscr{H}_d^k$. Consideraremos o produto interno usual de $L^2(\mathbb{S}^d)$ definido por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{\mathbb{S}^d} f(x)\overline{g(x)} d\sigma_d(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{S}^d).$$

Escreveremos $\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \ldots, \tau_d^k\}$ para representar a base ortonormal de $\mathscr{H}_d^k$ com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. A projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{S}^d)$ em $\mathscr{H}_d^k$ será escrita como $\mathscr{Y}_k$. Temos

$$\mathscr{Y}_k(f) = \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \hat{f}(k,j) Y_{k,j}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\hat{f}$ denotará os **coeficientes de Fourier** de f, os quais são computados pela fórmula

$$\hat{f}(k,j) = \int_{\mathbb{S}^d} f(y)\overline{Y_{k,j}(y)} d\sigma_d(y), \quad j = 1, 2, \ldots, \tau_d^k.$$

A relação entre os harmônicos esféricos e os polinômios de Gengenbauer é dada pela seguinte fórmula (MORIMOTO, 1998, Teorema 2.26),

$$P_k^\lambda(x \cdot y) = \frac{1}{\tau_d^k} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} Y_{k,j}(x)\overline{Y_{k,j}(y)}, \quad x, y \in \mathbb{S}^d, \tag{4.1}$$

em que (MORIMOTO, 1998, p. 17)

$$\tau_d^k = \frac{(2k+d-1)(k+d-2)!}{k!(d-1)!}, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{4.2}$$

Relembrando a Definição 3.3.7, a fórmula da Adição acima nos garante que

$$\tilde{f}_k(x) = \int_{S^d} f(y) P_k^\lambda(x \cdot y) d\sigma_d(y) = \frac{1}{\tau_d^k} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \hat{f}(k,j) Y_{k,j}(x), \quad x \in \mathbb{S}^d.$$

Logo, dada $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, a equação (3.26) implica a seguinte representação de f em expansão em série de Fourier

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+d-2}{k} \left(\frac{2k}{d-1} + 1 \right) \tilde{f}_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \frac{1}{\tau_d^k} \binom{k+d-2}{k} \left(\frac{2k}{d-1} + 1 \right) \hat{f}(k,j) Y_{k,j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k(f). \end{aligned}$$

Uma estimativa básica para os coeficientes de Fourier de função quadrado integrável é ilustrada pela clássica identidade de Parseval.

Teorema 4.0.1. (STEIN; SHAKARCHI, 2003, p. 79) Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$, temos que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2.$$

Teorema 4.0.2 (Hausdorff-Young (JORDÃO; MENEGATTO, 2016))**.** Se $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$, então

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{q/2} \right]^{1/q} \leq \omega_d^{(p-2)/2p} \|f\|_p, \quad \text{se} \quad 1 < p \leq 2,$$

e $1/p + 1/q = 1$. Para $f \in L^1(\mathbb{S}^d)$, vale a desigualdade.

$$\sup_{k \geq 0} \left\{ (\tau_d^k)^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \omega_d^{-1/2} \|f\|_1.$$

No capítulo anterior, apresentamos o conceito de operador multiplicativo por meio da Definição 3.4.1, a qual é equivalente a dizer que um operador linear T em $L^p(\mathbb{S}^d)$ é chamado de operador multiplicativo se existe uma sequência $\{\eta_k\} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\mathscr{Y}_k(Tf) = \eta_k \mathscr{Y}_k(f), \quad f \in L^p(\mathbb{S}^d), \quad k = 0,1,\ldots \tag{4.3}$$

A sequência $\{\eta_k\}$ é chamada de sequência de multiplicadores de T.

Teorema 4.0.3. Um operador multiplicativo em $L^2(\mathbb{S}^d)$ é limitado se, e somente se, sua sequência de multiplicadores é limitada.

Demonstração. Seja T um operador multiplicativo e $\{\eta_k\}$ sua sequência de multiplicadores. Então, para toda $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{S}^d} |Tf(x)|^2 d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^d} Tf(x)\overline{Tf(x)} d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \mathscr{Y}_k(f)(x)\right) \overline{\left(\sum_{l=0}^{\infty} \eta_l \mathscr{Y}_l(f)(x)\right)} d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k|^2 \mathscr{Y}_k(f)(x)\overline{\mathscr{Y}_k(f)(x)} d\sigma_d(x)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Se $\{\eta_k\}$ é limitada, existe $L \geq 0$ tal que $|\eta_k| \leq L$, para todo k, e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2 &\leq L\left(\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k(f)(x)\overline{\mathscr{Y}_k(f)(x)} d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= L\left(\int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k(f)(x)\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mathscr{Y}_k(f)(x)}\right) d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= L\left(\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2 d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= L\|f\|_2,
\end{aligned}$$

provando que T é limitado.

Por outro lado, se T é limitado, então existe $S \geq 0$ tal que $\|Tf\|_2 \leq S\|f\|_2$, para toda $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$. Como $Tf = \sum_{l=0}^{\infty} \mathscr{Y}_l(Tf) = \sum_{l=0}^{\infty} \eta_l \mathscr{Y}_l(f)$, obtemos que, para todo $Y_{k,j}$,

$$\begin{aligned}
\|TY_{k,j}\|_2 &= \left\|\sum_{l=0}^{\infty} \eta_l \mathscr{Y}_l(Y_{k,j})\right\|_2 \\
&= \|\eta_k Y_{k,j}\|_2 \\
&= |\eta_k| \left(\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{k,j}(x)|^2 d\sigma_d(x)\right)^{1/2} \\
&= |\eta_k| \|Y_{k,j}\|_2.
\end{aligned}$$

Portanto, $|\eta_k| \leq S$, uma vez que $\|Y_{k,j}\|_2 = 1$. Dessa forma, $\{\eta_k\}$ é limitada. $\square$

Teorema 4.0.4. Seja T um operador multiplicativo de $L^2(\mathbb{S}^d)$ e $\{\eta_k\}$ sua sequência de multiplicadores. Então, T é autoadjunto se, e somente se, $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Se T é autoadjunto, então, para todo $k = 0, 1, \ldots$ e $j = 1, \ldots, \tau_d^k$, $\langle TY_{k,j}, Y_{k,j}\rangle_2 = \langle Y_{k,j}, TY_{k,j}\rangle_2$. Observe que

$$\begin{aligned}
\langle TY_{k,j}, Y_{k,j}\rangle_2 &= \int_{\mathbb{S}^d} TY_{k,j}(y)\overline{Y_{k,j}(y)}d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \eta_l \mathscr{Y}_l(Y_{k,j})(y)\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \overline{\mathscr{Y}_l(Y_{k,j})(y)}\right) d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{l=0}^{\infty} \eta_l |\mathscr{Y}_l(Y_{k,j})(y)|^2 d\sigma_d(y) \\
&= \eta_k \left(\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{k,j}(y)|^2 d\sigma_d(y)\right) \\
&= \eta_k,
\end{aligned}$$

uma vez que $\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{k,j}(y)|^2 d\sigma_d(y) = 1$. De modo análogo, podemos ver que $\langle Y_{k,j}, TY_{k,j}\rangle_2 = \overline{\eta_k}$. Logo, $\eta_k = \overline{\eta_k}$, para todo $k = 0, 1, \ldots$, o que nos permite concluir que $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$.

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle_2 &= \int_{\mathbb{S}^d} Tf(x)\overline{g(x)}d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \mathscr{Y}_k(f)(x)\right) \overline{g(x)}d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \hat{f}(k,j) Y_{k,j}(x)\right) \overline{g(x)}d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \left(\int_{\mathbb{S}^d} f(y)\overline{Y_{k,j}(y)}d\sigma_d(y)\right) Y_{k,j}(x)\right] \overline{g(x)}d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{j=1}^{\tau_d^k} f(y)\overline{Y_{k,j}(y)}Y_{k,j}(x)\overline{g(x)}d\sigma_d(y)d\sigma_d(x).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini (Teorema 2.2.14),

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle_2 &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{j=1}^{\tau_d^k} f(y)\overline{Y_{k,j}(y)}Y_{k,j}(x)\overline{g(x)}d\sigma_d(x)d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \left(\int_{\mathbb{S}^d} \overline{g(x)}Y_{k,j}(x)d\sigma_d(x)\right) \overline{Y_{k,j}(y)}\right] f(y)d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \overline{\hat{g}(k,j)Y_{k,j}(y)}\right) f(y)d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \overline{\mathscr{Y}_k(g)(y)}\right) f(y)d\sigma_d(y).
\end{aligned}$$

Assim, se $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \overline{\mathscr{Y}_k(g)(y)}\right) f(y)d\sigma_d(y) = \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\eta_k \mathscr{Y}_k(g)(y)}\right) f(y)d\sigma_d(y)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{S}^d} \overline{Tg(y)} f(y) d\sigma_d(y) \\ &= \langle f, Tg \rangle_2, \end{aligned}$$

o que mostra que T é auto-adjunto (Definição 2.1.12). □

4.1 Estimativas de somas do tipo Fourier

Teorema 4.1.1. Seja M um operador multiplicativo em $L^p(\mathbb{S}^d)$ com a sequência de multiplicadores $\{\eta_k\}$ correspondente. Se $p \in (1,2]$, então

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} |\eta_k - 1|^q \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{q/2} \right]^{1/q} \leq \omega_d^{(p-2)2p} \|Mf - f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{S}^d),$$

em que q é o expoente conjugado de p. A desigualdade acima se torna uma igualdade no caso $p = 2$. Se $p = 1$, então

$$\sup_{k \geq 0} \left\{ (\tau_d^k)^{-1/2} |\eta_k - 1| \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \omega_d^{-1/2} \|Mf - f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{S}^d).$$

Demonstração. Fixando $f \in L^p(\mathbb{S}^d)$ e tendo em mente que $\mathscr{Y}_k$ é linear pois é projeção ortogonal, temos que, para $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \mathscr{Y}_k(Mf - f) &= \mathscr{Y}_k(Mf) - \mathscr{Y}_k(f) \\ &= \eta_k \mathscr{Y}_k(f) - \mathscr{Y}_k(f) \\ &= (\eta_k - 1)\mathscr{Y}_k(f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\tau_d^k} (\widehat{Mf - f})(k,j) Y_{k,j} = (\eta_k - 1) \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \hat{f}(k,j) Y_{k,j}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.4}$$

pois

$$\mathscr{Y}_k(Mf - f) = \sum_{j=1}^{\tau_d^k} (\widehat{Mf - f})(k,j) Y_{k,j}$$

e

$$(\eta_k - 1)\mathscr{Y}_k(f) = (\eta_k - 1) \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \hat{f}(k,j) Y_{k,j}.$$

Uma vez que as somas definem funções polinomiais, podemos calcular a norma L^2 dos termos de ambos os lados da igualdade (4.4). Assim,

$$\left\| \sum_{j=1}^{\tau_d^k} (\widehat{Mf - f})(k,j) Y_{k,j} \right\|_2 = \left\| (\eta_k - 1) \sum_{j=1}^{\tau_d^k} \hat{f}(k,j) Y_{k,j} \right\|_2, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Pela identidade de Parseval (Teorema 4.0.1),

$$\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |(\widehat{Mf-f})(k,j)|^2 = |\eta_k - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5}$$

isto é, para $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$(\tau_d^k)^{(2-q)/2q} \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |(\widehat{Mf-f})(k,j)|^2 \right)^{q/2} = (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} |\eta_k - 1|^q \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{q/2}. \tag{4.6}$$

Por Hausdorff-Young (Teorema 4.0.2), para $1 < p \leq 2$,

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |(\widehat{Mf-f})(k,j)|^2 \right)^{q/2} \right]^{1/q} \leq \omega_d^{(p-2)/2p} \|Mf - f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{S}^d).$$

Portanto, para $1 < p \leq 2$,

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} |\eta_k - 1|^q \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{q/2} \right]^{1/q} \leq \omega_d^{(p-2)/2p} \|Mf - f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{S}^d),$$

como queríamos.

Para a igualdade, no caso $p = 2$, é suficiente aplicar a identidade de Parseval na equação (4.6). De fato,

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} |\eta_k - 1|^q \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right)^{q/2} \right]^{1/q} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\tau_d^k)^{(2-q)/2q} \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |(\widehat{Mf-f})(k,j)|^2 \right)^{q/2} \right]^{1/q}$$

e o lado direito da igualdade acima nada mais é do que

$$\omega_d^{(p-2)/2p} \|Mf - f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d).$$

Agora, vamos mostrar a desigualdade no caso $p = 1$. Da igualdade (4.5), temos que

$$(\tau_d^k)^{-1/2} \left[\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |(\widehat{Mf-f})(k,j)|^2 \right]^{1/2} = (\tau_d^k)^{-1/2} |\eta_k - 1| \left[\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right]^{1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Além disso, sabemos que

$$\sup_{k \geq 0} \left\{ (\tau_d^k)^{-1/2} \left[\sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\hat{f}(k,j)|^2 \right]^{1/2} \right\} \leq \omega_d^{-1/2} \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{S}^d).$$

Portanto,

$$\sup_{k\geq 0}\left\{(\tau_d^k)^{-1/2}\left[\sum_{j=1}^{\tau_d^k}|(\widehat{Mf-f})(k,j)|^2\right]^{1/2}\right\}\leq \omega_d^{-1/2}\|Mf-f\|_1,\quad f\in L^1(\mathbb{S}^d).$$

Assim,

$$\sup_{k\geq 0}\left\{(\tau_d^k)^{-1/2}|\eta_k-1|\left[\sum_{j=1}^{\tau_d^k}|\hat{f}(k,j)|^2\right]^{1/2}\right\}\leq \omega_d^{-1/2}\|Mf-f\|_1,\quad f\in L^1(\mathbb{S}^d),$$

como queríamos. $\square$

Agora, aplicaremos o teorema anterior para obter um resultado semelhante para núcleos quadrados integráveis.

Consideramos K um núcleo em $L^2(\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d):=L^2(\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d,\sigma_d\times\sigma_d)$ com a expansão harmônica esférica

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k}a_{k,j}Y_{k,j}(x)\overline{Y_{k,j}(y)},\quad x,y\in\mathbb{S}^d, \tag{4.7}$$

em que $\{a_{k,j}\}$ é uma sequência somável. Então, para toda função K^y, $y\in\mathbb{S}^d$, definida por

$$K^y(x)=K(x,y),\quad x\in\mathbb{S}^d,$$

temos

$$\begin{aligned}
\widehat{K^y}(k,j) &= \int_{\mathbb{S}^d}K^y(x)\overline{Y_{k,j}(x)}d\sigma_d(x)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\tau_d^p}a_{p,q}Y_{p,q}(x)\overline{Y_{p,q}(y)}\right)\overline{Y_{k,j}(x)}d\sigma_d(x)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d}a_{k,j}|Y_{k,j}(x)|^2\overline{Y_{k,j}(y)}d\sigma_d(x)\\
&= a_{k,j}\overline{Y_{k,j}(y)}\left(\int_{\mathbb{S}^d}|Y_{k,j}(x)|^2d\sigma_d(x)\right),
\end{aligned}$$

logo,

$$\widehat{K^y}(k,j)=a_{k,j}\overline{Y_{k,j}(y)},\quad j=1,\ldots,\tau_d^k,\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d}\sum_{j=1}^{\tau_d^k}|\widehat{K^y}(k,j)|^2d\sigma_d(y) &= \int_{\mathbb{S}^d}\sum_{j=1}^{\tau_d^k}|a_{k,j}|^2|\overline{Y_{k,j}(y)}|^2d\sigma_d(y)\\
&= \sum_{j=1}^{\tau_d^k}|a_{k,j}|^2\left(\int_{\mathbb{S}^d}|\overline{Y_{k,j}(y)}|^2d\sigma_d(y)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{\tau_d^k}|a_{k,j}|^2,\ k\in\mathbb{Z}_+.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Teorema 4.1.2. Seja M um operador multiplicativo em $L^p(\mathbb{S}^d)$ com a sequência de multiplicadores $\{\eta_k\}$ correspondente. Se K é um núcleo com a expansão harmônica esférica (4.7), então

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |a_{k,j}|^2 = \int_{\mathbb{S}^d} \|M(K^y) - K^y\|_2^2 d\sigma_d(y).$$

Demonstração. Do Teorema 4.1.1, para $p = q = 2$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\widehat{K^y}(k,j)|^2 = \|M(K^y) - K^y\|_2^2.$$

Integrando ambos os lados da igualdade acima, temos

$$\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\widehat{K^y}(k,j)|^2 d\sigma_d(y) = \int_{\mathbb{S}^d} \|M(K^y) - K^y\|_2^2 d\sigma_d(y).$$

Logo, usando a igualdade (4.8), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} \|M(K^y) - K^y\|_2^2 d\sigma_d(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k - 1|^2 \left(\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |\widehat{K^y}(k,j)|^2 d\sigma_d(y) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |a_{k,j}|^2, \end{aligned}$$

o que finaliza a prova. $\square$

A seguir, introduziremos uma condição de Hölder anexada a uma sequência $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ de operadores multiplicativos em $L^2(\mathbb{S}^d)$ e utilizaremos o Teorema 4.1.2 no caso em que o núcleo K satisfaz tal condição de Hölder.

Definição 4.1.3. Dizemos que o núcleo $K \in L^2(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d)$ satisfaz a condição de **Hölder segundo a família de operadores** $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ se existem $\beta > 0$ e $B \in L^2(\mathbb{S}^d)$ tais que

$$\|M_t(K^y) - K^y\| \leq B(y) t^{\beta}. \tag{4.9}$$

O número β é chamado de **expoente de Hölder** de K com respeito a família $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$.

A seguir introduzimos o conceito de núcleo positivo definido em L^2 que utilizaremos a partir daqui.

Definição 4.1.4. Um núcleo com a expansão harmônica esférica (4.7) é **positivo definido** se

$$a_{k,j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, \tau_d^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Seja K positivo definido, então

$$K_{1/2}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}^{1/2} Y_{k,j}(x)\overline{Y_{k,j}(y)}, \quad x,y \in \mathbb{S}^d,$$

também define um elemento positivo definido de $L^2(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d)$, para o qual, dados $y,w \in \mathbb{S}^d$, vale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} K_{1/2}(x,y)K_{1/2}(w,x)d\sigma_d(x) &= \int_{\mathbb{S}^d}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}Y_{k,j}(w)\overline{Y_{k,j}(y)}|Y_{k,j}(x)|^2\right)d\sigma_d(x)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}Y_{k,j}(w)\overline{Y_{k,j}(y)}\right)\left(\int_{\mathbb{S}^d}|Y_{k,j}(x)|^2 d\sigma_d(x)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}Y_{k,j}(w)\overline{Y_{k,j}(y)}\\
&= K(w,y).
\end{aligned}$$

No que segue, utilizaremos a notação $f(x) \lesssim g(x)$ se existir uma constante C tal que $f(x) \leq Cg(x)$.

Lema 4.1.5. Seja $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ uma família de operadores multiplicativos uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{S}^d)$ com as sequências de multiplicadores $\{\eta_k^t\} \subset \mathbb{R}$. Se K é um núcleo que satisfaz a condição de Hölder com relação a família de multiplicadores $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ e L^2-positivo definido, então

$$\int_{\mathbb{S}^d} \|M_t(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 d\sigma_d(y) \lesssim B(y)t^{\beta}, \quad t \in (0,\pi),$$

em que β é o expoente de Hölder de K com respeito a $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$.

Demonstração. Suponha que K tenha as propriedades do enunciado. Se $y \in \mathbb{S}^d$ e $t \in (0,\pi)$, então

$$\begin{aligned}
\|M_t(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 &= \int_{\mathbb{S}^d}|(M_t(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y)(x)|^2 d\sigma_d(x)\\
&= \int_{\mathbb{S}^d} M_t(K_{1/2}^y)(x)\overline{M_t(K_{1/2}^y)(x)}d\sigma_d(x) - \int_{\mathbb{S}^d} M_t(K_{1/2}^y)(x)\overline{K_{1/2}^y(x)}d\sigma_d(x)\\
&- \int_{\mathbb{S}^d} K_{1/2}^y(x)\overline{M_t(K_{1/2}^y)(x)}d\sigma_d(x) + \int_{\mathbb{S}^d} K_{1/2}^y(x)\overline{K_{1/2}^y(x)}d\sigma_d(x).
\end{aligned}$$

Para $t \in (0,\pi)$ e $y \in \mathbb{S}^d$, denotemos

$$I_t(y) := \int_{\mathbb{S}^d} M_t(K_{1/2}^y)(x)\overline{M_t(K_{1/2}^y)(x)}d\sigma_d(x).$$

Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$, lembre que $M_t f = \sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{Y}_k(M_t f) = \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k^t\mathscr{Y}_k(f)$. Assim, temos

$$I_t(y) = \int_{\mathbb{S}^d}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k^t\mathscr{Y}_k(K_{1/2}^y)(x)\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j^t\mathscr{Y}_j(K_{1/2}^y)(x)\right)}d\sigma_d(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t|^2 \mathscr{Y}_k(K_{1/2}^y)(x)\overline{\mathscr{Y}_k(K_{1/2}^y)(x)}d\sigma_d(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t|^2 \int_{\mathbb{S}^d} \left|\mathscr{Y}_k(K_{1/2}^y)(x)\right|^2 d\sigma_d(x).
\end{aligned}
$$

Para $k = 0, 1, \ldots$, observamos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} \left|\mathscr{Y}_k(K_{1/2}^y)(x)\right|^2 d\sigma_d(x) &= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}^{1/2}\overline{Y_{k,j}(y)}Y_{k,j}(x)\right)\overline{\left(\sum_{l=1}^{\tau_d^k} a_{k,l}^{1/2}\overline{Y_{k,l}(y)}Y_{k,l}(x)\right)}d\sigma_d(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |a_{k,j}||Y_{k,j}(y)|^2 \int_{\mathbb{S}^d} |Y_{k,j}(x)|^2 d\sigma_d(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}|Y_{k,j}(y)|^2,
\end{aligned}
$$

assim,

$$
I_t(y) = \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}|Y_{k,j}(y)|^2.
$$

Agora, observamos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}|Y_{k,j}(y)|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t|^2 \mathscr{Y}_k(K^y)(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^t \mathscr{Y}_k(M_t(K^y))(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{Y}_k(M_t(M_t(K^y)))(y) \\
&= M_t(M_t(K^y))(y),
\end{aligned}
$$

de onde segue que $I_t(y) = M_t(M_t(K^y))(y)$. Com isso concluímos que vale a identidade

$$
\int_{\mathbb{S}^d} M_t(K_{1/2}^y)(x)\overline{M_t(K_{1/2}^y)(x)}d\sigma_d(x) = M_t(M_t(K^y))(y), \quad t \in (0,\pi), \quad y \in \mathbb{S}^d. \tag{4.10}
$$

Procedendo de forma análoga a obtenção da fórmula (4.10), obtemos as seguintes identidades

$$
\int_{\mathbb{S}^d} M_t(K_{1/2}^y)(x)\overline{K_{1/2}^y(x)}d\sigma_d(x) = M_t(K^y)(y),
$$

$$
\int_{\mathbb{S}^d} K_{1/2}^y(x)\overline{M_t(K_{1/2}^y)(x)}d\sigma_d(x) = M_t(K^y)(y)
$$

e

$$
\int_{\mathbb{S}^d} K_{1/2}^y(x)\overline{K_{1/2}^y(x)}d\sigma_d(x) = K^y(y), \quad t \in (0,\pi), \quad y \in \mathbb{S}^d.
$$

Segue destas considerações que, para $t \in (0,\pi)$ e $y \in \mathbb{S}^d$, vale

$$
\|M_t(K_{1/2}^y) - K_{1/2}^y\|_2^2 = M_t(M_t(K^y))(y) - M_t(K^y)(y) - M_t(K^y)(y) + K^y(y),
$$

logo,

$$\|M_t(K^y_{1/2}) - K^y_{1/2}\|_2^2 = M_t(M_t(K^y) - K^y)(y) - (M_t(K^y) - K^y)(y). \tag{4.11}$$

Uma vez que $\{\eta_k^t\} \subset \mathbb{R}$, M_t é autoadjunto para todo $t \in (0,\pi)$. Além disso,

$$M_t(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^t \mathscr{Y}_k(1) = \eta_0^t, \quad t > 0.$$

Dessa forma, para todo $t \in (0,\pi)$, vale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} M_t(M_t(K^y) - K^y)(y)d\sigma_d(y) &= \langle M_t(M_t(K^y) - K^y), 1\rangle_2 \\
&= \langle M_t(K^y) - K^y, M_t(1)\rangle_2 \\
&= \eta_0^t \int_{\mathbb{S}^d} (M_t(K^y) - K^y)(y)d\sigma_d(y).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Combinando a igualdade (4.12) com fórmula (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} \|M_t(K^y_{1/2}) - K^y_{1/2}\|_2^2 d\sigma_d(y) &= (\eta_0^t - 1) \int_{\mathbb{S}^d} (M_t(K^y) - K^y)(y)d\sigma_d(y) \\
&\leq |\eta_0^t - 1| \left| \int_{\mathbb{S}^d} (M_t(K^y) - K^y)(y)d\sigma_d(y) \right| \\
&\leq (|\eta_0^t| + 1)\|M_t(K^y) - K^y\|_1.
\end{aligned}$$

Mas, $\|M_t(K^y) - K^y\|_1 \leq \lambda \|M_t(K^y) - K^y\|_2$, para algum $\lambda \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} \|M_t(K^y_{1/2}) - K^y_{1/2}\|_2^2 d\sigma_d(y) &\leq \lambda(|\eta_0^t| + 1)\|M_t(K^y) - K^y\|_2 \\
&\leq \lambda(|\eta_0^t| + 1)B(y)t^\beta, \quad t \in (0,\pi).
\end{aligned}$$

Entretanto, como $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ é uma família limitada, existe $N \geq 0$ tal que $|\eta_0^t| \leq N$, para todo $t \in (0,\pi)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{S}^d} \|M_t(K^y_{1/2}) - K^y_{1/2}\|_2^2 d\sigma_d(y) \leq \lambda(N+1)B(y)t^\beta, \quad t \in (0,\pi).$$

□

Teorema 4.1.6. Seja $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ uma família de operadores multiplicativos uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{S}^d)$ com as sequências de multiplicadores $\{\eta_k^t\} \subset \mathbb{R}$. Se K é um núcleo que satisfaz a condição de Hölder com relação a família de multiplicadores $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ e L^2-positivo definido, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \lesssim B(y)t^\beta, \quad t \in (0,\pi),$$

em que β é o expoente de Hölder de K com respeito a $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$.

Demonstração. Do Lema 4.1.5, temos que

$$\int_{\mathbb{S}^d} \|M_t(K^y_{1/2}) - K^y_{1/2}\|_2^2 d\sigma_d(y) \lesssim B(y)t^{\beta}, \quad t \in (0,\pi). \tag{4.13}$$

Como $K_{1/2}$ é um núcleo da forma (4.7) positivo definido, pelo Teorema 4.1.2 temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} \|M_t(K^y_{1/2}) - K^y_{1/2}\|_2^2 d\omega_d(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} |a_{k,j}^{1/2}|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}. \end{aligned}\tag{4.14}$$

Da desiguldade (4.13) e de equação (4.14), concluímos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^t - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \lesssim B(y)t^{\beta}, \quad t \in (0,\pi).$$

□

4.2 Aplicação a taxas de decaimento de autovalores

Neste momento, usaremos o Teorema 4.1.6 para extrair taxas de decaimento para a sequência de autovalores dos operadores integrais positivos em $L^2(\mathbb{S}^d)$.

Definição 4.2.1. Um operador linear limitado $\mathscr{K} : L^2(\mathbb{S}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^d)$ da forma

$$\mathscr{K}(f) = \int_{\mathbb{S}^d} K(\cdot,y) f(y) d\sigma_d(y),$$

com $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$ e $K \in L^2(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d)$, é chamado de **operador integral**. Chamaremos K de **núcleo gerador de** $\mathscr{K}$.

Observe que se o núcleo gerador K é positivo definido, então $a_{k,j} \geq 0$ e

$$\begin{aligned}\overline{K(y,x)} &= \overline{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} Y_{k,j}(y)\overline{Y_{k,j}(x)}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \overline{Y_{k,j}(y)} Y_{k,j}(x) \\ &= K(x,y). \end{aligned}\tag{4.15}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{K}(f), g\rangle_2 &= \int_{\mathbb{S}^d} \mathscr{K}(f)(x)\overline{g(x)} d\sigma_d(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} K(x,y) f(y) d\sigma_d(y) \overline{g(x)} d\sigma_d(x) \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \overline{K(y,x)} f(y) d\sigma_d(y) \overline{g(x)} d\sigma_d(x).$$

Usando o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \overline{K(y,x)} f(y) d\sigma_d(y) \overline{g(x)} d\sigma_d(x) &= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \overline{K(y,x) g(x)} d\sigma_d(x) f(y) d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \overline{\mathscr{K}(g)(y)} f(y) d\sigma_d(y) \\
&= \langle f, \mathscr{K}(g)\rangle_2,
\end{aligned}$$

o que mostra que se K é positivo definido, então $\mathscr{K}$ é autoadjunto.

Ademais,

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{K}(f), f\rangle_2 &= \int_{\mathbb{S}^d} \mathscr{K}(f)(x) \overline{f(x)} d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} K(x,y) f(y) d\sigma_d(y) \overline{f(x)} d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d}\int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} Y_{k,j}(x) \overline{Y_{k,j}(y)} \right) f(y) d\sigma_d(y) \overline{f(x)} d\sigma_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} Y_{k,j}(x) \left(\int_{\mathbb{S}^d} \overline{Y_{k,j}(y)} f(y) d\sigma_d(y) \right) \overline{f(x)} d\sigma_d(x).
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\int_{\mathbb{S}^d} \overline{Y_{k,j}(y)} f(y) d\sigma_d(y) = \hat{f}(k,j)$, encontramos

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{K}(f), f\rangle_2 &= \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} Y_{k,j}(x) \hat{f}(k,j) \overline{f(x)} d\sigma_d(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \hat{f}(k,j) \left(\int_{\mathbb{S}^d} Y_{k,j}(x) \overline{f(x)} d\sigma_d(x) \right) \\
&= = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \hat{f}(k,j) \overline{\hat{f}(k,j)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} |\hat{f}(k,j)|^2 > 0,
\end{aligned}$$

sempre que $f \not\equiv 0$. Isso mostra que $\mathscr{K}$ é positivo sempre que K é positivo definido.

Uma vez que operadores integrais são compactos, o Teorema 2.1.17 garante que um operador integral $\mathscr{K}$ positivo tem, no máximo, enumeráveis autovalores os quais podem ser colocados em ordem decrescente, isto é,

$$\lambda_1(\mathscr{K}) \geq \lambda_2(\mathscr{K}) \geq \ldots \geq 0,$$

com as multiplicidades incluídas.

Se usarmos a expansão (4.7) para o núcleo gerador K de um operador integral $\mathscr{K}$ positivo, então podemos ver que

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}(Y_{k,j}) &= \int_{\mathbb{S}^d} K(\cdot,y)Y_{k,j}(y)d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\tau_d^p} a_{p,q} Y_{p,q}(\cdot)\overline{Y_{p,q}(y)} \right) Y_{k,j}(y)d\sigma_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} a_{k,j}Y_{k,j}|Y_{k,j}(y)|^2 d\sigma_d(y) \\
&= a_{k,j}Y_{k,j} \left(\int_{\mathbb{S}^d} |Y_{k,j}(y)|^2 d\sigma_d(y) \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathscr{K}(Y_{k,j}) = a_{k,j}Y_{k,j}, \quad j = 1,\ldots,\tau_d^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Observe que $\{a_{k,j} : j = 1,\ldots,\tau_d^k,\ k = 0,1,\ldots\}$ é o conjunto de autovalores de $\mathscr{K}$. Assumimos que, para cada k, valha

$$a_{k,1} \geq a_{k,2} \geq \ldots \geq a_{k,\tau_d^k}. \tag{4.16}$$

Da teoria básica de harmônicos esféricos (MORIMOTO, 1998, p. 17), sabemos que

$$\tau_d^k = \sum_{j=0}^{k} \tau_{d-1}^j = \frac{(2k+d-1)(k+d-2)!}{k!(d-1)!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.17}$$

Logo, para $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lambda_{\tau_{d+1}^k}(\mathscr{K}) = \lambda_{\sum_{j=0}^k \tau_d^j}(\mathscr{K}) = \lambda_{1+\tau_d^1+\ldots+\tau_d^k}(\mathscr{K}) = a_{k,\tau_d^k}, \tag{4.18}$$

uma vez que $\tau_d^0 = 1$.

A seguir, escreveremos $f(x) \asymp g(x)$ se $f(x) \lesssim g(x)$ e $g(x) \lesssim f(x)$.

Definição 4.2.2. Dizemos que uma família de operadores multiplicativos $\{T_t\}_{t>0}$ é **α-admissível** se, para $\alpha > 0$, temos que

$$|\eta_k^t - 1| \asymp (\min\{kt,1\})^\alpha, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

em que $\{\eta_k^t\}$ são os multiplicadores associados a $\{T_t\}_{t>0}$.

Lema 4.2.3. Seja $\{a_k\}$ uma sequência não crescente de termos positivos tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n a_n \lesssim \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \quad n \geq n_0.$$

Demonstração. Observe que

$$2na_{2n} \leq 2(a_n + \cdots + a_{2n-1}) \leq 2\sum_{k=n}^{\infty} a_k. \tag{4.19}$$

Além disso, uma vez que a série converge temos que $a_n \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$. Dessa forma, para n_0 suficientemente grande, obtemos que

$$a_n \leq 2a_{2n}, \quad n \geq n_0. \tag{4.20}$$

Das desigualdades (4.19) e (4.20), temos o que queríamos. □

No próximo resultado, a fórmula de Stirling será aplicada. A fórmula pode ser encontrada em (JEFFREY; DAI, 2008, p. 233),

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{4.21}$$

A notação acima, $f(x) \sim g(x)$, significa que f e g são **assintoticamente equivalentes** quando $x \to \infty$, isto é,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1, \quad \text{quando } x \to \infty.$$

Teorema 4.2.4. Seja $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ uma família de operadores multiplicativos uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{S}^d)$ com as sequências de multiplicadores $\{\eta_k^t\} \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathscr{K}$ um operador integral gerado por um núcleo K, satisfazendo a condição de Hölder segundo a família $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ e positivo definido em L^2. Se $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ é α-admissível, então $\lambda_n(\mathscr{K}) = O(n^{-1-\beta/d})$, quando $n \to \infty$, em que β é o expoente de Hölder de K com respeito a família $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$.

Demonstração. Como $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$ é α-admissível,

$$|\eta_k^t - 1| \asymp (\min\{kt,1\})^\alpha, \quad t \in (0,\pi), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Em outras palavras, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1(\min\{kt,1\})^\alpha \leq |\eta_k^t - 1| \leq C_2(\min\{kt,1\})^\alpha, \quad t \in (0,\pi), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Logo, para $k \geq n$,

$$|\eta_k^{1/n} - 1| \geq C_1(\min\{k/n,1\})^\alpha = C_1$$

e, assim,

$$C_1^2 \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\eta_k^{1/n} - 1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j}, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*. \tag{4.22}$$

Do Teorema 4.1.6,

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\eta_k^{1/n}-1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k^{1/n}-1|^2 \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \lesssim B(y)n^{-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*. \tag{4.23}$$

Aplicando as desigualdades (4.22) e (4.23), obtemos

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \lesssim B(y)n^{-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

De (4.16), temos que $a_{k,j} \geq a_{k,\tau_d^k}$, para $j = 1,\ldots,\tau_d^k$. Portanto, para $n \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,j} \geq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} a_{k,\tau_d^k} = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\tau_d^k} \sum_{j=1}^{\tau_d^k} 1 = \sum_{k=n}^{\infty} \tau_d^k a_{k,\tau_d^k} \geq \tau_d^n \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\tau_d^k}$$

e, então,

$$\tau_d^n \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\tau_d^k} \lesssim B(y)n^{-\beta}, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Assim, da fórmula de Stirling (4.21) e da equação (4.17), temos

$$\begin{aligned}
\tau_d^n &\sim \frac{(2n+d-1)\sqrt{2\pi(n+d-2)}\left(\dfrac{n+d-2}{e}\right)^{(n+d-2)}}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n (d-1)!} \\
&= \frac{(2n+d-1)(n+d-2)^{(n+d-3/2)}}{e^{(d-2)}n^{(n+1/2)}(d-1)!} \\
&= \frac{(2n+d-1)(n+d-2)^{(n+d-3/2)}}{e^{(d-2)}n^{(n+d-3/2)}n^{(-d+2)}(d-1)!}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\tau_d^n \sim \frac{2ne^{(d-2)}}{e^{(d-2)}n^{(2-d)}(d-1)!} = \frac{2n^{d-1}}{(d-1)!}.$$

Usando a equivalência acima, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\tau_d^k} \lesssim B(y)n^{-\beta-d+1}, \quad n > n_1.$$

Do Lema 4.2.3, obtemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $na_{n,\tau_d^n} \lesssim \sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\tau_d^k}$, sempre que $n \geq n_0$. Portanto,

$$n^{\beta+d}a_{n,\tau_d^n} \lesssim n^{\beta+d-1}\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,\tau_d^k}, \quad n \geq n_0,$$

e, lembrando da igualdade (4.18), concluímos que

$$n^{\beta+d}\lambda_{\tau_{d+1}^n}(\mathscr{K}) \quad = \quad n^{\beta+d}a_{n,\tau_d^n}$$

$$\lesssim \; B(y), \quad n > \bar{n},$$

em que $\bar{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Dessa forma, $\lambda_{\tau_{d+1}^n}(\mathscr{K}) = O(n^{-\beta-d})$, quando $n \to \infty$. Como $\tau_{d+1}^n \asymp n^d$, temos que $\lambda_{n^d}(\mathscr{K}) = O(n^{-\beta-d})$, quando $n \to \infty$. Logo,

$$\lambda_n(\mathscr{K}) = \lambda_{(n^{1/d})^d}(\mathscr{K}) = O(n^{(1/d)(-\beta-d)}) = O(n^{-1-\beta/d}),$$

quando $n \to \infty$. $\square$

4.3 Exemplos: convoluções com medidas zonais

Esta seção tem como objetivo considerar alguns exemplos concretos e é baseada em (JORDÃO; MENEGATTO, 2016; JORDÃO; MENEGATTO, 2019).

Sabe-se que $L^2(\mathbb{S}^d) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{H}_d^k$ e que a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{S}^d)$ sobre $\mathscr{H}_d^k$ é dada pela fórmula

$$\mathscr{Y}_k(f)(x) = \frac{\tau_d^k}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^d} P_k^{(d-1)/2}(x \cdot y) f(y) d\sigma_d(y), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

em que $P_k^{(d-1)/2}$ é o polinômio de Gegenbauer de grau k associado à dimensão d e normalizado, de modo que $P_k^{(d-1)/2}(1) = 1$.

A ação das projeções sobre as convoluções é dada por

$$\mathscr{Y}_k(f * \mu)(x) = \mu_k \mathscr{Y}_k(f)(x), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d), \quad \mu \in M(\mathbb{S}^d; p),$$

em que

$$\mu_k := \mathscr{Y}_k(\mu) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^d} P_k^{(d-1)/2}(p \cdot y) d\mu(y), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Exemplo 4.3.1 (Operador shift)**.** O **operador shift** usual é definido pela fórmula

$$S_t f(x) = \frac{1}{R_d(t)} \int_{R_x^t} f(y) d\sigma_r(y), \quad x \in \mathbb{S}^d, \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d), \quad t \in (0, \pi),$$

em que $d\sigma_r(y)$ é o volume de $R_x^t := \{y \in \mathbb{S}^d : x \cdot y = \cos t\}$ e $R_d(t) = \omega_{d-1}(\sin t)^{d-1}$ é o volume total. Este operador pode ser escrito como a seguinte convolução

$$S_t(f) = f * \mu_t, \quad t \in (0, \pi), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d),$$

em que $\{\mu_t : t \in (0, \pi)\} \subset M(\mathbb{S}^d; p)$ satisfaz

$$\mathscr{Y}_k(\mu_t) = P_k^{(d-1)/2}(\cos t), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Como

$$\mathscr{Y}_k(S_t f) = \frac{P_k^{(d-1)/2}(\cos t)}{P_k^{(d-1)/2}(1)} \mathscr{Y}_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0, \pi),$$

a sequência de multiplicadores de S_t é dada por

$$\eta_k^t = \frac{P_k^{(d-1)/2}(\cos t)}{P_k^{(d-1)/2}(1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0,\pi).$$

Em (BELINSKY; DAI; DITZIAN, 2003, Lema 2.4), é provado que

$$0 < c_1 k^2 t^2 \leq 1 - \frac{P_k^{(d-1)/2}(\cos t)}{P_k^{(d-1)/2}(1)} \leq c_2 k^2 t^2, \quad 0 < kt \leq \pi, \quad t \in (0,\pi/2],$$

e que, para todo $\tau > 0$,

$$\frac{P_k^{(d-1)/2}(\cos t)}{P_k^{(d-1)/2}(1)} \leq \alpha < 1, \quad kt \geq \tau > 0, \quad t \in (0,\pi/2],$$

em que c_1 e c_2 são constantes positivas que dependem de d e α é uma constante que depende de d e τ. Consequentemente,

$$1 - \frac{P_k^{(d-1)/2}(\cos t)}{P_k^{(d-1)/2}(1)} \asymp (\min\{1, kt\})^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0,\pi).$$

A desigualdade

$$\|S_t f\|_2 \leq \|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d), \quad t \in (0,\pi),$$

nos mostra que $\{S_t : t \in (0,\pi)\}$ é uniformemente limitada por 1.

Exemplo 4.3.2 (Médias em calotas)**.** O **operador média** na calota $C_t^x = \{y \in \mathbb{S}^d : x \cdot y \geq \cos t\}$ de $\mathbb{S}^d$ é o operador A_t dado por

$$(A_t f)(x) = \frac{1}{C_d(t)} \int_{C_t^x} f(w)\, d\sigma_d(w), \quad x \in \mathbb{S}^d, \quad t \in (0,\pi),$$

em que $C_d(t)$ é o volume total da calota C_t^x. É provado em (JORDÃO; MENEGATTO, 2016, p. 279) que

$$A_t(f) = f * \mu_{\mathscr{Z}_t}, \quad t \in (0,\pi), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d),$$

em que

$$\mu_{\mathscr{Z}_t} = C_d^{-1}(t)\tilde{\mu}_{\mathscr{Z}_t}, \quad t \in (0,\pi),$$

$$d\tilde{\mu}_{\mathscr{Z}_t}(x) = \mathscr{Z}_t(p,x)\, d\sigma_d(x), \quad t \in (0,\pi), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

e

$$\mathscr{Z}_t(x,y) := \begin{cases} \omega_d, & \text{se } \cos t \leq x \cdot y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em (BERENS; BUTZER; PAWELKE, 1968, p. 207), vemos que sequência de multiplicadores de A_t é

$$\rho_k^t = \frac{\omega_{d-1}}{P_k^{(d-1)/2}(1) C_d(t)} \left(\int_0^t P_k^{(d-1)/2}(\cos h)(\sin h)^{d-1} dh \right), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0,\pi).$$

Assim,

$$\frac{\omega_{d-1}c_1k^2}{C_d(t)}\left(\int_0^t h^2(\sin h)^{d-1}dh\right) \leq 1-\rho_k^t \leq \frac{\omega_{d-1}c^2k^2}{C_d(t)}\left(\int_0^t h^2(\sin h)^{d-1}dh\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

em que c_1 e c_2 são constantes positivas que dependem de d. Depois de estimarmos a função seno, esta dupla desigualdade assume a forma

$$\frac{\omega_{d-1}c_1n^2t^{d+2}}{(2\pi)^{d-1}(d+2)C_d(t)} \leq 1-\rho_k^t \leq \frac{\omega_{d-1}c_2n^2t^{d+2}}{(d+2)C_d(t)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Por outro lado,

$$\frac{\omega_{d-1}}{d}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{d-1} t^d \leq C_d(t) \leq \omega_{d-1}t^d, \quad t \in (0,\pi),$$

de modo que

$$c_1'(tk)^2 \leq 1-\rho_k^t \leq c_2'(tk)^2 \quad 0 < kt \leq \pi, \quad t \in (0,\pi/2],$$

para constantes positivas c_1' and c_2'. Podemos provar que, para todo $\tau > 0$,

$$0 < \rho_k^t \leq c_\tau, \quad t \geq \tau/k,$$

com $c_\tau < 1$ dependendo de d e τ. Assim,

$$1-\rho_k^t \asymp (\min\{1,kt\})^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0,\pi).$$

Finalmente, a desigualdade

$$\|M_tf\|_2 \leq \|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d), \quad t \in (0,\pi),$$

fornece a limitação uniforme da família $\{M_t : t \in (0,\pi)\}$.

Exemplo 4.3.3 (Médias do tipo Steklov)**.** A **média do tipo Steklov** é dada por

$$E_t(f)(x) = \frac{1}{D_d(t)}\int_0^t \frac{C_d(s)}{R_d(s)}A_s(f)(x)ds, \quad t \in (0,\pi), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

no qual a constante de normalização $D_d(t)$ é escolhida de modo que $E_t(1) = 1$. Temos que

$$E_t(f) = f * \mu_{\mathscr{W}_t}, \quad t \in (0,\pi), \quad f \in L^2(\mathbb{S}^d),$$

em que

$$\mu_{\mathscr{W}_t} := D_d^{-1}(t)\tilde{\mu}_{\mathscr{W}_t}, \quad t \in (0,\pi),$$

$$d\tilde{\mu}_{\mathscr{W}_t}(x) = \mathscr{W}_t(p\cdot x)d\sigma_d(x), \quad t \in (0,\pi), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

e

$$\mathscr{W}_t(x,y) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{R_d(s)}\mathscr{Z}_s(x,y)ds, & \text{se } \cos t \leq x\cdot y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $\mathscr{Z}_s$ sendo o núcleo descrito no exemplo anterior.

Além disso, de modo análogo aos exemplos anteriores, podemos ver que

$$1-\varphi_k^t \asymp (\min\{1,kt\})^2, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \quad t\in(0,\pi),$$

em que $\{\varphi_k^t\}$ é a família de multiplicadores associada a $\{E_t : t\in(0,\pi)\}$ e dada por

$$\varphi_k^t = \frac{1}{D_d(t)}\int_0^t \frac{C_d(s)\rho_k^s}{R_d(s)}ds, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \quad t\in(0,\pi).$$

REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. [S.l.]: U. S. Government Printing Office, Washington, DC, 1964. xiv+1046 p. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, No. 55). Citado na página 44.

BELINSKY, E.; DAI, F.; DITZIAN, Z. Multivariate approximating averages. **J. Approx. Theory**, v. 125, n. 1, p. 85–105, 2003. ISSN 0021-9045. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.005>. Citado na página 70.

BERENS, H.; BUTZER, P. L.; PAWELKE, S. Limitierungsverfahren von reihen mehrdimensionaler kugelfunktionen und deren saturationsverhalten. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. Ser. A**, Research Institute for Mathematical Sciences, v. 4, n. 2, p. 201–268, 1968. Citado na página 70.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer, New York, 2011. xiv+599 p. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0. Citado na página 19.

CARTAN, E. Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de riemann symétrique clos. **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)**, Springer, v. 53, n. 1, p. 217–252, 1929. Citado na página 46.

DAI, F.; XU, Y. **Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls**. Springer, New York, 2013. xviii+440 p. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 978-1-4614-6659-8; 978-1-4614-6660-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6660-4>. Citado na página 33.

DUNKL, C. **Harmonic analysis on spheres**. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1965. 57 p. Thesis (Ph.D.)–The University of Wisconsin - Madison. Disponível em: <http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:6510601>. Citado na página 27.

____. Operators and harmonic analysis on the sphere. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 125, p. 250–263, 1966. ISSN 0002-9947. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1994352>. Citado nas páginas 27, 49 e 51.

DUNKL, C. F.; XU, Y. **Orthogonal polynomials of several variables**. Second. Cambridge University Press, Cambridge, 2014. v. 155. xviii+420 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 155). ISBN 978-1-107-07189-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107786134>. Citado na página 17.

ERDÉLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F.; TRICOMI, F. G. **Higher transcendental functions. Vol. I**. [S.l.]: Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1981. xiii+302 p. Reprint of the 1953 original. ISBN 0-89874-069-X. Citado na página 43.

FOLLAND, G. B. **A course in abstract harmonic analysis**. [S.l.]: CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. x+276 p. (Studies in Advanced Mathematics). ISBN 0-8493-8490-7. Citado na página 17.

____. **Real analysis: modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. v. 40. Citado nas páginas 21, 23 e 24.

HELGASON, S. u. **Differential geometry and symmetric spaces**. [S.l.]: Academic Press, New York-London, 1962. xiv+486 p. (Pure and Applied Mathematics, Vol. XII). Citado na página 45.

JEFFREY, A.; DAI, H.-H. **Handbook of mathematical formulas and integrals**. Fourth. [S.l.]: Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2008. xlvi+541 p. ISBN 978-0-12-374288-9. Citado na página 67.

JORDÃO, T.; MENEGATTO, V. A. Estimates for Fourier sums and eigenvalues of integral operators via multipliers on the sphere. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 144, n. 1, p. 269–283, 2016. ISSN 0002-9939. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/proc12716>. Citado nas páginas 18, 53, 54, 69 e 70.

____. Kolmogorov widths on the sphere via eigenvalue estimates for Hölderian integral operators. **Results Math.**, v. 74, n. 2, p. Paper No. 74, 18, 2019. ISSN 1422-6383. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00025-019-1000-4>. Citado na página 69.

KATZNELSON, Y. **An introduction to harmonic analysis**. Third. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. xviii+314 p. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 0-521-83829-0; 0-521-54359-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139165372>. Citado na página 17.

KÜHN, T. Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels. **Arch. Math. (Basel)**, v. 49, n. 6, p. 525–534, 1987. ISSN 0003-889X,1420-8938. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01194301>. Citado na página 18.

MORIMOTO, M. **Analytic functionals on the sphere**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. v. 178. xii+160 p. (Translations of Mathematical Monographs, v. 178). ISBN 0-8218-0585-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/mmono/178>. Citado nas páginas 27, 48, 53, 54 e 66.

MUNKRES, J. R. **Topology**. [S.l.]: Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 p. Second edition of [MR0464128]. ISBN 0-13-181629-2. Citado na página 19.

RUDIN, W. **Fourier analysis on groups**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. x+285 p. (Wiley Classics Library). Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-52364-X. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/9781118165621>. Citado na página 23.

STEIN, E. M. **Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. v. 43. xiv+695 p. (Princeton Mathematical Series, v. 43). With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III. ISBN 0-691-03216-5. Citado na página 17.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Fourier analysis**. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. v. 1. xvi+311 p. (Princeton Lectures in Analysis, v. 1). An introduction. ISBN 0-691-11384-X. Citado nas páginas 17 e 54.

SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials**. American Mathematical Society, 1975. (American Math. Soc: Colloquium publ). ISBN 9780821810231. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZOhmnsXlcY0C>. Citado na página 43.

TU, L. **An introduction to manifolds**. Second. Springer, New York, 2011. xviii+411 p. (Universitext). ISBN 978-1-4419-7399-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7400-6>. Citado nas páginas 24 e 45.

ICMC USP
SÃO CARLOS