UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

D-espaços e aplicações

Lucas Chiozini de Souza

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Lucas Chiozini de Souza

D-espaços e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Novembro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S729d

Souza, Lucas Chiozini de
D-espaços e aplicações / Lucas Chiozini de Souza; orientador Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2019.
57 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. D-espaços. 2. Lindelöf. 3. Submodelo elementar. 4. Menger. I. Aurichi, Leandro Fiorini, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Lucas Chiozini de Souza

D-spaces and applications

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
November 2019

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que acreditam no poder transformador da Educação e da Ciência.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais e demais familiares por todo apoio, incentivo e paciência sempre dispensados a mim e também a Melissa Freitas da Silva e Damiano Tonelli Breschi, pelo suporte nos momentos difíceis.

Agradeço ainda a meu orientador, Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi, não somente por tudo que me ensinou, mas também à forma altruísta com que sempre se portou em relação a mim.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa a mim concedida, sem a qual não seria possível meu acesso à pós-graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil(CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

SOUZA, L. C. ***D*-espaços e aplicações**. 2019. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Este trabalho é uma coleção de resultados acerca de D-espaços, propostos por van Douwen e Pfeffer (1979), suas relações com outras propriedades topológicas e algumas estratégias interessantes presentes nas demonstrações envolvidas. Tem ainda como objetivo mostrar como variados conceitos da topologia geral são aplicados na tentativa de estudar uma classe relativamente nova de espaços topológicos.

Palavras-chave: D-espaços, Lindelöf, submodelo elementar, Menger.

ABSTRACT

SOUZA, L. C. ***D*-spaces and applications**. 2019. 57 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

This work is a collection of results regarding *D*-spaces, which were proposed by van Douwen e Pfeffer (1979), their relations with other topological properties and some of the interesting strategies present in related proofs. It is also its goal to showcase how different concepts from general topology are employed in an attempt to study a relatively new class of topological spaces.

Keywords: D-spaces, Lindelöf, elementary submodel, Menger.

LISTA DE SÍMBOLOS

$e(X)$ — Extent de X

$\mathbb{R}_S$ — Reta de Sorgenfrey

$f \upharpoonright X$ — f restrita a X

$\mathbb{Z}$ — Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{N}$ — Conjunto dos números naturais

$M \prec N$ — M é submodelo elementar de N

$\mathbb{R}$ — Conjunto dos números reais

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo discutir o conceito de D-espaços, introduzido por van Douwen e Pfeffer (1979), uma vez que ainda são estudadas as suas relações com outras propriedades de recobrimento, em especial, com os espaços de Lindelöf, de maneira transversal e dando particular atenção às diferentes estratégias empregadas nas mesmas. Vale ressaltar que a pergunta: todo espaço de Lindelöf é um D-espaço é uma das 20 perguntas presente em Hrusák e Moore (2007).

Assim, foram escolhidas algumas das principais classes de espaços topológicos que são D, especialmente aquelas que requerem instrumentos distintos como o uso de submodelos elementares enumeráveis e de subconjuntos N-sticky, uma definição criada por Fleissner e Stanley (2001).

Temos ainda alguns resultados consistentes com ZFC que seguem do Axioma de Martin e do Princípio $\diamondsuit$ e outros que usam jogos topológicos. Tendo em mente a ideia de apresentar exemplos e demonstrações variados, foram parcialmente omitidas duas demonstrações mais técnicas, uma vez que seus resultados e as partes de suas provas presentes neste trabalho são mais interessantes que seus detalhes não descritos.

Este trabalho contém outros quatro capítulos, desta forma organizados:

Capítulo 2: Definições e exemplos, onde serão dadas as primeiras definições necessárias para o estudo de D-espaços, bem como exemplos e contraexemplos mais diretos. Capítulo 3: Lemas, contendo dois lemas que ajudam a provar que determinadas uniões de discretos fechados são discretas e fechadas. Capítulo 4: Algumas classes de D-espaços, compostas por exemplos variados de D-espaços, usando diferentes ferramentas. Por fim, temos o Capítulo 5: D-espaços e espaços de Lindelöf, onde são abordadas demonstrações um pouco mais técnicas relacionando essas duas classes de espaços topológicos.

CAPÍTULO

2

DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Iniciamos com as principais definições necessárias para o estudo de D-espaços, bem como alguns exemplos e observações que as seguem, de forma que possamos começar a entender como estes espaços se comportam.

2.1 Definições

O conceito de D-espaços aparece pela primeira vez na literatura matemática em van Douwen e Pfeffer (1979), embora Gruenhage (2010) diga que sua origem tenha sido uma troca de cartas entre E. K van Douwen e E. Michael. Naturalmente, este é o principal conceito a ser estudado neste trabalho.

Definição 2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $N : X \to \tau$ é uma atribuição de vizinhanças abertas (AVA) - ou open-neighbourhood assignment (ONA) - se $x \in N(x)$ para todo $x \in X$.

Observação 2.2. Dados X um espaço topológico, N um ONA sobre X e $S \subset X$, é interessante fixar as seguintes notações:

$N[S] = \{N(x) : x \in S\}$, para que concorde com a notação mais geral usada para funções, isto é, se $f : A \to B$ é uma função e $A' \subset A$, $f[A'] = \{f(a) : a \in A'\}$, e

$N(S) = \bigcup N[S] = \{x \in X : \exists s \in S(x \in N(s))\}$.

Definição 2.3. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é um D-espaço se, dado um ONA N sobre X, existe $D \subset X$ discreto e fechado tal que $N(D) = X$

Neste contexto, dizemos que D é um núcleo (kernel) para N (ou de N).

Observação 2.4. Uma vez que não é interessante estudar D-espaços nos quais não se pode garantir que os pontos são fechados, será considerado que todos os espaços citados são T_1, assim todos os resultados tratarão, implicitamente, dessa classe de espaços, a menos que seja dito o contrário.

A seguinte definição deve-se a Fleissner e Stanley (2001) e será útil em algumas demonstrações:

Definição 2.5. Dados (X,τ) espaço topológico e N um ONA sobre X, dizemos que $D \subset X$ é N-sticky se D é discreto, fechado e, dado $x \in X$, se $N(x) \cap D \neq \emptyset$, então $x \in N(D)$.

Observação 2.6. Sejam (X,τ) um espaço topológico e M e N dois ONAs sobre X tais que M refina N, ou seja, $M(x) \subset N(x)$ para todo $x \in X$. Assim, dado $D \subset X$ discreto e fechado, se D é um núcleo para M, isso significa que $M(D) = X$, portanto, $N(D) \supset M(D) = X$. Ou seja, D também é um núcleo para N.

Fixando agora uma base $\mathscr{B}$ para (X,τ), dado um ONA N sobre X, podemos definir um ONA M da seguinte forma: dado $x \in X$, seja $M(x) \in \mathscr{B}$ de forma que $M(x) \subset N(x)$, o que é sempre possível, pois $\mathscr{B}$ é uma base para (X,τ). Assim, M refina N no mesmo sentido usado acima. Portanto, como qualquer núcleo D para M também é um núcleo para N, para demonstrarmos que X é um D-espaço, é suficiente mostrar que todo ONA sobre X que tem contradomínio $\mathscr{B}$ possui um núcleo discreto e fechado.

Portanto, fixada uma base $\mathscr{B}$ para (X,τ), se quisermos provar que X é um D-espaço, dado um ONA N sobre (X,τ), podemos supor, sem perda de generalidade, que $N[X] = \{N(x) : x \in X\} \subset \mathscr{B}$. Note que podemos usar esta estratégia caso um espaço topológico (X,τ) tenha alguma base com uma propriedade interessante, como uma base enumerável ou ponto-enumerável.

Já a seguinte definição foi criada por Aurichi (2011) como uma forma de tornar o conceito de D-espaços mais forte:

Definição 2.7. Dizemos que um espaço topológico (X,τ) T_1 é fortemente D (strongly D) se, dado um ONA N sobre X, existe $D \subset X$ tal que $N(D) = X$ e para todo $x \in X$, existe $F \subset X$ finito de forma que $x \in \bigcap N[F]$ e $\bigcap N[F] \cap D$ é finito. Isto é, D é localmente finito na topologia gerada por $N[X]$.

Proposição 2.8. *Se (X,τ) é T_1 e D é como na definição acima, então D é discreto e fechado.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ finito tais que $x \in \bigcap N[F]$ e $\bigcap N[F] \cap D$ é finito. Seja $(\bigcap N[F] \cap D) \setminus \{x\} = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

Como X é T_1, dado $j \leq n$, segue que $\{x_j\}$ é fechado. Assim, $\{x_0,\ldots,x_n\}$ é fechado e como $\bigcap N[F]$ é aberto, segue que $\bigcap N[F] \setminus \{x_0,\ldots,x_n\}$ também é aberto. Logo, $x \in \bigcap N[F] \setminus \{x_0,\ldots,x_n\}$ e $(\bigcap N[F] \setminus \{x_0,\ldots,x_n\}) \cap D = (\bigcap N[F] \cap D) \setminus \{x_0,\ldots,x_n\} \subset \{x\}$. $\square$

Corolário 2.9. *Todo espaço fortemente D também é D.*

Uma outra definição muito importante para o estudo de D-espaços é a seguinte generalização do conceito de espaços compactos.

Definição 2.10. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é um espaço de Lindelöf se toda cobertura aberta para (X, τ) tem uma subcobertura enumerável.

2.2 Exemplos simples

Exemplo 2.11. Se (X, τ) é um espaço topológico discreto, então (X, τ) é D.

Exemplo 2.12. Se (X, τ) é um espaço topológico compacto, então (X, τ) é D.

Demonstração. Seja N um ONA sobre X. Então, $N[X]$ é uma cobertura aberta para X. Portanto, existe $D \subset X$ finito tal que $N(D) = X$. Como dito na Observação 2.4, X é T_1 e, portanto, D é discreto e fechado. □

Observação 2.13. O exemplo acima é suficiente para justificar a Observação 2.4, uma vez que queremos que subconjuntos finitos não tenham pontos de acumulação, ou seja, sejam fechados e discretos.

Do resultado acima, surgem, naturalmente, algumas questões sobre possíveis generalizações, como: espaços σ-compactos são D? E espaços de Lindelöf?

A resposta para a primeira pergunta é afirmativa, mas para a segunda ainda não há algo definitivo em ZFC. Entretanto, temos um contraexemplo consistente com ZFC, mais precisamente, supondo o Princípio $\diamondsuit$, como veremos nos próximos capítulos.

2.3 Contraexemplos

Encontramos uma classe de espaços que não são D em alguns artigos sobre o assunto, como por exemplo, em Gruenhage (2010). Aqui, ela será explicada com mais detalhes e, para mencioná-la, precisamos de algumas definições preliminares.

Definição 2.14. Dado um espaço topológico (X, τ), o seu grau de Lindelöf (Lindelöf degree) é o menor cardinal κ tal que, dada uma cobertura aberta para (X, τ), existe uma subcobertura de tamanho menor ou igual a κ.

Denotamos o grau de Lindelöf de X por $l(X)$.

Observação 2.15. Note que fixado (X, τ), este sempre tem um grau de Lindelöf, pois dada uma cobertura aberta, esta tem tamanho menor ou igual a $|\tau|$ e $\{\kappa \leq |\tau| : \kappa \text{ é um cardinal}\}$ é bem-ordenado.

Além disso, dada uma cobertura aberta $\mathscr{C}$ para X, por definição, para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U_x$. Portanto, $\{U_x : x \in X\}$ é uma subcobertura de $\mathscr{C}$ com cardinalidade menor ou igual a $|X|$.

Portanto, $l((X,\tau)) \leq |X|, |\tau|$.

Definição 2.16. Dado um espaço topológico (X,τ), dizemos que seu extent, denotado por $e(X)$, é o supremo das cardinalidades dos subconjuntos discretos e fechados de (X,τ).

Temos uma maneira de relacionar estas duas definições para todo (X,τ):

Proposição 2.17. *Seja (X,τ) um espaço topológico. Então, $e(X) \leq l(X)$.*

Demonstração. Observe que fixados (X,τ) e D um subespaço discreto e fechado, dada uma cobertura aberta $\mathscr{C}$ de D, $\mathscr{C} \cup \{X \setminus D\}$ é uma cobertura aberta para X e, assim, existe $\mathscr{C}'$ subcobertura de $\mathscr{C} \cup \{X \setminus D\}$ de cardinalidade menor ou igual a $l(X)$.

Portanto, $\mathscr{C}' \setminus \{X \setminus D\}$ é uma subcobertura de $\mathscr{C}$ com o mesmo tamanho de $\mathscr{C}'$. Dessa forma, $l(D) \leq l(X)$.

Como D é discreto, dado $d \in D$, existe U_d aberto tal que $U_d \cap D = \{d\}$. Assim, $\{U_d : d \in D\}$ é uma cobertura aberta para D que não tem subcobertura própria.

Portanto, $l(D) \geq |D|$. Mas segue da Observação 2.15 que $l(D) \leq |D|$.

Dessa forma, $|D| = l(D) \leq l(X)$.

Como D é qualquer, temos:

$$\sup\{|D| : D \text{ é um subconjunto discreto e fechado de } X\} \leq l(X)$$

Portanto, $e(X) \leq l(X)$. □

Assim, podemos enunciar o resultado citado por Gruenhage (2010):

Proposição 2.18. *Se (X,τ) é um D-espaço, então, $e(X) = l(X)$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, vale que $e(x) \leq l(X)$.

Seja agora $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta para X que não possui subcobertura de cardinalidade estritamente menor que $l(X)$. Assim, existe um ONA N para X de forma que dado $x \in X$, $N(x) \in \mathscr{C}$. Como X é um D-espaço, existe $D \subset X$ discreto e fechado tal que $N(D) = X$. Dessa forma, $N[D]$ é uma subcobertura de $\mathscr{C}$ tal que $|N[D]| \leq |D|$. Logo, $l(X) \leq |N[D]| \leq |D| \leq e(X)$ e, portanto, $e(X) = l(X)$. □

Dessa forma, um espaço topológico cujo extent e grau de Lindelöf são distintos não pode ser D.

As próximas definições e nos permitirão encontrar uma classe de espaços cujo extent e grau de Lindelöf são distintos e, portanto, não são D-espaços.

Definição 2.19. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é enumeravelmente compacto (countably compact) se para toda cobertura aberta enumerável, existe uma subcobertura finita.

Lema 2.20. *Todo ordinal sucessor é compacto.*

Demonstração. Provaremos esse fato por indução. Como 1 é finito, também é compacto. Dado um ordinal $\alpha > 0$, suponhamos que $\beta + 1$ é compacto, para todo ordinal $\beta < \alpha$. Queremos agora mostrar que $\alpha + 1$ é compacto.

Se α é sucessor, então é compacto e como $\alpha + 1$ é união de dois compactos (α e $\{\alpha\}$), também é compacto.

Caso contrário, α é limite. Dada uma cobertura aberta $\mathscr{C}$ para $\alpha + 1$, existe $U \in \mathscr{C}$ tal que $\alpha \in U$ e, como α é um ordinal limite, existe $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha + 1) \subset U$ e, assim, também existe $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ finito que é uma cobertura para $\beta + 1 = [0, \beta + 1)$. Concluímos, então, que $\mathscr{C}' \cup \{U\}$ é uma subcobertura finita para $\mathscr{C}$. $\square$

Definição 2.21. Seja α um ordinal. Dizemos que um subconjunto S de α é cofinal (em α) se existe uma função $f : S \to \alpha$ tal que para todo $\beta \in \alpha$, existe $s \in S$ de forma que $\beta \leq f(s)$.

A cofinalidade de α é definida por $\mathrm{cf}(\alpha) := \inf\{|S| : S \subset \alpha \text{ é cofinal}\}$.

Dizemos ainda que um cardinal κ é regular se $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Observação 2.22. Todo ordinal sucessor $\alpha + 1$ tem cofinalidade 1, pois $\{\alpha\}$ é cofinal. Além disso, se $S \subset \omega_1$ é enumerável, então $\sup S = \bigcup S = \bigcup\{\alpha : \alpha \in S\}$ é uma união enumerável de subconjuntos enumeráveis e, assim, é enumerável. Ou seja, $\sup S < \omega_1$ e, portanto, $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$.

Proposição 2.23. *Todo ordinal com cofinalidade não-enumerável é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Sejam α um ordinal com cofinalidade não-enumerável e $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta enumerável para α. Em particular, pela Observação acima, α é um ordinal limite. Assim, dado $\beta \in \alpha$, temos que $\beta + 1 \in \alpha$ e existe $n \in \omega$ tal que $\beta + 1 \subset U_0 \cup \cdots \cup U_n$, uma vez que $\beta + 1$ é compacto.

Seja agora, para cada $n \in \omega$, $\beta_n = \sup\{\beta \in \alpha : \beta + 1 \subset U_0 \cup \cdots \cup U_n\}$. Como $\bigcup \mathscr{C} = \alpha$, $\sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \alpha$. Assim, supondo que cada $\beta_n < \alpha$, teremos que $\{\beta_n : n \in \omega\}$ é um subconjunto enumerável e cofinal de α, o que é uma contradição. Dessa forma, existe $n \in \omega$ tal que $\beta_n = \alpha$ e, assim, $\alpha = U_0 \cup \cdots \cup U_n$. Portanto, $\{U_0, \ldots, U_n\}$ é uma subcobertura finita de $\mathscr{C}$. $\square$

Proposição 2.24. *Seja (X, τ) um espaço topológico T_1. X é enumeravelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto fechado e discreto de X é finito.*

Demonstração. Sejam X um espaço enumeravelmente compacto e $D \subset X$ discreto, fechado e enumerável. Como D é discreto, dado $d \in D$, existe um aberto U_d tal que $U_d \cap D = \{d\}$. Além disso, D é fechado, logo, $X \setminus D$ é aberto e $\mathscr{C} = \{U_d : d \in D\} \cup \{X \setminus D\}$ é uma cobertura aberta enumerável para X.

Assim, existe uma subcobertura finita $\mathscr{C}'$ para $\mathscr{C}$. Dados $d, d' \in D$, se $d \neq d'$, por construção, $d \notin U_{d'}$ e, naturalmente, $d \notin X \setminus D$. Logo, $U_d \in \mathscr{C}'$.

Dessa forma, $|D| \leq |\mathscr{C}'|$ e, como $\mathscr{C}'$ é finito por definição, D é finito. Ou seja, não existe um subconjunto discreto, fechado de X de tamanho ω.

Suponha agora que existe $D \subset X$ discreto, fechado e infinito. Assim, existe $D' \subset D$ de tamanho ω, mas como D é discreto e fechado, D' também é, o que é uma contradição. Portanto, todo subconjunto discreto e fechado de X é finito.

Seja agora X um espaço topológico T_1 cujos subconjuntos que são simultaneamente discretos e fechados são finitos. Se X é compacto, então também é enumeravelmente compacto. Suponhamos agora que X não é compacto.

Tomemos $\mathscr{C} = \{U_n : n \in \omega\}$ uma cobertura aberta crescente para X de forma que $U_n \neq X$ para todo $n \in \omega$. Escolhemos, para cada $n \in \omega$, $x_n \in X \setminus U_n$. Denotando por $D = \{x_n : n \in \omega\}$, mostraremos que este subconjunto de X é discreto e fechado.

Dado $x \in X$, existe $n \in \omega$ tal que $x \in U_n$ e, por construção, $U_n \cap D \subset \{x_k : k < n\}$. Assim, $x \in U_n \setminus \{x_k : k < n, x_k \neq x\}$ e $(U_n \setminus \{x_k : k < n, x_k \neq x\}) \cap D \subset \{x\}$.

Portanto, D não tem pontos de acumulação, ou seja, é discreto e fechado. $\square$

Corolário 2.25. *Todo espaço topológico enumeravelmente compacto que não é Lindelöf não é um D-espaço.*

Demonstração. Seja (X, τ) enumeravelmente compacto e não Lindelöf. Pela Proposição 2.24, todo subconjunto discreto e fechado de X é finito. Assim, $e(X) \leq \omega$ e como X não é Lindelöf, $\ell(X) > \omega$.

Logo, $e(X) \leq \omega < \ell(X)$ e, portanto, X não é um D-espaço. $\square$

Podemos utilizar os resultado acima para encontrar uma classe de ordinais que não é D:

Corolário 2.26. *Se α é um ordinal com cofinalidade não-enumerável, então α não é um D-espaço.*

Demonstração. Seja α como acima e considere a seguinte cobertura aberta: $\mathscr{C} = \{[0, \beta) : \beta \in \alpha\}$. Dessa forma, todo subconjunto de $\mathscr{C}$ é da forma $\{[0, \beta) : \beta \in S\}$ para algum $S \subset \alpha$. Assim, se $\mathscr{C}'$ é uma subcobertura de $\mathscr{C}$, existe $S \subset A$ tal que $\mathscr{C}' = \{[0, \beta) : \beta \in S\}$ e $\bigcup \mathscr{C}' = \alpha$, logo, S é cofinal em α e $|\mathscr{C}'| = |S| \geq \mathrm{cf}(\alpha)$. Dessa forma, $\ell(\alpha) \geq \mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, ou seja, α não é um espaço de Lindelöf e, pela Proposição 2.23, α é enumeravelmente compacto. Portanto, α não é D. $\square$

Corolário 2.27. *ω_1 não é um D-espaço.*

Apesar de não ser D, ω_1 é dualmente discreto (dually discrete), isto é, dado um ONA N sobre ω_1, existe $D \subset \omega_1$ discreto tal que $N(D) = \omega_1$. Para demonstrá-lo, porém, precisamos de algumas definições e resultados adicionais sobre ordinais.

Definição 2.28. Seja λ um ordinal limite. Dizemos que um subconjunto $S \subset \lambda$ é ilimitado em λ se dado $\alpha \in \lambda$, existe $\beta \in S$ tal que $\alpha < \beta$.

Observe que todo subconjunto ilimitado é cofinal e a diferença entre as duas definições é que dado qualquer elemento do ordinal com o qual estamos trabalhando, existe, respectivamente, um elemento estritamente maior, e um elemento maior ou igual a este elemento. Note ainda que isto torna impossível a definição de um subconjunto ilimitado em um ordinal sucessor $\alpha + 1$, pois não existe um elemento deste conjunto que é estritamente maior que α.

Definição 2.29. Sejam λ um ordinal limite e $S \subset \lambda$. Dizemos que S é estacionário se ele intersecta todo subconjunto fechado e ilimitado (closed unbound ou club set) de λ.

Proposição 2.30. *Se λ é um ordinal limite com cofinalidade não-enumerável, todo subconjunto fechado ilimitado é estacionário. Mais do que isso, a interseção de $\kappa < cf(\lambda)$ subconjuntos fechados ilimitados de λ é um subconjunto fechado ilimitado.*

Demonstração. Sejam $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$ um cardinal, $\{C_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ uma família de subconjuntos fechados ilimitados de λ e $\langle C'_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ uma sequência formada pelos elementos de $\{C_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ de forma que para todo $\alpha \in \kappa$, $\{\beta \in \kappa : C'_\beta = C_\alpha\}$ é cofinal em κ se κ é infinito. Note que podemos supor que κ é sempre infinito, pois caso seja finito, podemos definir $C_n = C_0$ para todo $\kappa < n < \omega$ e usar a família $\{C_n : n \in \omega\}$ para gerar $\langle C'_n : n \in \omega \rangle$ como acima.

Fixando $\alpha \in \lambda$, definimos $\alpha_0 = \inf\{\beta \in C'_0 : \alpha < \beta\}$. Dado $\gamma \in \kappa$, suponhamos definidos α_δ para todo $\delta < \gamma$. Agora, definimos $\alpha_\gamma = \inf\{\beta \in C'_\gamma : \alpha_\delta < \beta$, para todo $\delta < \gamma\}$. Como $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$, $\sigma = \sup\{\alpha_\gamma : \gamma \in \kappa\} \in \lambda$.

Observe que dado $\gamma \in \kappa$, $\{\alpha_\delta : \alpha_\delta \in C_\gamma\}$ é cofinal em $\{\alpha_\delta : \delta \in \kappa\}$ por construção. Dessa forma, $\sup\{\alpha_\delta : \alpha_\delta \in C_\gamma\} = \sup\{\alpha_\delta : \delta \in \kappa\} = \sigma$ e, assim, como C_γ é fechado, $\sigma \in C_\gamma$. Portanto, $\sigma \in C = \bigcap\{C_\gamma : \gamma \in \kappa\}$ e, como α é arbitrário, C é ilimitado. Uma vez que cada C_γ é fechado, C também o é. □

Usaremos o Lema de Fodor ou Fodor's Pressing-Down Lemma, que pode ser encontrado, por exemplo, em Jech (2002):

Lema 2.31. *Sejam κ um cardinal regular e não-enumerável, $S \subset \kappa$ estacionário e $f : S \to \kappa$ regressiva, isto é, $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in S \setminus \{0\}$. Então, existe $T \subset S$ também estacionário e $\gamma < \kappa$ tais que $f(\alpha) = \gamma$ para todo $\alpha \in T$.*

Verifiquemos que ω_1 é dualmente discreto, de maneira semelhante à feita em Alas, Junqueira e Wilson (2008). Observe, porém, que neste artigo foi apresentado um resultado mais geral: todo ordinal é hereditariamente dualmente discreto.

Dado um ONA N sobre ω_1, para cada $\lambda \in \omega_1$ limite, existe $p(\lambda) < \lambda$ tal que $(p(\lambda), \lambda] = (p(\lambda), \lambda + 1) \subset N(\lambda)$. Como $\{\lambda \in \omega_1 : \lambda$ é limite$\}$ é fechado e ilimitado, também é estacionário. Assim, aplicando o Lema de Fodor, existe $S \subset \{\lambda \in \omega_1 : \lambda$ é limite$\}$ estacionário e $\alpha_0 \in \omega_1$ de forma que $p[S] = \{\alpha_0\}$. Ou seja, $(\alpha_0, \lambda] \subset N(\lambda)$ para todo $\lambda \in S$.

Seja $d_0 = \min S$. Dado $\alpha \in \omega_1$, suponha definidos d_β para todo $\beta < \alpha$. Agora, definimos $d_\alpha = \min(S \setminus \overline{\{d_\beta : \beta < \alpha\}})$. Uma vez que S é ilimitado em ω_1, também é não-enumerável, e, assim, é possível definir d_α para todo $\alpha \in \omega_1$.

Dados $\alpha < \beta < \gamma < \omega_1$, $d_\beta \in [0, d_{\beta+1}) \cap (X \setminus \overline{\{d_\delta : \delta < \beta\}})$, enquanto $d_\alpha \notin X \setminus \overline{\{d_\delta : \delta < \beta\}}$ e $d_\gamma \notin [0, d_{\beta+1})$. Assim, $D = \{d_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ é discreto.

Como D é ilimitado, $N(D) \supset \bigcup\{(\alpha_0, d] : d \in D\} = (\alpha_0, \omega_1)$, e, uma vez que $[0, \alpha_0] = \alpha + 1$ é compacto, existe $F \subset [0, \alpha_0]$ finito tal que $N(F) \supset [0, \alpha_0]$. Portanto, $D \cup F$ é um núcleo discreto para N.

CAPÍTULO

3

LEMAS

Os seguintes lemas serão usados constantemente ao longo deste trabalho, pois em quase todas as construções de D-espaços, usa-se o Lema 3.1 ou o Lema 3.3, abaixo enunciados e demonstrados.

3.1 Lema dos Ds bem-comportados

Este lema também pode ser interpretado como uma estratégia para a demonstração de que certos espaços topológicos são D, sobretudo em provas mais diretas e construtivas.

Lema 3.1 (Lema dos Ds bem-comportados)**.** *Sejam X um espaço topológico T_1, θ um ordinal e $D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha \in \theta\}$, onde, para cada $\alpha \in \theta$, D_α é discreto e fechado, e existe um aberto U_α tal que $D \cap U_\alpha = D_\alpha$ e $\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \theta\}$ é fechado. Então, D é discreto e fechado.*

Demonstração. Seja $d \in D$. Então, existe $\alpha \in \theta$ tal que $d \in D_\alpha$. Assim, como D_α é discreto, existe U_d aberto tal que $U_d \cap D_\alpha = \{d\}$. Logo, $(U_d \cap U_\alpha) \cap D = U_d \cap D_\alpha = \{d\}$. Dessa forma, D é discreto.

Seja agora $x \in X \setminus D$. Queremos encontrar uma vizinhança aberta de x que não intersecta D para demonstrar que D é fechado. Se $x \in X \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \theta\}$, segue do enunciado que este conjunto é aberto e, assim, não resta nada a ser mostrado. Caso contrário, seja $\alpha \in \theta$ tal que $x \in U_\alpha$. Assim, $x \in (X \setminus D_\alpha) \cap U_\alpha$, que é um conjunto aberto, e $(X \setminus D_\alpha) \cap U_\alpha \cap D = (X \setminus D_\alpha) \cap D_\alpha = \emptyset$.

Portanto, D também é fechado. □

Corolário 3.2. *Se (X, τ) é um espaço topológico T_1, N um ONA sobre X, θ um ordinal e $D = \{D_\alpha : \alpha \in \theta\}$ tal que dado $\alpha \in \theta$, D_α é discreto e fechado, $N(D_\alpha) \cap D = D_\alpha$ e $N(D) = X$, então, D é discreto e fechado.*

3.2 Lema dos Stickies bem-comportados

Este lema é parecido com o anterior e, portanto, nomeado de maneira semelhante. É ligeiramente mais fraco que o Lema 2.3 de Fleissner e Stanley (2001), onde o conceito de conjuntos N-sticky foi pela primeira vez definido.

Lema 3.3 (Lema dos Stickies bem-comportados)**.** *Sejam (X,τ) um espaço topológico T_1, N um ONA sobre X, θ um ordinal e $D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha \in \theta\}$ tal que dado $\alpha \in \theta$, D_α é N-sticky e $N(D_\alpha) \cap D = D_\alpha$. Então, D é N-sticky.*

Demonstração. De maneira análoga à demonstração do Lema dos Ds bem-comportados, usando $N(D_\alpha)$ no lugar de U_α, segue que D é discreto.

Seja $x \in X \setminus D$. Queremos agora mostrar que D é fechado. Se $N(x) \cap D = \emptyset$, então já encontramos uma vizinhança aberta de x que é disjunta em relação a D.

Senão, existe $\alpha \in \theta$ tal que $N(x) \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Então, como D_α é N-sticky, segue que $x \in N(D_\alpha)$. Logo, $x \in (X \setminus D_\alpha) \cap N(D_\alpha)$ e $(X \setminus D_\alpha) \cap N(D_\alpha) \cap D = (X \setminus D_\alpha) \cap D_\alpha = \emptyset$. Portanto, D é discreto e fechado.

Além disso, dado $x \in X$, se $N(x) \cap D \neq \emptyset$, então existe $\alpha \in \theta$ tal que $N(x) \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Logo, como D_α é N-sticky, $x \in N(D_\alpha) \subset N(D)$. Dessa forma, D é N-sticky. $\square$

CAPÍTULO

4

ALGUMAS CLASSES DE D-ESPAÇOS

Neste capítulo, serão apresentados alguns tipos de espaços topológicos que também são D-espaços, assim como fortemente D.

4.1 Espaços com base ponto-enumerável

Iniciamos esta seção introduzindo um tipo de base:

Definição 4.1. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathscr{B}$ uma base para X. Dizemos que $\mathscr{B}$ é uma base ponto-enumerável (point-countable base) se, dado $x \in X$, tivermos $\{U \in \mathscr{B} : x \in U\}$ é enumerável.

Note que se $\mathscr{B}$ é uma base enumerável, então é trivialmente ponto-enumerável.

O seguinte resultado se deve a Arhangel'skii e Buzyakova (2002):

Teorema 4.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico T_1 para o qual existe $\mathscr{B}$ uma base ponto-enumerável. Então, X é um D-espaço.*

Para demonstrar este teorema, usaremos o seguinte lema, de maneira semelhante ao artigo original, porém com uma indução ligeiramente distinta.

Note que tanto o Teorema anterior como o Lema a seguir são baseados no artigo original, citado acima. Entretanto, modificações foram feitas em uma tentativa de explicar melhor os argumentos e simplificar as demonstrações.

Lema 4.3. *Sejam (X, τ) um espaço topológico T_1 e $\mathscr{B}$ uma base ponto-enumerável . Seja ainda N um ONA sobre X tal que $N[X] \subset \mathscr{B}$. Então, existe $D \subset X$ não-vazio e N-sticky.*

Demonstração. [do Lema 4.3] A ideia desta prova é partir de um ponto qualquer e construir indutivamente em ω passos um subconjunto D de X que seja N-sticky e contenha este ponto.

Entretanto, ao invés de escolher diretamente os pontos de D, usaremos os abertos da base ponto-enumerável $\mathscr{B}$, uma vez que durante qualquer etapa da indução, a quantidade de pontos de D já definidos será finita e, portanto, a quantidade dos abertos de $\mathscr{B}$ que contêm ao menos um destes pontos é enumerável. Necessitamos, porém, de uma ordenação que nos permita percorrer todos esses abertos citados.

Para todo $n \in \omega$, seja p_n o n-ésimo primo. Assim, $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, etc. Consideremos a ordem $\prec$ sobre $\omega \times \omega$ dada por $\langle m,n\rangle \prec \langle r,s\rangle$ se, e somente se, $p_m^{n+1} \leq p_r^{s+1}$ na ordem usual de ω. Definiremos, indutivamente, um conjunto $\{U_{m,n} : m,n \in \omega\}$ e, por extensão, a ordem $\prec$ sobre este conjunto é aquela induzida por $\prec$ de $\omega \times \omega$, isto é, $U_{m,n} \prec U_{r,s}$ se, e somente se, $\langle m,n\rangle \prec \langle r,s\rangle$.

Iniciemos a construção tomando $x_0 \in X$ qualquer. Assim, $\mathscr{U}_0 = \{U \in N[X] : x_0 \in U\}$ é enumerável, pois $N[X] \subset \mathscr{B}$. Note que podemos enumerar $\mathscr{U}_0$ por $\{U_{0,n} : n \in \omega\}$, uma vez que se $\mathscr{U}_0$ é finito, basta repetir todos os seus elementos infinitas vezes. Poderíamos enumerar $\mathscr{U}_0$ pela sua cardinalidade mesmo quando esta for finita, porém o enumeraremos por ω para simplificar esta demonstração. Seja ainda $V_0 = N(x_0)$. Se $\{x_0\}$ é N-sticky, já construímos um subconjunto N-sticky de X como queríamos.

Caso contrário, existe $V_1 = \inf_{\prec}\{U \in \mathscr{U}_0 : \exists x \in X \setminus V_0 \text{ tal que } N(x) = U\}$. Sejam ainda $x_1 \in N^{-1}[\{V_1\}] \cap (X \setminus V_0)$, $\{U_{1,n} : n \in \omega\}$ uma ordenação para $\{U \in N[X] : x_1 \in U\}$ e $\mathscr{U}_1 = \{U_{i,n} : i \in 2, n \in \omega\} = \{U \in N[X] : x_0 \in U \text{ ou } x_1 \in U\}$.

Seja $k \in \omega$ e suponha definidos $x_0,\dots,x_k$; $V_0,\dots,V_k$ e $\mathscr{U}_k$. Se $\{x_0,\dots,x_k\}$ é N-sticky, podemos parar a indução, uma vez que já encontramos um subcojunto N-sticky de X.

Caso contrário, sejam $V_{k+1} = \inf_{\prec}\{U \in \mathscr{U}_k : \exists x \in X \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_k) \text{ tal que } N(x) = U\}$, $x_{k+1} \in (X \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_k)) \cap N^{-1}[\{V_{k+1}\}]$, $\{U_{k+1,n} : n \in \omega\}$ uma ordenação para $\{U \in N[X] : x_{k+1} \in U\}$ e $\mathscr{U}_{k+1} = \{U_{i,n} : i \leq k+1 \text{ e } n \in \omega\}$.

Assim, existe $n \in \omega$ tal que $\{x_0,\dots,x_n\}$ é N-sticky e não há mais nada a ser provado, ou então x_n está bem-definido para todo $n \in \omega$. Seja $D = \{x_n : n \in \omega\}$. Mostraremos que D é N-sticky.

Dado $n \in \omega$, por construção, $N(x_n) \cap D = V_n \cap D \supset \{x_0,\dots,x_n\}$. Dessa forma, $(V_n \setminus \{x_k : k < n\}) \cap D = \{x_n\}$. Ou seja, D é discreto.

Além disso, dado $x \in X$ tal que $N(x) \cap D \neq \emptyset$, existe $k \in \omega$ de forma que $x_k \in N(x)$ e, assim, também existe $n \in \omega$ de forma que $N(x) = U_{k,n}$. Logo, $N(x) \in \mathscr{U}_m$ para todo $m > k$ e existe $N \in \omega$ suficientemente grande tal que $U_{k,n} \prec V_N$ e $U_{k,n} \neq V_N$ (por exemplo, tomando $N = k + p_k^{n+1} + 1$). Dessa forma, segue da minimalidade de V_N que não existe $y \in X \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_{N-1})$ de forma que $N(y) = U_{k,n} = N(x)$. Em particular, $x \in V_0 \cup \cdots \cup V_{N-1}$ e, portanto, $x \in N(D)$.

Resta apenas mostrar que D é fechado. Dado $x \in X \setminus D$, se $N(x) \cap D = \emptyset$, não há mais nada a ser mostrado. Se $N(x) \cap D \neq \emptyset$, pelo que foi demonstrado acima, $x \in N(D)$ e assim, existe $n \in \omega$ tal que $x \in N(x_n)$. Portanto, $x \in N(x_n) \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ e $(N(x_n) \setminus \{x_0, \dots, x_n\}) \cap D = N(x_n) \cap D \setminus \{x_0, \dots, x_n\} \subset \{x_0, \dots, x_n\} \setminus \{x_0, \dots, x_n\} = \emptyset$. Portanto, D é N-sticky. □

Agora estamos prontos para provar nosso teorema:

Demonstração. [do Teorema 4.2] Suponhamos, sem perda de generalidade, que $N[X] \subset \mathscr{B}$. Pelo Lema anterior, existe $D_0 \subset X$ não-vazio e N-sticky. Se $N(D_0) = X$, como N é genérico, segue que X é um D-espaço.

Senão, sejam $F_1 = X \setminus N(D_0)$, $\mathscr{B}_1 = \{U \cap F_1 : U \in \mathscr{B}\}$ e $N_1 : F_1 \to \mathscr{B}_1$ dado por $N_1(x) = N(x) \cap F_1$. Considerando F_1 com a topologia de subespaço induzida por X, $\mathscr{B}_1$ é uma base ponto-enumerável de F_1 e N_1 é um ONA sobre F_1 tal que $N[F_1] \subset \mathscr{B}_1$. Portanto, existe $D_1 \subset F_1$ não-vazio e N_1-sticky.

Denotando $F_0 = X$, $N_0 = N$ e $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}$, sejam agora θ ordinal e suponha definidos F_α, N_α, $\mathscr{B}_\alpha$ e D_α, para todo $\alpha \in \theta$ de forma que:

- $F_\alpha = X \setminus \bigcup\{N_\beta(D_\beta) : \beta < \alpha\}$;
- $\mathscr{B}_\alpha = \{U \cap F_\alpha : U \in \mathscr{B}\}$ é uma base ponto-enumerável sobre F_α;
- $N_\alpha : F_\alpha \to \mathscr{B}_\alpha$ dado por $N_\alpha(x) = N(x) \cap F_\alpha$ é um ONA sobre F_α;
- $D_\alpha \subset F_\alpha$ é N_α-sticky e não-vazio (na topologia de subespaço induzida por X).

Se $\bigcup\{N_\alpha(D_\alpha) : \alpha \in \theta\} = X$, paramos este processo indutivo e definimos $D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha \in \theta\}$. Senão, definimos $F_\theta = X \setminus \bigcup\{N_\alpha(D_\alpha) : \alpha < \theta\} \neq \emptyset$, $\mathscr{B}_\theta = \{U \cap F_\theta : U \in \mathscr{B}\}$ e $N_\theta : F_\theta \to \mathscr{B}_\theta$, onde $N_\theta(x) = N(x) \cap F_\theta$.

Note que satisfazem os três primeiros pontos elencados acima e também a hipótese do Lema anterior. Assim, existe $D_\theta \subset F_\theta$ não-vazio e N_θ-sticky. Como cada D_α é não-vazio, esse processo terminará eventualmente.

Seja agora θ o ordinal tal que $D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha \in \theta\}$. Dados $\beta < \alpha < \theta$, segue da construção que: $\emptyset = N_\beta(D_\beta) \cap D_\alpha = N(D_\beta) \cap F_\beta \cap D_\alpha = N(D_\beta) \cap D_\alpha$.

Além disso, como $D_\alpha \subset F_\alpha \subset F_\beta$ e D_β é N_β-sticky, dado $d \in D_\alpha$, $N_\beta(d) \cap D_\beta \neq \emptyset$ se, e somente se, $d \in N_\beta(D_\beta)$. Entretanto, mostramos acima que $N_\beta(D_\beta) \cap D_\alpha = \emptyset$. Dessa forma, dado $d \in D_\alpha$, $N_\beta(d) \cap D_\beta = \emptyset$, então, $\emptyset = N_\beta(D_\alpha) \cap D_\beta = N(D_\alpha) \cap F_\beta \cap D_\beta = N(D_\alpha) \cap D_\beta$. Portanto, dado $\alpha \in \theta$, $N(D_\alpha) \cap D = D_\alpha$.

Agora, para cada $\alpha \in \theta$, D_α é discreto e fechado na topologia de subespaço de F_α, induzida pela de X. Assim, dado $d \in D_\alpha$, existe um aberto U de X tal que $(U \cap F_\alpha) \cap D_\alpha = \{d\}$. Como $D_\alpha \subset F_\alpha$, $U \cap D_\alpha = \{d\}$. Uma vez que D_α é fechado em F_α, existe F fechado em X tal que $D_\alpha = F \cap F_\alpha$. Por definição, F_α é fechado, logo, D_α é fechado em X. Já que $N(D) = X$, segue do Lema dos D bem-comportados que D é discreto e fechado e, portanto, X é um D-espaço. □

Corolário 4.4. *Se (X,τ) é um espaço topológico que tem base enumerável, então é um D-espaço.*

Observação 4.5. Segue da demonstração do Lema 4.3 o seguinte: D_α e $d \in D_\alpha$ presentes na demonstração do Teorema 4.2, $N(d) \cap D_\alpha$ é finito e que $N(D_\alpha) \cap D \subset D_\alpha$. Portanto, $N(d) \cap D = N(d) \cap D_\alpha$ e é finito.

Assim, dado $x \in X$, existe $d \in D$ tal que $x \in N(d)$ e, novamente, $N(d) \cap D$ é finito. Portanto, D é localmente finito na topologia gerada por $N[X]$.

Note, entretanto, que N não é um ONA qualquer, mas supomos que $N[X] \subset \mathscr{B}$. Portanto, não podemos concluir que X é fortemente D.

Podemos ainda adaptar uma demonstração alternativa para o Lema 4.3 a partir da prova de que espaços com uma base ponto-enumerável são D presente em Gruenhage (2010). Usaremos o conceito de submodelo elementar enumerável que nos permitirá evitar a definição precisa de uma ordem para os abertos envolvidos, uma vez que os tomaremos sempre dentro do submodelo, que suporemos já bem-ordenado.

Demonstração. Sejam (X,τ), $\mathscr{B}$ e N como no enunciado. Sejam também θ suficientemente grande, M um submodelo elementar enumerável de $H(\theta)$ tal que $X, \mathscr{B}, N \in M$ e $\leq$ uma boa ordem de tipo ω sobre M. Tome $x_0 \in X \cap M$.

Agora suponha definidos x_i para todo $i < n$. Se existe $x \in X \setminus N(\{x_i : i < n\})$ tal que $N(x) \cap \{x_i : i < n\} \neq \emptyset$, seja $x_n \in M$ um ponto com tais propriedades de forma que $N(x_n)$ seja $\leq$-mínimo. Caso contrário, não definimos x_n, mas definimos $D = \{x_i : i < n\}$ e paramos a recursão. Observe que D é finito, logo, discreto e fechado. Além disso, dado $x \in X$, se $x \in X \setminus N(D)$, $N(x) \cap D = \emptyset$. Logo, D é N-sticky.

Suponha agora que a recursão não tenha terminado em finitos passos. Assim, definimos $D = \{x_n : n \in \omega\}$ e temos que se $x \in X$ é tal que $N(x) \cap D \neq \emptyset$, então existem $n \in \omega$ tal que $x_n \in N(x)$ e $k \in \omega$ tal que $N(x)$ é o k-ésimo elemento de M na ordem $\leq$. Assim, $N(x) \leq N(x_{n+k+1})$. Portanto, não é possível que $x \in X \setminus N(\{x_i : i \leq n+k+1\})$ e $N(x) \cap \{x_i : i \leq n+k+1\} \neq \emptyset$ simultaneamente. Como $N(x)$ intersecta $\{x_i : i \leq n\}$, segue que $x \in N[\{x_i : i \leq n+k+1\}] \subset N(D)$.

Por fim, dado $n \in \omega$, segue que $N(x_n) \cap D \subset \{x_i : i \leq n\}$. Dessa forma, dado $x \in X$, $N(x) \cap D = \emptyset$ ou existe $n \in \omega$ tal que $x \in N(x_n)$ e como X é T_1, existe um aberto U tal que $U \cap N(x_n) \cap D \subset \{x\}$. Portanto, D é N-sticky. $\square$

Existe ainda uma generalização de espaços com uma base ponto-enumerável que também implica a propriedade D, presente em Aurichi (2011), usando o conceito de subconjuntos σ-compactos:

Definição 4.6. Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que X é σ-compacto se, para cada $n \in \omega$, existe $K_n \subset X$ compacto de forma que $X = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$.

Proposição 4.7. *Seja (X,τ) um espaço topológico T_1 para o qual existe um ONA N de forma que dado $y \in X$, $\{x \in X : y \in N(x)\}$ está contido em um σ-compacto de X, então X é um D-espaço.*

Demonstração. Seja M um ONA sobre X. Podemos supor, sem perda de generalidade, que M tem a mesma propriedade de N, pois $P(x) = M(x) \cap N(x)$ é um refinamento de M que a possui.

Sejam $y \in X$, $D_0 = \{y\}$ e $\{K_n^0 : n \in \omega\}$ uma família de compactos de forma que $\{x \in X : y \in N(x)\} \subset \bigcup\{K_n^0 : n \in \omega\}$. Fixando $k \in \omega$, suponha definidos D_p e $\{K_n^p : n \in \omega\}$ para todo $p < k$.

Seja agora D_k finito de forma que $D_k \cap (\bigcup\{M(D_p) : p < k\}) = \emptyset$ e $\bigcup\{M(D_p) : p \leq k\}$ cobre $\bigcup\{K_m^p : m, p < k\}$, que é compacto. Seja ainda $\{K_n^k : n \in \omega\}$ uma família de compactos que por sua vez cobre $\{x \in X : M(x) \cap D_k \neq \emptyset\}$. Assim, após ω passos, podemos definir $E_0 = \bigcup\{D_n : n \in \omega\}$. Além disso, dados $n \in \omega$ e $d \in D_n$, temos por construção que $M(d) \cap E_0 \subset \bigcup\{D_m : m \leq n\}$, que é finito.

Note que se $x \in X$ é tal que $M(x) \cap E_0 \neq \emptyset$, então existe $k \in \omega$ tal que $M(x) \cap D_k \neq \emptyset$ e, portanto, existe $m \in \omega$ de forma que $x \in K_m^k \subset M(E_0)$.

Dessa forma, dado $x \in X$, $M(x) \cap E_0 = \emptyset$ ou existe $d \in E_0$ de forma que $x \in M(d)$ e como $M(d) \cap E_0$ é finito, segue que E_0 é discreto e fechado. Mais do que isso, é M-sticky.

Se $M(E_0) \neq X$, de maneira análoga definimos $E_1 \subset X \setminus M(E_0)$ que é M-sticky e procedendo assim, existem θ ordinal e E_α para todo $\alpha \in \theta$ de forma que $E_\alpha \subset X \setminus \bigcup\{M(E_\beta) : \beta < \alpha\}$ é M-sticky e não-vazio, e $\bigcup\{M(E_\alpha) : \alpha \in \theta\} = X$. Dados $\beta < \alpha < \theta$, temos por construção que $E_\alpha \cap M(E_\beta) = \emptyset$ e, dado $d \in E_\alpha$, se tivéssemos que $M(d) \cap E_\beta \neq \emptyset$, então teríamos $d \in M(E_\beta)$, o que não acontece. Portanto, $E_\beta \cap M(E_\alpha) = \emptyset$ e segue do Lema dos Stickies bem-comportados que $E = \bigcup\{E_\alpha : \alpha \in \theta\}$ é M-sticky e $M(E) = X$. □

4.2 Espaços de Menger

Uma vez que a construção de um subconjunto discreto fechado de um espaço topológico pode envolver o uso de árvores de possibilidades, como na demonstração de que espaços topológicos que possuem uma base ponto-enumerável são D-espaços, é interessante estudar jogos topológicos, uma vez que estes constituem, em sua essência, uma linguagem para estudar tais árvores e propriedades combinatórias, tornando-se, assim, uma forte ferramenta para seu estudo. Iniciemos com algumas definições e vocabulário preliminares de jogos topológicos.

Dado um jogo topológico G sobre um espaço topológico X com ω rodadas entre dois jogadores, I e II, sua definição deverá conter as jogadas permitidas para cada um dos jogadores e o critério de vitória para os mesmos de forma que um dos dois ganhe e o outro perca. Na n-ésima rodada, I sempre joga antes de II e é comum que as jogadas permitidas a pelo menos um dos jogadores dependa das jogadas anteriores de um ou ambos os jogadores. Além disso, as jogadas sempre dependem do espaço topológico X, podendo ser definidas, por exemplo, pela escolha de um ponto ou subconjunto de X.

Se, durante uma **partida**, as jogadas, respectivamente, de I e II na n-ésima rodada forem A_n e B_n, representaremos esta partida pela sequência $A_0, B_0, A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots$.

Uma **estratégia** para um dos jogadores é uma função que associa, em qualquer rodada de G, as jogadas anteriores de seu oponente à sua próxima jogada. Por exemplo, se G é um jogo topológico sobre o espaço X entre os jogadores I e II, e σ é uma estratégia para I, então $\sigma(\emptyset)$ representa a 0-ésima jogada de I. Além disso, se $B_0, \ldots, B_n$ forem as $(n+1)$-ésimas primeiras jogadas de II em uma partida em que I está usando a estratégia σ, então $\sigma(B_0, \ldots, B_n)$ é a $(n+1)$-ésima jogada de I nesta mesma partida e note que todas as jogadas feitas até agora foram $\sigma(\emptyset), B_0, \sigma(B_0), B_1, \sigma(B_0, B_1), \ldots, B_n, \sigma(B_0, \ldots, B_n)$.

Normalmente, quando estudamos um jogo topológico sobre diferentes espaços topológicos, estamos interessados na existência ou não de **estratégias vencedoras** para um dos jogadores. A ideia de uma estratégia vencedora é que um jogador, ao usá-la, independentemente das jogadas de seu adversário, vencerá a partida. Mais rigorosamente, considere G um jogo topológico sobre X entre I e II e σ uma estratégia para I. Dizemos que σ é vencedora se dada qualquer estratégia ρ para II, a partida $\sigma(\emptyset), \rho(\sigma(\emptyset)), \sigma(\rho(\sigma(\emptyset))), \ldots$ resulta em uma vitória para I. A definição de uma estratégia vencedora para II é análoga.

Note que somente um dos jogadores pode ter uma estratégia vencedora, mas que dependendo do jogo e do espaço em questão, é possível que nenhum dos jogadores tenha uma estratégia vencedora. Denotamos por I $\uparrow G$ a afirmação: "I tem estratégia vencedora para G"e por II $\uparrow G$: "II tem uma estratégia vencedora para G". O contexto ou a notação usada para cada jogo topológico torna supérflua a especificação do espaço topológico em questão, como veremos na definição do jogo de Menger a seguir, que nos ajudará a demonstrar que todo espaço de Menger é (fortemente) D, demonstrado pela primeira vez por Aurichi (2010).

Definição 4.8. O Jogo de Menger sobre um espaço topológico (X, τ) é um jogo entre dois jogadores, I e II, que dura ω rodadas. Na rodada $n \in \omega$:

- I escolhe $\mathscr{C}_n$ uma cobertura aberta de X e
- II escolhe $C_n \subset \mathscr{C}_n$ finito

Dizemos que II vence se $\bigcup\{C_n : n \in \omega\} = X$ e denotamos esse jogo por $G_{\text{fin}}(\mathscr{O}, \mathscr{O})$, onde $\mathscr{O}$ denota o conjunto das coberturas abertas de (X, τ).

Observação 4.9. Como sempre diremos sobre qual espaço topológico estamos trabalhando e usando o Jogo de Menger, suporemos que $\mathscr{O}$ será o conjunto das coberturas abertas do espaço em questão, sem nos preocupar com o rigor de defini-lo a cada menção de $G_{\text{fin}}(\mathscr{O}, \mathscr{O})$.

Definição 4.10. Dizemos que um espaço topológico (X,τ) é um espaço de Menger se, dado $\langle \mathscr{C}_n : n \in \omega \rangle \in \mathscr{O}^\omega$, existe $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ tal que $C_n \subset \mathscr{C}_n$ e é finito para todo $n \in \omega$, e ainda temos que $\bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ é uma cobertura para X.

Proposição 4.11. *Todo espaço de Menger é também espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Sejam (X,τ) um espaço de Menger e $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta para X. Assim, $\langle \mathscr{C} : n \in \omega \rangle \in \mathscr{O}^\omega$ e existe $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ tal que cada C_n é um subconjunto finito de $\mathscr{C}$ e $\bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ cobre X.

Uma vez que $\bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ é união enumerável de conjuntos finitos, temos que é enumerável e, portanto, X é um espaço de Lindelöf. □

Um exemplo de espaços de Menger são os espaços σ-compactos, definidos anteriormente. Mas, para demonstrar esse fato, é necessário um teorema, que é um resultado clássico em jogos topológicos devido a Hurewicz (1926):

Teorema 4.12. *Um espaço de Lindelöf (X,τ) é um espaço de Menger se, e somente se, I não em estratégia vencedora para $G_{\mathit{fin}}(\mathscr{O},\mathscr{O})$.*

Uma vez que a uma das implicações presentes na demonstração desse fato não é trivial e foge do escopo deste trabalho, sua prova será omitida, mas a seguir será demonstrada a outra implicação, enquanto sua demonstração completa pode ser encontrada, por exemplo, em Aurichi e Dias (2019). Mais especificamente, será demonstrado que se I não tem estratégia vencedora para o Jogo de Menger sobre um determinado espaço, então esse espaço não é Menger.

Demonstração. Sejam (X,τ) um espaço topológico, $\langle \mathscr{C}_n : n \in \omega \rangle \in \mathscr{O}^\omega$ e ρ a estratégia para I que independe das jogadas de II e tal que na n-ésima rodada, I joga $\mathscr{C}_n$. Mais rigorosamente, definimos $\rho(\emptyset) = \mathscr{C}_0$ e para todo $n \in \omega$, se $C_0,\ldots,C_n$ são as jogadas de II até a n-ésima rodada, então $\rho(C_0,\ldots,C_n) = \mathscr{C}_{n+1}$.

Como I não tem estratégia vencedora, existe uma estratégia σ para II de forma que se I joga usando ρ e II usando σ, então II vence. Assim, definindo para todo $n \in \omega$, $C_n = \sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n)$, vale que $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ é tal que para todo $n \in \omega$, C_n é um subconjunto finito de $\mathscr{C}_n$ e como II vence a partida, $\bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ é uma cobertura para X. □

Proposição 4.13. *Se (X,τ) é σ-compacto, então II tem estratégia vencedora em $G_{\mathit{fin}}(\mathscr{O},\mathscr{O})$. Assim, X é um espaço de Menger.*

Demonstração. Seja (X,τ) um espaço topológico σ-compacto e, para todo $n \in \omega$, seja ainda $K_n \subset X$ compacto de forma que $X = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$. Agora definiremos a estratégia σ para II em $G_{\text{fin}}(\mathscr{O},\mathscr{O})$ da seguinte forma: se $\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n$ forem as jogadas de I até a n-ésima rodada, definimos $\sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n)$ como um subconjunto finito de $\mathscr{C}_n$ que cobre K_n, ou seja, de forma que $K_n \subset \bigcup \sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n)$.

Assim, se em uma partida as jogadas de I forem $\mathscr{C}_0,\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n,\ldots$; então a partida pode ser representada por $\mathscr{C}_0,\sigma(\mathscr{C}_0),\mathscr{C}_1,\sigma(\mathscr{C}_0,\mathscr{C}_1),\ldots,\mathscr{C}_n,\sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n),\ldots$ e, dado $n \in \omega$, $K_n \subset \sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n)$. Logo, $X = \bigcup\{K_n : n \in \omega\} \subset \bigcup\{\bigcup \sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n) : n \in \omega\}$ e, portanto, σ é uma estratégia vencedora. $\square$

O teorema abaixo, presente em Aurichi (2010), justifica adicionalmente a presença dos espaços de Menger neste trabalho:

Teorema 4.14. *Se (X,τ) é um espaço de Menger T_1, então é fortemente D.*

Entretanto, é necessário apontar que no artigo original, o resultado do teorema anterior é ligeiramente distinto: lá se prova que todo espaço de Menger é D, o que é natural, uma vez que o artigo é anterior à definição de espaços fortemente D.

Note ainda que a demonstração aqui presente difere da prova original, onde é usado um jogo topológico, denominado "partial open neighborhood assignment game (PONAG)", enquanto aqui é apresentada uma construção mais direta.

Demonstração. Dado um ONA N sobre X, consideremos a seguinte estratégia ρ para I em $G_{\text{fin}}(\mathscr{O},\mathscr{O})$:

- $\rho(\emptyset) = N[X]$;
- Se $n \in \omega$ e $C_0,\ldots,C_n$ são as jogadas feitas por II, consideremos $U = \bigcup_{k\leq n}\left(\bigcup C_k\right)$. Assim, definimos $\rho(C_0,\ldots,C_n) = \{U\} \cup N[X \setminus U]$.

Como ρ não é vencedora, existe uma estratégia σ para II que a vence. Agora definimos $\mathscr{C}_0 = \rho(\emptyset) = N[X]$ e $C_0 = \sigma(N[X]) = \sigma(\rho(\emptyset))$. Seja ainda $D_0 \subset X$ finito tal que $C_0 = N[D_0]$.

Dado $n \in \omega$ e supondo definidos $\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_n$; $C_0,\ldots,C_n$ e $D_0,\ldots,D_n$, sejam: $\mathscr{C}_{n+1} = \rho(C_0,\ldots,C_n)$, $C_{n+1} = \sigma(\mathscr{C}_0,\ldots,\mathscr{C}_{n+1})$ e $D_{n+1} \subset X$ finito tal que $C_{n+1} \setminus \{N(D_0 \cup \cdots \cup D_n)\} = N[D_{n+1}]$ e $D_{n+1} \cap N(D_0 \cup \cdots \cup D_n) = \emptyset$. Note que $\mathscr{C}_{n+1} = \{N(D_0 \cup \cdots \cup D_n)\} \cup N[X \setminus N(D_0 \cup \cdots \cup D_n)]$, logo D_{n+1} sempre existe. Definimos ainda $D = \bigcup\{D_n : n \in \omega\}$. Como σ vence o jogo, segue que $X = \bigcup\{\bigcup C_n : n \in \omega\} = N(D)$.

Para cada $n \in \omega$, seja $U_n = N(D_n) \setminus \bigcup\{D_j : j < n\}$. Note que, por construção, U_n contém D_n. Como $\bigcup\{D_j : j < n\}$ é finito, segue que U_n é aberto.

Considere agora $m < n < r < \omega$. Assim, segue de sua definição que $U_n \cap D_m = \emptyset$. Além disso, pela construção, $D_r \cap U_n = \emptyset$. Portanto, $U_n \cap D = D_n$.

Por fim, $\bigcup\{U_n : n \in \omega\} = \bigcup\{N(D_n) \setminus \bigcup\{D_j : j < n\} : n \in \omega\}$, mas como para todo $n \in \omega$, $\bigcup\{D_j : j < n\} \subset \bigcup\{N(D_j) : j < n\}$, segue que $\bigcup\{U_n : n \in \omega\} = N(D) = X$. Logo, pelo Lema dos D bem-comportados, D é discreto e fechado e, portanto, X é um D-espaço. Como ainda, dado $n \in \omega$, $N(D_n) \cap D \subset D_0 \cup \cdots \cup D_n$, que é finito, X é fortemente D. □

Corolário 4.15. *Todo espaço topológico σ-compacto T_1 é fortemente D.*

Assim, conhecemos uma classe de espaços importante no estudo de jogos topológicos, isto é, espaços de Menger, que são D-espaços. A seguir, temos duas generalizações dos resultados anteriores que são consistentes com ZFC. Observe que usaremos o Axioma de Martin para caracterizar uma classe de espaços de Lindelöf e, para isso, são necessárias algumas definições essenciais.

Definição 4.16. Sejam $\mathbb{P}$ um conjunto e $\leq$ uma relação binária sobre $\mathbb{P}$. Dizemos que $\leq$ é uma pré-ordem sobre $\mathbb{P}$ se $\leq$ for reflexiva e transitiva.

Por extensão, podemos chamar o conjunto pré-ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ de pré-ordem quando não houver confusão quanto à relação.

Definição 4.17. Dados uma pré-ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ e dois elementos $p, q \in \mathbb{P}$, dizemos que p e q são compatíveis se existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$. Se p e q não são compatíveis, dizemos que são incompatíveis e denotamos esta relação por $p \perp q$.

Definição 4.18. Uma pré-ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ tem a propriedade ou condição ccc (countable chain condition) se todo subconjunto de $\mathbb{P}$ cujos elementos são dois-a-dois incompatíveis for enumerável. Por extensão, dizemos que $\mathbb{P}$ ou $(\mathbb{P}, \leq)$ é ccc.

Definição 4.19. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem. Um subcojunto D de $\mathbb{P}$ é dito denso se dado $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.

Definição 4.20. Seja κ um cardinal. Definimos MA_κ como o seguinte axioma:

Dados $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem ccc e $\mathscr{D}$ uma família de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ com tamanho no máximo κ, existe um F filtro $\mathscr{D}$-genérico. Isto é, tal que dado $D \in \mathscr{D}$, $F \cap D \neq \emptyset$.

Definimos ainda (MA), denominado Axioma de Martin (Martin's Axiom) a seguinte afirmação: dado $\kappa < 2^\omega$, vale MA_κ.

Observação 4.21. Em ZFC, vale MA_ω, mas não MA_{2^ω}, enquanto MA_κ é independente para todo $\omega < \kappa < 2^\omega$. Estes resultados não serão demonstrados neste trabalho, mas podem ser encontrados, por exemplo, em Kunen (1980). Assim, (MA) é independente de ZFC e segue trivialmente de (CH), a Hipótese do Contínuo.

O seguinte resultado pode ser encontrado em Aurichi (2010):

Teorema 4.22. *Seja $\omega < \kappa < 2^{\omega}$. Sob MA_{κ}, dado (X, τ), um espaço de Lindelöf tal que*

$X = \bigcup\{K_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, onde cada K_α é compacto, segue que X é um espaço de Menger.

Demonstração. Seja $\langle \mathscr{C}_n : n \in \omega \rangle$, onde cada $\mathscr{C}_n$ é uma cobertura aberta para X.

Como X é um espaço de Lindelöf, podemos supor, sem perda de generalidade, que cada $\mathscr{C}_n$ é enumerável.

Considere $\mathbb{P}$ a pré-ordem dada pelo conjunto das funções f tais que $\mathrm{dom}(f) \in [\omega]^{<\omega}$ e $f(n) \in [\mathscr{C}_n]^{<\omega}$ e pela relação $\leq$ definida por $f \leq g$ se, e somente se, $f \supset g$.

Observe que $[\omega]^{<\omega} = \bigcup\{[\omega]^n : n \in \omega\}$ é enumerável. Assim, $[\mathscr{C}_n]^{<\omega}$ é enumerável para todo $n \in \omega$.

Logo, se $f \in \mathbb{P}$, temos uma quantidade enumerável de formas de escolher o domínio de f. Agora suponha fixado $\mathrm{dom}(f)$. Então, dado $n \in \mathrm{dom}(f)$, existe uma quantidade enumerável de escolhas para $f(n)$ e, como $\mathrm{dom}(f)$ é finito, segue que existem enumeráveis possíveis imagens para f.

Em outras palavras, existem enumeráveis possibilidades para o domínio de um elemento de $\mathbb{P}$ e, fixado um domínio, existe uma quantidade enumerável de possíveis imagens para este. Portanto, $\mathbb{P}$ é enumerável, logo, ccc.

Agora, afirmamos que $D_\alpha := \{f \in \mathbb{P} : \bigcup \mathrm{im}(f) \text{ cobre } K_\alpha\}$ é denso em $\mathbb{P}$ para cada $\alpha < \kappa$.

De fato, dado $f \in \mathbb{P}$, se $\bigcup \mathrm{im}(f)$ não cobre K_α, basta tomar $n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(f)$ e escolher $C_n \subset \mathscr{C}_n$ finito de forma que $\bigcup C_n \supset K_\alpha$. Assim, definimos $\tilde{f}$ por:

$\mathrm{dom}(\tilde{f}) = \mathrm{dom}(f) \cup \{n\}$, $\tilde{f} \supset f$ e $\tilde{f}(n) = C_n$.

Dessa forma, $\tilde{f} \leq f$ e $\tilde{f} \in D_\alpha$.

Naturalmente, definindo para cada $n \in \omega$, $D'_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f)\}$, segue que D'_n também é denso.

Denotemos por $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \kappa\} \cup \{D'_n : n \in \omega\}$. Assim, $|\mathscr{D}| = \kappa$.

Portanto, por MA_κ, existe G um filtro $\mathscr{D}$-genérico.

Assim, $\varphi = \bigcup G$ tem as seguintes propriedades:

- Como $D'_n \in \mathscr{D}$ para cada $n \in \omega$ e G é $\mathscr{D}$-genérico, segue que φ é uma função e $n \in \mathrm{dom}(\phi)$, logo, $\mathrm{dom}(\phi) = \omega$;

- Dado $n \in \omega$, $\varphi(n)$ é um subconjunto finito de $\mathscr{C}_n$;

- Uma vez que $D_\alpha \in \mathscr{D}$, $\bigcup \mathrm{im}(\varphi) = \bigcup \varphi[\omega]$ cobre K_α, para cada $\alpha \in \kappa$. Assim, $\bigcup \varphi[\omega]$ é uma cobertura para X.

Portanto, $\langle \varphi(n) : n \in \omega \rangle$ testemunha a existência de um $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ como na definição de espaços de Menger.

Assim, X é um espaço de Menger. $\square$

Corolário 4.23. *Sob (MA), se (X,τ) é um espaço de Lindelöf que é união de $\kappa < 2^\omega$ compactos, então X é um espaço de Menger.*

Corolário 4.24. *Seja $\omega < \kappa < 2^\omega$. Assumindo MA_κ, se (X,τ) é um espaço de Lindelöf que é união de uma quantidade menor que κ subespaços compactos, então é fortemente D.*

Além disso, assumindo (MA), se (X,τ) é um espaço de Lindelöf que é união de $\kappa < 2^\omega$ compactos, então é fortemente D

4.3 Espaços separados à esquerda generalizados

A seguir, temos uma outra classe de espaços topológicos que são D, cuja definição é uma generalização dos espaços separados à esquerda (left-separated spaces), como o nome sugere.

Sua definição é usada por van Douwen e Pfeffer (1979) para demonstrar que potências finitas da reta de Sorgenfrey são D-espaços e, uma vez que $\mathbb{R}_S$ é um espaço de Lindelöf normal, estes constituem um dos primeiros exemplos importantes e não-metrizáveis da área.

Definição 4.25. Dizemos que um espaço topológico (X,τ) é separado à esquerda (left-separated) se existe uma boa ordem $\leq$ sobre X de forma que dado $x \in X$, temos que $\{y \in X : x \leq y\}$ é aberto.

Definição 4.26. Dizemos que um espaço topológico (X,τ) é um espaço separado à esquerda generalizado (generalized left-separated space, ou GLS-space) se existe um relação binária reflexiva $\leq$ sobre X tal que:

- Dado $x \in X$, $\{y \in X : x \leq y\}$ é aberto
- Dado $F \subset X$ fechado e não-vazio, então F tem um elemento $\leq$-minimal. Isto é, existe $m \in F$ tal que se $x \in F$ e $x \leq m$, então $x = m$.

Teorema 4.27. *Se (X,τ) é um espaço topológico T_1 e separado à esquerda generalizado, então é D.*

Demonstração. Seja N um ONA sobre X. Sem perda de generalidade, podemos supor que $N(x) \subset \{y \in X : x \leq y\}$ para todo $x \in X$.

Considere agora x_0 um elemento $\leq$-minimal de X. Se $N(x_0) = X$, acabamos.

Dado θ ordinal, suponha definido x_α para todo $\alpha \in \theta$ de forma que:

- x_α é um elemento $\leq$-minimal de $X \setminus N\left(\{x_\beta : \beta < \alpha\}\right)$;
- Se $\beta < \alpha < \theta$, então $x_\alpha \notin N(x_\beta)$ e $x_\beta \notin N(x_\alpha)$.

Note que x_0 satisfaz as propriedades acima.

Denotemos ainda $D_\alpha = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Caso $N(D_\alpha) = X$, de maneira análoga ao caso $\alpha = 0$, acabamos a construção.

Senão, definimos x_θ como um elemento $\leq$-minimal de $X \setminus N(\{x_\alpha : \alpha < \theta\})$ e $D_\theta = \{x_\alpha : \alpha \leq \theta\}$.

Note que dado $\alpha < \theta$, por definição, $x_\theta \notin N(x_\alpha)$. Além disso, como $x_\alpha, x_\theta \in X \setminus N(\{x_\beta : \beta < \alpha\})$ e x_α é um elemento $\leq$-minimal deste conjunto, segue que $x_\theta \not\leq x_\alpha$, portanto, $x_\alpha \notin \{y \in X : x_\theta \leq y\} \supset N(x_\theta)$.

Dessa forma, prosseguimos com essa indução até que encontremos um θ tal que $N(D_\theta) = X$. Como $D_\theta = \bigcup\{x_\alpha : \alpha \leq \theta\}$, concluímos, por meio do Lema dos Ds bem-comportados, que D_θ é discreto e fechado. Portanto, X é um D-espaço. □

Como dito, usaremos o fato de que espaços separados à esquerda generalizados são D para mostrar que as potências finitas de $\mathbb{R}_S$ são D-espaços na próxima seção. É especialmente interessante estudar estes espaços, pois é comum que sejam usados como contraexemplos, como o fato de $\mathbb{R}_S$ ser Lindelöf e normal, enquanto $\mathbb{R}_S^2$ não possui nenhuma dessas propriedades. Em particular, pode-se esperar que apesar de todas as potências finitas de $\mathbb{R}_S$ serem D-espaços, $\mathbb{R}_S^\omega$ não o seja, o que seria um importante contraexemplo na teoria de D-espaços.

4.4 Potências da Reta de Sorgenfrey

Já foi destacado que dado $n \in \omega$, $\mathbb{R}_S^n$ é um D-espaço, onde $\mathbb{R}_S$ é a reta de Sorgenfrey. Entretnato, é importante enfatizar a seguinte questão:

Pergunta 4.28. $\mathbb{R}_S^\omega$ é um D-espaço?

A prova do primeiro fato, que será exibida abaixo é baseada no artigo de van Douwen e Pfeffer (1979), já citado na seção anterior. Aqui desenvolveremos melhor algumas das suas demonstrações.

Lema 4.29. *Seja $H = \mathbb{R}_S \cap [0, +\infty)$. Então, $\mathbb{R}_S$ e H são homeomorfos.*

Demonstração. Note que $\mathbb{R}_S = \bigcup\{[z, z+1[: z \in \mathbb{Z}\}$ e $H = \{[n, n+1[: n \in \mathbb{N}\}$. Assim, ambos são uniões de uma quantidade infinita e enumerável de intervalos dois-a-dois homeomorfos. Essencialmente, queremos "embaralhar"ou reorganizar tais intervalos para a construção de um homeomorfismo entre $\mathbb{R}_S$ e H usando a bijeção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

Dado $x \in \mathbb{R}_S$, sejam n_x o maior inteiro menor ou igual a x e $r_x = x - n_x$. Assim, $x = n_x + r_x$ e $0 \leq r_x < 1$. Seja ainda $f : \mathbb{R}_S \to H$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2n_x + r_x, \text{ se } x \geq 0 \\ -2n_x - 1 + r_x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Afirmamos que f é um homeomorfismo.

De fato, note que $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_S} = \{[n+x, n+y) : n \in \mathbb{Z} \wedge x, y \in [0,1](x < y)\}$ é uma base para $\mathbb{R}_S$ e $\mathscr{B}_H = \{[n+x, n+y) : n \in \mathbb{N} \wedge x, y \in [0,1](x < y)\}$ para H; e que $f \upharpoonright \mathbb{Z}$ é uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$. Assim, f induz uma bijeção natural entre $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_S}$ e $\mathscr{B}_H$ e, portanto, é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}_S$ e H. □

Definição 4.30. Seja $n \in \omega$, $n > 0$. Então, sobre H^n definimos a ordem $\leq$ por:

Sejam $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle, y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \in H^n$, então $x \leq y$ se, e somente se, $x_i \leq y_i$ para todo $i \in n$.

Proposição 4.31. *Dado $n \in \omega$, tal que $n > 0$, então H^n com a ordem $\leq$ é um espaço separado à esquerda generalizado.*

Demonstração. Fixado n como no enunciado, como $\leq$ é uma ordem sobre H^n, é também reflexiva.

Dado $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in H^n$, $\{y \in H^n : x \leq y\} = [x_1, \infty) \times \cdots \times [x_n, \infty)$ é um aberto.

Seja agora $C \subset H^n$ um fechado não-vazio. Se $K \subset C$ é uma $\leq$-cadeia, isto é, totalmente ordenado, segue que existem, para todo $1 \leq k \leq n$, $m_k = \inf \pi_k[K]$, onde π_k denota a projeção na coordenada k.

Denotemos agora $m = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$. Assim, $m \leq x$ para todo $x \in K$. Além disso, se K possui um elemento mínimo M, então $m_k = \inf \pi_k[K] = \pi_k(M)$. Logo, $m = M \in K$.

Caso contrário, dada uma vizinhança aberta U de m, existem $M_1, \dots, M_n \in H$ tais que $[m_1, M_1) \times \cdots \times [m_n, M_n) \subset U$ e, como para todo $1 \leq k \leq n$, $m_k = \inf \pi_k[K]$, existe $x_k \in K$ tal que $\pi_k(x_k) \in [m_k, M_k)$. Uma vez que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é finito e totalmente ordenado, existe $x = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ e, dessa forma, $m_k \leq \pi_k(x) \leq \pi_k(x_k) < M_k$ para todo $1 \leq k \leq n$. Assim, $x \in U$ e concluímos que $m \in \overline{K} \subset C$.

Portanto, pelo Lema de Zorn, segue que C tem um elemento $\leq$-minimal. □

Corolário 4.32. *Dado $n \in \omega$, temos que H^n é D-espaço e, portanto, $\mathbb{R}_S^n$ também o é.*

Observação 4.33. Podemos tentar aplicar a ideia anterior para H^ω (para, consequentemente, mostrar que $\mathbb{R}_S^\omega$ é D). Definimos a ordem $\leq$ sobre H^ω de maneira análoga por $x \leq y$ se, e somente se, $\pi_n(x) \leq \pi_n(y)$ para todo $n \in \omega$, onde π_n é a projeção na n-ésima coordenada.

Considerando H^ω com a topologia do produto, seja $x_0 \in H^\omega$ definido por $x_0 \equiv 1$ e observemos que dada uma vizinhança aberta U de x_0, existem $n \in \omega$ e $t_0, \dots, t_n \in H \setminus \{0\}$ tais que $[1,1+t_0)\times\cdots\times[1,1+t_n)\times\prod_{k=n+1}^{\infty}H\subset U$. Assim, o ponto $y_0\in H^\omega$ dado por $\pi_k(y_0)=1$ para todo $k\in\omega\setminus\{n+1\}$ e $\pi_{n+1}(y_0)=0$ é um elemento de $U\setminus\{y\in H:x\leq y\}$. Como U é uma vizinhança arbitrária, x_0 não possui nenhuma vizinhança aberta contida em $\{y\in H:x\leq y\}$, que, portanto, não é um subconjunto aberto.

Assim, é natural tentar aplicar esta ideia a H^ω com uma topologia que contenha abertos do tipo $\prod_{n\in\omega}V_n$, onde V_n é um aberto qualquer de H para todo $n\in\omega$. Dessa forma, consideremos H^ω com a box topology e $\leq$ definida como anteriormente. Então, dado $x\in H^\omega$, $\{y\in H^\omega : x\leq y\}=\prod_{k=0}^{\infty}[\pi_k(x),+\infty)$, que é um aberto na box topology, como queríamos. Entretanto, sejam, para todo $1\leq n<\omega$, $x_n\in H^\omega$ dado por $x_n\equiv\frac{1}{n}$, e $S=\{x_n:1\leq n<\omega\}$. Mostraremos que S é fechado, mas não possui um elemento $\leq$-minimal.

Com efeito, dado $x_n\in S$, $x_n\not\leq x_{n+1}$ e, portanto, não é minimal. Seja agora $x\in H^\omega\setminus S$. Se $x\equiv 0$, observe que $\prod_{n=0}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n+1}\right)$ é uma vizinhança aberta de x que não intersecta S. Senão, existe $k\in\omega$ tal que $\pi_k(x)\neq 0$ e, assim, existe $N\in\omega$ de forma que $\frac{1}{N}<\pi_k(x)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que N seja o menor elemento de ω com esta propriedade.

Definimos V_k da seguinte forma: se $N=1$, $V_k=[\pi_k(x),+\infty)$. Já se $N>1$, $V_k=\left[\pi_k(x),\frac{1}{N-1}\right)$ e note que pela minimalidade de N, $\frac{1}{N}<\pi_k(x)\leq\frac{1}{N-1}$. Portanto, $V_k\cap\left\{\frac{1}{n}:1\leq n<\omega\right\}=\emptyset$ em ambos os casos e $\prod_{n<k}H\times V_k\times\prod_{n=k+1}^{\infty}H$ é uma vizinhança aberta de x que não intersecta S. Portanto, S é, de fato, fechado.

Dessa forma, não pode ser demonstrado que H^ω, tanto com a topologia usual do produto, quanto com a box topology, é um espaço separado à esquerda generalizado usando a ordem $\leq$, que é uma generalização natural das ordens usadas na demonstração anterior. Note que isso não significa que estes espaços não são separados à esquerda generalizado, nem que não são D, mas mostrando uma das dificuldades de se mostrar que $\mathbb{R}_S^\omega$ é D.

CAPÍTULO

5

D-ESPAÇOS E ESPAÇOS DE LINDELÖF

Um dos principais questionamentos dentro do campo dos D-espaços é sua relação com espaços de Lindelöf. Em particular, ainda não temos um exemplo regular em ZFC de um espaço de Lindelöf (ou hereditariamente Lindelöf) que não seja D.

Entretanto, temos um importante exemplo consistente com ZFC de um espaço com essas propriedades assumindo $\Diamond$.

5.1 Um espaço comportado que não é D

Comecemos com algumas definições:

Definição 5.1. Seja $S \subset \omega_1$. Dizemos que S é estacionário se, para todo $C \subset \omega_1$ fechado e ilimitado, temos que $S \cap C \neq \emptyset$.

Definição 5.2. O Princípio $\Diamond$, ou simplesmente $\Diamond$, consiste na seguinte afirmação: existe uma sequência $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ tal que para todo $\alpha \in \omega_1$, temos que $A_\alpha \subset \alpha$ e dado $A \subset \omega_1$, segue que $\{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ é estacionário.

Uma sequência com tais propriedades é chamada de sequência $\Diamond$ ($\Diamond$-sequence).

Observação 5.3. O Princípio $\Diamond$ é independente de ZFC e implica a Hipótese do Contínuo (CH). Este resultado pode ser encontrado em quase qualquer livro sobre teoria dos conjuntos e modelos, por exemplo, em Jech (2002).

A seguir, temos a descrição de um exemplo ou, mais precisamente, contraexemplo apresentado por Soukup e Szeptycki (2012) que demonstra a existência, sob $\Diamond$, de uma topologia Hausdorff hereditariamente Lindelöf sobre ω_1 que não é D. As definições e resultados aqui apresentados encontram-se no artigo original, enquanto as observações e demais comentários são uma tentativa de explicar com mais detalhes o resultado obtido.

Observação 5.4. Serão usados alguns resultados de submodelos elementares enumeráveis, que serão citados, mas somente um será provado. Estes resultados podem ser encontrados, por exemplo, em Jech (2002). Sejam θ suficientemente grande e $M \prec H(\theta)$, ou seja, M é um submodelo elementar enumerável de $H(\theta)$. Logo:

1. Se $F \subset M$ é finito, então $F \in M$;
2. se $E \in M$ é enumerável, então $E \subset M$;
3. se α é um ordinal, $\alpha \cap M$ também o é. Em particular, $\omega_1 \cap M$ é um ordinal;
4. se S é um conjunto enumerável, existe $M' \prec H(\theta)$ enumerável tal que $M' \supset M \cup S$;
5. Uma das ferramentas usadas para demonstrar estes fatos é o Critério de Tarski:
   Seja M um modelo e N um submodelo de M. Então N é um submodelo elementar de M se, e somente se, para toda fórmula de primeira ordem $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ e para todos $b_1, \ldots, b_n \in N$ tais que $M \models \exists x\, \varphi(x, b_1, \ldots, b_n)$, existe $a \in N$ tal que $M \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n)$.
6. Se $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \ldots$ é uma cadeia enumerável de submodelos elementares enumeráveis de $H(\theta)$, então $M = \bigcup\{M_n : n \in \omega\}$ é um submodelo elementar de $H(\theta)$.

   Esta afirmação pode ser provada usando o Critério de Tarski:
   Note que dados φ uma fórmula de primeira ordem e $b_1, \ldots, b_n \in M$ tais que $H(\theta) \models \exists x \varphi(x, b_1, \ldots, b_n)$, existem $k_1, \ldots, k_n \in \omega$ tais que $b_i \in M_{k_i}$ para todo $i \leq n$. Seja $N = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Então $b_1, \ldots, b_n \in M_{k_N}$ e existe algum $a \in M_{k_N} \subset M$ tal que $H(\theta) \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n)$.

A ideia geral do artigo consiste em criar uma topologia para ω_1 através do refinamento de duas outras topologias. Uma delas será induzida por uma topologia sobre $[\mathbb{R}]^{<\omega}$ definida a seguir.

Definição 5.5. Dado Q um aberto da topologia usual de $\mathbb{R}$, denotamos por $Q^* = [Q]^{<\omega}$. Seja ρ a topologia sobre $[\mathbb{R}]^{<\omega}$ definida como o conjunto de todos os Q^*.

Denotamos ainda por $\mathscr{W}$ o conjunto dos Q^* tais que Q é a união disjunta de finitos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ cujos extremos são racionais.

Observação 5.6. Observe que $([\mathbb{R}]^{<\omega}, \rho)$ é 2^{nd}-countable, isto é, tem uma base enumerável, e todo subespaço X de $([\mathbb{R}]^{<\omega}, \rho)$ cujos elementos são não-vazios e dois-a-dois disjuntos é um espaço de Hausdorff.

No artigo original, Soukup e Szeptycki (2012), esta afirmação é feita, mas não demonstrada. Vamos apresentá-la aqui:

Note que se E é um conjunto enumerável, $[E]^{<\omega} = \bigsqcup\{[E]^n : n \in \omega\}$ e que fixado $n \in \omega$, $f : E^n \to [E]^{\leq n}$ dado por $f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é sobrejetiva. Assim, $|[E]^n| \leq |[E]^{\leq n}| \leq$

$|E^n| = |E|^n = \omega^n = \omega$. Logo, cada $[E]^n$ é enumerável e como $[E]^{<\omega}$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, também é, por sua vez, um conjunto enumerável.

Seja $I = \{(x,y) \subset \mathbb{R} : x,y \in \mathbb{Q}, x < y\}$, ou seja, o conjunto dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ com extremos racionais. Então, $g : [\mathbb{Q}]^2 \to I$ dada por $g(\{x,y\}) = (\min\{x,y\}, \max\{x,y\})$ é uma bijeção e, assim, I é enumerável.

Definindo agora $\mathscr{I}$ como o conjunto das uniões disjuntas finitas de elementos de I, $\mathscr{W} = \{U^* : U \in \mathscr{I}\}$ e dado $U \in \mathscr{I}$, existem um único $n \in \omega$ e um único $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ tais que $U = i_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup i_n$. Assim, $h : \mathscr{I} \to \mathscr{W}$ dada por $h(U) = U^*$ é uma bijeção e $k : \mathscr{I} \to [I]^{<\omega}$ definida por $k(U) = \{i_0, \ldots, i_n\}$, onde $U = i_0 \bigsqcup \cdots \bigsqcup i_n$, é uma injeção.

Portanto, $|\mathscr{W}| = |\mathscr{I}| \leq |[I]^{<\omega}| = \omega$, pois I é enumerável. Ou seja, $\mathscr{W}$ é uma base enumerável para $[\mathbb{R}]^{<\omega}$. É também válido que se $S, T \in [\mathbb{R}]^{<\omega}$ são disjuntos, uma vez que são finitos, existem U, V abertos disjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $S \subset U$ e $T \subset V$. Logo, U^* e V^* são disjuntos, $S \in U^*$ e $T \in V^*$.

A seguinte definição e a proposição sucessiva nos permitem intuir as propriedades das duas topologias sobre ω_1 que nos interessam.

Definição 5.7. Um espaço topológico é hereditariamente Lindelöf se todos os seus subconjuntos são espaços de Lindelöf.

Proposição 5.8. *Uma topologia sobre um conjunto X gerada através do refinamento de uma topologia 2^{nd}-countable e Hausdorff por uma topologia hereditariamente Lindelöf sobre um conjunto X, é uma topologia hereditariamente Lindelöf e de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam X um conjunto, τ_{SC} uma topologia 2^{nd}-countable e de Hausdorff sobre X e τ_{HL} uma topologia hereditariamente Lindelöf sobre X.

Seja ainda τ_{ref} a topologia gerada através do refinamento de τ_{SC} por τ_{HL} e $\mathscr{B}_{SC}$ uma base enumerável para τ_{SC}. Assim, $\mathscr{B}_{ref} = \{U \cap V : U \in \mathscr{B}_{SC}, V \in \tau_{HL}\}$ é uma base para τ_{ref}.

Em particular, $\tau_{SC}, \tau_{HL} \subset \tau_{ref}$. Logo, dados $x, y \in X$ distintos, como (X, τ_{SC}) é um espaço de Hausdorff, existem $U, V \in \tau_{SC}$ disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Portanto, τ_{ref} é Hausdorff.

Queremos agora mostrar que τ_{ref} é hereditariamente Lindelöf. Seja Y um subespaço de (X, τ_{ref}). Dada uma cobertura $\mathscr{C}$ de Y, para cada $U \in \mathscr{C}$, existe $V_U \in \tau_{ref}$ tal que $V_U \cap Y = U$. Portanto, $\mathscr{C}' = \{V_U : U \in \mathscr{C}'\}$ é um subconjunto de τ_{ref}. Se existe $\mathscr{C}''$ um subconjunto enumerável de $\mathscr{C}'$ tal que $\bigcup \mathscr{C}'' = \bigcup \mathscr{C}'$, então $\mathscr{C}''' = \{V \cap Y : V \in \mathscr{C}'''\}$ é um subconjunto enumerável de $\mathscr{C}$ tal que $\bigcup \mathscr{C}''' = Y \cap \bigcup \mathscr{C}'' = Y \cap \bigcup \mathscr{C}' = \{Y \cap V : V \in \mathscr{C}'\} = \bigcup \mathscr{C} = Y$.

Portanto, basta mostrar que dado $\mathscr{C} \subset \tau_{ref}$, existe $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ enumerável e tal que $\bigcup \mathscr{C}' = \bigcup \mathscr{C}$. Além disso, podemos demonstrar este fato apenas para os $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_{ref}$, pois se $\mathscr{C} \subset \tau_{ref}$ e se definindo $\mathscr{C}' = \{U \in \mathscr{B}_{ref} : \exists V \in \mathscr{C}$ tal que $U \subset V\}$, existe $\mathscr{C}'' \subset \mathscr{C}'$ enumerável tal que

$\bigcup\mathscr{C}'' = \bigcup\mathscr{C}'$, fixando para cada $U \in \mathscr{C}''$, $V_U \in \mathscr{C}$ tal que $U \subset V_U$, então $\mathscr{C}''' = \{V_U : U \in \mathscr{C}''\}$ é enumerável e $\bigcup\mathscr{C}''' \supset \bigcup\mathscr{C}'' = \bigcup\mathscr{C}' = \bigcup\mathscr{C}$.

Seja agora $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}_{ref}$, logo, qualquer um de seus elementos é da forma $U \cap V$, onde $U \in \mathscr{B}_{SC}$ e $V \in \tau_{HL}$. Para cada $U \in \mathscr{B}$, definimos $\mathscr{V}_U = \{V \in \tau_{HL} : U \cap V \in \mathscr{C}\}$. Assim, como τ_{HL} é hereditariamente Lindelöf, existe $\mathscr{V}'_U \subset \mathscr{V}_U$ enumerável tal que $\bigcup\mathscr{V}'_U = \bigcup\mathscr{V}_U$.

Uma vez que $\mathscr{B}$ e $\mathscr{V}'_U$ são enumeráveis para todo $U \in \mathscr{B}$, segue que $\mathscr{C}' = \{U \cap V : U \in \mathscr{B} \wedge V \in \mathscr{V}'_U\} \subset \mathscr{C}$ também é enumerável. Assim, $\bigcup\mathscr{C}' = \bigcup\{U \cap (\bigcup\mathscr{V}'_U) : U \in \mathscr{B}\} = \bigcup\{U \cap (\bigcup\mathscr{V}_U) : U \in \mathscr{B}\} = \bigcup\mathscr{C}$.

Portanto, τ_{ref} também é hereditariamente Lindelöf. □

Observação 5.9. É necessário lembrar-nos que estamos supondo $\diamondsuit$ nesta seção, o que implica (CH).

A seguinte proposição está implícita no artigo original e aqui será explicitamente enunciada e demonstrada.

Proposição 5.10. *Se existe uma sequência $\diamondsuit$ usual, ou seja, em ω_1, então existe uma sequência $\diamondsuit$ em $[\omega_1]^{<\omega}$, isto é, existe $\langle B_\alpha \subset [\omega_1]^{<\omega} : \alpha \in \omega_1\rangle$ de forma que, dado $B \subset [\omega_1]^{<\omega}$, $\{\alpha \in \omega_1 : B \cap [\alpha]^{<\omega} = B_\alpha\}$ é estacionário.*

Demonstração. Denotemos por $\Lambda = \{\lambda \in \omega_1 : \lambda$ é um ordinal limite$\}$. Afirmamos que existe $\psi : \omega_1 \to [\omega_1]^{<\omega}$ bijetora tal que para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que $\psi[\lambda] = [\lambda]^{<\omega}$.

Note que se $|S| = \omega$, então $[S]^{<\omega} = \bigsqcup\{[S]^n : n \in \omega\}$, logo, $|[S]^{<\omega}| = \sum_{n\in\omega} |[S]^n| = \omega$.

Assim, existe uma bijeção $\psi_\omega : \omega \to [\omega]^{<\omega}$. Note que $\psi_\omega[\omega] = [\omega]^{<\omega}$.

Seja agora $\lambda \in \Lambda$ tal que para todo $\mu < \lambda$ limite, existe uma bijeção $\psi_\mu : \mu \to [\mu]^{<\omega}$ e, se $\nu < \mu < \lambda$ são limites, então $\psi_\nu \subset \psi_\mu$. Seja ainda $\sigma = \sup\{\mu \in \Lambda : \mu < \lambda\}$.

Se $\sigma = \lambda$, considere $\psi_\lambda = \bigcup\{\psi_\mu : \mu < \lambda$ é limite$\}$. Assim, $\psi_\lambda : \lambda \to [\lambda]^{<\omega}$ é uma bijeção e se $\mu < \lambda$ é limite, então $\psi_\lambda \supset \psi_\mu$.

Se $\sigma < \lambda$, então $\{\sigma + n : n \in \omega\} \subset \lambda$ e, como λ é enumerável, $[\sigma, \lambda)$ tem tamanho ω. Assim, existe uma bijeção $f : [\sigma, \lambda) \to [\lambda]^{<\omega} \setminus [\sigma]^{<\omega}$. Portanto, podemos definir $\psi_\lambda = f \cup \psi_\sigma : \lambda \to [\lambda]^{<\omega}$, que é uma bijeção e dado $\mu < \lambda$ limite, então $\mu \leq \sigma$ e $\psi_\mu \subset \psi_\sigma \subset \psi_\lambda$.

Suponha definidos ψ_λ para todo $\lambda \in \Lambda$ e definamos $\psi = \bigcup\{\psi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Então, ψ é como queríamos.

Sejam $\langle B'_\beta : \beta \in \omega_1\rangle$ uma sequência $\diamondsuit$ em ω_1 e $B_\beta = \psi[B'_\beta]$ para todo $\beta \in \omega_1$.

Se $B \subset [\omega_1]^{<\omega}$, então $B' = \psi^{-1}[B] \subset \omega_1$. Assim, $S = \{\beta \in \omega_1 : B' \cap \beta = B'_\beta\}$ é estacionário. Note que se $\lambda \in S$ é limite, como $\psi[\lambda] = [\lambda]^{<\omega}$ e ψ é bijetora, segue que

$$B \cap [\lambda]^{<\omega} = \psi[B'] \cap \psi[\lambda] = \psi[B' \cap \lambda] = \psi[B'_\beta] = B_\beta$$

Portanto, $\{\beta \in \omega_1 : B \cap [\beta]^{<\omega} = B_\beta\} \supset S \cap \Lambda$. Uma vez que Λ é fechado e ilimitado, $S \cap \Lambda$ é estacionário (Proposição 2.30), portanto, $\{\beta \in \omega_1 : B \cap [\beta]^{<\omega} = B_\beta\}$ é estacionário e $\langle B_\beta : \beta \in \omega_1\rangle$ é uma sequência $\diamondsuit$ em $[\omega_1]^{<\omega}$. $\square$

Agora, fixemos $\langle B_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ uma sequência $\diamondsuit$ em $[\omega_1]^{<\omega}$ e $\{C_\alpha : \alpha \in \omega\} = [\omega_1]^{\leq\omega}$ de forma que $C_\alpha \subset \alpha$ para todo $\alpha \in \omega_1$.

Para podermos enunciar o teorema principal, precisamos de outras duas definições.

Definição 5.11. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathscr{U}$ é uma ω-cobertura (ω-cover) se dado $F \subset X$ finito, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $F \subset U$.

Definição 5.12. Chamamos ainda de π-network para o ponto $x \in X$ uma família $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X de forma que dada uma vizinhança aberta U de x, existe $N \in \mathscr{N}$ tal que $N \subset U$.

Observação 5.13. Não pedimos que N como acima seja aberto nem que contenha x.

O seguinte teorema contém a ideia central do artigo e será explicado logo após seu enunciado.

Teorema 5.14. *Existem $\{U_\gamma^\alpha : \gamma \leq \alpha\}$ e $\varphi_\alpha : (\alpha+1) \to [\mathbb{R}]^{<\omega}$ para cada $\alpha \in \omega_1$ com as seguinte propriedades:*

1. *Para todo $\gamma \leq \alpha < \omega_1$, $U_\gamma^\alpha \subset \alpha+1$ e $U_\alpha^\alpha = \alpha+1$, e $\varphi_\alpha[\alpha+1]$ é dois-a-dois disjunto;*
2. *Para todo $\gamma \leq \alpha \leq \alpha_0 < \omega_1$, $U_\gamma^\alpha = U_\gamma^{\alpha_0} \cap (\alpha+1)$ e $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha_0} \upharpoonright (\alpha+1)$;*

   Denotamos por τ_α a topologia (sobre $\alpha+1$) gerada pela sub-base $\{U_\gamma^\alpha : \gamma \leq \alpha\} \cup \varphi_\alpha^{-1}[\mathscr{W}]$ e seja $U_F^\alpha = \bigcup\{U_\gamma^\alpha : \gamma \in F\}$, onde $F \in [\alpha+1]^{<\omega}$.
3. *Se C_α é discreto e fechado em τ_α, então $\bigcup\{U_\gamma^\alpha : \gamma \in C_\alpha\} \neq \alpha+1$;*
4. *Seja T_α o conjunto dos $\beta \leq \alpha$ tais que B_β é uma família dois-a-dois disjunta de subconjuntos de β e existe um submodelo elementar $M \prec H(\theta)$ para um θ suficientemente grande que satisfaz a)-e) abaixo:*

   a) *$M \cap \omega_1 = \beta$;*

   b) *$\mathscr{W}, \{B_\gamma : \gamma \in \omega_1\} \in M$;*

   c) *Existe uma função $\varphi \in M$ tal que $\varphi \upharpoonright \beta = \varphi_\beta \upharpoonright \beta$;*

   d) *Existe $B \in M$ não-enumerável tal que $M \cap B = B_\beta$;*

   e) *Existe $\{V_\gamma : \gamma \in \omega_1\} \in M$ tal que $V_\gamma \cap \beta = U_\gamma^\beta \cap \beta$ para todo $\gamma < \beta$.*

   Logo:

   - *Se $\beta \in T_\alpha$, então B_β é uma π-network para β em τ_α;*

- *Se $\beta \in T_\alpha \cap \alpha$, então para todo $V \in \tau_\alpha$ tal que $\beta \in V$, temos que a família $\{U_F^\alpha : F \in B_\beta \wedge F \subset V\}$ é uma ω-cobertura de $(\beta,\alpha]$.*

O teorema acima é extremamente técnico e sua demonstração, longa. Assim, não será provado rigorosamente, mas comentado e será apresentada sua ideia central. Para mais detalhes, ver o artigo original.

Note que com os pontos 1. e 2. do teorema anterior, estamos construindo as duas topologias já mencionadas recursivamente. Em particular, se definirmos $\varphi = \bigcup\{\varphi_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, $\varphi[\omega_1]$ é um subconjunto dois-a-dois disjunto de $[\mathbb{R}]^{<\omega}$.

Dessa forma, pela Observação 5.6, $\varphi^{-1}[\mathscr{W}] = \{\varphi^{-1}[W] : W \in \mathscr{W}\}$ gera (como sub-base) uma topologia 2^{nd}-countable e Hausdorff sobre ω_1.

Para demonstrar que a topologia gerada pelos U_γ, onde $U_\gamma = \bigcup\{U_\gamma^\alpha : \gamma \leq \alpha < \omega_1\}$ para todo $\gamma \in \omega_1$, é hereditariamente Lindelöf, usaremos o seguinte lema:

Lema 5.15. *Considere a topologia sobre ω_1 gerada por uma sub-base $\{U_\gamma : \gamma \in \omega_1\}$. Dessa forma, $\{U_F : F \in [\omega_1]^{<\omega}\}$ é uma base para esta topologia, onde $U_F = \bigcap\{U_\gamma : \gamma \in F\}$. Se para toda família não-enumerável $B \subset [\omega_1]^{<\omega}$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos, existe $B' \subset B$ enumerável tal que*

$$\left|\omega_1 \setminus \bigcup\{U_F : F \in B'\}\right| \leq \omega$$

então a topologia em questão é hereditariamente Lindelöf.

Para demonstrá-lo, usaremos o seguinte lema.

Lema 5.16. *Sejam $\mathscr{F} \subset [\omega_1]^{<\omega}$ e $M \prec H(\theta)$ para algum θ suficientemente grande. Se existe $F \in \mathscr{F} \setminus M$, então existe $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ não-enumerável que é um Δ-sistema em M, ou seja, $\mathscr{G} \in M$, com raiz $F \cap M$.*

Isto é, dados $G, H \in \mathscr{G}$ distintos, $(G \cap H) \cap M = F \cap M$.

Apresentaremos a demonstração do Lema 5.16 depois da prova do Lema 5.15.

Demonstração. [do Lema 5.15] Seja $\mathscr{U}$ uma família de abertos básicos da topologia presente no enunciado. Assim, existe $\mathscr{G} \subset [\omega_1]^{<\omega}$ de forma que $\mathscr{U} = \{U_G : G \in \mathscr{G}\}$.

Seja ainda M um submodelo elementar enumerável de $H(\theta)$ para um θ suficientemente grande tal que $\omega_1, \{U_\gamma : \gamma \in \omega_1\}, \mathscr{G}, \mathscr{U} \in M$.

Queremos mostrar que $\bigcup\mathscr{U} = \bigcup\mathscr{V}$, onde $\mathscr{V} = \{U_G : G \in \mathscr{G} \cap M\}$. Note que $\mathscr{V}$ é enumerável e cobre $(\bigcup\mathscr{U}) \cap M$, pois se $\alpha \in (\bigcup\mathscr{U}) \cap M$, existe $G \in \mathscr{G}$ tal que $\alpha \in U_G \cap M$ e como $\alpha, \mathscr{U}, \mathscr{G} \in M$, podemos supor que $G \in M$. Assim, $\alpha \in \bigcup\mathscr{V}$.

$U_G \in \mathscr{U} \cap M$ tal que $\alpha \in U_G$. Como M é um submodelo elementar, $G \in \mathscr{G} \cap M$.

Seja agora $\alpha \in (\bigcup \mathscr{U}) \setminus M$, logo, existe $G_0 \in \mathscr{G}$ tal que $\alpha \in U_{G_0}$. Se $G_0 \in M$, então $U_{G_0} \in \mathscr{V}$ e $\alpha \in \bigcup \mathscr{V}$. Assim, suponhamos que $G_0 \in \mathscr{G} \setminus M$. Suponhamos ainda que $U_{G_0} \notin \mathscr{V}$.

Como $G_0 \in \mathscr{G} \setminus M$, segue do Lema 5.16 que existe $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ não-enumerável tal que $\mathscr{G}' \in M$ e é um Δ-sistema com raiz $D = G_0 \cap M$ em M. Como D é um subconjunto finito de M, $D \in M$. Note que, assim, $B = \{G \setminus D : G \in \mathscr{G}'\}$ é uma família não-enumerável dois-a-dois disjunta, portanto, por hipótese, existe $B' \subset B$ enumerável tal que

$$\left|\omega_1 \setminus \bigcup \{U_H : H \in B'\}\right| \leq \omega$$

Assim, como $\mathscr{G}' \in M$, $B \in M$ e podemos supor que $B' \in M$. Uma vez que B' é enumerável, segue que $B' \subset M$. Dessa forma, $\omega_1 \setminus \bigcup \{U_H : H \in B'\} \in M$ e é enumerável, portanto, está contido em M. Logo, como $\alpha \notin M$, existe $G \setminus D \in B'$ tal que $\alpha \in U_{G\setminus D}$. Então, $\alpha \in U_{G_0} \subset U_D$ e $U_G = U_{G\setminus D} \cap U_D$. Portanto, $\alpha \in U_G$.

Por definição, $G \in \mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ e $G \in B' \subset M$, logo, $G \in \mathscr{G} \cap M$, assim, $\alpha \in U_G \in \mathscr{V}$. □

Demonstração. [do Lema 5.16] Sejam $\mathscr{F}$, M e F como no enunciado, e $D = F \cap M$. Como D é finito, $D \in M$. Seja ainda $\mathscr{F} = \{G'_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ e considere a ordem $G'_\alpha \leq G'_\beta$ se, e somente se, $\alpha \leq \beta$.

Considere $\mathscr{G}_0 = \{G \in \mathscr{F} : D \subset G\}$. Note que $\mathscr{F}, D \in M$, assim, $\mathscr{G}_0 \in M$ e $F \in \mathscr{G}_0 \setminus M$. Portanto, $\mathscr{G}_0$ é não-enumerável. Seja $G_0 = \min_{\leq} \mathscr{G}_0$. Assim, $G_0 \cap M \in M$ e podemos definir $\mathscr{G}_1 = \{G \in \mathscr{G}_0 : G \cap G_0 \cap M = D\}$ de forma que $\mathscr{G}_1 \in M$ e, novamente, $F \in \mathscr{G}_1 \setminus M$, pois $F \cap G_0 \cap M = F \cap M \cap G_0 = D \cap G_0 = D$, uma vez que $G_0 \in \mathscr{G}_0$. Dessa forma, $\mathscr{G}_1$ também é não-enumerável e definimos $G_1 = \min_{\leq}(\mathscr{G}_1 \setminus \{G_0\}) \cap M$. Como $\{G_0, G_1\}$ e $\{\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1\}$ são subconjuntos finitos de M, são elementos de M.

Procedemos assim, por indução.

Seja $\alpha \in \omega_1$ tal que para todo $\gamma < \alpha$, estão definidos G_γ, $\mathscr{G}_\gamma$ de forma que $G_\gamma, \mathscr{G}_\gamma, \{G_\delta : \delta \leq \gamma\}, \{\mathscr{G}_\delta : \delta \leq \gamma\} \in M$ e $F \in G_\gamma \setminus M$ (assim, G_γ é não-enumerável).

Se α é um ordinal sucessor, então $\alpha = \beta + 1$ para algum $\beta \in \omega_1$. Definimos $\mathscr{G}_\alpha = \{G \in \mathscr{G}_\beta : G \cap G_\beta \cap M = D\}$. Logo, temos que $\mathscr{G}_\alpha \in M$ e $F \in \mathscr{G}_\alpha \setminus M$, porque $\mathscr{G}_\beta \in M$ e como $G_\beta \in \mathscr{G}_0$, $F \cap G_\beta \cap M = F \cap M \cap G_\beta = D \cap G_\beta = D$. Seja ainda $G_\alpha = \min_{\leq}(\mathscr{G}_\alpha \setminus \{G_\gamma : \gamma < \alpha\}) \cap M$. Como $\{G_\gamma : \gamma \leq \beta\}, \{\mathscr{G}_\gamma : \gamma \leq \beta\} \in M$, $\{G_\gamma : \gamma \leq \alpha\} = \{x : x \in \{G_\gamma : \gamma \leq \beta\}$ ou $x = G_\alpha\}$ e $\{\mathscr{G}_\gamma : \gamma \leq \alpha\} = \{x : x \in \{\mathscr{G}_\gamma : \gamma < \beta\}$ ou $x = \mathscr{G}_\alpha\}$ também pertencem a M.

Se α é um ordinal limite, definimos $\mathscr{G}_\alpha = \bigcap \{\mathscr{G}_\beta : \beta < \alpha\}$ e como cada $\mathscr{G}_\beta \in M$ para $\beta < \alpha$, temos mais uma vez que $\mathscr{G}_\alpha \in M$ e $F \in \mathscr{G}_\alpha \setminus M$. Logo, $\mathscr{G}_\alpha$ é não-enumerável. Seja $G_\alpha = \min_{\leq}(\mathscr{G}_\alpha \setminus \{G_\beta : \beta < \alpha\})$. Analogamente ao caso anterior, $\{G_\gamma : \gamma \leq \alpha\}, \{\mathscr{G}_\gamma : \gamma \leq \alpha\} \in M$.

Note que em ambos os casos, G_α existe, porque $\mathscr{G}_\alpha$ é não-enumerável; $G_\alpha \cap M \in M$, pois é finito e $\{G_\gamma : \gamma < \alpha\}$ é enumerável, assim, o processo não pode acabar antes de ω_1 passos. Temos ainda que dado $\alpha \in \omega_1$, $G'_\alpha \leq G_\alpha$. Portanto, em ω_1 passos, percorremos todos os elementos de $\mathscr{F}$, ainda que nem todos sejam da forma G_α para algum $\alpha \in \omega_1$. Dessa forma, este processo termina em exatamente ω_1 passos.

Por fim,$\mathscr{G}' = \bigcap\{\mathscr{G}_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subset \mathscr{G}_0 \subset \mathscr{F}$ é um Δ-sistema de raiz $F \cap M$ e como $F \in \mathscr{G}' \setminus M$, $\mathscr{G}'$ é não-enumerável. Logo, por elementaridade, existe $\mathscr{G} \in M$ tal que $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}_0 \subset \mathscr{F}$ é não-enumerável e é um Δ-sistema de raiz $F \cap M$. □

Assim, definindo para cada $F \in [\omega_1]^{<\omega}$, $U_F = \bigcap\{U_\gamma : \gamma \in F\}$, basta mostrarmos a seguinte proposição para mostrar que a topologia gerada por $\{U_\gamma : \gamma \in \omega_1\}$ como sub-base é hereditariamente Lindelöf.

Proposição 5.17. *Dada uma família $B \subset [\omega_1]^{<\omega}$ não-enumerável e dois-a-dois disjunta, existe $B' \subset B$ enumerável tal que $\{U_F : F \in B'\}$ é uma cobertura e, mais do que isso, uma ω-cobertura de um segmento final de ω_1.*

Demonstração. Seja B como no enunciado. Assim, $\{\beta \in \omega_1 : B \cap [\beta]^{<\omega} = B_\beta\}$ é estacionário.

Dado $H(\theta)$ suficientemente grande, $C = \{\beta \in \omega_1 : \exists M \prec H(\theta)(\omega_1 \cap M = \beta)\}$ possui um subconjunto fechado e ilimitado, pois se $\{\beta_n : n \in \omega\} \subset C$, seja $\beta = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$ e para cada $n \in \omega$, seja $M_n \supset \bigcup\{M_k : k < n\}$ um modelo que testemunha que $\beta_n \in C$. Assim, pela Observação 5.4, $M = \bigcup M_n$ é um submodelo elementar enumerável de $H(\theta)$ e, dessa forma:

$$M \cap \omega_1 = (\bigcup\{M_n : n \in \omega\}) \cap \omega_1 = \bigcup\{M_n \cap \omega_1 : n \in \omega\} = \bigcup\{\beta_n : n \in \omega\} = \beta$$

Além disso, se $M \prec H(\theta)$, dado $\alpha \in \omega_1$, existe $M' \prec H(\theta)$ tal que $M \cup \{\alpha\} \subset M'$ e, assim, $M' \cap \omega_1 \geq \alpha$.

Segue da definição que todo subconjunto estacionário de ω_1 intersecta todo subconjunto fechado e ilimitado de ω_1. Assim, existe $\beta \in \omega_1$ tal que $B \cap [\beta]^{<\omega} = B_\beta$ e considerando θ suficientemente grande, existe $M \prec H(\theta)$ tal que $M \cap \omega_1 = \beta$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $B, \varphi, \{U_\gamma : \gamma \in \omega_1\}, \{B_\gamma : \gamma \in \omega_1\}, \mathscr{W} \in M$.

Segue que $B \cap M = B \cap [\beta]^{<\omega} = B_\beta$. Considere $B' = B_\beta$, que é enumerável. Afirmamos que $\bigcup\{F : F \in B'\}$ é uma ω-cobertura para $[\beta + 1, \omega_1)$.

Sejam $K \subset [\beta + 1, \omega_1)$ finito e $\alpha \in [\beta + 1, \omega_1)$ tal que $K \subset \alpha$. Assim, $\beta \in T_\alpha$ e segue de 4. do Teorema 5.14 que existe $F \in B_\beta$ tal que $K \subset \bigcup U_F^\alpha \subset U_F$. □

Assim, a topologia gerada por $\{U_\gamma : \gamma \in \omega_1\}$ é hereditariamente Lindelöf e, segue da Proposição 5.8 que τ, a topologia gerada pela sub-base $\{U_\gamma : \gamma \in \omega_1\} \cap \varphi^{-1}[\mathscr{W}]$ é Hausdorff e hereditariamente Lindelöf.

Note que falta apenas justificar apenas a existência do item 3. do Teorema 5.14. Este item garantirá que a (ω_1, τ) não é D. De fato, sejam N o ONA sobre ω_1 dado por $N(\alpha) = U_\alpha$ e D um discreto fechado deste espaço. Como este é um espaço de Lindelöf, segue que D é enumerável.

Assim, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $D = C_\alpha$ e, por construção, $D \subset \alpha$. Portanto, D também é discreto e fechado na topologia de subespaço de $\alpha + 1$, que é τ_α, como definida no Teorema 5.14. Assim, por 3. do teorema, existe $\beta \in \alpha + 1$ que não é coberto por $\{U_\gamma^\alpha : \gamma \in C_\alpha\}$.

Segue da definição dos U_γ que se $\gamma \leq \alpha + 1$, então $U_\gamma^\alpha = U_\gamma \cap (\alpha + 1)$, logo, $\beta \notin \bigcup\{U_\gamma^\alpha : \gamma \in C_\alpha\} = \left(\bigcup\{U_\gamma : \gamma \in C_\alpha\right) \cap (\alpha + 1)$, mas $\beta \in \alpha + 1$.

Portanto, $\beta \notin \bigcup\{U_\gamma : \gamma \in C_\alpha\} = N(C_\alpha) = N(D)$ e como D é um discreto fechado qualquer de ω_1, segue que (ω_1, τ) não é um D-espaço.

Observação 5.18. Note que a única hipótese do Teorema 5.14 não usada para provar nenhuma propriedade de (ω_1, τ) é o primeiro ponto de 4. Entretanto, sua existência é necessária na demonstração do próprio teorema, que é feita indutivamente e a ausência do primeiro ponto de 4. impossibilitaria o passo indutivo em alguns casos.

5.2 Espaços fortemente D e espaços de Lindelöf

Nesta seção, trataremos de mais algumas propriedades de espaços fortemente D presentes em Aurichi (2011). Um dos desafios no estudo dos D-espaços é entender como se relacionam com outras propriedades de recobrimento.

Note que, como dito na Observação 2.6, podemos refinar um ONA N sobre um espaço topológico X para simplificar demonstrações de que determinados tipos de espaços são D tomando um ONA M de forma que $M(x) \subset N(x)$ para todo $x \in X$.

Assim, a definição de espaços fortemente D se aproxima à definição de espaços paracompactos, que é uma propriedade de recobrimento cuja relação com D-espaços é frequentemente estudada, bem como algumas de suas generalizações.

Além disso, são interessantes contraexemplos de "boas" propriedades de recobrimento que não são D e em especial, a Proposição 5.20 é uma ferramente em potencial para a pesquisa de tais contraexemplos.

Proposição 5.19. *Sejam (X, τ) um espaço fortemente D e $\sigma \subset \tau$ uma topologia T_1 sobre X. Então, (X, σ) também é fortemente D.*

A demonstração é bastante direta e não está presente no artigo original.

Demonstração. Note que se N é um ONA para (X, σ), também o é para (X, τ). Assim, dado um ONA N sobre (X, σ), como (X, τ) é fortemente D, existe $D \subset X$ tal que $N(D) = X$ e dado $x \in X$, existe $F_x \subset X$ finito tal que $x \in \bigcap N[F_x]$ e $\bigcap N[F_x] \cap D$ é finito.

Como (X, σ) é T_1, também é fortemente D. □

Proposição 5.20. *Se (X, τ) é um espaço topológico T_1 que não é fortemente D, então existe uma topologia $\sigma \subset \tau$ tal que (X, σ) não é D.*

A prova deste fato, embora esteja presente no artigo original, aqui será exposta com mais detalhes.

Demonstração. Seja N um ONA sobre (X,τ) que testemunha o fato que (X,τ) não é fortemente D. Seja σ a topologia gerada pela sub-base $\{N(x)\setminus F : x \in X \wedge F \in [X]^{<\omega}\}$.

Assim, $\mathscr{B} = \{U_{F,F'} : F,F' \in [X]^{<\omega}\}$, onde $U_{F,F'} = (\bigcap N[F])\setminus F'$, é uma base para σ. Temos que N também é um ONA para (X,σ) e dado $D \subset X$ discreto e fechado em (X,σ), para todo $x \in X$, existe $U_{F,F'}$ tal que $U_{F,F'} \cap D \subset \{x\}$.

Note que $\bigcap N[F] \cap D = (\bigcap N[F] \cap (X\setminus F') \cap D) \cup (\bigcap N[F] \cap F' \cap D) \subset \{x\} \cup F'$, que é finito. Assim, como $\sigma \subset \tau$ e (X,τ) não é fortemente D, $N(D) \neq X$. □

Temos ainda o seguinte resultado:

Proposição 5.21. *Seja (X,τ) T_1 e fortemente D. Então, X é um espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Demonstraremos este fato de uma maneira diferente daquela usada no artigo original, ainda que inspirada por ela. Mostraremos que se X é T_1 e fortemente D, então $e(X) = \omega$. Como X também é D segue que $l(X) = e(X) = \omega$, pela Proposição 2.18.

Sejam X T_1 e fortemente D e suponhamos que exista $D \subset X$ discreto, fechado e não-enumerável. Assim, $D = \{d_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ para algum cardinal κ não-enumerável. Para cada $d \in D$ seja ainda U_d um aberto tal que $U_d \cap D = \{d\}$. Considere, para cada $x \in X$, $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_{d_\alpha}\}$. Note que $\alpha_{d_\beta} = \beta$ para todo $\beta \in \kappa$.

Considere agora o ONA N dado por:

$$N(x) = \begin{cases} \bigcup\{U_{d_\alpha} : \alpha \leq \alpha_x\}, \text{ se } x \in \bigcup\{U_d : d \in D\}; \\ X\setminus D, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja agora $D' \subset X$ discreto e fechado tal que $N(D') = X$. Note que dado $d \in D$, existe $d' \in D'$ tal que $N(d) = N(d')$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que:
$D' = \{d'_\alpha : \alpha \in \kappa\} \cup \{x'\}$ de forma que $N(x') = X\setminus D$ e $N(d'_\alpha) = N(d_\alpha)$ para todo $\alpha \in \kappa$.

Seja ainda $x \in \bigcup\{U_d : d \in D\} \setminus \bigcup\{N(d'_n) : n \in \omega\}$. Então dado $d' \in D'$ tal que $x \in N(d')$, temos que $d' = d'_\alpha$ com $\alpha \geq \omega$ e, portanto, $\{d'_n : n \in \omega\} \subset N(d')$. Dessa forma, X não é fortemente D, o que é uma contradição. □

Assim, segue o resultado abaixo, também presente em Aurichi (2011):

Proposição 5.22. *Sob (MA), dado (X,τ) um espaço topológico T_1 que é a união de uma quantidade menor que 2^ω (contínuo) subespaços compactos. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *X é Lindelöf;*

2. *X é Menger;*

3. *X é fortemente D.*

Demonstração. Note que mesmo sem supor (MA), temos pelo Teorema 4.14 que 2.⇒3. e, pela proposição anterior, que 3.⇒1.

Supondo agora (MA), temos que 1.⇒2., pelo Corolário 4.23 e segue o resultado enunciado. □

5.3 Teoremas sobre espaços de funções usando D-espaços

Iniciemos esta seção com a definição que lhe dá nome.

Definição 5.23. Seja (X,τ) um espaço topológico. Denotamos por $C_p(X)$ (com a topologia de subespaço induzida pela topologia usual de 2^X) o conjunto das funções contínuas que têm domínio X e contradomínio $\mathbb{R}$.

Em Buzyakova (2004), são discutidos os espaços de funções $C_p(X)$ para X compactos. Em particular, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.24. *Seja X um espaço topológico compacto e $Y \subset C_p(X)$. Então, Y é um D-espaço.*

Este resultado não só amplia o número de resultados sobre D-espaços e de propriedades dos $C_p(X)$, mas também tem como corolários dois teoremas sobre espaços $C_p(X)$, enunciados a seguir:

Teorema 5.25 (Teorema de Grothendieck para Compactos (1952))**.** *Sejam X compacto e Y um subespaço enumeravelmente compacto de $C_p(X)$. Então Y é compacto.*

Teorema 5.26 (Teorema de Baturov para Compactos (1987))**.** *Sejam X compacto e $Y \subset C_p(X)$. Então $e(Y) = l(Y)$.*

Note que o Teorema de Baturov segue diretamente do fato que se X é um D-espaço, então $e(X) = l(X)$, como demonstrado na Proposição 2.18. Note que pela Proposição 2.24, se Y é enumeravelmente fechado, então todo $D \subset Y$ discreto e fechado é finito. Assim, $l(Y) = e(Y) = \omega$ e, portanto, Y é um espaço de Lindelöf. Mas um espaço de Lindelöf enumeravelmente compacto é compacto, pois dada uma cobertura aberta $\mathscr{C}$ para Y, como Y é Lindelöf, existe uma subcobertura enumerável $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ e, como Y é enumeravelmente compacto, existe uma subcobertura finita $\mathscr{C}'' \subset \mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$.

A demonstração do teorema principal não será apresentada integralmente, entretanto, será esboçada a ideia principal, que é bastante incomum. Ela usa "máquinas", que são algoritmos que recebem uma Entrada e devolvem um Produto que satisfaz uma Propriedade, de maneira semelhante à uma função em uma linguagem de programação.

Sejam X compacto, $Y \subset C_p(X)$ e N um ONA sobre Y. Para cada ordinal $\alpha \geq \omega$, definimos uma Máquina$_\alpha$ (*Machine*$_\alpha$) que toma como Entrada um conjunto $A \subset Y$ tal que $|A| \leq |\alpha|$ e um aberto U tal que $U \supset N(A)$, e devolve um Produto $M_\alpha(A)$ que é um discreto fechado contido em $Y \setminus U$ tal que $|M_\alpha(A)| \leq |\alpha|$ de forma que satisfaça uma Propriedade. Aqui não definiremos explicitamente a Propriedade, mas aliada a um lema sobre pontos limites em A, nos permite demonstrar que uma vez construído um candidato a núcleo discreto e fechado D, este é, de fato, discreto e fechado. Este D também será construído recursivamente: para cada $\alpha \geq \omega$, definimos D_α discreto e fechado usando a Máquina$_\alpha$ e, ao final da recursão, D é a união de todos os D_α.

Essencialmente, cada Máquina usa as Máquinas anteriores em sua execução, justificando assim a escolha dos nomes e do uso de algoritmos que se comportam de maneira semelhante a funções dentro de um programa, podendo chamar uns aos outros enquanto funcionam.

REFERÊNCIAS

ALAS, O. T.; JUNQUEIRA, L. R.; WILSON, R. G. Dually discrete spaces. **Topology and its Applications**, 2008. Citado na página 26.

ARHANGEL'SKII, A. V.; BUZYAKOVA, R. Z. Addition theorems and D-spaces. **Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae**, 2002. Citado na página 29.

AURICHI, L. F. D-spaces, topological games, and selection principles. **Topology Proceedings**, 2010. Citado nas páginas 34, 36 e 37.

_____. D-spaces, separation axioms and covering properties. **Houston Journal of Mathematics**, v. 37, n. 3, 2011. Citado nas páginas 20, 32, 51 e 52.

AURICHI, L. F.; DIAS, R. R. A minicourse on topological 'games. **Topology and its Applications**, 2019. Citado na página 35.

BUZYAKOVA, R. Z. Hereditary d-property of function spaces over compacta. **Proceedings of the American Mathematical Society**, 2004. Citado na página 53.

FLEISSNER, W. G.; STANLEY, A. M. D-spaces. **Topology and its Applications**, 2001. Citado nas páginas 17, 20 e 28.

GRUENHAGE, G. A survey of D-spaces. **Contemporary Mathematics**, 2010. Citado nas páginas 19, 21, 22 e 32.

HRUSáK, M.; MOORE, J. T. **Open Problems in Topology II**. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado na página 17.

HUREWICZ, W. Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems. **Mathematische Zeitschrift**, 1926. Citado na página 35.

JECH, T. J. **Set Theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2002. Citado nas páginas 25, 43 e 44.

KUNEN. **Set Theory (An Introduction to Independence Proofs)**. [S.l.]: Elsevier Science, 1980. Citado na página 37.

SOUKUP, D. T.; SZEPTYCKI, P. J. A counterexample in the theory of D-spaces. **Topology and its Applications**, 2012. Citado nas páginas 43 e 44.

VAN DOUWEN, E. K.; PFEFFER, W. V. F. Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 81, n. 2, dez. 1979. Citado nas páginas 9, 11, 17, 19, 39 e 40.

ÍNDICE

ICMC
SÃO CARLOS
USP