Sumário

Introdução

Neste trabalho, fazemos um estudo da equação escalar com retardamento, conhecida como Equação de Wright

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)], \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

O Capítulo 1 é iniciado com um exemplo que introduz as noções básicas de uma equação diferencial com retardamento e destacamos alguns exemplos. Também neste capítulo são introduzidos alguns resultados da teoria básica das equações diferenciais com retardamento.

No Capítulo 2, estudamos algumas propriedades a respeito da extensão das soluções de uma EDFR. Ainda neste capítulo é feita uma discussão sobre equações lineares autônomas, que é fundamental para a compreensão do operador solução, $T(t)$, e a decomposição do espaço $\mathcal{C}$ em subespaços invariantes.

Um dos nossos objetivos é mostrar que impondo alguma condição sobre α, a Equação (1) tem soluções periódicas não-nulas. Para tanto precisamos de um teorema geral de ponto-fixo, que é dado no Capítulo 3.

No Capítulo 4, é feita uma análise da equação característica, proveniente da parte linear da Equação (1), que nos dá condições para concluir que a Equação (1) tem uma Bifurcação de Hopf em $\alpha = \pi/2$. Em seguida verificamos que as hipóteses do mencionado teorema de ponto-fixo estão satisfeitas e conseqüentemente podemos afirmar que para $\alpha > \pi/2$ a equação (1) tem soluções periódicas não-nulas. Provamos que as raízes características localizam-se em certas faixas horizontais do plano complexo e conseguimos, determinar com exatidão, a quantidade de raízes com parte real positiva. Finalizando o capítulo provamos a existência de uma seqüência infinita de valores positivos do parâmetro α onde ocorrem Bifurcações de Hopf.

Nossa análise da equação característica é a mais completa do que a existente na literatura. Além de levar ao valor crítico $\alpha = \pi/2$ mais diretamente, esta análise nos permitiu obter a mencionada seqüência de Bifurcações.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Exemplo

Com intuito de nos familializarmos com o tipo de equações que vamos trabalhar consideremos, num caso muito simples, a seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-r)), \quad \cdot = \frac{d}{dt}$$

onde $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t, x)$ é suposta contínua para $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ e r$\in \mathbb{R}^+$.

Neste tipo de equação não temos uma equação diferencial ordinária, já que não se trata de uma equação do tipo $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$ em que $\dot{x}(t)$ depende de t e do valor da função x no instante t. No nosso caso , observamos que $\dot{x}(t)$ depende de t e do valor da função x no instante $(t - r)$. Este é um exemplo do que chamaremos uma equação diferencial com retardamento. Neste tipo de equação para obtermos a solução x necessitamos não apenas do conhecimento da mesma em um instante t_0, como no caso de uma equação diferencial ordinária, mas sim do conhecimento da solução em um determinado intervalo anterior a t_0. Em outras palavras é necessário conhecer-se um certo "passado" da solução anterior a t_0. Vamos ver isto no exemplo que estaremos abordando.

Pomos o seguinte problema:

Determinar a função $x(t)$ definida em $[0, \infty)$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t-1)) & \text{para} \quad t \geq 1 \\ x(t) = x_0(t) & \text{para} \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

onde $x_0(t)$ é suposta contínua em $[0, 1]$.

Para $t \in [1, 2]$, seja a solução denotada por $x_1(t)$. Logo $x_1(t)$ satisfaz:

$$\dot{x}_1(t) = f(t, x_1(t-1)).$$

Mas $t \in [1, 2] \Longrightarrow (t-1) \in [0, 1] \Longrightarrow x_1(t-1) = x_0(t-1)$. Logo, temos:

$$\dot{x}_1(t) = f(t, x_0(t-1))$$

$$x_1(1) = x_0(1).$$

Integrando, ambos os lados da igualdade temos:

$$\int_1^t \dot{x}_1(\tau)\, d\tau = \int_1^t f(\tau, x_0(\tau - 1))\, d\tau, \quad t \in [1, 2],$$

donde

$$x_1(t) = x_1(1) + \int_1^t f(\tau, x_0(\tau - 1))\, d\tau$$

Portanto,

$$x_1(t) = x_0(1) + \int_1^t f(\tau, x_0(\tau - 1))\, d\tau, \quad t \in [1, 2].$$

Para $t \in [2, 3]$ denotemos a solução por $x_2(t)$. Logo:

$$\dot{x}_2(t) = f(t, x_2(t-1)).$$

Mas $t \in [2, 3] \Longrightarrow (t-1) \in [1, 2] \Longrightarrow x_2(t-1) = x_1(t-1) \Longrightarrow x_2(2) = x_1(2)$.

Então temos:

$$\int_2^t \dot{x}_2(\tau)\, d\tau = \int_2^t f(\tau, x_2(\tau - 1)\, d\tau, \quad t \in [2, 3]$$

donde

$$x_2(t) = x_2(2) + \int_2^t f(\tau, x_1(\tau - 1))\, d\tau.$$

Logo, $x_2(t) = x_1(2) + \displaystyle\int_2^t f(\tau, x_1(\tau - 1))\, d\tau$, $\quad t \in [2, 3]$.

Supondo conhecida a solução em $[n - 1, n]$, que denotaremos por $x_{n-1}(t)$, determinamos a solução em $[n, n + 1]$ como segue:

$$\dot{x}_n(t) = f(t, x_{n-1}(t - 1))$$

$$x_n(n) = x_{n-1}(n)$$

ou seja,

$$\int_n^t \dot{x}_n(\tau)\, d\tau = \int_n^t f(\tau, x_{n-1}(\tau - 1))\, d\tau, \quad t \in [n, n + 1]$$

donde,

$$x_n(t) = x_n(n) + \int_n^t f(\tau, x_{n-1}(\tau - 1))\, d\tau.$$

Portanto,

$$x_n(t) = x_{n-1}(n) + \int_n^t f(\tau, x_{n-1}(\tau - 1))\, d\tau, \quad t \in [n, n + 1].$$

Assim, a solução de nosso problema fica determinada para todo $t \geq 0$, onde $x(t) = x_n(t)$.

Vemos que precisamos ter como dado inicial o conhecimento da solução no intervalo $[0, 1]$ não bastando conhecer o seu valor no instante $t_0 = 1$, como já observado previamente.

1.2 Fatos básicos

Seja h, com $0 \leq h < \infty$, e $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-h, 0]$ no $\mathbb{R}^n$ com a norma

$$|\varphi| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|.$$

Aqui, no segundo membro, $|\cdot|$ denota uma norma usual do $\mathbb{R}^n$.

Sejam A, $0 < A \leq \infty$ e $x : [t_0 - h, t_0 + A) \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$ contínua.

Seja t , $t_0 \leq t < t_0 + A$. Por definição x_t é o elemento de $\mathcal{C}$, dado por:

$$x_t : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$$

$$\theta \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta)$$

A figura 1.1, dá uma idéia geométrica da função x_t.

Figura 1.1: Função x_t

Lema 1.1. *A aplicação* $\Phi : [t_0, t_0 + A) \longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ *dada por* $t \mapsto \Phi(t) = x_t$ *é contínua.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja $t_1 \in [t_0, t_0 + A)$. Tomemos $\bar{A} < A$ tal que $t_1 \in [t_0, t_0 + \bar{A}) \subset [t_0, t_0 + \bar{A}]$.

Temos que $x : [t_0 - h, t_0 + \bar{A}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua, logo existe $\delta^* > 0$ tal que

$$|y_1 - y_2| < \delta^* \Longrightarrow |x(y_1) - x(y_2)| < \varepsilon/2 \quad \forall y_1, y_2 \in [t_0 - h, t_0 + \bar{A}].$$

Seja $\delta = \min\{\delta^*, t_0 + \bar{A} - t_1\}$.

Assim dado $t_2 \in [t_0, t_0 + A)$ se $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_2 \in [t_0, t_0 + \bar{A})$. Então pela continuidade uniforme de x em $[t_0 - h, t_0 + \bar{A}]$ temos que:

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = |x_{t_1} - x_{t_2}| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |x_{t_1}(\theta) - x_{t_2}(\theta)| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |x(t_1 + \theta) - x(t_2 + \theta)|$$
$$\leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Portanto Φ é contínua.

$\square$

Definição 1.1. *Seja $f : [0, \infty) \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. A equação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

é chamada uma equação diferencial com retardamento.

Definição 1.2. *Uma função $x(t)$, contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$, $0 < A \leq \infty, t_0 \geq 0$ é dita uma solução de (1.1) se existir a derivada de $x(t)$ em $[t_0, t_0 + A)$ e $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.*

Observação 1.1. *Não é exigido de $x(t)$, definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$, que seja diferenciável em t_0. No instante t_0 consideramos apenas a derivada à direita. Nota-se que, quando $h = 0$, uma equação diferencial com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária.*

Apresentamos a seguir alguns exemplos de equações com retardamento.

(i) A equação $\dot{x}(t) = g(t, x(t - r))$ discutida no início, é uma equação com retardamento vista da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde $f(t, \varphi) = g(t, \varphi(-r))$, com $\varphi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R})$.

Pois $f(t, x_t) = g(t, x_t(-r)) = g(t, x(t-r))$.

(ii) Mais geralmente, a equação:

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t-h_1(t)), \ldots, x(t-h_m(t)))$$

$0 \leq h_j(t) \leq h < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, m$, é uma equação com retardamento vista como segue:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde $f(t, \varphi) = g(t, \varphi(0), \varphi(-h_1(t)), \ldots, \varphi(-h_m(t)))$, com $\varphi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$.

(iii)

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} g(t, \theta, x(t+\theta))\, d\theta$$

também pode ser escrita como

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde $f(t, \varphi) = \displaystyle\int_{-h}^{0} g(t, \theta, \varphi(\theta))\, d\theta, \quad \varphi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R})$.

■

Vamos estudar o problema da determinação de solução com condição inicial, da equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{1.1}$$

onde $f(t, \varphi)$ está definida em $[0, \infty) \times \mathcal{C}$ com valores em $\mathbb{R}^n$.

Sejam $t_0 \geq 0$ e $\psi \in \mathcal{C}$.

A função $x(t)$, contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$, $A > 0$, diferenciável em $[t_0, t_0 + A)$ é dita uma solução de (1.1) com função inicial ψ em t_0 se:

(i) $x_{t_0} = \psi$

(ii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$

Definição 1.3. *Dizemos que $f(t, \varphi)$ satisfaz a condição de Lipschitz ou é lipschitziana relativamente a φ em $\mathcal{C}$, se existir L tal que:*

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq L|\varphi_2 - \varphi_1|$$

para $0 \leq t \leq \infty$ e φ_1, φ_2 em $\mathcal{C}$.

Dado $H \in \mathbb{R}, H > 0$, denotamos

$$\mathcal{C}_H = \{\varphi \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n) |\ |\varphi| < H\}$$

Definição 1.4. *Dizemos que $f(t, \varphi)$ é <u>localmente lipschitziana relativamente a φ</u> em $[0, \infty) \times \mathcal{C}$ se, para todo τ e todo $H, 0 < \tau,\ H < \infty$, existe $L = L(\tau, H)$ tal que*

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq L|\varphi_2 - \varphi_1|$$

para todo $t \in [0, \tau]$ e toda $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_H$

O lema a seguir é uma conseqüência do Teorema Fundamental do Cálculo.

Lema 1.2. *Se $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}$, são dados e $f(t, \varphi)$ é contínua, então encontrar uma solução da equação (1.1) por (t_0, φ) é equivalente a resolver a equação integral:*

$$\begin{cases} x_{t_0} = \varphi \\ x(t) = \varphi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds \quad \text{para} \quad t \geq t_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *(Existência e Unicidade de Soluções) Seja $f(t, \varphi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a φ em $[0, \infty) \times \mathcal{C}$. Então, para qualquer $t_0 \geq 0$, $\psi \in \mathcal{C}$ existem $A > 0$ e função $x(t)$ definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$ que é solução de (1.1) com função inicial ψ em t_0. Ainda mais, esta solução é única.*

Demonstração. Seja F=$\{x \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n) \mid |x| \leq H$ e $x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), -h \leq \theta \leq 0\}$, onde $H > 0$ e $A > 0$ a ser fixado convenientemente. Mostremos inicialmente que F é um espaço métrico completo.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in F$ uma seqüência de Cauchy tal que $x_n \longrightarrow x$. Devemos mostrar que $x \in F$.

Temos que $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ segue da continuidade do módulo que $|x| = \lim |x_n|$ e, como $|x_n| \leq H$, temos que $|x| \leq H$

Falta mostrarmos que $x(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$. Mas isto é imediato, uma vez que $x_n(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], n \in \mathbb{N}$.

Assim temos que $x \in F$. Portanto F é um espaço métrico completo.

Consideremos a aplicação $T : F \to \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ definida por:

$$\begin{array}{ll} (Tx)(t_0+\theta) = \psi(\theta) & \text{para} \quad -h \leq \theta \leq 0 \\ (Tx)(t) = \psi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds & \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A \end{array}$$

Vamos mostrar inicialmente que T, para A conveniente, é uma aplicação de F em F.

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x_s)|\, ds \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t_0+A} |f(s, x_s)|\, ds$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Fazendo a restrição $A \leq 1$ e observando que, para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$,

$|x_s| = \sup\limits_{-h \leq \theta \leq 0} |x(s+\theta)| \leq H$, decorre que para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$

$|f(s, x_s)| \leq |f(s, x_s) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \leq L|x_s - 0| + K \leq LH + K$, onde

$$K = \sup_{t_0 \leq s \leq t_0+1} |f(s, 0)| \quad e \quad L = L(t_0 + 1, H)$$

Então, $|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + [LH + K]\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+A} ds = |\psi(0)| + A[LH + K]$, para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Por outro lado, como $|\psi| < H$, resulta que existe H_1 tal que $|\psi| < H_1 < H$.

Logo $|(Tx)(t)| < H_1 + A[HL + K] < H$ para A suficientemente pequeno.

Portanto, com uma tal escolha de A vem que:

$$|Tx| \leq H.$$

Assim, temos que $Tx \in F$. Portanto podemos concluir que T é uma aplicação de F em F.

Escolhendo agora A não só com a condição anterior mas também com a exigência $A < 1/L$, vamos mostrar que T é também uma contração de F em F.

Dados x e y em F, temos, $(Tx)(t_0+\theta) = (Ty)(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, para $-h \leq \theta \leq 0$, e

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds, \quad \text{e} \quad (Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, ds,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$

Então:

$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = 0 \quad$, para $t_0 - h \leq t \leq t_0$, e

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_s) - f(s, y_s)|\, ds \leq \int_{t_0}^{t_0+A} L|x_s - y_s|\, ds,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Como $|x_s - y_s| = \sup_{-h\leq\theta\leq 0}|(x_s - y_s)(\theta)| = \sup_{-h\leq\theta\leq 0} |x(s+\theta) - y(s+\theta)|$, para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$, temos $|x_s - y_s| \leq |x - y|$.

Assim,

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq L|x - y| \int_{t_0}^{t_0+A} ds = AL|x - y|$$

para $t_0 - h \leq t \leq t_0 + A$ e $|Tx - Ty| \leq AL|x - y|$

Logo T é uma contração, já que $AL < 1$.

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe uma e só uma função $x \in F$ tal que $Tx = x$.

Em outras palavras, existe uma e só uma função $x \in F$ tal que

$$(Tx)(t_0 + \theta) = x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0$$

$$(Tx)(t) = x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A$$

O nosso teorema é uma conseqüência imediata deste fato, pois:

(i) $x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), para - h \leq \theta \leq 0$

(ii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$

$\square$

No caso em que supomos $f(t, \varphi)$ apenas contínua podemos provar a existência, mas não a unicidade, de uma solução em um intervalo $[t_0 - h, t_0 + A)$, com A suficientemente pequeno, do problema de valor inicial. A prova, neste caso, pode ser feita como uma aplicação do teorema do ponto fixo de Schauder.

1.2.1 Alguns resultados da teoria básica das equações diferenciais com retardamento

Definição 1.5. *A equação (1.1) é dita linear se $f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t)$, onde $L(t, \varphi)$ é linear em φ; é dita linear homogênea se $h \equiv 0$ e linear não homogênea se $h \not\equiv 0$.*

Definição 1.6. *A equação (1.1) é dita autônoma se $f(t, \varphi) = g(\varphi)$ onde g não depende de t.*

Definição 1.7. *Sejam X e Y espaços de Banach e $f : A \subset X \longrightarrow Y$. A função f é completamente contínua se é contínua e leva cada subconjunto limitado de A em um subconjunto relativamente compacto de Y.*

Teorema 1.2. *(Teorema do Ponto Fixo de Schauder) Se U é um subconjunto limitado, fechado e convexo de um espaço de Banach X e, $T : U \longrightarrow U$ é completamente contínua, então T tem um ponto fixo em U.*

Definição 1.8. *Suponhamos que f na equação (1.1) seja contínua. Se x é uma solução da equação (1.1) sobre um intervalo $[t_0 - h, a), a > t_0$, dizemos que $\tilde{x}$ é uma extensão ou prolongamento de x se existe $b > a$ tal que $\tilde{x}$ está definida em $[t_0 - h, b)$ coincide com x em $[t_0 - h, a)$ e $\tilde{x}$ satisfaz a equação (1.1) em $[t_0, b)$.*

Definição 1.9. *Uma solução x da equação (1.1) é maximal se não existe uma extensão de x. Neste caso, seu intervalo de existência $[t_0 - h, a)$ é chamado intervalo maximal de existência à direita.*

Teorema 1.3. *(Teorema de Áscoli-Arzela) Seja K um espaço métrico compacto e E um espaço de Banach, consideremos $M \subseteq C(K, E)$. Então M é relativamente compacto (isto é, $\overline{M}$ é compacto) se, e somente se, M é equicontínuo e $M(x) = \{f(x)/f \in M\}$ é relativamente compacto em E para todo $x \in K$.*

Teorema 1.4. *(Princípio da Contração de Banach) Seja M um espaço métrico completo. Se $f : M \longrightarrow M$ é uma contração então f tem um único ponto fixo.*

Definição 1.10. *Sejam X um espaço de Banach e $A \subset X$, A convexo. Dizemos que $x \in A$, x é um ponto extremo de A , se para $a, b \in X$ $a \neq b$,*

$$x \in [a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b; \lambda \in (0, 1)\} \Longrightarrow [a, b] \quad \textit{não está contido em} \quad A.$$

O seguinte teorema corresponde à fórmula de integração por partes para as integrais de Riemann-Stieltjes.

Teorema 1.5. *(Integração Parcial) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ de variação limitada e seja $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de classe C^1, então:*

$$\int_a^b df(\tau)\varphi(\tau) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(\tau)\varphi' \, d\tau.$$

Lema 1.3. *(Gronwall) Se u e α são funções contínuas reais sobre $[a, b]$ e $\beta \geq 0$ é integrável sobre $[a, b]$ com*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\, ds, \quad a \leq t \leq b$$

então

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)[\exp \int_s^t \beta(\tau)\, d\tau]\, ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Se além disso, α é não-decrescente, então:

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp(\int_a^t \beta(s)\, ds), \ a \leq t \leq b.$$

Capítulo 2

Extensão das soluções e alguns fatos sobre equações lineares autônomas

Daremos algumas propriedades relativamente ao problema de extensão de soluções da equação (1.1). Para tanto consideremos as seguintes hipóteses:

(i) O segundo membro da equação (1.1) é uma função completamente contínua.

(ii) Vale alguma condição de unicidade relativamente ao problema de função inicial, isto é, se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções definidas em algum intervalo comum $[t_0-h, t_0+\delta), 0 < \delta \leq \infty$ com $x_{t_0} = y_{t_0}$ então $x(t) = y(t)$ para todo $t_0 \leq t < t_0+\delta$.

2.1 Extensão das soluções

Como conseqüência do Teorema(1.1) segue que (i) e (ii) são satisfeitas no caso em que o segundo membro da equação é uma função contínua, localmente lipschitziana relativamente a φ.

Indicamos por $x(t, t_0, \varphi)$ a solução da equação (1.1) cuja função inicial em t_0

é φ. Usamos a notação $x_t(t_0, \varphi)$ para indicar o elemento de $\mathcal{C}$ dado por:

$$x_t(t_0, \varphi)(\theta) = x(t+\theta, t_0, \varphi), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Propriedade 2.1. *Se $x(t)$, definida em $[t_0 - h, t_0 + \delta), 0 < \delta < \infty$ é solução de (1.1) e se, neste intervalo, $|x(t)| \leq H < \infty$, então podemos estender $x(t)$, como solução de (1.1) a $[t_0 - h, t_0 + \delta]$ e, por conseguinte à direita de $t_0 + \delta$.*

A demonstração segue do Critério de Cauchy tomando-se

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds$$

e usando a hipótese (i).

Demonstração. Consideremos qualquer seqüência $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}, t_0 \leq t_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$ tal que $t_n \longrightarrow t_0 + \delta$. Logo (t_n) é de Cauchy e, como x é contínua, $x(t_n) \longrightarrow x(t_0 + \delta)$.

Temos por (i) que $f(s, x_s)$ é limitada, logo $\exists L > 0, \mid |f(s, x_s)| \leq L$. Mostremos que $x(t_n)$ é de Cauchy. Se $t_m > t_n$ temos:

$$|x(t_m) - x(t_n)| = |\int_{t_0}^{t_m} f(s, x_s)\, ds - \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s)\, ds| =$$

$$|\int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s)\, ds + \int_{t_n}^{t_m} f(s, x_s)\, ds - \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s)\, ds|$$

$$\leq \int_{t_n}^{t_m} |f(s, x_s)|\, ds \leq L|t_m - t_n| \longrightarrow 0.$$

Logo $|x(t_m) - x(t_n)| \longrightarrow 0$ quando $m, n \longrightarrow \infty$. Assim $x(t_n)$ é uma seqüência de Cauchy, portanto $x(t_n) \longrightarrow \bar{x}$.

Definamos

$$x(t_0 + \delta) = \bar{x}.$$

Desta forma temos que $x(t)$ esta definida e é contínua em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$.

Falta mostrarmos que $x(t)$ é solução em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$.

Temos que $x(t)$ é solução de (1.1) em $[t_0 - h, t_0 + \delta)$, logo

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + \delta).$$

Como $x(t)$ é contínua com relação a t, temos que:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds \longrightarrow x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(s, x_s)\, ds$$

quando $t \longrightarrow t_0 + \delta$.

Como $x(t) \longrightarrow \bar{x}$ quando $t \longrightarrow t_0 + \delta$, temos que:

$$x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(s, x_s)\, ds = \bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} x(t_0 + \delta).$$

Assim $x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, ds$, para $t \in [t_0 - h, t_0 + \delta]$.

Portanto $x(t)$ é solução de (1.1)em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$.

A propriedade (2.1) segue agora tomando a função inicial $\psi = x_{t_0+\delta}$ no instante inicial $t_0 + \delta$.

$\square$

Observação 2.1. *Necessitamos da hipótese (i) para aplicar o Critério de Cauchy porque num espaço de Banach de dimensão infinita, como é o caso de* $\mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$*,* $h > 0$*, uma bola fechada não é um conjunto compacto e, portanto, não podemos garantir que uma função contínua, seja limitada em uma bola fechada.*

Vamos indicar por $[t_0 - h, t^+)$, $t_0 < t^+ \leq \infty$, o máximo intervalo aberto à direita ao qual podemos estender $x(t)$ como solução. Quando $t^+ = \infty$ dizemos que $x(t)$ é definida no futuro. Se $x(t)$ é definida e limitada em $[t_0 - h, \infty)$ dizemos que $x(t)$ é limitada no futuro.

Propriedade 2.2. *Suponhamos que a condição (i) esteja satisfeita e seja* $x(t)$ *solução de(1.1) tal que* $|x(t)| \leq H < \infty$ *para* $t_0 - h \leq t < t^+$*. Então,* $t^+ = \infty$*.*

Demonstração. Suponhamos que $t^+ < \infty$, então pela propriedade (2.1), poderíamos estender $x(t)$ até t^+ como solução de (1.1), isto é, $x(t)$ é solução de (1.1) com $t \in [t_0 - h, t^+]$. Contradição.

□

Propriedade 2.3. *Em geral não podemos estender $x(t, t_0, \varphi)$ como solução à esquerda de $[t_0 - h, t^+)$, isto é, não podemos garantir a existência de $\delta > 0$ e de uma função $x(t)$ definida em $[t_0 - \delta - h, t^+)$, $x(t)$ coincidindo com $x(t, t_0, \varphi)$ em $[t_0 - h, t^+)$ tal que*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t_0 - \delta \leq t < t^+.$$

Por exemplo, se tomarmos $\varphi \in \mathcal{C}$ tal que $\varphi(\theta)$ não tenha derivada à esquerda para $\theta = 0$, então, $x(t, t_0, \varphi)$ não admite prolongamento à esquerda qualquer que seja $0 \leq t_0$. Mas um prolongamento à esquerda não é possível, em geral, mesmo que $\varphi(\theta)$ seja diferenciável. De fato, basta que φ seja diferenciável e $\dot{\varphi}(0) \neq f(0, \varphi)$.

A desigualdade seguinte estabelece a continuidade de $x(t, t_0, \varphi)$ em relação a φ.

Para uma prova, veja [2], capítulo 2, teorema 2.

Teorema 2.1. *Seja $f(t, \varphi)$ contínua e localmente lipschitziana. Dados $t_0 \geq 0$ φ_1, φ_2 em $\mathcal{C}$, sejam $x(t, t_0, \varphi_1)$ e $x(t, t_0, \varphi_2)$ definidas em um intervalo comum $[t_0 - h, \tau]$, $t_0 \leq \tau < \infty$, com $|x_t(t_0, \varphi_j)| \leq H < \infty$, $t_0 \leq t \leq \tau$, $j = 1, 2$. Então*

$$|x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t-t_0)} |\varphi_2 - \varphi_1|$$

onde $L = L(\tau, H)$.

2.2 Alguns fatos sobre equações lineares autônomas

Uma equação diferencial funcional linear retardada autônoma tem a forma:

$$\dot{x}(t) = Lx_t \tag{2.1}$$

onde L é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^n$. Esta hipótese implica que existe uma matriz $n \times n$, $\eta(\theta)$ $-r \leq \theta \leq 0$, cujos elementos (que são funções) são de variação limitada, normalizada a fim de que η seja contínua à esquerda sobre $(-r, 0)$ e $\eta(0) = 0$, tal que :

$$L\varphi = \int_{-r}^{0} d[\eta(\theta)]\varphi(\theta) \quad \text{onde} \quad \varphi \in \mathcal{C}. \tag{2.2}$$

O objetivo é o de compreender o comportamento geométrico das soluções das Equações (2.1) quando elas são interpretadas em $\mathcal{C}$.

2.2.1 Semigrupo fortemente contínuo e o gerador infinitesimal

Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach real. Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, que denotaremos $\mathcal{C}_0$-semigrupo, é uma família a um parâmetro $T(t) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, $t \geq 0$, de operadores lineares limitados que satisfaz as propriedades:

(i) T(0)=I

(ii) $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0$

(iii)$\lim\limits_{t \downarrow 0} |T(t)\varphi - \varphi| = 0, \quad \varphi \in \mathcal{B}$

A todo $\mathcal{C}_0$-semigrupo $T(t)$ podemos associar um gerador infinitesimal

$$\begin{aligned} A : D(A) &\longrightarrow \mathcal{B} \\ \varphi &\mapsto A\varphi \end{aligned} \tag{2.3}$$

definido por:

$$A\varphi = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[T(t)\varphi - \varphi], \quad \varphi \in D(A)$$

isto é, para toda $\varphi \in \mathcal{B}$ para a qual o limite existe na topologia da norma de $\mathcal{B}$. Logo,

$$D(A) = \{\varphi \in \mathcal{B} \mid \exists \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)\varphi - \varphi}{t}\}.$$

Vale o seguinte lema :

Lema 2.1. *Se T(t) é um $\mathcal{C}_0$-semigrupo sobre $\mathcal{B}$, então:*

(i) Para toda $\varphi \in \mathcal{B}$, $t \mapsto T(t)\varphi$ é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^+$em $\mathcal{B}$;

(ii) A é um operador fechado densamente definido;

(iii) Para toda $\varphi \in D(A)$, $t \mapsto T(t)\varphi$ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = AT(t)\varphi = T(t)A\varphi.$$

Investigaremos as propriedades abstratas do operador solução da Equação(2.1). Seja φ em $\mathcal{C}$. Se $x(\cdot;\varphi)$ é a única solução da equação (2.1) com função inicial φ em zero, isto é, $x_0 = \varphi$ então o operador solução $T(t) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é definido pela relação:

$$T(t)\varphi = x_t(\cdot;\varphi) \tag{2.4}$$

Lema 2.2. *O operador solução $T(t)$, $t \geq 0$, definido pela relação (2.4) é um $\mathcal{C}_0$-semigrupo com gerador infinitesimal*

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in \mathcal{C} : \dfrac{d\varphi}{d\theta} \in \mathcal{C}, \dfrac{d\varphi}{d\theta}(0) = \displaystyle\int_{-r}^{0} d[\eta(\theta)]\varphi(\theta)\} \\ A\varphi = \dfrac{d\varphi}{d\theta}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Além disso, $T(t)$ é completamente contínuo para $t \geq r$.

Demonstração. Da unicidade das soluções da Equação (2.1), é óbvio que $T(t)$ é uma transformação linear que satisfaz as propriedades de semigrupo. Ou seja, T(0)=I e como

$$\begin{aligned} T(t_1)T(t_2)\varphi = T(t_1)(T(t_2)\varphi) = x_{t_1}(\cdot; T(t_2)\varphi) = x_{t_1}(\cdot; x_{t_2}(\cdot;\varphi)) = x_{t_1+t_2}(\cdot;\varphi) = \\ = T(t_1+t_2)\varphi \end{aligned}$$

temos $T(t_1)T(t_2)\varphi = T(t_1+t_2)\varphi$, para toda $\varphi \in \mathcal{C}$.

Desde que $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e linear, segue que existe uma constante γ tal que $|L\varphi| \leq \gamma|\varphi|$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}$. Da definição de $T(t)$ temos, para todo $t \geq 0$ fixo e $-r \leq \theta \leq 0$,

$$T(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta), & \text{para} \quad t+\theta \leq 0, \\ \varphi(0) + \displaystyle\int_0^{t+\theta} LT(s)\varphi\, ds, & \text{para} \quad t+\theta > 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Então como $|\varphi(t+\theta)| \leq |\varphi|, \quad t+\theta \leq 0$, e

$$|\varphi(0) + \int_0^{t+\theta} LT(s)\varphi\, ds| \leq |\varphi(0)| + \int_0^{t+\theta} |LT(s)\varphi|\, ds \leq$$

$$\leq |\varphi| + \int_0^{t+\theta} \gamma|T(s)\varphi|\, ds \leq |\varphi| + \gamma\int_0^{t} |T(s)\varphi|\, ds, \quad t+\theta > 0,$$

segue que:

$$\sup_{-r\leq\theta\leq 0} |T(t)\varphi(\theta)| \leq |\varphi| + \gamma\int_0^{t} |T(s)\varphi|\, ds.$$

Logo $|T(t)\varphi| \leq |\varphi| + \gamma\displaystyle\int_0^{t} |T(s)\varphi|\, ds$.

A desigualdade de Gronwall (Lema 1.3), implica

$$|T(t)\varphi| \leq e^{\gamma t}|\varphi|, \quad t \geq 0, \varphi \in \mathcal{C} \tag{2.7}$$

e portanto, $T(t)$ é limitado. De (2.6) vê-se que $T(t)$ é fortemente contínuo em $\varphi = 0$. Realmente:

dado $\varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{e^{\gamma t}} > 0$ tal que

$|\varphi - 0| = |\varphi| < \delta \Longrightarrow |T(t)\varphi - T(t)0| = |T(t)\varphi| \leq |\varphi| + \gamma \int_0^t |T(s)\varphi|\, ds \leq$

$|\varphi| + \gamma \int_0^t e^{\gamma s}|\varphi|\, ds = |\varphi| + \gamma|\varphi| \dfrac{1}{\gamma} e^{\gamma s} \Big|_0^t = |\varphi| + |\varphi|(e^{\gamma t} - 1) =$

$= |\varphi| e^{\gamma t} < \delta e^{\gamma t} = \dfrac{\varepsilon}{e^{\gamma t}} e^{\gamma t} = \varepsilon$

Assim temos que $T(t)$ é fortemente contínuo em zero.

Também $T(t)$ é um $\mathcal{C}_0$-semigrupo.

Seja $R > 0$. Se S$=\{\varphi \in \mathcal{C} : |\varphi| < R\}$, então para toda ψ em $T(t)$S, isto é, $\psi = T(t)\varphi$ com $\varphi \in$S, $t \geq r$, a relação (2.7) implica

$$|\psi| = |T(t)\varphi| \leq e^{\gamma t}|\varphi| < e^{\gamma t}R$$

e a equação (2.1) implica

$$|\dot{\psi}| = |L\psi| \leq \gamma|\psi| \leq \gamma e^{\gamma t}R.$$

Isto significa que $\psi \in T(t)S$ tem derivada uniformemente limitada e portanto $T(t)S$ é equicontínuo.

Assim pelo teorema de Áscoli-Arzela, temos que $T(t)S$ é relativamente compacto. Portanto $T(t)$ é completamente contínuo para $t \geq r$.

Para finalizar a prova, calculamos o gerador infinitesimal. Do Lema2.1 e da continuidade forte de $T(t)$ segue que, para toda φ em $D(A)$, temos para $\theta \in [-r, 0)$,

$$A\varphi(\theta) = \lim_{t\downarrow 0^+} \frac{T(t)\varphi(\theta) - \varphi(\theta)}{t} = \lim_{t\downarrow 0^+} \frac{\varphi(t+\theta) - \varphi(\theta)}{t} = \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta) \Longrightarrow A\varphi = \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

Logo temos, $A\varphi = \dfrac{d\varphi}{d\theta}$ e $D(A) \subseteq \{\varphi \in \mathcal{C} | \dfrac{d\varphi}{d\theta} \in \mathcal{C}\}$.

Por outro lado, se φ é continuamente diferenciável o limite

$$\lim_{t \downarrow 0^+} \frac{1}{t}[T(t)\varphi(\theta) - \varphi(\theta)]$$

existe para $\theta < 0$. Para θ=0 encontramos:

$$\frac{d\varphi}{d\theta}(0) = \lim_{t \downarrow 0^+} \frac{1}{t}[T(t)\varphi(0) - \varphi(0)] = lim_{t\downarrow 0^+} \frac{1}{t}[\varphi(0) + \int_0^t LT(s)\varphi\, ds - \varphi(0)] =$$
$$= lim_{t\downarrow 0^+} \frac{1}{t}[\int_0^t LT(s)\varphi\, ds] = lim_{t\downarrow 0^+} \frac{1}{t}[\int_0^t LT(s)\varphi\, ds - \int_0^0 LT(s)\varphi\, ds] =$$
$$[\int_0^t LT(s)\varphi\, ds]^{\cdot} \Big|_{t=0} = LT(t)\varphi \Big|_{t=0} = LT(0)\varphi = L\varphi = \int_{-r}^0 d[\eta(\theta)]\varphi(\theta)$$

Portanto temos que:

$$D(A) = \{\varphi \in \mathcal{C} : \frac{d\varphi}{d\theta} \in \mathcal{C}, \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = \int_{-r}^0 d[\eta(\theta)]\varphi(\theta)\}.$$

Assim o Lema está provado.

$\square$

2.2.2 Espectro do gerador - Decomposição de $\mathcal{C}$

Nosso objetivo nesta seção é determinar a natureza de $\sigma(T(t))$ e $\sigma(A)$ para o operador solução surgido na Equação (2.1). Para introduzirmos o espectro temos que trabalhar com espaços de Banach complexos. Seja $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ o espaço de Banach real complexificado e seja $B_{\mathbb{C}}$: $D(B_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ o operador linear complexificado. Isto significa que existe um espaço de Banach real $\mathcal{B}$ e um operador

$$B : D(B) \subset \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$$

tal que:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B} \oplus i\mathcal{B} \qquad \text{e} \qquad B_{\mathbb{C}}(b_1 + ib_2) = Bb_1 + iBb_2$$

para $b_1, b_2 \in$D(B). Em $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, podemos definir o conjugado complexo denotando por

$$\overline{b_1 + ib_2} = b_1 - ib_2.$$

O conjunto resolvente $\rho(B)$ de B é o conjunto de valores no plano complexo para os quais o operador $(\lambda I - B)$ é invertível onde o inverso é limitado com domínio denso em $\mathcal{B}$. Este inverso será denotado por $R(\lambda, B) = (\lambda I - B)^{-1}$, $\lambda \in \rho(B)$, e chamado resolvente de B. O complemento de $\rho(B)$ no plano complexo é chamado de o espectro de B e denotado por $\sigma(B)$. O espectro de um operador pode se constituir de três tipos diferentes de pontos, isto é, o espectro residual $R\sigma(B)$, o espectro contínuo $C\sigma(B)$, e o espectro pontual $P\sigma(B)$. O espectro residual consiste daqueles λ em $\sigma(B)$ para os quais $R(\lambda, B)$ existe, mas $D(R(\lambda, B))$ não é denso em $\mathcal{B}$. O espectro contínuo consiste daqueles λ em $\sigma(B)$ para os quais $\lambda I - B$ tem inverso ilimitado com domínio denso. O espectro pontual consiste daqueles λ em $\sigma(B)$ para os quais $\lambda I - B$ não tem um inverso.

Para $\lambda \in P\sigma(B)$, o autoespaço generalizado de λ, $\mathcal{M}_\lambda(B)$ é o subespaço de $\mathcal{B}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}(\lambda I - B)^k$$

a dimensão de $\mathcal{M}_\lambda(B)$ é chamada multiplicidade algébrica de λ e o menor inteiro k tal que

$$\mathcal{N}((\lambda I - B)^k) = \mathcal{N}((\lambda I - B)^{k+1})$$

é chamado ascendente de λ. Pontos do espectro pontual de A são chamados autovalores. Pontos isolados do espectro pontual de A com autoespaço generalizado de dimensão finita são chamados autovalores do tipo finito ou autovalores normais.

Lema 2.3. *Se A está definido pela equação(2.5), então $\sigma(A) = P\sigma(A)$ e λ está em $\sigma(A)$ se, e somente se, λ satisfaz a equação característica:*

$$\det \triangle(\lambda) = 0, \quad \triangle(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d[\eta(\theta)] \tag{2.8}$$

Para qualquer λ em $\sigma(A)$ o autoespaço generalizado $\mathcal{M}_\lambda(A)$é de dimensão finita e existe um inteiro k tal que $\mathcal{M}_\lambda(A) = \mathcal{N}((\lambda I - A)^k)$ e temos a decomposição em soma direta:

$$\mathcal{C} = \mathcal{N}((\lambda I - A)^k) \oplus \mathcal{R}((\lambda I - A)^k)$$

Do Lema2.3, sabemos que λ em $\sigma(A)$ implica que $\mathcal{M}_\lambda$ é de dimensão finita e $\mathcal{M}_\lambda(A) = \mathcal{N}((\lambda I - A)^k)$ para algum inteiro k.

Lema 2.4. *O subespaço $\mathcal{M}_\lambda(A)$ satisfaz:*

$$A\mathcal{M}_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A)$$

Em outras palavras, $\mathcal{M}_\lambda(A)$ é invariante por A.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{M}_\lambda(A) = \mathcal{N}((\lambda I - A)^k)$ logo $((\lambda I - A)^k)\varphi = 0$.

Queremos mostrar que $A\varphi \in \mathcal{M}_\lambda(A)$, isto é, $(\lambda I - A)^k A\varphi = 0$.

Sabemos que, $A(\lambda I - A) = (\lambda I - A)A$.

Logo temos:

$(\lambda I - A)^k A\varphi = \underbrace{(\lambda I - A)(\lambda I - A)\ldots(\lambda I - A)}_{(k-1) vezes}(\lambda I - A)A\varphi =$

$\underbrace{(\lambda I - A)\ldots(\lambda I - A)}_{(k-1) vezes} A(\lambda I - A)\varphi = \underbrace{(\lambda I - A)\ldots(\lambda I - A)}_{(k-2) vezes} A(\lambda I - A)^2\varphi =$

$= \ldots = A(\lambda I - A)^k\varphi = A0 = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)^k A\varphi = 0$

Portanto $A\varphi \in \mathcal{N}((\lambda I - A)^k) = \mathcal{M}_\lambda(A)$

Desta forma temos que $A\mathcal{M}_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A)$.

□

Seja d a dimensão de $\mathcal{M}_\lambda(A)$. Se $\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_d^\lambda$ é uma base para $\mathcal{M}_\lambda(A)$, seja $\Phi_\lambda = \{\varphi_1^\lambda, \ldots, \varphi_d^\lambda\}$

Como $A\mathcal{M}_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A)$,temos:

$$\begin{array}{l} A\varphi_1^\lambda = b_{11}\varphi_1^\lambda + b_{12}\varphi_2^\lambda + \cdots + b_{1d}\varphi_d^\lambda \\ A\varphi_2^\lambda = b_{21}\varphi_1^\lambda + b_{22}\varphi_2^\lambda + \cdots + b_{2d}\varphi_d^\lambda \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\varphi_d^\lambda = b_{d1}\varphi_1^\lambda + b_{d2}\varphi_2^\lambda + \cdots + b_{dd}\varphi_d^\lambda \end{array}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} A\varphi_1^\lambda \\ A\varphi_2^\lambda \\ \vdots \\ A\varphi_d^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1^\lambda \\ \varphi_2^\lambda \\ \vdots \\ \varphi_d^\lambda \end{bmatrix}$$

Também podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} A\varphi_1^\lambda & A\varphi_2^\lambda & \cdots & A\varphi_d^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^\lambda & \varphi_2^\lambda & \cdots & \varphi_d^\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{d1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{d2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1d} & b_{2d} & \cdots & b_{dd} \end{bmatrix}$$

Assim segue do fato de $A\mathcal{M}_\lambda(A) \subseteq \mathcal{M}_\lambda(A)$ que existe uma matriz B_λ , $d \times d$, tal que:

$$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$$

Lema 2.5. *O único autovalor de B_λ é λ.*

Demonstração. Para todo d-vetor a $(\lambda I - A)^k \Phi_\lambda a = 0$, mas

$$(\lambda I - A)^k \Phi_\lambda a = 0 \Rightarrow \underbrace{(\lambda I - A) \dots (\lambda I - A)}_{k-vezes} \Phi_\lambda a = 0$$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)}_{(k-1)vezes}(\lambda\Phi_\lambda a - A\Phi_\lambda a) = 0$

$\Rightarrow (\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)(\Phi_\lambda \lambda a - \Phi_\lambda B_\lambda a) = 0$

$\Rightarrow (\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)\Phi_\lambda(\lambda I - B_\lambda)a = 0$

Seja o d-vetor $\tilde{a} = (\lambda I - B_\lambda)a$, então temos:

$\underbrace{(\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)}_{(k-1)vezes}\Phi_\lambda \tilde{a} = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)}_{(k-2)vezes}(\lambda\Phi_\lambda \tilde{a} - A\Phi_\lambda \tilde{a}) = 0$

$\Rightarrow (\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)(\Phi_\lambda \lambda \tilde{a} - \Phi_\lambda B_\lambda \tilde{a}) = 0$

$\Rightarrow (\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)\Phi_\lambda(\lambda I - B_\lambda)\tilde{a} = 0$

$\Rightarrow (\lambda I - A)\dots(\lambda I - A)\Phi_\lambda(\lambda I - B_\lambda)^2 a = 0$

Repetindo este mesmo processo k-vezes, temos que para todo d-vetor a

$$\Phi_\lambda(\lambda I - B_\lambda)^k a = 0$$

Portanto $(\lambda I - B_\lambda)^k a = 0$, para todo d-vetor a. Mas isto implica que $(\lambda I - B_\lambda)^k = 0$, isto é $(\lambda I - B_\lambda)$ é nilpotente, logo o único autovalor de $(\lambda I - B_\lambda)$ é zero, conseqüentemente o único autovalor de B_λ é λ.

Assim temos que o único autovalor de B_λ é λ.

$\square$

Da definição de A na expressão (2.5), a relação $A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda B_\lambda$ nos dá

$\dot{\Phi}_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(\theta)B_\lambda \Rightarrow \dot{\Phi}_\lambda(\theta) - \Phi_\lambda(\theta)B_\lambda = 0 \Rightarrow \Phi_\lambda(\theta) = ce^{B_\lambda \theta}$, para $-r \leq \theta \leq 0$.

Mas $\Phi_\lambda(0) = c$. Logo

$$\Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}, \ -r \leq \theta \leq 0.$$

Do Lema2.1(iii), também obtemos:

$$\frac{d}{dt}(T(t)\Phi_\lambda) = AT(t)\Phi_\lambda = T(t)A\Phi_\lambda \Rightarrow \frac{d}{dt}(T(t)\Phi_\lambda) = T(t)\Phi_\lambda B_\lambda.$$

Logo, temos que:

$$T(t)\Phi_\lambda = ce^{B_\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Mas $T(0)\Phi_\lambda = c \Rightarrow \Phi_\lambda = c$.

Portanto,

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{B_\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Juntamente com a expressão para Φ_λ, implica que:

$$[T(t)\Phi_\lambda](\theta) = \Phi_\lambda(\theta)e^{B_\lambda t} = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda \theta}e^{B_\lambda t} = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(\theta+t)}.$$

Portanto, temos que:

$$[T(t)\Phi_\lambda](\theta) = \Phi_\lambda(0)e^{B_\lambda(\theta+t)}, \ -r \leq \theta \leq 0.$$

Esta relação permite definir $T(t)$ sobre $\mathcal{M}_\lambda(A)$ para todos os valores de t em $(-\infty, \infty)$. Portanto, sobre o autoespaço generalizado dos autovalores da equação (2.1), isto é, um elemento de $\sigma(A)$, a equação diferencial tem a mesma estrutura que uma equação diferencial ordinária.

Lema 2.6. *Para toda φ em $D(A)$ temos que $\mathcal{R}((\lambda I - A)^k)$ é invariante sob $T(t)$, isto é:*

$$T(t)\mathcal{R}((\lambda I - A)^k) \subseteq \mathcal{R}((\lambda I - A)^k)$$

Demonstração. Seja $\psi \in \mathcal{R}((\lambda I - A)^k) \Rightarrow \psi = (\lambda I - A)^k \varphi$, onde $\varphi \in D((\lambda I - A)^k)$. Temos que $T(t)A\varphi = AT(t)\varphi$ para toda φ em $D(A)$. Logo,

$$T(t)\psi = T(t)(\lambda I - A)^k \varphi = T(t) \underbrace{(\lambda I - A)(\lambda I - A) \dots (\lambda I - A)}_{k-vezes} \varphi =$$

$$=(\lambda T(t) - T(t)A) \underbrace{(\lambda I - A) \dots (\lambda I - A)}_{(k-1)vezes} \varphi=$$

$$=(\lambda T(t) - AT(t))(\lambda I - A) \dots (\lambda I - A)\varphi=$$

$$=(\lambda I - A)T(t)(\lambda I - A) \dots (\lambda I - A)\varphi=$$

$$=(\lambda I - A)(\lambda T(t) - AT(t)) \dots (\lambda I - A)\varphi=$$

$$=(\lambda I - A)^2 T(t) \dots (\lambda I - A)\varphi = \dots = (\lambda I - A)^k T(t)\varphi.$$

Desta forma, $T(t)\psi = (\lambda I - A)^k T(t)\varphi$, onde $T(t)\varphi \in D((\lambda I - A)^k)$.

Portanto $\mathcal{R}((\lambda I - A)^k)$ é invariante sob $T(t)$.

$\square$

Teorema 2.2. *Suponha Λ um conjunto finito $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ de autovalores da Equação (2.1) e sejam $\Phi_\Lambda = \{\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_p}\}$ $B_\Lambda = \mathrm{diag}(B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_p})$ onde Φ_{λ_j} é uma base do autoespaço generalizado de λ_j e B_{λ_j} é a matriz definida por $A\Phi_{\lambda_j} = \Phi_{\lambda_j} B_{\lambda_j}$, $j = 1, 2, 3, \dots, p$. Então o único autovalor de B_{λ_j} é λ_j e, para qualquer vetor a de mesma dimensão que Φ_Λ, a solução $T(t)\Phi_\Lambda a$ com valor inicial $\Phi_\Lambda a$ em $t = 0$ pode ser definida sobre $(-\infty, \infty)$ pela relação*

$$\begin{cases} T(t)\Phi_\Lambda a = \Phi_\Lambda e^{B_\Lambda t} a \\ \Phi_\Lambda(\theta) = \Phi_\Lambda(0) e^{B_\Lambda \theta} \quad \text{para} \quad -r \leq \theta \leq 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Além disso, existe um subespaço $\mathcal{Q}_\Lambda$ de $\mathcal{C}$ tal que $T(t)\mathcal{Q}_\Lambda \subseteq \mathcal{Q}_\Lambda$ para todo $t \geq 0$ e

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}_\Lambda \oplus \mathcal{Q}_\Lambda$$

onde $\mathcal{P}_\Lambda = \{\varphi \in \mathcal{C} \mid \varphi = \Phi_\Lambda a,$ para algum vetor $a\}$.

O Teorema acima dá um quadro do comportamento das soluções da Equação (2.1). De fato, sobre autoespaços generalizados, a Equação (2.1) comporta-se essencialmente como uma equação diferencial ordinária e a decomposição de $\mathcal{C}$

em dois subespaços invariantes sob A e $T(t)$ nos diz que podemos destacar o comportamento sobre os autoespaços.

Capítulo 3

Teorema de ejetividade

Nosso objetivo aqui, é dar um teorema geral de ponto-fixo que tem sido muito útil para obter soluções periódicas de equações diferenciais funcionais autônomas.

Definição 3.1. *Suponha X um espaço de Banach, U um subconjunto de X, e x um ponto dado em U. Dada uma aplicação $A : U \setminus \{x\} \longrightarrow X$, o ponto $x \in U$ é um ponto ejetivo de A se existe uma vizinhança aberta $G \subseteq X$ de x tal que para todo $y \in G \cap U$, $y \neq x$ existe um inteiro $m = m(y)$ tal que $A^m y \notin G \cap U$.*

Sejam $S_M = \{x \in X : |x| = M\}$ e $B_M = \{x \in X : |x| < M\}$ para qualquer $M > 0$. Então, $S_M = \partial B_M$.

Para referências dos dois teoremas seguintes que são enunciados sem provas, veja [1] seção11.7.

Teorema 3.1. *Se K é um subconjunto fechado, limitado, convexo, de dimensão infinita, de um espaço de Banach X, $A : K \setminus \{x_0\} \longrightarrow K$ é completamente contínua, e $x_0 \in K$ é um ponto ejetivo de A, então existe um ponto fixo de A em $K \setminus \{x_0\}$. Se K é de dimensão finita e x_0 é um ponto extremo de K , então a mesma conclusão se verifica.*

O Teorema abaixo é atribuído a R. Nussbaum.

Teorema 3.2. *Sejam X um espaço de Banach, K um subconjunto fechado e convexo de X, $A : K\setminus\{0\} \longrightarrow K$ uma aplicação completamente contínua, tal que $0 \in K$ é um ponto ejetivo de A. Suponhamos que exista um $M > 0$ tal que*

$Ax = \lambda x$, implique $\lambda < 1$ para todo $x \in K \cap S_M$. Se K tem dimensão infinita ou 0 é ponto extremo de K, então A tem ponto fixo em $K \cap B_M \backslash \{0\}$.

Observação 3.1. *Os Teoremas 3.1 e 3.2 permanecem válidos para aplicações A que são α-contrações. Esta generalização desempenha um papel importante no estudo de soluções periódicas de equações com um período menor do que duas vezes o retardo, equações com infinitos retardos, e equações diferenciais funcionais neutras.*

Na aplicação dos Teoremas 3.1 e 3.2 para equações diferenciais retardadas, a função A é usualmente similar a função de retorno de Poincaré em equações diferenciais ordinárias. De fato, uma vez obtido o conjunto $K \subseteq \mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que toda solução $x(\varphi), \varphi \in K$ da EDFR(f), $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ retorna para K em algum tempo $\tau(\varphi) > 0$, isto é, $x_{\tau(\varphi)}(\varphi) \in K$ se $\varphi \in K$, a aplicação $A : K \longrightarrow K$ é então definida por:

$$\varphi \mapsto A\varphi = x_{\tau(\varphi)}(\varphi).$$

O conjunto K desempenha o papel correspondente ao da secção transversal de Poincaré no contexto da aplicação de retorno de Poincaré.

Se A for completamente contínua e K fechado, convexo e limitado, então existirá uma $\varphi \in K$ tal que $A\varphi = \varphi$ e portanto, uma solução periódica de EDFR(f), com função inicial φ.

Parece que esta observação define um procedimento para resolver nosso problema, mas não é bem assim. Nós queremos obter soluções periódicas não-constantes da EDFR(f) e, se existe uma constante $a \in \mathbb{R}^n$ tal que a função constante $\tilde{a} \in \mathcal{C}$, definida por:

$$\tilde{a} : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\theta \mapsto \tilde{a}(\theta) = a$$

satisfaz $\tilde{a} \in K$, $f(\tilde{a}) = 0$, então $\tilde{a}$ poderia ser o único ponto fixo de A em K. Neste caso, não teríamos provado nada. Se K não contém tal função constante, então o problema de existência de soluções periódicas não-constantes está resolvido. Infelizmente, nas aplicações, a construção de um tal K é muito difícil, muitas vezes, esse conjunto contém somente uma solução constante x_0 que é um ponto extremo de K.

Os teoremas acima garantem que, se x_0 é ejetivo então existe uma solução periódica não-constante da EDFR(f).

Da discussão acima, é claro que é necessário um método eficiente para determinar quando uma solução constante da EDFR(f) é ejetiva relativamente a algum conjunto K e função A definida acima. Um tal resultado será dado agora.

Suponhamos que $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seja linear e contínua, $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ completamente contínua junto com a derivada $f^{'}$ e $f(0) = 0$, $f^{'}(0) = 0$.

Considere as equações:

$$\dot{x}(t) = Lx_t + f(x_t) \tag{3.1}$$

$$\dot{y}(t) = Ly_t \tag{3.2}$$

Para cada raiz característica λ da equação (3.2), existe uma decomposição de $\mathcal{C}$ como $\mathcal{C} = \mathcal{P}_\lambda \bigoplus \mathcal{Q}_\lambda$ onde $\mathcal{P}_\lambda$ e $\mathcal{Q}_\lambda$ são invariantes sobre o operador solução $T_L(t)$ da Equação (3.2)

$$T_L(t)\varphi = y_t(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{C}$$

Sejam os operadores projeção definidos pela decomposição de $\mathcal{C}$ acima, π_λ, $I - \pi_\lambda$, com a imagem de π_λ igual a $\mathcal{P}_\lambda$.

Seja $\Phi_\lambda = (\Phi_{1\lambda}, \ldots, \Phi_{d\lambda})$ uma base do subespaço $\mathcal{P}_\lambda$ e consideremos a aplicação linear $\varphi \mapsto b$, onde $b = b(\varphi)$ é um d-vetor definido por $\pi_\lambda\varphi = \Phi_\lambda b$. Escolhemos para b a norma euclideana.

Teorema 3.3. *Suponha que as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) Existe uma raiz característica λ da equação (3.2) satisfazendo $\Re(\lambda) > 0$.

(ii) Existe um conjunto fechado, convexo $K \subseteq \mathcal{C}$, $0 \in K$ e $\delta > 0$ tal que:

$$v = v(\delta) = \inf\{|\pi_\lambda\varphi| : \varphi \in K, |\varphi| = \delta\} > 0$$

(iii) Existe uma função completamente contínua $\tau : K \setminus \{0\} \longrightarrow [\alpha, \infty)$, $\alpha \geq 0$

tal que a função definida por:

$$\begin{aligned} A : K \setminus \{0\} &\longrightarrow K \\ \varphi \longmapsto A\varphi &= x_{\tau(\varphi)}(\varphi) \end{aligned} \tag{3.3}$$

é completamente contínua.

Então 0 é um ponto ejetivo de A.

A prova deste Teorema 3.3 pode ser encontrada em [1] Teorema 2.3, § 11.1. Ela depende fundamentalmente do Lema seguinte.

Seja $V : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação contínua, então podemos enunciar o Lema abaixo, cuja demonstração é encontrada em [1], Lema 1.3, §10.1.

Lema 3.1. *Existe uma forma quadrática definida positiva $V(\varphi) = b^T Bb$ com a propriedade que, para qualquer $p > 0$, existe um $\delta_0 > 0$ tal que, para qualquer δ, $0 < \delta \leq \delta_0$, se φ satisfaz $V(\varphi) \geq p^2\delta^2$ e $|\varphi| \leq \delta$ então*

$$\dot{V}(\varphi) := \liminf_{t \downarrow 0^+} \frac{1}{t}[V(x_t(\cdot;\varphi)) - V(\varphi)] > \frac{1}{2}V(\varphi) > 0$$

Estamos agora em condições de estabelecer uma ferramenta muito útil para obter soluções periódicas de uma EDFR, combinando os Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3.

Teorema 3.4. *Suponha K um conjunto fechado, convexo em $\mathcal{C}$, $0 \in K$, tal que as condições (i)-(iii) do Teorema3.3 são satisfeitas. Se qualquer das condições:*

(iv') K é limitado e tem dimensão infinita;

(iv'') K é limitado, tem dimensão finita e 0 é um ponto extremo de K;

(iv''') Existe um $M > 0$ tal que $Ax = \lambda x$, implique $\lambda < 1$ para todo $x \in K \cap S_M$

está satisfeita, então existe uma solução periódica não-nula da Equação (3.1) com valor inicial em $K \setminus \{0\}$.

Capítulo 4

Bifurcação de Hopf e um estudo da Equação de Wright

Consideraremos neste capítulo a equação escalar:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)], \qquad \text{onde} \quad \alpha > 0 \tag{4.1}$$

que foi introduzida nos anos 50, por E. Wright em seus estudos sobre a distribuição dos números primos. Desde então muito esforço foi dedicado para este problema e inúmeras aplicações foram realizadas, especialmente na área das ciências biológicas.

4.1 Bifurcação de Hopf

Discutiremos uma das maneiras mais simples em que soluções periódicas não-constantes de equações autônomas podem aparecer - a assim chamada " Bifurcação de Hopf ". Mais especificamente, consideremos uma família a um parâmetro de EDFR da forma:

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t) \tag{4.2}$$

onde $F(\alpha, \varphi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em α, φ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in \mathcal{C}$ onde $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α.

Defina $L : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$L(\alpha)\varphi = F_{\varphi}(\alpha, 0)\varphi$$

onde $F_{\varphi}(\alpha, 0)$ é a derivada de $F(\alpha, \varphi)$ com respeito a φ em $\varphi = 0$

Consideremos as seguintes hipóteses:

(H1) A EDFR(L(0)) linear tem uma raiz característica simples puramente imaginária $\lambda_0 = iv_0 \neq 0$ e toda raiz característica $\lambda_j \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$ satisfaz $\lambda_j \neq m\lambda_0$ para qualquer inteiro m.

Uma vez que $L(\alpha)$ é continuamente diferenciável em α (veja [1],capítulo 11, lema10.1), existe $\alpha_0 > 0$ e uma raiz característica simples $\lambda(\alpha)$ da equação linear EDFR($L(\alpha)$) a qual tem derivada contínua $\lambda'(\alpha)$ em α para $|\alpha| < \alpha_0$.

(H2) $\Re(\lambda'(0)) \neq 0$, onde a linha denota a derivada com relação a α.

O Teorema enunciado a seguir é conhecido como Teorema de Bifurcação de Hopf. Nos referiremos às conclusões deste teorema como uma Bifurcação de Hopf.

Teorema 4.1. *Suponha que $F(\alpha, \varphi)$ tenha primeira e segunda derivadas contínuas com relação a α, φ, $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α, e as hipóteses (H1) e (H2) estão satisfeitas. Então existem constantes $a_0 > 0, \alpha_0 > 0, \delta_0 > 0$, funções continuamente diferenciáveis $\alpha(a) \in \mathbb{R}, w(a) \in \mathbb{R}$ e $x^*(a)$ $w(a)$-periódica, para $|a| < a_0$ tal que $x^*(a)$ é uma solução da Equação (4.2).*

Além disso, para $|\alpha| < \alpha_0$, $|w - (2\pi/v_0)| < \alpha_0$, as soluções x^* são as únicas soluções w-periódicas da Equação (4.2) com $|x_t| < \delta_0$, exceto por translação de fase.

Mostraremos inicialmente que para a Equação (4.1) a Bifurcação de Hopf ocorre em $\alpha = \pi/2$.

Para fazer isto aplicaremos o Teorema 4.1 e, portanto, necessitamos de informações sobre o comportamento dos zeros da equação característica, isto é das raízes características da parte linear da equação (4.1). Façamos a linearização de (4.1) em torno de (0,0).

Seja $F(X,Y) = -\alpha X[1+Y]$, logo, $\dot{x}(t) = F(x(t-1), x(t))$ é a Equação (4.1).

$$F(X,Y) = F(0,0) + \frac{\partial F}{\partial X}(0,0)X + \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0)Y + O((|X|+|Y|)^2), \quad X, Y \longrightarrow 0$$

Conseqüentemente $F(X,Y) = -\alpha X + O((|X|+|Y|)^2)$, com $X, Y \longrightarrow 0$.

Assim a parte linear de (4.1) é

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1).$$

Procuramos por soluções da forma $x(t) = e^{\lambda t}$, logo

$$\lambda e^{\lambda t} = -\alpha e^{\lambda(t-1)} \Longrightarrow \lambda e^{\lambda} = -\alpha$$

Portanto a equação característica é dada por:

$$\lambda e^{\lambda} = -\alpha \tag{4.3}$$

As informações que precisamos sobre o comportamento das raízes características estão contidas no lema seguinte. Trata-se de um conhecido resultado apresentado em [1], Lema4.1, §11.4.

Observamos entretanto que nossa prova é essencialmente distinta da prova de Hale e Lunel.

Lema 4.1. *Se* $0 < \alpha < \pi/2$ *toda solução da equação (4.3) tem parte real negativa. Se* $\alpha > e^{-1}$ *existe uma raiz* $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\sigma(\alpha)$ *da equação (4.3) que é contínua juntamente com a primeira derivada em* α *e satisfaz* $0 < \sigma(\alpha) < \pi$, $\sigma(\pi/2) = \pi/2$, $\gamma(\pi/2) = 0$ *,*$\gamma'(\pi/2) > 0$ *e* $\gamma(\alpha) > 0$ *para* $\alpha > \pi/2$.

Demonstração. Provemos inicialmente a primeira parte do Lema. Seja $0 < \alpha < \pi/2$ e consideremos $\lambda = x + iy$ uma solução arbitrária de (4.3). Logo, temos que:

$$(x+iy)e^{x+iy} = -\alpha$$

Esta equação é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} e^x(x\cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y)) = -\alpha \\ e^x(y\cos(y) + x\,\mathrm{sen}(y)) = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} e^x(-x\cos(y) + y\,\mathrm{sen}(y)) = \alpha \\ e^x(y\cos(y) + x\,\mathrm{sen}(y)) = 0 \end{cases}$$

e re-escrevendo numa forma vetorial,

$$\begin{cases} e^x(x,y)(-\cos(y), \mathrm{sen}(y)) = \alpha \\ e^x(x,y)(\mathrm{sen}(y), \cos(y)) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

A segunda equação é uma condição de ortogonalidade entre os vetores (x,y) e $(\mathrm{sen}(y), \cos(y))$. Logo, como os vetores unitários $(-\cos(y), \mathrm{sen}(y))$ e $(\mathrm{sen}(y), \cos(y))$ são ortogonais, o sistema (4.4) é equivalente à equação vetorial

$$e^x(x,y) = \alpha(-\cos(y), \mathrm{sen}(y))$$

Chamemos $w(y) = \alpha(-\cos(y), \mathrm{sen}(y))$, logo ficamos com:

$$w(y) = (xe^x, ye^x) \tag{4.5}$$

Fixemos $x \geq 0$.

Note que, quando y percorre o semi-eixo $y : y \geq 0$ no sentido positivo, o primeiro membro $w(y)$ de (4.5) percorre a circunferência de raio α no sentido horário partindo do ponto $(-\alpha, 0)$. Veja figura 4.1. Concomitantemente o segundo membro percorre o semi-eixo vertical $(xe^x, ye^y) : y \geq 0$. Assim, uma condição

Figura 4.1:

necessária para que (4.5) esteja satisfeita é que $y \geq \pi/2$. Entretanto, $y = \pi/2$, temos que $w(\pi/2) = (0, \alpha)$ e no segundo membro de (4.5) $(xe^x, \pi/2e^x)$, temos que $\pi/2e^x > \pi/2 > \alpha$. Assim, (4.5) não pode estar satisfeita.

Portanto concluimos que toda solução de (4.3) tem parte real $x < 0$.

Para provar o restante do Lema, seja $\rho(\mu) = -\mu e^{\mu}$. Então $\rho^{'}(\mu) = -(1+\mu)e^{\mu}$ e portanto $\rho^{'}(\mu) > 0$ para $-\infty < \mu < -1$, $\rho^{'}(-1) = 0$, $\rho^{'}(\mu) < 0$,para $-1 < \mu < \infty$. Conseqüentemente, $\rho(\mu)$ tem um máximo em $\mu = -1$, $\rho(-1) = e^{-1}$.

Portanto, a equação (4.3) não tem raiz real para $\alpha > e^{-1}$.

Se $\alpha > e^{-1}$, seja $\lambda = \gamma + i\sigma$ onde $-\mu = \gamma$ uma raiz característica da equação (4.3), então:

$$(-\mu + i\sigma)e^{-\mu + i\sigma} = -\alpha \Longrightarrow \mu - i\sigma = \alpha e^{\mu - i\sigma}$$

logo,

$$\mu = \alpha e^{\mu} \cos(\sigma) \quad \text{e} \quad \sigma = \alpha e^{\mu} \operatorname{sen}(\sigma),$$

ou seja,

$$\mu = \sigma \cot(\sigma) \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\sigma e^{-\mu}}{\operatorname{sen}(\sigma)} = \frac{\sigma e^{-\sigma \cot(\sigma)}}{\operatorname{sen}(\sigma)}.$$

Definamos $f(\sigma) := \dfrac{\sigma e^{-\sigma\cot(\sigma)}}{\operatorname{sen}(\sigma)}$

Consideremos $f(\sigma)$ para $0 < \sigma < \pi$. É claro que $f(\sigma) > 0$. Temos que :

$$f^{'}(\sigma) = \frac{[1+\sigma(-\cot(\sigma)-\sigma\cot^{'}(\sigma))]\operatorname{sen}(\sigma)e^{-\sigma\cot\sigma} - \sigma\cos(\sigma)e^{-\sigma\cot(\sigma)}}{\operatorname{sen}^2(\sigma)}$$

Logo:

$$f^{'}(\sigma) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\sigma)}[[1+\sigma(-\cot(\sigma)+\sigma/\operatorname{sen}^2(\sigma))]\operatorname{sen}(\sigma) - \sigma\cos(\sigma)]e^{-\sigma\cot(\sigma)} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^3(\sigma)}[\operatorname{sen}^2(\sigma) + (-\sigma\cot(\sigma)\operatorname{sen}^2(\sigma)+\sigma^2) - \sigma\operatorname{sen}(\sigma)\cos(\sigma)]e^{-\sigma\cot(\sigma)}$$

Então

$$\frac{f^{'}(\sigma)}{f(\sigma)} = [\frac{1}{\sigma} - 2\cot(\sigma) + \sigma\csc^2(\sigma)] = \frac{1-2\sigma\cot(\sigma)+\sigma^2(\cot^2(\sigma)+1)}{\sigma}.$$

Portanto temos que:

$$\frac{f^{'}(\sigma)}{f(\sigma)} = \frac{(1-\sigma\cot(\sigma))^2+\sigma^2}{\sigma} > 0$$

Conseqüentemente $f^{'}(\sigma) > 0$ para $0 < \sigma < \pi$, isto é, $f(\sigma)$ é estritamente crescente para $0 < \sigma < \pi$.

Além disso, observa-se facilmente que $f(\sigma) \longrightarrow \infty$, com $\sigma \longrightarrow \pi$, e $f(\sigma) \longrightarrow e^{-1}$, com $\sigma \longrightarrow 0$.

Portanto, há exatamente um valor de σ, digamos $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha)$, $0 < \sigma_0(\alpha) < \pi$, para o qual

$$f(\sigma_0(\alpha)) = \alpha \quad se \quad \alpha > e^{-1}.$$

Isto é, $\sigma_0 = f^{-1}$ em $(0, \pi)$. Veja figura 4.2.

Seja $\gamma_0(\alpha) = -\sigma_0(\alpha)\cot(\sigma_0(\alpha))$.

Figura 4.2: Gráfico de $f(\sigma)$, $0 < \sigma < \pi$

Como $f(\pi/2) = \pi/2$, segue que $\sigma_0(\pi/2) = \pi/2$. Conseqüentemente, $\gamma_0(\pi/2) = 0$.

Dado $\alpha > \pi/2$, como $f(\pi/2) = \pi/2$ e f é estritamente crescente em $0 < \sigma < \pi$, então $\sigma_0(\alpha) > \pi/2$, isto é , $\pi/2 < \sigma_0(\alpha) < \pi$. Mas, para $\pi/2 < \sigma_0(\alpha) < \pi$, temos que $\cos(\sigma_0(\alpha)) < 0$.

Desta forma, para $\alpha > \pi/2$, temos $\gamma_0(\alpha) > 0$.

Consideremos a equação, $\lambda_0(\alpha)e^{\lambda_0 \alpha} = -\alpha$. Derivando com relação a α,

$$\lambda_0^{'}(\alpha)e^{\lambda_0(\alpha)} + \lambda_0(\alpha)\lambda_0^{'}(\alpha)e^{\lambda_0(\alpha)} = -1 \Longrightarrow (1 + \lambda_0(\alpha))\lambda_0^{'}(\alpha)e^{\lambda_0(\alpha)} = -1.$$

Logo, para $\alpha = \pi/2$,

$$(1 + \lambda_0(\pi/2))\lambda_0^{'}(\pi/2)e^{\lambda_0(\pi/2)} = -1 \Longrightarrow (1 + i(\pi/2)(\gamma_0^{'}(\pi/2) + i\sigma_0^{'}(\pi/2))i = -1,$$

ou seja,

$$(-\sigma_0^{'}(\pi/2) - \pi/2\gamma_0^{'}(\pi/2)) + i(\gamma_0^{'}(\pi/2) - \pi/2\sigma_0^{'}(\pi/2)) = -1.$$

Portanto temos:

$$\begin{cases} -\sigma_0^{'}(\pi/2) - \pi/2\gamma_0^{'}(\pi/2) = -1 \quad (I) \\ \gamma_0^{'}(\pi/2) - \pi/2\sigma_0^{'}(\pi/2) = 0 \quad (II) \end{cases}$$

De (II) temos que $\gamma_0^{'}(\pi/2) = \pi/2\sigma_0^{'}(\pi/2)$ substituindo em (I), obtemos $\sigma_0^{'}(\pi/2) = \dfrac{4}{4+\pi^2}$. Conseqüentemente:

$$\gamma_0^{'}(\pi/2) = \frac{2\pi}{4+\pi^2} > 0.$$

Assim concluimos a prova do teorema.

$\square$

A equação $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]$ pode ser escrita como:

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t)$$

onde $F(\alpha, \varphi) = -\alpha\varphi(-1)[1 + \varphi(0)]$. Observemos que, $F(\alpha, 0) = 0$ e temos a continuidade da primeira e segunda derivada com respeito a α, φ, além disso o Lema 4.1 assegura que as hipóteses (H1) e (H2) estão satisfeitas para $\alpha = \pi/2$. Portanto usando o Lema 4.1 e Teorema 4.1 podemos afirmar que:

Teorema 4.2. *A Equação $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]$ tem uma Bifurcação de Hopf em $\alpha = \pi/2$.*

4.2 Soluções periódicas

Nosso objetivo, agora é mostrar que a Equação (4.1) tem uma solução periódica não-nula para todo $\alpha > \pi/2$.

A demonstração dos Lemas 4.2, 4.3 e 4.5, pode ser encontrada em [1], capítulo 11, §4.

Proposição 4.1. *Seja* $x(\varphi, \alpha)$ *a solução da Equação (4.1) por* φ*. Se* $\varphi(0) > -1$ *então* $x(\varphi, \alpha)(t) \geq -1$ *para todo* $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $x(t) = x(\varphi, \alpha)(t)$ e suponhamos que para $t_0 \geq 0$ tenhamos $x(t_0) = -1$, logo $\dot{x}(t_0) = -\alpha x(t_0 - 1)[1 + x(t_0)] \Longrightarrow \dot{x}(t_0) = 0$. Estendendo a solução adiante do t_0 como a função constante igual a -1, veja figura 4.3, isto é, $x(t) = -1 \; \forall t \geq t_0$, temos pela unicidade de soluções que não existe outro prolongamento de $x(t)$ tal que $x(t) < -1$ para $t > t_0$.

Assim temos que $x(\varphi, \alpha)(t) > -1$ para $t \geq 0$.

Figura 4.3: Extensão da solução $x(t)$.

□

Proposição 4.2. *Não existe* $t_0 > 0$ *tal que* $x(\varphi, \alpha)(t) = 0$ *para* $t \geq t_0$*, a menos que* $\varphi = 0$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existisse um tal $t_0 > 0$.

Podemos tomar $t_0 = \min\{\tau \geq 0 | x(t) = 0, \quad t \geq \tau\}$.

Consideremos $t' \in (t_0 - 1, t_0)$ tal que $x(t') \neq 0$ e consideremos também $t = t' + 1 > t_0$. Logo temos,

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)] = -\alpha x(t') \neq 0$$

que é uma contradição, já que $t > t_0$.

Portanto não existe $t_0 > 0 \mid x(\varphi, \alpha)(t) = 0$ para $t > t_0$, exceto se $\varphi = 0$.

$\square$

Definição 4.1. *Dizemos que os zeros de $x(\varphi, \alpha)$ são limitados se $x(\varphi, \alpha)(t)$ tem somente um número finito de zeros positivos.*

Lema 4.2. *(i) Se $\varphi(0) > -1$ e os zeros da solução $x(\varphi, \alpha)$ são limitados então $x(\varphi, \alpha)(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$.*

(ii) Se $\varphi(0) > -1$, então $x(\varphi, \alpha)(t)$ é limitada. Além disso, se os zeros de $x(\varphi, \alpha)$ são ilimitados, então qualquer máximo de $x(\varphi, \alpha)(t)$, $t > 0$, é menor do que $e^{\alpha} - 1$.

(iii) Se $\varphi(0) > -1$ e $\alpha > 1$, então os zeros de $x(\varphi, \alpha)$ são ilimitados.

(iv) Se $\varphi(\theta) > 0$, $-1 < \theta < 0$ [ou se $\varphi(0) > -1, \varphi(\theta) < 0, -1 < \theta < 0$], então os zeros (se existirem) de $x(\varphi, \alpha)(t)$ são simples e a distância de cada zero de $x(\varphi, \alpha)(t)$ ao seguinte máximo ou mínimo é ≥ 1.

Definição 4.2. *Seja $W \subseteq \mathcal{C}$, dizemos que W é um <u>cone</u> se W é fechado e convexo com as seguintes propriedades:*

(i) se $\varphi \in W$ então $\lambda\varphi \in W$ para todo $\lambda > 0$

(ii) se $\varphi \in W, \varphi \neq 0$, então $-\varphi \notin W$.

Seja $K = \{\varphi \in \mathcal{C} \mid \varphi(\theta) \geq 0, -1 < \theta \leq 0, \varphi(-1) = 0, \varphi$ não-decrescente $\}$.

É fácil ver que K assim definido é um cone.

Se $\alpha > 1, \varphi \in K, \varphi \neq 0$, seja:

$$z(\varphi, \alpha) := \min\{t > 0 : x(\varphi, \alpha)(t) = 0, \quad \dot{x}(\varphi, \alpha)(t) > 0\}$$

Este mínimo existe pelo Lema 4.2, partes (iii) e (iv).

Além disso, o Lema 4.2, parte (iv), implica que $x(\varphi,\alpha)(t)$ é positiva e não-decrescente sobre $(z(\varphi,\alpha), z(\varphi,\alpha)+1)$.

Conseqüentemente, se $\tau(\varphi,\alpha) = z(\varphi,\alpha) + 1$, então a aplicação:

$$\begin{cases} A(\alpha)0 = 0 \\ A(\alpha)\varphi = x_{\tau(\varphi,\alpha)}(\varphi,\alpha) \quad \text{se} \quad \varphi \neq 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

é uma aplicação do cone K em si mesmo.

Como $\dot{x}(\tau(\varphi,\alpha)-1) > 0$, a continuidade de $x(\varphi,\alpha)(t)$ em t, φ, α, implica que $\tau(\varphi,\alpha)$ é contínua em $K\backslash\{0\} \times (1,\infty)$.

Lema 4.3. *A aplicação* $\tau : [K\backslash\{0\}] \times (1,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *definida por* $\tau(\varphi,\alpha) = z(\varphi,\alpha)+1$ *é completamente contínua.*

Seja t_0 tal que $x(t_0) = 0$, onde $t_0 - 1 > 1$ e $t \in (t_0, t_0+1)$ onde $t-1 \in (t_0-1, t_0)$.

A equação $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1+x(t)]$, pode ser vista como $(1+x(t))^{\cdot} = -\alpha x(t-1)[1+x(t)]$. Chamando $y(t) = 1 + x(t)$, temos:

$$\dot{y}(t) = -\alpha x(t-1) y(t)$$

Logo

$$y(t) = y(t_0) e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} -\alpha x(s-1)\, ds}.$$

Fazendo $\xi = s - 1$, temos:

$$y(t) = y(t_0) e^{\displaystyle\int_{t_0-1}^{t-1} -\alpha x(\xi)\, d\xi}.$$

Isto é,

$$1 + x(t) = (1 + x(t_0))e^{\int_{t_0-1}^{t-1} -\alpha x(\xi)\, d\xi}.$$

Portanto,

$$x(t) = -1 + e^{\int_{t_0-1}^{t-1} -\alpha x(\xi)\, d\xi}.$$

Como já sabemos, $x(\xi) > -1$, logo $-x(\xi) < 1$. Desta forma temos que:

$$x(t_0 + 1) = -1 + e^{\int_{t_0-1}^{t_0} -\alpha x(\xi)\, d\xi} \leq e^{\alpha} - 1.$$

Portanto segue das partes (ii) e (iv) do Lema 4.2 que $|A(\alpha)\varphi| \leq e^{\alpha} - 1$.

Assim para cada $\varphi \in K$, $A(\alpha)$ leva todo conjunto limitado B contido em $K\backslash\{0\}$ em $\{\varphi \in \mathcal{C} : |\varphi| < e^{\alpha} - 1\}$.

Lema 4.4. *A aplicação $A(\alpha)$ definida em (4.6) é completamente contínua.*

Demonstração. Como $\tau : [K\backslash\{0\}] \times (1, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ é completamente contínua e $\tau(\varphi, \alpha) > 1$, temos que para $\varphi \in K\backslash\{0\}$ e $\theta \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned}[A(\alpha)\varphi(\theta)]^{\cdot} = \dot{x}_{\tau(\varphi,\alpha)}(\theta) = \dot{x}(\tau(\varphi, \alpha) + \theta) = \\ = -\alpha x(\tau(\varphi, \alpha) + \theta - 1)[1 + x(\tau(\varphi, \alpha) + \theta)]\end{aligned}$$

Para α fixo, $\{\tau(\varphi, \alpha), \varphi \in B\} \subseteq \mathbb{R}$ é relativamente compacto, já que τ é completamente contínua, isto é, $\{\tau(\varphi, \alpha), \varphi \in B\}$ é limitado.

Logo,

$$\left|[A(\alpha)\varphi(\theta)]^{\cdot}\right| = \left|-\alpha x(\tau(\varphi, \alpha) + \theta - 1)\right| \left|1 + x(\tau(\varphi, \alpha) + \theta)\right| \leq \alpha M_1(1 + M_2)$$

Portanto $\exists\, M = \alpha M_1(1+M_2) \quad | \left|[A(\alpha)\varphi(\theta)]^{\cdot}\right| \leq M,\ \forall \varphi \in B.$

Usando o Teorema do Valor Médio, temos que para $\theta_1, \theta_2 \in [-1, 0]$ e $\theta_1 < \theta < \theta_2$,

$$|A(\alpha)\varphi(\theta_1) - A(\alpha)\varphi(\theta_2)| \leq \left|[A(\alpha)\varphi(\theta)]^{\cdot}\right| |\theta_1 - \theta_2| \leq M|\theta_1 - \theta_2|$$

Assim dado $\varepsilon > 0, \exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ tal que :

$$|\theta_1 - \theta_2| < \delta \Longrightarrow |A(\alpha)\varphi(\theta_1) - A(\alpha)\varphi(\theta_2)| < \varepsilon, \quad \forall \varphi \in B$$

Portanto $A(\alpha)B$ é equicontínuo. Além disso $|A(\alpha)B(\theta)| \leq e^{\alpha} - 1$.

Conseqüentemente pelo Teorema de Áscoli-Arzela, temos que $A(\alpha)B$ tem fecho compacto.

Também, se $\varphi_k \in K \setminus \{0\}$, $\varphi_k \longrightarrow 0$, podemos assumir que $\tau(\varphi_k, \alpha) \longrightarrow \tau(0, \alpha) = \tau_0(\alpha)$, com $k \longrightarrow \infty$.

A continuidade das soluções $x(\varphi, \alpha)(t)$ da Equação (4.1) com respeito a t, φ implica

$$x_{\tau(\varphi_k,\alpha)}(\varphi_k, \alpha) \longrightarrow x_{\tau_0(\alpha)}(0, \alpha) = 0$$

Logo $A(\alpha)\varphi_k \longrightarrow A(\alpha)0 = 0$.

Portanto $A(\alpha)$ é contínua em 0. Assim temos que $A(\alpha)$ é contínua.

Desta forma, podemos concluir que $A(\alpha)$ é completamente contínua.

$\square$

Seja $\lambda(\alpha)$ a raiz característica da Equação (4.3) dada no Lema 4.1, seja $\mathcal{C}$ decomposto como $\mathcal{C} = \mathcal{P}_{\lambda(\alpha)} \oplus \mathcal{Q}_{\lambda(\alpha)}$ da maneira usual e seja $\pi_{\lambda(\alpha)}$ a projeção usual sobre $\mathcal{P}_{\lambda(\alpha)}$.

Lema 4.5. *Se J_0 é um subconjunto compacto de $(1, \infty)$ então*

$$\mu = \inf\{|\pi_{\lambda(\alpha)}\varphi|, \varphi \in K, |\varphi| = 1, \alpha \in J_0\} > 0.$$

Se tomarmos agora $M > e^\alpha - 1$ no Teorema 3.2 então os lemas acima e suas conseqüências implicam que todas as hipóteses dos Teoremas 3.2 e 3.3 estão satisfeitas para a equação $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1 + x(t)]$, que pode ser vista como:

$$\dot{x}(t) = Lx_t$$

onde $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $L\varphi = -\alpha\varphi(-1)[1 + \varphi(0)]$. Assim provamos o seguinte resultado

Teorema 4.3. *Se $\alpha > \pi/2$, a Equação (4.1) tem uma solução periódica não-nula.*

4.3 As raízes características e uma generalização do Teorema 4.2

Nesta seção apresentamos um estudo mais completo da distribuição em $\mathbb{C}$ das raízes características da equação (4.3) e mostramos que ocorrem mais Bifurcações de Hopf para a Equação (4.1) do que estabelece o Teorema 4.2.

Lema 4.6. *Para qualquer $\alpha > 0$, não existe raiz característica $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = x + iy$ com $y \geq 0$ nas faixas:*

$$\mathcal{F}_k \subset \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}_k := \{(x + iy) \in \mathbb{C} \mid y \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Demonstração. Se $\lambda = (x + iy) \in \mathcal{F}_k$, para algum $k = 1, 2, \ldots$ segue-se que $\operatorname{sen}(y) < 0$. Por outro lado $ye^x \geq 0$, logo a equação

$$(xe^x, ye^x) = \alpha(-\cos(y), \operatorname{sen}(y))$$

não pode estar satisfeita. $\square$

Observação 4.1. *Como as raízes características aparecem aos pares conjugados, também não existem raízes características nas faixas:*

$$\mathcal{F}_k \subset \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}_k := \{(x+iy) \in \mathbb{C}, \mid -y \in (-2k\pi, -(2k-1)\pi)\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

já que para $-y \in (-2k\pi, -(2k-1)\pi) \implies y \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ *e portanto* $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen}(y) > 0$*. Por outro lado* $-ye^x \leq 0$*. Conseqüentemente a equação (4.3) não pode estar satisfeita.*

As faixas acima mencionadas estão representadas na figura 4.4.

Figura 4.4: Localização das raízes características.

Proposição 4.3. *Se* $\pi/2+2k\pi < \alpha < \pi/2+2(k+1)\pi$, *para algum* $k, k = 0, 1, 2, \ldots$ *então existem exatamente* $2(k+1)$ *raízes características com parte real positiva.*

Demonstração. Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideremos a semi-reta $l_x = \{(xe^x, \eta)\ \eta \geq 0\}$.

Dado α nas condições da proposição, consideremos o conjunto $D_\alpha \subset \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid |xe^x| \leq \alpha\}$. Observemos que, para $\alpha < e^{-1}$, D_α é um conjunto desconexo. De fato, pelo gráfico da função xe^x, veja figura 4.5, vemos que existem, $x_2 < x_1 < 0 < x_0$ tais que:

$$|x_j e^{x_j}| = \alpha, \quad j = 0, 1, 2$$

Logo para $\alpha < e^{-1}$, $D_\alpha = (-\infty, x_2] \cup [x_1, x_0]$ e portanto D_α é desconexo.

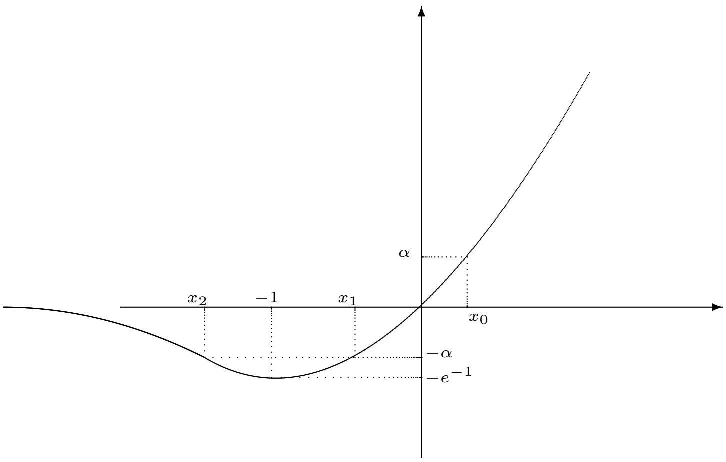

Figura 4.5: Gráfico da função xe^x

Como estamos interessados em determinar o número de raízes características com parte real positiva, podemos nos restringir aos pontos $x \in D_\alpha \cap \mathbb{R}^+$. Para cada $x \in D_\alpha \cap \mathbb{R}^+$, seja $y_j = y_j(x) \in [2j\pi + \pi/2, (2j+1)\pi]$ tal que

$$\alpha(-\cos(y_j(x)), \operatorname{sen}(y_j(x))) \in l_x, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Figura 4.6:

Segue da geometria da situação, veja figura 4.6, que $y_j(x)$ é crescente em $[2j\pi + \pi/2, (2j+1)\pi]$, logo $y_j(x)e^x$ também é e, portanto $-y_j(x)e^x$ é decrescente.

Como a função seno é decrescente em $[2j\pi+\pi/2,(2j+1)\pi]$, temos que $\alpha\,\mathrm{sen}(y_j(x))$ é decrescente em $[2j\pi+\pi/2,(2j+1)\pi]$.

Defino $d_j : D_\alpha \cap \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d_j(x) = \alpha\,\mathrm{sen}(y_j(x)) - y_j(x)e^x$$

É claro que d_j é uma função decrescente.

É fácil ver que $y_j(0) = \pi/2 + 2j\pi$ e $y_j(x_0) = (2j+1)\pi$ onde $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Seja $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Então, temos que:

$d_0(0) = \alpha\,\mathrm{sen}(y_0(0)) - y_0(0) = \alpha - \pi/2 > 0$

$d_1(0) = \alpha\,\mathrm{sen}(y_1(0)) - y_1(0) = \alpha - (\pi/2 + 2\pi) > 0$

$\vdots$

$d_k(0) = \alpha\,\mathrm{sen}(y_k(0)) - y_k(0) = \alpha - (\pi/2 + 2k\pi) > 0$

$d_{k+1}(0) = \alpha\,\mathrm{sen}(y_{k+1}(0)) - y_{k+1}(0) = \alpha - (\pi/2 + 2(k+1)\pi) < 0$

Também,

$d_k(x_0) = \alpha\,\mathrm{sen}(y_k(x_0)) - y_k(x_0)e^{x_0} = -(2k+1)\pi e^{x_0} < 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Conseqüentemente existem exatamente $k+1$ pontos $x_j \in D_\alpha \cap \mathbb{R}^+$, $j = 0, 1, \ldots, k$ tais que $d_j(x_j) = 0$, isto é , $\alpha\,\mathrm{sen}(y_j(x_j)) = y_j(x_j)e^{x_j}$.

A cada um dos $(k+1)$ pontos $x_j \in D_\alpha \cap \mathbb{R}^+, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k$ associamos $y_j = y_j(x_j) \in [2j\pi + \pi/2, (2j+1)\pi]$ tal que $\alpha(-\cos(y_j), \mathrm{sen}(y_j)) \in l_{x_j}$, ou seja, $-\alpha\cos(y_j) = x_j e^{x_j}$.

Portanto, temos exatamente $2(k+1)$ raízes características, com parte real positiva que são: $\lambda_j = x_j + iy_j$ e $\bar{\lambda}_j = x_j - iy_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k$.

$\square$

Como corolário desta proposição temos:

Corolário 4.1. *Se $\pi/2 < \alpha < \pi/2 + 2\pi$, então existem exatamente duas raízes características com parte real positiva.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição (4.3).

$\square$

Teorema 4.4. *Ao longo dos pontos da seqüência $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ onde $\alpha_k = 2k\pi + \pi/2, k = 0, 1, 2, \ldots$ a Equação (4.1) tem uma Bifurcação de Hopf.*

Demonstração. Devemos verificar que as hipóteses (H1) e (H2) estão satisfeitas. Sabemos que as raízes características da equação (4.1) são os $\lambda's$, $\lambda = x + iy$, que satisfazem:

$$e^x(x, y) = \alpha(-\cos(y), \operatorname{sen}(y)).$$

Procuremos as raízes imaginárias puras, isto é, $x = 0$, com $y \geq 0$. Ou seja, os $y's$ que satisfazem:

$$(0, y) = \alpha(-\cos(y), \operatorname{sen}(y)) \tag{4.7}$$

Uma condição necessária para que y seja solução da Equação (4.7) é que $y = \pi/2 + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Neste caso (4.7) está satisfeita se, e somente se,

$$y = \alpha$$

ou seja, $\alpha = \pi/2 + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Além disso, se $\alpha = \pi/2 + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, a única raiz característica λ_k com $\Re(\lambda_k) = 0$ e $\Im(\lambda_k) \geq 0$ é $i(\pi/2 + 2k\pi)$.

Assim não existem múltiplos inteiros de λ_k e $\bar{\lambda}_k$, que sejam raízes características. Isto mostra que a hipótese (H1) está satisfeita.

Considerando $\alpha = \pi/2 + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ temos que $\alpha > e^{-1}$ então pelo Lema4.1 existe uma raiz característica $\lambda(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$ que é contínua junto com a primeira derivada em α. Ou seja:

$$e^{x(\alpha)}(x(\alpha), y(\alpha)) = \alpha(-\cos(y(\alpha)), \operatorname{sen}(y(\alpha)))$$

Logo,

$$\begin{cases} x(\alpha)e^{x(\alpha)} = -\alpha\cos(y(\alpha)) \\ y(\alpha)e^{x(\alpha)} = \alpha\operatorname{sen}(y(\alpha)) \end{cases} \tag{4.8}$$

Derivando ambos os lados obtemos:

$$\begin{cases} (1 + x(\alpha))x^{'}(\alpha)e^{x(\alpha)} = -\cos(y(\alpha)) + \alpha y^{'}(\alpha)\operatorname{sen}(y(\alpha)) \\ (y^{'}(\alpha) + y(\alpha)x^{'}(\alpha))e^{x(\alpha)} = \operatorname{sen}(y(\alpha)) + \alpha y^{'}(\alpha)\cos(y(\alpha)) \end{cases} \tag{4.9}$$

Substituindo em $\alpha_0 = \pi/2 + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \ldots$ onde $y(\alpha_0) = \alpha_0$ e $x(\alpha_0) = 0$, temos que:

$$\begin{cases} x^{'}(\alpha_0) = \alpha_0 y^{'}(\alpha_0) \quad (I) \\ y^{'}(\alpha_0) + \alpha_0 x^{'}(\alpha_0) = 1 \quad (II) \end{cases} \tag{4.10}$$

Substituindo (I) em (II) obtemos $y^{'}(\alpha_0) = \dfrac{1}{1 + \alpha_0^2}$. Desta forma temos,

$$x^{'}(\alpha_0) = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0^2} > 0.$$

Portanto $\Re\lambda^{'}(\alpha_0) \neq 0$. Isto mostra que a hipótese (H2) está verificada.

Assim, pelo Teorema4.1 temos que a Equação (4.1) tem uma Bifurcação de Hopf em $\alpha = \pi/2 + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] HALE, J.K. E LUNEL, S.M.V. *Introduction to Functional Differencial Equations.* New York: Springer-Verlag, 1993. 447p.

[2] ONUCHIC, N. *Equações Diferenciais com Retardamento.* In:COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 8^o, Poços de Caldas,1971. Livro...Poços de Caldas, IMPA, 1971. 85p.

[3] TÁBOAS, P.Z. Periodic Solutions of a Planar Delay Equation. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 116A:85-101, 1990.

[4] ROYDEN, H.L. *Real Analysis.* London: Collier-Macmillan Limited, 1968. 349p.