

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Singularidades de aplicações, classes características e polinômios de Thom

João Vítor Pissolato

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

João Vítor Pissolato

Singularidades de aplicações, classes características e polinômios de Thom

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

USP – São Carlos
Maio de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P678s Pissolato, João Vítor
Singularidades de aplicações, classes
características e polinômios de Thom / João Vítor
Pissolato; orientador Nivaldo de Góes Grulha Júnior.
-- São Carlos, 2021.
126 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Polinômios de Thom. 2. Classes características.
3. Singularidades de aplicações. I. Grulha Júnior,
Nivaldo de Góes, orient. II. Título.

João Vítor Pissolato

Singularities of maps, characteristic classes and Thom
polynomials

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in
accordance with the requirements of the Mathematics
Graduate Program, for the degree of Master in Science.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

USP – São Carlos
May 2021

*Este trabalho é dedicado a toda minha família e à minha namorada,
uma companheira para todas as viagens.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Eduardo e Sandra, pelo apoio incondicional nos meus estudos. Sem eles, eu, com certeza, não teria chego até aqui.

A toda minha família, por acreditar em mim desde o ingresso na graduação.

À minha namorada, Beatriz, por ser uma companheira inseparável ao longo desta jornada.

Ao Professor Nivaldo, por sua paciência e disponibilidade para solucionar todas as dúvidas que surgiram durante este mestrado.

A todos os funcionários da Universidade de São Paulo.

À CAPES, processo nº 88887.342540/2019-00, e à FAPESP, processo nº 2019/11654-8, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste projeto de mestrado.

*“Não é uma questão de conseguir ou não,
há coisas na vida que você apenas faz.”
(Lightning, de Final Fantasy XIII)*

RESUMO

PISSOLATO, J. V. **Singularidades de aplicações, classes características e polinômios de Thom**. 2021. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

O estudo de classes características de variedades singulares é um tema atual e que tem sido amplamente utilizado em várias áreas da ciência. O objetivo deste projeto é estudar classes de Schwartz-MacPherson pelo viés da teoria de singularidades clássica. A abordagem central do projeto é a utilização dos polinômios de Thom, o que propiciará um conjunto de ferramentas apropriado para o desenvolvimento de questões que generalizam problemas enumerativos clássicos em teoria de singularidades.

Palavras-chave: Singularidades de aplicações, Classes características, Polinômios de Thom.

ABSTRACT

PISSOLATO, J. V. **Singularities of maps, characteristic classes and Thom polynomials**. 2021. 126 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

The study of characteristic classes of singular varieties is a current theme and has been widely used in various areas of science. The purpose of this project is to study Schwartz-MacPherson classes through the means of the classical singularity theory. The central approach of the project is the use of Thom polynomials, which will provide an appropriate set of tools for the development of issues that generalize classical enumerative problems in singularity theory.

Keywords: Singularities of maps, Characteristic classes, Thom polynomials.

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	21
1.1	Feixes	21
1.2	Esquemas	28
1.3	\mathcal{A} -equivalência e \mathcal{H} -equivalência	50
2	GRUPOS DE HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA	57
2.1	Homologia e Cohomologia Singular	57
2.2	Homologia e Cohomologia Relativa	61
2.3	Homologia e Cohomologia de Borel-Moore	63
2.4	Produto Cup e Produto Cap	64
2.5	Pushforward e Pullback	74
2.6	A Dualidade de Poincaré	78
3	GRUPO DE CHOW	81
3.1	Ciclos	81
3.2	Equivalência Racional	85
3.3	Imagem Direta	90
4	CLASSES CARACTERÍSTICAS	93
4.1	Classes de Chern	93
4.2	Classes de Chern para Variedades Singulares	103
5	POLINÔMIOS DE THOM PARA SINGULARIDADES DE APLICA- ÇÕES	109
5.1	Polinômio de Thom para \mathcal{H} -equivalência	109
5.2	Polinômio de Thom para \mathcal{A} -equivalência	118
5.3	Conclusão	124
	REFERÊNCIAS	125

INTRODUÇÃO

Na geometria algébrica clássica, assim como em teoria de singularidades, propriedades numéricas de variedades algébricas projetivas complexas foram extensivamente estudadas por meio da enumeração de ponto singulares de aplicações algébricas naturalmente associadas, por exemplo, o grau de locus de ramificação, variedade polar, pontos múltiplos, inflexões, e assim por diante.

Em (OHMOTO, 2016) é introduzido uma abordagem unificada moderna para tais problemas enumerativos com a teoria de polinômios de Thom (com base na classificação das mono e multi-singularidades de aplicações). Neste projeto investigaremos um novo ramo da teoria, em que substitui-se a contagem de pontos singulares pela contagem das características de Euler (ponderadas). Essa teoria nos conduz a uma série de generalizações de fórmulas enumerativas clássicas.

Um exemplo simples é a fórmula de Riemann-Hurwitz: Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa sobrejetora entre curvas complexas e compactas. Para cada ponto de M a multiplicidade $\mu = \mu(f)$ é atribuída para que o germe de f no ponto seja escrito como $z \mapsto z^{\mu+1} + \dots$. A fórmula clássica diz que o número de pontos críticos, tendo em conta as multiplicidades μ , medem a diferença entre as características de Euler topológicas χ de M e N , que está escrito de forma ligeiramente moderna da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_M \mu(f) d\chi &= \deg f \cdot \chi(M) - \chi(N) \\ &= c_1(TN) \frown f_*(M) - c_1(TM) \frown [M] \\ &= c_1(f^*TN - TM) \frown [M]. \end{aligned}$$

Aqui aparecem os principais objetos de estudo: c_i representa a classe de Chern de fibrados vetoriais e $[-]$ é o ciclo fundamental da teoria de interseção clássica; \int_M é a integral das funções construtíveis e $tp(A_1) = c_1(f^*TN - TM)$ é o polinômio de Thom mais simples para A_1 -singularidades de aplicações equidimensionais.

O conceito de classes características para variedades diferenciáveis foi introduzido em 1935 independentemente, por Stiefel, e por H. Whitney. Em seu artigo (CHERN, 1946), Chern deu várias definições equivalentes para classes características sobre variedades hermitianas, a partir de então chamadas classes de Chern. Uma referência para o estudo de classes características de variedades regulares é (MILNOR; STASHEFF, 1974).

As classes de Chern, no caso complexo, e as de Stiefel-Whitney, no caso real, generalizam a noção da característica de Euler-Poincaré. Elas foram primeiramente definidas como obstrução

para construção de campos de k -referenciais tangentes a uma variedade suave, tanto no caso complexo quanto no caso real.

Conforme observado em (OHMOTO, 2016), dada uma singularidade estável do tipo η de germes de aplicações de \mathbb{C}^m em \mathbb{C}^n , o polinômio de Thom $tp(\eta)$ é, por definição, um polinômio universal em classes de Chern quocientes $c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$ que expressa a classe fundamental do fecho de

$$\eta(f) = \{x \in M \mid \text{o germe de } f \text{ em } x \text{ é do tipo } \eta\},$$

para quaisquer aplicações estáveis $f : M \rightarrow N$. Mais precisamente,

$$Dual([\overline{\eta(f)}]) = tp(\eta)(c(f)).$$

A extensão do conceito de classes características para variedades singulares depende de uma generalização adequada para o conceito de fibrado tangente.

Deligne e Grothendieck conjecturaram a existência de classes características (em homologia) de variedades algébricas possivelmente singulares, que são duais à classe total de Chern no caso suave, obtendo assim uma extensão para a classe de Chern. Esta conjectura foi provada por MacPherson em (MACPHERSON, 1974).

Alguns anos antes do artigo de MacPherson, Marie-Hélène Schwartz construiu, por outros métodos, classes em cohomologia relativa, e que posteriormente foi provado em (BRASSELET; SCHWARTZ, 1981) que estas classes coincidem com as classes construídas por MacPherson via o isomorfismo de Alexander.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No capítulo 1 fazemos uma breve recordação dos conceitos de feixes de grupo e de anéis para, em seguida, definir esquemas afins e esquemas mais gerais. Estes objetos geométricos poderão substituir as variedades suaves quando estivermos no contexto singular. Também relembramos as definições de \mathcal{A} e \mathcal{H} equivalências para falarmos de germes de aplicações.

No capítulo 2 é dedicado ao estudo dos grupos de homologias e cohomologias necessários para desenvolvermos o trabalho. As classes de Chern estão no grupo de cohomologia singular, enquanto que as classes de Chern-Schwartz-Macpherson (CSM) e de Segre-Schwartz-Macpherson (SSM) estão no grupo de homologia de Borel-Moore, e estas classes são necessárias para definirmos o polinômio de Thom.

No capítulo 3 fazemos um estudo do grupo de Chow associado a uma variedade algébricas, onde também é possível definir classes de Chern, servindo como um substituto aos grupos de homologia no contexto singular.

No capítulo 4 abordamos classes características. A primeira apresentada são as classes de Chern associadas aos fibrados vetoriais, assim, podemos definir uma classe de Chern de uma

variedade suave como a classe de Chern do seu fibrado tangente. No contexto singular, não existe o conceito de fibrado tangente, assim, várias alternativas surgiram ao longo dos tempos. Neste capítulo apresentamos duas delas, as classes de CSM e SSM.

Por fim, no capítulo 5 estudamos o polinômio de Thom associado a um tipo de \mathcal{K} -singularidade e também calculamos alguns exemplos utilizando o chamado “método da restrição”, introduzido por R. Rimányi. Também falamos um pouco sobre o polinômio de Thom superior, que é uma série de potências em classes de Chern que descreve a classe de SSM. Ainda fazemos um breve estudo para \mathcal{A} -singularidades.

PRELIMINARES

Neste capítulo recordamos os elementos básicos para o desenvolvimento do nosso estudo sobre classes características e polinômios de Thom. As demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo são, em sua maioria, apenas referenciadas, devido à natureza e objetivo do mesmo. As demonstrações que aparecem neste capítulo foram incluídas porque auxiliam no desenvolvimento do trabalho, ou não foram encontradas referências. A principal referência para este capítulo é ([HARTSHORNE, 1977](#)).

1.1 Feixes

Definição 1.1. Seja X um espaço topológico. Um **pré-feixe** \mathcal{F} de grupos abelianos em X consiste do seguinte:

1. Para cada aberto U de X , existe um grupo abeliano associado, denotado por $\mathcal{F}(U)$, chamado de **seção de \mathcal{F}** , que pode ser denotado por $\Gamma(U, \mathcal{F})$.
2. Para cada par de abertos U e V tais que $V \subseteq U$, existe um homomorfismo de grupos $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, chamado de **mapa restrição**, e denotamos por $s|_V$ o elemento $\rho_{U,V}(s)$, para $s \in \mathcal{F}(U)$.

e que são satisfeitas as seguintes condições:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$
2. $\rho_{U,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ é a aplicação identidade
3. Se U , V e W são três abertos tais que $W \subseteq V \subseteq U$, então $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$.

Definição 1.2. Seja X um espaço topológico. Um **feixe** \mathcal{F} de grupos abelianos é um pré-feixe que satisfaz as seguintes condições adicionais:

4. Para todo aberto U e para toda cobertura $\{V_i\}_{i \in I}$ de U por abertos, se $s \in \mathcal{F}(U)$ é um elemento tal que $s|_{V_i} = 0$, para todo $i \in I$, então $s = 0$.
5. Para todo aberto U e toda cobertura $\{V_i\}_{i \in I}$ de U por abertos, se para cada $i \in I$, tomarmos um elemento $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tal que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe um $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$, para todo $i \in I$.

Observação 1.3. De forma análoga definimos **pré-feixes (feixes) de anéis**, impondo que $\mathcal{F}(U)$ seja anel e os mapas restrição sejam homomorfismos de anéis.

Definição 1.4. Seja \mathcal{F} um feixe de anéis sobre um espaço topológico X . Dizemos que um feixe de anéis \mathcal{G} é um **sub-feixe** de \mathcal{F} se para todo aberto U de X tem-se $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$, e as aplicações restrições de \mathcal{G} são as restrições das aplicações restrições de \mathcal{F} .

Um **feixe de ideais** \mathcal{I} de um feixe de anéis \mathcal{F} sobre um espaço topológico X é um sub-feixe de \mathcal{F} tal que $\mathcal{I}(U)$ é um ideal de $\mathcal{F}(U)$, para todo aberto U de X .

Observação 1.5. Seja \mathcal{F} um feixe de grupos abelianos em um espaço topológico X . Então o elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ que satisfaz a condição (5) da definição é único.

Exemplo 1.6. Considere o espaço topológico \mathbb{C}^n com a topologia usual. Definimos o feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ dado por

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa}\}, \text{ para todo } U \text{ aberto de } X.$$

Considere $\rho_{U,V}$ a restrição usual de aplicações. Verifiquemos que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ é um feixe de anéis em \mathbb{C}^n .

1. Definimos a operação de adição e multiplicação da forma usual. Segue da análise complexa que adição de funções holomorfas são holomorfas, assim, essa operação está bem definida. Os axiomas de anel para $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ segue do fato que \mathbb{C} é um anel e que a operação das funções são feitas ponto a ponto. O elemento neutro é a função constante igual a 0 e o elemento identidade é a função constante igual a 1.
2. Considerando as restrições usuais de aplicações, temos que satisfazem as demais condições de pré-feixe.
3. Agora vamos verificar as condições adicionais para feixe. Sejam U aberto de \mathbb{C}^n e $\{V_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de U por abertos.
 - a) Seja $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ tal que $f|_{V_i} = 0$, para todo $i \in I$, e mostremos que $f = 0$. Tome $x \in U$. Como $U \subseteq \cup_{i \in I} V_i$, então existe $i \in I$ tal que $x \in V_i$. Como $f|_{V_i} = 0$, segue que $f(x) = 0$. Portanto, $f = 0$.

b) Sejam $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ tais que $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$. Defina $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x) = f_i(x)$, se $x \in V_i$. Então f está bem definida, pois dado $x \in U$, se $x \in V_i$ e $x \in V_j$, como $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$, temos $f_i(x) = f_j(x)$. Agora segue de como f foi definida que $f|_{V_i} = f_i$, para todo $i \in I$.

Portanto, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ é um feixe de grupos abelianos em \mathbb{C}^n .

Observação 1.7. Vamos agora fazer uma construção. Seja P um ponto de X . Considere pares da forma (U, s) , onde U é um aberto de X que contém P e $s \in \mathcal{F}(U)$. Sobre o conjunto dos pares do tipo (U, s) , defina a relação “ \sim ” dada por

$$(U, s) \sim (V, t) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V \text{ aberto, } P \in W, \text{ tal que } s|_W = t|_W,$$

que é uma relação de equivalência. As classes de equivalência são denotadas por $[U, s]_P$.

Definição 1.8. A classe $[U, s]_P$ é chamado de **germe de \mathcal{F} no ponto P** . O conjunto de todos os germes de \mathcal{F} em P , denotado por \mathcal{F}_P , é chamado de **stalk de \mathcal{F} em P** .

Observação 1.9. Pode-se obter a mesma construção fazendo o limite direto dos grupos $\mathcal{F}(U)$, para todo aberto U contendo P , via os mapas restrição ρ .

Observação 1.10. Se \mathcal{F} é um feixe de grupos abelianos e $P \in X$, então podemos munir o stalk \mathcal{F}_P com uma estrutura de grupos abelianos da seguinte forma: Dados $[U, s]_P$ e $[V, t]_P$ dois elementos em \mathcal{F}_P , definimos a operação

$$[U, s]_P + [V, t]_P := [U \cap V, \rho_{U, U \cap V}(s) + \rho_{V, U \cap V}(t)]_P.$$

O elemento neutro é $[X, 0]_P$ (que é igual a $[U, 0]_P$ para todo aberto U), e o elemento oposto de $[U, s]_P$ é $[U, -s]$. Além disso, se \mathcal{F} for um feixe de anéis, podemos definir a multiplicação de forma análoga

$$[U, s]_P \cdot [V, t]_P := [U \cap V, \rho_{U, U \cap V}(s) \cdot \rho_{V, U \cap V}(t)]_P,$$

onde o elemento neutro é $[X, 1]_P$. Estas operações estão bem definidas e tornam \mathcal{F}_P um grupo (respectivamente, um anel).

Exemplo 1.11. O stalk do feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ em P é denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, P}$. Do modo que foi construído, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, P}$ pode ser visto como o conjunto dos germes de funções holomorfas em P (no sentido de duas funções serem equivalentes se elas coincidem em uma vizinhança de P).

Definição 1.12. Sejam X um espaço topológico e \mathcal{F} um feixe de anéis em X . O **suporte de \mathcal{F}** , denotado por $\text{supp}(\mathcal{F})$, é definido como o conjunto dos pontos $P \in X$ tais que o stalk de \mathcal{F} em P não é o anel nulo, isto é,

$$\text{supp}(\mathcal{F}) = \{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}.$$

Dado $s \in \mathcal{F}(X)$, definimos o **suporte de s** , denotado por $\text{supp}(s)$, como o conjunto dos pontos $P \in X$ tais que o stalk de s em P não é o elemento nulo do anel \mathcal{F}_P , isto é,

$$\text{supp}(s) = \{P \in X \mid [X, s]_P \neq [X, 0]_P\}.$$

Observação 1.13. Dado $s \in \mathcal{F}(X)$, o suporte de s é um subconjunto fechado de X . De fato, dado $P \in X \setminus \text{supp}(s)$, temos que $[X, s]_P = [X, 0]_P$, logo, existe um aberto U de X , com $P \in U$, tal que $s|_U = 0$. Assim, $U \subseteq X \setminus \text{supp}(s)$, provando que $\text{supp}(s)$ é fechado.

Assim, concluímos que o suporte de um feixe de anéis \mathcal{F} é um subconjunto fechado de X . Basta observar que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\mathcal{F}) &= \{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\} \\ &= \{P \in X \mid [X, 1]_P \neq [X, 0]_P\} \\ &= \text{supp}(1), \end{aligned}$$

e como visto, $\text{supp}(1)$ é fechado. Portanto, $\text{supp}(\mathcal{F})$ é um subconjunto fechado de X .

Definição 1.14. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} pré-feixes em um espaço topológico X . Um **morfismo de pré-feixes** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste de um homomorfismo de grupos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, para cada aberto U de X , e se U e V são dois abertos de X tais que $V \subseteq U$, então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{U,V} & & \downarrow \rho'_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

é comutativo, onde ρ e ρ' são mapas restrição de \mathcal{F} e \mathcal{G} , respectivamente. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são feixes, dizemos que φ é um **morfismo de feixes**. Dizemos que φ é um **isomorfismo** se φ é um morfismo e possui uma inversa que também é um morfismo, isto é, existe um morfismo $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que

$$\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$$

e

$$\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{G}}.$$

Observação 1.15. A composição $\psi \circ \varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ de dois morfismos $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um morfismo, que é dado por

$$(\psi \circ \varphi)(U) := \psi(U) \circ \varphi(U),$$

que é um homomorfismo, e denotando por ρ , ρ' e ρ'' as aplicações de restrição de \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{H} , respectivamente, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & (\psi \circ \varphi)(U) & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\psi(U)} & \mathcal{H}(U) \\ \downarrow \rho_{U,V} & & \downarrow \rho'_{U,V} & & \downarrow \rho''_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\psi(V)} & \mathcal{H}(V) \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ & & (\psi \circ \varphi)(V) & & \end{array}$$

onde $V \subseteq U$ são abertos dados e os quadrados comutam, logo, vale

$$\begin{aligned}
 \rho''_{U,V} \circ (\psi \circ \varphi)(U) &= \rho''_{U,V} \circ (\psi(U) \circ \varphi(U)) \\
 &= (\rho''_{U,V} \circ \psi(U)) \circ \varphi(U) \\
 &= (\psi(V) \circ \rho'_{U,V}) \circ \varphi(U) \\
 &= \psi(V) \circ (\rho'_{U,V} \circ \varphi(U)) \\
 &= \psi(V) \circ (\varphi(V) \circ \rho_{U,V}) \\
 &= (\psi(V) \circ \varphi(V)) \circ \rho_{U,V} \\
 &= (\psi \circ \varphi)(V) \circ \rho_{U,V}
 \end{aligned}$$

Portanto, $\psi \circ \varphi$ é um morfismo.

Além disso, o morfismo identidade na definição acima é $id_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, que é dado por

$$id_{\mathcal{F}}(U) := id_{\mathcal{F}(U)}.$$

Observação 1.16. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Então φ é um isomorfismo se, e somente se, para cada aberto U de X , $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é um isomorfismo. De fato, se φ é um isomorfismo de feixes, então existe um morfismo de feixes $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que

$$\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$$

e

$$\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{G}},$$

logo, para todo aberto U de X , valem

$$(\psi \circ \varphi)(U) = id_{\mathcal{F}(U)}$$

e

$$(\varphi \circ \psi)(U) = id_{\mathcal{G}(U)},$$

ou seja,

$$\psi(U) \circ \varphi(U) = id_{\mathcal{F}(U)}$$

e

$$\varphi(U) \circ \psi(U) = id_{\mathcal{G}(U)}.$$

Portanto, $\varphi(U)$ é um isomorfismo.

Reciprocamente, se $\varphi(U)$ é um isomorfismo, para todo U , podemos definir $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por

$$\psi(U) := \varphi(U)^{-1},$$

que é homomorfismo, e o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\psi(U)} & \mathcal{F}(U) \\
 \downarrow \rho'_{U,V} & & \downarrow \rho_{U,V} \\
 \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\psi(V)} & \mathcal{F}(V)
 \end{array}$$

comuta, uma vez que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{U,V} & & \downarrow \rho'_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

comuta, então

$$\varphi(V) \circ \rho_{U,V} = \rho'_{U,V} \circ \varphi(U),$$

logo, compondo com $\varphi(V)^{-1}$ à esquerda e com $\varphi(U)^{-1}$ à direita, obtemos

$$\rho_{U,V} \circ \varphi(U)^{-1} = \varphi(V)^{-1} \circ \rho'_{U,V},$$

isto é,

$$\rho_{U,V} \circ \psi(U) = \psi(V) \circ \rho'_{U,V}.$$

Então ψ é um morfismo, e vale

$$\varphi(U) \circ \psi(U) = \varphi(U) \circ \varphi(U)^{-1} = id_{\mathcal{G}(U)}$$

e

$$\psi(U) \circ \varphi(U) = \varphi(U)^{-1} \circ \varphi(U) = id_{\mathcal{F}(U)},$$

isto é,

$$\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}}$$

e

$$\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{G}}.$$

Portanto, $\psi = \varphi^{-1}$, logo, φ é isomorfismo de feixes.

Observação 1.17. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Fixe um ponto $P \in X$. Podemos definir um homomorfismo nos stalks $\varphi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ da seguinte forma: Dada uma classe $[U, s]_P \in \mathcal{F}_P$, definimos

$$\varphi_P([U, s]_P) := [U, \varphi(U)(s)]_P,$$

que está bem definida e é um homomorfismo de anéis.

Observação 1.18. O stalk de um morfismo é um funtor covariante, isto é, se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ são dois morfismos e $P \in X$, então

$$(\psi \circ \varphi)_P = \psi_P \circ \varphi_P.$$

O seguinte resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para um morfismo de feixes ser um isomorfismo. Sua demonstração pode ser vista em (HARTSHORNE, 1977, p.63, Proposition 1.1).

Teorema 1.19. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois feixes sobre X e $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Então φ é um isomorfismo de feixes se, e somente se, $\varphi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ é um isomorfismo, para todo $P \in X$.

Definição 1.20. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Dado um feixe \mathcal{F} em X , definimos o feixe **imagem direta de \mathcal{F}** , que é um feixe em Y , denotado por $f_*\mathcal{F}$, que a cada aberto V de Y associa o conjunto $(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Definição 1.21. Seja \mathcal{F} um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Um feixe \mathcal{F}^+ é dito uma **feixificação de \mathcal{F}** (que também pode ser chamado de **feixe associado a \mathcal{F}** ou **feixificação de \mathcal{F}**) se existe um morfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ tal que para todo feixe \mathcal{G} sobre X e todo morfismo $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, existe um único morfismo $\theta : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\psi = \theta \circ \alpha$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}^+ \\ \downarrow \psi & \swarrow \theta & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

Teorema 1.22. Se \mathcal{F} é um pré-feixe sobre um espaço topológico X , então existe uma única feixificação \mathcal{F}^+ de \mathcal{F} , a menos de isomorfismo. Além disso, são verdadeiras:

1. Se $P \in X$ é um ponto, então $\mathcal{F}_P^+ \cong \mathcal{F}_P$.
2. Se \mathcal{F} já é um feixe, então $\mathcal{F}^+ \cong \mathcal{F}$.

Observação 1.23. Como é relevante sabermos como trabalhar com a feixificação, daremos apenas a sua construção e omitiremos a demonstração das propriedades enunciadas, por ser uma demonstração técnica.

O feixe \mathcal{F}^+ é construído da seguinte maneira: Para cada aberto U , $\mathcal{F}^+(U)$ é o conjunto das funções $s : U \rightarrow \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P$ tais que $s(P) \in \mathcal{F}_P$, para todo $P \in U$, e para todo ponto $P \in U$, existe um aberto V_P de X , com $P \in V_P \subseteq U$, e existe um elemento $t_P \in \mathcal{F}(V_P)$ tal que $s(Q) = [V_P, t_P]_Q$, para todo $Q \in V_P$, e considerando ρ' em \mathcal{F}^+ a restrição usual de aplicações, obtemos que \mathcal{F}^+ é um feixe em X .

O morfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ é definido da seguinte forma: Para todo aberto U de X , $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ é a aplicação que a cada $s \in \mathcal{F}(U)$ associa $\alpha(U)(s) : U \rightarrow \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P$ dada por $\alpha(U)(s)(Q) = [U, s]_Q$.

Observação 1.24. Sejam X um espaço topológico, \mathcal{F} um feixe de anéis sobre X e \mathcal{I} um feixe de ideais de \mathcal{F} . Defina o pré-feixe de anéis $\frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)}$ sobre X , que a cada aberto U de X associa o anel $\frac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)}$, e a aplicação restrição $\bar{\rho}_{U,V} : \frac{\mathcal{O}_X(U)}{\mathcal{I}(U)} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_X(V)}{\mathcal{I}(V)}$ é dada por $\bar{\rho}_{U,V}(f + \mathcal{I}(U)) = \rho_{U,V}(f) + \mathcal{I}(V)$, onde $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ é a aplicação restrição de \mathcal{F} .

Consideremos $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}$ a feixificação de $\frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)}$. Agora, do Teorema 1.22, temos que

$$\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}} \right)_P \cong \left(\frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)} \right)_P,$$

e um elemento de $\left(\frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)}\right)_P$ é uma classe $[U, f + \mathcal{I}(U)]_P$, onde $f \in \mathcal{F}(U)$, que pode ser identificado com $[U, f]_P + \mathcal{I}_P$, logo,

$$\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)_P \cong \left(\frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)}\right)_P \stackrel{i}{\cong} \frac{\mathcal{F}_P}{\mathcal{I}_P}.$$

Agora considere o morfismo canônico de pré-feixes $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)}$ que a cada aberto U de X , tem-se o homomorfismo natural $\pi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \frac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)}$. Logo, π é sobrejetora, então como na demonstração do Teorema 1.19, temos $\pi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \left(\frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)}\right)_P$ sobrejetor, logo, $i \circ \pi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \frac{\mathcal{F}_P}{\mathcal{I}_P}$ é sobrejetor.

Agora do Teorema 1.22 temos um morfismo $\alpha : \frac{\mathcal{F}(\cdot)}{\mathcal{I}(\cdot)} \rightarrow \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}$ que é um isomorfismo nos stalks. Logo, obtemos um morfismo canônico sobrejetor

$$\alpha_P \circ \pi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)_P$$

1.2 Esquemas

Com o conceito de feixes estabelecido, vamos começar a trabalhar para definir esquemas, que serve como o análogo de uma variedade algébrica e seu anel de funções na teoria de Geometria Algébrica Clássica.

Definição 1.25. Seja A um anel. Definimos

$$\text{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ é ideal primo de } A\}.$$

Seja $S \subseteq A$ um subconjunto qualquer de A . Definimos

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq S\} \subseteq \text{Spec}(A).$$

Seja $X \subseteq \text{Spec}(A)$ um subconjunto qualquer. Definimos

$$I(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}.$$

Observação 1.26. Sejam A um anel, $S \subseteq A$ um subconjunto qualquer e $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S , isto é, o subconjunto de A formado por todas as somas finitas da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r, \quad a_i \in A, x_i \in S.$$

Então $V(S) = V(\langle S \rangle)$. Portanto, ao trabalhar com $V(S)$, podemos sempre supor que S é um ideal \mathfrak{a} de A .

A seguir enunciamos várias propriedades das funções I e V . A ordem na qual estas propriedades são enunciadas é importante, uma vez que para provar alguns itens, são utilizados os itens anteriores. Por este motivo, iremos manter a demonstração.

Lema 1.27. Seja A um anel. São verdadeiras

1. $V(A) = \emptyset$ e $V(\langle 0 \rangle) = \text{Spec}(A)$.
2. Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são dois ideais de A , então $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$
3. Se $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de ideais de A , então $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$
4. A função V inverte inclusões, isto é, se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, então $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$.
5. A função I inverte inclusões, isto é, se $X \subset Y$, então $I(Y) \subseteq I(X)$.
6. Se $X, Y \subseteq \text{Spec}(A)$ são subconjuntos quaisquer, então $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$.
7. (Hilbert's Nullstellensatz) Para todo ideal \mathfrak{a} de A , vale $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, onde

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a}, \text{ para algum } n > 0\}.$$

8. Para todo ideal \mathfrak{a} de A , vale $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a})$.
9. Se $X \subseteq \text{Spec}(A)$, então $X \subseteq V(I(X))$. Além disso, $X = V(I(X))$ se, e somente se, $X = V(\mathfrak{a})$, para algum ideal \mathfrak{a} de A .
10. Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são dois ideais de A , então $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ se, e somente se, $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Demonstração. 1. Suponha, por absurdo, que exista $\mathfrak{p} \in V(A)$. Então $\mathfrak{p} \supseteq A$, daí, $\mathfrak{p} = A$, o que é uma contradição, pois na definição de ideal primo é exigido que $\mathfrak{p} \neq A$. Portanto, $V(A) = \emptyset$.

Já temos $V(\langle 0 \rangle) \subseteq \text{Spec}(A)$. Reciprocamente, tome $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. Como qualquer ideal contém 0 , então $\langle 0 \rangle \subseteq \mathfrak{p}$, logo, $\mathfrak{p} \in V(\langle 0 \rangle)$. Portanto, $V(\langle 0 \rangle) = \text{Spec}(A)$.

2. Tome $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. Então $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ ou $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$, ou seja, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, em ambos os casos, como vale $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, \mathfrak{b} , então $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ e daí $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

Reciprocamente, tome $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ e suponha, por absurdo, que $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. Então $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$, logo, existem $a \in \mathfrak{a}$ e $b \in \mathfrak{b}$ tais que $a, b \notin \mathfrak{p}$. Como \mathfrak{p} é um ideal primo, então $ab \notin \mathfrak{p}$, mas $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, isto mostra que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$, o que é uma contradição, pois $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Portanto, $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

3. Tome $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$. Então $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, para todo $i \in I$. Dado um elemento $\sum_{i \in I} a_i \in \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$, como $a_i \in \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ e \mathfrak{p} é um ideal, segue que $\sum_{i \in I} a_i \in \mathfrak{p}$, ou seja, $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$. Logo, $\mathfrak{p} \in V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$.

Reciprocamente, tome $\mathfrak{p} \in V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$. Então para todo $i \in I$, temos $\mathfrak{a}_i \subseteq \sum_{j \in I} \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{p}$, logo, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_i)$, para todo $i \in I$. Assim, $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$. Portanto, $\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$.

4. Tome $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$, então $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, e como $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, segue que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Portanto, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Portanto, $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$.
5. Seja $a \in I(Y)$ dado. Então $a \in \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in Y$. Em particular, como $X \subseteq Y$, então $a \in \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in X$. Portanto, $a \in I(X)$. Portanto, $I(Y) \subseteq I(X)$.
6. Como $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$, então, aplicando a função I , obtemos $I(X \cup Y) \subseteq I(X)$ e $I(X \cup Y) \subseteq I(Y)$ e, portanto, $I(X \cup Y) \subseteq I(X) \cap I(Y)$.

Reciprocamente, tome $a \in I(X) \cap I(Y)$. Seja $\mathfrak{p} \in X \cup Y$, então $\mathfrak{p} \in X$ ou $\mathfrak{p} \in Y$. Se $\mathfrak{p} \in X$, como $a \in I(X)$, então $a \in \mathfrak{p}$. Agora se $\mathfrak{p} \in Y$, como $a \in I(Y)$, então $a \in \mathfrak{p}$. Portanto, $a \in I(X \cup Y)$. Portanto, $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$.

7. Como o radical de um ideal \mathfrak{b} é a intersecção de todos os ideais primos que contém \mathfrak{b} , vem

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Portanto, $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

8. Como sempre vale $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, então tomando a função V , obtemos $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\mathfrak{a})$. Reciprocamente, tome $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Então $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, daí,

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{q} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}.$$

Assim, $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Portanto, $V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a})$.

9. Tome $\mathfrak{p} \in X$. Então

$$I(X) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in X} \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Assim, $\mathfrak{p} \in V(I(X))$. Portanto, $X \subseteq V(I(X))$.

Além disso, se $V(I(X)) = X$, então $X = V(\mathfrak{a})$, para $\mathfrak{a} = I(X)$. Reciprocamente, suponha $X = V(\mathfrak{a})$. Então

$$V(I(X)) = V(I(V(\mathfrak{a}))) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a}) = X.$$

10. (\Rightarrow) Aplicando I em $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$, vem

$$\sqrt{\mathfrak{b}} = I(V(\mathfrak{b})) \subseteq I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

(\Leftarrow) Aplicando a função V em $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, vem

$$V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{b}}) = V(\mathfrak{b}).$$

□

Observação 1.28. Com os três primeiros itens do Lema 1.27 vemos que os conjuntos do tipo $V(\mathfrak{a})$ satisfazem os axiomas de conjunto fechado de um espaço topológico. Portanto, podemos munir $\text{Spec}(A)$ de uma topologia, declarando que um subconjunto $U \subseteq \text{Spec}(A)$ é aberto se $\text{Spec}(A) \setminus U = V(\mathfrak{a})$, para algum ideal \mathfrak{a} de A .

Definição 1.29. A topologia acima construída é chamada de **topologia de Zariski**.

Observação 1.30. Se X é um subconjunto qualquer de $\text{Spec}(A)$, então

$$V(I(X)) = \bar{X}.$$

De fato, como \bar{X} é o menor fechado de $\text{Spec}(A)$ que contém X e $V(I(X))$ é um fechado que contém X , pelo Lema 1.27, então $\bar{X} \subseteq V(I(X))$.

Reciprocamente, como \bar{X} é um fechado, então $\bar{X} = V(\mathfrak{a})$, para algum ideal \mathfrak{a} de A . Assim, como $X \subseteq \bar{X}$, então passando a função I , obtemos, pelo Lema 1.27,

$$I(X) \supseteq I(\bar{X}) = I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Daí, passando a função V , concluímos

$$V(I(X)) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a}) = \bar{X}.$$

Portanto, $V(I(X)) = \bar{X}$.

Observação 1.31. Para cada elemento $f \in A$, denotemos por $D(f)$ o aberto $\text{Spec}(A) \setminus V(\langle f \rangle)$. Então a coleção dos conjuntos do tipo $D(f)$ forma uma base para a topologia de Zariski. De fato, sejam U um aberto e $\mathfrak{p} \in U$. Como U é aberto, então existe um ideal \mathfrak{a} de A tal que $U = \text{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$, e como $\mathfrak{p} \in U$, então $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, logo, existe $f \in \mathfrak{a}$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$.

Afirmamos que $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U$. De fato, como $f \notin \mathfrak{p}$, então $\langle f \rangle \not\subseteq \mathfrak{p}$, ou seja, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \setminus V(\langle f \rangle) = D(f)$. Agora tome $\mathfrak{q} \in D(f)$. Então $\langle f \rangle \not\subseteq \mathfrak{q}$, em particular, $f \notin \mathfrak{q}$, mas $f \in \mathfrak{a}$, logo, $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{q}$, ou seja, $\mathfrak{q} \notin V(\mathfrak{a})$ e, assim, $\mathfrak{q} \in U$.

Portanto, $\{D(f)\}_{f \in A}$ é uma base para essa topologia.

Observação 1.32. Vamos agora definir um feixe de anéis $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ em $\text{Spec}(A)$. Para cada ideal primo \mathfrak{p} de A , seja $A_{\mathfrak{p}}$ a localização de A em \mathfrak{p} , isto é, o anel de frações de A com respeito ao subconjunto multiplicativamente fechado $S := A \setminus \mathfrak{p}$.

Para cada aberto $U \subseteq \text{Spec}(A)$, definimos $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ como o conjunto de funções $s : U \rightarrow \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ tais que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, para todo \mathfrak{p} , e, além disso, para cada $\mathfrak{p} \in U$, existem uma vizinhança V de \mathfrak{p} , com $V \subseteq U$, e elementos $a, f \in A$ tais que, para todo $\mathfrak{q} \in V$, valem $f \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = a/f$ em $A_{\mathfrak{q}}$ (isto é, s é localmente um quociente de elementos de A).

Então $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ é um feixe de anéis em $\text{Spec}(A)$, onde o elemento neutro de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ é a função $0(p) = 0 \in A_{\mathfrak{p}}$, e o elemento identidade é $1(p) = 1 \in A_{\mathfrak{p}}$, e a aplicação de restrição é a restrição usual de funções.

O anel $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ é chamado de **anel de funções regulares em U** .

Definição 1.33. Seja A um anel. O **espectro de A** é o par $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ consistindo do espaço topológico $\text{Spec}(A)$ e o feixe de anéis $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ definido acima.

O seguinte resultado nos mostra alguns anéis que são fornecidos pelo feixe $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$. Sua demonstração pode ser vista em (HARTSHORNE, 1977, p.71, Proposition 2.2).

Proposição 1.34. Sejam A um anel e $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ o seu espectro.

1. Se $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, então o stalk $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A), \mathfrak{p}}$ do feixe $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ em \mathfrak{p} é isomorfo ao anel local $A_{\mathfrak{p}}$.
2. Para todo elemento $f \in A$, o anel $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f))$ é isomorfo ao anel localizado A_f , onde A_f é a localização do anel A em relação ao conjunto $S := \{f^n \mid n \geq 0\}$.
3. Em particular, $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(A)) \cong A$.

Definição 1.35. Sejam A e B dois anéis locais e \mathfrak{m}_A e \mathfrak{m}_B os seus respectivos ideais maximais. Um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ é dito **homomorfismo local** se $f^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Definição 1.36. Um **espaço anelado** é um par (X, \mathcal{O}_X) consistindo de um espaço topológico X e um feixe de anéis \mathcal{O}_X em X .

Sejam (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) dois espaços anelados. Um **morfismo de espaços anelados** de (X, \mathcal{O}_X) em (Y, \mathcal{O}_Y) é um par $(f, f^\#)$, onde $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes de anéis.

Dizemos que o espaço anelado (X, \mathcal{O}_X) é um **espaço localmente anelado** se para cada $P \in X$, o stalk $\mathcal{O}_{X, P}$ é um anel local.

Sejam (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) dois espaços localmente anelados. Um **morfismo de espaços localmente anelados** de (X, \mathcal{O}_X) em (Y, \mathcal{O}_Y) é um morfismo $(f, f^\#)$ de espaços anelados de (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) tal que, para cada $P \in X$, o homomorfismo $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y, f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, P}$ é um **homomorfismo local**.

Um **isomorfismo de espaços localmente anelados** é um morfismo de espaços localmente anelados que possui uma inversa que também é um morfismo de espaços localmente anelados.

Observação 1.37. Vamos explicitar a construção de $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y, f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, P}$. Primeiramente, para todo aberto V de Y , usando o morfismo de feixes $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$, obtemos o homomorfismo de anéis $f^\#(V) : \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Agora, dado um elemento $[V, s]_{f(P)} \in \mathcal{O}_{Y, f(P)}$, com $s \in \mathcal{O}_Y(V)$, olhamos para $f^\#(V)(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ e consideramos o germe $[f^{-1}(V), f^\#(V)(s)]_P$. Assim, fica definido um homomorfismo de anéis $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y, f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, P}$ dado por

$$f_P^\#([V, s]_{f(P)}) = [f^{-1}(V), f^\#(V)(s)]_P.$$

Observação 1.38. Como a composição de morfismo de espaços anelados é feita entrada a entrada, então um isomorfismo de espaços anelados é composto por um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ e um isomorfismo de feixes $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$.

Proposição 1.39. 1. Se A é um anel, então $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ é um espaço localmente anelado.

2. Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de anéis, então φ induz um morfismo de espaços localmente anelados

$$(f, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}).$$

3. Reciprocamente, todo morfismo de espaços localmente anelados

$$(f, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$$

é induzido por um homomorfismo de anéis $\varphi : A \rightarrow B$, como no item anterior.

A proposição acima nos dá um exemplo de espaço localmente anelado e mostra que os morfismos entre tais espaços localmente anelados são induzidos por homomorfismos de anéis da seguinte forma

$$f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Sua demonstração pode ser vista em (HARTSHORNE, 1977, p.73, Proposition 2.3).

Observação 1.40. Seja $(f, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ um morfismo de espaços localmente anelados, $\varphi : A \rightarrow B$ o homomorfismo induzido por $(f, f^\#)$ e \mathfrak{b} um ideal de B . Então

$$\overline{f(V(\mathfrak{b}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})).$$

De fato, defina

$$X = V(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{b}' = I(f(X)).$$

Assim,

$$V(\mathfrak{b}') = V(I(f(X))) = \overline{f(X)} = \overline{f(V(\mathfrak{b}))}.$$

Note que $I(f(X)) = \varphi^{-1}(I(X))$. De fato, dado $a \in I(f(X))$, então $a \in \mathfrak{p}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in f(X)$. Seja $\mathfrak{p} \in X$ um ideal primo. Então $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}) \in f(X)$ é um ideal primo, logo, $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, isto é, $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$. Portanto,

$$\varphi(a) \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} = I(X),$$

então $a \in \varphi^{-1}(I(X))$. Reciprocamente, tome $a \in \varphi^{-1}(I(X))$. Então $\varphi(a) \in I(X)$, ou seja, $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in X$. Seja $\mathfrak{p} \in f(X)$ um ideal primo. Então $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, para

algum ideal primo $\mathfrak{q} \in X$. Assim, $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$, logo, $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Então $a \in I(f(X))$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \overline{f(V(\mathfrak{b}))} &= V(\mathfrak{b}') \\ &= V(I(f(X))) \\ &= V(\varphi^{-1}(I(X))) \\ &= V(\varphi^{-1}(I(V(\mathfrak{b})))) \\ &= V(\varphi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})) \\ &= V(\sqrt{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})}) \\ &= V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})). \end{aligned}$$

Definição 1.41. Um **esquema afim** é um espaço localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) que é isomorfo (no sentido de espaço localmente anelado) ao espectro de algum anel A .

Um **esquema** é um espaço localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) onde para todo $P \in X$, existe uma vizinhança U de P tal que considerando o espaço topológico U com a restrição $\mathcal{O}_X|_U$ (este feixe é dado por $\mathcal{O}_X|_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$, onde $V \subseteq U$ é aberto de U), forma um esquema afim. Dizemos que X é o **espaço topológico associado** e \mathcal{O}_X o **feixe estrutura**.

Podemos denotar o esquema (X, \mathcal{O}_X) por simplesmente X .

Exemplo 1.42. Seja k um corpo. Então $\text{Spec}(k) = \{\langle 0 \rangle\}$, logo, os abertos de $\text{Spec}(k)$ são \emptyset e $\text{Spec}(k)$. Assim, $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}(\emptyset) = \{0\}$, pela definição de feixe, e pela Proposição 1.34,

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}(\text{Spec}(k)) \cong k.$$

Observação 1.43. Seja (X, \mathcal{O}_X) um esquema. Então os abertos afins $\text{Spec}(A)$ formam uma base para a topologia de X . De fato, seja U um aberto de X e tome $\mathfrak{p} \in U$. Como (X, \mathcal{O}_X) é um esquema, então existe um aberto afim $\text{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$.

Agora \mathfrak{p} está no aberto $U \cap \text{Spec}(A)$ de $\text{Spec}(A)$, logo, existe um aberto básico $D(f)$, com $f \in A$, tal que

$$\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U \cap \text{Spec}(A).$$

Notemos que para todo $\mathfrak{q} \in D(f)$, nenhuma potência de f está em \mathfrak{q} . De fato, suponha, por absurdo, que $f^n \in \mathfrak{q}$, para algum $n \geq 0$ e $\mathfrak{q} \in D(f)$. Sendo \mathfrak{q} primo, vem $f \in \mathfrak{q}$, logo,

$$\langle f \rangle = \{af \mid a \in A\} \subseteq \mathfrak{q},$$

ou seja, $\mathfrak{q} \in V(\langle f \rangle)$, contradizendo o fato que $\mathfrak{q} \in D(f)$.

Note que $D(f)$ pode ser identificado com $\text{Spec}(A_f)$. De fato, seja

$$S := \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$$

o conjunto multiplicativamente fechado que é usado na construção de A_f e defina $\varphi : D(f) \rightarrow \text{Spec}(A_f)$ dada por

$$\varphi(\mathfrak{q}) := S^{-1}\mathfrak{q} = \left\{ \frac{a}{f^n} \mid a \in \mathfrak{q}, n \geq 0 \right\} \subseteq A_f.$$

Então φ está bem definida.

Mostremos que φ é injetora. Suponha que $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in D(f)$ são tais que $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{q}'$. Dado um elemento $a \in \mathfrak{q}$, temos $a/1 \in S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{q}'$, logo, $a/1 = b/f^n$, para algum $b \in \mathfrak{q}'$ e $n \geq 0$, assim, existe $m \geq 0$ tal que

$$f^m(a \cdot f^n - b \cdot 1) = 0 \Rightarrow f^{m+n} \cdot a = f^m \cdot b \in \mathfrak{q}',$$

e como $f^{m+n} \notin \mathfrak{q}'$ e \mathfrak{q}' é primo, vem $a \in \mathfrak{q}'$. Isto mostra que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$. Analogamente prova-se a inclusão contrária. Portanto, φ é injetora.

Agora mostremos que φ é sobrejetora. Seja $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_f)$ dado. Defina

$$\mathfrak{q}' := \left\{ a \in A \mid \frac{a}{f^n} \in \mathfrak{q}, \text{ para algum } n \geq 0 \right\},$$

que é um ideal primo de A e $f \notin \mathfrak{q}'$, assim, $\mathfrak{q}' \in D(f)$ e vale $\varphi(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}$.

Agora, de forma análoga como feito acima, obtemos que todo ideal de A_f é da forma $S^{-1}\mathfrak{a}$, para algum ideal \mathfrak{a} de A . Vamos provar que φ é contínua. Dado um fechado $V(S^{-1}\mathfrak{a})$ de $\text{Spec}(A_f)$, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(V(S^{-1}\mathfrak{a})) &= \{\mathfrak{q} \in D(f) \mid \varphi(\mathfrak{q}) \in V(S^{-1}\mathfrak{a})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in D(f) \mid S^{-1}\mathfrak{q} \supseteq S^{-1}\mathfrak{a}\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in D(f) \mid \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}\} \\ &= V(\mathfrak{a}) \cap D(f), \end{aligned}$$

que é um fechado de $D(f)$. Portanto, φ é contínua. Por fim, vamos provar que φ^{-1} é contínua. Dado um fechado $V(\mathfrak{a}) \cap D(f)$ de $D(f)$, vem

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1})^{-1}(V(\mathfrak{a}) \cap D(f)) &= \varphi(V(\mathfrak{a}) \cap D(f)) \\ &= \{\varphi(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}) \cap D(f)\} \\ &= \{S^{-1}\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{q} \in D(f)\} \\ &= \{S^{-1}\mathfrak{q} \mid S^{-1}\mathfrak{q} \supseteq S^{-1}\mathfrak{a}, \mathfrak{q} \in D(f)\} \\ &= V(S^{-1}\mathfrak{a}), \end{aligned}$$

que é um fechado de $\text{Spec}(A_f)$. Portanto, φ é um homeomorfismo.

Portanto, $D(f)$ e $\text{Spec}(A_f)$ são homeomorfos, logo, tendo em vista esta identificação, obtemos

$$\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_f) \subseteq U \cap \text{Spec}(A) \subseteq U.$$

Portanto, os abertos afins formam uma base para a topologia de X .

Definição 1.44. Um **morfismo de esquemas** é um morfismo como espaços localmente anelados. Um **isomorfismo de esquemas** é um morfismo de esquemas que possui uma inversa que também seja um morfismo de esquemas.

Com a noção de morfismo entre esquemas, podemos definir um esquema sobre outro.

Definição 1.45. Seja (S, \mathcal{O}_S) um esquema. Um **esquema sobre** (S, \mathcal{O}_S) é um esquema (X, \mathcal{O}_X) junto com um morfismo $(\alpha, \alpha^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (S, \mathcal{O}_S)$, chamado de **morfismo estrutura**.

Se (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) são dois esquemas sobre um esquema (S, \mathcal{O}_S) , um **morfismo de esquemas sobre** (S, \mathcal{O}_S) de (X, \mathcal{O}_X) para (Y, \mathcal{O}_Y) (também chamado de **morfismo de** (S, \mathcal{O}_S) -**esquemas**) é um morfismo $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ que é compatível com os morfismos para (S, \mathcal{O}_S) , isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{(f, f^\#)} & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (S, \mathcal{O}_S) & \end{array}$$

Um caso particular da definição acima é o conceito de um esquema sobre um corpo k .

Definição 1.46. Seja k um corpo. Um **esquema sobre k** (também chamado de **k -esquema**) é um esquema sobre $(\text{Spec}(k), \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)})$.

Observação 1.47. Sejam (X, \mathcal{O}_X) um k -esquema, U um aberto de X e $(\alpha, \alpha^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (\text{Spec}(k), \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)})$ o morfismo estrutura. Então podemos munir $\mathcal{O}_X(U)$ com uma estrutura de k -álgebra, onde o homomorfismo $k \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ é dada da seguinte forma

$$k \cong \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}(\text{Spec}(k)) \xrightarrow{\alpha^\#(\text{Spec}(k))} \mathcal{O}_X(\alpha^{-1}(\text{Spec}(k))) = \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\rho_{X,U}} \mathcal{O}_X(U),$$

onde o isomorfismo $k \cong \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}(\text{Spec}(k))$ é dada pela Proposição 1.34 e $\rho_{X,U} : \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ é a aplicação restrição do feixe \mathcal{O}_X .

Definição 1.48. Um morfismo de esquemas $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ é dito **localmente do tipo finito** se existe uma cobertura de Y por subconjuntos abertos afins $V_i = \text{Spec}(B_i)$ tal que, para cada i , $f^{-1}(V_i)$ pode ser coberto por subconjuntos abertos afins $U_{ij} = \text{Spec}(A_{ij})$, onde cada A_{ij} é uma B_i -álgebra finitamente gerada. Se, além disso, cada $f^{-1}(V_i)$ pode ser coberto por finitos U_{ij} , dizemos que f é um **morfismo do tipo finito**.

Dizemos que um k -esquema (X, \mathcal{O}_X) é **localmente do tipo finito sobre k** se o morfismo estrutura $(\alpha, \alpha^\#)$ é localmente do tipo finito. Dizemos que (X, \mathcal{O}_X) é do **tipo finito sobre k** se $(\alpha, \alpha^\#)$ é um morfismo do tipo finito.

Observação 1.49. Vamos explicitar o que é um k -esquema (X, \mathcal{O}_X) ser localmente do tipo finito (resp. do tipo finito). Note que a função $\alpha : X \rightarrow \text{Spec}(k) = \{\langle 0 \rangle\}$ é a função constante $f(\mathfrak{p}) = \langle 0 \rangle$.

Se (X, \mathcal{O}_X) é localmente do tipo finito (resp. do tipo finito), então existe uma cobertura aberta $V_i = \text{Spec}(B_i)$ para $\text{Spec}(k)$ tal que cada $f^{-1}(V_i)$ pode ser coberto por (resp. finitos) abertos

afins $U_{ij} = \text{Spec}(A_{ij})$. Agora, como $\langle 0 \rangle \in \text{Spec}(k)$, então $\langle 0 \rangle$ está em algum $V_{i_0} = \text{Spec}(B_{i_0})$, e como todos os $\text{Spec}(B_i)$ são subconjuntos de $\text{Spec}(k)$, temos $\text{Spec}(B_{i_0}) = \text{Spec}(k)$ e

$$f^{-1}(V_{i_0}) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \langle 0 \rangle = f(\mathfrak{p}) \in V_{i_0}\} = X.$$

Logo, $X = f^{-1}(V_{i_0})$, que é coberto por (resp. finitos) $U_{i_0j} = \text{Spec}(A_{i_0j})$. Agora, em vista da Proposição 1.34 e que \mathcal{O}_X é localmente $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A_{ij})}$ como na definição de esquema, temos

$$\mathcal{O}_X(U_{i_0j}) = \mathcal{O}_X(U_{i_0j} \cap \text{Spec}(A_{i_0j})) = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A_{i_0j})}(\text{Spec}(A_{i_0j})) \cong A_{i_0j},$$

que é uma B_{i_0} -álgebra finitamente gerada, novamente pela Proposição 1.34, vem

$$B_{i_0} \cong \mathcal{O}_{\text{Spec}(B_{i_0})}(\text{Spec}(B_{i_0})) = \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}(\text{Spec}(k)) \cong k.$$

Concluimos que um k -esquema (X, \mathcal{O}_X) é localmente do tipo finito (resp. do tipo finito) se X pode ser coberto por (resp. finitos) abertos afins $U_i = \text{Spec}(A_i)$ tais que $\mathcal{O}_X(U_i) \cong A_i$ é uma k -álgebra finitamente gerada.

Abaixo seguem algumas definições topológicas e algébricas que os esquemas podem ter.

Definição 1.50. Um esquema (X, \mathcal{O}_X) é dito **conexo** se o seu espaço topológico X é conexo, isto é, X não pode ser escrito como união de dois abertos disjuntos não vazios.

Um esquema (X, \mathcal{O}_X) é dito **irredutível** se o seu espaço topológico X é irredutível, isto é, X não pode ser escrito como união de dois subconjuntos fechados próprios.

Um esquema (X, \mathcal{O}_X) é dito **reduzido** se para todo aberto U de X , o anel $\mathcal{O}_X(U)$ é reduzido (isto é, não possui elementos nilpotentes não nulos).

Um esquema (X, \mathcal{O}_X) é dito **integral** se para todo aberto U de X , o anel $\mathcal{O}_X(U)$ é um domínio de integridade.

Observação 1.51. Sejam X um espaço topológico irredutível e U um aberto não vazio de X . Então U , com a topologia do subespaço, é um espaço topológico irredutível. De fato, suponhamos que $U = F_1 \cup F_2$, com F_1 e F_2 dois fechados de U . Segue da topologia do subespaço U que $F_i = U \cap F'_i$, onde cada F'_i é um fechado em X , para $i = 1, 2$. Logo,

$$U = F_1 \cup F_2 = (U \cap F'_1) \cup (U \cap F'_2) = U \cap (F'_1 \cup F'_2) \subseteq F'_1 \cup F'_2,$$

assim,

$$X = U \cup (X \setminus U) \subseteq (F'_1 \cup F'_2) \cup (X \setminus U) \subseteq X$$

segue que $X = (F'_1 \cup F'_2) \cup (X \setminus U)$ está escrito como união de dois fechados de X . Como X é irredutível, então $X = F'_1 \cup F'_2$ ou $X = X \setminus U$. Como $U \neq \emptyset$, então $X \neq X \setminus U$, logo, $X = F'_1 \cup F'_2$. Novamente, segue da irredutibilidade de X que $X = F'_1$ ou $X = F'_2$, de onde segue, respectivamente, que

$$U = U \cap X = U \cap F'_1 = F_1$$

ou

$$U = U \cap X = U \cap F_2' = F_2.$$

Portanto, U é irredutível.

Abaixo segue uma caracterização algébrica para um subconjunto fechado de $\text{Spec}(A)$ ser irredutível, cuja demonstração é análoga na geometria algébrica clássica.

Proposição 1.52. Sejam A um anel e $X \subseteq \text{Spec}(A)$ um fechado de $\text{Spec}(A)$ e considere X como subespaço de $\text{Spec}(A)$. Então X é irredutível se, e somente se, $I(X)$ é um ideal primo.

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $f, g \in A$ tais que $fg \in I(X)$. Então

$$\langle f \rangle \langle g \rangle = \langle fg \rangle \subseteq I(X).$$

Aplicando a função V , vem

$$X = X \cap X = X \cap V(I(X)) \subseteq X \cap V(\langle f \rangle \langle g \rangle) = (X \cap V(\langle f \rangle)) \cup (X \cap V(\langle g \rangle)) \subseteq X.$$

Então $X = (X \cap V(\langle f \rangle)) \cup (X \cap V(\langle g \rangle))$. Como X é irredutível, então $X = X \cap V(\langle f \rangle)$ ou $X = X \cap V(\langle g \rangle)$, ou seja $X \subseteq V(\langle f \rangle)$ ou $X \subseteq V(\langle g \rangle)$. Aplicando a função I , obtemos

$$f \in \langle f \rangle \subseteq \sqrt{\langle f \rangle} = I(V(\langle f \rangle)) \subseteq I(X)$$

ou

$$g \in \langle g \rangle \subseteq \sqrt{\langle g \rangle} = I(V(\langle g \rangle)) \subseteq I(X).$$

Portanto, $I(X)$ é um ideal primo.

(\Leftarrow) Suponha que $X = X_1 \cup X_2$, com X_1 e X_2 subconjuntos fechados. Aplicando a função I , obtemos

$$I(X) = I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2).$$

Como $I(X)$ é primo, então $I(X) = I(X_1)$ ou $I(X) = I(X_2)$. Aplicando a função V e lembrando que X e X_i são fechados, segue que

$$X = V(I(X)) = V(I(X_1)) = X_1$$

ou

$$X = V(I(X)) = V(I(X_2)) = X_2.$$

Portanto, X é irredutível. □

O seguinte resultado fornece uma condição necessária e suficiente para um esquema ser reduzido em termos do stalk do seu feixe. É uma rápida verificação, por isso manteremos a demonstração.

Proposição 1.53. Um esquema (X, \mathcal{O}_X) é reduzido se, e somente se, $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel reduzido para todo $x \in X$.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $[U, f]_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ um germe nilpotente. Então existe $n > 0$ tal que

$$[U, 0]_x = ([U, f]_x)^n = [U, f^n]_x,$$

logo, existe um aberto $V \subseteq U$, com $x \in V$, tal que

$$0 = \rho_{U,V}(f^n) = (\rho_{U,V}(f))^n.$$

Logo, $\rho_{U,V}(f) \in \mathcal{O}_X(V)$ é um elemento nilpotente, logo, pela hipótese, implica $\rho_{U,V}(f) = 0$. Segue da relação de equivalência que $[U, f]_x = [U, 0]_x$. Portanto, $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel reduzido.

(\Leftarrow) Sejam U um aberto de X e $f \in \mathcal{O}_X(U)$ um elemento nilpotente. Então existe $n > 0$ tal que $f^n = 0$. Fixado $x \in U$ e tomando stalk em x na igualdade $f^n = 0$ vem

$$[U, 0]_x = [U, f^n]_x = ([U, f]_x)^n,$$

assim, segue da hipótese que $[U, f]_x = [U, 0]_x$, então existe um aberto $V_x \subseteq U$, com $x \in V_x$, tal que $\rho_{U,V_x}(f) = 0$. Assim, construímos uma cobertura aberta $\{V_x \mid x \in U\}$ para U tal que $f|_{V_x} = 0$, para todo V_x da cobertura. Segue da condição de feixe que $f = 0$. Portanto, (X, \mathcal{O}_X) é um esquema reduzido. □

Como corolário desta proposição, obtemos:

Corolário 1.54. Um esquema afim $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ é reduzido se, e somente se, o anel A é reduzido.

Demonstração. (\Rightarrow) Como $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ é reduzido, então o anel $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(A))$ é reduzido, mas pela Proposição 1.34, este anel é isomorfo ao anel A . Portanto, A é reduzido.

(\Leftarrow) Vamos aplicar a Proposição 1.53. Seja $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ dado. Então aplicando a Proposição 1.34, vem

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(A), \mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}.$$

Mas $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel reduzido, pois se $a/f \in A_{\mathfrak{p}}$ é nilpotente, então existe $n > 0$ tal que $(a/f)^n = 0/1$, logo, existe $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que

$$0 = g(a^n \cdot 1 - 0 \cdot f^n) = ga^n,$$

logo, ga é nilpotente, pois

$$(ga)^n = g^n a^n = g^{n-1} (ga^n) = g^{n-1} 0 = 0,$$

assim, sendo A reduzido, vem $ga = 0$, que podemos reescrever como $g(a \cdot 1 - 0 \cdot f) = 0$, ou seja, $a/f = 0/1$. Portanto, $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A),\mathfrak{p}}$ é reduzido, assim, $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ é um esquema reduzido.

□

Os seguintes lemas são utilizados na demonstração do teorema que os seguem e, respectivamente, são os Exercícios 2.16(a) e 2.18(b) de (HARTSHORNE, 1977), por isso serão demonstrados. A demonstração do teorema pode ser vista em (HARTSHORNE, 1977, p. 82, Proposition 3.1).

Lema 1.55. Sejam (X, \mathcal{O}_X) um esquema e $f \in \mathcal{O}_X(X)$, e defina X_f como o subconjunto dos pontos $\mathfrak{p} \in X$ tal que o stalk $f_{\mathfrak{p}}$ de f em \mathfrak{p} não está no ideal maximal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ do anel local $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$. Se $U = \text{Spec}(B)$ é um subsquema aberto afim de X , e se $f|_U = \bar{f} \in \mathcal{O}_X|_U(U)$ é a restrição de f , então $U \cap X_f = D(\bar{f})$. Em particular, X_f é um subconjunto aberto de X .

Demonstração. Note que

$$U \cap X_f = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \mid \bar{f}_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}\},$$

pois

$$\rho_{X,U}(f) = \bar{f} = \rho_{U,U}(\bar{f}).$$

Agora para computar o stalk $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$, podemos considerar os pares apenas em abertos de U , pois uma classe $[V, s]_{\mathfrak{p}}$, para um aberto V de X , é igual ao par $[U \cap V, \rho_{V,U \cap V}(s)]_{\mathfrak{p}}$, uma vez que

$$\rho_{V,U \cap V}(s) = \text{id}(\rho_{V,U \cap V}(s)) = \rho_{U \cap V, U \cap V}(\rho_{V,U \cap V}(s)).$$

Assim,

$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{U,\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(B),\mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}.$$

Logo, o ideal maximal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ é o ideal maximal do anel local $B_{\mathfrak{p}}$, que é $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$.

Agora note que $\bar{f}_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ se, e somente se, $\bar{f} \notin \mathfrak{p}$. De fato, \bar{f} pode ser visto como um elemento de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}(B)$ como a função $\mathfrak{q} \mapsto \bar{f}/1 \in A_{\mathfrak{q}}$. Logo, se $\bar{f}_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ então $\bar{f}_{\mathfrak{p}}$ é invertível em $B_{\mathfrak{p}}$ (pois todo elemento que não é invertível está em algum ideal maximal, e como $B_{\mathfrak{p}}$ é um anel local, então todo elemento não invertível está em $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$), logo, existe um germe $g_{\mathfrak{p}}$ em $B_{\mathfrak{p}}$ de uma função $g \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}(V)$ definida em uma vizinhança V de \mathfrak{p} tal que

$$\bar{f}_{\mathfrak{p}}g_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Segue da definição do feixe $\mathcal{O}_{\text{Spec}(B)}$, para o ponto \mathfrak{p} , que existe um aberto W , com $\mathfrak{p} \in W \subseteq V$, e elementos $a, h \in A$, tal que para todo $\mathfrak{q} \in W$, tem-se $h \notin \mathfrak{q}$ e

$$g(\mathfrak{q}) = \frac{b}{h},$$

em particular, como $\mathfrak{p} \in V$, vem da igualdade $\bar{f}_{\mathfrak{p}}g_{\mathfrak{p}} = 1$ que

$$1 = (\bar{f}g)(\mathfrak{p}) = \bar{f}(\mathfrak{p})g(\mathfrak{p}) = \frac{\bar{f}b}{1h} = \frac{b\bar{f}}{h} \text{ em } A_{\mathfrak{p}}$$

logo, existe $t \notin \mathfrak{p}$ tal que

$$t(h - b\bar{f}) = 0 \Rightarrow th = tb\bar{f},$$

e como $t, h \notin \mathfrak{p}$ e \mathfrak{p} é primo, então $th \notin \mathfrak{p}$, em particular, $\bar{f} \notin \mathfrak{p}$, pois caso contrário, implicaria $tb\bar{f} \in \mathfrak{p}$ e daí, $th \in \mathfrak{p}$, o que é uma contradição.

Reciprocamente, se $\bar{f} \notin \mathfrak{p}$, então vendo \bar{f} como a função $\mathfrak{q} \mapsto \bar{f}/1 \in A_{\mathfrak{q}}$, temos que está bem definida a função $g(\mathfrak{q}) = 1/\bar{f} \in A_{\mathfrak{q}}$ definida na vizinhança $D(\bar{f})$ de \mathfrak{p} , logo,

$$(\bar{f}g)(\mathfrak{q}) = \bar{f}(\mathfrak{q})g(\mathfrak{q}) = \frac{\bar{f}1}{1\bar{f}} = 1,$$

então $\bar{f}g$ é a função constante 1, logo, tomando o stalk em \mathfrak{p} na igualdade $\bar{f}g = 1$ vem $\bar{f}_{\mathfrak{p}}g_{\mathfrak{p}} = 1$, isto é, $\bar{f}_{\mathfrak{p}}$ é invertível em $B_{\mathfrak{p}}$, então $\bar{f}_{\mathfrak{p}}$ não está no ideal maximal de $B_{\mathfrak{p}}$, ou seja, $\bar{f}_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$.

Concluimos que

$$\begin{aligned} U \cap X_f &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \mid \bar{f}_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \mid \bar{f}_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \mid \bar{f} \notin \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \mid \langle \bar{f} \rangle \not\subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \text{Spec}(B) \setminus V(\langle \bar{f} \rangle) \\ &= D(\bar{f}). \end{aligned}$$

Em particular, X_f é aberto, pois pela definição de esquema, para cada $x \in X$, existe um aberto afim U_x tal que $x \in U_x \subseteq X$, logo, $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ e, assim,

$$X_f = X_f \cap X = X_f \cap \left(\bigcup_{x \in X} U_x \right) = \bigcup_{x \in X} (X_f \cap U_x) = \bigcup_{x \in X} D(f|_{U_x}),$$

e cada $D(f|_{U_x})$ é um aberto do subespaço U_x , então pela topologia do subespaço, existe um aberto V_x de X tal que $D(f|_{U_x}) = U_x \cap V_x$, logo,

$$X_f = \bigcup_{x \in X} D(f|_{U_x}) = \bigcup_{x \in X} U_x \cap V_x,$$

que é um aberto de X .

□

Lema 1.56. Sejam A um anel, $X = \text{Spec}(A)$ e $f \in A$. Então f é nilpotente se, e somente se, $D(f)$ é vazio.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha, por absurdo, que $D(f)$ não é vazio. Tome $\mathfrak{p} \in D(f)$. Então $\langle f \rangle \not\subseteq \mathfrak{p}$, em particular, $f \notin \mathfrak{p}$. Por outro lado, f é nilpotente, então existe $n \geq 0$ tal que $f^n = 0$, e como $0 \in \mathfrak{p}$, segue que $f^n \in \mathfrak{p}$. Como \mathfrak{p} é um ideal primo, então $f \in \mathfrak{p}$, uma contradição. Portanto, $D(f) = \emptyset$.

(\Leftarrow) A hipótese $D(f)$ ser vazio diz que para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tem-se $\mathfrak{p} \in V(\langle f \rangle)$, ou seja, $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{p}$, para todo ideal primo \mathfrak{p} de A , e como todo ideal primo contém 0 , vem que

$$f \in \langle f \rangle \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{\langle 0 \rangle \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{\langle 0 \rangle},$$

ou seja, existe $n \geq 0$ tal que $f^n \in \langle 0 \rangle$, isto é, $f^n = 0$. Portanto, f é nilpotente. □

Teorema 1.57. Um esquema (X, \mathcal{O}_X) é integral se, e somente se, (X, \mathcal{O}_X) é reduzido e irredutível.

Definição 1.58. Um **subesquema aberto** de um esquema (X, \mathcal{O}_X) é um esquema (U, \mathcal{O}_U) tal que U é um aberto de X e o seu feixe estrutura \mathcal{O}_U é isomorfo à restrição $\mathcal{O}_X|_U$ do feixe estrutura \mathcal{O}_X .

Uma **imersão aberta** é um morfismo $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ que é um isomorfismo de (X, \mathcal{O}_X) sobre um subesquema aberto de (Y, \mathcal{O}_Y) .

Definição 1.59. Seja (X, \mathcal{O}_X) um esquema. Um **subesquema fechado de (X, \mathcal{O}_X)** é um esquema (Z, \mathcal{O}_Z) , onde Z é um subconjunto fechado de X , e considerando a inclusão $i : Z \rightarrow X$, existe um morfismo $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z$ e um feixe de ideais \mathcal{I}_X de \mathcal{O}_X tais que $i_* \mathcal{O}_Z \cong \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}_X}$.

Uma **imersão fechada** é um morfismo $(f, f^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$, onde (Z, \mathcal{O}_Z) é um subesquema fechado de (X, \mathcal{O}_X) , tal que existe um feixe de ideais \mathcal{I}_X de \mathcal{O}_X tal que $f_* \mathcal{O}_Z \cong \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}_X}$.

Observação 1.60. Seja (Z, \mathcal{O}_Z) um subesquema fechado de um esquema (X, \mathcal{O}_X) . Dado $z \in Z$, podemos definir $(i_* \mathcal{O}_Z)_z \rightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ dada por

$$[W, f]_z \mapsto [W \cap Z, f|_{W \cap Z}]_z,$$

que é um isomorfismo. Logo,

$$\mathcal{O}_{Z,z} \cong (i_* \mathcal{O}_Z)_z \cong \left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}_X} \right)_z \cong \frac{\mathcal{O}_{X,z}}{\mathcal{I}_{X,z}}.$$

Observação 1.61. Seja (X, \mathcal{O}_X) um esquema. Vamos construir um subesquema fechado (Z, \mathcal{O}_Z) tal que $Z = X$ e (Z, \mathcal{O}_Z) é reduzido. Consideremos o feixe de ideais \mathcal{I}_X de \mathcal{O}_X , que a cada aberto U de X associa

$$\mathcal{I}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f_x \in \mathfrak{m}_x, \forall x \in X \cap U\},$$

onde \mathfrak{m}_x é o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Considere Z o suporte do feixe $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X$, que é um subconjunto fechado de X . Considere \mathcal{O}_Z a feixificação do pré-feixe que a cada aberto $Z \cap U$ de Z associa o anel $\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}_U(Z)$, onde

$$\mathcal{I}_U(Z) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f_x \in \mathfrak{m}_x, \forall x \in Z \cap U\}.$$

Notemos que da forma que foi construído, temos que (Z, \mathcal{O}_Z) é um subesquema fechado.

Note que $Z = X$, pois dado $x \in X$, temos que $\mathcal{O}_{X,x} \neq \mathcal{I}_{X,x}$, pois caso contrário, $f_x \in \mathfrak{m}_x$, para todo $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, o que implica que $\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$, contradizendo o fato de \mathfrak{m}_x ser ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Vamos provar que (Z, \mathcal{O}_Z) é reduzido. Seja $x \in Z$ dado. Sendo (X, \mathcal{O}_X) um esquema, então existe um aberto afim $U = \text{Spec}(A)$, com $x \in U$.

Como $U \cap Z$ é um fechado de U , então existe um ideal \mathfrak{a} de A tal que

$$U \cap Z = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}).$$

Agora, como os ideais primos de A que contém $\sqrt{\mathfrak{a}}$ estão em bijeção com os ideais primos de $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$, então

$$U \cap Z = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \cong \text{Spec}(A/\sqrt{\mathfrak{a}}),$$

mas $A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ é um anel reduzido, logo, $(Z \cap U, \mathcal{O}_Z|_{Z \cap U})$ é um esquema reduzido, e como stalk pode ser computado localmente, então computando no aberto $Z \cap U$ vem $\mathcal{O}_{Z,x}$ é um anel reduzido, pela Proposição 1.53. Portanto, (Z, \mathcal{O}_Z) é um esquema reduzido.

Definição 1.62. O esquema (Z, \mathcal{O}_Z) construído acima é chamado de **subesquema fechado reduzido associado de** (X, \mathcal{O}_X) .

Definição 1.63. A **dimensão** de um esquema (X, \mathcal{O}_X) , denotado por $\dim((X, \mathcal{O}_X))$, é a dimensão do seu espaço topológico X , isto é, $n = \dim((X, \mathcal{O}_X))$ é o número inteiro não negativo para o qual existe uma cadeia maximal de subespaços

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n,$$

do espaço topológico X , onde cada inclusão é estrita e cada X_i é fechado e irredutível.

Exemplo 1.64. Para o esquema afim $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$, com A um anel Noetheriano, considerando uma cadeia ascendente de ideais primos

$$\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots,$$

como A é um anel Noetheriano, temos que esta cadeia estaciona, digamos

$$\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n.$$

Consideremos n maximal. Então passando a função V , obtemos

$$V(\mathfrak{p}_n) \subset \cdots \subset V(\mathfrak{p}_2) \subset V(\mathfrak{p}_1),$$

que é uma cadeia maximal de subconjuntos fechados e irredutíveis (Pela Proposição 1.52) de $\text{Spec}(A)$. Concluímos que a dimensão de um esquema afim $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ é exatamente a dimensão de Krull de A .

Definição 1.65. Seja X um espaço topológico. Um ponto $\xi \in X$ é dito **ponto genérico** se $\overline{\{\xi\}} = X$, isto é, um ponto é genérico se é denso em X .

O seguinte lema mostra que sempre existe o ponto genérico de um subconjunto fechado e irredutível. A demonstração completa não foi encontrada e por isso será feita.

Lema 1.66. Sejam (X, \mathcal{O}_X) um esquema e Y um subconjunto não vazio, fechado e irredutível de X . Então Y possui um único ponto genérico.

Demonstração. **Passo 1:** Vamos mostrar neste passo que se $U = \text{Spec}(A)$ é um aberto afim de X tal que $Y \cap U \neq \emptyset$, então $Y \cap U$ possui um único ponto genérico. Note que sempre existe pelo menos um aberto U assim, pois como $Y \neq \emptyset$, então tomando $\mathfrak{p} \in Y$, em particular $\mathfrak{p} \in X$, e como (X, \mathcal{O}_X) é um esquema, então existe um aberto afim U tal que $\mathfrak{p} \in U$, logo, $\mathfrak{p} \in Y \cap U$.

Existência: Como Y é um fechado de X , então $Y \cap U$ é um fechado do aberto afim U , ou seja, $Y \cap U = V(\mathfrak{a})$, para algum ideal \mathfrak{a} de A .

Como $Y \cap U$ é um aberto do espaço topológico irredutível Y , então $Y \cap U$ é irredutível. Segue da Proposição 1.52 que

$$I(Y \cap U) = I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

é um ideal primo de A e

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \in V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a}) = Y \cap U.$$

Vamos provar que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ é um ponto genérico de $Y \cap U$. De fato, já temos que o fecho de $\{\sqrt{\mathfrak{a}}\}$ em $Y \cap U$ está contido em $Y \cap U$. Agora tome $\mathfrak{p} \in Y \cap U$ e seja V um aberto de $Y \cap U$, com $\mathfrak{p} \in V$. Segue da topologia do subespaço (vendo $Y \cap U$ como subespaço de U) que $V = (Y \cap U) \cap V'$, para algum aberto V' de U . Então $V' = \text{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{b})$, para algum ideal \mathfrak{b} de A . Como $\mathfrak{p} \in V'$, então $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Como $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}$ (pois $\mathfrak{p} \in Y \cap U = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$), então $\mathfrak{b} \not\subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ (pois caso contrário, implicaria $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{p}$, uma contradição). Logo, $\sqrt{\mathfrak{a}} \in V'$ e, portanto, $\sqrt{\mathfrak{a}} \in V' \cap (Y \cap U) = V$, ou seja, $V \cap \{\sqrt{\mathfrak{a}}\} \neq \emptyset$, assim, \mathfrak{p} está no fecho de $\{\sqrt{\mathfrak{a}}\}$ em $Y \cap U$. Portanto, $\xi := \sqrt{\mathfrak{a}}$ é um ponto genérico de $Y \cap U$.

Unicidade: Suponha que $\xi' \in Y \cap U$ é um ponto genérico de $Y \cap U$. Como

$$\xi' \in Y \cap U = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\xi),$$

então $\xi \subseteq \xi'$. Suponha, por absurdo, que $\xi' \not\subseteq \xi$. Então ξ está no aberto $(Y \cap U) \cap (\text{Spec}(A) \setminus V(\xi'))$ de $Y \cap U$, e como

$$\xi \in Y \cap U = \text{fecho de } \{\xi'\} \text{ em } Y \cap U,$$

então

$$[(Y \cap U) \cap (\text{Spec}(A) \setminus V(\xi'))] \cap \{\xi'\} \neq \emptyset,$$

ou seja, $\xi' \in [(Y \cap U) \cap (\text{Spec}(A) \setminus V(\xi'))]$, ou seja, $\xi' \notin V(\xi')$, isto é, $\xi' \notin \xi'$, um absurdo.

Portanto, para abertos não vazios da forma $Y \cap U$ de Y , onde U é um aberto afim de X , existe um único ponto genérico.

Passo 2: Vamos agora provar que Y possui um único ponto genérico. Notemos antes que os pontos genéricos de cada $Y \cap U$ são o mesmo. De fato, sejam U e V dois abertos afins de X , com $Y \cap U$ e $Y \cap V$ não vazios, e sejam ξ e η seus pontos genéricos, respectivamente. Notemos que $(Y \cap U) \cap (Y \cap V) \neq \emptyset$, pois caso contrário, teríamos

$$Y = Y \setminus \emptyset = Y \setminus [(Y \cap U) \cap (Y \cap V)] = (Y \setminus (Y \cap U)) \cup (Y \setminus (Y \cap V)) = (Y \setminus U) \cup (Y \setminus V) = [Y \cap (X \setminus U)] \cup [Y \cap (X \setminus V)],$$

ou seja, escrevemos o Y como união de dois fechados próprios de Y , uma contradição com a irredutibilidade de Y . Logo, tomando um ponto $\mathfrak{p} \in (Y \cap U) \cap (Y \cap V)$, em particular, $\mathfrak{p} \in U \cap V$, e como os abertos afins formam uma base para a topologia de X , existe um aberto afim W de X tal que $\mathfrak{p} \in W \subseteq U \cap V$.

Note que $\xi, \eta \in Y \cap W$, pois como \mathfrak{p} está no aberto $(Y \cap U) \cap W$ de $Y \cap U$ e $\mathfrak{p} \in Y \cap U$, que é o fecho de $\{\xi\}$ em $Y \cap U$, então $[(Y \cap U) \cap W] \cap \{\xi\} \neq \emptyset$, ou seja, $\xi \in (Y \cap U) \cap W \subseteq Y \cap W$. Analogamente, \mathfrak{p} está no aberto $(Y \cap V) \cap W$ de $Y \cap V$ e $\mathfrak{p} \in Y \cap V$, que é o fecho de $\{\eta\}$ em $Y \cap V$, então $[(Y \cap V) \cap W] \cap \{\eta\} \neq \emptyset$, ou seja, $\eta \in (Y \cap V) \cap W \subseteq Y \cap W$. Além disso, ξ e η são dois pontos genéricos de $Y \cap W$, pois

$$Y \cap W \stackrel{W \subseteq U}{\cong} (Y \cap W) \cap (Y \cap U) = (Y \cap W) \cap (\text{fecho de } \{\xi\} \text{ em } Y \cap U) = \text{fecho de } \{\xi\} \text{ em } Y \cap W,$$

e

$$Y \cap W \stackrel{W \subseteq V}{\cong} (Y \cap W) \cap (Y \cap V) = (Y \cap W) \cap (\text{fecho de } \{\eta\} \text{ em } Y \cap V) = \text{fecho de } \{\eta\} \text{ em } Y \cap W.$$

Segue da unicidade provada anteriormente que $\xi = \eta$.

Existência: Seja ξ o ponto genérico de todos os abertos de Y da forma $Y \cap U$, com U um aberto afim de X . Vamos mostrar que o fecho de $\{\xi\}$ em Y é Y . De fato, já temos que o fecho de $\{\xi\}$ em Y está contido em Y . Agora tome $\mathfrak{p} \in Y$ e seja U um aberto de Y , com $\mathfrak{p} \in U$. Segue da topologia do subespaço que $U = Y \cap U'$, para algum aberto U' de X . Logo, \mathfrak{p} está no aberto U' de X e como os abertos afins formam uma base para a topologia de X , então existe um aberto afim V' tal que $\mathfrak{p} \in V' \subseteq U'$, logo, pela propriedade de ξ vem $\xi \in Y \cap V' \subseteq Y \cap U' = U$, logo, $U \cap \{\xi\} \neq \emptyset$. Assim, \mathfrak{p} está no fecho de $\{\xi\}$ em Y . Portanto, Y é o fecho de $\{\xi\}$ em Y e, assim, ξ é um ponto genérico de Y .

Unicidade: Suponha que ξ e η são dois pontos genéricos de Y . Em particular, $\xi, \eta \in X$, e como (X, \mathcal{O}_X) é um esquema, então existem abertos afins U e V tais que $\xi \in U$ e $\eta \in V$. Note que $\eta \in U$, pois como ξ está no aberto $Y \cap U$ de Y e ξ é um ponto de Y , que é o fecho de $\{\eta\}$ em Y , então $(Y \cap U) \cap \{\eta\} \neq \emptyset$, ou seja, $\eta \in Y \cap U$. Note ainda que ξ e η são dois pontos genéricos de $Y \cap U$, pois

$$Y \cap U = (Y \cap U) \cap Y = (Y \cap U) \cap (\text{fecho de } \{\xi\} \text{ em } Y) = \text{fecho de } \{\xi\} \text{ em } Y \cap U$$

e

$$Y \cap U = (Y \cap U) \cap Y = (Y \cap U) \cap (\text{fecho de } \{\eta\} \text{ em } Y) = \text{fecho de } \{\eta\} \text{ em } Y \cap U,$$

assim, segue da unicidade do ponto genérico de $Y \cap U$ provada no passo 1 que $\xi = \eta$.

Portanto, Y possui um único ponto genérico.

□

O resultado a seguir nos mostra que o stalk do feixe no ponto genérico é um corpo, que servirá de um substituto ao corpo de funções racionais $k(X)$ no caso da geometria algébrica clássica. Como é importante sabermos como são os seus elementos, iremos manter a demonstração.

Proposição 1.67. Se (X, \mathcal{O}_X) é um esquema integral e $\xi \in X$ é o seu ponto genérico, então o stalk $\mathcal{O}_{X, \xi}$ de \mathcal{O}_X em ξ é um corpo.

Demonstração. A existência e unicidade do ponto genérico ξ de X segue do Lema 1.66, pois como (X, \mathcal{O}_X) é integral, segue do Teorema 1.57 que (X, \mathcal{O}_X) é irredutível, e como X é fechado, então X possui um único ponto genérico.

Como $\xi \in X$, segue da definição de esquema que existe um aberto afim $U = \text{Spec}(A)$ de X com $\xi \in U$. Note que A é um domínio de integridade, pois como (X, \mathcal{O}_X) é integral, então $\mathcal{O}_X(U)$ é domínio de integridade, mas pela Proposição 1.34,

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(A)) \cong A.$$

Portanto, A é domínio de integridade. Agora dado um aberto V de X , com $\xi \in V$, temos $[V, s]_{\xi} = [U \cap V, \rho_{V, U \cap V}(s)]_{\xi}$, pois

$$\rho_{V, U \cap V}(s) = \text{id}(\rho_{V, U \cap V}(s)) = \rho_{U \cap V, U \cap V}(\rho_{V, U \cap V}(s)),$$

então, o stalk $\mathcal{O}_{X, \xi}$ pode ser computado olhando para o aberto afim U .

Note que como na demonstração do Lema 1.66, no passo 1, temos que $X \cap U = U$ possui um único ponto genérico, e este ponto é o ideal primo

$$I(X \cap U) = I(U) = I(\text{Spec}(A)) = I(V(\langle 0 \rangle)) = \sqrt{\langle 0 \rangle},$$

e como no passo 2, este é o ponto genérico ξ de X . Agora como (X, \mathcal{O}_X) é integral, segue do Teorema 1.57 que (X, \mathcal{O}_X) é reduzido, então $\mathcal{O}_X(U) \cong A$ não tem elementos nilpotentes, isto é, $\sqrt{\langle 0 \rangle} = \langle 0 \rangle$. Agora, pela Proposição 1.34, obtemos

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = \mathcal{O}_{U,\langle 0 \rangle} \cong A_{\langle 0 \rangle},$$

que é um corpo, pois $A_{\langle 0 \rangle}$ é a localização do domínio de integridade A sobre o conjunto multiplicativamente fechado $S = A \setminus \{0\}$, isto é, $\mathcal{O}_{X,\xi}$ é o corpo de frações de A . Portanto, $\mathcal{O}_{X,\xi}$ é um corpo. □

Definição 1.68. O corpo acima é chamado de **corpo de funções racionais** de X .

Com a definição acima, podemos recuperar a noção de corpo de funções associado à uma variedade algébrica em geometria algébrica clássica.

Definição 1.69. Uma **variedade sobre um corpo** k é um k -esquema integral (X, \mathcal{O}_X) . O stalk $\mathcal{O}_{X,\xi}$ do feixe \mathcal{O}_X no ponto genérico $\xi \in X$ é chamado de **corpo de funções de X** e é denotado por $k(X)$.

Definido o conceito de variedade, é interessante termos a noção de subvariedade de uma variedade.

Definição 1.70. Seja (X, \mathcal{O}_X) um k -esquema. Uma **subvariedade de (X, \mathcal{O}_X)** é um k -subesquema fechado e integral (V, \mathcal{O}_V) de (X, \mathcal{O}_X) .

Agora temos uma subvariedade dentro de uma variedade, cada objeto com o seu respectivo ponto genérico. É natural pensar no anel obtido tomando o stalk do feixe da variedade no ponto genérico da subvariedade, o qual definimos abaixo.

Definição 1.71. Sejam (X, \mathcal{O}_X) um k -esquema e (V, \mathcal{O}_V) uma subvariedade. Definimos o **anel local de X ao longo de V** , denotado por $\mathcal{O}_{X,V}$, como $\mathcal{O}_{X,\xi}$, onde $\xi \in V$ é o seu ponto genérico. O ideal maximal $\mathfrak{m}_{X,\xi}$ de $\mathcal{O}_{X,\xi}$ é denotado por $\mathfrak{m}_{V,X}$.

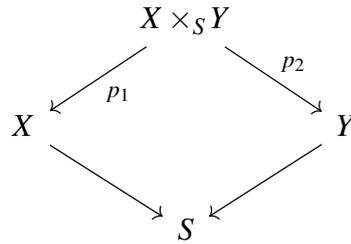
Observação 1.72. Se (X, \mathcal{O}_X) é um esquema e (V, \mathcal{O}_V) é uma subvariedade, então $k(V) \cong \frac{\mathcal{O}_{X,\xi}}{\mathfrak{m}_{X,\xi}}$, pois

$$k(V) = \mathcal{O}_{V,\xi} \cong \frac{\mathcal{O}_{X,\xi}}{\mathcal{I}_{X,\xi}},$$

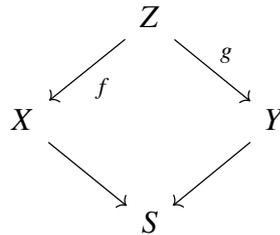
e sendo $k(V)$ um corpo, então $\mathcal{I}_{X,\xi}$ é o ideal maximal $\mathfrak{m}_{X,\xi}$ de $\mathcal{O}_{X,\xi}$.

Definição 1.73. Sejam X e Y dois esquemas sobre um esquema S . Um **produto fibrado de X e Y sobre S** é um esquema $X \times_S Y$ junto com dois morfismos $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$,

chamados de **morfismos projeções**, tais que o diagrama



é comutativo. Além disso, para todo esquema Z e todo morfismo $f : Z \rightarrow X$ e $g : Z \rightarrow Y$ tais que o diagrama



comuta, então existe um único morfismo $\theta : Z \rightarrow X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ \theta$ e $g = p_2 \circ \theta$.

Observação 1.74. Para todo par de S -esquemas X e Y , sempre existe um único (a menos de isomorfismo) produto fibrado $X \times_S Y$. A demonstração deste fato pode ser visto em (HARTSHORNE, 1977, p.87, Theorem 3.3).

Observação 1.75. Diferente do caso de produto cartesiano, os morfismos projeções não são sempre sobrejetores. De fato, existe $z \in X \times_S Y$ tal que $p_1(z) = x$ e $p_2(z) = y$ se, e somente se, x e y vão para o mesmo ponto de S via os morfismos $X \rightarrow S$ e $Y \rightarrow S$. Ver (THE... , b, Lemma 29.9.3).

Observação 1.76. Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas. Então X é um Y -esquema, logo, podemos considerar o produto fibrado $X \times_Y X$. Considerando $id_X : X \rightarrow X$, segue da definição de produto fibrado que existe um único morfismo $\theta : X \rightarrow X \times_Y X$ tal que $id_X = p_1 \circ \theta$ e $id_X = p_2 \circ \theta$.

O morfismo θ acima é chamado de **morfismo diagonal** e é denotado por $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$.

Observação 1.77. Note que $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$ é homeomorfismo. De fato, como $id_X = p_1 \circ \Delta$, então Δ é injetora, pois

$$\Delta(x) = \Delta(y) \Rightarrow p_1(\Delta(x)) = p_1(\Delta(y)) \Rightarrow x = y,$$

logo, restringindo sobre a imagem, concluímos que $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$ é bijetora.

Agora, já temos que Δ é contínua, e sua inversa é $p_1|_{\Delta(X)}$, que é contínua, pois é restrição da aplicação contínua p_1 .

Portanto, $\Delta : X \rightarrow \Delta(X)$ é homeomorfismo.

Com o produto fibrado, podemos definir algumas propriedades de morfismos.

Definição 1.78. Um morfismo entre esquemas $f : X \rightarrow Y$ é dito **separado** se $\Delta(X)$ é um fechado de $X \times_Y X$, onde $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ é o morfismo diagonal.

A definição acima serve como uma noção de separabilidade, uma vez que em topologia geral, um espaço X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\{(x, x) \mid x \in X\}$ é fechado em $X \times X$.

Definição 1.79. Um morfismo entre esquemas $f : X \rightarrow Y$ é dito **universalmente fechado** se para todo esquema Z sobre Y , tem-se que a projeção $p_2 : X \times_Y Z \rightarrow Z$ é uma aplicação fechada, isto é, p_2 leva fechado em fechado.

Com esta definição, estamos prontos para definir a noção de morfismo próprio, o qual será necessário para definirmos o pushforward de uma variedade quando trabalharmos com ciclos no grupo de Chow.

Definição 1.80. Um morfismo entre esquemas $f : X \rightarrow Y$ é dito **próprio** se f é separado, do tipo finito e universalmente fechado.

Observação 1.81. É possível mostrar que se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são morfismos próprios de esquemas, então sua composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ é um morfismo próprio. Ver (THE..., a, Lemma 29.39.4).

Observação 1.82. Todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ próprio é uma aplicação fechada. De fato, considerando Y como um Y -esquema (com a aplicação $id_Y : Y \rightarrow Y$) e X como um Y -esquema (com a aplicação $f : X \rightarrow Y$), obtemos o produto fibrado $X \times_Y Y$ que satisfaz o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_Y Y & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 X & & Y \\
 f \searrow & & \swarrow id_Y \\
 & Y &
 \end{array}$$

comutar. Agora, se F é um fechado de X , pela continuidade de p_1 , $p_1^{-1}(F)$ é um fechado de $X \times_Y Y$, assim, sendo p_2 fechada (pois f é um morfismo universalmente fechado), segue que $p_2(p_1^{-1}(F))$ é um fechado de Y . Como $id_Y \circ p_2 = f \circ p_1$, então

$$p_2(p_1^{-1}(F)) = id_Y(p_2(p_1^{-1}(F))) = f(p_1(p_1^{-1}(F))) = f(F),$$

pois p_1 é sobrejetora neste caso, já que dado $x \in X$, podemos considerar $f(x) \in Y$, logo, x e $f(x)$ são mapeados para o mesmo ponto pelos morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $id_Y : Y \rightarrow Y$. Assim, existe $z \in X \times_Y Y$ tal que $p_1(z) = x$ e $p_2(z) = f(x)$.

1.3 \mathcal{A} -equivalência e \mathcal{K} -equivalência

Nesta seção relembramos algumas noções da Teoria de Singularidades Clássica, onde recordamos a noção de duas aplicações serem equivalentes em um certo sentido.

Assumimos que as funções são suaves. O conjunto $\mathcal{O}(m)$ denota o conjunto dos germes de funções $f : U \subseteq \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ em 0, isto é, é o conjunto das classes de equivalência de aplicações sob a seguinte relação de equivalência: Duas funções $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ definidas em uma vizinhança de 0 são equivalentes se existe um aberto $W \subseteq U \cap V$, com $0 \in W$, tal que $f|_W = g|_W$.

Também podemos ver $\mathcal{O}(m)$ como o stalk $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0}$, onde $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}$ é o feixe que associa a cada aberto $U \subseteq \mathbb{C}^m$ o anel das funções diferenciáveis em U .

Observação 1.83. O anel $\mathcal{O}(m)$ é um anel local, e o seu ideal maximal é

$$\mathfrak{m} := \{f \in \mathcal{O}(m) \mid f(0) = 0\},$$

que expandindo f em série e pondo x_i em evidência, este ideal é igual ao ideal gerado $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ em $\mathcal{O}(m)$.

Definição 1.84. Definimos $\mathcal{O}(m, n)$ como o conjunto de todas as classes de equivalência de aplicações $f : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Denotamos por $\mathcal{O}_0(m, n)$ como os germes $f : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, isto é, $f(0) = 0$.

Observação 1.85. O conjunto $\mathcal{O}(m, n)$ tem estrutura de $\mathcal{O}(m)$ -módulo, definindo para $f \in \mathcal{O}(m, n)$ e $\alpha \in \mathcal{O}(m)$, αf como o germe

$$(\alpha f)(x) := \alpha(x)f(x).$$

Mais ainda, $\mathcal{O}_0(m, n)$ é o submódulo $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}(m, n)$. De fato, dado $f \in \mathcal{O}_0(m, n)$, temos $f(0) = 0$, logo, escrevendo $f = (f_1, \dots, f_n)$, temos $f_i(0) = 0$, então expandindo em série e colocando os x_i em evidência, podemos escrever

$$f_i(x) = x_1 g_{i1}(x) + x_2 g_{i2}(x) + \dots + x_m g_{im}(x).$$

Desta forma, as funções x_i estão em \mathfrak{m} e

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^m x_j g_{1j}(x), \dots, \sum_{j=1}^m x_j g_{nj}(x) \right) = \sum_{j=1}^m x_j (g_{1j}(x), \dots, g_{nj}(x)),$$

e definindo $g_j(x) = (g_{1j}(x), \dots, g_{nj}(x))$, vem

$$f(x) = \sum_{j=1}^m x_j g_j(x) \in \mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}(m, n).$$

Portanto, $\mathcal{O}_0(m, n) \subseteq \mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}(m, n)$. Reciprocamente, dado $f \in \mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}(m, n)$, então f é escrita como

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(x) g_j(x), \quad \alpha_j \in \mathfrak{m}, \quad g_j \in \mathcal{O}(m, n).$$

Como $\alpha_j \in \mathfrak{m}$, então $\alpha_j(0) = 0$, para todo j , logo, $f(0) = 0$ e, assim, $f \in \mathcal{O}_0(m, n)$.

Definição 1.86. Denotamos por $\text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ como o conjunto de germes suaves $f : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ bijetores cuja inversa é suave.

O grupo $\mathcal{A}_{m,n}$ (que podemos denotar simplesmente por \mathcal{A} , caso não haja confusão) é o produto $\text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$.

Dois germes $f, g \in \mathcal{O}_0(m, n)$ são ditos \mathcal{A} -**equivalentes**, e denotamos por $f \sim_{\mathcal{A}} g$ se existe um par $(\sigma, \tau) \in \mathcal{A}$ tal que

$$g = \tau \circ f \circ \sigma^{-1},$$

isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^m, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}^n, 0) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ (\mathbb{C}^m, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}^n, 0) \end{array}$$

comuta.

Observação 1.87. O conjunto \mathcal{A} é um grupo com a operação de composição em cada entrada, logo, podemos definir a \mathcal{A} -equivalência por ação da seguinte forma: Defina a ação $\mathcal{A} \times \mathcal{O}_0(m, n) \rightarrow \mathcal{O}_0(m, n)$ por

$$(\sigma, \tau) \cdot f := \tau \circ f \circ \sigma^{-1}.$$

Então g é \mathcal{A} -equivalente à f se, e somente se, g está na órbita de f por esta ação.

Definição 1.88. Denotamos por $\mathcal{H}_{m,n}$ (ou simplesmente \mathcal{H} , caso não haja confusão) o grupo de todos os pares (σ, Φ) , onde $\sigma \in \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ e $\Phi : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$.

Observação 1.89. Definimos a operação em \mathcal{H} da seguinte forma: Dados (σ, Φ) e (σ', Φ') , definimos

$$(\sigma, \Phi) * (\sigma', \Phi') := (\sigma' \circ \sigma, \Phi \cdot (\Phi' \circ \sigma)),$$

onde

$$(\Phi \cdot (\Phi' \circ \sigma))(x) = \Phi(x) \cdot \Phi'(\sigma(x)).$$

Então \mathcal{H} é um grupo.

Observação 1.90. O grupo \mathcal{H} age em $\mathcal{O}_0(m, n)$ da seguinte forma: Dados $(\sigma, \Phi) \in \mathcal{H}$ e $f \in \mathcal{O}_0(m, n)$, o germe $(\sigma, \Phi) \cdot f \in \mathcal{O}_0(m, n)$ é dado por

$$((\sigma, \Phi) \cdot f)(x) := \Phi(x) \cdot f(\sigma(x)).$$

Definição 1.91. Dois germes $f, g \in \mathcal{O}_0(m, n)$ são ditos \mathcal{H} -**equivalentes**, e denotamos por $g \sim_{\mathcal{H}} f$, se existe um elemento $(\sigma, \Phi) \in \mathcal{H}$ tal que $g = (\sigma, \Phi) \cdot f$, isto é, $g \in \mathcal{H} \cdot f$.

O resultado a seguir mostra uma condição equivalente para dois germes serem \mathcal{K} -equivalentes. A grosso modo, o conceito se baseia na ideia de existir um difeomorfismo que leva o gráfico da f no gráfico da g , o que justifica o nome usual de **equivalência de contato**. Alguns autores usam este resultado como a definição de \mathcal{K} -equivalência e apresentamos aqui a demonstração deste resultado.

Teorema 1.92. Sejam $f, g \in \mathcal{O}_0(m, n)$. Então $g \sim_{\mathcal{K}} f$ se, e somente se, existe um par de germes de difeomorfismos (h, H) tais que

$$H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x))),$$

onde $h : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ e $H : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0)$, com $(\pi_1 \circ H)(x, y) = h(x)$ e $(\pi_2 \circ H)(x, 0) = 0$, para todo x, y .

Demonstração. (\Rightarrow) Sendo $g \sim_{\mathcal{K}} f$, então existem um germe de difeomorfismo $\sigma : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ e $\Phi : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ tais que $g(x) = \Phi(x) \cdot f(\sigma(x))$. Assim,

$$g(\sigma^{-1}(x)) = \Phi(\sigma^{-1}(x)) \cdot f(x).$$

Escreva

$$\Phi(\sigma^{-1}(x)) = \begin{bmatrix} \eta_{11}(x) & \eta_{12}(x) & \cdots & \eta_{1n}(x) \\ \eta_{21}(x) & \eta_{22}(x) & \cdots & \eta_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1}(x) & \eta_{n2}(x) & \cdots & \eta_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Defina

$$\eta_j(x) := (\eta_{1j}(x), \eta_{2j}(x), \dots, \eta_{nj}(x))$$

as funções dadas pelas colunas da matriz $\Phi(\sigma^{-1}(x))$, $h(x) := \sigma^{-1}(x)$,

$$\theta(x, y) := y_1 \eta_1(x) + \cdots + y_n \eta_n(x) = \left(\sum_{j=1}^n y_j \eta_{1j}(x), \dots, \sum_{j=1}^n y_j \eta_{nj}(x) \right)$$

e

$$H(x, y) := (h(x), \theta(x, y)).$$

Afirmamos que o par (h, H) satisfaz a tese. De fato, já temos que h é um germe de difeomorfismo, pois σ^{-1} o é, temos

$$(\pi_1 \circ H)(x, y) = \pi_1(h(x), \theta(x, y)) = h(x)$$

e

$$(\pi_2 \circ H)(x, 0) = \pi_2(h(x), \theta(x, 0)) = \theta(x, 0) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \eta_i(x) = 0.$$

Vamos provar que H é um germe de difeomorfismo. Note que a matriz de $dH_{(0,0)}$ é

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0, 0) \right)_{m \times m} & \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(0, 0) \right)_{m \times n} \\ \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}(0, 0) \right)_{n \times m} & \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j}(0, 0) \right)_{n \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0, 0) \right)_{m \times m} & (0)_{m \times n} \\ (0)_{n \times m} & (\eta_{ij}(0))_{n \times n} \end{bmatrix},$$

logo, seu determinante é

$$\det(dH_{(0,0)}) = \det(dh_0) \cdot \det(\Phi(0)) \neq 0.$$

Segue do Teorema da Aplicação Inversa que H é um germe de difeomorfismo. Por fim,

$$\begin{aligned} \theta(x, f(x)) &= \begin{bmatrix} \theta_1(x, f(x)) \\ \theta_2(x, f(x)) \\ \vdots \\ \theta_n(x, f(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n f_j(x) \cdot \eta_{1j}(x) \\ \sum_{j=1}^n f_j(x) \cdot \eta_{2j}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n f_j(x) \cdot \eta_{nj}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \eta_{11}(x) & \cdots & \eta_{1n}(x) \\ \eta_{21}(x) & \cdots & \eta_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1}(x) & \cdots & \eta_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \Phi(\sigma^{-1}(x)) \cdot f(x) = g(\sigma^{-1}(x)) = g(h(x)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(x, f(x)) = (h(x), \theta(x, f(x))) = (h(x), g(h(x)))$$

e a tese está satisfeita.

(\Leftarrow) Temos que H é da forma $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$, com $\theta(x, 0) = 0$, tal que

$$H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x))),$$

ou seja,

$$\theta(x, f(x)) = g(h(x)), \quad \forall x,$$

isto é,

$$\theta \circ (id, f) = g \circ h \Leftrightarrow \theta \circ (id, f) \circ h^{-1} = g.$$

Agora, como $\theta(x, 0) = 0$, então expandindo em série e colocando os y_i em evidência, segue que existem funções $\eta_1, \dots, \eta_n : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n$ tais que

$$\theta(x, y) = y_1 \eta_1(x, y) + \cdots + y_n \eta_n(x, y).$$

Assim,

$$g(x) = \theta(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) = \sum_{j=1}^n f_j(h^{-1}(x)) \eta_j(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))),$$

que podemos escrever em forma matricial escrevendo $\eta_j = (\eta_{1j}, \dots, \eta_{nj})$ e

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) & \cdots & \eta_{1n}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) \\ \eta_{21}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) & \cdots & \eta_{2n}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) & \cdots & \eta_{nn}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(h^{-1}(x)) \\ f_2(h^{-1}(x)) \\ \vdots \\ f_n(h^{-1}(x)) \end{bmatrix}.$$

Portanto, $g(x) = \Phi(x)f(h^{-1}(x)) = (\sigma, \Phi) \cdot f$, onde

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \eta_{11}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) & \cdots & \eta_{1n}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) \\ \eta_{21}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) & \cdots & \eta_{2n}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) & \cdots & \eta_{nn}(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))) \end{bmatrix}$$

e $\sigma(x) = h^{-1}(x)$.

Vamos verificar que $(\sigma, \Phi) \in \mathcal{K}$. Já temos que σ é germe de difeomorfismo. Agora resta provar que $\Phi(x)$ é uma matriz invertível para todo x em uma vizinhança de 0. Note que $\Phi(0)$ é invertível. De fato, sendo H um difeomorfismo, então $dH_{(0,0)}$ é isomorfismo. A matriz de $dH_{(0,0)}$ é

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0,0) \right)_{m \times m} & (0)_{m \times n} \\ \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}(0,0) \right)_{n \times m} & \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j}(0,0) \right)_{n \times n} \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}.$$

Agora, da igualdade

$$\theta_i(x, y) = y_1 \eta_{i1}(x, y) + \cdots + y_n \eta_{in}(x, y)$$

segue que

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} = y_1 \frac{\partial \eta_{i1}}{\partial x_j} + \cdots + y_n \frac{\partial \eta_{in}}{\partial x_j},$$

logo, ao aplicar em $(0,0)$, obtemos $\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}(0,0) = 0$. Então

$$0 \neq \det(dH_{(0,0)}) = \det \left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0,0) \right)_{m \times m} \right) \cdot \det \left(\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j}(0,0) \right)_{n \times n} \right),$$

portanto,

$$\det \left(\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j}(0,0) \right)_{n \times n} \right) \neq 0.$$

Novamente, segue da igualdade

$$\theta_i(x, y) = y_1 \eta_{i1}(x, y) + \cdots + y_n \eta_{in}(x, y)$$

que

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j} = y_1 \frac{\partial \eta_{i1}}{\partial y_j} + \cdots + y_{j-1} \frac{\partial \eta_{ij-1}}{\partial y_j} + \left(\eta_{ij} + y_j \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial y_j} \right) + y_{j+1} \frac{\partial \eta_{ij+1}}{\partial y_j} + \cdots + y_n \frac{\partial \eta_{in}}{\partial y_j},$$

então avaliando em $(0,0)$, vem

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial y_j}(0,0) = \eta_{ij}(0,0).$$

Portanto, sendo $h^{-1}(0) = 0$ e $f(0) = 0$, segue que $\det(\Phi(0)) \neq 0$. Assim, segue da continuidade de h^{-1} , f e de \det que para todo x em uma vizinhança de 0, vale $\det(\Phi(x)) \neq 0$. Portanto, $g \sim_{\mathcal{K}} f$.

□

Observação 1.93. Para todo f , vale $\mathcal{A} \cdot f \subseteq \mathcal{K} \cdot f$. De fato, tome $g \in \mathcal{A} \cdot f$, então existe um par $(\sigma, \tau) \in \mathcal{A}$ tal que $g = \tau \circ f \circ \sigma^{-1}$. Defina

$$H(x, y) = (h(x), \theta(x, y)),$$

onde $h(x) = \sigma(x)$ e $\theta(x, y) = \tau(y)$. Então h é germe de difeomorfismo, pois σ o é, temos

$$\theta(x, 0) = \tau(0) = 0,$$

para todo x e H é germe de difeomorfismo, pois H é diferenciável e sua inversa é $H^{-1}(x, y) = (\sigma^{-1}(x), \tau^{-1}(y))$, que é diferenciável, pois σ^{-1} e τ^{-1} são diferenciáveis. Por fim, vale

$$\begin{aligned} H(x, f(x)) &= (\sigma(x), \tau(f(x))) \\ &\stackrel{y=\sigma(x)}{=} (y, \tau(f(\sigma^{-1}(y)))) \\ &= (y, (\tau \circ f \circ \sigma^{-1})(y)) \\ &= (y, g(y)) \\ &= (\sigma(x), g(\sigma(x))) \\ &= (h(x), g(h(x))). \end{aligned}$$

Assim, segue do Teorema 1.92 que $g \sim_{\mathcal{K}} f$, ou seja, $g \in \mathcal{K} \cdot f$. Portanto, $\mathcal{A} \cdot f \subseteq \mathcal{K} \cdot f$.

Exemplo 1.94. Considere $f(x, y) = (x^3 + yx, y)$ e $g(x, y) = (x^3, y)$. Então $g \sim_{\mathcal{K}} f$. De fato, considere

$$H(x, y, z, w) = (x, y, z - xw, w),$$

isto é, $h(x, y) = (x, y)$ e $\theta(x, y, z, w) = (z - xw, w)$. Então h é um germe de difeomorfismo, pois h é a aplicação identidade, temos

$$\theta(x, y, 0, 0) = (0 - x \cdot 0, 0) = (0, 0),$$

para todo (x, y) , e H é germe de difeomorfismo, pois sua matriz jacobiana é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo,

$$dH_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é invertível, segue do Teorema da Aplicação Inversa que H é um germe de difeomorfismo. Por fim, vale

$$\begin{aligned} H(x, y, f(x, y)) &= H(x, y, x^3 + yx, y) \\ &= (x, y, (x^3 - yx) - xy, y) \\ &= (x, y, x^3, y) \\ &= (x, y, g(x, y)) \\ &= (h(x, y), g(h(x, y))). \end{aligned}$$

Portanto, $g \sim_{\mathcal{H}} f$.

Mas g e f não são \mathcal{A} -equivalentes. De fato, suponha, por absurdo, que $g \sim_{\mathcal{A}} f$. Então existem germes de difeomorfismos σ e τ tais que $g \circ \sigma = \tau \circ f$, ou seja, escrevendo $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, obtemos

$$(\sigma_1(x, y)^3, \sigma_2(x, y)) = (\tau_1(x^3 + yx, y), \tau_2(x^3 + yx, y)).$$

Logo, $\sigma_1(x, y) = \sqrt[3]{\tau_1(x^3 + yx, y)}$, então

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) = \frac{(3x^2 + y) \frac{\partial \tau_1}{\partial x}(x^3 + yx, y)}{3 \sqrt[3]{\tau_1(x^3 + yx, y)^2}}, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \frac{x \frac{\partial \tau_1}{\partial x}(x^3 + yx, y) + \frac{\partial \tau_1}{\partial y}(x^3 + yx, y)}{3 \sqrt[3]{\tau_1(x^3 + yx, y)^2}}.$$

Expanda τ_1 em Taylor e vamos olhar para $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$. Note que o grau de x do numerador é maior ou igual que 2, enquanto que o grau de x do denominador é maior ou igual que $\frac{2}{3}$, por outro lado, o grau em y do numerador é maior ou igual que 1, enquanto que o grau em y do denominador é maior ou igual que $\frac{2}{3}$. Então o numerador vai para 0 mais rápido que o denominador, concluindo que

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Analogamente para $\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}$, o grau de x do numerador é no mínimo 1 e do denominador é no mínimo $\frac{2}{3}$, enquanto que o grau de y do numerador é no mínimo 1 e do denominador é no mínimo $\frac{2}{3}$. Então o numerador vai para 0 mais rápido que o denominador, concluindo que

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Portanto, a matriz jacobiana de σ em $(0, 0)$ tem a primeira linha totalmente nula, logo, não é invertível, o que é uma contradição, uma vez que σ é um difeomorfismo.

Este exemplo mostra que $\mathcal{A} \cdot f \subsetneq \mathcal{H} \cdot f$. A \mathcal{A} -classe de $(x^3 + yx, y)$ é conhecida como **cúspide ordinária** ou **singularidade estável** A_2 .

GRUPOS DE HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA

Neste capítulo definimos o ambiente onde as classes características estão. Para isto, será necessário definir três tipos de homologia.

2.1 Homologia e Cohomologia Singular

Começamos com os grupos de homologia e cohomologia singular, já que é relativamente simples e a definição dos demais são análogos.

Definição 2.1. Um n -simplexo σ em \mathbb{R}^N é a envoltória convexa dos pontos v_0, \dots, v_n de \mathbb{R}^N tais que $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$ são n vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^N , isto é,

$$\sigma = \{ \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1, \alpha_0, \dots, \alpha_n \geq 0 \}.$$

Os pontos v_0, \dots, v_n são ditos **vértices de σ** e n é dito a **dimensão de σ** . As **faces de σ** são os $(n-1)$ -simplexos cujos vértices são vértices de σ .

Exemplo 2.2. Em \mathbb{R}^n , considere Δ_n a envoltória convexa dos pontos

$$(0, \dots, 0), (1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1).$$

O n -simplexo Δ_n é chamado de **n -simplexo padrão em \mathbb{R}^n** . Por exemplo, Δ_3 é o tetraedro regular, cujos lados medem 1.

Definição 2.3. Um i -simplexo singular em um espaço topológico X é uma função contínua

$$\sigma : \Delta_i \rightarrow X,$$

onde Δ_i é o i -simplexo padrão em \mathbb{R}^i .

Definição 2.4. Seja R um anel comutativo com unidade. Uma i -cadeia singular em X com coeficientes em R é uma combinação linear formal

$$c = \sum_j \alpha_j \sigma_j$$

de i -simplexos singulares $\sigma_j : \Delta_i \rightarrow X$ com coeficientes α_j em R , e apenas uma quantidade finita destes coeficientes são não nulos. O conjunto de todas as i -cadeias singulares em X é denotado por $S_i^{sing}(X; R)$.

Observação 2.5. Segue da definição que $S_i^{sing}(X; R)$ é um R -módulo livre cuja base é o conjunto de todos os i -simplexos singulares de X .

Observação 2.6. Para cada i , temos $i + 1$ funções $\phi_i^j : \Delta_{i-1} \rightarrow \Delta_i$, $j = 0, \dots, i$, dadas por

$$\phi_i^j(e_k) = \begin{cases} e_k, & k < j \\ e_{k+1}, & k \geq j. \end{cases}$$

que identifica o $(i - 1)$ -simplexo padrão Δ_{i-1} como uma face do i -simplexo padrão Δ_i , removendo o j -ésimo vértice de Δ_i .

Definição 2.7. Seja $\sigma : \Delta_i \rightarrow X$ um i -simplexo singular. A j -ésima face de σ é o $(i - 1)$ -simplexo singular $\sigma^{(j)} = \sigma \circ \phi_i^j : \Delta_{i-1} \rightarrow X$.

Definição 2.8. Seja $\sigma : \Delta_i \rightarrow X$ um i -simplexo singular. O bordo de σ é a $(i - 1)$ -cadeia singular

$$\partial_i(\sigma) := \sum_{j=0}^i (-1)^j \sigma^{(j)} = \sum_{j=0}^i (-1)^j \sigma \circ \phi_i^j.$$

O operador bordo é o homomorfismo de R -módulos $\partial_i : S_i^{sing}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X; R)$ definido por

$$\partial_i \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right) := \sum_j \alpha_j \partial_i(\sigma_j),$$

e definimos $\partial_0(c) = 0$, caso c seja uma 0-cadeia.

Observação 2.9. Se $\partial_i : S_i^{sing}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X; R)$ e $\partial_{i-1} : S_{i-1}^{sing}(X; R) \rightarrow S_{i-2}^{sing}(X; R)$ são dois operadores bordo, então $\partial_{i-1} \circ \partial_i : S_i^{sing}(X; R) \rightarrow S_{i-2}^{sing}(X; R)$ é identicamente nulo. De fato, sejam $\phi_i^j : \Delta_{i-1} \rightarrow \Delta_i$ e $\phi_{i-1}^k : \Delta_{i-2} \rightarrow \Delta_{i-1}$ as aplicações que identificam os simplexos como faces. Note que para todo par de índices $j \leq k$, vale

$$\phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k = \phi_i^{k+1} \circ \phi_{i-1}^j,$$

pois como

$$\phi_i^j(t_0, \dots, t_{i-1}) = \phi_i^j \left(\sum_{l=0}^{i-1} t_l e_l \right) = \sum_{l=0}^{i-1} t_l \phi_i^j(e_l) = (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-1}),$$

uma vez que ϕ_i^j simplesmente pula o j -ésimo vértice de Δ_i , então dado $(t_0, \dots, t_{i-2}) \in \Delta_{i-2}$, a função ϕ_{i-1}^k irá colocar um 0 antes de t_k , obtendo,

$$\phi_{i-1}^k(t_0, \dots, t_{i-2}) = (t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{i-2}),$$

em seguida, ϕ_i^j irá colocar um 0 antes de t_j , e como estamos supondo $j \leq k$, obtemos,

$$(\phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k)(t_0, \dots, t_{i-2}) = (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{i-2}).$$

Por outro lado, ϕ_{i-1}^j coloca um 0 antes de t_j , obtendo

$$\phi_{i-1}^j(t_0, \dots, t_{i-2}) = (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}),$$

em seguida, ϕ_i^{k+1} coloca um 0 antes da coordenada que ocupa a $(k+1)$ -ésima posição do vetor acima, que é t_k , pois agora as coordenadas do vetor estão deslocadas uma casa para a direita após a j -ésima coordenada, e estamos com $j \leq k < k+1$, logo,

$$(\phi_i^{k+1} \circ \phi_{i-1}^j)(t_0, \dots, t_{i-2}) = (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{i-2}).$$

Assim, como os operadores bordo são homomorfismos de R -módulos, basta provar que $(\partial_{i-1}(\partial_i(\sigma))) = 0$, para todo i -simplexo singular σ . Temos que

$$\begin{aligned} \partial_{i-1}(\partial_i(\sigma)) &= \partial_{i-1} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \sigma \circ \phi_i^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \partial_{i-1}(\sigma \circ \phi_i^j) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \left[\sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k + \sum_{k=j}^{i-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k \right] \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k + \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=j}^{i-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k. \end{aligned}$$

Note que na segunda soma estamos com $j \leq k$, logo, ficamos com

$$(\partial_{i-1} \circ \partial_i)(\sigma) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k + \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=j}^{i-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^{k+1} \circ \phi_{i-1}^j.$$

Agora fazemos uma mudança de índices na segunda soma para nos livrarmos de $k+1$, fazendo $l := k+1$, vem que l varia de $j+1$ até i , e $k = l-1$, assim, obtemos

$$(\partial_{i-1} \circ \partial_i)(\sigma) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k + \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{l=j+1}^i (-1)^{l-1} \sigma \circ \phi_i^l \circ \phi_{i-1}^j,$$

que por simplicidade, fazemos $k = l$ para obter

$$(\partial_{i-1} \circ \partial_i)(\sigma) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k + \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=j+1}^i (-1)^{k-1} \sigma \circ \phi_i^k \circ \phi_{i-1}^j.$$

Agora, note que se abrimos a segunda soma, podemos inverter os papéis de j e k , ou seja, somar primeiro os termos que dependem de j e depois somar em k , assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=j+1}^i (-1)^{k-1} \sigma \circ \phi_i^k \circ \phi_{i-1}^j &= \sum_{j=0}^i (-1)^{j-1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k \\ &= - \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k, \end{aligned}$$

que é exatamente o oposto da primeira soma, logo,

$$\begin{aligned} \partial_{i-1}(\partial_i(\sigma)) &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k + \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=j+1}^i (-1)^{k-1} \sigma \circ \phi_i^k \circ \phi_{i-1}^j \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k - \sum_{j=0}^i (-1)^j \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \sigma \circ \phi_i^j \circ \phi_{i-1}^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

A igualdade $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ diz que $Im(\partial_i) \subseteq Ker(\partial_{i-1})$. Portanto, para todo i , vale

$$Im(\partial_{i+1} : S_{i+1}^{sing}(X; R) \rightarrow S_i^{sing}(X; R)) \subseteq Ker(\partial_i : S_i^{sing}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X; R)).$$

Definição 2.10. Definimos o i -ésimo R -módulo de homologia singular de X como o R -módulo quociente

$$H_i^{sing}(X; R) := \frac{Ker(\partial_i : S_i^{sing}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X; R))}{Im(\partial_{i+1} : S_{i+1}^{sing}(X; R) \rightarrow S_i^{sing}(X; R))}.$$

Queremos não precisar fixar o índice i para trabalhar com cadeias de grau qualquer. Uma maneira é fazer a soma direta sobre i destes R -módulos, assim, obtemos a seguinte definição.

Definição 2.11. Definimos o R -módulo de homologia singular como

$$H_*^{sing}(X; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i^{sing}(X; R).$$

Agora fazemos o dual de toda esta construção para obter a cohomologia.

Definição 2.12. O i -ésimo R -módulo de cocadeias singulares de X é definido por

$$S_{sing}^i(X; R) := Hom(S_i^{sing}(X; R), R),$$

o conjunto de todos os homomorfismos de R -módulos $S_i^{sing}(X; R) \rightarrow R$.

O operador cobordo $\delta^{i-1} : S_{sing}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{sing}^i(X; R)$ é o homomorfismo definido por

$$\delta^{i-1}(\varphi) := \varphi \circ \partial_i.$$

Observação 2.13. Se $\delta^i : S_{sing}^i(X; R) \rightarrow S_{sing}^{i+1}(X; R)$ e $\delta^{i-1} : S_{sing}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{sing}^i(X; R)$ são dois operadores cobordo, então $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$, pois para todo $\varphi \in S_{sing}^{i-1}(X; R)$, vale

$$(\delta^i \circ \delta^{i-1})(\varphi) = \delta^i(\delta^{i-1}(\varphi)) = \delta^i(\varphi \circ \partial_{i-1}) = \varphi \circ \partial_{i-1} \circ \partial_i = \varphi \circ 0 = 0.$$

Portanto,

$$Im(\delta^{i-1} : S_{sing}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{sing}^i(X; R)) \subseteq Ker(\delta^i : S_{sing}^i(X; R) \rightarrow S_{sing}^{i+1}(X; R)).$$

Definição 2.14. Definimos o *i*-ésimo *R*-módulo de cohomologia singular de *X* como sendo o *R*-módulo quociente

$$H_{sing}^i(X; R) := \frac{Ker(\delta^i : S_{sing}^i(X; R) \rightarrow S_{sing}^{i+1}(X; R))}{Im(\delta^{i-1} : S_{sing}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{sing}^i(X; R))}.$$

Definição 2.15. Definimos o *R*-módulo de cohomologia singular como

$$H_{sing}^*(X; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_{sing}^i(X; R).$$

2.2 Homologia e Cohomologia Relativa

Nesta seção apresentamos os grupos de homologia e cohomologia relativa, que é obtido a partir de um par de conjuntos, o qual é necessária para definir a classe fundamental de uma variedade.

Observação 2.16. Sejam *X* um espaço topológico e *Y* um subespaço topológico de *X*. Então $S_i^{sing}(Y; R)$ pode ser visto como um submódulo de $S_i^{sing}(X; R)$ da seguinte forma: Dada uma *i*-cadeia singular

$$c = \sum_j \alpha_j \sigma_j$$

de $S_i^{sing}(Y; R)$, como $Y \subseteq X$, então para cada $\sigma_j : \Delta_i \rightarrow Y$, podemos considerar a extensão $\sigma_j : \Delta_i \rightarrow X$. Assim, definimos

$$S_i^{sing}(X, Y; R) := \frac{S_i^{sing}(X; R)}{S_i^{sing}(Y; R)}.$$

Observação 2.17. Podemos definir um operador bordo $\bar{\partial}_i : S_i^{sing}(X, Y; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X, Y; R)$ dado por

$$\bar{\partial}_i(c + S_i^{sing}(Y; R)) = \partial_i(c) + S_{i-1}^{sing}(Y; R).$$

Note que $\bar{\partial}_i$ está bem definido, pois se $c + S_i^{sing}(Y; R) = c' + S_i^{sing}(Y; R)$, então $c - c' \in S_i^{sing}(Y; R)$, logo,

$$\partial_i(c) - \partial_i(c') = \partial_i(c - c') \in S_{i-1}^{sing}(Y; R),$$

ou seja, $\partial_i(c) + S_{i-1}^{sing}(Y; R) = \partial_i(c') + S_{i-1}^{sing}(Y; R)$. Também vale $\overline{\partial_{i-1}} \circ \overline{\partial_i} = 0$, pois

$$\begin{aligned} (\overline{\partial_{i-1}} \circ \overline{\partial_i})(c) &= \overline{\partial_{i-1}}(\overline{\partial_i}(c)) \\ &= \overline{\partial_{i-1}}(\partial_i(c) + S_{i-1}^{sing}(Y; R)) \\ &= \partial_{i-1}(\partial_i(c)) + S_{i-2}^{sing}(Y; R) \\ &= 0 + S_{i-2}^{sing}(Y; R). \end{aligned}$$

Portanto,

$$Im(\overline{\partial_{i+1}} : S_{i+1}^{sing}(X, Y; R) \rightarrow S_i^{sing}(X, Y; R)) \subseteq Ker(\overline{\partial_i} : S_i^{sing}(X, Y; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X, Y; R)).$$

Definição 2.18. O i -ésimo R -módulo de homologia relativa singular de X e Y é definido por

$$H_i^{sing}(X, Y; R) := \frac{Ker(\overline{\partial_i} : S_i^{sing}(X, Y; R) \rightarrow S_{i-1}^{sing}(X, Y; R))}{Im(\overline{\partial_{i+1}} : S_{i+1}^{sing}(X, Y; R) \rightarrow S_i^{sing}(X, Y; R))}.$$

Definição 2.19. Definimos o R -módulo de homologia relativa singular de X e Y como

$$H_*^{sing}(X, Y; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i^{sing}(X, Y; R).$$

Definição 2.20. O i -ésimo R -módulo de cocadeias relativas singulares de X e Y é definido por

$$S_{sing}^i(X, Y; R) := Hom(S_i^{sing}(X, Y; R), R),$$

o conjunto de todos os homomorfismos de R -módulos $S_i^{sing}(X, Y; R) \rightarrow R$.

O operador cobordo $\overline{\delta^{i-1}} : S_{sing}^{i-1}(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^i(X, Y; R)$ é o homomorfismo definido por

$$\overline{\delta^{i-1}}(\varphi) := \varphi \circ \overline{\partial_i}.$$

Observação 2.21. Se $\overline{\delta^i} : S_{sing}^i(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^{i+1}(X, Y; R)$ e $\overline{\delta^{i-1}} : S_{sing}^{i-1}(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^i(X, Y; R)$ são dois operadores cobordo, então $\overline{\delta^i} \circ \overline{\delta^{i-1}} = 0$, pois para todo $\varphi \in S_{sing}^{i-1}(X, Y; R)$, vale

$$(\overline{\delta^i} \circ \overline{\delta^{i-1}})(\varphi) = \overline{\delta^i}(\overline{\delta^{i-1}}(\varphi)) = \overline{\delta^i}(\varphi \circ \overline{\partial_{i-1}}) = \varphi \circ \overline{\partial_{i-1}} \circ \overline{\partial_i} = \varphi \circ 0 = 0.$$

Portanto,

$$Im(\overline{\delta^{i-1}} : S_{sing}^{i-1}(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^i(X, Y; R)) \subseteq Ker(\overline{\delta^i} : S_{sing}^i(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^{i+1}(X, Y; R)).$$

Definição 2.22. Definimos o i -ésimo R -módulo de cohomologia relativa singular de X e Y como sendo o R -módulo quociente

$$H_{sing}^i(X, Y; R) := \frac{Ker(\overline{\delta^i} : S_{sing}^i(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^{i+1}(X, Y; R))}{Im(\overline{\delta^{i-1}} : S_{sing}^{i-1}(X, Y; R) \rightarrow S_{sing}^i(X, Y; R))}.$$

Definição 2.23. Definimos o R -módulo de cohomologia relativa singular de X e Y como

$$H_{sing}^*(X, Y; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_{sing}^i(X, Y; R).$$

2.3 Homologia e Cohomologia de Borel-Moore

Por fim, a terceira homologia e cohomologia que apresentamos estende a homologia e cohomologia singular, permitindo a soma formal ser arbitrária, mas com uma certa condição de finitude.

Definição 2.24. Uma i -cadeia singular localmente finita em X com coeficientes em R é uma combinação linear formal (finita ou infinita)

$$c = \sum_j \alpha_j \sigma_j,$$

tal que para todo compacto K de X , apenas finitos coeficientes α_j não nulos são tais que $K \cap \text{Im}(\sigma_j) \neq \emptyset$. O conjunto de todas as i -cadeias singulares localmente finitas em X com coeficientes em R é denotado por $S_i^{BM}(X; R)$.

Observação 2.25. Definimos o operador bordo $\partial_i : S_i^{BM}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{BM}(X; R)$ da mesma maneira que para i -cadeias singulares, pois a condição de finitude continua valendo para o bordo. De fato, dada uma i -cadeia $c \in S_i^{BM}(X; R)$, digamos

$$c = \sum_j \alpha_j \sigma_j,$$

e dado um compacto K de X , então para apenas finitos coeficientes $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$ não nulos tais que $K \cap \text{Im}(\sigma_{j_m}) \neq \emptyset$, $1 \leq m \leq k$. Como

$$\partial_i(c) = \sum_j \alpha_j \partial_i(\sigma_j) = \sum_j \alpha_j \sum_{l=0}^i (-1)^l \sigma_j^{(l)} = \sum_j \sum_{l=0}^i (-1)^l \alpha_j \sigma_j \circ \phi_i^l$$

e $\text{Im}(\sigma_j \circ \phi_i^l) \subseteq \text{Im}(\sigma_j)$, então apenas $K \cap \text{Im}(\sigma_{j_m} \circ \phi_i^l)$, $1 \leq m \leq k$, $0 \leq l \leq i$ podem ser não vazios. Portanto, vale que

$$\text{Im}(\partial_{i+1} : S_{i+1}^{BM}(X; R) \rightarrow S_i^{BM}(X; R)) \subseteq \text{Ker}(\partial_i : S_i^{BM}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{BM}(X; R)).$$

Definição 2.26. O i -ésimo R -módulo de homologia de Borel-Moore de X (ou homologia com suporte fechado ou homologia das cadeias localmente finitas) é definido por

$$H_i^{BM}(X; R) := \frac{\text{Ker}(\partial_i : S_i^{BM}(X; R) \rightarrow S_{i-1}^{BM}(X; R))}{\text{Im}(\partial_{i+1} : S_{i+1}^{BM}(X; R) \rightarrow S_i^{BM}(X; R))}.$$

Definição 2.27. Definimos o R -módulo de homologia de Borel-Moore como

$$H_*^{BM}(X; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i^{BM}(X; R).$$

Definição 2.28. O i -ésimo R -módulo de cocadeias singulares localmente finita é definido por

$$S_{BM}^i(X; R) := \text{Hom}(S_i^{BM}(X; R), R),$$

o conjunto de todos os homomorfismos de R -módulos $S_i^{BM}(X; R) \rightarrow R$.

O **operador cobordo** $\delta^{i-1} : S_{BM}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{BM}^i(X; R)$ é o homomorfismo definido por

$$\delta^{i-1}(\varphi) := \varphi \circ \partial_i.$$

Observação 2.29. Se $\delta^i : S_{BM}^i(X; R) \rightarrow S_{BM}^{i+1}(X; R)$ e $\delta^{i-1} : S_{BM}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{BM}^i(X; R)$ são dois operadores cobordo, então $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$, pois para todo $\varphi \in S_{BM}^{i-1}(X; R)$, vale

$$(\delta^i \circ \delta^{i-1})(\varphi) = \delta^i(\delta^{i-1}(\varphi)) = \delta^i(\varphi \circ \partial_{i-1}) = \varphi \circ \partial_{i-1} \circ \partial_i = \varphi \circ 0 = 0.$$

Portanto,

$$Im(\delta^{i-1} : S_{BM}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{BM}^i(X; R)) \subseteq Ker(\delta^i : S_{BM}^i(X; R) \rightarrow S_{BM}^{i+1}(X; R)).$$

Definição 2.30. Definimos o i -ésimo R -módulo de cohomologia de Borel-Moore de X (ou cohomologia com suporte fechado ou cohomologia das cocadeias localmente finitas) como sendo o R -módulo quociente

$$H_{BM}^i(X; R) := \frac{Ker(\delta^i : S_{BM}^i(X; R) \rightarrow S_{BM}^{i+1}(X; R))}{Im(\delta^{i-1} : S_{BM}^{i-1}(X; R) \rightarrow S_{BM}^i(X; R))}.$$

Definição 2.31. Definimos o R -módulo de cohomologia de Borel-Moore como

$$H_{BM}^*(X; R) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_{BM}^i(X; R).$$

Analogamente, podemos também construir os grupos de homologia e de cohomologia relativa de Borel-Moore, basta considerar os conjuntos $S_i^{BM}(X; R)$ e $S_i^{BM}(Y; R)$.

Observação 2.32. Se X for um espaço compacto, então dada uma i -cadeia localmente finita

$$c = \sum_j \alpha_j \sigma_j,$$

temos da condição de $S_i^{BM}(X; R)$ que para o compacto X , como $X \cap Im(\sigma_j) \neq \emptyset$, para todo j , então apenas finitos coeficientes α_j são não nulos, logo, c é uma i -cadeia singular. Portanto, a homologia e cohomologia singular e de Borel-Moore coincidem.

2.4 Produto Cup e Produto Cap

A partir de agora, as construções apresentadas são feitas de forma análoga tanto para a homologia e cohomologia singular quanto para a de Borel-Moore, por esta razão iremos omitir a notação “*sing*” e “*BM*” nos grupos de cadeias, cocadeias, homologia e cohomologia.

Nesta seção definimos duas operações especiais em homologia e cohomologia. A primeira faz o grupo de cohomologia obter uma estrutura de anel. A segunda é um produto de elementos da homologia com elementos da cohomologia, que satisfazem várias propriedades operatórias.

Definição 2.33. Sejam $\varphi \in S^i(X; R)$ e $\psi \in S^j(X; R)$. O **produto cup entre φ e ψ** é o elemento $\varphi \smile \psi \in S^{i+j}(X; R)$ definido por extensão linear que para $(i+j)$ -simplexos singulares $\sigma : \Delta_{i+j} \rightarrow X$, definimos

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j\}}),$$

onde para $S \subseteq \{0, 1, \dots, i+j\}$, $\iota_S : \Delta_{|S|-1} \rightarrow \Delta_{i+j}$ é a inclusão de $\Delta_{|S|-1}$ no $(i+j)$ -simplexo singular Δ_{i+j} , ou seja, se $S = \{i_1, \dots, i_m\}$, então

$$\iota_S(t_{i_1}, \dots, t_{i_m}) = \sum_{j=1}^m t_{i_j} e_{i_j},$$

onde e_{i_j} é o i_j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{i+j} . Assim, podemos ver $\sigma \circ \iota_{\{i_1, \dots, i_m\}}$ como a restrição $\sigma|_{[e_{i_1}, \dots, e_{i_m}]}$, completando com zeros as coordenadas que faltam.

Observação 2.34. Segue da definição que se $\varphi \in S^i(X; R)$ e $\psi, \eta \in S^j(X; R)$, então

$$\varphi \smile (\psi + \eta) = \varphi \smile \psi + \varphi \smile \eta,$$

pois para $(i+j)$ -simplexos singulares $\sigma : \Delta_{i+j} \rightarrow X$, vale

$$\begin{aligned} (\varphi \smile (\psi + \eta))(\sigma) &= \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot (\psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j\}}) + \eta(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j\}})) \\ &= \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j\}}) + \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \eta(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j\}}) \\ &= \varphi \smile \psi(\sigma) + \varphi \smile \eta(\sigma) \\ &= (\varphi \smile \psi + \varphi \smile \eta)(\sigma). \end{aligned}$$

Lema 2.35. Se $\varphi \in S^i(X; R)$ e $\psi \in S^j(X; R)$, então

$$\delta^{i+j}(\varphi \smile \psi) = (\delta^i(\varphi) \smile \psi) + (-1)^i(\varphi \smile \delta^j(\psi)).$$

Demonstração. Pela linearidade, basta provar a igualdade para $(i+j+1)$ -simplexos singulares $\sigma : \Delta_{i+j+1} \rightarrow X$.

Vamos calcular $((\delta^i(\varphi) \smile \psi) + (-1)^i(\varphi \smile \delta^j(\psi)))(\sigma)$. Temos que

$$\begin{aligned} (\delta^i(\varphi) \smile \psi)(\sigma) &= \delta^i(\varphi)(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}) \\ &= \varphi(\partial_{i+1}(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}})) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}) \\ &= \varphi \left(\sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}} \circ \phi_{i+1}^k \right) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}} \circ \phi_{i+1}^k) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, k-1, k+1, \dots, i+1\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}), \end{aligned}$$

e temos que

$$\begin{aligned} (-1)^i(\varphi \smile \delta^j(\psi))(\sigma) &= (-1)^i \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \delta^j(\psi)(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}) \\ &= (-1)^i \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\partial_{j+1}(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}})) \\ &= (-1)^i \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi \left(\sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}} \circ \phi_{j+1}^k \right). \end{aligned}$$

Note que para $0 \leq k \leq j+1$, temos

$$\iota_{\{i, \dots, i+j+1\}} \circ \phi_{j+1}^k = \iota_{\{i, \dots, i+k-1, i+k+1, \dots, i+j+1\}},$$

pois ϕ_{j+1}^k leva (t_0, \dots, t_{j+1}) em $(t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{j+1})$ e, por sua vez, $\iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}$ leva este vetor em

$$(0, \dots, 0, t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{j+1}),$$

onde t_0 está na i -ésima coordenada, ou seja, é igual ao vetor que (t_0, \dots, t_{j+1}) é levado por $\iota_{\{i, \dots, i+k-1, i+k+1, \dots, i+j+1\}}$. Assim, a segunda soma se simplifica para

$$\begin{aligned} (-1)^i (\varphi \smile \delta^j(\psi))(\sigma) &= (-1)^i \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi \left(\sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}} \circ \phi_{j+1}^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{k+i} \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+k-1, i+k+1, \dots, i+j+1\}}) \\ &= \sum_{k=i}^{i+j+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, k-1, k+1, \dots, i+j+1\}}). \end{aligned}$$

Note que a primeira parcela da segunda soma é

$$(-1)^i \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}),$$

enquanto que a última parcela da primeira soma é

$$(-1)^{i+1} \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}) = -(-1)^i \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}),$$

que é o oposto da primeira parcela da segunda soma, assim, se somarmos, estas parcelas se cancelam, logo, $((\delta^i(\varphi) \smile \psi) + (-1)^i (\varphi \smile \delta^j(\psi)))(\sigma)$ é

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, k-1, k+1, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, i+j+1\}}) + \\ &+ \sum_{k=i+1}^{i+j+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, k-1, k+1, \dots, i+j+1\}}). \end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\delta^{i+j}(\varphi \smile \psi)(\sigma)$. Temos que

$$\begin{aligned} \delta^{i+j}(\varphi \smile \psi)(\sigma) &= (\varphi \smile \psi)(\partial_{i+j+1}(\sigma)) \\ &= (\varphi \smile \psi) \left(\sum_{k=0}^{i+j+1} (-1)^k \sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{i+j+1} (-1)^k (\varphi \smile \psi)(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k) \\ &= \sum_{k=0}^{i+j+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}), \end{aligned}$$

que separando em duas somas, fica

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}) + \\ + \sum_{k=i+1}^{i+j+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}),$$

mas na primeira soma, como $k \leq i$, então ϕ_{i+j+1}^k irá colocar apenas um 0 entre os zeros que $\iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}$ colocou, e na segunda soma, como $k \geq i+1$, então ϕ_{i+j+1}^k irá colocar apenas um 0 entre os zeros que $\iota_{\{0, \dots, i\}}$ já colocou, então isto se simplifica para

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}) + \\ + \sum_{k=i+1}^{i+j+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \phi_{i+j+1}^k \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}),$$

que é igual a

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, k-1, k+1, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, i+j+1\}}) + \\ + \sum_{k=i+1}^{i+j+1} (-1)^k \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \cdot \psi(\sigma \circ \iota_{\{i, \dots, k-1, k+1, i+j+1\}}),$$

que é exatamente $(\delta^i(\varphi) \smile \psi)(\sigma) + (-1)^i(\varphi \smile \delta^j(\psi))(\sigma)$. Portanto,

$$\delta^{i+j}(\varphi \smile \psi)(\sigma) = ((\delta^i(\varphi) \smile \psi) + (-1)^i(\varphi \smile \delta^j(\psi)))(\sigma).$$

□

Observação 2.36. Com o lema acima, podemos definir um produto

$$\smile: H^i(X; R) \times H^j(X; R) \rightarrow H^{i+j}(X; R)$$

dado por

$$(\varphi + \text{Im}(\delta^{i-1})) \smile (\psi + \text{Im}(\delta^{j-1})) := (\varphi \smile \psi) + \text{Im}(\delta^{i+j-1}).$$

Temos que mostrar que esta aplicação está bem definida. De fato, como $\varphi \in \text{Ker}(\delta^i)$ e $\psi \in \text{Ker}(\delta^j)$, então $\varphi \smile \psi \in \text{Ker}(\delta^{i+j})$, pois

$$\delta^{i+j}(\varphi \smile \psi) = \delta^i(\varphi) \smile \psi + (-1)^i \varphi \smile \delta^j(\psi) = 0 \smile \psi + (-1)^i \varphi \smile 0 = 0.$$

Além disso, se

$$\varphi + \text{Im}(\delta^{i-1}) = \varphi' + \text{Im}(\delta^{i-1}) \text{ e } \psi + \text{Im}(\delta^{j-1}) = \psi' + \text{Im}(\delta^{j-1}),$$

então

$$\varphi - \varphi' \in \text{Im}(\delta^{i-1}) \text{ e } \psi - \psi' \in \text{Im}(\delta^{j-1}),$$

logo, existem $\varphi'' \in S^{i-1}(X; R)$ e $\psi'' \in S^{j-1}(X; R)$ tais que

$$\varphi - \varphi' = \delta^{i-1}(\varphi'') \text{ e } \psi - \psi' = \delta^{j-1}(\psi'').$$

Assim, notando que $\varphi' \in \text{Ker}(\delta^i)$ e $\psi' \in \text{Ker}(\delta^j)$, vem

$$\delta^{i+(j-1)}(\varphi' \smile \psi'') = (\delta^i(\varphi') \smile \psi'') + (-1)^i(\varphi' \smile \delta^{j-1}(\psi'')) = (-1)^i(\varphi' \smile \delta^{j-1}(\psi''))$$

e

$$\delta^{(i-1)+j}(\varphi'' \smile \psi') = (\delta^{i-1}(\varphi'') \smile \psi') + (-1)^{i-1}(\varphi'' \smile \delta^j(\psi')) = \delta^{i-1}(\varphi'') \smile \psi',$$

e como $\delta^j \circ \delta^{j-1} = 0$, então

$$\delta^{(i-1)+j}(\varphi'' \smile \delta^{j-1}(\psi'')) = \delta^{i-1}(\varphi'') \smile \delta^{j-1}(\psi''),$$

logo,

$$\begin{aligned} \varphi \smile \psi - \varphi' \smile \psi' &= (\varphi' + \delta^{i-1}(\varphi'')) \smile (\psi' + \delta^{j-1}(\psi'')) - \varphi' \smile \psi' \\ &= \varphi' \smile \delta^{j-1}(\psi'') + \delta^{i-1}(\varphi'') \smile \psi' + \delta^{i-1}(\varphi'') \smile \delta^{j-1}(\psi'') \\ &= (-1)^i \delta^{i+j-1}(\varphi' \smile \psi'') + \delta^{i+j-1}(\varphi'' \smile \psi') + \delta^{(i-1)+j}(\varphi'' \smile \delta^{j-1}(\psi'')) \\ &= \delta^{i+j-1}((-1)^i(\varphi' \smile \psi'') + (\varphi'' \smile \psi') + (\varphi'' \smile \delta^{j-1}(\psi''))) \in \text{Im}(\delta^{i+j-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi \smile \psi + \text{Im}(\delta^{i+j-1}) = \varphi' \smile \psi' + \text{Im}(\delta^{i+j-1}).$$

Definição 2.37. A aplicação $\smile: H^i(X; R) \times H^j(X; R) \rightarrow H^{i+j}(X; R)$ é chamada de **produto cup**. Definimos o produto cup em $H^*(X; R)$ estendendo por bilinearidade.

Definição 2.38. Sejam $j \geq i$, $\varphi \in S^i(X; R)$ uma i -cadeia e $\sigma \in S_j(X; R)$ um j -simplexo. Definimos o **produto cap entre φ e σ** como a $(j-i)$ -cadeia singular $\varphi \frown \sigma \in S_{j-i}(X; R)$ dada por

$$\varphi \frown \sigma := \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i\}}) \sigma \circ \iota_{\{i, \dots, j\}} = \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_i, \dots, e_j]}.$$

Assim, estendendo por linearidade nas cadeias, obtemos uma aplicação

$$\frown: S^i(X; R) \times S_j(X; R) \rightarrow S_{j-i}(X; R).$$

Lema 2.39. Se $j > i$, $\varphi \in S^i(X; R)$ e $c \in S_j(X; R)$, então

$$\partial_{j-i}(\varphi \frown c) = (-1)^i((\varphi \frown \partial_j(c)) - (\delta^i(\varphi) \frown c)).$$

Demonstração. Pela linearidade, basta provar a igualdade para j -simplexos singulares $\sigma \in S_j(X; R)$.

Vamos calcular $\partial_{j-i}(\varphi \frown \sigma)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\partial_{j-i}(\varphi \frown \sigma) &= \partial_{j-i}(\varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sigma \circ \iota_{\{i,\dots,j\}}) \\
&= \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\partial_{j-i}(\sigma \circ \iota_{\{i,\dots,j\}}) \\
&= \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sum_{k=0}^{j-i}(-1)^k\sigma \circ \iota_{\{i,\dots,j\}} \circ \phi_{j-i}^k \\
&= \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sum_{k=0}^{j-i}(-1)^k\sigma \circ \iota_{\{i,\dots,i+k-1,i+k+1,\dots,j\}} \\
&= \varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sum_{k=i}^j(-1)^{k-i}\sigma \circ \iota_{\{i,\dots,k-1,k+1,\dots,j\}} \\
&= \sum_{k=i}^j(-1)^{k-i}\varphi(\sigma|_{[e_0,\dots,e_i]})\sigma|_{[e_i,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_j]} \\
&= \frac{1}{(-1)^i}\sum_{k=i}^j(-1)^k\varphi(\sigma|_{[e_0,\dots,e_i]})\sigma|_{[e_i,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_j]}.
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\varphi \frown \partial_j(\sigma)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\varphi \frown \partial_j(\sigma) &= \varphi \frown \left(\sum_{k=0}^j(-1)^k\sigma \circ \phi_j^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^j(-1)^k\varphi \frown (\sigma \circ \phi_j^k) \\
&= \sum_{k=0}^j(-1)^k\varphi(\sigma \circ \phi_j^k \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sigma \circ \phi_j^k \circ \iota_{\{i,\dots,j-1\}},
\end{aligned}$$

que podemos separar em duas somas e escrever

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^i(-1)^k\varphi(\sigma \circ \phi_j^k \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sigma \circ \phi_j^k \circ \iota_{\{i,\dots,j-1\}} + \\
&+ \sum_{k=i+1}^j(-1)^k\varphi(\sigma \circ \phi_j^k \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sigma \circ \phi_j^k \circ \iota_{\{i,\dots,j-1\}},
\end{aligned}$$

que é igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^i(-1)^k\varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,k-1,k+1,\dots,i+1\}})\sigma \circ \iota_{\{i+1,\dots,j\}} + \\
&+ \sum_{k=i+1}^j(-1)^k\varphi(\sigma \circ \iota_{\{0,\dots,i\}})\sigma \circ \iota_{\{i,\dots,k-1,k+1,\dots,j\}},
\end{aligned}$$

que por sua vez, é igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^i(-1)^k\varphi(\sigma|_{[e_0,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_{i+1}]})\sigma|_{[e_{i+1},\dots,e_j]} + \\
&+ \sum_{k=i+1}^j(-1)^k\varphi(\sigma|_{[e_0,\dots,e_i]})\sigma|_{[e_i,\dots,e_{k-1},e_{k+1},\dots,e_j]}.
\end{aligned}$$

Por fim, calculemos $\delta^i(\varphi) \frown \sigma$. Temos que

$$\begin{aligned}
\delta^i(\varphi) \frown \sigma &= \delta^i(\varphi)(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}}) \sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, j\}} \\
&= \varphi(\partial_{i+1}(\sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}})) \sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, j\}} \\
&= \varphi \left(\sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \sigma \circ \iota_{\{0, \dots, i+1\}} \circ \phi_{i+1}^k \right) \sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, j\}} \\
&= \varphi \left(\sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \sigma \circ \iota_{\{0, \dots, k-1, k+1, \dots, i+1\}} \right) \sigma \circ \iota_{\{i+1, \dots, j\}} \\
&= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{i+1}]}) \sigma|_{[e_{i+1}, \dots, e_j]},
\end{aligned}$$

que podemos separar o último termo e escrever como

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{i+1}]}) \sigma|_{[e_{i+1}, \dots, e_j]} + (-1)^{i+1} \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_{i+1}, \dots, e_j]}.$$

Assim, $(\varphi \frown \partial_j(\sigma)) - (\delta^i(\varphi) \frown \sigma)$ é igual a

$$\sum_{k=i+1}^j (-1)^k \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_i, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_j]} - (-1)^{i+1} \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_{i+1}, \dots, e_j]},$$

que podemos escrever como

$$\sum_{k=i+1}^j (-1)^k \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_i, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_j]} + (-1)^i \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_{i+1}, \dots, e_j]},$$

que é igual a

$$\sum_{k=i}^j (-1)^k \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \sigma|_{[e_i, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_j]},$$

que é justamente $(-1)^i \partial_{j-i}(\varphi \frown \sigma)$. Portanto, multiplicando os dois lados por $(-1)^i$, vem

$$\partial_{j-i}(\varphi \frown \sigma) = (-1)^i ((\varphi \frown \partial_j(\sigma)) - (\delta^i(\varphi) \frown \sigma)).$$

□

Observação 2.40. Com o lema acima, temos uma aplicação

$$\frown: H^i(X; R) \times H_j(X; R) \rightarrow H_{j-i}(X; R)$$

dada por

$$(\varphi + \text{Im}(\delta^{i-1})) \frown (c + \text{Im}(\partial_{j+1})) := \varphi \frown c + \text{Im}(\partial_{j-i+1}).$$

De fato, temos $\varphi \frown \sigma \in \text{Ker}(\partial_{j-i})$, pois como $\varphi \in \text{Ker}(\delta^i)$ e $c \in \text{Ker}(\partial_j)$, então

$$\begin{aligned}
\partial_{j-i}(\varphi \frown c) &= (-1)^i (\varphi \frown \partial_j(c)) - (-1)^i (\delta^i(\varphi) \frown c) \\
&= (-1)^i (\varphi \frown 0) - (-1)^i (0 \frown c) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E se $\varphi + \text{Im}(\delta^{i-1}) = \varphi' + \text{Im}(\delta^{i-1})$, $c + \text{Im}(\partial_{j-1}) = c' + \text{Im}(\partial_{j+1})$, então $\varphi - \varphi' \in \text{Im}(\delta^{i-1})$ e $c - c' \in \text{Im}(\partial_{j-1})$, assim, existem $\varphi'' \in S^{i-1}(X; R)$ e $c'' \in S_{j+1}(X; R)$ tais que

$$\varphi - \varphi' = \delta^{i-1}(\varphi''), \quad c - c' = \partial_{j+1}(c''),$$

assim,

$$\begin{aligned} \varphi \frown c - \varphi' \frown c' &= (\varphi' + \delta^{i-1}(\varphi'')) \frown (c' + \partial_{j+1}(c'')) - \varphi' \frown c' \\ &= \varphi' \frown \partial_{j+1}(c'') + \delta^{i-1}(\varphi'') \frown c' + \delta^{i-1}(\varphi'') \frown \partial_{j+1}(c'') \\ &= \partial_{j-i+1}((-1)^i(\varphi' \frown c'' - \varphi'' \frown c' - \varphi'' \frown \partial_{j+1}(c''))) \in \text{Im}(\partial_{j-i+1}). \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi \frown c + \text{Im}(\partial_{j-i+1}) = \varphi' \frown c' + \text{Im}(\partial_{j-i+1})$. Portanto, esta aplicação está bem definida.

Definição 2.41. A aplicação $\frown: H^i(X; R) \times H_j(X; R) \rightarrow H_{j-i}(X; R)$ é chamada de **produto cap**. Definimos o produto cap em $H^*(X; R)$ e $H_*(X; R)$ estendendo por bilinearidade.

Proposição 2.42. Seja $\varphi \in S^i(X; R)$ fixada. Dados $\psi \in S^{j-i}(X; R)$ e $c \in S_j(X; R)$, a cadeia $\varphi \frown c$ é a única $(j-i)$ -cadeia singular tal que

$$\psi(\varphi \frown c) = (\varphi \smile \psi)(c).$$

Demonstração. Vamos provar para $(j-i)$ -simplexos singulares σ . Temos que

$$\begin{aligned} (\varphi \smile \psi)(\sigma) &= \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]})\psi(\sigma|_{[e_i, \dots, e_j]}) \\ &= \psi(\varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]})\sigma|_{[e_i, \dots, e_j]}) \\ &= \psi(\varphi \frown \sigma). \end{aligned}$$

Agora dada uma cadeia

$$c = \sum_j \alpha_j \sigma_j,$$

temos

$$\begin{aligned} (\varphi \smile \psi)(c) &= (\varphi \smile \psi) \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right) \\ &= \sum_j \alpha_j (\varphi \smile \psi)(\sigma_j) \\ &= \sum_j \alpha_j \psi(\varphi \frown \sigma_j) \\ &= \psi \left(\sum_j \alpha_j \varphi \frown \sigma_j \right) \\ &= \psi \left(\varphi \frown \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right) \right) \\ &= \psi(\varphi \frown c). \end{aligned}$$

Assim, fica provada a igualdade e que o produto cap é o único que satisfaz tal propriedade. \square

Proposição 2.43. Valem as seguintes propriedades operatórias:

1. $(\varphi \smile \psi) \smile \xi = \varphi \smile (\psi \smile \xi)$, para toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$, $\psi \in H^m(X; R)$ e $\xi \in H^k(X; R)$.
2. $\varphi \smile (\psi + \psi') = \varphi \smile \psi + \varphi \smile \psi'$, para toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$, $\psi, \psi' \in H^m(X; R)$.
3. $\varphi \smile (\alpha\psi) = \alpha(\varphi \smile \psi)$, para todo $\alpha \in R$ e toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$ e $\psi \in H^m(X; R)$.
4. $(\varphi + \varphi') \smile \psi = \varphi \smile \psi + \varphi' \smile \psi$, para toda cocadeia $\varphi, \varphi' \in H^n(X; R)$ e $\psi \in H^m(X; R)$.
5. $(\alpha\varphi) \smile \psi = \alpha(\varphi \smile \psi)$, para todo $\alpha \in R$ e toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$ e $\psi \in H^m(X; R)$.
6. Seja $1 \in H^0(X; R)$ a cocadeia constante igual a $1 \in R$, então para toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$, vale

$$1 \smile \varphi = \varphi = \varphi \smile 1.$$

7. $(\varphi \smile \psi) \frown \sigma = \psi \frown (\varphi \frown \sigma)$, para toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$, $\psi \in H^m(X; R)$ e simplexo $\sigma \in H_k(X; R)$.
8. $(\varphi + \varphi') \frown \sigma = \varphi \frown \sigma + \varphi' \frown \sigma$, para toda cocadeia $\varphi, \varphi' \in H^n(X; R)$ e simplexo $\sigma \in H_m(X; R)$.
9. $(\alpha\varphi) \frown \sigma = \alpha(\varphi \frown \sigma)$, para toda cocadeia $\varphi \in H^n(X; R)$ e simplexo $\sigma \in H_m(X; R)$.
10. $1 \frown \sigma = \sigma$, para todo simplexo $\sigma \in H_n(X; R)$.

Demonstração. Pela definição linear na cadeia, basta provar para simplexos singulares.

1. Dado um $(n + m + k)$ -simplexo singular σ , temos

$$\begin{aligned} [(\varphi \smile \psi) \smile \xi](\sigma) &= (\varphi \smile \psi)(\sigma|_{[e_1, \dots, e_{n+m}]}) \xi(\sigma|_{[e_{n+m+1}, \dots, e_{n+m+k}]}) \\ &= [\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) \psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]})] \xi(\sigma|_{[e_{n+m+1}, \dots, e_{n+m+k}]}) \\ &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) [\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \xi(\sigma|_{[e_{n+m+1}, \dots, e_{n+m+k}]})] \\ &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) (\psi \smile \xi)(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m+k}]}) \\ &= [\varphi \smile (\psi \smile \xi)](\sigma). \end{aligned}$$

2. Dado um $(n + m)$ -simplexo singular σ , temos

$$\begin{aligned} [\varphi \smile (\psi + \psi')](\sigma) &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) [(\psi + \psi')(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]})] \\ &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) (\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]} + \psi'(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]})) \\ &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) \psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) + \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) \psi'(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\ &= (\varphi \smile \psi)(\sigma) + (\varphi \smile \psi')(\sigma) \\ &= (\varphi \smile \psi + \varphi \smile \psi')(\sigma). \end{aligned}$$

3. Dado um $(n + m)$ -simplexo singular σ , temos

$$\begin{aligned}
 [\varphi \smile (\alpha\psi)](\sigma) &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})(\alpha\psi)(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\alpha\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= \alpha\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= \alpha(\varphi \smile \psi)(\sigma) \\
 &= [\alpha(\varphi \smile \psi)](\sigma).
 \end{aligned}$$

4. Dado um $(n + m)$ -simplexo singular σ , temos

$$\begin{aligned}
 [(\varphi + \varphi') \smile \psi](\sigma) &= [(\varphi + \varphi')(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})]\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= (\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) + \varphi'(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}))\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) + \varphi'(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= (\varphi \smile \psi)(\sigma) + (\varphi' \smile \psi)(\sigma) \\
 &= (\varphi \smile \psi + \varphi' \smile \psi)(\sigma).
 \end{aligned}$$

5. Dado um $(n + m)$ -simplexo singular σ , temos

$$\begin{aligned}
 [(\alpha\varphi) \smile \psi](\sigma) &= (\alpha\varphi)(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= \alpha\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\psi(\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]}) \\
 &= \alpha(\varphi \smile \psi)(\sigma) \\
 &= [\alpha(\varphi \smile \psi)](\sigma).
 \end{aligned}$$

6. Dado um n -simplexo singular σ , temos

$$(1 \smile \varphi)(\sigma) = 1(\sigma|_{[0]})\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) = 1 \cdot \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma)$$

e

$$(\varphi \smile 1)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})1(\sigma|_{[0]}) = \varphi(\sigma) \cdot 1 = \varphi(\sigma).$$

7. Temos

$$\begin{aligned}
 \varphi \frown (\psi \frown \sigma) &= \varphi \frown (\psi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_m]})\sigma|_{[e_{m+1}, \dots, e_k]}) \\
 &= \psi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_m]})\varphi \frown \sigma|_{[e_{m+1}, \dots, e_k]} \\
 &= \psi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_m]})\varphi((\sigma|_{[e_{m+1}, \dots, e_k]})|_{[e_1, \dots, e_n]})(\sigma|_{[e_{m+1}, \dots, e_k]})|_{[e_{n+1}, \dots, e_{n+m}]} \\
 &= \psi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_m]})\varphi(\sigma|_{[e_{m+1}, \dots, e_{m+n}]})\sigma|_{[e_{m+n+1}, \dots, e_k]} \\
 &= (\psi \smile \varphi)(\sigma|_{[e_1, \dots, e_{n+m}]})\sigma|_{[e_{m+n+1}, \dots, e_k]} \\
 &= (\psi \smile \varphi) \frown \sigma.
 \end{aligned}$$

8. Temos

$$\begin{aligned}
 (\varphi + \varphi') \frown \sigma &= (\varphi + \varphi')(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_k]} \\
 &= (\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}) + \varphi'(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]}))\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_k]} \\
 &= \varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_k]} + \varphi'(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_k]} \\
 &= \varphi \frown \sigma + \varphi' \frown \sigma.
 \end{aligned}$$

9. Temos

$$\begin{aligned} (\alpha\varphi) \frown \sigma &= (\alpha\varphi)(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_m]} \\ &= \alpha\varphi(\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]})\sigma|_{[e_{n+1}, \dots, e_m]} \\ &= \alpha(\varphi \frown \sigma). \end{aligned}$$

10. Temos

$$\begin{aligned} 1 \frown \sigma &= 1(\sigma|_{[0]})\sigma|_{[e_1, \dots, e_n]} \\ &= 1 \cdot \sigma \\ &= \sigma. \end{aligned}$$

□

Observação 2.44. Como a definição dos produtos cup e cap em $H^*(X; R)$ e em $H_*(X; R)$ são feitas por extensão bilinear, então tais propriedades continuam verdadeiras.

Com as propriedades provadas acima, vemos que $H^*(X; R)$ se torna um anel com unidade. A comutatividade não se verifica, mas vale a igualdade

$$\varphi \smile \psi = (-1)^{nm} \psi \smile \varphi, \forall \varphi \in H^n(X; R), \psi \in H^m(X; R),$$

e uma prova pode ser vista em (HATCHER, 2002, p.215, Theorem 3.14). Também vemos que o produto cap em $H_*(X; R)$ satisfaz quase todas as propriedades de um $H^*(X; R)$ -módulo, exceto pela associatividade, que na verdade vale

$$(\varphi \smile \psi) \frown \sigma = \psi \frown (\varphi \frown \sigma).$$

2.5 Pushforward e Pullback

É natural pensar em como obter funções entre os grupos de homologia ou de cohomologia a partir de uma função entre os espaços topológicos. Nesta seção apresentamos duas maneiras, uma em homologia e uma em cohomologia.

Observação 2.45. Dada uma função contínua (para o caso da homologia de Borel-Moore, contínua e própria) $f : X \rightarrow Y$, então para todo i -simplexo singular $\sigma : \Delta_i \rightarrow X$ de X , temos $f \circ \sigma : \Delta_i \rightarrow Y$ é um i -simplexo singular de Y , assim, podemos definir o homomorfismo $f_i : S_i(X; R) \rightarrow S_i(Y; R)$ dado por

$$f_i \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right) := \sum_j \alpha_j f \circ \sigma_j.$$

Para a homologia de Borel-Moore, temos a condição de finitude valendo para

$$\sum_j \alpha_j f \circ \sigma_j,$$

pois dado um compacto K de Y , por f ser própria temos que $f^{-1}(K)$ é um compacto de X , logo, apenas finitos coeficientes não nulos $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$ são tais que $f^{-1}(K) \cap \text{Im}(\sigma_{j_m}) \neq \emptyset$, $1 \leq m \leq k$, assim, para estes índices temos $K \cap \text{Im}(f \circ \sigma_{j_m}) \neq \emptyset$, pois caso algum outro índice j seja tal que exista $y \in K \cap \text{Im}(f \circ \sigma_j)$, então $y = f(\sigma_j(x))$, para algum $x \in \Delta_i$, como $f(\sigma_j(x)) = y \in K$, então $\sigma_j(x) \in f^{-1}(K)$, assim, $f^{-1}(K) \cap \text{Im}(\sigma_j) \neq \emptyset$, contradição.

Note que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_i(X; R) & \xrightarrow{f_i} & S_i(Y; R) \\ \downarrow \partial_i & & \downarrow \bar{\partial}_i \\ S_{i-1}(X; R) & \xrightarrow{f_{i-1}} & S_{i-1}(Y; R) \end{array}$$

é comutativo. De fato, basta provarmos para i -simplexos singulares σ , pois segue da linearidade que o diagrama é comutativo. Temos que

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_i \circ f_i)(\sigma) &= \bar{\partial}_i(f_i(\sigma)) \\ &= \bar{\partial}_i(f \circ \sigma) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j (f \circ \sigma)^{(j)} \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j (f \circ \sigma) \circ \phi_i^j \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j f \circ (\sigma \circ \phi_i^j) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j f \circ \sigma^{(j)} \\ &= f_{i-1} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \sigma^{(j)} \right) \\ &= f_{i-1}(\partial_i(\sigma)) \\ &= (f_{i-1} \circ \partial_i)(\sigma) \end{aligned}$$

Assim, induzimos um homomorfismo $f_i : H_i(X; R) \rightarrow H_i(Y; R)$ dada por

$$f_i(c + \text{Im}(\partial_{i+1})) := f_i(c) + \text{Im}(\bar{\partial}_{i+1}).$$

Note que para todo $c \in \text{Ker}(\partial_i : S_i(X; R) \rightarrow S_{i-1}(X; R))$, temos que $f_i(c)$ está em $\text{Ker}(\bar{\partial}_i : S_i(Y; R) \rightarrow S_{i-1}(Y; R))$, pois

$$\bar{\partial}_i(f_i(c)) = f_{i-1}(\partial_i(c)) = f_{i-1}(0) = 0.$$

Além disso, independe da representação, pois se $c + \text{Im}(\partial_{i+1}) = c' + \text{Im}(\partial_{i+1})$, então $c - c' \in \text{Im}(\partial_{i+1})$, logo, $c - c' = \partial_{i+1}(c'')$, para algum $c'' \in S_{i+1}(X; R)$, assim,

$$\begin{aligned} f_i(c) - f_i(c') &= f_i(c - c') \\ &= f_i(\partial_{i+1}(c'')) \\ &= \bar{\partial}_{i+1}(f_{i+1}(c'')) \in \bar{\partial}_{i+1}(S_{i+1}(Y; R)). \end{aligned}$$

Então $f_i(c) + \text{Im}(\bar{\partial}_{i+1}) = f_i(c') + \text{Im}(\bar{\partial}_{i+1})$. Portanto $f_i : H_i(X; R) \rightarrow H_i(Y; R)$ está bem definida.

Definição 2.46. A aplicação $f_* : H_*(X; R) \rightarrow H_*(Y; R)$ é chamada de **pushforward de f** .

Observação 2.47. O pushforward é um funtor covariante, isto é, $(g \circ f)_i = g_i \circ f_i$, pois

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)_i(c + \text{Im}(\partial)) &= (g \circ f)_i(c) + \text{Im}(\partial) \\
 &= (g \circ f)_i\left(\sum_j \alpha_j \sigma_j\right) + \text{Im}(\partial) \\
 &= \sum_j \alpha_j (g \circ f) \circ \sigma_j + \text{Im}(\partial) \\
 &= \sum_j \alpha_j g \circ (f \circ \sigma_j) + \text{Im}(\partial) \\
 &= g_i\left(\sum_j \alpha_j f \circ \sigma_j\right) + \text{Im}(\partial) \\
 &= g_i\left(f_i\left(\sum_j \alpha_j \sigma_j\right)\right) + \text{Im}(\partial) \\
 &= g_i(f_i(c)) + \text{Im}(\partial) \\
 &= g_i(f_i(c) + \text{Im}(\partial)) \\
 &= g_i(f_i(c + \text{Im}(\partial))) \\
 &= (g_i \circ f_i)(c + \text{Im}(\partial)).
 \end{aligned}$$

Observação 2.48. Dada uma função contínua $f : X \rightarrow Y$, podemos definir um homomorfismo $f^i : S^i(Y; R) \rightarrow S^i(X; R)$ que a cada $\varphi \in S^i(Y; R)$ associa o homomorfismo $f^i(\varphi) \in S^i(X; R)$ dado por $\varphi \circ f_i$. Notemos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^i(Y; R) & \xrightarrow{f^i} & S^i(X; R) \\
 \downarrow \overline{\delta^i} & & \downarrow \delta^i \\
 S^{i+1}(Y; R) & \xrightarrow{f^{i+1}} & S^{i+1}(X; R)
 \end{array}$$

é comutativo, pois

$$\begin{aligned}
 (\delta^i \circ f^i)(\varphi) &= \delta^i(f^i(\varphi)) \\
 &= \delta^i(\varphi \circ f_i) \\
 &= (\varphi \circ f_i) \circ \partial_{i+1} \\
 &= \varphi \circ (f_i \circ \partial_{i+1}) \\
 &= \varphi \circ (\overline{\partial_{i+1}} \circ f_{i+1}) \\
 &= (\varphi \circ \overline{\partial_{i+1}}) \circ f_{i+1} \\
 &= f^{i+1}(\varphi \circ \overline{\partial_{i+1}}) \\
 &= f^{i+1}(\overline{\delta^i}(\varphi)) \\
 &= (f^{i+1} \circ \overline{\delta^i})(\varphi)
 \end{aligned}$$

Assim, induzimos um homomorfismo $f^i : H^i(Y; R) \rightarrow H^i(X; R)$ dado por

$$f^i(\varphi + \text{Im}(\overline{\delta^{i-1}})) = f^i(\varphi) + \text{Im}(\delta^{i-1}).$$

Vamos provar que está bem definida. Temos que $f^i(\varphi) \in \text{Ker}(\delta^i)$, pois como $\varphi \in \text{Ker}(\overline{\delta^i})$, então

$$\delta^i(f^i(\varphi)) = f^{i+1}(\overline{\delta^i}(\varphi)) = f^{i+1}(0) = 0,$$

e independe da representação, pois se $\varphi + \text{Im}(\overline{\delta^{i-1}}) = \varphi' + \text{Im}(\overline{\delta^{i-1}})$, então $\varphi - \varphi' \in \text{Im}(\overline{\delta^{i-1}})$, logo, existe $\varphi'' \in S^{i-1}(Y; R)$ tal que

$$\varphi - \varphi' = \overline{\delta^{i-1}}(\varphi'').$$

Assim,

$$\begin{aligned} f^i(\varphi) - f^i(\varphi') &= f^i(\varphi - \varphi') \\ &= f^i(\overline{\delta^{i-1}}(\varphi'')) \\ &= \delta^{i-1}(f^{i-1}(\varphi'')) \in \delta^{i-1}(S^{i-1}(X; R)), \end{aligned}$$

ou seja, $f^i(\varphi) + \text{Im}(\delta^{i-1}) = f^i(\varphi') + \text{Im}(\delta^{i-1})$.

Definição 2.49. A aplicação $f^* : H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$ é chamada de **pullback de f** .

Observação 2.50. O pullback é um funtor contravariante, isto é, $(f \circ g)^i = g^i \circ f^i$. De fato,

$$\begin{aligned} (f \circ g)^i(\varphi + \text{Im}(\delta)) &= (f \circ g)^i(\varphi) + \text{Im}(\delta) \\ &= \varphi \circ (f \circ g)_i + \text{Im}(\delta) \\ &= \varphi \circ (f_i \circ g_i) + \text{Im}(\delta) \\ &= (\varphi \circ f_i) \circ g_i + \text{Im}(\delta) \\ &= f^i(\varphi) \circ g_i + \text{Im}(\delta) \\ &= g^i(f^i(\varphi)) + \text{Im}(\delta) \\ &= g^i(f^i(\varphi) + \text{Im}(\delta)) \\ &= g^i(f^i(\varphi + \text{Im}(\delta))) \\ &= (g^i \circ f^i)(\varphi + \text{Im}(\delta)). \end{aligned}$$

Portanto, $(f \circ g)^i = g^i \circ f^i$.

Observação 2.51. Como a definição do produto cup, produto cap, pushforward e pullback são apenas nos representantes, podemos omitir a notação de classes de equivalência no quociente.

Proposição 2.52 (Fórmula de Projeção). Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, $\varphi \in H^i(Y; R)$ e $c \in H_j(X; R)$. Então

$$f_{j-i}(f^i(\varphi) \frown c) = \varphi \frown f_j(c).$$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar para j -simplexos singulares σ . Temos que

$$\begin{aligned} f_{j-i}(f^i(\varphi) \frown \sigma) &= f_{j-i}((\varphi \circ f_i) \frown \sigma) \\ &= f_{j-i}((\varphi \circ f_i)(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \cdot \sigma|_{[e_i, \dots, e_j]}) \\ &= (\varphi \circ f_i)(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]}) \cdot f_{j-i}(\sigma|_{[e_i, \dots, e_j]}) \\ &= \varphi(f_i(\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]})) \cdot f \circ (\sigma|_{[e_i, \dots, e_j]}) \\ &= \varphi(f \circ (\sigma|_{[e_0, \dots, e_i]})) \cdot (f \circ \sigma)|_{[e_i, \dots, e_j]} \\ &= \varphi((f \circ \sigma)|_{[e_0, \dots, e_i]}) \cdot (f \circ \sigma)|_{[e_i, \dots, e_j]} \\ &= \varphi \frown (f \circ \sigma) \\ &= \varphi \frown f_j(\sigma). \end{aligned}$$

Agora se

$$c = \sum_k \alpha_k \sigma_k$$

é uma j -cadeia singular, então

$$\begin{aligned} f_{j-i}(f^i(\varphi) \frown c) &= f_{j-i}\left(f^i(\varphi) \frown \left(\sum_k \alpha_k \sigma_k\right)\right) \\ &= f_{j-i}\left(\sum_k \alpha_k \cdot f^i(\varphi) \frown \sigma_k\right) \\ &= \sum_k \alpha_k \cdot f_{j-i}(f^i(\varphi) \frown \sigma_k) \\ &= \sum_k \alpha_k \cdot \varphi \frown f_j(\sigma_k) \\ &= \varphi \frown \left(\sum_k \alpha_k f_j(\sigma_k)\right) \\ &= \varphi \frown \left(f_j\left(\sum_k \alpha_k \sigma_k\right)\right) \\ &= \varphi \frown f_j(c). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{j-i}(f^i(\varphi) \frown c) = \varphi \frown f_j(c).$$

□

2.6 A Dualidade de Poincaré

A partir de agora simplificamos as notações $H_*(X; R)$ e $H^*(X; R)$ omitindo o anel R , pois tomamos $R = \mathbb{Z}$. Também consideramos apenas os grupos de homologia de Borel-Moore e de cohomologia singular. A propriedade principal da homologia de Borel-Moore é o fato de sempre existir uma classe fundamental, independente da variedade ser compacta ou não. Assim, pode-se obter um mapa que a cada cocadeia associa o seu produto cap com a classe fundamental, este mapa é o chamado Dualidade de Poincaré. A principal referência para esta seção é (ZHANG,).

Definição 2.53. Sejam M uma variedade suave de dimensão m e R um anel. Uma **classe fundamental de M com coeficientes em R** é um elemento de $H_m(M; R)$ cuja imagem em $H_m(M, M \setminus \{x\}; R)$ é um gerador, para todo $x \in M$.

Definição 2.54. Seja M uma variedade suave de dimensão m . Uma **R -orientação local para M em $x \in M$** é uma escolha de gerador para $H_m(M, M \setminus \{x\}; R)$. Definimos

$$\tilde{M} := \{\mu_x \mid x \in M \text{ e } \mu_x \text{ é uma } R\text{-orientação local para } M \text{ em } x\}.$$

Uma **R -orientação** de M é uma função $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ tal que para cada $x \in M$, existe uma carta contendo uma bola aberta B em torno de x tal que todas as R -orientações locais μ_y , para $y \in B$,

são imagens do mesmo gerador $\mu_B \in H_m(M, M \setminus B; R)$ pelo mapa

$$H_m(M, M \setminus B; R) \rightarrow H_m(M, M \setminus \{y\}; R).$$

Neste caso, dizemos que M é **R -orientável**.

Observação 2.55. Em (ZHANG, , p.5, Theorem 2.2) prova-se que existe uma classe fundamental para variedades conexas. Para o nosso interesse, se M é uma variedade conexa de dimensão m , existe uma cadeia em $H_i(M; \mathbb{Z})$ tal que para pontos regulares $x \in M$ (isto é, existe uma carta de uma vizinhança U de x homeomorfa a um aberto de $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$), tem-se

$$H_{2m}(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.56. Seja M uma variedade complexa de dimensão m , R -orientável, com classe fundamental $[M] \in H_{2m}(M; \mathbb{Z})$. Então o mapa

$$D_M^i : H^i(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2m-i}(M; \mathbb{Z})$$

dada por

$$D_M^i(\varphi) := \varphi \frown [M]$$

é um isomorfismo, para todo i . Este mapa é chamado de **dualidade de Poincaré** e denotamos por $Dual_i(c) \in H^{2m-i}(M; \mathbb{Z})$ a imagem de $c \in H_i(M; \mathbb{Z})$ por $(D_M^{2m-i})^{-1}$.

O nosso interesse é apenas usar o mapa $Dual$, a demonstração é técnica e pode-se ver em (ZHANG, , p.6, Theorem 2.5).

Definição 2.57. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função própria. Para cada i , o homomorfismo

$$f_{i, gys} := (D_N^i)^{-1} \circ f_{2m-i} \circ D_M^i : H^i(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(N; \mathbb{Z})$$

é chamado de **homomorfismo de Gysin**.

GRUPO DE CHOW

Neste capítulo apresentamos o grupo de Chow associados aos esquemas. Assim como variedades suaves são colagens de abertos difeomorfos a um aberto euclidiano (que também podem ser trocados por bolas abertas), temos que esquemas são colagens de abertos básicos U homeomorfos a $\text{Spec}(A)$, logo, esquemas são um análogo às variedades suaves. O grupo de Chow também é um análogo ao grupo de homologia singular, pois este grupo é um quociente de um grupo cujos elementos são combinações lineares formais.

No estudo de classes características para variedades singulares, podemos trocar as variedades por esquemas e trabalharmos com o grupo de Chow, uma vez que a definição das classes de Chern-Schwartz-MacPherson se baseia na existência da uma transformação natural $C_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow H_*(X)$ do grupo das funções construtíveis para o grupo de homologia, em (KENNEDY, 1990, Section 4, p. 2834) é provado que existe uma transformação natural $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{A}_*(X)$.

Vamos assumir que esquemas são do tipo finito sobre um corpo, frequentemente \mathbb{C} . O corpo de funções de uma variedade V será denotado por $R(V)$. Quando não houver ambiguidade, diremos simplesmente que X é um esquema para nos referenciarmos ao esquema (X, \mathcal{O}_X) .

A principal referência para este capítulo é (VAINSENER, 1985).

3.1 Ciclos

Começamos o capítulo com esta seção, onde iremos definir os elementos básicos para a construção do grupo de Chow.

Definição 3.1. Seja X um esquema. O **grupo de ciclos de dimensão k** é o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades fechadas e irredutíveis de dimensão k de X e será denotado por $\mathcal{C}_k X$, isto é, um elemento $c \in \mathcal{C}_k X$ é, por definição, escrito unicamente como uma combinação linear

formal sobre \mathbb{Z}

$$c = \sum_V n_V V,$$

onde V percorre um subconjunto da coleção de subvariedades fechadas e irredutíveis de dimensão k de X , e apenas uma quantidade finita dos coeficientes n_V são não nulos, c é chamado de k -**ciclo**.

O **grupo de ciclos** é o grupo graduado

$$\mathcal{C}_* X := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k X.$$

Exemplo 3.2. Se X é uma variedade de dimensão n , então $\mathcal{C}_n X \cong \mathbb{Z}$. De fato, só existe uma subvariedade fechada e irredutível de dimensão n de X , que é X , pois se $Y \subsetneq X$ fosse uma variedade de dimensão n , então existe uma cadeia maximal de comprimento n para Y , e juntando com a inclusão $Y \subsetneq X$, obtemos

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subseteq \cdots \subsetneq Y_n = Y \subsetneq X,$$

mostrando que $\dim(X) \geq n + 1$, uma contradição. Logo, dado $c \in \mathcal{C}_n X$, temos

$$c = \sum_i n_i X = \left(\sum_i n_i \right) X,$$

que é naturalmente identificado com $\sum_i n_i \in \mathbb{Z}$, via o isomorfismo $nX \mapsto n$.

Observação 3.3. Notemos que apenas para $0 \leq k \leq \dim(X)$ temos $\mathcal{C}_k X$ não nulo, pois não existe subvariedades de X com dimensão maior que $\dim(X)$. Ainda mais, como os espaços topológicos de X e de sua variedade reduzida associada X_{red} é o mesmo, então

$$\mathcal{C}_k X = \mathcal{C}_k X_{red}, \quad \forall k.$$

Definição 3.4. Se

$$c = \sum_V n_V V$$

é um ciclo, o seu **suporte** é definido por

$$|c| := \bigcup_{n_V \neq 0} V.$$

Observação 3.5. Notemos que para todo esquema (X, \mathcal{O}_X) , X pode ser escrito unicamente como união de finitas componentes irredutíveis. De fato, como (X, \mathcal{O}_X) é um k -esquema do tipo finito, então X pode ser coberto por finitos abertos afins $\text{Spec}(A_i)$, $i = 1, \dots, m$, onde cada A_i é uma k -álgebra finitamente gerada, e sendo k Noetheriano, segue do Teorema da Base de Hilbert que cada A_i é Noetheriano. Logo, cada $\text{Spec}(A_i)$ satisfaz a condição de cadeia descendente para subconjuntos fechados, pois dada uma cadeia

$$F_{i1} \supseteq F_{i2} \supseteq \cdots \supseteq F_{in} \supseteq \cdots$$

de subconjuntos fechados de $\text{Spec}(A_i)$, temos que cada F_{ij} é da forma $V(\mathfrak{a}_{ij})$, para \mathfrak{a}_{ij} um ideal de A_i . Logo, passando a função I na cadeia, vem

$$I(V(\mathfrak{a}_{i1})) \subseteq I(V(\mathfrak{a}_{i2})) \subseteq \cdots \subseteq I(V(\mathfrak{a}_{in})) \subseteq \cdots,$$

ou seja,

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{i1}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_{i2}} \subseteq \cdots \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_{in}} \subseteq \cdots,$$

e como A_i é Noetheriano, então esta cadeia estaciona, digamos

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{i1}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_{i2}} \subseteq \cdots \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_{in}}.$$

Agora aplicando a função V , como $V(\sqrt{\mathfrak{a}_{ij}}) = V(\mathfrak{a}_{ij}) = F_{ij}$, vem

$$F_{i1} \supseteq F_{i2} \supseteq \cdots \supseteq F_{in}.$$

Agora como $X = \bigcup_{i=1}^m \text{Spec}(A_i)$, então X também satisfaz a condição de cadeia descendente para fechados. De fato, dada uma cadeia descendente

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

de fechados de X , então para cada $j = 1, \dots, m$, obtemos uma cadeia descendente

$$F_1 \cap \text{Spec}(A_j) \supseteq F_2 \cap \text{Spec}(A_j) \supseteq \cdots \supseteq F_n \cap \text{Spec}(A_j) \supseteq \cdots$$

de fechados de $\text{Spec}(A_j)$, e pelo caso anterior, existe $n_j > 0$ tal que

$$F_i \cap \text{Spec}(A_j) = F_{n_j} \cap \text{Spec}(A_j), \forall i \geq n_j.$$

Seja $n = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Afirmamos que $F_i = F_n$, para todo $i \geq n$. De fato, temos que

$$F_i = F_i \cap X = F_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m \text{Spec}(A_j) \right) = \bigcup_{j=1}^m (F_i \cap \text{Spec}(A_j)),$$

e como $i \geq n \geq n_j$, para todo j , temos

$$\begin{aligned} F_i &= \bigcup_{j=1}^m (F_i \cap \text{Spec}(A_j)) \\ &= \bigcup_{j=1}^m (F_{n_j} \cap \text{Spec}(A_j)) \\ &= \bigcup_{j=1}^m (F_n \cap \text{Spec}(A_j)) \\ &= F_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^m \text{Spec}(A_j) \right) \\ &= F_n \cap X \\ &= F_n. \end{aligned}$$

Agora vamos provar, mais geralmente, que todo fechado Y de X pode ser escrito unicamente como união de finitas componentes irredutíveis. De fato, seja S a coleção de todos os fechados de X que não possuem tal decomposição em componentes irredutíveis. Suponha, por absurdo,

que S não seja vazio. Ordenamos S pela inclusão, declarando que $F_i \leq F_j$ se $F_i \supseteq F_j$. Dada uma cadeia

$$F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_n \leq \dots$$

em S , então como provado acima, existe $r > 0$ tal que $F_i = F_r$, para todo $i \geq r$, ou seja, F_r é uma cota superior para S . Segue do Lema de Zorn que S possui um elemento maximal F . Como $F \in S$, em particular F não é irredutível, logo, $F = F_1 \cup F_2$, onde $F_1, F_2 \subset F$ são dois subconjuntos fechados próprios de F . Novamente, como $F \in S$, então F_1 ou F_2 não é irredutível. Se F_i não é irredutível, então $F_i \in S$ (pois caso contrário, seguiria da condição de S que F_i é escrito como união finita de componentes irredutíveis, o que implicaria que $F \notin S$), assim, segue da maximalidade de F que $F_i \leq F$, ou seja, $F_i \supseteq F$, o que implica que $F = F_i$, uma contradição, pois F_i é subconjunto próprio de F .

Portanto, S é vazio, ou seja, todo subconjunto fechado de X pode ser escrito como união finita de subconjuntos irredutíveis.

Agora suponha que $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ e $Y = Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s$ são duas decomposições de Y em componentes irredutíveis. Descartando redundâncias, podemos assumir que $Y'_i \not\subseteq Y'_j$ para $i \neq j$ (pois caso contrário, na escrita de Y , troque $Y'_i \cup Y'_j$ por Y'_j). Então

$$Y'_1 = Y'_1 \cap Y = Y'_1 \cap \left(\bigcup_{i=1}^r Y_i \right) = \bigcup_{i=1}^r (Y'_1 \cap Y_i),$$

e como Y'_1 é irredutível, então $Y'_1 = Y'_1 \cap Y_i$, para algum $i \in \{1, \dots, r\}$. Reindexando, podemos assumir que $i = 1$. Em particular, $Y'_1 \subseteq Y_1$. Similarmente, temos

$$Y_1 = Y_1 \cap Y = Y_1 \cap \left(\bigcup_{j=1}^s Y'_j \right) = \bigcup_{j=1}^s Y_1 \cap Y'_j,$$

e como Y_1 é irredutível, vem $Y_1 = Y_1 \cap Y'_j$, para algum $j \in \{1, \dots, s\}$, logo, $Y_1 \subseteq Y'_j$. Agora como $Y'_1 \subseteq Y_1$, então $Y'_1 \subseteq Y'_j$, e como a escrita é não redundante, então $j = 1$. Logo, $Y_1 = Y'_1$.

Agora, temos que

$$Y_2 \cup \dots \cup Y_r = \text{fecho de } Y \setminus Y_1 \text{ em } Y = Y'_2 \cup \dots \cup Y'_s,$$

pois $Y_2 \cup \dots \cup Y_r$ e $Y'_2 \cup \dots \cup Y'_s$ satisfazem a propriedade de ser o menor fechado de Y que contém $Y \setminus Y_1$. Assim, prosseguindo como anteriormente, por indução, vamos ter $Y_2 = Y'_2$, $Y_3 = Y'_3$ e assim por diante, até $r = s$ e $Y_r = Y'_s$.

Assim, X é escrito unicamente como união de irredutíveis, e tomando os irredutíveis maximais com respeito à inclusão, obtemos as componentes irredutíveis desejadas.

Definição 3.6. Sejam X_1, \dots, X_m as componentes irredutíveis com estrutura reduzida de um esquema X . O **ciclo fundamental de X** é definido por

$$[X] := \sum_{i=1}^m m_i X_i,$$

onde $m_i := l(\mathcal{O}_{X, X_i})$ é o comprimento do anel local de X ao longo de X_i , e é chamado de **multiplicidade geométrica de X ao longo de X_i** .

Observação 3.7. Notemos que m_i está bem definido. De fato, $\xi_i \in U$, para algum aberto afim $U = \text{Spec}(A)$ de X , e A é uma k -álgebra finitamente gerada, em particular, A é um anel Noetheriano. Agora, pondo $\xi_i = \mathfrak{p}$ um ideal primo de A , vem

$$\mathcal{O}_{X, X_i} = \mathcal{O}_{X, \xi_i} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A), \mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}},$$

que é Noetheriano. Para provar que m_i é finito, resta provar que $A_{\mathfrak{p}}$ é artiniano, e para isso, como $A_{\mathfrak{p}}$ é Noetheriano, basta provar que sua dimensão de Krull é 0. Pela caracterização dos ideais primos de $A_{\mathfrak{p}}$, basta provar que a altura de \mathfrak{p} é 0. Notemos antes que $V(\mathfrak{p})$ é fechado maximal de U . De fato, como X_i é fechado maximal de X , então $X_i \cap U$ é fechado maximal de U , mas

$$X_i \cap U = \overline{\{\mathfrak{p}\}} \cap U = \text{fecho de } \{\mathfrak{p}\} \text{ em } \text{Spec}(A) = V(I(\{\mathfrak{p}\})) = V(\mathfrak{p}),$$

logo, $V(\mathfrak{p})$ é fechado maximal de U . Suponha, por absurdo, que exista $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$ um ideal primo. Passando a função V , vem $V(\mathfrak{p}) \subsetneq V(\mathfrak{p}')$, o que contradiz a maximalidade de $V(\mathfrak{p})$. Portanto, $\text{altura}(\mathfrak{p}) = 0$ e, assim, $m_i = l(\mathcal{O}_{X, X_i}) = l(A_{\mathfrak{p}})$ está bem definido.

3.2 Equivalência Racional

Como o grupo de ciclos é muito grande, desejamos fazer um quociente para obtermos um conjunto mais interessante de ser trabalhado, assim como é feito em homologia e cohomologia. Nesta seção definimos por qual subgrupo se quocienta o grupo de ciclos.

Lema 3.8. Sejam A um anel de comprimento finito (vendo A como um A -módulo) e $a, b \in A$ dois elementos que não são divisores de zero. Então

$$l\left(\frac{A}{\langle ab \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right).$$

Demonstração. Considere a sequência

$$0 \longrightarrow \frac{A}{\langle b \rangle} \xrightarrow{f} \frac{A}{\langle ab \rangle} \xrightarrow{g} \frac{A}{\langle a \rangle} \longrightarrow 0,$$

onde $f(x + \langle b \rangle) = ax + \langle ab \rangle$ e $g(x + \langle ab \rangle) = x + \langle a \rangle$. Temos que mostrar que f e g estão bem definidas, são homomorfismos de A -módulos e que esta sequência é exata.

Provemos que f está bem definida. Se $x + \langle b \rangle = y + \langle b \rangle$, então $x - y \in \langle b \rangle$, logo, existe $z \in A$ tal que $x - y = zb$, logo,

$$ax - ay = a(x - y) = a(zb) = z(ab) \in \langle ab \rangle,$$

ou seja, $ax + \langle ab \rangle = ay + \langle ab \rangle$ e, assim, f está bem definida.

Provemos que g está bem definida. Se $x + \langle ab \rangle = y + \langle ab \rangle$, então $x - y \in \langle ab \rangle$, logo, existe $z \in A$ tal que $x - y = z(ab) = (zb)a \in \langle a \rangle$, assim, $x + \langle a \rangle = y + \langle a \rangle$ e, portanto, g está bem definida.

Temos que f e g são homomorfismos de A -módulos, pois para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in A$, valem

$$\begin{aligned} f((x + \langle b \rangle) + (y + \langle b \rangle)) &= f(x + y + \langle b \rangle) \\ &= a(x + y) + \langle ab \rangle \\ &= ax + ay + \langle ab \rangle \\ &= ax + \langle ab \rangle + ay + \langle ab \rangle \\ &= f(x + \langle b \rangle) + f(y + \langle b \rangle), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x + \langle b \rangle)) &= f(\lambda x + \langle b \rangle) \\ &= a\lambda x + \langle ab \rangle \\ &= \lambda(ax + \langle ab \rangle) \\ &= \lambda f(x + \langle b \rangle), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g((x + \langle ab \rangle) + (y + \langle ab \rangle)) &= g(x + y + \langle ab \rangle) \\ &= x + y + \langle a \rangle \\ &= x + \langle a \rangle + y + \langle a \rangle \\ &= g(x + \langle ab \rangle) + g(y + \langle ab \rangle) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\lambda(x + \langle ab \rangle)) &= g(\lambda x + \langle ab \rangle) \\ &= \lambda x + \langle a \rangle \\ &= \lambda(x + \langle a \rangle) \\ &= \lambda g(x + \langle ab \rangle). \end{aligned}$$

Vamos provar que a sequência é exata. Note que f é injetora, pois notando que a não é divisor de zero, obtemos

$$\begin{aligned} f(x + \langle b \rangle) = f(y + \langle b \rangle) &\Rightarrow ax + \langle ab \rangle = ay + \langle ab \rangle \\ &\Rightarrow ax - ay \in \langle ab \rangle \\ &\Rightarrow ax - ay = \lambda ab, \lambda \in A \\ &\Rightarrow a(x - y - \lambda b) = 0 \\ &\Rightarrow x - y - \lambda b = 0 \\ &\Rightarrow x - y = \lambda b \in \langle b \rangle \\ &\Rightarrow x + \langle b \rangle = y + \langle b \rangle. \end{aligned}$$

Agora notemos que g é sobrejetora, pois dado $x + \langle a \rangle \in \frac{A}{\langle a \rangle}$, com $x \in A$, basta tomar a classe $x + \langle ab \rangle \in \frac{A}{\langle ab \rangle}$, daí, $g(x + \langle ab \rangle) = x + \langle a \rangle$.

Por fim, resta provar que $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. Dado $x + \langle ab \rangle \in \text{Ker}(g)$, temos

$$0 = g(x + \langle ab \rangle) = x + \langle a \rangle,$$

assim, $x \in \langle a \rangle$, ou seja, existe $\lambda \in A$ tal que $x = \lambda a$. Desta forma, $\lambda + \langle b \rangle \in \frac{A}{\langle b \rangle}$ é tal que

$$f(\lambda + \langle b \rangle) = a\lambda + \langle ab \rangle = x + \langle ab \rangle,$$

portanto, $x + \langle ab \rangle \in \text{Im}(f)$. Reciprocamente, dado $y + \langle ab \rangle \in \text{Im}(f)$, então existe $x + \langle b \rangle \in \frac{A}{\langle b \rangle}$ tal que

$$y + \langle ab \rangle = f(x + \langle b \rangle) = ax + \langle ab \rangle,$$

assim, $y - ax \in \langle ab \rangle$, logo, existe $\lambda \in A$ tal que $y - ax = \lambda ab$, ou seja, $y = ax + \lambda ab = (x + \lambda b)a \in \langle a \rangle$, então

$$g(y + \langle ab \rangle) = y + \langle a \rangle = (x + \lambda b)a + \langle a \rangle = 0 + \langle a \rangle,$$

portanto, $y + \langle ab \rangle \in \text{Ker}(g)$.

Portanto, sendo a sequência exata, concluímos que

$$l\left(\frac{A}{\langle ab \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right).$$

□

Definição 3.9. Sejam V uma variedade, $W \subseteq V$ uma subvariedade de codimensão 1 e $r \in r(V)$ uma função racional não nula. Definimos a **ordem de r ao longo de W** como

$$\text{ord}_W^V(r) = \text{ord}_W(r) = l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right),$$

onde $A = \mathcal{O}_{V,W}$, $r = \frac{a}{b}$, com $a, b \in A$.

Observação 3.10. O Lema 3.8 garante que o conceito acima está bem definido, ou seja, independe da escolha dos representantes de r . De fato, sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ duas representações para r . Então $ab' = a'b$, logo,

$$l\left(\frac{A}{\langle ab' \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a'b \rangle}\right).$$

Agora, como A é domínio de integridade e a, a', b, b' são não nulos, então pelo Lema 3.8, a igualdade acima se torna

$$l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b' \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a' \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right),$$

ou seja,

$$l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) = l\left(\frac{A}{\langle a' \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b' \rangle}\right).$$

Além disso, valem

$$\text{ord}_W(r \cdot r') = \text{ord}_W(r) + \text{ord}_W(r')$$

e

$$\text{ord}_W(r^{-1}) = -\text{ord}_W(r),$$

pois escrevendo $r = \frac{a}{b}$ e $r' = \frac{a'}{b'}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{ord}_W(r \cdot r') &= \text{ord}_W\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'}\right) \\
 &= \text{ord}_W\left(\frac{aa'}{bb'}\right) \\
 &= l\left(\frac{A}{\langle aa' \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle bb' \rangle}\right) \\
 &= l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle a' \rangle}\right) - \left[l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle b' \rangle}\right)\right] \\
 &= l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle a' \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b' \rangle}\right) \\
 &= l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) + l\left(\frac{A}{\langle a' \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b' \rangle}\right) \\
 &= \text{ord}_W\left(\frac{a}{b}\right) + \text{ord}_W\left(\frac{a'}{b'}\right) \\
 &= \text{ord}_W(r) + \text{ord}_W(r')
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{ord}_W(r^{-1}) &= \text{ord}_W\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right) \\
 &= \text{ord}_W\left(\frac{b}{a}\right) \\
 &= l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) \\
 &= -\left[l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right)\right] \\
 &= -\text{ord}_W\left(\frac{a}{b}\right) \\
 &= -\text{ord}_W(r).
 \end{aligned}$$

Definição 3.11. Seja $r \in R(V)$ uma função racional não nula. O **ciclo de r** é definido por

$$[r] = \sum_W \text{ord}_W(r) \cdot W,$$

onde W percorre em uma coleção de subvariedades de codimensão 1.

Observação 3.12. Vamos mostrar que o conceito acima está bem definido, isto é, que na soma acima, apenas uma quantidade finita de $\text{ord}_W(r)$ são não nulos.

Para provar isso, podemos assumir que $V = \text{Spec}(B)$, pois V pode ser coberto por finitos abertos afins. Assim, $R(V)$ é o corpo de frações de B , e $r = \frac{a}{b}$, com $a, b \in B$, $b \neq 0$. Note que $[r] = [a] - [b]$, pois para cada W , temos

$$\text{ord}_W(r) = l\left(\frac{A}{\langle a \rangle}\right) - l\left(\frac{A}{\langle b \rangle}\right) = \text{ord}_W(a) - \text{ord}_W(b).$$

Desta forma, fazendo o argumento para a e b , podemos assumir que $r \in B$.

Escreva o fechado $V(\langle r \rangle)$ como uma união finita de componentes irredutíveis, digamos, $V(\langle r \rangle) = \bigcup_{i=1}^N W_i$. Assim, $\text{ord}_W(r) = 0$ para todo W que não seja algum W_i . De fato, seja W

diferente de todos os W_i e escreva $W = V(\mathfrak{a})$. Note que $r \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, pois caso contrário, teríamos $\langle r \rangle \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, ou seja,

$$W = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subseteq V(\langle r \rangle) = \bigcup_{i=1}^N W_i,$$

então W é uma das componentes irredutíveis de $V(\langle r \rangle)$, ou seja, W é algum W_i , uma contradição. Desta forma, r é invertível em $B_{\sqrt{\mathfrak{a}}}$, e lembrando que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ é o ponto genérico de W , vem

$$\text{ord}_W(r) = l\left(\frac{\mathcal{O}_{V,W}}{\langle r \rangle}\right) = l\left(\frac{\mathcal{O}_{\text{Spec}(B),\sqrt{\mathfrak{a}}}}{\langle r \rangle}\right) = l\left(\frac{B_{\sqrt{\mathfrak{a}}}}{\langle r \rangle}\right) = l(0) = 0.$$

Portanto, $\text{ord}_W(r)$ é não nulo para finitos W .

Definição 3.13. Seja X um esquema. O **grupo dos k -ciclos racionalmente equivalentes à zero** é o subgrupo $\mathcal{R}_k X \subset \mathcal{C}_k X$ gerado pelos ciclos de funções racionais em subvariedades de X de dimensão $k+1$.

Definição 3.14. O grupo graduado

$$\mathcal{A}_*(X) = \bigoplus \mathcal{A}_k(X) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{C}_k X}{\mathcal{R}_k X}$$

é chamado de **grupo de Chow de X** .

Dois ciclos são ditos **racionalmente equivalentes** se eles representam a mesma classe módulo $\mathcal{R}_* X = \bigoplus \mathcal{R}_k X$.

Exemplo 3.15. Se X é uma variedade de dimensão n , então $\mathcal{R}_n X = 0$, uma vez que não existe subvariedade de X com dimensão $n+1$, assim,

$$\mathcal{A}_n X = \frac{\mathcal{C}_n X}{\mathcal{R}_n X} = \frac{\mathcal{C}_n X}{0} \cong \mathcal{C}_n X \cong \mathbb{Z}.$$

Também como não existe subvariedade de X com dimensão negativa ou com dimensão maior que n , vale

$$\mathcal{A}_i X = \frac{\mathcal{C}_i X}{\mathcal{R}_i X} = \frac{0}{\mathcal{R}_i X} = 0, \quad \forall i < 0 \text{ e } \forall i > n.$$

Observação 3.16. Para variedades $M \subseteq \mathbb{C}^m \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m+1}$, podemos munir $\mathcal{A}_*(X)$ com um produto intersecção $\cap : \mathcal{A}_i(X) \times \mathcal{A}_j(X) \rightarrow \mathcal{A}_{i+j}(X)$ dado por

$$\left(\sum_i n_i V_i \right) \cap \left(\sum_j m_j W_j \right) := \sum_{i,j} n_i m_j V_i \cap W_j.$$

A prova de que este produto está bem definido se baseia no “Moving Lemma”, que afirma que dados dois ciclos α, β , então existe um ciclo α' racionalmente equivalente à α tal que $\alpha' \cap \beta$ está definido. Uma demonstração deste fato pode ser vista em (OORT, 1972, p.94).

Portanto, $\mathcal{A}_*(X)$, munido com este produto, se torna um anel, chamado de **anel de Chow**.

3.3 Imagem Direta

Para morfismos próprios, pode-se levar uma subvariedade fechada em uma subvariedade fechada, assim, podemos definir o pushforward de um morfismo próprio no grupo de ciclos.

Definição 3.17. Um morfismo entre variedades $f : V \rightarrow W$ é dito **dominante** se sua imagem é densa em W .

Proposição 3.18. Seja $(f, f^\#) : (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}) \rightarrow (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)})$ um morfismo e considere $\varphi : B \rightarrow A$ o homomorfismo induzido. Então f é dominante se, e somente se, $\text{Ker}(\varphi)$ está contido no nilradical de B . Em particular, se $\text{Spec}(B)$ é reduzido, então f é dominante se, e somente se, φ é injetora.

Demonstração. Temos $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})) = \overline{f(V(\mathfrak{a}))}$, para todo ideal \mathfrak{a} de A . Em particular, para o ideal nulo,

$$V(\text{Ker}(\varphi)) = V(\varphi^{-1}(\langle 0 \rangle)) = \overline{f(V(\langle 0 \rangle))} = \overline{f(\text{Spec}(A))}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f \text{ é dominante} &\Leftrightarrow \overline{f(\text{Spec}(A))} = \text{Spec}(B) \\ &\Leftrightarrow V(\text{Ker}(\varphi)) = \text{Spec}(B) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\text{Ker}(\varphi)), \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) \subseteq \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(B) \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)} \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) \subseteq \bigcap_{\langle 0 \rangle \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \text{ primo}} \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle}. \end{aligned}$$

Portanto, f é dominante se, e somente se, o núcleo de φ está contido no nilradical de B .

Em particular, se $\text{Spec}(B)$ é reduzido, então f é dominante se, e somente se, $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \sqrt{\langle 0 \rangle} = \langle 0 \rangle$, isto é, $\text{Ker}(\varphi) = \langle 0 \rangle$, ou seja, φ é injetora. □

Observação 3.19. Seja $f : V \rightarrow W$ um morfismo dominante entre variedades irredutíveis. Sejam $v \in V$ e $w \in W$ seus pontos genéricos. Então $w = f(v)$. De fato, pela unicidade do ponto genérico, basta provar que $\{f(v)\}$ é denso em W .

Sejam $y \in W$ e $U \subseteq W$ um aberto, com $y \in U$. Como f é dominante, ou seja, $\overline{f(V)} = W$, então $f(V) \cap U \neq \emptyset$, logo, existe $f(x) \in U$, para algum $x \in V$. Como f é contínua, então $f^{-1}(U)$ é aberto em V , e $x \in f^{-1}(U)$. Sendo v o ponto genérico de V , então $f^{-1}(U) \cap \{v\} \neq \emptyset$, ou seja, $v \in f^{-1}(U)$. Assim, $f(v) \in U$. Portanto, $U \cap \{f(v)\} \neq \emptyset$.

Assim, conseguimos definir um homomorfismo injetor $f^* : R(W) \rightarrow R(V)$ da seguinte maneira: Temos que $w \in W$, logo, existe um aberto afim $\text{Spec}(B)$ tal que $w \in \text{Spec}(B) \subseteq W$. Agora, $f^{-1}(W)$ é um aberto de V . Como v é o ponto genérico de V , então $v \in f^{-1}(W)$, logo,

existe um aberto afim $\text{Spec}(A)$ tal que $v \in \text{Spec}(A) \subseteq f^{-1}(\text{Spec}(B))$. Assim, podemos restringir $f : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$.

Note que $\text{Spec}(B)$ é reduzido, pois fazendo o stalk em qualquer ponto, como o stalk pode ser computado localmente, vem

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(B),y} = \mathcal{O}_{W,y},$$

que é um anel reduzido, pela Proposição 1.53.

Note que f é dominante, pois sua imagem contém o ponto denso $f(v) = w$. Portanto, $\varphi : B \rightarrow A$ é injetora. Tomando stalk no ponto genérico, vem que

$$f_v^\# : \mathcal{O}_{W,w} \rightarrow \mathcal{O}_{V,v}$$

é injetora. Isto é, $R(W)$ pode ser visto como um subcorpo de $R(V)$, logo, $\dim(W) \leq \dim(V)$. Mais do que isso, pelo Teorema da Normalização de Noether, a extensão $k \subset R(V)$ pode ser separada em uma extensão puramente transcendente e uma extensão finita, e no caso $\dim(V) = \dim(W)$, como a dimensão de uma variedade é também o grau de transcendência do seu corpo de funções sobre k , então o grau de transcendência de $R(V)$ e $R(W)$ sobre k são iguais, logo, a extensão $R(W) \subseteq R(V)$ está na parte finita da extensão $k \subseteq R(V)$. Portanto,

$$[R(V) : R(W)] < \infty, \text{ se } \dim(V) = \dim(W).$$

Definição 3.20. Seja $f : V \rightarrow W$ um morfismo dominante entre variedades irredutíveis. Definimos o **grau de f** como sendo

$$\deg(f) = \begin{cases} 0, & \dim(V) > \dim(W) \\ [R(V) : R(W)], & \dim(V) = \dim(W). \end{cases}$$

Observação 3.21. Seja $p : X \rightarrow Y$ um morfismo próprio entre esquemas. Para cada fechado irredutível $V \subseteq X$, então $p(V) \subseteq Y$ é um fechado irredutível, pois p é um aplicação fechada, e se $p(V) = W_1 \cup W_2$, tomando imagem inversa via a restrição $p|_V : V \rightarrow p(V)$, obtemos $V = p^{-1}(W_1 \cup W_2) = p^{-1}(W_1) \cup p^{-1}(W_2)$, logo, $V = p^{-1}(W_i)$, para algum $i \in \{1, 2\}$, assim, pela sobrejetividade de $p|_V$, vem

$$p(V) = p(p^{-1}(W_i)) = W_i,$$

mostrando que W é irredutível.

Tomando $f = p|_V : V \rightarrow p(V)$, definimos

$$p_*V := \deg(f) \cdot p(V) \in \mathcal{C}_*W.$$

Desta forma, podemos estender por linearidade para um homomorfismo $p_* : \mathcal{C}_*X \rightarrow \mathcal{C}_*Y$, pondo

$$p_*\left(\sum_V n_V V\right) := \sum_V n_V p_*V = \sum_V n_V \deg(p|_V) p(V).$$

Definição 3.22. O homomorfismo $p_* : \mathcal{C}_*X \rightarrow \mathcal{C}_*Y$ construído acima é chamado de **imagem direta** ou **pushforward**.

Observação 3.23. p_* preserva dimensão de graduação, isto é, $p_*\mathcal{C}_kX \subseteq \mathcal{C}_kY$. De fato, dado

$$\sum_V n_V V \in \mathcal{C}_kX,$$

temos

$$p_* \left(\sum_V n_V V \right) = \sum_V n_V \deg(p|_V) p(V).$$

Para as parcelas tais que $\dim(V) > \dim(p(V))$ temos $\deg(p|_V) = 0$, por definição, então esta parcela é 0, que está em \mathcal{C}_kY , e se $\dim(V) = \dim(p(V))$, então $\dim(p(V)) = k$ e daí esta parcela está em \mathcal{C}_kY . Portanto, $p_*\mathcal{C}_kX \subseteq \mathcal{C}_kY$.

Observação 3.24. O pushforward é um funtor covariante, isto é, se $p : X \rightarrow Y$ e $q : Y \rightarrow Z$ são morfismos próprios de esquemas, então

$$(q \circ p)_* = q_* \circ p_*.$$

De fato, como $q \circ p : X \rightarrow Z$, então $(q \circ p)_* : \mathcal{C}_*X \rightarrow \mathcal{C}_*Z$, além disso, pela definição linear do pushforward, basta mostrar que $(q \circ p)_* = q_* \circ p_*$ para todo V fechado irredutível de X .

Dado V fechado irredutível de dimensão k de X , então $p(V)$ é um fechado irredutível de dimensão k de Y e, por sua vez, $q(p(V))$ é um fechado irredutível de dimensão k de Z , assim,

$$\begin{aligned} (q \circ p)_* V &= \deg((q \circ p)|_V) q(p(V)) \\ &= [R(V) : R(q(p(V)))] q(p(V)) \\ &= [R(V) : R(p(V))] \cdot [R(p(V)) : R(q(p(V)))] \cdot q(p(V)) \\ &= \deg(p|_V) \cdot \deg(q|_{p(V)}) \cdot q(p(V)) \\ &= \deg(p|_V) q_* p(V) \\ &= q_*(\deg(p|_V) \cdot p(V)) \\ &= q_*(p_*(V)) \\ &= (q_* \circ p_*)(V) \end{aligned}$$

CLASSES CARACTERÍSTICAS

Neste capítulo definimos um dos objetos necessários para definir o polinômio de Thom, que são classes especiais em cohomologia, denominadas de Classes de Chern e, em seguida, algumas classes para o caso de variedades singulares.

4.1 Classes de Chern

Para definir as classes de Chern, primeiramente trabalhamos o conceito de fibrado vetorial. De forma intuitiva, é um objeto que, localmente, se comporta como um cilindro.

Definição 4.1. Um **fibrado vetorial complexo de posto n** é uma tripla (E, B, p) , onde E e B são variedades e $p : E \rightarrow B$ é uma função diferenciável e sobrejetora, tais que para cada $b \in B$, $E_b := p^{-1}(b)$ é um espaço vetorial isomorfo à \mathbb{C}^n e satisfaz a seguinte condição de trivialidade: Para cada $b \in B$, existem uma vizinhança U de b e um difeomorfismo $\phi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow p & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xrightarrow{id} & U \end{array}$$

comuta e, para todo $\tilde{b} \in U$, tem-se que $\phi_U|_{E_{\tilde{b}}} : E_{\tilde{b}} \rightarrow \{\tilde{b}\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo.

O espaço E é chamado de **espaço total**, o espaço B é chamado de **espaço base**, a função p é chamada de **projeção**, o espaço E_b é chamado de **fibra típica** e, neste caso, o grupo $GL_n(\mathbb{C})$ é chamado de **grupo estrutura**.

A **seção de zeros** é a subvariedade $Z \subseteq E$ consistindo de todos os vetores nulos das fibras.

Por abuso de notação, podemos dizer que $p : E \rightarrow B$ é um fibrado vetorial complexo de posto n .

Observação 4.2. Vale que $\phi_U(E_b) \subseteq \{b\} \times \mathbb{C}^n$, pois dado $x \in E_b$, então $p(x) = b$, logo, se $(b', v) = \phi_U(x)$, então

$$b = p(x) = (id \circ p)(x) = (\pi_1 \circ \phi_U)(x) = \pi_1(\phi_U(x)) = \pi_1(b', v) = b'.$$

Portanto, $\phi_U|_{E_b} : E_b \rightarrow \{b\} \times \mathbb{C}^n$ está bem definida.

Observação 4.3. Se U e V são duas vizinhanças de um mesmo ponto de B que trivializam como na definição acima e $U \cap V \neq \emptyset$, se fixado $b \in U \cap V$, então para todo $v \in \mathbb{C}^n$, temos

$$(\phi_V \circ \phi_U^{-1})(b, v) = \phi_V(\phi_U^{-1}(b, v)) = (b, \psi_{UV}(b)(v)),$$

onde $\psi_{UV}(b) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo. Logo, obtemos uma aplicação $\psi_{UV} : U \cap V \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, é daí que vem o grupo estrutura.

Exemplo 4.4. Sejam B uma variedade, $E := B \times \mathbb{C}^n$ e $p : E \rightarrow B$ a projeção na primeira coordenada. Então p é contínua e sobrejetora, para cada $b \in B$, temos $p^{-1}(b) = \{b\} \times \mathbb{C}^n$, que é um espaço vetorial (com as operações $(b, v) + (b, v') = (b, v + v')$ e $\alpha(b, v) = (b, \alpha v)$) e isomorfo a \mathbb{C}^n (com o isomorfismo $(b, v) \mapsto v$).

Além disso, para cada $b \in B$, podemos tomar $U = B$, então $p^{-1}(U) = E$, daí, $\phi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ dada por $\phi_U(b, v) = (b, v)$ é um difeomorfismo, e o diagrama comuta, pois ϕ_U é a identidade e p é π_1 . Por fim, $\phi_U|_{E_b}$ é a aplicação $\phi_U|_{\{b\} \times \mathbb{C}^n} : \{b\} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \{b\} \times \mathbb{C}^n$, que é a identidade, que é isomorfismo.

Portanto, $\pi_1 : B \times \mathbb{C}^n \rightarrow B$ é um fibrado vetorial complexo de posto n .

Definição 4.5. Seja $p : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial. Uma **seção** é uma função diferenciável $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = id_B$.

Definição 4.6. Um **morfismo de fibrados vetoriais entre (E, B, p) e (E', B', p')** é um par de aplicações (f, f') , onde $f : E \rightarrow E'$ e $f' : B \rightarrow B'$ são diferenciáveis e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

comuta e, além disso, para cada $b \in B$, a aplicação $f|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_{f'(b)}$ é uma transformação linear.

Um **isomorfismo de fibrado vetoriais** é um morfismo de espaços vetoriais que possui uma inversa que também é um morfismo de espaços vetoriais.

Observação 4.7. A aplicação $f|_{E_b}$ está bem definida, isto é, $f(E_b) \subseteq E'_{f'(b)}$. De fato, dado $v \in f(E_b)$, então existe $u \in E_b$ tal que $v = f(u)$, assim, como $p(u) = b$, pois $u \in E_b$, e vale

$$p'(v) = p'(f(u)) = f'(p(u)) = f'(b),$$

o que mostra que $v \in p'^{-1}(f'(b)) = E'_{f'(b)}$.

Definição 4.8. Sejam $p : E \rightarrow B$, $p' : E' \rightarrow B$ e $p'' : E'' \rightarrow B$ fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Uma sequência

$$\cdots \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow \cdots$$

de morfismos de fibrados vetoriais é dito **exata** se a sequência induzida

$$\cdots \longrightarrow E'_b \xrightarrow{f|_{E'_b}} E_b \xrightarrow{g|_{E_b}} E''_b \longrightarrow \cdots$$

é exata, para cada $b \in B$, onde a segunda aplicação de f e g é $id : B \rightarrow B$.

Definição 4.9. O **fibrado vetorial complexo de posto n trivial** é qualquer fibrado vetorial complexo de posto n isomorfo à $(B \times \mathbb{C}^n, B, \pi_1)$, e é denotado por ε^n .

Exemplo 4.10. Agora construímos dois fibrados vetoriais a partir de outros já conhecidos. Primeiro, o que é conhecido como o pullback de um fibrado.

Dados um fibrado $p : E \rightarrow B$ de posto n e uma função diferenciável $f : B' \rightarrow B$, defina

$$f^*(E) := \{(b', v) \in B' \times E \mid f(b') = p(v)\} \subseteq B' \times E,$$

com a topologia induzida. Defina $p' : f^*(E) \rightarrow B'$ dada por

$$p'(b', v) = b'.$$

Então $p' : f^*(E) \rightarrow B'$ é um fibrado vetorial de posto n . De fato, como p' é a projeção na primeira coordenada, então é diferenciável. Agora, dado $b' \in B'$, então $f(b') \in B$. Como $p : E \rightarrow B$ é sobrejetora, então existe $v \in E$ tal que $p(v) = f(b')$. Logo, o par (b', v) está em $f^*(E)$, e satisfaz $p'(b', v) = b'$. Portanto, $p' : f^*(E) \rightarrow B'$ é sobrejetora.

Agora, para cada $b' \in B'$, temos

$$\begin{aligned} p'^{-1}(b') &= \{(b', v) \in f^*(E) \mid p'(b', v) = b'\} \\ &= \{(b', v) \in B' \times E \mid f(b') = p(v), p'(b', v) = b'\} \\ &= \{(b', v) \in B' \times E \mid v \in p^{-1}(f(b'))\} \\ &= \{b'\} \times E_{f(b')} \\ &\cong E_{f(b')} \\ &\cong \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Por fim, dado um $b' \in B'$, temos $f(b') \in B$. Como $p : E \rightarrow B$ é um fibrado vetorial, então existem uma vizinhança U de $f(b')$ em B e um difeomorfismo $\phi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tais que

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow p & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xrightarrow{id} & U \end{array}$$

é um diagrama comutativo e $\phi_U|_{E_{\tilde{b}}} : E_{\tilde{b}} \rightarrow \{\tilde{b}\} \times \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo, para todo $\tilde{b} \in U$. Pela continuidade de f , temos que $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de b' em B' , e $\psi_{f^{-1}(U)} : p'^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^n$ dada por

$$\psi_{f^{-1}(U)}(b', v) = (b', \pi_2(\phi_U(v)))$$

é uma trivialização. De fato, vamos provar antes que $\psi_{f^{-1}(U)}$ está bem definida. Note primeiro que $b' \in f^{-1}(U)$, pois $(b', v) \in p'^{-1}(f^{-1}(U))$. Agora vamos verificar que $v \in p^{-1}(U)$ para que possamos aplicar ϕ_U em v , temos que

$$p(v) = f(b') = f(p'(b', v)) \in U,$$

uma vez que $(b', v) \in p'^{-1}(f^{-1}(U))$.

Agora, $\psi_{f^{-1}(U)}$ é diferenciável, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis. Também $\psi_{f^{-1}(U)}$ é bijetora, pois $\psi_{f^{-1}(U)}^{-1} : f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^n \rightarrow p'^{-1}(f^{-1}(U))$ dada por

$$\psi_{f^{-1}(U)}^{-1}(b', v) = (b', \phi_U^{-1}(f(b'), v))$$

é sua inversa. Primeiro notemos que $\psi_{f^{-1}(U)}^{-1}$ está bem definida. Já temos que $\psi_{f^{-1}(U)}^{-1}(b', v) \in p'^{-1}(f^{-1}(U))$, uma vez que $(b', v) \in f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^n$. Agora devemos verificar que $(f(b'), v) \in U \times \mathbb{C}^n$ para que possamos aplicar ϕ_U^{-1} , de fato, como $(b', v) \in f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^n$, então $b' \in f^{-1}(U)$, ou seja, $f(b') \in U$.

Note que $\psi_{f^{-1}(U)}^{-1}$ é diferenciável, pois suas funções coordenadas as são. E vale

$$\begin{aligned} (\psi_{f^{-1}(U)} \circ \psi_{f^{-1}(U)}^{-1})(b', v) &= \psi_{f^{-1}(U)}(\psi_{f^{-1}(U)}^{-1}(b', v)) \\ &= \psi_{f^{-1}(U)}(b', \phi_U^{-1}(f(b'), v)) \\ &= (b', \pi_2(\phi_U(\phi_U^{-1}(f(b'), v)))) \\ &= (b', \pi_2(f(b'), v)) \\ &= (b', v), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\psi_{f^{-1}(U)}^{-1} \circ \psi_{f^{-1}(U)})(b', v) &= \psi_{f^{-1}(U)}^{-1}(\psi_{f^{-1}(U)}(b', v)) \\ &= \psi_{f^{-1}(U)}^{-1}(b', \pi_2(\phi_U(v))) \\ &= (b', \phi_U^{-1}(f(b'), \pi_2(\phi_U(v)))) \\ &= (b', \phi_U^{-1}(p(v), \pi_2(\phi_U(v)))) \\ &= (b', \phi_U^{-1}(\pi_1(\phi_U(v)), \pi_2(\phi_U(v)))) \\ &= (b', \phi_U^{-1}((\pi_1 \circ \phi_U)(v), (\pi_2 \circ \phi_U)(v))) \\ &= (b', \phi_U^{-1}(\phi_U(v))) \\ &= (b', v). \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{f^{-1}(U)}$ é um difeomorfismo.

Por fim, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} p'^{-1}(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\Psi_{f^{-1}(U)}} & f^{-1}(U) \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow p' & & \downarrow \pi_1 \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{id} & f^{-1}(U) \end{array}$$

comuta, pois

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ \Psi_{f^{-1}(U)})(b', v) &= \pi_1(\Psi_{f^{-1}(U)}(b', v)) \\ &= \pi_1(b', \pi_2(\phi_U(v))) \\ &= b' \\ &= p'(b', v) \\ &= (id \circ p')(b', v), \end{aligned}$$

e para todo $\tilde{b}' \in f^{-1}(U)$, tem-se que $\Psi_{f^{-1}(U)}|_{f^*(E)_{\tilde{b}'}} : f^*(E)_{\tilde{b}'} \rightarrow \{\tilde{b}'\} \times \mathbb{C}^n$ é o isomorfismo

$$\Psi_{f^{-1}(U)}(\tilde{b}', v) = (\tilde{b}', \pi_2(\phi_U(v))) = \left(\tilde{b}', \left(\pi_2 \circ \phi_U|_{E_f(\tilde{b}')} \right)(v) \right).$$

Portanto, $p' : f^*(E) \rightarrow B'$ é um fibrado vetorial complexo de posto n .

Definição 4.11. O fibrado $p' : f^*(E) \rightarrow B'$ construído acima é chamado de **pullback do fibrado vetorial** (E, B, p) .

Exemplo 4.12. Agora construímos um fibrado vetorial que serve como um análogo ao produto cartesiano e é conhecido como soma de Whitney.

Sejam $p : E \rightarrow B$ e $q : F \rightarrow B$ dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B , de posto n e m , respectivamente. Defina

$$E \oplus F := \{(u, v) \in E \times F \mid p(u) = q(v)\} \subseteq E \times F,$$

com a topologia induzida, e defina $\pi : E \oplus F \rightarrow B$ dado por

$$\pi(u, v) = p(u) = q(v).$$

Então $\pi : E \oplus F \rightarrow B$ é um fibrado vetorial de posto $n + m$. De fato, como p e q são diferenciáveis, então π é diferenciável, e dado $b \in B$, como $p : E \rightarrow B$ e $q : F \rightarrow B$ são sobrejetoras, então existem $u \in E$ e $v \in F$ tais que $p(u) = b$ e $q(v) = b$, logo, $(u, v) \in E \oplus F$ e vale $\pi(u, v) = p(u) = b$. Portanto, π é diferenciável e sobrejetora.

Agora, dado $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(b) &= \{(u, v) \in E \oplus F \mid \pi(u, v) = b\} \\
&= \{(u, v) \in E \times F \mid p(u) = q(v) = b\} \\
&= \{(u, v) \in E \times F \mid u \in p^{-1}(b), v \in q^{-1}(b)\} \\
&= p^{-1}(b) \times q^{-1}(b) \\
&= E_b \times F_b \\
&\cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \\
&\cong \mathbb{C}^{n+m}.
\end{aligned}$$

Seja $b \in B$. Como $p : E \rightarrow B$ e $q : F \rightarrow B$ são fibrados vetoriais, então existem vizinhanças U e V de b em B e difeomorfismos $\phi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ e $\psi_V : q^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{C}^m$ tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times \mathbb{C}^n & q^{-1}(V) & \xrightarrow{\psi_V} & V \times \mathbb{C}^m \\
\downarrow p & & \downarrow \pi_1 & \downarrow q & & \downarrow \pi_1 \\
U & \xrightarrow{id} & U & V & \xrightarrow{id} & V
\end{array}$$

comutam. Então $U \cap V$ é uma vizinhança de b em B . Defina $\theta_{U \cap V} : \pi^{-1}(U \cap V) \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{C}^{n+m} \cong (U \cap V) \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ dada por

$$\theta_{U \cap V}(u, v) = (\pi_1(\phi_U(u)), \pi_2(\phi_U(u)), \pi_2(\psi_V(v))).$$

Note que $\theta_{U \cap V}$ está bem definida, isto é, $\pi_1(\phi_U(u)) \in U \cap V$, mas isto segue do fato que $\pi_1(\phi_U(u)) \in U$ e da igualdade

$$\pi_1(\phi_U(u)) = p(u) = q(v) = \pi_1(\psi_V(v)) \in V,$$

e esta igualdade será usada durante a prova da trivialidade local. Já temos que $\theta_{U \cap V}$ é diferenciável, pois suas funções coordenadas as são. Defina $\theta_{U \cap V}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \pi^{-1}(U \cap V)$ dada por

$$\theta_{U \cap V}^{-1}(b, u, v) = (\phi_U^{-1}(b, u), \psi_V^{-1}(b, v)),$$

que está bem definida, ou seja, $\theta_{U \cap V}^{-1}(b, u, v) \in \pi^{-1}(U \cap V)$, pois

$$\pi(\theta_{U \cap V}^{-1}(b, u, v)) = \pi(\phi_U^{-1}(b, u), \psi_V^{-1}(b, v)) = p(\phi_U^{-1}(b, u)) \in U$$

e

$$\pi(\theta_{U \cap V}^{-1}(b, u, v)) = \pi(\phi_U^{-1}(b, u), \psi_V^{-1}(b, v)) = q(\psi_V^{-1}(b, v)) \in V,$$

e também já temos que $\theta_{U \cap V}^{-1}$ é diferenciável, pois suas funções coordenadas as são. Vamos verificar que $\theta_{U \cap V}^{-1}$ é a inversa de $\theta_{U \cap V}$. Temos

$$\begin{aligned}
(\theta_{U \cap V} \circ \theta_{U \cap V}^{-1})(b, u, v) &= \theta_{U \cap V}(\theta_{U \cap V}^{-1}(b, u, v)) \\
&= \theta_{U \cap V}(\phi_U^{-1}(b, u), \psi_V^{-1}(b, v)) \\
&= (\pi_1(\phi_U(\phi_U^{-1}(b, u))), \pi_2(\phi_U(\phi_U^{-1}(b, u))), \pi_2(\psi_V(\psi_V^{-1}(b, v)))) \\
&= (\pi_1(b, u), \pi_2(b, u), \pi_2(b, v)) \\
&= (b, u, v),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\theta_{U \cap V}^{-1} \circ \theta_{U \cap V})(u, v) &= \theta_{U \cap V}^{-1}(\theta_{U \cap V}(u, v)) \\
&= \theta_{U \cap V}^{-1}(\pi_1(\phi_U(u)), \pi_2(\phi_U(u)), \pi_2(\psi_V(v))) \\
&= (\phi_U^{-1}(\pi_1(\phi_U(u)), \pi_2(\phi_U(u))), \psi_V^{-1}(\pi_1(\phi_U(u)), \pi_2(\psi_V(v)))) \\
&= (\phi_U^{-1}(\pi_1(\phi_U(u)), \pi_2(\phi_U(u))), \psi_V^{-1}(\pi_1(\psi_V(v)), \pi_2(\psi_V(v)))) \\
&= (\phi_U^{-1}(\phi_U(u)), \psi_V^{-1}(\psi_V(v))) \\
&= (u, v).
\end{aligned}$$

Portanto, $\theta_{U \cap V}$ é um difeomorfismo.

Por fim, dado $\tilde{b} \in B$, então $\theta_{U \cap V}|_{(E \oplus F)_{\tilde{b}}} : (E \oplus F)_{\tilde{b}} \rightarrow \{\tilde{b}\} \times \mathbb{C}^{n+m}$ é o isomorfismo

$$\theta_{U \cap V}(u, v) = (\pi_1(\phi_U(u)), \pi_2(\phi_U(u)), \pi_2(\psi_V(v))) = (\tilde{b}, (\pi_2 \circ \phi_U|_{E_{\tilde{b}}})(u), (\pi_2 \circ \psi_V|_{F_{\tilde{b}}})(v))$$

Portanto, $\pi : E \oplus F \rightarrow B$ é um fibrado vetorial complexo de posto $n + m$.

Definição 4.13. O fibrado vetorial $\pi : E \oplus F \rightarrow B$ construído acima é chamado de **soma de Whitney de E e F** .

Exemplo 4.14. Considere o espaço projetivo complexo de dimensão n , denotado por $P_{\mathbb{C}}^n$, onde um ponto é, geometricamente, uma reta L passando pela origem de \mathbb{C}^{n+1} . Explicitamente, um elemento deste conjunto é uma classe $L = [x_1 : \cdots : x_{n+1}]$, com $x_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n + 1$, e algum x_i não é nulo, identificado pela seguinte relação de equivalência:

$$[x_1 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : \cdots : y_{n+1}] \Leftrightarrow \text{Existe } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } (y_1, \dots, y_{n+1}) = \lambda(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Considere

$$l := \{(L, v) \in P_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in L\}$$

e a projeção $\pi : l \rightarrow P_{\mathbb{C}}^n$ dada por

$$\pi(L, v) = L.$$

Então $\pi : l \rightarrow P_{\mathbb{C}}^n$ é um fibrado vetorial complexo de posto 1, cujas fibras são

$$\pi^{-1}(L) = \{(L', v) \mid v \in L', \pi(L', v) = L\} = \{(L, v) \mid v \in L\} = \{L\} \times L,$$

que é uma reta passando pela origem e, portanto, possui estrutura de espaço vetorial de dimensão 1.

Definição 4.15. O fibrado vetorial construído acima é chamado de **fibrado de linhas tautológico sobre $P_{\mathbb{C}}^n$** .

Exemplo 4.16. Também construímos um fibrado associado a uma variedade suave M . Seja M uma variedade suave de dimensão complexa n . Definimos

$$TM := \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$$

e $\pi : TM \rightarrow M$ como a projeção na primeira coordenada. Então $\pi : TM \rightarrow M$ é um fibrado vetorial de posto n . De fato, a fibra é

$$\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M \cong \{p\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n,$$

e π é diferenciável e sobrejetora, pois é simplesmente a projeção na primeira coordenada.

Agora, dado $b \in M$, como M é variedade, então existe uma carta $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, onde U é uma vizinhança de b em M . Defina $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ dada por

$$\phi_U(p, v) = (p, df_p^{-1}(v)),$$

com $df_p : \mathbb{C}^n \rightarrow T_p M$ um isomorfismo. Então ϕ_U é um difeomorfismo, com inversa $\phi_U^{-1} : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ dada por

$$\phi_U^{-1}(p, v) = (p, df_p(v)).$$

E a restrição à fibra $\pi^{-1}(\tilde{p})$, com $\tilde{p} \in U$, é o isomorfismo

$$\phi_U(\tilde{p}, v) = (\tilde{p}, df_{\tilde{p}}^{-1}(v)).$$

Portanto, $\pi : TM \rightarrow M$ é um fibrado vetorial complexo de posto n .

Definição 4.17. O fibrado vetorial construído acima é chamado de **fibrado tangente de M** .

Exemplo 4.18. Também é possível construir um fibrado vetorial a partir de outros dois E e F , chamado de **produto tensorial entre E e F** e denotado por $E \otimes F$, cuja fibra é o produto tensorial das fibras de E e F e, portanto, $E \otimes F$ é um fibrado vetorial de posto $\text{posto}(E) \cdot \text{posto}(F)$.

A construção deste fibrado vetorial pode ser vista em (HATCHER, , p.13), fazendo as devidas adaptações para o nosso caso de variedades suaves e aplicações diferenciáveis.

Proposição 4.19. Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado vetorial de posto n , então o pullback

$$p^i : H^i(B) \rightarrow H^i(E)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Em (MILNOR; STASHEFF, 1974, p.157) é mostrado uma sequência exata

$$\dots \longrightarrow H^{i-2n}(B) \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{p^i} H^i(E) \longrightarrow H^{i-2n+1}(B) \longrightarrow \dots,$$

e para $i < 2n - 1$ os grupos $H^{i-2n}(B)$ e $H^{i-2n+1}(B)$ são nulos, portanto, $p^i : H^i(B) \rightarrow H^i(E)$ é isomorfismo.

Uma outra maneira: Dada uma seção s , temos $p \circ s = id$, então tomando o pullback, vem

$$id = id^* = (p \circ s)^* = s^* \circ p^*,$$

logo, p^* é injetora.

Por outro lado, considere $F : E \times [0, 1] \rightarrow E$ definida nas fibras por $F((b, x), t) = (b, tx)$, que é contínua, com F_0 sendo a projeção p e F_1 sendo a identidade em E , onde identificamos a seção de zeros como B . Logo, como uma deformação induz um isomorfismo em cohomologia, então p^* é sobrejetora.

□

Definição 4.20. Sejam $p : E \rightarrow B$ um fibrado vetorial e $Z \subseteq E$ a seção de zeros. A **classe superior de Chern de E** é definida por

$$c_n(E) := (p^*)^{-1}(\text{Dual}([Z])) \in H^{2n}(M; \mathbb{Z}).$$

Definição 4.21. A **classe total de Chern de E** é definido por

$$c(E) := c_0(E) + c_1(E) + \cdots + c_n(E) + \cdots.$$

Para uma variedade M , a **classe de Chern de M** é a classe total de Chern do fibrado tangente, isto é,

$$c(M) := c(TM) = c_0(TM) + c_1(TM) + \cdots + c_n(TM) + \cdots.$$

Observação 4.22. As classes de Chern satisfazem os seguintes axiomas, que são úteis para os cálculos. Para mais detalhes, ver (HUSEMOLLER, 1994, p.249, 3.3 Proposition) e (HATCHER, , p.78).

- Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado de posto n , então $c_0(E) = 1$ e $c_i(E) = 0$ para todo $i > n$. Então a classe total de Chern é

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E).$$

- (Naturalidade) Se $f : B' \rightarrow B$ é diferenciável, então

$$c(f^*(E)) = f^*(c(E)).$$

- (Fórmula de Whitney) Se

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de fibrados vetoriais, então

$$c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E')c_j(E''), \quad \forall k.$$

- (Normalização) Se λ é o fibrado de linhas tautológico sobre $P_{\mathbb{C}}^1$, então $c_1(\lambda)$ é gerador de $H^2(P_{\mathbb{C}}^1, \mathbb{Z})$.

Mais ainda, em (HUSEMOLLER, 1994, p.252, 5.4 Theorem) prova-se que tais axiomas definem completamente as classes de Chern, isto é, são as únicas que satisfazem tais axiomas.

Observação 4.23. Segue da fórmula de Whitney que se

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de fibrados vetoriais, então $c(E) = c(E') \cdot c(E'')$, pois

$$\begin{aligned} c(E) &= \sum_i c_i(E) \\ &= \sum_i \sum_{j+k=i} c_j(E') c_k(E'') \\ &= \left(\sum_i c_i(E') \right) \left(\sum_i c_i(E'') \right) \\ &= c(E') \cdot c(E''). \end{aligned}$$

Observação 4.24. Podemos construir uma sequência exata

$$0 \longrightarrow B \times \mathbb{C} \xrightarrow{f} B \times \mathbb{C}^2 \xrightarrow{g} B \times \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

assim como no caso de espaços vetoriais, onde $f(b, z) = (b, z, 0)$ e $g(b, z, w) = (b, w)$, de onde concluímos que $c(B \times \mathbb{C}^2) = c(B \times \mathbb{C})c(B \times \mathbb{C})$. Em geral,

$$c(\varepsilon^n) = c\left(\bigoplus_i \varepsilon^1\right) = \prod_i c(\varepsilon^1) = \prod_i 1 = 1.$$

Também podemos mostrar que

$$c(l_1 \otimes l_2) = c(l_1)c(l_2) = (1 + c_1(l_1))(1 + c_1(l_2)) = 1 + c_1(l_1) + c_1(l_2),$$

onde l_1 e l_2 são fibrados de linhas sobre B , construindo uma sequência exata como acima.

Em geral, se $E = l_1 \oplus \cdots \oplus l_n$, então

$$c(E) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(l_i)).$$

Os elementos $a_i := c_1(l_i)$ são chamados de **raízes de Chern de E** .

Formalmente, o cálculo feito acima pode ser feito para qualquer fibrado vetorial. Em (HUSEMOLLER, 1994, p.252, 5.2 Proposition), prova-se que para qualquer fibrado $p : E \rightarrow B$, existe um mapa $f : B_1 \rightarrow B$ tal que $f^*(E)$ é uma soma de fibrado de linhas. Por exemplo, o produto tensorial $E \otimes F$ pode ser visto virtualmente como soma de produtos $l_i \otimes l'_j$, então

$$c(E \otimes F) = \prod_{i,j} c(l_i \otimes l'_j) = \prod_{i,j} (1 + a_i + b_j),$$

onde a_i e b_j são as raízes de Chern de E e F , respectivamente.

Definição 4.25. Sejam E e F dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . A **classe quociente de E por F** é definido como a expressão formal

$$c(E - F) := \sum_{i \geq 0} c_i(E - F) := \frac{1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots}{1 + c_1(F) + c_2(F) + \cdots}.$$

4.2 Classes de Chern para Variedades Singulares

Para uma variedade suave M de dimensão complexa m podemos definir a classe de Chern

$$c(M) := c(TM) = 1 + c_1(TM) + \cdots + c_m(TM).$$

Agora se M é uma variedade singular, em alguns pontos não está bem definido o espaço tangente, e por isso, não há como definir o fibrado tangente.

Em (MACPHERSON, 1974), MacPherson resolveu a conjectura proposta por Deligne e Grothendieck e provou a existência e unicidade de classes de Chern para variedades possivelmente singulares, utilizando o conceito de funções construtíveis. O primeiro ingrediente principal é a classe de Mather, que é definida utilizando a modificação de Nash $\nu : \widehat{X} \rightarrow X$, pois sendo \widehat{X} uma variedade suave, podemos considerar a classe dual à classe de Chern

$$c(\widehat{TX}) \frown [\widehat{X}] \in H_*(\widehat{X})$$

e, por fim, tomar o pushforward

$$c^{Ma}(X) := \nu_*(c(\widehat{TX}) \frown [\widehat{X}]) \in H_*(X)$$

para obter a classe no grupo de homologia de X , e esta é conhecida como classe de Chern-Mather. O problema desta classe é que não satisfaz a condição de naturalidade proposta na conjectura de Deligne-Grothendieck, então MacPherson definiu neste artigo o segundo ingrediente principal, a obstrução local de Euler, e obteve uma classe em homologia que generaliza a classe de Chern para o caso suave, já que para X suave, esta classe é o dual de Poincaré da classe de Chern de X .

Um fato interessante é que antes mesmo da conjectura de Deligne-Grothendieck ser proposta, Marie-Hélène Schwartz definiu uma classe na cohomologia relativa $H^*(M, M \setminus X)$, que é uma classe de obstrução para a existência de referenciais de vetores radiais sobre uma vizinhança de X em uma variedade suave ambiente M , e em (BRASSELET; SCHWARTZ, 1981), Brasselet e Schwartz provaram que as classes de Schwartz e de MacPherson coincidem via o isomorfismo de Alexander $H^*(M, M \setminus X) \cong H_{2m-*}(X)$ e por isso agora é conhecida como classe de Chern-Schwartz-MacPherson.

Usando a classe de Chern-Schwartz-MacPherson, podemos multiplicar por um fator explícito para definir a classe de Segre-Schwartz-MacPherson para variedades singulares mergulhadas em uma variedade suave, o qual também é interessante, já que o seu termo de nível mais alto é a classe fundamental da variedade singular, e pode-se mudar desta classe para a classe de Chern-Schwartz-Macpherson apenas multiplicando por este fator.

No que segue, denotamos por X uma variedade algébrica de dimensão n . Dada uma subvariedade $W \subseteq X$, definimos $\chi_W : X \rightarrow \mathbb{Z}$ a função característica de W em X , isto é,

$$\chi_W(x) = \begin{cases} 1, & x \in W, \\ 0, & x \notin W. \end{cases}$$

Definição 4.26. Uma **função construtível em X** é uma função $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ da forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i},$$

onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e W_i são subvariedades de X .

Observação 4.27. Se

$$\alpha = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i}$$

e

$$\beta = \sum_{i=1}^{N'} n'_i \chi_{W'_i}$$

são duas funções construtíveis em X , então

$$\alpha + \beta = n_1 \chi_{W_1} + \cdots + n_N \chi_{W_N} + n'_1 \chi_{W'_1} + \cdots + n'_{N'} \chi_{W'_{N'}}$$

é uma função construtível. Portanto, denotando por $\mathcal{F}(X)$ o conjunto de todas as funções construtíveis em X , segue que $\mathcal{F}(X)$ é um grupo abeliano, cujo elemento neutro é a função identicamente nula, e o oposto de α é a função $-\alpha$ dada por $(-\alpha)(x) = -\alpha(x)$.

Definição 4.28. Seja X um esquema de dimensão n . Definimos a **característica de Euler de X com a homologia de Borel-Moore** como

$$\chi(X) := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \text{rank}(H_k^{BM}(X)).$$

Observação 4.29. Como os grupos de homologias são nulos para todo índice suficientemente grande, então a soma acima possui finitas parcelas e, portanto, a característica de Euler está bem definida.

Definição 4.30. Seja

$$\alpha = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i}$$

uma função construtível em X . Definimos a **integral de α sobre X** como

$$\int_X \alpha := \sum_{i=1}^N n_i \chi(W_i),$$

onde χ é a característica de Euler com a homologia de Borel-Moore.

Definição 4.31. Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas. Definimos o **pushforward de f** como a função $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ que a cada função construtível $\alpha \in \mathcal{F}(X)$, associa a função construtível $f_*(\alpha) \in \mathcal{F}(Y)$ dada por

$$f_*(\alpha)(y) := \int_{f^{-1}(y)} \alpha.$$

Observação 4.32. O pushforward está bem definido, isto é, $f_*\alpha$ é uma função construtível. De fato, tomando uma estratificação $\{S\}$ onde cada imagem inversa $f^{-1}(y)$ é união de estratos, obtemos

$$\begin{aligned}
 f_*\alpha(y) &= \int_{f^{-1}(y)} \alpha \\
 &= \int_{f^{-1}(y)} \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i} \\
 &= \int_X \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i \cap f^{-1}(y)} \\
 &= \sum_{i=1}^N n_i \chi(W_i \cap f^{-1}(y)) \\
 &= \sum_{i=1}^N n_i \chi \left(W_i \cap \left(\bigcup_{S, f^{-1}(y)=\cup S} S \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N n_i \chi \left(\bigcup_{S, f^{-1}(y)=\cup S} W_i \cap S \right).
 \end{aligned}$$

Como os estratos são disjuntos, então pela aditividade da característica de Euler, obtemos

$$\begin{aligned}
 f_*\alpha(y) &= \sum_{i=1}^N n_i \chi \left(\bigcup_{S, f^{-1}(y)=\cup S} W_i \cap S \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N n_i \sum_{S, f^{-1}(y)=\cup S} \chi(W_i \cap S) \\
 &= \sum_{i, S \text{ tal que } f^{-1}(y)=\cup S} n_i \chi(W_i \cap S).
 \end{aligned}$$

Portanto, $f_*\alpha$ é da forma

$$f_*\alpha = \sum n_i \chi(W_i \cap S) \chi_{f(S)},$$

que é uma função construtível.

Exemplo 4.33. Se pt é um conjunto unitário, então $\mathcal{F}(pt) \cong \mathbb{Z}$, pois uma função construtível em pt é

$$\alpha = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i},$$

e sendo W_i irredutível de pt , então $W_i = pt$, logo, χ_{W_i} é a função constante 1, de onde vem que α é a função constante

$$\sum_{i=1}^N n_i.$$

Abusando da notação, seja $pt : X \rightarrow pt$ o morfismo constante, então

$$pt_*(\alpha)(pt) = \int_{pt^{-1}(pt)} \alpha = \int_X \alpha,$$

ou seja, $pt_*(\alpha) = (\int_X \alpha) \chi_{\{pt\}}$.

Definição 4.34. Definimos o **pullback de f** como a função $f^* : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ dada por

$$f^*(\alpha) := \alpha \circ f.$$

Observação 4.35. O pullback está bem definido, isto é, que $\alpha \circ f$ é uma função construtível. De fato, dado

$$\alpha = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i}$$

uma função construtível em Y , então

$$\alpha \circ f = \left(\sum_{i=1}^N n_i \chi_{W_i} \right) \circ f = \sum_{i=1}^N n_i (\chi_{W_i} \circ f) = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{f^{-1}(W_i)},$$

e usando que

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B},$$

mesmo que $f^{-1}(W_i)$ não seja variedade, escrevendo W_i em componentes irredutíveis, chegamos numa soma de funções características de variedades. Portanto, $\alpha \circ f$ é uma função construtível em X .

Teorema 4.36. Existe uma única transformação natural

$$C_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow H_*(X)$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $f_*(C_*(\alpha)) = C_*(f_*(\alpha))$.
2. $C_*(\alpha + \beta) = C_*(\alpha) + C_*(\beta)$.
3. $C_*(\chi_X) = c(TX) \frown [X]$, se X for suave.

A demonstração é extensa, primeiro prova-se que existe no máximo uma transformação que satisfaz tais condições, em seguida, faz-se uma redução, bastando provar algumas condições mais simples e, por fim, define uma transformação que satisfaz tais condições. Ver ([MACPHERSON, 1974](#)).

Definição 4.37. Se X é uma variedade, a **classe de Chern-Schwartz-MacPherson de X** (ou classe de CSM) é definido por

$$c^{SM}(X) := C_*(\chi_X).$$

Podemos estender esta definição para o caso de X não ser reduzido, definindo

$$c^{SM}(X) := c^{SM}(X_{red}) = C_*(\chi_{X_{red}}),$$

onde X_{red} é a subvariedade reduzida associada de X .

Definição 4.38. Sejam M uma variedade e $\iota : X \hookrightarrow M$ um mergulho. Definimos a **classe de Segre-Schwartz-MacPherson de ι** (ou classe de SSM) como

$$s^{SM}(X, M) := c(\iota^*TM)^{-1} \frown c^{SM}(X) \in H_*(X).$$

Podemos também considerar $s^{SM}(X, M)$ como um elemento de $H^*(M)$ tomando o pushforward ι_* e o Dual, isto é, o elemento

$$Dual(\iota_*(s^{SM}(X, M))) \in H^*(M).$$

Proposição 4.39. Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre variedades e Y uma subvariedade fechada singular de N . Se f é transversal a Y , então

$$f^*(s^{SM}(Y, N)) = s^{SM}(f^{-1}(Y), M) \in H^*(M).$$

A demonstração pode ser vista em (OHMOTO, 2016, p.15, Proposition 3.8).

POLINÔMIOS DE THOM PARA SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES

Estamos em condição de definir o polinômio de Thom, que é um polinômio de classes de Chern que satisfaz uma certa igualdade. Ao longo deste capítulo assumimos que $m \leq n$.

5.1 Polinômio de Thom para \mathcal{H} -equivalência

Para uma \mathcal{H} -singularidade η , podemos considerar o conjunto de pontos singulares do tipo η de uma $f : M \rightarrow N$ dada, logo, temos que $Dual([\overline{\eta(f)}])$ é uma classe de cohomologia em $H^*(M)$, mas vimos classes em cohomologia especiais, as classes de Chern, e o que é surpreendente é a classe $Dual([\eta(f)])$ ser uma expressão polinomial com coeficientes inteiros das classes de Chern. Este é o polinômio de Thom da singularidade η e é o assunto deste capítulo.

Definição 5.1. Seja $f \in \mathcal{O}_0(m, n)$. Um **desdobramento de f com k parâmetros** é um germe

$$F : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0)$$

da forma

$$F(x, u) = (f_u(x), u),$$

tal que $f_0 = f$.

Exemplo 5.2. Seja $f \in \mathcal{O}_0(m, n)$. Para cada k , defina

$$F : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0)$$

dada por $F(x, u) = (f(x), u)$. Então F é um desdobramento de f com k -parâmetros, conhecida como **desdobramento trivial de f** .

Definição 5.3. Dizemos que dois germes $f : (\mathbb{C}^{m+s}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+s}, 0)$ e $g : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ são **estavelmente \mathcal{H} -equivalentes** se f é \mathcal{H} -equivalente ao desdobramento trivial $g \times id_{\mathbb{C}^s}$ de g .

Com a definição acima, podemos definir o conjunto $\eta(f)$ de uma f dada.

Definição 5.4. Seja η um tipo de \mathcal{K} -singularidade em $\mathcal{O}_0(m, n)$ e denotemos $k := n - m$. Para uma aplicação holomorfa $f : M \rightarrow N$ de codimensão relativa k (isto é, $k = \dim(N) - \dim(M)$), definimos

$$\eta(f) := \{x \in M \mid \text{o germe de } f \text{ em } x \text{ é estavelmente } \mathcal{K} \text{ - equivalente a } \eta\}.$$

Teorema 5.5. Seja η um tipo de \mathcal{K} -singularidade em $\mathcal{O}_0(m, n)$. Então existe um único polinômio $tp(\eta) \in \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots]$ tal que para toda aplicação estável $f : M \rightarrow N$ de codimensão relativa k , vale

$$\text{Dual}([\overline{\eta(f)}]) = tp(\eta)(c(f)) \in H^{2\text{codim}(\eta)}(M),$$

onde $c_i(f) := c_i(f^*TN - TM)$.

Este é o principal resultado, e a igualdade que o polinômio de Thom satisfaz é o que precisamos para calculá-los. A demonstração de sua existência pode ser vista em (KAZARIAN, 2006, Theorem 2.2, p.91).

Definição 5.6. O polinômio $tp(\eta)$ é chamado de **polinômio de Thom para singularidade estável do tipo η** .

Observação 5.7. Em (RIMANYI, 2001, p.10, Theorem 5.2) prova-se que para o caso equidimensional, o polinômio de Thom da singularidade A_k satisfaz algumas condições, e tais condições podem ajudar a encontrar a expressão do polinômio de Thom.

Mais precisamente, denotamos por $\pi(k)$ o conjunto das partições do inteiro k , $\pi(k; i)$ o conjunto das partições do inteiro k em i parcelas e σ_j o j -ésimo polinômio simétrico elementar em $k - 1$ variáveis. Se

$$tp(A_k) = \sum_{I \in \pi(k)} \alpha_I c_I,$$

então

$$\sum_{I \in \pi(k; i)} \alpha_I = \sigma_{k-i}(1, 2, \dots, k-1), \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Exemplo 5.8. Consideremos a singularidade A_2 . Uma forma normal é o germe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ representado por

$$f(x, y) = (x^3 + xy, y).$$

Note que sua álgebra local é

$$\frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{\langle x^3 + xy, y \rangle} \cong \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\langle x^3 \rangle},$$

então estamos com a linguagem de (RIMANYI, 2001). Temos

$$\pi(2) = \{1 + 1, 2\},$$

$$\sigma_0(x) = 1, \sigma_1(x) = x$$

e

$$tp(A_2) = \alpha_{1,1}c_1c_1 + \alpha_2c_2.$$

Então

$$\sum_{I \in \pi(2;1)} \alpha_I = \sigma_{2-1}(1) \Rightarrow \alpha_2 = 1$$

e

$$\sum_{I \in \pi(2;2)} \alpha_I = \sigma_{2-2}(1) \Rightarrow \alpha_{1,1} = 1.$$

Portanto,

$$tp(A_2) = c_1^2 + c_2.$$

Exemplo 5.9. Consideremos agora a singularidade A_1 . Logo,

$$\pi(1) = \{1\},$$

$$\sigma_0 = 1$$

e

$$tp(A_1) = \alpha_1c_1,$$

com

$$\sum_{I \in \pi(1;1)} \alpha_I = \sigma_{1-1}(1) \Rightarrow \alpha_1 = 1.$$

Portanto,

$$tp(A_1) = c_1.$$

Exemplo 5.10. Consideremos a singularidade A_3 . Temos

$$\pi(3) = \{1+1+1, 1+2, 3\},$$

$$\sigma_0(x, y) = 1, \sigma_1(x, y) = x + y, \sigma_2(x, y) = xy$$

e

$$tp(A_3) = \alpha_{1,1,1}c_1c_1c_1 + \alpha_{1,2}c_1c_2 + \alpha_3c_3,$$

com

$$\sum_{I \in \pi(3;1)} \alpha_I = \sigma_{3-1}(1, 2) \Rightarrow \alpha_3 = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$\sum_{I \in \pi(3;2)} \alpha_I = \sigma_{3-2}(1, 2) \Rightarrow \alpha_{1,2} = 1 + 2 = 3$$

e

$$\sum_{I \in \pi(3;3)} \alpha_I = \sigma_{3-3}(1, 2) \Rightarrow \alpha_{1,1,1} = 1.$$

Portanto,

$$tp(A_3) = c_1^3 + 3c_1c_2 + 2c_3.$$

Exemplo 5.11. Vamos ilustrar o chamado “método da restrição”, por Rimányi, calculando o polinômio de Thom para A_2 . A ideia geral deste método consiste no seguinte: Como a igualdade que caracteriza o polinômio de Thom é

$$Dual([\overline{\eta(f)}]) = tp(\eta)(c(f)) \in H^{2codim(\eta)}(M),$$

então calculamos a codimensão da singularidade η , assim, escrevemos uma expressão genérica de grau $codim(\eta)$ para $tp(\eta)$. Agora construímos algumas funções f particulares, calculamos o conjunto $\overline{\eta(f)}$ e a classe em cohomologia $Dual([\overline{\eta(f)}])$. Por outro lado, calculamos $c(f)$, obtendo as classes $c_i(f)$, e substituímos em $tp(\eta)(c(f))$. Por fim, usamos a igualdade

$$Dual([\overline{\eta(f)}]) = tp(\eta)(c(f))$$

para obter uma equação. Desta forma, obteremos um sistema de equações que determina a expressão do polinômio de Thom $tp(\eta)$.

Como a codimensão de A_2 é 2, então $tp(A_2)$ é da forma

$$tp(A_2) = Ac_1^2 + Bc_2,$$

com $A, B \in \mathbb{Z}$, e devemos determinar os coeficientes A e B . A forma normal de A_2 é

$$A_2(x, y) = (x^3 + xy, y).$$

Considere o toro algébrico $T = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e as seguintes ações:

$$\rho_0(x, y) = (\alpha x, \alpha^2 y), \quad \rho_1(x, y) = (\alpha^3 x, \alpha^2 y),$$

onde $\alpha \in T$. Notemos que

$$\begin{aligned} (A_2 \circ \rho_0)(x, y) &= A_2(\rho_0(x, y)) \\ &= A_2(\alpha x, \alpha^2 y) \\ &= ((\alpha x)^3 + (\alpha x)(\alpha^2 y), \alpha^2 y) \\ &= (\alpha^3 x^3 + \alpha^3 xy, \alpha^2 y) \\ &= (\alpha^3(x^3 + xy), \alpha^2 y) \\ &= \rho_1(x^3 + xy, y) \\ &= \rho_1(A_2(x, y)) \\ &= (\rho_1 \circ A_2)(x, y). \end{aligned}$$

Considere os fibrados vetoriais de posto 2

$$E_0 := l \oplus l^{\otimes 2}, \quad E_1 := l^{\otimes 3} \oplus l^{\otimes 2},$$

onde l é o fibrado de linhas tautológico sobre $P_{\mathbb{C}}^N$, com N suficientemente grande. Como l é um fibrado vetorial, então existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ para $P_{\mathbb{C}}^N$ formada por trivializações

locais $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow T$ de l . Como a forma normal de A_2 é invariante pelas ações tóricas ρ_0 e ρ_1 , então podemos colar as aplicações

$$id_{U_i} \times A_2 : U_i \times \mathbb{C}^2 \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^2$$

para obter um mapa $f_{A_2} : E_0 \rightarrow E_1$ estável tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{f} & E_1 \\ & \searrow \rho_0 & \swarrow \rho_1 \\ & & P_{\mathbb{C}}^N \end{array}$$

comuta e a restrição para cada fibra

$$\mathbb{C}^2 = (E_0)_x \rightarrow (E_1)_x = \mathbb{C}^2,$$

com $x \in P_{\mathbb{C}}^N$, é \mathcal{A} -equivalente à A_2 . Chamamos a aplicação f_{A_2} de **mapa universal para A_2** .

Seja $a := c_1(l)$. Pelas propriedades das classes de Chern, valem

$$c(E_0) = c(l \oplus l^{\otimes 2}) = c(l)c(l^{\otimes 2}) = (1 + c_1(l))(1 + c_1(l))^2 = (1 + a)(1 + 2a)$$

e

$$c(E_1) = c(l^{\otimes 3} \oplus l^{\otimes 2}) = c(l^{\otimes 3})c(l^{\otimes 2}) = (1 + c_1(l))^3(1 + c_1(l))^2 = (1 + 3a)(1 + 2a).$$

Vamos identificar os anéis de cohomologia

$$H^*(E_0) = H^*(P_{\mathbb{C}}^N) = H^*(E_1)$$

usando os pullbacks ρ_0^* e ρ_1^* . Agora, como $A_2(f_{A_2})$ é a seção de zeros de E_0 , temos da definição da classe superior de Chern que

$$Dual[\overline{A_2}(f_{A_2})] = \rho_0^*(c_2(E_0)) = c_2(\rho_0^*E_0) = c_2(E_0) = 2a^2,$$

uma vez que

$$1 + c_1(E_0) + c_2(E_0) = c(E_0) = (1 + a)(1 + 2a) = 1 + 3a + 2a^2.$$

Por outro lado, para cada $i = 1, 2$, o fibrado tangente TE_i se escreve como uma decomposição nas componentes horizontais e verticais

$$TE_i = \rho_i^*(E_i \oplus TP_{\mathbb{C}}^N),$$

logo,

$$f_{A_2}^*TE_1 - TE_0 = \rho_0^*(E_1 - E_0).$$

Assim, pela identificação $H^*(P_{\mathbb{C}}^N) = H^*(E_0)$ por ρ_0^* , temos

$$\begin{aligned}
 c(f_{A_2}) &= c(f_{A_2}^* T E_1 - T E_0) \\
 &= c(\rho_0^*(E_1 - E_0)) \\
 &= c(E_1 - E_0) \\
 &= \frac{c(E_1)}{c(E_0)} \\
 &= \frac{(1+3a)(1+2a)}{(1+a)(1+2a)} \\
 &= \frac{1+3a}{1+a} \\
 &= (1+3a) \frac{1}{1-(-a)} \\
 &= (1+3a)(1-a+a^2-a^3+\dots) \\
 &= 1+2a-2a^2+\dots
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$c_1(f_{A_2}) = 2a$$

e

$$c_2(f_{A_2}) = -2a^2,$$

assim,

$$tp(A_2)(c(f_{A_2})) = Ac_1^2 + Bc_2 = A(2a)^2 + B(-2a^2) = (4A - 2B)a^2.$$

Agora, pela propriedade do polinômio de Thom enunciado no Teorema 5.5, temos

$$tp(A_2)(c(f_{A_2})) = Dual[\overline{A_2}(f_{A_2})],$$

assim,

$$(4A - 2B)a^2 = 2a^2,$$

de onde tiramos uma equação

$$4A - 2B = 2,$$

ou seja,

$$2A - B = 1.$$

Agora, consideremos a singularidade A_1 , cuja forma normal é a aplicação $A_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$x \mapsto x^2.$$

Consideramos, como anteriormente, $E_0 = l$ e $E_1 = l^{\otimes 2}$ e o mapa universal $f_{A_1} : E_0 \rightarrow E_1$, que não tem singularidades do tipo A_2 , então

$$A_2(f_{A_1}) = \emptyset,$$

assim, pelo Teorema 5.5, vale

$$tp(A_2)(c(f_{A_1})) = Dual([A_2(f_{A_1})]) = Dual([\emptyset]) = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
c(f_{A_1}) &= c(E_1 - E_0) \\
&= \frac{c(E_1)}{c(E_0)} \\
&= \frac{c(I^{\otimes 2})}{c(I)} \\
&= \frac{c(I)^2}{c(I)} \\
&= \frac{(1+a)^2}{1+a} \\
&= \frac{1+a}{1+2a} \\
&= \frac{1}{1+a} \\
&= (1+2a) \frac{1}{1-(-a)} \\
&= (1+2a)(1-a+a^2-a^3+\dots) \\
&= 1+a-a^2+\dots,
\end{aligned}$$

de onde tiramos que

$$c_1(f_{A_1}) = a$$

e

$$c_2(f_{A_1}) = -a^2,$$

assim,

$$tp(A_2)(c(f_{A_1})) = Ac_1^2 + Bc_2 = A(a)^2 + B(-a^2) = (A-B)a^2.$$

Portanto,

$$0 = tp(A_2)(c(f_{A_1})) = (A-B)a^2,$$

então $A = B$, e substituindo na equação

$$2A - B = 1,$$

vem

$$2A - A = 1 \Rightarrow A = 1,$$

e, portanto, $B = A = 1$. Assim,

$$tp(A_2) = Ac_1^2 + Bc_2 = c_1^2 + c_2.$$

Teorema 5.12. Para cada \mathcal{K} -singularidade η , existe uma única série de potências $tp^{SM}(\overline{\eta}) \in \mathbb{Z}[[c_1, c_2, \dots]]$ tal que, para cada aplicação estável $f : M \rightarrow N$ de codimensão relativa k , vale

$$Dual(s^{SM}(\overline{\eta}(f), M)) = tp^{SM}(\overline{\eta})(c(f)) \in H^*(M).$$

Este resultado é a versão do polinômio de Thom para classe SSM. A sua demonstração pode ser vista em (OHMOTO, 2016, p. 23, 4.2 Proof).

Definição 5.13. Chamamos $tp^{SM}(\bar{\eta})$ de **polinômio superior de Thom para o fecho $\bar{\eta}$ da órbita com respeito à classe SSM.**

Observação 5.14. Como o termo de maior grau de $s^{SM}(\overline{\eta(f)}, M)$ é a classe fundamental $[\overline{\eta(f)}]$, então comparando os termos de menor grau na igualdade acima, obtemos

$$tp(\eta)(c(f)) = Dual([\overline{\eta(f)}]) = \text{termo de menor grau de } tp^{SM}(\bar{\eta})(c(f)).$$

O termo de menor grau de $tp^{SM}(\bar{\eta})$ é simplesmente $tp(\eta)$, assim,

$$tp^{SM}(\bar{\eta}) = tp(\eta) + \text{termos de grau maior.}$$

Exemplo 5.15. Vimos que $tp(A_2) = c_1^2 + c_2$. Então

$$tp^{SM}(\overline{A_2}) = c_1^2 + c_2 + \text{termos de grau maior.}$$

Vamos calcular o termo de ordem 3 de $tp^{SM}(\overline{A_2})$. Escreva uma expressão genérica

$$tp_3^{SM}(\overline{A_2}) = Ac_1^3 + Bc_1c_2 + Cc_3.$$

Considere a singularidade A_3 , cuja forma normal é

$$A_3(x, y, z) = (x^4 + x^2y + xz, y, z).$$

Como anteriormente, o toro algébrico $T = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ age na fonte e na meta com as ações

$$\rho_0 := \alpha \oplus \alpha^2 \oplus \alpha^3, \quad \rho_1 := \alpha^4 \oplus \alpha^2 \oplus \alpha^3,$$

e note que vale $A_3 \circ \rho_0 = \rho_1 \circ A_3$, assim, produzimos o mapa universal $f_{A_3} : E_0 \rightarrow E_1$ para a singularidade A_3 , onde

$$E_0 := l \oplus l^{\otimes 2} \oplus l^{\otimes 3}, \quad E_1 := l^{\otimes 4} \oplus l^{\otimes 2} \oplus l^{\otimes 3}.$$

Então

$$\begin{aligned} c(f_{A_3}) &= \frac{c(E_1)}{c(E_0)} \\ &= \frac{(1+a)^4(1+a)^2(1+a)^3}{(1+a)(1+a)^2(1+a)^3} \\ &= \frac{(1+a)^4}{1+a} \\ &= (1+4a)(1-a+a^2-a^3+\dots) \\ &= 1+3a-3a^2+3a^3-3a^4+\dots \end{aligned}$$

Desta forma,

$$c_1(f_{A_3}) = 3a, \quad c_2(f_{A_3}) = -3a^2, \quad c_3(f_{A_3}) = 3a^3,$$

então

$$tp_3^{SM}(c(f_{A_3})) = A(3a)^3 + B(3a)(-3a^2) + C(3a^3) = (27A - 9B + 3C)a^3.$$

O conjunto das singularidades A_2 de f_{A_3} é uma curva suave tangente ao eixo x , então considerando esta curva mergulhada em E_0 por $\iota : \overline{A_2}(f_{A_3}) \rightarrow E_0$ obtemos uma subvariedade de codimensão 2, e o seu fibrado normal é isomorfo ao pullback $\pi^* \nu$, onde $\nu = l^{\otimes 2} \oplus l^{\otimes 3}$ via $\pi = \rho_0 \circ \iota : \overline{A_2}(f_{A_3}) \rightarrow P_{\mathbb{C}}^N$, então a classe fundamental do conjunto das singularidades A_2 em E_0 é

$$\iota_*(1) = c_2(\rho_0^* \nu) = 6a^2,$$

uma vez que

$$c(\nu) = c(l^{\otimes 2} \oplus l^{\otimes 3}) = (1+a)^2(1+a)^3 = (1+2a)(1+3a) = 1+5a+6a^2.$$

Para mergulhos fechados $\iota : X \rightarrow M$, a classe SSM é o inverso da classe do fibrado normal, logo, temos

$$s^{SM}(X, M) = \iota_* c(-\nu_{M/X}),$$

então para o nosso caso,

$$\begin{aligned} s^{SM}(\overline{A_2}(f_{A_3}), E_0) &= \iota_* c(-\pi^* \nu) \\ &= \iota_*(\pi^*(c(-\nu))) \\ &= \iota_*(\iota^*(\rho_0^*(c(-\nu)))) \\ &= \rho_0^*(c(-\nu)) \iota_*(1) \\ &= \rho_0^*(c(-\nu)) \rho_0^*(c_2(\nu)) \\ &= \rho_0^*(c(-\nu) c_2(\nu)). \end{aligned}$$

Pela propriedade do polinômio de Thom e usando a identificação por ρ_0 , obtemos

$$\begin{aligned} t p^{SM}(\overline{A_2})(c(f_{A_3})) &= s^{SM}(\overline{A_2}(f), E_0) \\ &= c(-\nu) c_2(\nu) \\ &= \frac{6a^2}{(1+2a)(1+3a)} \\ &= 6a^2(1-2a+4a^2-\dots)(1-3a+9a^2-\dots) \\ &= 6a^2 - 30a^3 + \dots \end{aligned}$$

Logo, comparando os termos de grau 3, obtemos

$$27A - 9B + 3C = -30 \Rightarrow 9A - 3B + C = -10.$$

Para obter as demais equações, devemos restringir para as singularidades A_2 e A_1 . Para a singularidade A_2 , como vimos anteriormente,

$$c(f_{A_2}) = 1 + 2a - 2a^2 + 2a^3 - \dots$$

Logo,

$$t p_3^{SM}(\overline{A_2})(c(f_{A_2})) = A(2a)^3 + B(2a)(-2a^2) + C(2a^3) = (8A - 4B + 2C)a^3.$$

Vimos no cálculo do termo de grau 2 que para $E_0 = l \oplus l^{\otimes 2}$, o conjunto $A_2(f_{A_2})$ é o conjunto de zeros de E_0 , então

$$\begin{aligned} s^{SM}(\overline{A_2(f_{A_2})}, E_0) &= c_2(E_0)c(-E_0) \\ &= \frac{2a^2}{(1+a)(1+2a)} \\ &= 2a^2(1-a+a^2-\dots)(1-2a+4a^2-\dots) \\ &= 2a^2 - 6a^3 + \dots \end{aligned}$$

Assim, comparando os termos de grau 3, vem

$$8A - 4B + 2C = -6 \Rightarrow 4A - 2B + C = -3.$$

Por fim, para a singularidade A_1 , temos $A_2(f_{A_1}) = \emptyset$, então $s^{SM}(\overline{A_2(f_{A_1})}, E_1) = 0$, onde $E_1 = l^{\otimes 2}$, e como vimos que

$$c(f_{A_1}) = 1 + a - a^2 + a^3 + \dots,$$

então

$$tp_3^{SM}(\overline{A_2})(c(f_{A_1})) = A(a)^3 + B(a)(-a^2) + C(a^3) = (A - B + C)a^3,$$

assim, comparando os termos de grau 3, vem

$$A - B + C = 0.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 9A - 3B + C = -10 \\ 4A - 2B + C = -3 \\ A - B + C = 0 \end{cases}$$

obtemos a solução $A = -2$, $B = -3$ e $C = -1$. Portanto,

$$tp^{SM}(\overline{A_2}) = (c_1^2 + c_2) + (-2c_1^3 - 3c_1c_2 - c_3) + \text{termos de grau maior.}$$

5.2 Polinômio de Thom para \mathcal{A} -equivalência

Para \mathcal{A} -singularidades em $\mathcal{O}(m, n)$, não podemos garantir que o polinômio de Thom seja escrito em classes de Chern quocientes. Assim, o polinômio de Thom é apenas um polinômio com classes de Chern da fonte e da meta, obtendo assim, um polinômio $tp_{\mathcal{A}} \in \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_m, c'_1, \dots, c'_n]$. Para mais detalhes, ver (SASAJIMA; OHMOTO, 2018).

Exemplo 5.16. Considere a \mathcal{A} -singularidade $B_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, dada por

$$B_1(x, y) = (x, y^2, y^3 + x^2y).$$

Note que

$$T_{\mathcal{A}_e}B_1 = \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2xy \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2y \\ 3y^2 + x^2 \end{array} \right) \right\rangle + \left\{ \left(\begin{array}{c} \eta_1(x, y^2, y^3 + x^2y) \\ \eta_2(x, y^2, y^3 + x^2y) \\ \eta_3(x, y^2, y^3 + x^2y) \end{array} \right) \right\}$$

Portanto, o único elemento que está faltando neste conjunto é

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Assim, B_1 tem \mathcal{A}_e -codimensão igual a 1 e podemos considerar o desdobramento \mathcal{A}_e -versal

$$B_1(x, y, \lambda) = (x, y^2, y^3 + x^2y + \lambda y).$$

Agora, temos que sua \mathcal{A} -codimensão é 3, pois

$$T_{\mathcal{A}}B_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x^2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 2xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2xy \\ x^3 + 3xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y^2 \\ x^2y + 3y^3 \end{pmatrix} \right\rangle + \eta(x, y^2, y^3 + x^2y),$$

então estão faltando os elementos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Assim, o seu polinômio de Thom é da forma

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1) = x_1c_1^3 + x_2c_1c_2 + x_3c_1^2c_1' + x_4c_1c_1'^2 + x_5c_2c_1' + x_6c_1^3 + x_7c_1c_2' + x_8c_1'c_2' + x_9c_3'.$$

Vamos determinar os inteiros x_i , $1 \leq i \leq 9$. Considere as ações de \mathbb{C}^*

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha \oplus \alpha^2, \quad \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^2 \oplus \alpha^3.$$

Então

$$\begin{aligned} (B_1 \circ \rho_0)(x, y, \lambda) &= B_1(\alpha x, \alpha y, \alpha^2 \lambda) \\ &= (\alpha x, (\alpha y)^2, (\alpha y)^3 + (\alpha x)^2(\alpha y) + (\alpha^2 \lambda)(\alpha y)) \\ &= (\alpha x, \alpha^2 y^2, \alpha^3(y^3 + x^2y + \lambda y)) \\ &= \rho_1(x, y^2, y^3 + x^2y + \lambda y) \\ &= \rho_1(B_1(x, y, \lambda)) \\ &= (\rho_1 \circ B_1)(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

Portanto, $B_1 \circ \rho_0 = \rho_1 \circ B_1$. Assim, vamos considerar os fibrados

$$E_0 = l \oplus l, \quad E_0' = l^{\otimes 2}, \quad E_1 = l \oplus l^{\otimes 2} \oplus l^{\otimes 3}$$

sobre $P_{\mathbb{C}}^N$ e construímos o mapa universal $f_{B_1} : E_0 \oplus E_0' \rightarrow E_1$ tal que a restrição a cada fibra é \mathcal{A} -equivalente ao desdobramento B_1 . Tomando $a = c_1(l)$, temos

$$c(E_0) = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2,$$

$$c(E_0 \oplus E_0') = c(E_0)c(E_0') = (1 + a)^2(1 + 2a) = 1 + 4a + 3a^2 + 2a^3$$

e

$$c'(E_1) = (1+a)(1+2a)(1+3a) = 1 + 6a + 11a^2 + 6a^3.$$

Assim, substituindo no polinômio, vem

$$\begin{aligned} tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{B_1})) &= x_1(2a)^3 + x_2(2a)(a^2) + x_3(2a)^2(6a) + x_4(2a)(6a)^2 + \\ &\quad + x_5(a^2)(6a) + x_6(6a)^3 + x_7(2a)(11a^2) + x_8(6a)(11a^2) + x_9(6a^3) \\ &= (8x_1 + 2x_2 + 24x_3 + 72x_4 + 6x_5 + 216x_6 + 22x_7 + 66x_8 + 6x_9)a^3. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{B_1})) = Dual([\overline{B_1}(f)]) = Dual([Z(E_0 \oplus E'_0)]) = c_3(E_0 \oplus E'_0) = 2a^3.$$

Portanto,

$$8x_1 + 2x_2 + 24x_3 + 72x_4 + 6x_5 + 216x_6 + 22x_7 + 66x_8 + 6x_9 = 2.$$

Agora, como as singularidades A_0 , dada por

$$A_0(x, y) = (x, y, 0),$$

e a singularidade S_0 , dada por

$$S_0(x, y) = (x, y^2, xy),$$

são menos complicadas que B_1 , então o polinômio de Thom se anula em seus mapas universais, então vamos mudando a escolha das ações tóricas ρ_0, ρ_1 e, conseqüentemente, dos fibrados E_0 e E_1 para obtermos diferentes mapas universais f_{A_0} e f_{S_0} para, assim, obter as equações. Além disso, como estas duas singularidades possuem \mathcal{A}_e -codimensão 0, então não existe desdobramento a ser feito, logo, iremos trabalhar apenas com o fibrado E_0 , não existindo o fibrado E'_0 .

Para a singularidade A_0 , obtemos as seguintes equações:

- Considere a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha \oplus \alpha, E_0 = l \oplus l, E_1 = l \oplus l \oplus l,$$

então

$$c(E_0) = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$$

e

$$c(E_1) = (1+a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3,$$

assim,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 3x_5 + 27x_6 + 6x_7 + 9x_8 + x_9)a^3,$$

obtendo a equação

$$8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 3x_5 + 27x_6 + 6x_7 + 9x_8 + x_9 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus 1, \rho_1 = \alpha \oplus 1 \oplus 1, E_0 = E_1 = l,$$

temos

$$c(E_0) = c(E_1) = 1 + a,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (x_1 + x_3 + x_4 + x_6)a^3,$$

assim,

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha \oplus 1, E_0 = E_1 = l \oplus l,$$

temos

$$c(E_0) = c(E_1) = (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (8x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 2x_5 + 8x_6 + 2x_7 + 2x_8)a^3,$$

assim,

$$4x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 + 4x_6 + x_7 + x_8 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha^2, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^2 \oplus 1, E_0 = E_1 = l \oplus l^{\otimes 2},$$

temos

$$c(E_0) = c(E_1) = (1 + a)(1 + 2a) = 1 + 3a + 2a^2,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (27x_1 + 6x_2 + 27x_3 + 27x_4 + 6x_5 + 27x_6 + 6x_7 + 6x_8)a^3,$$

assim,

$$9x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 2x_7 + 2x_8 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha^2, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^2 \oplus \alpha, E_0 = l \oplus l^{\otimes 2}, E_1 = l \oplus l^{\otimes 2} \oplus l,$$

temos

$$c(E_0) = (1 + a)(1 + 2a) = 1 + 3a + 2a^2, c(E_1) = (1 + a)(1 + 2a)(1 + a) = 1 + 4a + 5a^2 + 2a^3,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (27x_1 + 6x_2 + 36x_3 + 48x_4 + 8x_5 + 64x_6 + 15x_7 + 20x_8 + 2x_9)a^3,$$

assim,

$$27x_1 + 6x_2 + 36x_3 + 48x_4 + 8x_5 + 64x_6 + 15x_7 + 20x_8 + 2x_9 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha^3, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^3 \oplus 1, E_0 = E_1 = l \oplus l^{\otimes 3},$$

temos

$$c(E_0) = c(E_1) = (1+a)(1+3a) = 1+4a+3a^2,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (64x_1 + 12x_2 + 64x_3 + 64x_4 + 12x_5 + 64x_6 + 12x_7 + 12x_8)a^3,$$

assim,

$$16x_1 + 3x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 3x_5 + 16x_6 + 3x_7 + 3x_8 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha^3, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^3 \oplus \alpha, E_0 = l \oplus l^{\otimes 3}, E_1 = l \oplus l^{\otimes 3} \oplus l,$$

temos

$$c(E_0) = (1+a)(1+3a) = 1+4a+3a^2, c(E_1) = (1+a)(1+3a)(1+a) = 1+5a+7a^2+3a^3,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{A_0})) = (64x_1 + 12x_2 + 80x_3 + 100x_4 + 15x_5 + 125x_6 + 28x_7 + 35x_8 + 3x_9)a^3,$$

assim,

$$64x_1 + 12x_2 + 80x_3 + 100x_4 + 15x_5 + 125x_6 + 28x_7 + 35x_8 + 3x_9 = 0.$$

Agora vamos fazer o mesmo com a singularidade S_0 .

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^2 \oplus \alpha^2, E_0 = l \oplus l, E_1 = l \oplus l^{\otimes 2} \oplus l^{\otimes 2},$$

temos

$$c(E_0) = (1+a)^2 = 1+2a+a^2, c(E_1) = (1+a)(1+2a)^2 = 1+5a+8a^2+4a^3,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{S_0})) = (8x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 5x_5 + 125x_6 + 16x_7 + 40x_8 + 4x_9)a^3,$$

assim,

$$8x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 5x_5 + 125x_6 + 16x_7 + 40x_8 + 4x_9 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha^2, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^4 \oplus \alpha^3, E_0 = l \oplus l^{\otimes 2}, E_1 = l \oplus l^{\otimes 4} \oplus l^{\otimes 3},$$

temos

$$c(E_0) = (1+a)(1+2a) = 1+3a+2a^2, c(E_1) = (1+a)(1+4a)(1+3a) = 1+8a+19a^2+12a^3,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{S_0})) = (27x_1 + 6x_2 + 72x_3 + 192x_4 + 16x_5 + 512x_6 + 57x_7 + 152x_8 + 12x_9)a^3,$$

assim,

$$27x_1 + 6x_2 + 72x_3 + 192x_4 + 16x_5 + 512x_6 + 57x_7 + 152x_8 + 12x_9 = 0.$$

- Com a configuração

$$\rho_0 = \alpha \oplus \alpha^3, \rho_1 = \alpha \oplus \alpha^6 \oplus \alpha^4, E_0 = l \oplus l^{\otimes 3}, E_1 = l \oplus l^{\otimes 6} \oplus l^{\otimes 3},$$

temos

$$c(E_0) = (1+a)(1+3a) = 1+4a+3a^2, c(E_1) = 1+10a+27a^2+18a^3,$$

logo,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1)(c(f_{S_0})) = (64x_1 + 12x_2 + 160x_3 + 400x_4 + 30x_5 + 1000x_6 + 108x_7 + 270x_8 + 18x_9)a^3$$

Portanto, resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x_1 + 2x_2 + 24x_3 + 72x_4 + 6x_5 + 216x_6 + 22x_7 + 66x_8 + 6x_9 = 2 \\ 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 3x_5 + 27x_6 + 6x_7 + 9x_8 + x_9 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 + 4x_6 + x_7 + x_8 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 2x_7 + 2x_8 = 0 \\ 27x_1 + 6x_2 + 36x_3 + 48x_4 + 8x_5 + 64x_6 + 15x_7 + 20x_8 + 2x_9 = 0 \\ 16x_1 + 3x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 3x_5 + 16x_6 + 3x_7 + 3x_8 = 0 \\ 64x_1 + 12x_2 + 80x_3 + 100x_4 + 15x_5 + 125x_6 + 28x_7 + 35x_8 + 3x_9 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 5x_5 + 125x_6 + 16x_7 + 40x_8 + 4x_9 = 0 \\ 27x_1 + 6x_2 + 72x_3 + 192x_4 + 16x_5 + 512x_6 + 57x_7 + 152x_8 + 12x_9 = 0 \\ 64x_1 + 12x_2 + 160x_3 + 400x_4 + 30x_5 + 1000x_6 + 108x_7 + 270x_8 + 18x_9 = 0, \end{array} \right.$$

obtemos os coeficientes de $tp_{\mathcal{A}}(B_1)$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 = -1$$

$$x_5 = -2$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = -3$$

$$x_8 = 1$$

$$x_9 = 1.$$

Observe que este exemplo mostra que o método da restrição é efetivo, uma vez que para um tipo de singularidade, podemos construir vários mapas universais, porém, pode acontecer de alguma equação ser redundante, como neste caso, que obtivemos 11 equações, apesar de ter apenas 9 variáveis. Portanto,

$$tp_{\mathcal{A}}(B_1) = -3c_1^3 + 4c_1c_2 + 4c_1^2c'_1 - c_1c_1'^2 - 2c_2c'_1 - 3c_1c'_2 + c'_1c'_2 + c'_3.$$

5.3 Conclusão

Definimos neste trabalho o polinômio de Thom, o que é importante, uma vez que para cada tipo de singularidade temos um polinômio associado, e isto pode ser usado em classificação de singularidades.

Algumas aplicações é a sua utilização em problemas enumerativos da Teoria de Singularidades Clássica e também o fato da característica de Euler de certos conjuntos ser expressa em termos do polinômio de Thom. Para mais detalhes, ver (OHMOTO, 2016, Theorem 5.3, p.39) e (OHMOTO, 2016, Corollary 6.8, p.49).

REFERÊNCIAS

BRASSELET, J.-P.; SCHWARTZ, M.-H. Sur les classes de chern d'une ensemble analytique complexe. **Astérisque**, v. 82-83, p. 93–147, 1981. Citado nas páginas 18 e 103.

CHERN, S.-S. Characteristic classes of hermitian manifold. **Annals of Mathematics**, v. 47, p. 85–121, 1946. Citado na página 17.

HARTSHORNE, R. **Algebraic geometry**. New York: Springer-Verlag, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Citado nas páginas 21, 26, 32, 33, 40 e 48.

HATCHER, A. **Vector bundles and K-theory**. <<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf>>. Acesso em 4 de janeiro de 2021. Citado nas páginas 100 e 101.

_____. **Algebraic topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Citado na página 74.

HUSEMOLLER, D. **Fibre bundles**. New York: Springer-Verlag, 1994. Graduate Texts in Mathematics. Citado nas páginas 101 e 102.

KAZARIAN, M. Thom polynomials. **Advanced Studies in Pure Mathematics**, v. 43, p. 85–135, 2006. Singularity Theory and Its Applications. Citado na página 110.

KENNEDY, G. Macpherson's chern classes of singular algebraic varieties. **Communications in Algebra**, Taylor & Francis, v. 18, n. 9, p. 2821–2839, 1990. Citado na página 81.

MACPHERSON, R. Chern classes for singular algebraic variety. **Annals of Mathematics**, Mathematics Department, Princeton University, v. 100, No. 2, p. 423–432, 1974. Second Series. Citado nas páginas 18, 103 e 106.

MILNOR, J.; STASHEFF, J. **Characteristic Classes**. New Jersey: Princeton University Press, 1974. (Annals of Mathematics, No. 76). Citado nas páginas 17 e 100.

OHMOTO, T. Singularities of maps and characteristic classes. **School on Real and Complex Singularities in São Carlos, 2012**, Mathematical Society of Japan, v. 68, p. 191–265, 2016. Citado nas páginas 17, 18, 107, 115 e 124.

OORT, F. **Algebraic Geometry**. Netherlands: Springer, 1972. Citado na página 89.

RIMANYI, R. Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities. **Inventiones Mathematicae**, v. 143, p. 499–521, 2001. Citado na página 110.

SASAJIMA, T.; OHMOTO, T. Thom polynomials in a-classification i: counting singular projections of a surface. **European Mathematical Society Series of Congress Reports, IMPANGA Lecture Notes 'Vector bundles, Schubert varieties, and equivariant cohomology'**, p. 203–226, 2018. Citado na página 118.

THE Stacks Project: 29.39 Proper Morphisms. <<https://stacks.math.columbia.edu/tag/01W0>>. Acesso em 5 de abril de 2020. Citado na página 49.

THE Stacks Project: 29.9 Surjective Morphisms. <stacks.math.columbia.edu/tag/01RY>. Acesso em 5 de abril de 2020. Citado na página 48.

VAINSENER, I. **Classes características em geometria algébrica**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1985. Citado na página 81.

ZHANG, R. **Poincaré Duality**. <<http://math.columbia.edu/~rzhang/files/PoincareDuality.pdf>>. Acesso em 18 de abril de 2020. Citado nas páginas 78 e 79.

