Equações Diferenciais Binárias e Geometria Diferencial

ANA CLAUDIA NABARRO

Orientadora: PROF^a. DR^a. MARIA APARECIDA SOARES RUAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".

USP - São Carlos
1997

Para 'aquele' que há de vir (com saúde).

Agradecimentos

À Deus pelas oportunidades...

À minha orientadora Maria Aparecida Soares Ruas pela dedicação, incentivo, paciência, compreensão e amizade.

À minha mãe pelo esforço e incentivo, ao meu pai, que tenho certeza, deve estar orgulhoso por mais esta etapa. Ao meu irmão, a toda minha família e ao Jean pelo apoio e incentivo.

Ao professor Farid pela ajuda e dedicação.

Aos professores do ICMSC, em especial à Ires, Dide, Ladeira, Paulo Porto, Leon, Zani e Gaspar com os quais muito aprendi.

Aos professores da Unesp de Rio Claro que me proporcionaram uma boa formação e aos antigos amigos que lá encontrei e que nunca esquecerei.

Aos amigos: Adriana, Alexandra, Ivan, Koxinha, Lú, Lauro, Lilian, Mara, Marcia, Marcio, Marquinho, Nê, Nina, Nelson, Regilene, Regina, Ricardo, Rogério, Sadao, Sarita, Simone, Toninho, Zélia... que tornaram esta caminhada mais agradável.

Aos funcionários deste Instituto pela atenção.

Às pessoas que direta ou indiretamente colaboraram com este trabalho.

Este trabalho recebeu apoio inicial do CNPq e com o apoio final da Fapesp.

Abstract

A binary differential equation is an implicit differential equation of the form

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0,$$

where a, b, c are smooth functions of x and y.

At a point (x,y) where the discriminant, $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$, is greather or equal than zero, the equation defines a pair of directions in the plane. A natural way to study this equation is to lift these bivalued direction fields to a single field defined on a covering space associated to the set $\Delta = \{(x,y)/b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0\}$.

A. Davydov [Dv], following the pioneer work of L. Dara [D], classified generic bivalued fields when the set Δ is a smooth curve. J. W. Bruce e F. Tari estudied in [$BT-1$] a topological classification of the integral curves of the equation when the function $\Delta(x,y)$ presents singularity of Morse type. Their approach is to reduce the implicit equation to a normal form.

The purpose of this work is to study the binary differential equations, in the neighbourhood of one isolated singular point. An analysis of these singularities is made through informations given by the Taylor's ,polynomial of the functions a, b e c, without reducing the EDB to a normal form. The results are applied to the study of the lines of curvature of surfaces in $\mathbb{R}^3$ and to the study of the asymptotic lines of convex embeddings of surfaces em $\mathbb{R}^4$.

Resumo

Uma equação diferencial binária é uma equação diferencial implícita da forma

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0,$$

onde a, b, c são funções diferenciáveis de x e y.

Em um ponto (x,y) onde seu discriminante, $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$, é maior que zero, a equação define um par de direções no plano. Uma maneira natural de estudar esta equação é levantar este par de campos de linhas a um único campo definido num espaço de recobrimento associado ao conjunto $\Delta = \{(x,y)/b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0\}$.

A. Davydov $[Dv]$, seguindo o trabalho pioneiro de L. Dara $[Dr]$, classificou pares de campos genéricos quando o conjunto Δ é uma curva diferenciável. J. W. Bruce e F. Tari estudam em $[BT-1]$ a classificação topológica das curvas integrais da equação quando a função $\Delta(x,y)$ apresenta uma singularidade do tipo Morse. Esta classificação é feita reduzindo a equação implícita à sua forma normal.

O objetivo deste trabalho é estudar as equações diferenciais binárias, na vizinhança de um ponto singular isolado. A análise destas singularidades é feita através de informações dadas pelo polinômio de Taylor das funções a, b e c, sem reduzir a EDB à sua forma normal. Os resultados são aplicados ao estudo das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e ao estudo das linhas assintóticas de mergulhos convexos de superfícies em $\mathbb{R}^4$.

Índice

0 Introdução **1**

1 Equação diferencial binária **4**

2 EDB 's com discriminante do tipo Morse **13**

Interpretação geométrica dos pontos singulares isolados 16

3 Linhas de Curvatura de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ **20**

Interpretação geométrica e invariância das condições T e D. . . . 21

Condição T 22

Condição D 24

Configurações principais nos umbílicos Darbouxianos. 26

Genericidade das condições Darbouxianas 27

4 Linhas assintóticas sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$ **31**

Superf´ıcies localmente convexas 37

Capítulo 0

Introdução

Equações diferenciais implícitas (EDI's), $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, aparecem em vários ramos da matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies em espaços de dimensões três e quatro. Informações mais completas sobre as soluções desta equação podem ser obtidas quando as estudamos do ponto de vista da teoria de Singularidades.

Uma equação diferencial implícita determinará geralmente muitas direções por um dado ponto (x, y) no plano, e consequentemente muitas curvas soluções. Para o estudo destas equações, vamos usar o método do levantamento do campo de linhas a um campo no fibrado projetivo. Este método consiste em desdobrar as EDI's em uma simples EDO sobre um espaço mais complicado.

Dada uma equação diferencial implícita

$$F(x, y, dy, dx) = 0,$$

consideramos o fibrado tangente projetivo ao plano, e o subconjunto

$$\mathcal{L}=\{(x, y, [p : q]); F(x, y, p, q) = 0\}.$$

A projeção natural

$$\pi : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^2$$

levanta uma EDI de $\mathbb{R}^2$ para uma EDO sobre $\mathcal{L}$. Chamamos ponto singular da EDI um ponto onde o campo levantamento, $\mathcal{L}$, tem um zero.

No capítulo 1, detalharemos esta discussão e daremos alguns exemplos de equações diferenciais implícitas. As principais referências deste capítulo são os artigos "*On binary differential equations* " e "*Implicit differential equations from the singularity theory viewpoint* " de J. W. Bruce e F. Tari.

O principal objetivo deste trabalho é o estudo das equações diferenciais binárias, EDB's, isto é, equações diferenciais implícitas para as quais existem no máximo duas direções em cada ponto do plano.

As EDB's são equações da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0,$$

onde a, b, c são funções diferenciáveis. O discriminante desta equação é a função $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$.

Quando Δ_x e Δ_y não se anulam simultaneamente no zero, Δ é uma curva regular. Whitney [Wh] demonstrou que para um conjunto aberto e denso de funções F, a projeção π é um difeomorfismo local, tem singularidade do tipo dobra ou tem singularidade do tipo cúspide.

Segundo Lak Dara [Dr], o primeiro estudo sistemático das singularidades de uma equação binária foi feito por W. Dyck, que deu uma classificação qualitativa, embora incompleta, das singularidades mais simples. René Thom refez esta questão no contexto moderno da teoria das singularidades. Porém, a classificação que propôs das singularidades genéricas é também incompleta.

Segundo Arnold, o problema de encontrar uma forma normal para os pontos singulares regulares foi resolvido por M. Chibrario em 1932.

Um estudo topológico das singularidades: dobra-nó, dobra-foco e dobra-sela está, segundo Arnold [A], no trabalho de Phakadze e Shestakov (1959). Estes resultados foram redescobertos por R. Thom, L. Dara, F. Takens no período 1972-1976. Em 1984, A. A. Davydov [Dv], apresentou um estudo topológico das singularidades do tipo elíptica e hiperbólica.

O principal enfoque deste trabalho é o estudo do caso em que Δ é singular, ou seja, $\Delta_x(0,0) = \Delta_y(0,0) = 0$. Analisaremos o comportamento das soluções próximas aos pontos singulares isolados.

No capítulo 2, classificaremos as curvas soluções próximas aos pontos singulares isolados de uma equação binária genérica. Em [$BT, 1$] e [$BT, 2$], esta classificação é feita reduzindo a EDB à sua forma normal. Neste trabalho, o estudo é feito diretamente sem efetuar mudanças de coordenadas. Isto é feito através de uma extensão dos cálculos feitos por Sotomayor em [GS] para linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Daremos também o enfoque geométrico das soluções e singularidades desta equação e veremos que estas singularidades correspondem a pontos umbílicos Darbouxianos.

A referência principal para o capítulo 3 é o livro "*Lines of curvature and umbilical points on surfaces* " de C. Gutierrez e J. Sotomayor. Os resultados obtidos no capítulo 2 são aplicados ao estudo das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Provaremos que o conjunto das superfícies diferenciáveis, nas quais todos os pontos umbílicos são Darbouxianos, é aberto e denso. O teorema, de Sotomayor e Gutierrez, de estabilidade para as configurações das linhas de curvatura de um mergulho genérico é também enunciado.

No capítulo 4, seguindo os trabalhos [Md] e [$GMFR$], obteremos a EDB das

linhas assintóticas de uma superfície fechada, M em $\mathbb{R}^4$ e mostraremos que para um mergulho genérico localmente convexo de M, as singularidades que aparecem são os umbílicos Darbouxianos. Além disso, provaremos que qualquer mergulho genérico de uma superfície compacta localmente convexa, com número de Euler diferente de zero, tem pelo menos quatro pontos deste tipo.

Capítulo 1

Equação diferencial binária

Equações diferenciais implícitas aparecem em vários ramos da matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies em espaços de dimensões três e quatro. Mais informações sobre estas superfícies podem ser obtidas quando as estudamos do ponto de vista da teoria de Singularidades. Uma *equação diferencial implícita* (EDI) é qualquer equação da forma

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

onde F é uma função C^∞ de três variáveis. O termo implícita é usado para diferenciar tais equações das que podemos escrever como

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y),$$

onde a derivada é dada explicitamente como uma função das variáveis x e y. Esta última pode ser resolvida numericamente e geralmente existe uma curva solução simples por cada ponto do plano.

Uma forma mais conveniente da equação explícita acima é

$$a(x, y)dy + b(x, y)dx = 0. \tag{1}$$

Genericamente, esta *equação diferencial ordinária* (EDO) determina um campo de linhas, isto é, uma linha é determinada para cada ponto no plano, com a inclinação específica. Uma solução é uma curva regular com a propriedade que em cada um de seus pontos ela é tangente à linha dada. Os *pontos singulares* de uma EDO são aqueles em que as funções a e b se anulam simultaneamente. Genericamente, tais pontos são isolados. Uma EDI, por outro lado, determinará geralmente muitas linhas por um dado ponto (x, y) no plano, e conseqüentemente muitas curvas soluções. Isto pode ser pensado como a superposição de um número de EDO 's e as singularidades podem surgir de três modos: existem aqueles pontos onde duas ou mais das linhas coincidem, aqueles onde uma das componentes das EDO 's tem uma singularidade, e pontos onde ambos ocorrem.

Equações diferenciais implícitas aparecem em vários ramos da matemática, em particular na geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

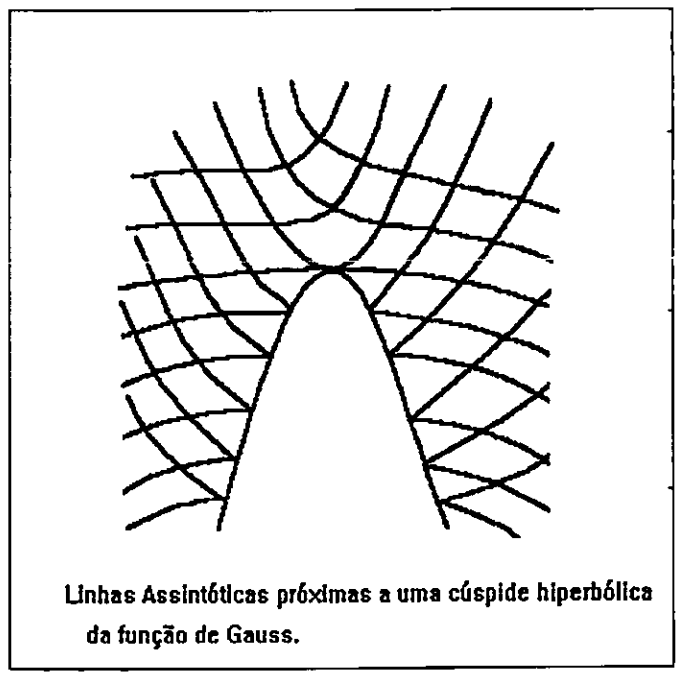


Figure 1.1:

Exemplo 1.1 *(Da geometria diferencial). (a) Seja X uma superfície regular no espaço Euclidiano de dimensão três. A curvatura seccional, k_N, numa direção v tangente à superfície em p, é dada por $k_N(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)}$, onde I_p e II_p são, respectivamente, a primeira e a segunda formas fundamentais da superfície. Em um ponto hiperbólico de X existem duas direções, chamadas* direções assintóticas, *para as quais a curvatura seccional é zero. Em um ponto parabólico estas direções coincidem, e não existem direções assintóticas em pontos elípticos. O resultado é um par de campos direcionais sobre a parte não-elíptica da superfície cujas curvas integrais são chamadas curvas assintóticas.*
Suponha que X é dado localmente na forma de Monge $(x, y, h(x, y))$. As linhas assintóticas em $(x, y, h(x, y))$ são então as curvas soluções da EDI

$$h_{yy}dy^2 + 2h_{xy}dxdy + h_{xx}dx^2 = 0.$$

As figuras 1.1, 1.2 e 1.3 mostram o comportamento genérico das linhas assintóticas na vizinhança da curva parabólica $[BGM]$.

(b) Outro exemplo clássico é fornecido pelo campo de direções principais sobre X. Em um ponto não umbílico existem duas direções ortogonais, chamadas principais,

Figure 1.2:

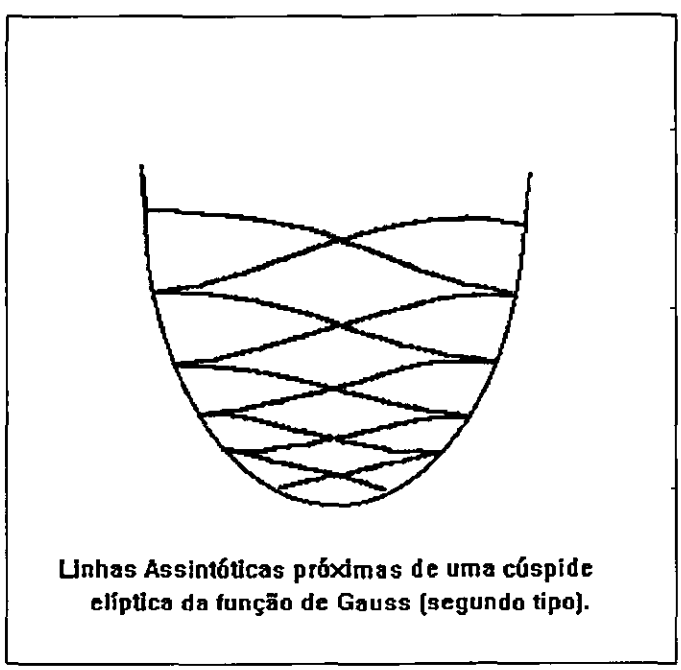


Figure 1.3:

correspondendo aos extremos da curvatura seccional. Em um ponto umbílico todas as direções são principais. Fora dos pontos umbílicos, as integrais de cada um destes campos são chamadas linhas de curvatura ou linhas principais. A equação diferencial das linhas principais é dada por:

$$\det \begin{bmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{bmatrix} = 0$$

onde e, f, g, E, F, G são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Para estudar a estrutura das linhas de curvatura em um ponto umbílico, consideramos a superfície na forma de Monge, $(x, y, h(x,y))$, com $h(x,y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + C(x,y)$ onde k é a curvatura seccional no umbílico e a função C é tal que $j^2C(0,0) = 0$. A EDI que determina as direções principais na vizinhança do ponto umbílico é então da forma

$$a(x,y)dx^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dy^2 = 0,$$

onde

$$a(x,y) = \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(1 + (kx + \frac{\partial C}{\partial x})^2) - (k + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2})(kx + \frac{\partial C}{\partial x})(ky + \frac{\partial C}{\partial y})$$

$$2b(x,y) = (k + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2})(1 + (kx + \frac{\partial C}{\partial x})^2) - (k + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2})(1 + (ky + \frac{\partial C}{\partial y})^2$$

$$c(x,y) = (k + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2})(kx + \frac{\partial C}{\partial x})(ky + \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(1 + (ky + \frac{\partial C}{\partial y})^2)$$

(Ver figura 1.4.)

Exemplo 1.2 *(Problema geral de auto-valor). Considere uma matriz* 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *com* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *O polinômio característico de* A *é* $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$. *Então existem dois auto-valores reais distintos se* $\delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$, *um autovalor real repetido se* $\delta = 0$ *e auto-valores complexos se* $\delta < 0$. *Suponha que exista um germe de função regular* $\Phi : \mathbb{R}^2, 0 \to M_2$, *onde* M_2 *é o espaço das matrizes dois por dois. Seja* Δ *o subconjunto de* M_2 *formado pelas matrizes* A *com determinante* $\delta = 0$. *Então* Φ *determina um par de campos sobre a região* $\delta \circ \Phi > 0$, *com fronteira* $\Phi^{-1}(\Delta)$. *Eliminando* λ *de* $A\binom{x}{y} = \lambda\binom{x}{y}$ *obtemos* $by^2 + (a-d)xy - cx^2 = 0$ *e se* a, b, c, d *indicam as quatro componentes de* Φ *teremos a EDI*

$$b(dy)^2 + (a-d)dxdy - c(dx)^2 = 0.$$

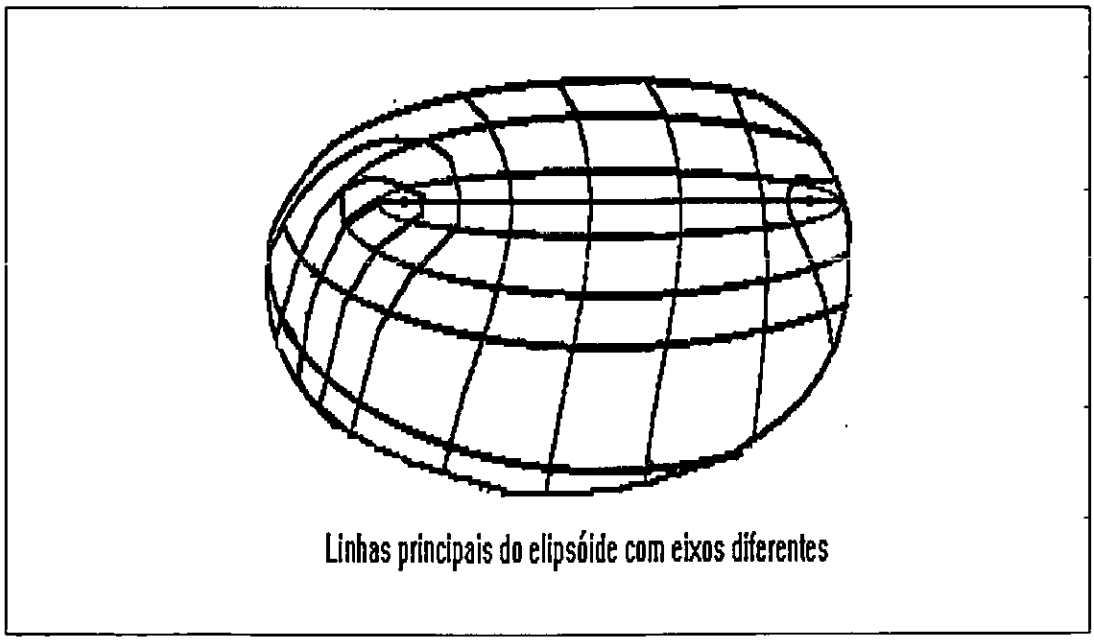


Figure 1.4:

Podemos considerar o caso em que temos uma função regular Φ com imagem em SM_2, o espaço das matrizes simétricas dois por dois. Então b e c coincidem e obtemos a EDI

$$b(dy)^2 + (a-d)dxdy - b(dx)^2 = 0.$$

A soma dos coeficientes de dy^2 e dx^2 é zero, isto é equivalente ao fato que os autoespaços são ortogonais. Note que neste caso temos duas direções distintas exceto naqueles pontos onde $b = a - d = 0$. Estas equações, geralmente, determinam uma coleção de pontos isolados no plano.

Exemplo 1.3 *Sejam M e N duas variedades Riemannianas de dimensão dois e seja $\Phi : M \to N$ uma função regular. Suponha que Φ é o germe de um difeomorfismo em $x \in M$. Então $d\Phi_x : T_xM \to T_{\Phi(x)}N$ é um isomorfismo. Para $v \in T_xM$ um vetor unitário, podemos considerar o comprimento da imagem de v sob a derivada de Φ, $\| d\Phi_x(v) \|_{\Phi(x)}$ e procurar aqueles v para os quais ele é maximizado/minimizado. Se escolhermos uma base ortonormal para T_xM e $T_{\Phi(x)}M$ e escrevermos $d\Phi_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com respeito a estas bases, estamos ma-*

ximizando/minimizando $(a\cos\theta + bsen\theta)^2 + (c\cos\theta + dsen\theta)^2$ *com respeito a* θ. *Diferenciando esta expressão temos*

$$-(a^2+c^2)\cos\theta sen\theta + (ab+cd)(\cos^2\theta - sen^2\theta) + (b^2+d^2)\cos\theta sen\theta = 0.$$

Consequentemente,

$$(b^2+d^2-a^2-c^2)sen2\theta + 2(ab+cd)\cos 2\theta = 0.$$

Assim, os extremos são duas direções ortogonais dadas pela EDI

$$(ab+cd)dx^2 + (b^2+d^2-a^2-c^2)dxdy - (ab+cd)dy^2 = 0.$$

Geometricamente estes são os eixos da elipse em $T_{\Phi(x)}N$ *que é a imagem do círculo unitário em* T_xM. *Os coeficientes se anulam quando* $ab+cd = b^2+d^2-(a^2+c^2) = 0$. *Isto ocorre quando* $c = \pm b$ *e* $a = \mp d$, *ou seja, quando* $d\Phi_x$ *é da forma reflexão em uma reta e dilatação, caso em que a matriz é* $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, *ou quando* $d\Phi_x$ *é uma rotação e dilatação; caso em que a matriz é* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. *Em outras palavras isto ocorre quando a imagem do círculo unitário é também um círculo. (Note que precisamos somente de uma estrutura conforme sobre* M *e* N.*) Observemos que quando* M *é uma superfície em um espaço de dimensão três,* $N = S^2$, *e* Φ *é a função de Gauss então os vetores acima são as direções principais de* M.

Dois métodos são usualmente utilizados para o estudo das EDI 's, o método da transformação de Legendre [BT,1] e o método do levantamento do campo de linhas a um campo no fibrado projetivo. Vamos descrever este último, que será usado na sequência. Este método de estudo consiste em desdobrar as EDI's em uma simples EDO sobre um espaço mais complicado. Dada uma EDI

$$F(x,y,dy,dx) = 0,$$

tal método consiste em considerar o fibrado tangente projetivo ao plano, que é simplesmente $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$, e o subconjunto

$$\mathcal{L} = \{(x,y,[p:q]) : F(x,y,p,q) = 0\}.$$

No próximo capítulo, veremos que com hipóteses genéricas, pode-se assumir que $\mathcal{L}$ é uma superfície regular. Escolhendo uma carta afim em $\mathbb{R}P^1$ podemos considerar o subconjunto do espaço (x,y,p) dado por $F(x,y,p,1) = 0$.

Existe uma projeção natural

$$\pi: \quad \mathcal{L} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, p) \longmapsto (x, y)$$

que levanta uma EDI de $\mathbb{R}^2$ para uma EDO sobre $\mathcal{L}$. Em cada ponto (x, y, p) de $\mathcal{L}$ escolhemos uma direção tangente a $\mathcal{L}$ que se projeta sobre uma linha por (x, y) com direção p. Isto pode ser feito explicitamente. Seja (x, y) um ponto de uma curva solução cuja direção tangente é p. O plano que passa por esta reta tangente e é paralelo ao eixo p é chamado *plano de contato*. Consideremos o ponto (x, y, p) de $\mathcal{L}$ e observemos que o plano tangente a esta superfície neste ponto é distinto do plano de contato sempre que $F_p \neq 0$. Estes planos então, se encontram segundo uma reta. Logo, os planos tangentes e os planos de contato em todos os pontos vizinhos se cortam segundo retas, dando origem assim a um campo de direções que localmente é dado pelo campo vetorial

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p},$$

tangente a $\mathcal{L}$. Com efeito, considere um campo $\xi = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial p}$, a condição de tangência é $AF_x + pAF_y + CF_p = 0$. Sem perda de generalidade , podemos fixar $A = 1$ e então $C = -\frac{F_x + pF_y}{F_p}$. Substituindo e multiplicando a condição de tangência por F_p, obtemos ξ como desejado. Este levantamento ξ determina uma EDO em $\mathcal{L}$, que podemos então analisar.

Pontos de $\mathcal{L}$ onde a projeção π não é um difeomorfismo são de especial interesse. Estes são pontos onde não podemos resolver $F = 0$ para p, isto é não podemos reduzir localmente para uma EDO. Eles são também os pontos onde duas ou mais das direções coincidem. O conjunto de pontos críticos de π é chamado o *criminante* e consiste de pontos onde o plano tangente à superfície $\mathcal{L}$ é vertical, isto é, é o conjunto de pontos onde $F = F_p = 0$. A projeção do criminante é o *discriminante* da equação. A teoria das Singularidades é uma importante ferramenta para a classificação dos pontos singulares desta projeção.

Sobre este criminante existirão pontos especiais onde o campo levantamento tem um zero. Em termos do levantamento construído acima, estes são pontos satisfazendo

$$F = F_p = F_x + pF_y = 0.$$

Note que os zeros do levantamento devem estar sobre o criminante.

EDI's para as quais existem no máximo duas direções em cada ponto do plano, são chamadas *equações diferenciais binárias*, EDB 's, e são de interesse especial.

Sejam as equações diferenciais binárias da forma

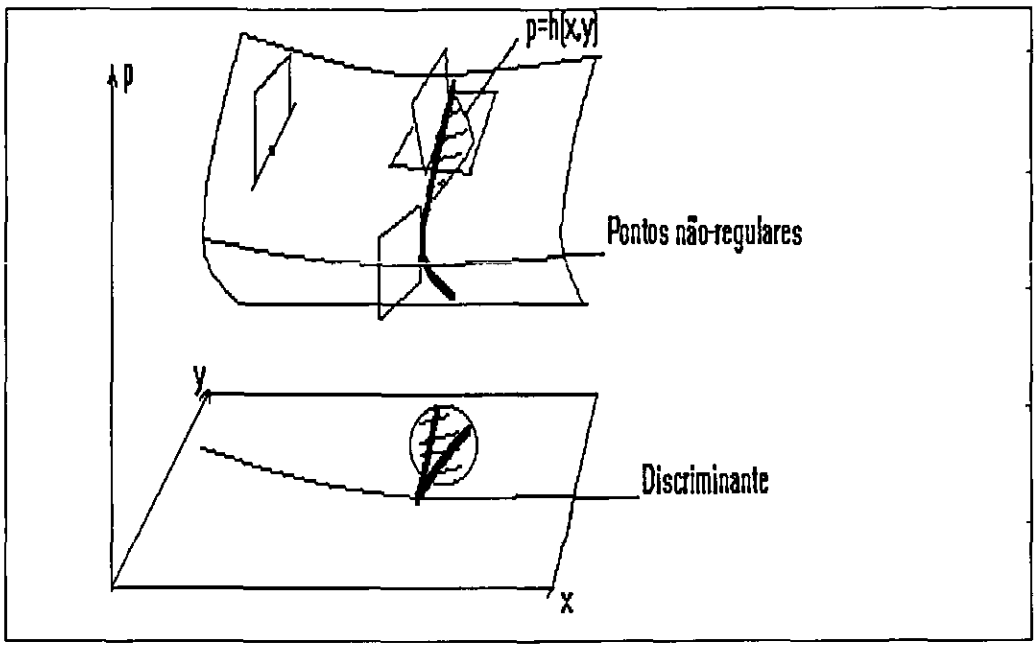


Figure 1.5:

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0,$$

onde a, b, c são funções suaves todas nulas em $(0,0)$. Esta equação define um par de direções em cada ponto (x,y), do plano, onde $b^2 - ac > 0$. Além disso, as duas direções coincidem sobre o discriminante da equação, $\Delta = \{(x,y) : b^2 - ac = 0\}$, e não existem direções em pontos onde esta expressão é negativa.

Seja $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$. Quando Δ_x e Δ_y não se anulam simultaneamente no zero, Δ é uma curva regular. Neste caso, podemos ainda supor que π é uma aplicação de Whitney, isto é, as singularidades de π são do tipo dobra ou do tipo cúspide. Um resultado de Whitney $[Wh]$ afirma que para um conjunto aberto e denso de funções F a projeção π é um difeomorfismo local, tem singularidade do tipo dobra ou tem singularidade do tipo cúspide. Para a singularidade dobra, podemos escolher coordenadas locais em $\mathcal{L}$ para que π tenha a forma normal simples (u, v^2), e para a singularidade do tipo cúspide, podemos escolher coordenadas locais para que π tenha a forma nomal $(u, v^3 + uv)$. Em $[Dv]$, Davydov classificou (seguindo o trabalho de Dara $[Dr]$) pares de campos quando o discriminante é regular e mostrou que para forma normal $(u, v^3 + uv)$, isto é, quando π tem singularidade do tipo cúspide, a EDB adquire módulo.

Vamos, no próximo capítulo, classificar as curvas integrais da EDB quando a, b, c se anulam simultaneamente no zero, isto é, Δ é singular, e a função $\Delta = b^2 - ac$ tem uma singularidade do tipo Morse na origem.

Capítulo 2

EDB 's com discriminante do tipo Morse

Seja $a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0$ uma equação binária, com a, b, c se anulando simultaneamente no zero. Neste caso, $\Delta_x(0,0) = \Delta_y(0,0) = 0$, isto é Δ é singular. Vamos agora, classificar as curvas integrais destas EDB 's quando a função $b^2 - ac$ tem uma *singularidade do tipo Morse* na origem. Ou seja, além de $\Delta_x(0,0) = \Delta_y(0,0) = 0$ temos que o determinante hessiano da função Δ na origem é diferente de zero (isto é, sua hessiana é não degenerada). Veremos na proposição abaixo que esta condição é equivalente a que a superfície

$$\{(x, y, [p, q]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 : ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0\}$$

associada à equação inicial, seja regular.

De fato, esta superfície é um cilindro, cuja fibra excepcional é o círculo central sobre a origem. Escolhendo uma carta afim de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$, com $q = 1$, consideremos localmente em $\mathbb{R}^3$ a superfície

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) : ap^2 + 2bp + c = 0\}$$

Denotaremos a função $ap^2 + 2bp + c$ por F, e escreveremos

$$\begin{aligned} a(x,y) &= a_1x + a_2y + O(2), \\ b(x,y) &= b_1x + b_2y + O(2), \\ c(x,y) &= c_1x + c_2y + O(2). \end{aligned}$$

Proposição 2.1 *(1) A superfície $\mathcal{L}$ é regular em uma vizinhança de $(0,0) \times \mathbb{R}P^1$ se e somente se a função discriminante $b^2 - ac$ tem uma singularidade de Morse.*
(2) A projeção natural $\pi : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ é um difeomorfismo local fora de $\pi^{-1}(\Delta)$.

Prova: (1) A função $F_p = \frac{\partial F}{\partial p} = 2ap + 2b$ é identicamente nula sobre $(0,0) \times \mathbb{R}P^1$, assim a superfície não é suave em uma vizinhança de $(0,0) \times \mathbb{R}P^1$ se e somente se $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,p) = a_1p^2 + 2b_1p + c_1$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,p) = a_2p^2 + 2b_2p + c_2$ se anulam simultaneamente para algum p. Calculando a Resultante destes dois polinômios, vemos que p é solução das duas equações quando

$$(*) \qquad (c_2a_1 - c_1a_2)^2 - 4(b_2a_1 - b_1a_2)(c_2b_1 - c_1b_2) = 0$$

Por outro lado a expansão de Taylor de ordem dois da função discriminante é a seguinte

$$b^2 - ac = (b_1^2 - c_1a_1)x^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)xy + (b_2^2 - c_2a_2)y^2 + O(3)$$

A parte quadrática desta função é degenerada, ou seja teremos uma singularidade mais degenerada que Morse no $(0,0)$, se e somente se a relação (*) vale.

(2) A projeção π não é localmente um difeomorfismo em pontos (x,y,p) onde $F_p(x,y,p) = 0$, isto é quando $F = F_p = 0$. Este conjunto é precisamente $\pi^{-1}(\Delta)$.■

Agora, vamos assumir que $\mathcal{L}$ é regular. Em cada ponto do plano onde $b^2 - ac > 0$ existem duas direções e dois pontos correspondentes sobre a superfície $\mathcal{L}$. Um *campo vetorial* ξ sobre $\mathcal{L}$ é um levantamento da equação diferencial binária ou do par de campos determinados, se e somente se $d\pi(x,y,p)$ é um vetor de direção p. Ou seja, ele se projeta em um vetor no plano com a correspondente direção. Quando ξ é, além disso, um campo tangente à superfície $\mathcal{L}$, dizemos que ξ é um *levantamento adequado* sobre $\mathcal{L}$.

Proposição 2.2 *(1) O campo vetorial*

$$\xi = F_p\frac{\partial}{\partial x} + pF_p\frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y)\frac{\partial}{\partial p}$$

é um levantamento adequado sobre $\mathcal{L}$ do par de campos em $\mathbb{R}^2$. (2) O campo vetorial ξ tem genericamente um ou três zeros sobre $(0,0) \times \mathbb{R}P^1$. Estes zeros são do tipo nó ou sela.

Prova: (1) Seja $\xi = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial p}$. Então ξ é um levantamento adequado se ele é tangente a $\mathcal{L}$ e satisfaz $B = pA$. Claramente, esta última condição está satisfeita, e além disso, a condição de tangência já foi provada no capítulo anterior.

(2) Os zeros de ξ sobre $\mathcal{L}$ são dados por $F = F_p = F_x + pF_y = 0$. As duas primeiras equações implicam $b^2 - ac = 0$. Isto determina a imagem inversa de Δ por π sobre a fibra excepcional $(0,0) \times \mathbb{R}P^1$, como mencionado anteriomente. Para que $(0,0,p)$ seja um zero de ξ, desde que $F(0,0,p) = F_p(0,0,p) = 0$, temos que exigir apenas que $(F_x + pF_y)(0,0,p) = 0$. A expressão para $F_x + pF_y$ em $(0,0,p)$ é a função cúbica $\Phi(p) = a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$. Esta forma cúbica depende dos valores a_i, b_i, c_i de seus coeficientes. Escolhendo valores para a_i, b_i, c_i no conjunto aberto e denso de $\mathbb{R}^6$, que é o complementar do conjunto definido pelo anulamento simultâneo de Φ e Φ', garantimos que Φ terá uma ou três raízes reais.

Procuramos a natureza dos correspondentes zeros de ξ. Para isto, é necessário analisar os auto-valores destes zeros. Seja p_1 zero de Φ. Podemos assumir que $F_y(0,0,p_1) \neq 0$ e escrever $\mathcal{L}$ localmente como o gráfico de uma função $y = g(x,y)$.

Então, $F(x, g(x,p), p) = 0$, e consequentemente $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial p} = 0$. Seja $\tilde{\xi}$ a projeção de ξ no plano (x,p). Usando a fórmula de Taylor em $(0,p_1)$, podemos escrever $\tilde{\xi} = [\alpha_1 x + \alpha_2(p-p_1) + O(2)]\frac{\partial}{\partial x} + [\beta_1 x + \beta_2(p-p_1) + O(2)]\frac{\partial}{\partial p}$ onde

$$\alpha_1 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p}\frac{\partial g}{\partial x}\right)(0,p_1);$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p}\frac{\partial g}{\partial p}\right)(0,p_1);$$

$$\beta_1 = -\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + p\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)(0,p_1)\right\};$$

$$\beta_2 = -\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial y} + p\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial p}\right)(0,p_1)\right\}$$

.

Como $\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y}\right)(0,p_1) = \Phi(p_1) = 0$, segue que $\frac{\partial g}{\partial x} = p_1$. Além disso como $\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0$ em $(0,p_1)$, então $\frac{\partial g}{\partial p}(0,p_1) = 0$. Consequentemente

$$\alpha_1 = 2(a_2 p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1)$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\beta_2 = -\{3a_2 p_1^2 + 2(2b_1 + a_1)p_1 + (c_2 + 2b_1)\} = -\Phi'(p_1)$$

Precisamos ainda determinar os autovalores da linearização de ξ em seus zeros. Mas os autovalores da matriz da parte linear de $\tilde{\xi}$ são claramente $\alpha_1 = 2(a_2 p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1)$ e $-\Phi'(p_1) = \beta_2(p_1)$. Como p_1 não é uma raiz repetida da função cúbica Φ, segue que $\Phi'(p_1) \neq 0$. Genericamente α_1 e Φ não têm raízes comuns, então $\alpha_1(p_1) \neq 0$. Então os zeros de $\tilde{\xi}$ são selas quando $-\Phi'(p_1)\alpha_1(p_1) < 0$, ou nós quando $-\Phi'(p_1)\alpha_1(p_1) > 0$. De fato devemos esperar que não existam singularidades focais, pois localmente a fibra excepcional é o fecho de uma curva integral que passa pelos zeros do campo.■

A figura abaixo, representa o comportamento de Δ na vizinhança de pontos singulares do tipo Morse. Existem duas possibilidades: sela e, máximo e mínimo. Vamos estudar em especial o caso em que Δ é um ponto singular isolado, isto é $(0,0)$ é um mínimo ou um máximo não degenerado para a função Δ.

Por exemplo, a EDB

$$a(x,y)dy^2 + 2b(x,y)dxdy - a(x,y)dx^2 = 0,$$

onde $\Delta(x,y) = b^2 + a^2$ é maior ou igual a zero, e portanto $(0,0)$ é um ponto de mínimo.

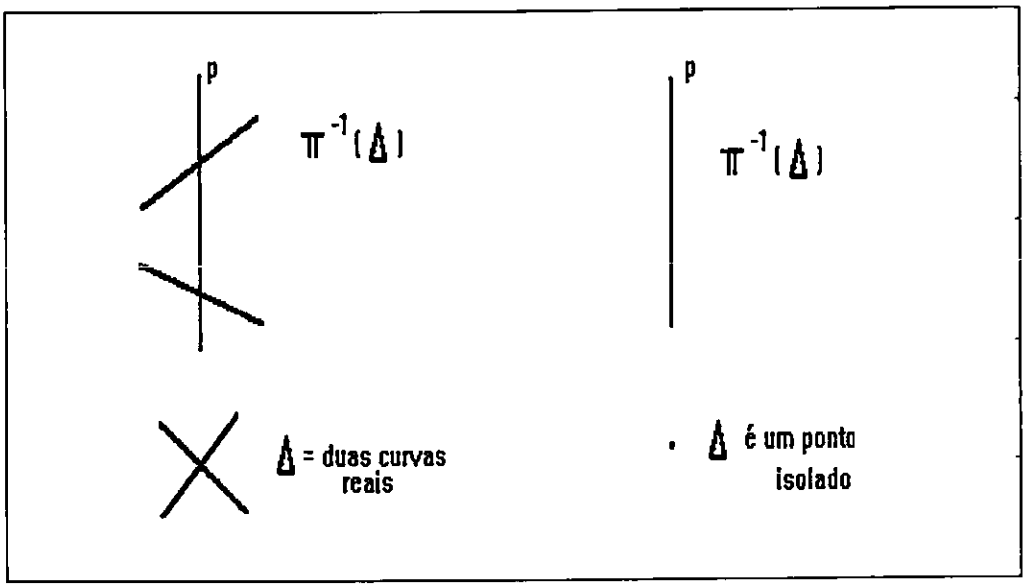


Figure 2.1:

Interpretação geométrica dos pontos singulares isolados

As singularidades do campo ξ são dadas pela cúbica

$$\Phi(p) = a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1.$$

Vimos que genericamente esta cúbica tem uma ou três soluções reais.

Daqui para frente, vamos fazer uma mudança de coordenadas tal que o termo constante de $\Phi(p) = a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$, se anule, e assim $p_0 = 0$ será uma singularidade do campo levantado.

O ponto singular $(x, y) = (0, 0)$ é *isolado,* isto é, é máximo ou mínimo não degenerado se o determinante da matriz Hessiana, na origem, é maior que zero, ou seja,

$$4(b_2a_1 - b_1a_2)(b_1c_2) > (a_1c_2)^2.$$

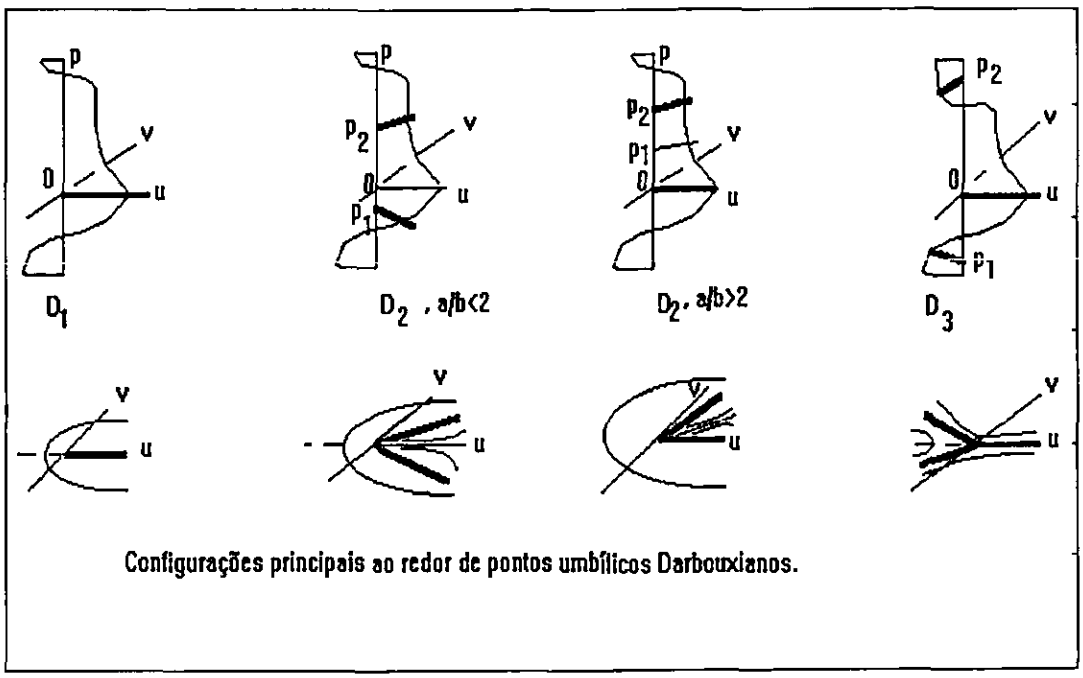
Neste caso temos a seguinte definição:

Definição 2.3 *Um ponto singular é* Darbouxiano *se valerem as condições:*

M) Condição de máximo ou mínimo não degenerado:

$$c_2(a_1(4b_1b_2 - c_2a_1) - 4b_1^2a_2) > 0,$$

isto é, o determinante hessiano da função Δ é positivo.



Configurações principais ao redor de pontos umbílicos Darbouxianos.

Figure 2.2:

D) Condição Discriminante:

$D_1)$ $\frac{b_1}{a_2} > \frac{(2b_2+a_1)^2-4a_2c_2}{8a_2^2}$, ou

$D_2)$ $0 < \frac{b_1}{a_2} < \frac{(2b_2+a_1)^2-4a_2c_2}{8a_2^2}$ e $2b_1 + c_2 \neq 0$, ou

$D_3)$ $\frac{b_1}{a_2} < 0$.

Observemos que a condição de máximo ou mínimo não degenerado independe das coordenadas da superfície e que além disso, ela implica que a condição de Morse é válida.

Provaremos, na proposição abaixo, que no caso D_1 há uma só solução, e esta será uma singularidade do tipo sela do campo ξ, e no caso de haver três soluções, a singularidade será do tipo D_2 ou do tipo D_3. No caso D_2, temos duas singularidades sela e uma do tipo nó, e no caso D_3, temos que as três singularidades são do tipo sela. Observemos, que o índice 1, 2 e 3, correspondem ao número de selas do campo. Em alguns artigos, a singularidade D_1 é chamada Lemon, a D_2 é chamada Monstar, e a D_3, Star. As separatrizes de selas de ξ normais ao eixo p, desenhadas em linhas fortes na figura 3.2, projetadas na superfície definem as *separatrizes umbílicas.* Estas são linhas que tendem para os pontos umbílicos e separam os diferentes comportamentos das linhas principais próximas deste ponto. Esta figura ilustra somente uma folha da superfície $\mathcal{L}$.

Proposição 2.4 *(1) Se o ponto singular é do tipo D_1 então o campo tem uma única singularidade e esta é do tipo sela.*
(2) Se o ponto singular é do tipo D_2 então o campo tem três singularidades, uma do tipo nó e duas do tipo sela.
(3) Se o ponto singular é do tipo D_3 então o campo tem três singularidades do tipo sela.

Prova: (1) A condição D_1 é equivalente ao fato de que o discriminante da parte quadrática de $\Phi(p)$, $a_2p^2 + (2b_2 + a_1)p + (2b_1 + c_2)$, é menor que zero, isto é, $p = 0$ é a única singularidade do campo. Para esta singularidade ser sela temos que ter $-\Phi'(0)\alpha(0) = -2b_1(c_2 + 2b_1) < 0$, multiplicando esta condição por $\frac{b_1}{b_1}$, veremos que ela é equivalente a $\frac{c_2}{b_1} > -2$. A hipótese pode ser separada em dois casos:

- se $a_2b_1 > 0$ então $\frac{c_2}{b_1} > \frac{(2b_2+a_1)^2}{4a_2b_1} - 2 > -2$ e assim concluímos a tese.

Provaremos que a condição, $a_2b_1 < 0$, é absurda, ou seja, provaremos que ela contradiz a condição de máximo ou mínimo não degenerado. Vejamos:

$$4(b_2a_1 - b_1a_2)(b_1c_2) < 4(b_2a_1 - b_1a_2)b_1^2(\frac{(2b_2+a_1)^2}{4a_2b_1} - 2) < 4b_1^2(\frac{(a_1c_2)^2}{4b_1c_2})(\frac{(2b_2+a_1)^2}{4a_2b_1} - 2)$$
$$= (a_1c_2)^2(\frac{(2b_2+a_1)^2 - 8b_1a_2}{4a_2c_2}) < (a_1c_2)^2.$$

Esta última passagem é garantida pela condição D_1, já que $a_2b_1 < 0$ e $b_1c_2 < 0$ implica que $a_2c_2 > 0$. A segunda desigualdade também é garantida por D_1, quando $a_2b_1 < 0$, e a terceira é garantida pela condição da singularidade ser isolada e $a_2b_1 < 0$.

(2) A condição D_2, $0 < \frac{b_1}{a_2} < \frac{(2b_2+a_1)^2 - 4a_2c_2}{8a_2^2}$, pode ser dividida em dois casos:

a) $0 < \frac{b_1}{a_2} < -\frac{c_2}{2a_2}$, neste caso a origem é nó, pois, $-\Phi'(0)\alpha(0) = -2b_1(c_2 + 2b_1) > 0$. Além disso, $p_1p_2 = \frac{2b_1+c_2}{a_2} < 0$ e assim, as outras duas singularidades, p_1 e p_2 , têm sinais opostos, e portanto, o zero é a singularidade do meio.

b) $\frac{b_1}{a_2} > -\frac{c_2}{2a_2}$, neste caso a origem é sela, pois, $-\Phi'(0)\alpha(0) = -2b_1(c_2 + 2b_1) < 0$. Neste caso, $p_1p_2 = \frac{2b_1+c_2}{a_2} > 0$ e assim, as outras duas singularidades, p_1 e p_2 , têm o mesmo sinal, e portanto, o zero não é a singularidade do meio.

Observemos que a variedade que separa o caso D_2 do caso D_3, é dada pela condição $p_1p_2 = \frac{c_2}{a_2}$. Vamos, agora, dar uma interpretação geométrica que distingue o caso D_2 do caso D_3.

O caso D_2 equivale à existência de um setor angular fixo, definido por $p_1p_2 = \frac{c_2}{a_2}$, contendo as três semi-retas das separatrizes (cujas inclinações são p_0, p_1, p_2, que são as soluções de Φ), pois, $p_1p_2 > \frac{c_2}{a_2}$, e o caso D_3 equivale ao fato de que tal setor fixo não contém as três semi-retas, pois, $p_1p_2 < \frac{c_2}{a_2}$. Sendo assim, qualquer rotação na superfície preservará esta interpretação e assim as condições D_2 e D_3 independem das coordenadas usadas para parametrizar a superfície.

Portanto, no caso D_2, a singularidade do meio é um nó e as outras duas são selas.

(3) No caso D_3, $\frac{b_1}{a_2} < 0$, como temos três singularidades então $\frac{2b_1+c_2}{a_2} < 0$ e assim $-\Phi'(0)\alpha(0) = -2b_1(c_2 + 2b_1) < 0$, ou seja, as três singularidades são selas, pois, qualquer rotação que leve as outras singularidades na origem preservará esta condição.■

Nos próximos dois capítulos aplicaremos estes resultados ao estudo das linhas de curvatura e linhas assintóticas de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

Capítulo 3

Linhas de Curvatura de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, estudaremos o comportamento genérico das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$, e veremos que as singularidades do campo ξ, contruído analogamente ao capítulo anterior, correspondem a pontos umbílicos Darbouxianos. Sob condições genéricas, a equação diferencial binária das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^3$ é um caso especial de EDI com pontos singulares isolados, que estudamos no capítulo 2. A referência principal para nosso estudo é "Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces " de Gutierrez e Sotomayor [GS]. Alguns resultados apresentados aqui serão feitos com mais detalhes do que no texto estudado. Nessa abordagem pretendemos, ao mesmo tempo que relacionamos os resultados deste capítulo com os resultados estudados no capítulo 2, dar um tratamento que enfatize as propriedades geométricas da EDI em estudo. Vamos também, provar que o conjunto das superfícies diferenciáveis, nas quais todos os pontos umbílicos são Darbouxianos, é aberto e denso. O teorema de Sotomayor e Gutierrez sobre as configurações estáveis das linhas de curvatura é também enunciado.

Seja S uma superfície compacta em $\mathbb{R}^3$ e seja $p \in S$ um ponto umbílico. Considere uma carta $(u, v) : (S, p) \to (R^2, 0)$ ao redor de p, sobre a qual a superfície é o gráfico de uma função da forma:

$$f(u,v) = \frac{k}{2}(u^2+v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + O[(u^2+v^2)^2],$$

onde

$$a = \tfrac{\partial^3 f}{\partial u^3}(0,0), \qquad b = \tfrac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2}(0,0) \qquad \text{e} \qquad c = \tfrac{\partial^3 f}{\partial v^3}(0,0).$$

Isto sempre é possível identificando p com a origem, o vetor normal $N(p)$ com o eixo z (então, o tangente T_pS será o plano (x, y)), e escolhendo uma carta ortonormal (u, v) sobre a qual o coeficiente de u^2v de f se anula (para isto basta fazer uma mudança linear de variáveis) e a segunda forma fundamental de S pode ser escrita como $\frac{k}{2}(u^2+v^2)$, [ver dC].

Com esta escolha de coordenadas, a definição do capítulo anterior de ponto singular Dabouxiano se reduz a:

Definição 3.1 *Um* ponto umbílico *é Darbouxiano se valerem as condições:*

T) **Condição de transversalidade:** $b(b-a) \neq 0$,

D) **Condição Discriminante:**

$$D_1 : \tfrac{a}{b} > \left(\tfrac{c}{2b}\right)^2 + 2; \text{ ou}$$

$$D_2 : \left(\tfrac{c}{2b}\right)^2 + 2 > \tfrac{a}{b} > 1, a \neq 2b; \text{ ou}$$

$$D_3 : \tfrac{a}{b} < 1.$$

A condição T acima é claramente equivalente a $8(b-a)^2b^2 > 0$, que é a condição de máximo ou mínimo não degenerado da Definição de ponto singular Dabouxiano do capítulo anterior.

Veremos a seguir que os umbílicos Darbouxianos correspondem às singularidades do tipo D_1, D_2, D_3, definidas no capítulo anterior, da EDB das linhas de curvaturas de S.

Interpretação geométrica e invariância das condições T e D.

Primeiramente, vamos dar a interpretação geométrica destas condições e provar que elas independem da carta usada para parametrizar a superfície. Consideremos a *Equação de Linhas Principais*:

$$\det \begin{bmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & \mathtt{f} & g \end{bmatrix} = 0$$

onde $e, \mathtt{f}, g, E, F$ e G são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais.

Para a carta de Monge (u,v), onde a parametrização é dada por $X(u,v) = (u,v)^{-1} = (u,v,f(u,v))$, a Equação de Linhas Principais é:

$$[bv + L]\, dv^2 - [(b-a)\, u + cv + M]\, dudv - [bv + N]\, du^2 = 0$$

onde L, M, N são diferenciáveis de ordem $O(u^2+v^2)$.Esta é uma EDB, onde $A(u,v) = [bv + L] = Fg - fG$, $B(u,v) = -[(b-a)\, u + cv + M] = Eg - eG$ e $C(u,v) = -[bv + N] = E\mathtt{f} - eF$.

Condição T

Lema 3.2 *Esta condição significa que as curvas diferenciáveis* $bv + L = 0$ *e* $(b-a)u + cv + M = 0$, *cuja interseção define os pontos umbílicos, são regulares e se encontram transversalmente no* $(0,0)$.

Prova: Se $A(u,v) = 0$ e $B(u,v) = 0$ então $Fg = fG$ e $Eg = eG$ e estas condições garantem que $H^2(u,v) - K(u,v) = \left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)^2 = 0$, isto é, $k_1 = k_2$, e portanto, o ponto é umbílico. Inversamente se o ponto é umbílico temos que valem $e = kE$, $f = kF$ e $g = kG$, e um cálculo direto nos dá que $A(u,v) = 0$ e $B(u,v) = 0$.

Além disso:

$\det \begin{bmatrix} A_u(0,0) & A_v(0,0) \\ B_u(0,0) & B_v(0,0) \end{bmatrix} = -b(b-a) \neq 0 \iff$ vale a condição T. Assim, se valer a condição T, como os vetores normais destas curvas em $(0,0)$ não se anulam, as curvas são regulares em $(0,0)$, e o determinante distinto de zero significa que seus vetores normais não são linearmente dependentes, ou seja, as curvas se encontram transversalmente no $(0,0)$.■

Para relacionar as condições T e D com a abordagem do capítulo anterior, vamos agora construir o fibrado projetivo, PS, da superfície S e considerarmos nele a superfície $\mathcal{L}S$ dada pelas soluções, em PS, da Equação de Linhas Principais. Provaremos que a condição de regularidade de $\mathcal{L}S$ no conjunto dos pontos umbílicos $\mathcal{U}$ é equivalente à condição T. E assim, como já sabemos do capítulo anterior, a condição de máximo ou mínimo não degenerado independe da carta já que $\mathcal{L}S$ é regular independente da carta que a parametriza. Para analisarmos a condição D, construíremos, como no capítulo anterior, um campo vetorial tangente à $\mathcal{L}S$. Os pontos umbílicos correspondem às singularidades do campo. Analisaremos o tipo das singularidades e com isso saberemos qual o tipo do ponto umbílico Darbouxiano correspondente: D_i, $i = 1, 2$ ou 3, onde o índice i corresponde ao número de separatrizes umbílicas. Esta interpretação geométrica das configurações principais ao redor de um ponto umbílico nos permitirá reconhecer se este é ou não Darbouxiano.

Denotemos, como antes, π a projeção de PS em S. Em termos de uma carta (u,v) com domínio aberto V em S, escolhendo coordenadas homogêneas du, dv para o plano tangente a S em p, vemos que as seguintes cartas $\left(u, v; q = \frac{du}{dv}\right)$ e $\left(u, v; p = \frac{dv}{du}\right)$ são definidas sobre $\pi^{-1}(V)$ (isto é, em PS), e seus domínios cobrem este conjunto aberto.

Considere a superfície $\mathcal{L}S$ em PS definida pelas soluções da equação (1). Claramente, como esta superfície é definida pela equação de linhas principais, ela

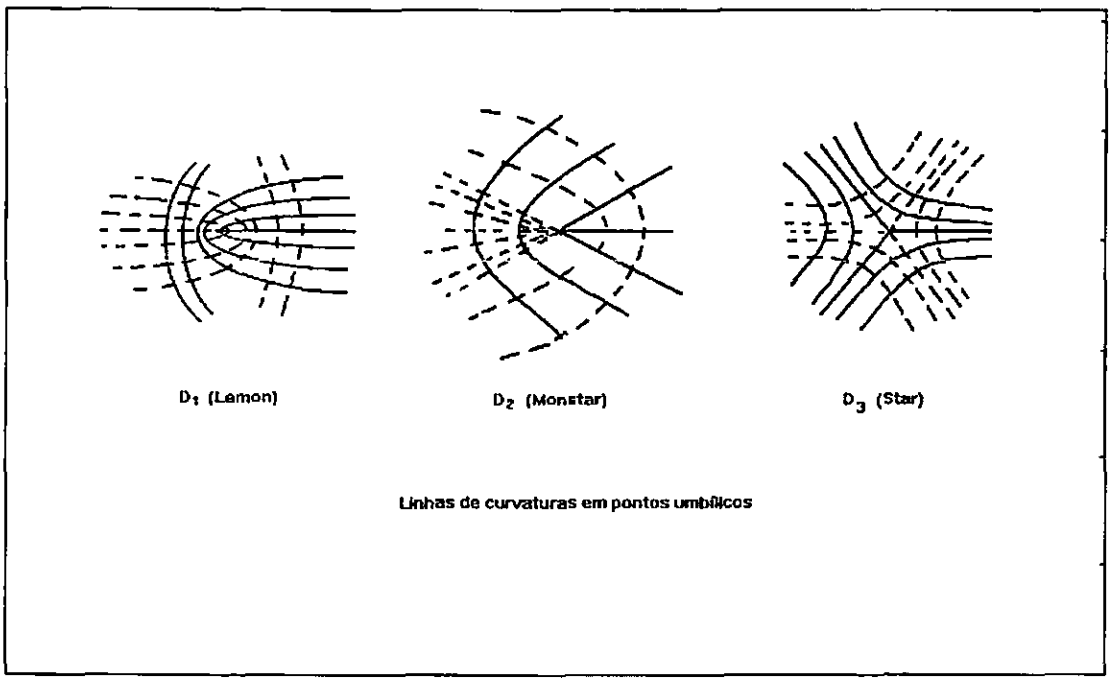


Figure 3.1:

não depende da carta usada. Na carta $\left(u, v; p = \frac{dv}{du}\right)$, $\mathcal{L}S$ é escrita como:

$$F(u, v; p) = [bv + L]\, p^2 - [(b - a)\, u + cv + M]\, p - [bv + N] = 0$$

Na carta $\left(u, v; q = \frac{du}{dv}\right)$, LS é escrita como:

$$F(u, v; q) = [bv + L] - [(b - a)\, u + cv + M]\, q - [bv + N]\, q^2 = 0$$

Geometricamente, é fácil ver que fora de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$, $\mathcal{L}S$ é uma subvariedade regular de $\pi^{-1}(S)$, e mais ainda, $\mathcal{L}S$ é um recobrimento duplo regular de $S \backslash \mathcal{U}$.

Lema 3.3 *A condição de transversalidade é equivalente a regularidade de $\mathcal{L}S$ sobre o conjunto $\mathcal{U}$ dos pontos umbílicos.*

Prova: Como $F_p(0, 0, p) = 0$, então supondo que para $(0, 0) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{L}S$ é não regular temos que ter $F_u(0, 0, p) = -(b - a)\, p = 0$ e $F_v(0, 0, p) = bp^2 - cp - b = 0$, ou seja, $b - a = 0$ e p é solução de $F_v(0, 0, p) = 0$ ou $p = 0$ e $b = 0$, o que implica que não vale a condição **T** no $(0, 0)$.

Reciprocamente, se $\mathcal{L}S$ fosse regular em $\mathcal{U}$, e não valesse a condição **T** então ou $b = 0$ e assim $F_u(0, 0, p) = ap$ e $F_v(0, 0, p) = -cp$, ou $(b - a) = 0$ e então

$F_u(0,0,p) = 0$ e $F_v(0,0,p) = bp^2 - cp - b$. Sendo assim, para $p = 0$ ou para p igual à solução de $F_v(0,0,p) = 0$ temos $F_u(0,0,p) = 0$ e $F_v(0,0,p) = 0$, e portanto $\mathcal{LS}$ não seria regular em todo $\mathcal{U}$, o que é absurdo.■

Também sabemos pelo capítulo anterior que $\mathcal{LS}$ é regular numa vizinhança de $(0,0)$ se e somente se a função discriminante $\Delta(u,v) = B^2(u,v) - A(u,v)C(u,v)$ tem uma singularidade de Morse em $(0,0)$. De fato, $\Delta_u(0,0) = \Delta_v(0,0) = 0$ e a condição **T**, neste caso, é equivalente a hessiana de Δ ser não degenerada.

Para uma carta arbitrária (u,v) onde a equação de linhas principais é dada por $A(u,v)dv^2 + B(u,v)dudv + C(u,v)du^2 = 0$ e $A = B = 0$ define os pontos umbílicos, a condição **T** é dada por $\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)} \neq 0$.

Condição D

Considere o campo vetorial ξ, levantamento do campo de direções principais, como construído no capítulo 1:

$$\xi = w'\frac{\partial}{\partial u} + v'\frac{\partial}{\partial v} + p'\frac{\partial}{\partial p}$$

definido sobre o domínio u, v e p , cujas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} w' &= \tilde{u}(u,v,p) = 2pA(u,v) + B(u,v) = F_p(u,v,p) \\ v' &= p\tilde{u}(u,v,p) = pF_p(u,v,p) \\ p' &= -\left[F_u(u,v,p) + pF_v(u,v,p)\right] \end{aligned}$$

É fácil ver que o produto interno de (w', v', p') com o normal, (F_u, F_v, F_p), de $\mathcal{LS}$ é igual a zero, e portanto ξ é tangente a $\mathcal{LS}$.

Os pontos $(0,0,p)$ são *singularidades* de ξ se satisfizerem $\xi(0,0,p) = 0$, o que implica, como vimos no capítulo anterior, em $\Phi(p) = p(bp^2 - cp + (a - 2b)) = 0$, que equivale a:

$$-p\left(\frac{p^2}{2} - \frac{cp}{2b} + \frac{a}{2b} - 1\right) = 0,$$

onde o discriminate do polinômio de segundo grau é $D = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2$, daí o nome para a segunda condição Darbouxiana. Portanto as raízes são:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 &= \tfrac{c}{2b} - \sqrt{D} \\ p_2 &= \tfrac{c}{2b} + \sqrt{D} \end{aligned}$$

Os p_i 's representam as direções possíveis ao longo das quais as linhas principais podem aproximar o ponto umbílico. De fato, um cálculo direto nos mostra

que para uma curva C^1 da forma $v = pu + O(u^2)$ ser solução de (1) é necessário que p seja um dos p_i 's , $i = 0, 1, 2$.

Denotaremos por $l_i^+ = \{(u, p_i u), u \geq 0\}$ e $l_i^- = \{(u, p_i u), u \leq 0\}$ os raios e por l_i as correspondentes retas contendo-os no plano tangente-(u, v). Estas retas e raios permitem a seguinte interpretação geométrica da condição D:

Como vimos no capítulo anterior, a condição D_1 significa que somente $l_0 = 0$ é real e que ela é a única reta de direção possível para linhas principais que aproximam o ponto umbílico, pois neste caso p_1 e p_2 são imaginários:

$$D_1 \Rightarrow D < 0$$

A condição D_2 significa que as três retas são reais e distintas, já que D_2 implica $D > 0$, e que existe um setor angular reto que contém os três raios l_i^+, $i = 0, 1, 2$. De fato, suas inclinações p_i 's verificam, neste caso, a condição para que o ângulo entre os dois raios seja menor que $\frac{\pi}{2}$, isto é, $p_1 p_2 = \frac{a}{b} - 2 > -1$.

A condição D_3 significa que as três retas são reais e distintas, pois novamente temos que $D > 0$, e que não existe um setor angular reto que contém os três raios l_i^+, $i = 0, 1, 2$. De fato, a condição para que o ângulo entre os dois raios seja maior que $\frac{\pi}{2}$, isto é, $p_1 p_2 = \frac{a}{b} - 2 < -1$ é equivalente à D_3.

Lema 3.4 *A condição D não depende da carta (u, v) usada.*

Prova: Temos que outra carta (w, v') conduzirá para uma função:
$f'(w', v') = \frac{k}{2}((w')^2 + (v')^2) + \frac{a'}{6}(w')^3 + \frac{b'}{2}(w')(v')^2 + \frac{c'}{6}(v')^3 + \frac{d'}{2}(w')^2(v') + O[((w')^2 + (v')^2)^2]$
que está relacionada com a anterior, f, por uma rotação:

$$u = w' \cos\theta - v' \sin\theta$$
$$v = w' \sin\theta + v' \cos\theta$$

Logo, pela interpretação geométrica da condição D_2 em termos de ângulos, o fato que os raios l_i^+ estão contidos em um setor angular reto é preservado por qualquer rotação. Em outras palavras, deve valer que

$$\left(\frac{c'}{2b'}\right)^2 + 2 > \frac{a'}{b'} > 1, a' \neq 2b',$$

isto é, a condição D_2 não depende da carta. Similarmente, a condição D_3 independe da carta. A condição D_1, obviamente independe da carta já que para ela temos uma única reta aproximando o ponto umbílico.■

Observação 3.5 *Para esta nova carta, podemos fazer também o coeficiente do termo* $(w)^2(v)$ *igual a zero, isto é,* $d' = 0$, *e assim teremos* $\cos\theta \neq 0$, *caso contrário* $d' = \pm b \neq 0$, *pela condição* **M**. *Temos então que*

$$d' = -\frac{1}{2}\tau\cos^3\theta\left[b\tau^2 - c\tau + a - 2b\right],$$

onde $\tau = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. *Assim, para as novas cartas com* $d' = 0$ *resulta que os ângulos* θ *de rotações possíveis são precisamente os correspondentes às raízes* p_i's *da equação* $-\tau\left[b\tau^2 - c\tau + a - 2b\right] = 0$, *achadas anteriormente.*

Configurações principais nos umbílicos Darbouxianos.

Mostraremos aqui que as singularidades de ξ, restritas a $\mathcal{LS}$, são de fato hiperbólicas, isto é, suas singularidades têm partes reais não nulas, sobre as condições Darbouxianas. Além disso, elas são organizadas conforme a Figura 4.2. Isto mostrará que, as linhas de aproximação realmente existem. De fato, como vimos no capítulo anterior, as separatrizes umbílicas são linhas que tendem para os pontos umbílicos e separam os diferentes comportamentos das linhas principais próximas deste ponto. No caso D_2, as separatrizes umbílicas definem um setor angular agudo (do tipo parabólico) ocupado exteriormente por linhas integrais, do tipo hiperbólica, que aproximam o ponto. Este setor é a projeção das linhas de ξ que tendem ao nó hiperbólico localizado em p_0 ou em p_1, de acordo com os casos $\frac{a}{b} < 2$ ou $\frac{a}{b} > 2$. O setor complementar é de tipo hiperbólico $[Ht]$. No caso D_3, as separatrizes umbílicas definem um setor não agudo (do tipo hiperbólico) ocupado externamente por linhas que aproximam o ponto umbílico. Este setor é a projeção das linhas de ξ que tendem ao ponto de sela localizado em p_0, p_1 ou p_2. Neste caso todos os setores são hiperbólicos.

Faremos agora, a verificação das ilustrações das configurações principais da Figura 1, através das condições Darbouxianas.

No caso D_1, temos que $\frac{a}{b} > 2$ e isto implica que $-\Phi'(0)\alpha_1(0) = -b^2(1-\frac{a}{b})(2-\frac{a}{b})$ é negativo, e portanto, o único ponto singular de ξ é de sela.

No caso D_3, temos que $\frac{a}{b} < 1$ e como acima $-\Phi'(0)\alpha_1(0)$ também é negativo, e então $(0,0,0)$ é ponto de sela de ξ. Dado outro ponto singular de ξ, considere as coordenadas (w, v) que levam este ponto na origem, como a condição D_3 não depende da carta, o correspondente valor de $-\Phi'(0)\alpha_1(0)$ na nova origem é também negativo. Conseqüentemente, como já vimos no capítulo anterior, para este caso, todas as singularidades de ξ são pontos de sela.

Como sabemos, no caso D_2, existem duas possibilidades para $(u, v, p) = (0,0,0)$. Vamos verificá-las:

a) se $1 < \frac{a}{b} < 2$, então $-\Phi'(0)\alpha_1(0) > 0$ e a origem é um nó hiberbólico, aqui $p_1p_2 = \frac{a}{b} - 2 < 0$,ou seja, p_1 e p_2 têm sinais opostos, isto quer dizer que $(0,0,0)$ é a singularidade do meio;

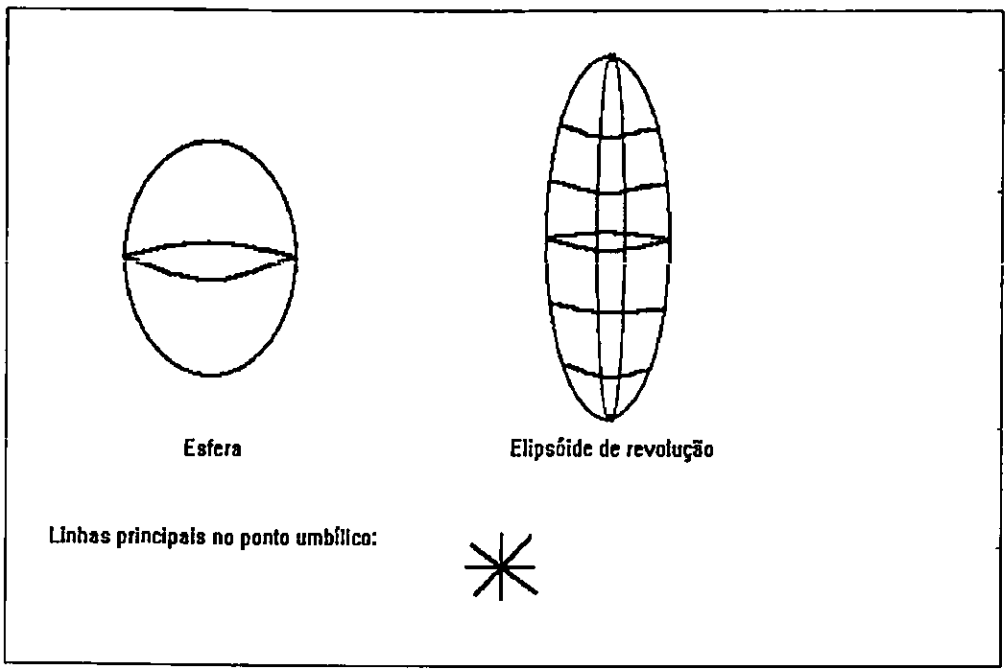


Figure 3.2:

b) se $\frac{a}{b} > 2$, então $-\Phi'(0)\alpha_1(0) < 0$ e a origem é uma sela, neste caso $p_1 p_2 = \frac{a}{b} - 2 > 0$, ou seja, p_1 e p_2 têm sinais iguais, isto nos diz que $(0,0,0)$ não é a singularidade do meio.

Novamente, como os outros pontos singulares de ξ podem ser levados na origem por coordenadas apropriadas (u', v') e a condição D_2 não depende delas, a análise anterior implica que uma das singularidades de ξ, a que está no meio, é um nó e as outras duas são selas (ver Figura 3.2).

O elipsóide com eixos diferentes (ver figura [1.4]), tem quatro pontos umbílicos, todos são Darbouxianos do tipo D_1. Na esfera todos os pontos são umbílicos, mas nenhum é Darbouxiano e o elipsóide de revolução tem dois pontos umbílicos que também não são Darbouxianos.

Genericidade das condições Darbouxianas

Teorema 3.6 *O conjunto de todas as superfícies diferenciáveis compactas cujos pontos umbílicos são Darbouxianos é aberto e denso no sentido C^3.*

Obviamente ele é aberto, pois as condições T e D dependem das derivadas de

ordem 3, $a = f_{uuu}(0,0)$, $b = f_{uvv}(0,0)$ e $c = f_{vvv}(0,0)$, e são condições abertas. Observemos que se a condição T for válida em todos os umbílicos, a condição D pode ser concluída por um número finito de pequenas mudanças locais sobre o coeficiente $'a'$, uma em cada ponto umbílico. Portanto, podemos tornar válidas as condições Darbouxianas, e assim o conjunto é denso. Primeiramente, observamos que como o conjunto dos pontos umbílicos é compacto, ele pode ser coberto por um número finito de domínios de cartas Monge cujas imagens são discos.

Então a prova deste teorema pode ser reduzida estabelecendo o seguinte lema local, que prova que a condição T se verifica para um conjunto denso de mergulhos de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Lema 3.7 *Seja S uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável $f : (U,0) \to (\mathcal{R},0)$ definida sobre um subconjunto aberto U de $\mathcal{R}^2$. Chame $S_{\varepsilon\mu} = S_{\varepsilon\mu}(f)$ a superfície que é o gráfico de $g = g(f;u,v;\varepsilon,\mu) = f(u,v) + \varepsilon uv + \frac{1}{2}\mu u^2$, com $(\varepsilon,\mu) \in \mathcal{R}^2$ e (u,v) em U. Seja $D \subset U$ um disco compacto sobre o qual: $\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)} > 0$. Chame $\tau = \tau(D)$ o conjunto dos (ε,μ) para os quais todos os pontos umbílicos, sobre $(u,v)^{-1}(D)$, da superfície $S_{\varepsilon\mu}$ satisfazem a condição de transversalidade T. Então existe um r pequeno, $r > 0$, tal que a interseção de τ com o disco de raio r tem medida de Lebesgue completa.*

Prova: Considere as funções $A = A(f;u,v;\varepsilon,\mu) = g_u g_v g_{vv} - (1+(g_v)^2)g_{uv}$ e $B = B(f;u,v;\varepsilon,\mu) = (1+(g_u)^2)g_{vv} - (1+(g_v)^2)g_{uu}$, obtidas das equações diferenciais: $A(f;u,v;\varepsilon,\mu)(dv)^2 + B(f;u,v;\varepsilon,\mu)dvdu + C(f;u,v;\varepsilon,\mu)(du)^2 = 0$ das linhas principais de $S_{\varepsilon\mu}$ na carta (u,v). Aqui, $C(f;u,v;\varepsilon,\mu) = (1+(g_u)^2)g_{uv} - g_u g_v g_{uu}$ não será essencial no que segue. O conjunto $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2(f) = \{(u,v,\varepsilon,\mu)\,;\, A(f;u,v;\varepsilon,\mu) = 0 \text{ e } B(f;u,v;\varepsilon,\mu) = 0\}$ representa o lugar dos pontos onde as superfícies $S_{\varepsilon\mu}$ tem pontos umbílicos. Nos umbílicos transversais, $\mathcal{U}_2$ é superfície regular e , localmente um gráfico sobre o plano (ε,μ). De fato nestes pontos, por definição, vale que $\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Se (ε,μ) é suficientemente pequeno, $\mathcal{U}_2$ é também regular nos umbílicos não transversais, sobre D. De fato, $A(f;u,v;\varepsilon,\mu) = 0$ e $B(f;u,v;\varepsilon,\mu) = 0$ encontram-se transversalmente ao longo da superfície diferenciável $\mathcal{U}_2(f)$, pois por hipótese $\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)} > 0$ para $(\varepsilon,\mu) = (0,0)$, e portanto, também vale para $|(\varepsilon,\mu)| < r$, para algum r. Isto conclui a prova de regularidade de $\mathcal{U}_2$.

Identificaremos agora o conjunto τ, acima, com os valores regulares da projeção ortogonal de $\mathcal{U}_2$ no plano (ε,μ), e pelo Teorema de Sard, o conjunto dos valores singulares da projeção terá medida de Lebesgue nula, e portanto o conjunto de seus valores regulares terá medida de Lebesgue completa.

Se π é regular em $p = (u,v,\varepsilon,\mu) \in \mathcal{U}_2$ então o plano tangente, PT, em p não é perpendicular ao plano (ε,μ), ou seja, o plano tangente intercepta o plano (u,v) em um único ponto, o que é o mesmo que dizer que o plano normal intercepta o plano (ε,μ) em um único ponto. Como os geradores do plano normal são

$(A_u, A_v, A_\varepsilon, A_\mu)$ e $(B_u, B_v, B_\varepsilon, B_\mu)$ então $\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)}(p) \neq 0$, pois se fosse zero todos os pontos da forma $(0,0,\varepsilon,\mu)$ pertenceriam ao plano normal e ao plano (ε,μ), o que é absurdo. Portanto, como vale a condição T, temos que $(\varepsilon,\mu) \in \tau$.

Inversamente, se vale a condição T em (ε,μ) então nos pontos umbílicos $p = (u,v,\varepsilon,\mu)$ temos que $\frac{\partial(A,B)}{\partial(u,v)}(p) \neq 0$, e assim, a interseção do plano normal com o plano (ε,μ) é a origem, ou seja, π é regular em $p = (u,v,\varepsilon,\mu) \in \mathcal{U}_2$.■

Ainda na referência $[GS]$, encontramos o teorema enunciado a seguir, sobre as configurações estáveis das linhas de curvatura. Todas as superfícies citadas serão C^∞ e orientadas. Faremos a seguir algumas definições necessárias para entendimento do enunciado do teorema.

Uma sequência S_n de superfícies converge para uma superfície S no sentido C^r se existe uma sequência de funções reais sobre S, f_n, tal que $S_n = (I + f_n N)(S)$, onde f_n tende para 0 no sentido C^r. Uma superfície S é *principalmente estruturalmente C^r−estável* se para cada sequência S_n convergindo para S no sentido C^r, existe uma sequência de homeomorfismos H_n de S_n em S, que converge para a identidade de S, tal que, para n suficientemente grande, H_n é equivalência principal de S_n em S. Isto é, leva U_n, o conjunto umbílico de S_n, em U, o conjunto umbílico de S, e leva as linhas das folheações principais $F_{i,n}$, de S_n, nas de F_i, $i = 1,2$, folheações principais de S.

Definição 3.8 *O conjunto limite α (resp. ω) de uma linha principal orientada γ, definida sobre seu intervalo máximo $\mathcal{I} = (\omega_-, \omega_+)$ onde ela é parametrizada pelo comprimento de arco s, é a coleção $\alpha(\gamma)$ (resp. $\omega(\gamma)$) dos pontos limites das sequências da forma $\gamma(s_n)$, convergindo em S, com s_n tendendo para o extremo esquerdo (resp. direito) de $\mathcal{I}$. O conjunto limite de γ é o conjunto $\Omega = \alpha(\gamma) \cup \omega(\gamma)$.*

Sejam a curvatura média $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, e a curvatura Gaussiana, $K = k_1.k_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas mínima e máxima, respectivamente.

Definição 3.9 *Um ciclo principal, γ, é chamado hiperbólico se seu expoente de hiperbolicidade, $\eta(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{dH}{\sqrt{H^2-K}}$, é diferente de zero.*

Definição 3.10 *$\sum(a,b,c,d)$ é uma superfície orientada compacta para a qual se verificam as seguintes condições:*
a) todos os pontos umbílicos são Darbouxianos,
b) todos os ciclos são hiperbólicos,
c) o conjunto limite de toda linha principal está contido no conjunto dos pontos umbílicos e ciclos principais de S,
d) todas as separatrizes umbílicas são separatrizes de um único ponto umbílico.

Teorema 3.11 ***(A estabilidade estrutural das configurações principais).*** *O conjunto de superfícies $\sum(a,b,c,d)$ é aberto no sentido C^3 e cada um dos seus elementos, a, b, c e d, é principalmente estruturalmente C^3−estável.*

Este resultado foi estendido [GS, 1] para superfícies com singularidades genéricas.

Teorema 3.12 ***(Densidade de superfícies principalmente estruturalmente estável).*** *O conjunto* $\sum(a, b, c, d)$ *é denso no sentido* C^2.

Uma generalização parcial deste teorema para hipersuperfícies em E^4, foi realizada por Garcia [Ga].

Resultados análogos a estes teoremas foram demonstrados por V. Guiñez [Gui] para uma classe geral de equações diferenciais quadráticas, sobre uma superfície, não necessariamente das linhas principais.

Capítulo 4

Linhas assintóticas sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$

Seja M uma superfície fechada e f um mergulho de M em $\mathbb{R}^4$. Neste capítulo, vamos obter a EDB das linhas assintóticas de M e mostrar que para um mergulho genérico localmente convexo de M, as singularidades que aparecem são os umbílicos Darbouxianos.

Para este capítulo, temos as seguintes referências básicas: $[Kl]$, $[Md]$ e $[GMFR]$. Dado $p \in M$, consideremos o círculo unitário em $T_{f(p)}f(M)$ parametrizado pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Denotemos por γ_θ a curva obtida interceptando $f(M)$ com o hiperplano em $f(p)$ composto pela soma direta do plano normal $N_{f(p)}f(M)$ e a reta na direção tangente representada por θ. O *vetor curvatura* $\eta(\theta)$ de γ_θ em $f(p)$ está em $N_{f(p)}f(M)$.

Seja $p \in M$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um referencial ortonormal positivamente orientado definido em uma vizinhança U de p tal que para qualquer q em M, $\{e_1(q), e_2(q)\}$ é uma base do plano tangente $T_{f(q)}f(M)$ e $\{e_3(q), e_4(q)\}$ é base do plano normal $N_{f(q)}f(M)$. A segunda forma fundamental de $f(M)$ em $f(p)$ é caracterizada por duas formas quadráticas cujos coeficientes funcionais, vamos denotar por (a, b, c) e (e, f, g), respectivamente. Nesse caso, se considerarmos a secção normal γ_θ, com θ variando de 0 a 2π, o correspondente vetor curvatura $\eta(\theta)$ descreverá uma elípse em $N_{f(p)}f(M)$, chamada a *elípse de curvatura* de $f(M)$ em $f(p)$ e dada por:

$S_1 \longrightarrow N_{f(p)}f(M)$
$\theta \longmapsto \eta(\theta) = (a\cos^2\theta + 2b\cos\theta sen\theta + csen^2\theta)e_3 + (e\cos^2\theta + 2f\cos\theta sen\theta + gsen^2\theta)e_4.$

Esta elípse pode degenerar-se em um segmento de reta radial, caso em que $f(p)$ é conhecido como um *ponto de inflexão* da superfície. O ponto de inflexão é do tipo imaginário quando $f(p)$ não pertence à elípse de curvatura e do tipo real quando pertence. Em ambos os casos dizemos também, que ponto de inflexão é não degenerado. Um ponto de inflexão é *"flat "*ou degenerado quando $f(p)$ é um ponto final da elípse de curvatura.

Uma direção $\theta \subset T_{f(p)}f(M)$ para a qual $\frac{\partial\eta}{\partial\theta}(\theta)$ e $\eta(\theta)$ são paralelos é chamada uma *direção assintótica.*

Consideremos as seguintes funções associadas à segunda forma fundamental de $f(M)$:

$$\Delta(p) = \frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} a & 2b & c & 0 \\ e & 2f & g & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ 0 & e & 2f & g \end{bmatrix}(p),$$

$k(p) = [(ac-b^2)+(eg-f^2)](p)$, a curvatura de Gauss de M, e a matriz da segunda forma fundamental:

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}(p).$$

Identificando $f(p)$ com a origem de $N_{f(p)}f(M)$, foi mostrado em $[Li]$ (ver também $[Br]$ para uma prova mais detalhada) que:

Teorema 4.1 *a)*$\Delta(p) < 0 \Rightarrow f(p)$ *está fora da elípse de curvatura (tal ponto é chamado um ponto hiperbólico de M).*
b)$\Delta(p) > 0 \Rightarrow f(p)$ *está dentro da elípse de curvatura (ponto elíptico).*
c)$\Delta(p) = 0 \Rightarrow f(p)$ *está sobre a elípse de curvatura (ponto parabólico).*

Um estudo mais detalhado permite distinguir as seguintes possibilidades, provadas em $[Md]$:

Proposição 4.2 *a)* $\Delta(p) = 0$, $k(p) > 0 \Rightarrow f(p)$ *é um ponto de inflexão do tipo imaginário.*
b) $\Delta(p) = 0, k(p) < 0$ *e* $\begin{cases} rank\alpha(p) = 2 \Rightarrow \text{elípse de curvatura é não degenerada} \\ rank\alpha(p) = 1 \Rightarrow \text{é um ponto de inflexão do tipo real.} \end{cases}$
c) $\Delta(p) = 0$ *e* $k(p) = 0 \Leftrightarrow f(p)$ *é um ponto de inflexão do tipo flat.*

Pode-se provar que em um ponto hiperbólico existem exatamente duas direções assintóticas, em um ponto parabólico uma única (a menos que o ponto seja de inflexão, caso em que todas as direções são assintóticas) e, em um ponto elíptico não existe direção assintótica.

Genericamente uma superfície mergulhada $f(M)$ sempre tem uma região aberta de pontos hiperbólicos para os quais existem dois campos definidos, V_1 e V_2, de direções assintóticas. Estes dois campos coincidem sobre a curva $\Delta^{-1}(0)$, (ver $[MFR]$).

As curvas integrais destes campos são chamadas *linhas assintóticas* e seus pontos singulares coincidem com os pontos de inflexão de M.

Na proposição abaixo, vamos obter a EDB das linhas assintóticas de $f(M)$.

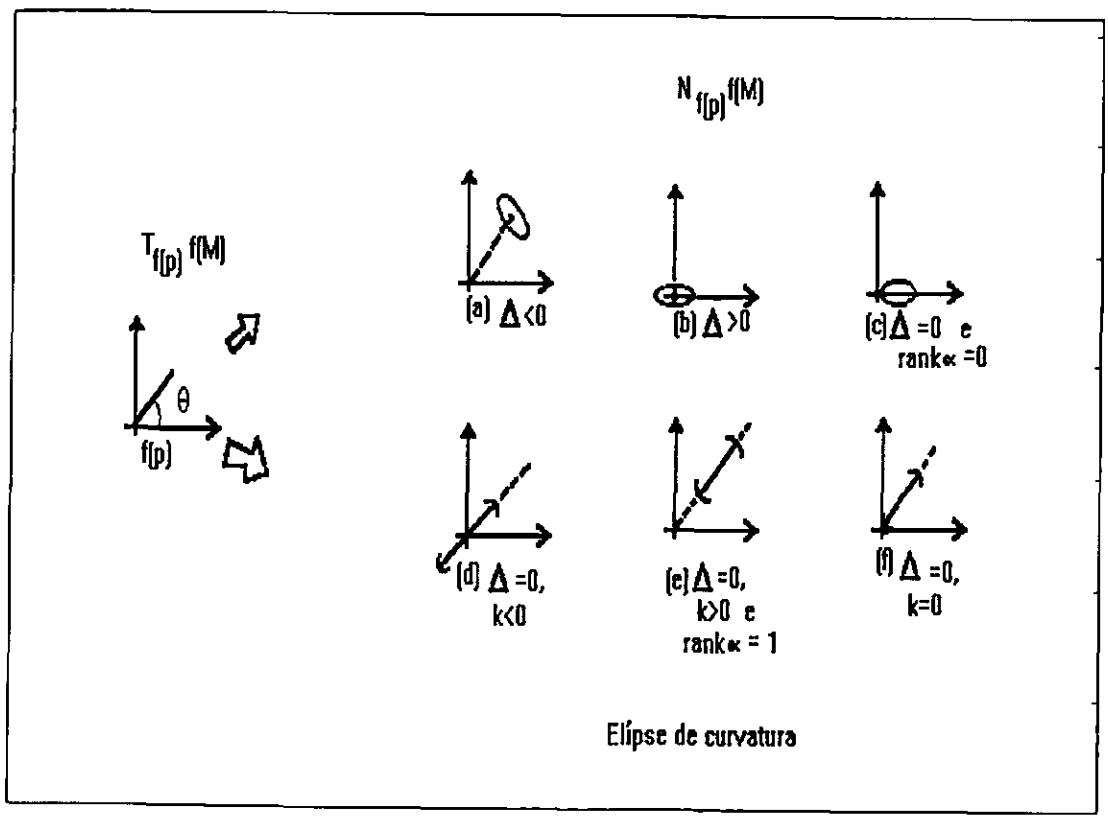

$N_{f(p)}f(M)$
$T_{f(p)}f(M)$
θ
f(p)
(a) Δ<0
(b) Δ>0
(c) Δ=0 e rank α =0
(d) Δ=0, k<0
(e) Δ=0, k>0 e rank α = 1
(f) Δ=0, k=0
Elípse de curvatura

Figure 4.1:

Proposição 4.3 *Seja* $f : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^4, 0$ *uma parametrização de* M *dada por* $(x, y, f_1(x,y), f_2(x,y))$. *Então a equação diferencial das linhas assintóticas de* M *tem a forma*

$$(1) \qquad A(x,y)dx^2 + B(x,y)dxdy + C(x,y)dy^2 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A(x,y) &= f_{1xy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2xy}, \\ B(x,y) &= f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy} \qquad \text{e} \\ C(x,y) &= f_{1yy}f_{2xy} - f_{1xy}f_{2yy}. \end{aligned}$$

Prova: Seja

$$\mathbb{R}, 0 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2, 0$$

$$s \quad \mapsto (x(s), y(s))$$

uma parametrização local pelo comprimento de arco de uma curva assintótica de M em uma vizinhança de p. Sua imagem em $f(M)$ é dada por

$$\mathbb{R}, 0 \xrightarrow{\gamma = f \circ \alpha} \mathbb{R}^4, 0$$

$$(s) \longmapsto (x(s), y(s), f_1(x(s), y(s)), f_2(x(s), y(s))).$$

Para obter a parametrização da elipse de curvatura ao longo de $\gamma(s)$, escolhemos a base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $e_i = \frac{g_i}{|g_i|}$,
onde
$g_1 = (1, 0, f_{1x}, f_{2x})$, $g_2 = (0, 1, f_{1y}, f_{2y})$, $g_3 = (-f_{1x}, -f_{1y}, 1, 0)$ e $g_4 = (-f_{2x} - f_{1y}(f_{2x}f_{1y} - f_{1x}f_{2y}), -f_{2y} - f_{1x}(f_{1x}f_{2y} - f_{1y}f_{2x}), -f_{1x}f_{2x} - f_{1y}f_{2y}, 1 + f_{1x}^2 + f_{2x}^2)$.

Com respeito a esta base obtemos que $\eta(s,\theta) = \left\langle \ddot{\gamma}, e_3 \right\rangle e_3 + \left\langle \ddot{\gamma}, e_4 \right\rangle e_4$ resulta em

$$\begin{aligned} \eta(s,\theta) &= \frac{1}{\|g_3\|}(f_{1xx}\cos^2\theta + 2f_{1xy}\cos\theta sen\theta + f_{1yy}sen^2\theta)e_3 \; + \\ &+ \frac{1}{\|g_4\|}(R\cos^2\theta + 2S\cos\theta sen\theta + T sen^2\theta)e_4, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R &= f_{2xx}(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2) - f_{1xx}(f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y}), \\ S &= f_{2xy}(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2) - f_{1xy}(f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y}) \qquad \text{e} \\ T &= f_{2yy}(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2) - f_{1yy}(f_{1x}f_{2x} + f_{1y}f_{2y}). \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial\eta}{\partial\theta}(s,\theta) = \frac{2}{\|g_3\|}[(f_{1yy} - f_{1xx})\cos\theta sen\theta + f_{1xy}(\cos^2\theta - sen^2\theta)]e_3 - \frac{2}{\|g_4\|}[(R-T)sen\theta\cos\theta + S(sen^2\theta - \cos^2\theta)]e_4$.

A direção assintótica $\theta = \theta(s)$ é a solução da equação

$$\eta(s,\theta) = \lambda\frac{\partial\eta}{\partial\theta}(s,\theta).$$

Eliminando λ, colocando em evidência o termo não nulo $(1 + f_{1x}^2 + f_{1y}^2)$ e desconsiderando-o obtemos a equação:

$(f_{1xy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2xy})\cos^4\theta + (f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy})\cos^3\theta sen\theta + [(f_{2xx} - f_{2yy})f_{1xy} + -(f_{1xx} - f_{1yy})f_{2xy}]\cos^2\theta sen^2\theta + (f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy})\cos\theta sen^3\theta + (f_{1yy}f_{2xy} - f_{1xy}f_{2yy})sen^4\theta = 0$

Fazendo as substituições: $\cos^3\theta sen\theta = (1 - sen^2\theta)\cos\theta sen\theta$, $\cos^4\theta = (1 - sen^2\theta)\cos\theta$ e $sen^4\theta = (1 - \cos^2\theta)sen^2\theta$, temos:

$$(f_{1xy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2xy})\cos^2\theta + (f_{1yy}f_{2xx} - f_{1xx}f_{2yy})\cos\theta sen\theta + (f_{1yy}f_{2xy} - f_{1xy}f_{2yy})sen^2\theta = 0$$

que é a equação procurada.■

Calculando o discriminante $B^2 - 4AC$ da equação acima obtemos

$$(B^2 - 4AC)(x,y) = -4\Delta(x,y),$$

justificando, portanto, que em cada ponto hiperbólico ($\Delta < 0$) existem duas direções assintóticas, em um ponto parabólico ($\Delta = 0$) uma, e em um ponto elíptico ($\Delta > 0$), nenhuma.

Em $[MFR]$, através do estudo do comportamento genérico da família de funções altura em M, prova-se que para um mergulho genérico f, $\Delta(x,y) = 0$ é uma reunião finita de curvas regulares, exceto por um número finito de pontos umbílicos, de tipo real ou imaginário.

É natural esperar que os modelos para o comportamento das linhas assintóticas para um mergulho genérico $f : M \to \mathbb{R}^4$ na vizinhança de um ponto regular de $\Delta(x,y) = 0$, sejam os dados em $[D]$; em um ponto singular do tipo Morse de $\Delta(x,y)$, os modelos sejam os obtidos por $[BT-2]$ em "On binary differential equations ". Não conhecemos no entanto, referência para tal estudo, com exceção dos resultados de $[GMFR]$ que analisam o comportamento da equação $A(x,y)dx^2 + B(x,y)dxdy + C(x,y)dy^2 = 0$, na vizinhança de um ponto de inflexão do tipo imaginário.

Vamos aqui, discutir esses resultados. No lema seguinte, discutiremos as formas normais da equação diferencial de linhas assintóticas na vizinhança de um ponto de inflexão do tipo imaginário.

Lema 4.4 *Para um mergulho genérico, a equação diferencial de linhas assintóticas tem a seguinte forma normal na vizinhança de um ponto de inflexão do tipo imaginário:*

$$(bx - aP_3y + ...)dx^2 + [(c - aP_3)x + ...]dxdy + [-bP_3x + cP_3y + ...]dy^2 = 0,$$

onde $a = \frac{1}{2}f_{1xx}(0,0)$, $b = \frac{1}{2}f_{1xy}(0,0)$, $c = \frac{1}{2}f_{1yy}(0,0)$ *e* $P_3 = \frac{1}{6}f_{2xxx}(0,0)$.
O ponto singular $(0,0)$ *é um umbílico Darbouxiano do tipo* D_1, D_2, D_3.

Prova: Mostraremos que em um ponto de inflexão do tipo imaginário, o discriminante da equação diferencial acima é uma função de Morse em $(0,0)$ e neste ponto ela tem um mínimo não degenerado. Portanto segue dos resultados do Capítulo 2 que o ponto singular $(0,0)$ é um umbílico Darbouxiano do tipo D_1, D_2 ou D_3.

Seja f na vizinhança do $(0,0)$ na forma de Monge (x, y, f_1, f_2), onde
$f_1(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + M_1x^3 + 3M_2x^2y + 3M_3xy^2 + M_4y^3 + \epsilon_1(x,y)$
e
$f_2(x,y) = ex^2 + 2fxy + gy^2 + P_1x^3 + 3P_2x^2y + 3P_3xy^2 + P_4y^3 + \epsilon_2(x,y)$
com ϵ_i, $i = 1,2$, representando os termos de ordem superior a três.

Como $(0,0)$ é um ponto de inflexão, o *rank* da segunda forma fundamental, α, é 1, e existe uma direção b normal à superfície em $(0,0)$ tal que a função altura nesta direção tem uma singularidade do tipo umbílico (ver $[MFR]$}. Escolhendo $b = e_4 = (0,0,0,1)$, por uma conveniente escolha de carta, podemos assumir que $f_2(x,y) = x^3 + 3P_3xy^2$, com $P_3 \neq 0$.

Então, pelo teorema anterior, a equação diferencial de linhas assintóticas será:

$$(bx - aP_3y + ...)dx^2 + [(c - aP_3)x + ...]dxdy + [-bP_3x + cP_3y + ...]dy^2 = 0.$$

O discriminante desta equação

$$(B^2 - 4AC)(x,y) = [(c - aP_3)x + ...]^2 - 4(bx - aP_3y + ...)[-bP_3x + cP_3y + ...],$$

tem uma singularidade em $(x,y) = (0,0)$. A matriz hessiana no $(0,0)$ é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} 2(c - aP_3)^2 + 8b^2P_3 & -4bcP_3 - 4abP_3^2 \\ -4bcP_3 - 4abP_3^2 & 8caP_3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o determinante hessiano:

$$16k(0,0)(c - aP_3)^2P_3^2$$

é maior do que zero se e somente se a curvatura Gaussiana $k(x,y)$ é positiva, ou seja se e somente se $(0,0)$ é um ponto umbílico do tipo imaginário.■

Assim, nossa equação será

$$A(x,y)dy^2 + B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0,$$

onde

$A(x,y) = bx - aP_3y + O(2)$
$B(x,y) = (c - aP_3)x + O(2)$
$C(x,y) = -bP_3x + cP_3y + O(2).$

Neste caso, a singularidade isolada (caso em que $-aP_3^2(ab^2P_3^2 - (c-aP_3)^2c) > 0$) será do tipo:

$$D_1 \Leftrightarrow \frac{c-aP_3}{cP_3} > \frac{-b+4ca}{(2c)^2};$$

$$D_2 \Leftrightarrow 0 < \frac{c-aP_3}{cP_3} < \frac{-b+4ca}{(2c)^2};$$

$$D_3 \Leftrightarrow \frac{c-aP_3}{cP_3} < 0.$$

Superfícies localmente convexas

Nesta seção, como uma aplicação dos resultados anteriores, analisaremos o caso especial de mergulhos genéricos localmente convexos $f : M \to \mathbb{R}^4$.

Lembramos que $f : M \to \mathbb{R}^4$ é localmente convexo se todo ponto $p \in M$ admite um hiperplano suporte T, isto é, numa vizinhança de p, M permanece num mesmo semi-espaço determinado por T.

Um mergulho genérico localmente convexo pode também ser caracterizado através da existência de uma função altura que tem um mínimo ou máximo não degenerado em p.

Em $[MFR]$, através da análise das formas normais das singularidades da função altura, os autores mostram que se $f : M \to \mathbb{R}^4$ é um mergulho genérico localmente convexo então $\Delta \leq 0$ e $\Delta(x,y) = 0$ se e somente se (x,y) é um ponto de inflexão do tipo imaginário.

Segue, portanto, do *Lema* 4.4 acima que quando f é localmente convexo, as únicas singularidades da EDB são pontos de inflexão Darbouxianos do tipo D_1, D_2, D_3.

Dado um campo de linhas V sobre uma superfície S, podemos definir:

Definição 4.5 *O índice de V em uma singularidade isolada p é*

$$Ind(p) = \frac{(grau\ \Phi(p))}{2}$$

onde $\Phi : \mathbb{P}^1_\varepsilon \to S^1$ *é a aplicação* $\Phi(q) = \frac{V(q)}{\|V(q)\|}$ *e* $\mathbb{P}^1_\varepsilon$ *é a reta projetiva obtida através do recobrimento duplo de* S^1_ε, *circunferência de raio* ε *em torno de* p.

Para os umbílicos do tipo D_1, D_2, D_3, temos:

Lema 4.6 *(a) Se* p *é um umbílico do tipo* D_1, *índice*$(p) = \frac{1}{2}$
(b) Se p *é um umbílico do tipo* D_2, *índice*$(p) = -\frac{1}{2}$
(c) Se p *é um umbílico do tipo* D_3, *índice*$(p) = -\frac{1}{2}$.

Prova: Para calcular o índice, usamos a fórmula de Bendixson,

$$I = 1 + \frac{e - h}{2}$$

onde e e h representam respectivamente o número de setores elípticos e hiperbólicos que se aproximam do ponto singular. Agora a afirmação segue imediatamente pela observação que nos casos D_1 e D_3 estes setores são como mostrado na figura e assim todos são hiperbólicos; no caso D_2, um é hiperbólico e o outro é parabólico.■

Podemos agora obter um resultado global sobre o número de pontos de inflexão.

Teorema 4.7 *Se* $f : M \to \mathbb{R}^4$ *é um genérico mergulho localmente convexo de uma superfície fechada (não necessariamente orientável)* M *em* $\mathbb{R}^4$, *então*

$$2\,|\chi(M)| \leq \textit{número}\{\textit{pontos de inflexão}\}.$$

Prova: Seja V um dos campos de linhas de direções assintóticas sobre M. Além disso, as singularidades de V são pontos de inflexão de M, que genericamente, são pontos isolados, p_1, p_2, ..., p_n, do conjunto $\Delta^{-1}(0)$ (inflexões do tipo imaginárias). A fórmula de Poincaré $\chi(M) = \sum_{i=1}^{n} indV(p_i)$ conduz a

$$\chi(M) \leq \sum_{i=1}^{n} |indV(p_i)|\,,$$

mas $|indV(p_i)| = \frac{1}{2}$, $\forall i = 1, ..., n$, e assim temos

$$|\chi(M)| \leq \frac{\textit{número}\{\text{pontos de inflexão}\}}{2} \blacksquare$$

O corolário seguinte segue como imediata consequência:

Corolário 4.8 *Qualquer mergulho genérico de uma superfície compacta localmente convexa, com número de Euler* $\chi(M) \neq 0$ *tem pelo menos quatro pontos de inflexão.*

Este corolário generaliza o resultado de [*Md*] que prova que, genericamente, toda 2-esfera convexamente mergulhada em $\mathbb{R}^4$ tem pelo menos um ponto umbílico.

Bibliografia

[A] V. I. Arnold, Bifurcations and singularities in mathematics and mechanics, Opening conference (Ag. 1988) - XVII International Congress or Theoretical and Applied Mechanics.

[BGM] T. Banchoff, T. Gaffney e C. McCrory, Cusps of Gauss mappings, Research notes in mathematics 55.

[Br] R. M. S. Barreiro, Propriedades genéricas de superfícies do $\mathbb{R}^4$ dotado de forma bilinear. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, 1981.

[BT,1] J. W. Bruce e F. Tari, Implicit differential equations from the singularity theory viewpoint; Singularities and differential equations, *Banach Center Publications*, V33, 1996.

[BT,2] J. W. Bruce e F. Tari, On binary differential equations, Nonlinearity 2, V8, 255-271,1995.

[Dr] L. Dara, Singularités génériques des equations differentielles multiforms, *Bol. Soc. Bras. Math.*, nº 2, V6, 95-128, 1975.

[dC] M. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.

[Dv] A. A. Davydov, Normal forms of differential equations unresolved with respect to derivatives in a neighbourhood of its singular point, *Funct. Anal. Appl.* 19, 1-10, 1985.

[Ga] Garcia R., Linhas de curvatura de hipersuperfícies imersas no espaço $\mathbb{R}^4$, Thesis IMPA 1989; Preprint IMPA, F-027/89.

[GMFR] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, Maria C. R. Fuster e Maria Ap. S. Ruas, Inflection points and topology of surfaces in 4-space, preprint 1995.

[GS] C. Gutierrez e J. Sotomayor, Lines of curvature and umbilical points on surfaces, 18º Colóquio Brasileiro Mat.-IMPA.

[GS,1] C. Gutierrez e J. Sotomayor, Lines of principal curvature on surfaces with Whitney Umbrella Singularities, *Tohoku Math. Journal*, 38, 4, 1986.

[Gui] V. Guiñez, Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 309, 2, 1988.

[Ht] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, 1973.

[Kl] W. Klingenberg, A course in Differential geometry. Springer- Verlag.

[Li] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean space. *Ann. Mat. Pura Appl.* (ser. 4A) 83, 261-336, 1969.

[Md] D. K. H. Mochida, Geometria genérica de subvariedades em codimensão maior que um em $\mathbb{R}^n$, Tese de doutorado do ICMSC, 1993.

[MFR] D. K.H. Mochida, M. C. R. Fuster e Maria Ap. S. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint, *Geometriae Dedicata* 54: 323-332, 1995.

[Wh] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces I, Mappings from the plane to the plane, *Ann. of Math.* 62 , 374-410, 1995.