UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

Propriedades Assintóticas de Equações Diferenciais Ordinarias de 2.ª Ordem Perturbadas de Equações Autonomas

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA
S. Carlos

JOSÉ GASPAR RUAS FILHO

Orientador:
Prof. Dr. NELSON ONUCHIC

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de «Mestre em Matemática».

SÃO CARLOS
1973

À Cidinha e

aos meus pais

PROPRIEDADADES ASSINTÓTICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 2ª ORDEM PERTURBADAS DE EQUAÇÕES AUTONOMAS

JOSÉ GASPAR RUAS FILHO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE ARARAQUARA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ORIENTADOR: Prof. Dr. NELSON ONUCHIC
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF PERTURBED AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

José Gaspar Ruas Filho Adviser: Prof. Dr. NELSON ONUCHIC

This work consists essentially of two parts.

In the first part we study the sistem

(1) $\ddot{x}_j+f_j(x_j,\dot{x}_j)+g_j(x_j)+h_j(t,x,\dot{x})+k(t,x,\dot{x})=0 \quad j=1,2,\ldots,n$

where $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\varepsilon R^n$. We give sufficient conditions under wich we can guarantee that the origin is globally-asymptotically stable with respect to (1).

In the second part we consider the scalar equation

(2) $\ddot{x}+f(x,\dot{x})+g(x)\ p(\dot{x})+h(t,x,\dot{x})+k(t,x,\dot{x}) = 0$

We deal with convenient hipotheses related to functions of (2) in order to obtain results on asymptotic stability and global asymptotic stability concerning the origin of (2).

The main techniques used in this dissertation are - provided by Lyapunov functions, invariance properties of autonomous systems and the theory of Poincare-Bendixson.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, pela orientação segura, sem a qual este trabalho não teria sido realizado e pelo incentivo dado à nossa iniciação em pesquisa, nosso sincero agradecimento.

Ao Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues com quem realizamos inúmeros seminários de estudos e discutimos tópicos relacionados com este trabalho.

À Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Araraquara pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho.

Aos Professores e colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da F.F.C.L.A. pelo apoio dado aos nossos estudos.

A todos aqueles que direta ou inderetamente nos auxiliaram.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades: CNPq (através de bolsa de pós graduação em 1971)
CAPES (através de auxílios concedidos ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos.

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO..... 1

CAPÍTULO I..... 3

CAPÍTULO II..... 11

CAPÍTULO III..... 26

BIBLIOGRAFIA..... 47

INTRODUÇÃO

Em [7], N. Onuchic estudou propriedades de estabilidade e comportamento assintótico das soluções da equação diferencial ordinária escalar

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$$

relacionando o comportamento de suas soluções com o comportamento das soluções de

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x) = 0$$

O objetivo deste trabalho é obter algumas extensões dos resultados obtidos por N. Onuchic.

Para tanto utilizamos as técnicas de funções de Lyapunoff, invariança e a teoria de Poincaré-Bendixson.

No Capítulo I, relacionamos alguns fatos básicos sobre as técnicas mencionadas acima. Entre eles esta o princípio de invariança obtido por La-Salle em [3], e um resultado de Miller [5] que garante, dentro de certas condições, que o conjunto ω-limite de uma solução limitada no futuro de um sistema perturbado de um sistema autônomo é invariante para o sistema autônomo.

Consideremos o sistema

$$\ddot{x}_j + f_j(x_j,\dot{x}_j) + g_j(x_j) + h_j(t,x,\dot{x}) +$$

$$+ k_j(t,x,\dot{x}) = 0, \; j = 1,2,\ldots, n \text{ onde}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$$

No Capítulo II, damos uma extensão dos resultados obtidos por N. Onuchic. Mais especificamente, damos condições suficientes para garantir que toda solução $x(t)$ do sistema acima, e sua derivada tendem a zero quando $t \to \infty$. Obtemos também estabilidade assintótica global para a solução nula do sistema em consideração.

Consideremos a equação escalar

$$(*) \quad \ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x)\, p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$$

O Capítulo III está dividido em três partes. Na primeira tomamos $k(t,x,y)$ identicamente nula e dentro de certas hipóteses sobre as funções envolvidas obtemos estabilidade assintótica global da origem.

Na segunda parte, impomos uma hipótese mais restritiva sobre a função p e obtemos ainda estabilidade assintótica global da solução nula de (*). Estes resultados estendem os de N. Onuchic citados acima.

Na terceira parte, consideramos hipóteses locais sobre as funções envolvidas e obtemos somente estabilidade assintótica.

C A P Í T U L O I

ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

Consideremos o sistema autônomo

(I.1) $\dot{x} = F(x) \quad x \in Q,\ Q \subset R^n$ aberto,

onde $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$ é contínua em Q.

No que segue consideraremos o R^n com uma das normas usuais, que indicaremos por $|\ .\ |$.

Seja $M \subset Q$. Então M é dito quase-invariante para (I.1) se para cada $x_0 \in M$ existe uma solução $x(t,x_0)$ de (I.1) tal que $x(0,x_0) = x_0$ e $x(t,x_0)$ está definida e permanece em M para todo t real. Se tivermos unicidade em relação ao problema de valor inicial para (I.1) diremos simplesmente que M é invariante.

Seja x(t) uma função contínua definida no futuro, isto é, definida e contínua para todo $t \geq$ algum real t_0. Um ponto $p \in R^n$ é denominado ponto ω-limite de x(t) se existir uma sequência de números reais $\{t_m\}, t_m \to \infty$, tal que $x(t_m) \to p$ quando $m \to \infty$.

O conjunto dos pontos ω-limite de x(t) é denotado por Ω e é denominado "conjunto ω-limite de x(t)".

Se existir compacto K, $K \subset Q$, tal que $x(t) \in K$ para $t \geq$ algum real t_0, diremos que x(t) é limitada no futuro. Se $Q = R^n$, dizer que x(t) é limitada no futuro é equivalente a dizer que x(t) é limitada em algum intervalo $[t_0, \infty)$, $t_0 > -\infty$. Se x(t) é limitada no futuro é fácil ver que Ω é não vazio, compacto, conexo com $x(t) \to \Omega$ quando $t \to \infty$, isto é, $\mathrm{dist}(x(t), \Omega) \to 0$ quando $t \to \infty$.

É clássico o resultado que se $x(t)$ é uma solução de (I.1) limitada no futuro, então Ω é um conjunto quase invariante para (I.1). (Este fato pode ser visto também como um caso particular do Lema I.4).

Seja $V(x)$ uma função contínua definida em Q, a valores reais, com primeiras derivadas parciais contínuas. Nós definimos

$$\dot{V}_{(I.1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} F_j(x).$$

Observamos que $\dot{V}_{(I.1)}(x_0) = \left[\frac{d}{dt} V(x(t,x_0))\right]_{t=0}$

O seguinte lema é essencial [3, Theorem VIII]

LEMA I.1

Suponhamos que $V(x) \geq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in Q$. Seja $x(t)$ uma solução de (I.1) limitada no futuro.

Então o conjunto ω-limite de $x(t)$ está contido no conjunto $E = \{x \in Q \mid \dot{V}(x) = 0\}$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja Ω o conjunto ω-limite de $x(t)$. Como $\dot{V}(x(t) \leq 0$ e $V(x(t) \geq 0$, $V(x(t))$ é não crescente e limitada inferiormente. Portanto existe, $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = V_0$. Temos então:

a) Para toda $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} V(x(t_m)) = V_0$$

b) qualquer que seja o ponto $x_0 \in \Omega$, existe sequência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, tal que $x(t_m) \to x_0$ quando $m \to \infty$.

Então, a da continuidade de V, de a) e b), segue que $\forall\, x_0 \in \Omega$, $\exists \{t_m\}$, $t_m \to \infty$ tal que

$$V(x_0) = V(\lim_{m\to\infty} x(t_m)) = \lim_{m\to\infty} V(x(t_m)) = V_0$$

Logo V(x) é constante para $x \in \Omega$

Sejam x_0 um ponto qualquer de Ω e $\tilde{x}(t)$ uma solução de (I.1) tal que $\tilde{x}(0) = x_0$. Como Ω é quase invariante podemos supor que $\tilde{x}(t) \in \Omega$, qualquer t real. Logo $V(\tilde{x}(t)) = V_0$ qualquer $t \in R$.

Então $\dot{V}(x_0) = \left[\frac{d}{dt} V(\tilde{x}(t))\right] = \frac{d}{dt} V_0 = 0$ para todo $x_0 \in \Omega$, ou seja, $\Omega \subset E$.

Consideremos o sistema diferencial

$$\dot{x} = F(t,x) \tag{I.2}$$

onde $F(t,x) \in R^n$ é contínua em $[0, \infty) \times R^n$.

Seja V(t,x) uma função real com primeiras derivadas parciais contínuas para todo $t \geq 0$ e todo $x \in R^n$.

Nós definimos

$$\dot{V}_{(I.2)}(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j} F_j(t,x)$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in R^n$.

LEMA I.2:

Seja x(t) solução de (I.2) e $[t_0, t_+)$ seu intervalo máximo de definição a direita. Se x(t) é limitada em $[t_0, t_+)$ então $t_+ = \infty$.

O lema seguinte é uma aplicação do segundo método de Lyapunoff.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS - S. Carlos - BIBLIOTECA

LEMA I.3:

Seja $V: [0, \infty) \times R^n \to R$, de classe C^1, tal que

i) $\dot{V}_{(I.2)}(t,x) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ e todo $x \in R^n$.

ii) $V(t,x) \geq \alpha(x)$, onde $\alpha: R^n \to R$ é contínua e $\alpha(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Então toda solução de (I.2) é limitada no futuro.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos que exista solução $x(t)$ de (I.2) não limitada no futuro. Seja $[t_0, t_+)$ seu intervalo máximo de definição à direita. Então existe sequência $\{t_m\}$, $t_m \to t_+$ tal que $|x(t_m)| \to \infty$. Portanto existe t_{m_0}, ponto da sequência $\{t_m\}$ tal que $t_{m_0} > t_0$ e $\alpha(x(t_{m_0})) > V(t_0, x(t_0))$ pois $\alpha(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Mas por ii) $\alpha(x(t_{m_0})) \leq V(t_{m_0}, x(t_{m_0}))$.

Então $V(t_0, x(t_0)) < V(t_{m_0}, x(t_{m_0}))$. Logo existe real s, $t_0 < s < t_{m_0}$ tal que $\dot{V}(s, x(s)) > 0$, o que contradiz i).

Então a solução $x(t)$ é limitada em $[t_0, t_+)$. Portanto do Lema I.2 segue que $t_+ = \infty$ e $x(t)$ é limitada no futuro.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = F(x) + S(t,x) + H(t,x) \tag{I.3}$$

com

a) $F: Q \to R^n$ contínua

b) $H: [0,\infty) \times Q \to R^n$ contínua, tal que para toda função contínua $x: [0,\infty) \to B \subset Q$, B compacto temos

$$\int_s^{s+t} H(\tau, x(\tau))\, d\tau \to 0$$

quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0, 1]$.

c) $S: [0,\infty) \times Q \to R^n$ contínua e satisfazendo, com relação a um dado conjunto A, a propriedade de que, para cada $\varepsilon > 0$ e cada compacto K de Q, correspondem $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ e $T_0 = T_0(\varepsilon, K) > 0$ de modo que $t > T_0$, $x \in K$, $d(x,A) < \delta$ implicam $|S(t,x)| < \varepsilon$

Temos então o seguinte

LEMA I.4:

Sejam F, S e H satisfazendo a), b) e c). Seja $x(t)$ uma solução de (I.3) limitada no futuro, com $x(t) \to A$ quando $t \to \infty$.

Então o conjunto ω-limite de $x(t)$ é não vazio, compacto, conexo e quase-invariante com relação a (I.1).

Para a demonstração desta fato e outras informações nesta linha ver Yoshizawa [10], Miller [5], H.M. Rodrigues [9], C.E. Avellar [1].

COROLÁRIO:

Consideremos o sistema de equações diferenciais

(I.3') $$\dot{x} = F(x) + H(t,x)$$

com F e H satisfazendo as hipóteses a) e b). Seja $x(t)$ uma solução de (I.3) limitada no futuro.

Então o conjunto ω-limite de $x(t)$ é não vazio, compacto, conexo e quase-invariante para (I.1).

DEMONSTRAÇÃO:

Basta fazer $S: [0, \infty) \times Q \to R^n$ identicamente nula e tomar $A = Q$.

Um resultado interessante a respeito do conjunto ω-limite de uma função $(x(t), y(t))$ demonstrado no

LEMA I.5:

Seja $(x(t), y(t)) = (x_1(t),\ldots,x_n(t),y_1(t),\ldots,$ $,\ldots,y_n(t))$ uma função contínua, limitada no futuro, e Ω seu conjunto ω-limite. Seja Ω_k o conjunro ω-limite de $(x_k(t), y_k(t))$.

Então $\Omega_k = p_k(\Omega)$ onde $p_k: R^n \times R^n \to R^2_k$ é dada por $p_k(x,y) = (x_k,y_k)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $(x_0^k, y_0^k) \varepsilon\ \Omega_k$. Então existe $\{t_m\}$, tal que $t_m \to \infty$ e $(x_k(t_m), y_k(t_m)) \to (x_0^k, y_0^k)$ quando $m \to \infty$. Portanto existe $\{\tau_m\}$ subsequência de $\{t_m\}$ tal que $(x(\tau_m), y(\tau_m)) \longrightarrow$ $\to (x_0,y_0)$ quando $m \to \infty$.

Como $\tau_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, $(x_0,y_0) \varepsilon\ \Omega$. Da continuidade de p_k concluimos que $p_k(x(\tau_m), y(\tau_m)) \to p_k(x_0,y_0)$. Mas $p_k(x(\tau_m), y(\tau_m)) = (x_k(\tau_m),y_k(\tau_m)) \to (x_0^k, y_0^k)$. Então $p_k(x_0,y_0) = (x_0^k,y_0^k)$, isto é, $(x_0^k,y_0^k) \varepsilon\ p_k(\Omega)$.

Suponhamos agora, $(x_0^k, y_0^k) \in p_k(\Omega)$. Então $(x_0^k, y_0^k) = p_k(x_0, y_0)$ para algum $(x_0, y_0) \in \Omega$. Portanto existe $\{t_m\}$ tal que $t_m \to \infty$ e $(x(t_m), y(t_m)) \to (x_0, y_0)$ quando $m \to \infty$. Isto implica que

$$(x_k(t_m), y_k(t_m)) = p_k(x(t_m), y(t_m)) \to$$

$$\to p_k(x_0, y_0) = (x_0^k, y_0^k).$$

Logo $(x_0^k, y_0^k) \in \Omega_k$, demonstrando o lema.

INSTITUTO DE CIÊNCIA, MATEMÁTICAS - S. Carlos - BIBLIOTECA

Um teorema de grande importância na teoria das equações diferenciais é o da continuidade em relação as condições iniciais. Uma formulação particular, mas conveniente deste teorema para as aplicações que faremos adiante é apresentada a seguir.

LEMA I.6:

Suponhamos que (I.2) satisfaz alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial. Seja $\phi(t)$ solução de (I.2) em $[a,b]$.

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, a, b)$, tal que, $a \leq t_0 \leq b$ e $|x_0 - \Phi(t_0)| < \delta$ implicam $|x(t) - \Phi(t)| < \varepsilon$ para $t_0 \leq t \leq b$, onde $x(t)$ é a solução de (I.2) tal que $x(t_0) = x_0$.

CAPÍTULO II

ESTABILIDADE DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 2ª ORDEM

O objetivo deste capítulo é estudar propriedades de estabilidade de um sistema de equações diferenciais de 2ª ordem

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})+g(x)+h(t,x,\dot{x})+k(t,x,\dot{x})=0 \tag{II.1}$$

com

$x \in R^n$, $t \in [0,\infty)$ e

$f: R^{2n} \to R^n$

$g: R^n \to R^n$

$h: [0,\infty) \times R^{2n} \to R^n$

$k: [0,\infty) \times R^{2n} \to R^n$

onde

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,y_1) \\ f_2(x_2,y_2) \\ \vdots \\ f_n(x_n,y_n) \end{pmatrix}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_2) \\ \vdots \\ g_n(x_n). \end{pmatrix}$$

$$h(t,x,y) = \begin{bmatrix} h_1(t,x,y) \\ \vdots \\ h_n(t,x,y) \end{bmatrix}$$

$$k(t,x,y) = \begin{bmatrix} k_1(t,x,y) \\ \vdots \\ k_n(t,x,y) \end{bmatrix}$$

Um sistema equivalente é

$$\text{(II.1')} \quad \begin{cases} \dot{x}_r = y_r & r=1,2,\ldots,n. \\ \dot{y}_r + f_r(x_r,y_r) + g_r(x_r) + h_r(t,x,y) + k_r(t,x,y) = 0 \end{cases}$$

A idéia principal é relacionar o comportamento das soluções da equação (II.1) com o das soluções da equação

$$\text{(II.2)} \qquad \ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x) = 0$$

que é equivalente ao sistema

$$\text{(II.2')} \quad \begin{cases} \dot{x}_r = y_r \\ \dot{y}_r + f_r(x_r,y_r) + g_r(x_r) = 0 \qquad r = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Consideremos o seguinte conjunto de hipóteses com relação às funções que aparecem em (II.1').

H_1 - $f(x,y)$ é contínua e $y_k f_k(x_k,y_k) \geq 0$ para todo $x,y \in R^n$, para cada $k=1,2,\ldots,n$.

H_2 - Para cada $k=1,2,\ldots,n$ e para toda curva de Jordan γ em R_k^2, contendo a origem $(0_k,0_k)$ em seu interior, existe ao menos um ponto $(x_k,y_k) \in \gamma$ tal que $f_k(x_k,y_k) \neq 0$.

H_3 - $f(x,y)$ e $h(t,x,y)$ são contínuas com

$y_k [f_k(x_k,y_k) + h_k(t,x,y)] \geq 0$ para cada $k = 1,2,\ldots,n$ para todo $t \geq 0$ e $x,y \in R^n$

H_3' - $f(x,y)$ e $h(t,x,y)$ são contínuas com $y \cdot [f(x,y) + h(t,x,y)] \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $x,y \in R^n$.

H_4 - $g(x)$ é contínua, $x_k g_k(x_k) > 0$ para todo $x_k \neq 0$ e $\int_0^{x_k} g_k(s)\, ds \to \infty$ quando $|x_k| \to \infty$ para - $k = 1,2,\ldots,n$.

H_4' - $g(x)$ contínua e $\int_0^{x_k} g_k(s)\, ds \to \infty$, quando $|x_k| \to \infty$ para $k = 1,2,\ldots,n$.

H_4'' - $g(x)$ é contínua e $x_k\, g_k(x_k) > 0$ para todo $x_k \neq 0$ para $k = 1,2,\ldots n$.

H_5 - $k(t,x,y)$ é contínua e $|k(t,x,y)| \leq \beta(t)$ para todo $t \geq 0$ e $x,y \in R^n$ com $\beta(t)$ contínua e $\int_0^{\infty} \beta(t)\, dt < \infty$.

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS - S. Carlos - BIBLIOTECA

H_6 - Para todo subconjunto compacto B de R^n e todas funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$ definidas em $[0, \infty)$ a valores em B, segue-se que

$$\int_s^{s+t} h(\tau, x(\tau), y(\tau))\, d\tau \to 0 \text{ quando } s \to \infty, \text{ uniformemente em } t \in [0, 1].$$

H_6' - A todo compacto B de R^n corresponde uma função contínua $\gamma_B : [0,\infty) \to R$ tal que $\gamma_B(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e para todas funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$ definidas em $[0,\infty)$ a valores em B, segue-se que

$$\left| \int_s^{s+t} h(\tau, x(\tau), y(\tau))\, d\tau \right| \leq \gamma_B(s) \text{ para todo } t \in [0,1]$$

H_6'' - Para qualquer compacto B de R^n, existe $\lambda_B : [0,\infty) \to R$ contínua, tal que $|h(t,x,y)| \leq \lambda_B(t)$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x, y \in B$ com

$$\int_s^{s+1} \lambda_B(\tau)\, d\tau \to 0 \text{ quando } s \to \infty.$$

OBSERVAÇÃO

É fácil ver que H_3 implica H_3', H_4 implica H_4' e H_4'', H_6' implica H_6 e H_6'' implica H_6.

Um resultado interessante é obtido no

TEOREMA II.1:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses H_3', H_4'' e H_5.

Então para cada $\varepsilon > 0$ existem $T(\varepsilon) \geq 0$ e $\delta(\varepsilon) > 0$ tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0, y_0) \in R^{2n}$ com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ implicam $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$ para toda solução $(x(t), y(t))$ de (II.1') satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos a função

$$V(t,x,y) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[y_k^2 + 2 \int_0^{x_k} g_k(s)\, ds \right] \right\}^{1/2} + \int_t^{\infty} \beta(s)\, ds$$

Definindo

$$2m = \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[y_k^2 + 2 \int_0^{x_k} g_k(s)\, ds \right] \right\}^{1/2}$$

e levando em conta que $x_k g_k(x_k) > 0$ para todo $x_k \neq 0$ temos

$$\inf_{\substack{|x|+|y|=\varepsilon \\ t \geq 0}} V(t,x,y) \geq 2m > 0 \qquad \text{(A)}$$

Sejam $T(\varepsilon) \geq 0$ e $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ escolhidos de tal maneira que

$$\int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(s)\, ds < m \qquad \text{e}$$

$$\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds\right]\right\}^{1/2} < m$$

para $|x| + |y| \leq \delta(\varepsilon)$

Então

$$\max_{\substack{t \geq T(\varepsilon) \\ |x| + |y| = \delta(\varepsilon)}} V(t,x,y) < 2m \qquad \text{B}$$

Além disso, para $t \geq 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$ temos

$$\dot{V}_{(II.1')}(t,x,y) = -\beta(t) + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{g_r(x_r)\ y_r}{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)ds\right]\right\}^{1/2}} +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{\left[-f_r(x_r,y_r) - h_r(t,x,y) - k_r(t,x,y) - g_r(x_r)\right]y_r}{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds\right]\right\}^{1/2}}$$

$$= -\frac{\sum_{r=1}^{n} y_r\left[f_r(x_r,y_r)+h_r(t,x,y)\right]}{n\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k+2}^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds\right]\right\}^{1/2}} - \frac{\sum_{r=1}^{n} y_r k_r(t,x,y)}{n\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds\right]\right\}^{1/2}}$$

$$- \beta(t)$$

$$\leq - \frac{y\cdot[f(x,y)+h(t,x,y)]}{n\{\sum_{k=1}^{n}[y_k^2+2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds]\}^{1/2}} +$$

$$+ \frac{\sum_{r=1}^{n} |y_r|\ |k_r(t,x,y)|}{n\{\sum_{k=1}^{n}[y_k^2+2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds]\}^{1/2}} - \beta(t)$$

$$\leq - \frac{y\cdot[f(x,y)+h(t,x,y)]}{n\{\sum_{k=1}^{n}[y_k^2+2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds]\}^{1/2}} +$$

$$+ \frac{1}{n}|k(t,x,y)|\sum_{r=1}^{n} \frac{|y_r|}{\{\sum_{k=1}^{n}[y_k^2+2\int_0^{x_k} g_k(s)\ ds]\}^{1/2}} - \beta(t)$$

$$\leq - \frac{y\cdot[f(x,y)+h(t,x,y)]}{n\{\sum_{k=1}^{n}[y_k^2+2\int_0^{x_k} g_k(s)ds]\}^{1/2}} + |k(t,x,y)| - \beta(t) \leq 0$$

tomando em consideração as hipóteses H_3', H_4'' e H_5.

Suponhamos que existem $t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0,y_0) \in R^{2n}$ com $|x_0|+|y_0|<\delta(\varepsilon)$ tais que para alguma solução $(x(t), y(t))$ de (II.1') satisfazendo $x(t_0)=x_0$, $y(t_0) = y_0$ e para algum $\bar{t} > t_0$ tenhamos $|x(\bar{t})| + |y(\bar{t})| \geq \varepsilon$. Então existem números reais t_1 e t_2, $t_0 < t_1 < t_2$ tais que $|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta(\varepsilon)$, $|x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon$ e $\delta(\varepsilon) \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \varepsilon$ para $t_1 \leq t \leq t_2$. Mas isto implica - (usando A e B) que

$$V(t_1,x(t_1), y(t_1)) < V(t_2,x(t_2), y(t_2))$$

Como $V(t,x(t), y(t))$ é diferenciável em $[t_1,t_2]$, pois $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$ em $[t_1,t_2]$, existe um número real s, $t_1 < s < t_2$ satisfazendo $\dot{V}(s,x(s), y(s)) > 0$. Mas isto é uma contradição pois, para $t \geq 0$ e $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$, $\dot{V}(t,x(t), y(t) \leq 0$.

Então, o teorema está demonstrado.

COROLÁRIO II.1:

Suponhamos que alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial seja satisfeita por (II.1). Suponhamos satisfeitas as hipóteses do Teorema II.1 com $k(t,0,0)=0$ para todo $t \geq 0$.

Então a solução nula de (II.1') é uniformemente estável.

DEMONSTRAÇÃO:

Mostremos inicialmente que a função nula é solução de (II.1'). Basta mostrar que

$$f(0,0) + g(0) + h(t,0,0) + k(t,0,0) = 0 \text{ para } t \geq 0.$$

Temos:

a) $k(t,0,0) = 0$ para $t \geq 0$, por hipótese

b) como $x_k g_k(x_k) > 0$ para $x_k \neq 0$ temos $g_k(x_k) < 0$ se $x_k < 0$ e $g_k(x_k) > 0$ se $x_k > 0$. Da continuidade de g, segue que $g_k(0) = 0$ e portanto $g(0) = 0$. Obser

vemos que $x = 0$ é o único ponto que anula $g(x)$.

c) De H_3', segue que

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \left[f_k(x_k,y_k) + h_k(t,x,y)\right] \geq 0 \quad \text{para todos}$$

$x,y \in R^n$ e $t \geq 0$. Fazendo $y = (0,\ldots,0,y_k,0,\ldots,0)$ obtemos $y_k \left[f_k(x_k,y_k) + h_k(t,x,y)\right] \geq 0$ para todo $x \in R^n$ e $t \geq 0$.

Então da continuidade de f e h segue que $f_k(0,0) + h_k(t,0,0) = 0$ donde $f(0,0) + h(t,0,0) = 0$ para $t \geq 0$.

Portanto a função nula é solução de (II.1') para $t \geq 0$.

Do Teorema II-1, do fato que (II.1') satisfaz uma condição de unicidade em relação ao problema de valor inicial, dado $\varepsilon > 0$ existem $T(\varepsilon) \geq 0$ e $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $|x_0| + |y_0| < \delta_1$ implicam $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$ para a solução $(x(t),y(t))$ de (II.1') que satisfaz $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

Além disso como (II.1') satisfaz as condições de continuidade em relação as condições iniciais, segue do Lema I.6, que existe $\delta(\varepsilon) \leq \delta_1(\varepsilon)$ tal que $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ implica $|x(t)| + |y(t)| < \delta_1(\varepsilon)$ para todo $t \in [0,T(\varepsilon)]$ onde $(x(t), y(t))$ é a solução de (II.1') que satisfaz $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$, qualquer que seja $t_0 \in [0,T(\varepsilon)]$.

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon)$ tal que $|x_0|+|y_0|<\delta$ e $t \geq t_0$ implicam que $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$ para a solução $(x(t), y(t))$ de (II.1') satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0)=y_0$ qualquer que seja $t_0 \geq 0$.

LEMA II.1:

Suponhamos válidas as hipóteses H_3, H_4'' e H_5. Seja $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ uma solução de (II-1') e para cada k=1,2,..n consideremos o sistema

$$(II.1'_k)\quad \begin{cases} \dot{x}_k=\dot{y}_k \\ \dot{y}_k + f_k(x_k,y_k) + g_k(x_k) + \\ \quad + h_k(t,\bar{x}_1(t),\ldots,\bar{x}_{k-1}(t),x_k,\bar{x}_{k+1}(t),\ldots, \\ \quad , \bar{x}_n(t),\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{k-1}(t),y_k,\bar{y}_{k+1}(t),\ldots, \\ \quad , \bar{y}_n(t)) + k_k(t,\bar{x}_1(t),\ldots, \bar{x}_{k-1}(t),x_k,\bar{x}_{k+1}(t),\ldots, \\ \quad , \bar{x}_n(t),\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{k-1}(t),y_k,\bar{y}_{k+1}(t),\ldots,\bar{y}_n(t))=0. \end{cases}$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$ existem $T(\varepsilon) \geq 0$ e $\delta(\varepsilon) > 0$ tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0^k,y_0^k) \in R_k^2$ com $|x_0^k|+|y_0^k|<\delta(\varepsilon)$ implicam $|x_k(t)| + |y_k(t)| < \varepsilon$ para toda solução $(x_k(t),y_k(t))$ de $(II.1'_k)$ satisfazendo $x_k(t_0)=x_0^k$ e $y_k(t_0) = y_0^k$.

DEMONSTRAÇÃO:

A demonstração é análoga ao Teorema II.1 tomando a função de Lyapunoff

$$V(t,x_k,y_k) = \left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)\,ds\right]^{1/2} + \int_t^{\infty} \beta(s)ds.$$

LEMA II.2:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses H_3', H_4 e H_5

Então toda solução de (II.1') é limitada no futuro.

DEMONSTRAÇÃO:

$$\text{Seja } V(t,x,y) = \frac{1}{n}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n}\left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)ds\right]\right\}^{1/2} +$$

$$+ \int_t^{\infty} \beta(s)\ ds$$

Temos $\dot{V}_{(II.1')}(t,x,y) \leq 0$ para todo $t \geq 0$, $x \in R^n$ e $y \in R^n$ com V continuamente diferenciável. Além disso

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{n}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n}\left[y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)ds\right]\right\}^{1/2} \leq V(t,x,y)$$

com $\alpha(x,y) \to \infty$ quando $|x| + |y| \to \infty$.

Então o Lema II.2 é consequência do Lema I.3,

LEMA II.3:

Suponhamos válidas as hipóteses H_3', H_4, H_5 e H_6.

Então o conjunto ω-limite de toda solução de (II.1') é um conjunto compacto quase invariante para (II.2').

DEMONSTRAÇÃO:

Do Lema II.2, segue que toda solução de (II.1') é limitada no futuro. Então se Ω é o conjunto ω-limite des-

ta solução, Ω é compacto, como já observamos no início do Capítulo I. Para mostrar que Ω é quase-invariante para (II.2') usaremos o Corolário do Lema I.4, colocando

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -f(x,y)-g(x) \end{pmatrix} \quad e$$

$$H(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(t,x,y)-R(t,x,y) \end{pmatrix}$$

É imediato que $F(x,y)$ e $H(t,x,y)$ satisfazem as hipóteses do Corolário do Lema I.4. Basta observar que $F(x,y)$- é contínua e considerar as hipóteses H_5 e H_6 sobre $k(t,x,y)$ e $h(t,x,y)$ respectivamente.

Então Ω é quase-invariante para (II.2').

LEMA II.4:

Suponhamos válidas as hipóteses H_1, H_2 e H_4'' com $f(x,y)$ e $g(x)$ continuamente diferenciáveis.

Então se $(0_k,0_k)$ é a origem do plano x_ky_k, $(0_k,0_k) \in p_k(M)$ para todo conjunto M compacto invariante para (II.2')

DEMONSTRAÇÃO:

Seja M qualquer conjunto compacto invariante para (II.2'). Seja $(x(t), y(t)) \in M$ uma solução de (II.2') e Ω seu conjunto ω-limite. Então $\Omega \subset M$ e Ω é um conjunto compacto invariante para (II.2'). Do lema I.5, $\Omega_k = p_k(\Omega)$ está contido em $p_k(M)$ e é o conjunto ω-limite de $(x_k(t), y_k(t))$.

Tomando

$$W^k(x_k,y_k) = y_k^2 + 2\int_0^{x_k} g_k(s)\,ds,$$ temos relativamente a

$$(II.2_k') \quad \begin{cases} \dot{x}_k = y_k \\ \dot{y}_k + f_k(x_k,y_k) + g_k(x_k) = 0, \end{cases}$$

$$\dot{W}^k_{(II.2_k')}(x_k,y_k) = 2y_k\left[-f_k(x_k,y_k) - g_k(x_k)\right] + 2\,g_k(x_k)y_k =$$

$$= -2y_k f_k(x_k,y_k) \leq 0.$$

Como $W^k(x_k,y_k) \geq 0$ segue do Lema I.1 que

$$\Omega_k \subset E_k = \{(x_k,y_k) \in R_k^2 \mid y_k f_k(x_k,y_k) = 0\}.$$

Nós afirmamos que $(0_k,0_k) \in \Omega_k$. Suponhamos que isto não seja verdadeiro. Como $(0_k,0_k)$ é o único ponto de equilíbrio de $(II.2_k')$ segue do Teorema de Poincaré-Bendixson - [2 , Theorem 2.1, pg. 391] e [2 , corollary 1, pg 400] que Ω_k é órbita periódica de $(II.2_k')$ com $(0_k,0_k)$ em seu interior. Então segue de H_2 que existe ao menos um ponto (x_k,y_k) de Ω_k tal que $y_k \neq 0$ e $f_k(x_k,y_k) \neq 0$. Mas isto é uma contradição pois $\Omega_k \subset E_k$. Então $(0_k,0_k) \in p_k(M)$.

TEOREMA II.2:

Suponhamos válidas as hipóteses H_1-H_6 com f e g de classe C^1.

Então para toda solução $\bar{x}(t)$ de (II.1) nós temos $\bar{x}(t) \to 0$ e $\dot{\bar{x}}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ uma solução qualquer de (II.1'). Segue-se do Lema II.2 que esta solução é limitada no futuro ro. Seja Ω seu conjunto ω-limite. Devido ao Lema II.3, nós temos que Ω é um conjunto compacto invariante para (II.2') . Para cada $k=1,2,\ldots,n$ seja $\Omega_k = p_k(\Omega)$. Então, do Lema I.5 , Ω_k é o conjunto ω-limite de $(\bar{x}_k(t), \bar{y}_k(t))$. Do Lema II.4, $(0_k,0_k) \in \Omega_k$ e portanto existe sequência $\{t_m^k\}_{m\in N}$ tal que $t_m^k \to \infty$ e $(\bar{x}_k(t_m^k), \bar{y}_k(t_m^k) \to (0_k,0_k)$ quando $m \to \infty$. Como- $(\bar{x}_k(t). \bar{y}_k(t))$ é solução do sistema $(II.1_k')$, do Lema II.1, podemos garantir que dado $\varepsilon > 0$ existem $T(\varepsilon) \geq 0$ e $\delta(\varepsilon)>0$ tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0^k, y_0^k) \in R_k^2$ com $|x_0^k| + |y_0^k|<\delta$ implicam $|\bar{x}_k(t)| + |\bar{y}_k(t)| < \varepsilon$ se $(\bar{x}_k(t_0), \bar{y}_k(t_0))=(x_0^k,y_0^k)$. Em nosso caso, existe $t_{m_0}^k$ elemento de $\{t_m^k\}_{m\in N}$ tal que $t_{m_0}^k \geq T(\varepsilon)$ e $|x_k(t_{m_0}^k)| + |y_k(t_{m_0}^k)| < \delta$.

Então $t \geq t_{m_0}^k \geq T(\varepsilon)$ implica $|\bar{x}_k(t)| + |\bar{y}_k(t)| < \varepsilon$.

Portanto $(\bar{x}_k(t), \bar{y}_k(t)) \to (0_k,0_k)$ quando $t \to \infty$ e consequentemente $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \to (0,0)$ quanto $t \to \infty$.

COROLÁRIO II.2:

Suponhamos que alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial seja satisfeita para (II.1').

Suponhamos satisfeitas as hipóteses do Teorema II.2 com $k(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Então a origem é globalmente assintoticamente estável para (II.1').

DEMONSTRAÇÃO

A conclusão segue do Teorema II.2 e do Corolário II.1.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

(II.3) $\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$ com $x \in R^n$, que é equivalente ao sistema

$$(\text{II.3}')\begin{cases} \dot{x}_k = y_k & k=1,2,\ldots,n \\ \dot{y}_k + f_k(x_k,y_k)y_k + g_k(x_k) + h_k(t,x,y) + k_k(t,x,y) = 0 \end{cases}$$

onde $f(x,y) = \text{diag}\,(f_1(x_1,y_1), f_2(x_2,y_2), \ldots, f_n(x_n,y_n))$.

COROLÁRIO II.3:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses H_2, H_4, H_5 e H_6 com f e g de classe C^1. Sejam $f_k(x_k,y_k) \geq 0$ e $y_k\, h_k(t,x,y) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, todos $x \in R^n$ e $y \in R^n$.

Então para toda solução $x(t)$ de (II.3) nós temos que $x(t) \to 0$ e $\dot{x}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Em particular se alguma condição de unicidade com relação ao problema de valor inicial for satisfeita para

(II.3) e $k(t,0,0) =$ para todo $t \geq 0$, então a origem é globalmente assintoticamente estável para (II.3).

DEMONSTRAÇÃO

Este corolário é consequência imediata do Teorema - II.2 e do Corolário II.2.

CAPÍTULO III

ESTABILIDADE DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESCALAR DE 2ª ORDEM

Consideremos a equação diferencial escalar de 2ª ordem

$$\text{(III.1)} \quad \ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x)\,p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) + k(t,x,\dot{x}) = 0$$

que é equivalente ao sistema

$$\text{(III.1')} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y}+f(x,y)+g(x)p(y)+h(t,x,y)+k(t,x,y) = 0 \end{cases}$$

Este capítulo será desenvolvido em três partes. Na Parte 1 suporemos $k(t,x,y)$ identicamente nula em $[0,\infty)\times R^2$ e então estudaremos o comportamento das soluções da equação resultante:

$$\text{(III.2)} \quad \ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x)\,p(\dot{x}) + h(t,x,\dot{x}) = 0$$

que é equivalente ao sistema

$$\text{(III.2')} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y}+f(x,y)+g(x)p(y)+h(t,x,y) = 0 \end{cases}$$

Na Parte 2 trabalharemos com a perturbação $k(t,x,y)$, mas a hipótese feita sobre $p(y)$ será mais restritiva.

Na Parte 3, voltaremos a trabalhar com $p(y)$ satisfazendo as hipóteses da Parte 1, mas localmente, supondo a perturbação $k(t,x,y)$ não necessariamente nula. Nesse caso obteremos somente estabilidade assintótica para a solução nula, ao contrário das duas primeiras partes onde obtivemos estabilidade assintótica global para a origem.

Como no Capítulo II relacionaremos o comportamento das soluções de (III.1) e (III.2) com o comportamento das soluções de

$$\text{(III.3)} \quad \ddot{x} + f(x,\dot{x}) + g(x)\, p(\dot{x}) = 0$$

que é equivalente ao sistema

$$\text{(III.3')} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} + f(x,y) + g(x)\, p(y) = 0 \end{cases}$$

Consideremos o seguinte conjunto de hipóteses com relação às funções que aparecem em (III.1').

h_1 - $f(x,y)$ é contínua e $yf(x,y) \geq 0$ para todos números reais x e y

h_2 - Para toda curva de Jordan γ em R^2, contendo a origem em seu interior, existe ao menos um ponto $(x,y) \in \gamma$ tal que $f(x,y) \neq 0$.

h_3 - $f(x,y)$ e $h(t,x,y)$ são contínuas com $y\,[f(x,y) + h(t,x,y)] \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e quaisquer reais x e y.

h_4 - $g(x)$ é contínua, $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e

$$\int_0^x (u)\, du \to \infty \text{ quando } |x| \to \infty$$

h_4' - $g(x)$ é contínua e $\int_0^x g(u)du \to \infty$ quando $|x| \to \infty$

h_4'' - $g(x)$ é contínua e $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

h_5 - $p(y)$ é contínua, $p(y) > 0$ para todo real y e

$$\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du \to \infty \text{ quando } |y| \to \infty.$$

h_6 - Para todo subconjunto compacto B de R e todas funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$ definidas em $[0,\infty)$ a valores em B, segue-se que

$$\int_s^{s+t} h(\tau, x(\tau), y(\tau))\, d\tau \to 0 \text{ quando } s \to \infty$$

uniformemente em $t \in [0,1]$.

h_7 - $k(t,x,y)$ é contínua e $|k(t,x,y)| \leq \beta(t)$ para todo $t \geq 0$ e $x,y \in R$ com $\beta(t)$ contínua e

$$\int^{\infty} \beta(u)\, du \to \infty$$

h_8 - $p(y)$ é contínua e existe M, constante real, tal que $0 < \frac{1}{M} \leq p(y) \leq M$ para todo real y.

OBSERVAÇÃO:

Damos a seguir alguns exemplos em que h_5 é satisfeita:

i) $p(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2m}}$, $m = 0,1,2,\ldots$

ii) $p(x) = \dfrac{\rho(x)}{1 + x^{2m}}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $\rho(x)$ satisfazendo h_8.

PARTE 1

LEMA III.1.1:

Suponhamos válidas as hipóteses h_3, h_4'' e h_5.

Então para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $t \geq t_0 \geq 0$ e $(x_0, y_0) \in R^2$ com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ implicam $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$ para toda solução $(x(t), y(t))$ de (III.2') satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos a função

$$V(x,y) = \int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du$$

Sejam $\quad m = \min\limits_{|x|+|y|=\varepsilon} V(x,y) \quad$ (A) $\quad$ e

$0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ escolhido de tal forma que

$$\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du < m$$

para $|x| + |y| \leq \delta(\varepsilon)$

Então $\quad \max\limits_{|x| + |y| = \delta(\varepsilon)} V(x,y) < m \quad$ (B)

Para todo $(x,y) \in R^2$, temos:

$$\dot{V}_{(III.2')}(x,y) = \frac{y\,[-f(x,y)-g(x)p(y)-h(t,x,y)]}{p(y)} +$$

$$+ g(x)y = -\frac{y\,[f(x,y) + h(t,x,y)]}{p(y)} \leq 0.$$

Suponhamos que existam $t_0 \geq 0$, $(x_0,y_0) \in R^2$ com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ tal que para alguma solução $(x(t),y(t))$ de (III.2') satisfazendo $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$ e para algum $\bar{t} > t_0$ tenhamos $|x(\bar{t})| + |y(\bar{t})| \geq \varepsilon$. Então existem números reais $t_0 < t_1 < t_2$ tais que $|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta(\varepsilon)$ e $|x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon$; mas isto implica (usando A e B) que

$$V(x(t_1),y(t_1)) < V(x(t_2),y(t_2)).$$

Existe então número real s, $t_1 \leq s \leq t_2$ tal que $\dot{V}(x(s), y(s)) > 0$, o que contradiz o fato de termos $\dot{V}(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \in R^2$.

Observação:

Se impusermos que (III.2') satisfaz alguma condição de unicidade em relação ao problema de valor inicial então a solução nula de (III.2') é uniformemente estável.

LEMA III.1.2:

Suponhamos válidas as hipóteses h_3, h_4 e h_5.
Então toda solução de (III.2') é limitada no futuro.

DEMONSTRAÇÃO

Seja

$$V(x,y) = \int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du$$

Então $V(x,y) \to \infty$ quando $|x| + |y| \to \infty$ e além disso $\dot{V}_{(III.2')}(x,y) \leq 0$.

Portanto do Lema I.3, toda solução de (III.2') é limitada no futuro.

LEMA III.1.3:

Suponhamos válidas as hipóteses h_3 - h_6.
Então o conjunto ω-limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (III.2') é um compacto quase-invariante para (III.3').

DEMONSTRAÇÃO

Do Lema III.1.2, toda solução $(x(t),y(t))$ de (III.2') é limitada no futuro. Então se Ω é o conjunto ω-limite de $(x(t),y(t))$, Ω é compacto. Para mostrar que Ω

é quase-invariante para (III.3') usaremos o Corolário do Lema I.4, pondo

$$H: [0,\infty) \times R^2 \to R^2 \quad e \quad F: R^2 \to R^2$$

definidas por

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -f(x,y) - p(y)\, g(x) \end{pmatrix}$$

$$H(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(t,x,y) \end{pmatrix}$$

Usando h_6, se mostra facilmente que para todo compacto B de R e para todas funções contínuas x(t) e y(t) definidas em $[0,\infty)$ a valores em B, tem-se:

$$\left| \int_s^{s+t} H(\tau, x(\tau), y(\tau))\, d\tau \right| \to 0$$

quando $s \to \infty$ uniformemente em $t \in [0,1]$. Como F é contínua, do Corolário do Lema I.4, segue-se que Ω é quase-invariante para (III.3').

LEMA III.1.4.

Suponhamos válidas as hipóteses h_1, h_2, h_4' com f, g, p de classe C^1 e p(y) positiva para todo real y.

Então a origem pertence a todo conjunto compacto invariante para (III.3').

DEMONSTRAÇÃO:

Seja M qualquer conjunto compacto invariante para (III.3'). Seja $(x(t), y(t)) \in M$ uma solução de (III.3')e Ω seu conjunto ω-limite. Então $\Omega \subset M$ e Ω é um conjunto compacto invariante para (III.3').

Seja

$$V(x,y) = \int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du.$$

Então

$$V(x,y) \geq 0 \text{ e } \dot{V}_{(III.3')}(x,y) =$$

$$= \frac{y}{p(y)} \left[-f(x,y)-p(y)\, g(x)\right] + yg(x) = \frac{-yf(x,y)}{p(y)} \leq 0$$

Então do Lema I.1, $\Omega \subset E = \{(x,y) \in R^2 | yf(x,y) = 0\}$.

Nós afirmamos que $(0,0) \in \Omega$. Suponhamos que isto não fosse verdadeiro. Como (0,0) é o único ponto de equilíbrio de (III.3') segue-se do Teorema de Poincaré-Bendixson [2 , Theorem 2.1, pg 391] e [2 , Corollary 1, pg. 400] que Ω é uma órbita periódica de (III.3') com (0,0) em seu interior. Então de h_2, segue-se que existe ao menos um ponto $(x,y) \in \Omega$ tal que $y \neq 0$ e $f(x,y) \neq 0$. Mas isto é uma contradição pois $\Omega \subset E$.

TEOREMA III.1.1:

Suponhamos verdadeiras as hipóteses h_1 - h_6 com f, g e p de classe C^1.

Então para toda solução x(t) de (III.2) nos temos que $x(t) \to 0$ e $\dot{x}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $(x(t), y(t))$ uma solução de (III.2'). Segue do Lema III.1.2 que esta solução é limitada no futuro. Seja Ω seu conjunto ω-limite. Como consequência do Lema III.1.3, Ω é um conjunto compacto e invariante para (III.3'). O Lema III.1.4. implica que $(0,0) \in \Omega$ e portanto existe uma sequência $\{t_m\}_{m \in N}$ tal que $t_m \to \infty$ e $(x(t_m), y(t_m)) \to (0,0)$ quando $m \to \infty$. Do Lema III.1., dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)$ tal que se $|x(t_0)| + |y(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ então $t \geq t_0$ implica $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$. Como $(x(t_m), y(t_m)) \to (0,0)$ quando $m \to \infty$, existe m_0 tal que $|x(t_{m_0})| + |y(t_{m_0})| < \delta(\varepsilon)$, donde $t \geq t_{m_0}$ implica $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$. Portanto $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ quando $t \to \infty$, concluindo a demonstração.

COROLÁRIO III.1,1:

Suponhamos que alguma condição de unicidade com relação ao problema de valor inicial para (III.2') esteja satisfeita. Suponhamos válidas as hipóteses h_1-h_6 com f, g e p de classe C^1.

Então a origem é globalmente assintoticamente estável para (III.2').

DEMOSTRAÇÃO:

É uma consequência imediata do teorema anterior e da observação que segue o Lema III.1.1.

PARTE 2

LEMA III.2.1:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses h_3, h_4'', h_7 e h_8.

Então para cada $\varepsilon > 0$ existem $T(\varepsilon) \geq 0$ e $\delta(\varepsilon) > 0$ tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0,y_0) \in R^2$ com $|x_0|+|y_0|<\delta(\varepsilon)$ implicam $|x(t)| + |y(t)|<\varepsilon$ para toda solução $(x(t),y(t))$ de (III.1') satisfazendo $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja

$$V(t,x,y) = \sqrt{\frac{2}{M^3}}\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du\right]^{1/2} + \int_t^{\infty} \beta(u)\, du$$

onde M é uma constante tal que $0< \frac{1}{M} \leq p(y) \leq M$.

Pondo

$$2m = \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{M^3}} \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du \right]^{1/2}$$

e levando em conta que $p(y) > 0$ para todo $y \in R$ e $xg(x)>0$ para todo $x \neq 0$ temos

$$\inf_{\substack{|x|+|y|=\varepsilon \\ t\geq 0}} V(t,x,y) \geq 2m > 0 \qquad \text{(A)}$$

Sejam $T(\varepsilon) \geq 0$ e $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ escolhidos de tal maneira que

$$\int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(u)\, du < m \qquad \text{e}$$

$$\sqrt{\frac{2}{M^3}} \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du \right]^{1/2} < m \text{ para } |x|+|y| \leq \delta(\varepsilon)$$

Então,

$$\max_{\substack{t\geq T(\varepsilon) \\ |x|+|y|=\delta(\varepsilon)}} V(t,x,y) < 2m \qquad \text{(B)}$$

Além disso, para $(x,y) \neq (0,0)$ e $t \geq 0$ temos

$$\dot{V}_{(III.1')}(t,x,y) = -\beta(t) + \sqrt{\frac{2}{M^3}} \frac{g(x)y}{2\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)du\right]^{1/2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{y\,[-f(x,y)-g(x)-h(t,x,y)-k(t,x,y)]}{2\,p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{y\,[-f(x,y)-h(t,x,y)-k(t,x,y)]}{2\,p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}-\beta(t)\leq$$

$$\leq-\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{y\,[f(x,y)+h(t,x,y)]}{2\,p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{|y|\quad|k(t,x,y)|}{2\,p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}-\beta(t)\leq$$

$$\leq-\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{y\,[f(x,y)+h(t,x,y)]}{2\,p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{|y|}{2\,\frac{1}{M}\left[\int_0^y \frac{u}{M}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}\,|k(t,x,y)|-\beta(t)=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{y\,[f(x,y)+h(t,x,y)]}{2\,p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{M\ |y|}{2\left[\frac{y^2}{2M}+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}}\ |k(t,x,y)| - \beta(t) \leq$$

$$\leq -\sqrt{\frac{2}{M^3}}\ \frac{y\ [f(x,y)+h(t,x,y)]}{2\ p(y)\left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du+\int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}} + |k(t,x,y)| - \beta(t) \leq 0$$

levando em conta h_3, h_4'', h_7 e h_8.

Suponhamos que existam $t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0,y_0) \in R^2$ com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ tais que para alguma solução $(x(t),y(t))$ de (III.1') satisfazendo $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ e para algum $\bar{t} > t_0$ tenhamos $|x(\bar{t})| + |y(\bar{t})| \geq \varepsilon$. Então existem $t_0 < t_1 < t_2$ tais que $|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta(\varepsilon)$, $|x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon$ e $\delta(\varepsilon) \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \varepsilon$ para $t \in [t_1,t_2]$.

Mas isto implica (usando A e B) que

$$V(t_1, x(t_1), y(t_1)) < V(t_2, x(t_2), y(t_2)).$$

Como $V(t, x(t), y(t))$ é diferenciável em $[t_1,t_2]$, pois $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$ em $[t_1,t_2]$, existe real s, $s \in (t_1,t_2)$ tal que $\dot{V}(s,x(s), y(s)) > 0$. Mas isto é uma contradição pois para $t \geq 0$ e $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$, $\dot{V}(t,x(t), y(t)) \leq 0$. Então segue-se a conclusão do lema.

COROLÁRIO III.2.1;

Suponhamos que alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial para (III.1') seja satisfeita. Suponhamos satisfeitas as hipóteses h_3, h_4'', h_7 e h_8 com $k(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Então a solução nula de (III.1') é uniformemente estável.

DEMONSTRAÇÃO:

É uma consequência do fato da origem ser um ponto de equilíbrio para (III.1'), do Lema III.2.1 e do teorema da continuidade em relação as condições iniciais.

LEMA III.2.2:

Suponhamos válidas as hipóteses h_3, h_4, h_7 e h_8.

Então toda solução de (III.1') é limitada no futuro.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja

$$V(t,x,y) = \sqrt{\frac{2}{M^3}}\left[1 + \int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2} + \int_t^\infty \beta(u)\,du$$

onde M é uma constante real tal que $0 < \frac{1}{M} \leq p(y) \leq M$

Então se

$$\alpha(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{M^3}\left[1+\int_0^y \frac{u}{p(u)}\,du + \int_0^x g(u)\,du\right]^{1/2}$$ temos

$V(t,x,y) \geq \alpha(x,y)$ para $t \geq 0$ e quaisquer reais x e y, e $\alpha(x,y) \to \infty$ quando $|x| + |y| \to \infty$.

Além disso, $\dot{V}_{(III.1')}(t,x,y) \leq 0$ para $t \geq 0$ e $(x,y) \in R^2$.

Então do Lema I.2, toda solução de (III.1') e limitada no futuro.

LEMA III.2.3:

Suponhamos válidas as hipóteses h_3, h_4, h_6, h_7 e h_8.

Então o conjunto ω- limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (III.1') é um conjunto compacto quase-invariante para (III.3').

DEMONSTRAÇÃO:

A demonstração é análoga à do Lema II.3.

TEOREMA III.2.1:

Suponhamos válidas as hipóteses h_1, h_2, h_3, h_4, h_6, h_7 e h_8 com f, g e p de classe C^1.

Então para toda solução $x(t)$ de (III.1) nós temos que $x(t) \to 0$ e $\dot{x}(t) \to 0$, quando $t \to \infty$.

DEMONSTRAÇÃO:

A demonstração é essencialmente a mesma do Teorema III.1.1, com óbvias adaptações.

COROLÁRIO III.2.2:

Suponhamos que alguma condição de unicidade com relação ao problema de valor inicial para (III.1') esteja satisfeita. Suponhamos válidas as hipóteses h_1, h_2, h_3, h_4, h_6, h_7 e h_8 com f, g e p de classe C^1 e $k(t,0,0)= 0$ para todo $t \geq 0$.

Então a origem é globalmente assintoticamente estável para (III.1').

DEMONSTRAÇÃO:

Basta usar o Corolário III.2.1 e o Teorema III.2.1.

PARTE 3

Suponhamos que existe $\rho > 0$ tal que as funções que aparecem em (III.1') satisfaçam às seguintes hipóteses, com relação ao conjunto $V_\rho = \{(x,y) \in R^2 \mid |x| + |y| < \rho\}$

L_1-$f(x,y)$ definida, contínua e $yf(x,y) \geq 0$ em V_ρ.

L_2-Para toda curva de Jordan γ em V_ρ, contendo a origem em seu interior, existe ao menos um ponto $(x,y) \in \gamma$ tal que $f(x,y) \neq 0$.

L_3 - $f(x,y)$ e $h(t,x,y)$ definidas, contínuas e $y\,[f(x,y) + h(t,x,y)] \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $(x,y) \in V_\rho$.

L_4 - $g(x)$ definida, contínua para $|x| < \rho$ e $xg(x) > 0$ para $|x| < \rho$ e $x \neq 0$.

L_5 - $p(y)$ definida, contínua e $p(y) > 0$ para $|y| < \rho$.

L_6 - Para todo subconjunto compacto B de $(-\rho, \rho)$ e todas funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$ definidas em $[0,\infty)$ a valores em B segue-se que $\int_s^{s+t} h(\tau, x(\tau), y(\tau))\, d\tau \to 0$ quando $s \to \infty$, uniformemente em $t \in [0,1]$.

L_7 - $k(t,x,y)$ definida, contínua e $|k(t,x,y)| \leq \beta(t)$ para $t \geq 0$ e $(x,y) \in V_\rho$ com $\beta(t)$ contínua e

$$\int_0^\infty \beta(u)\, du < \infty.$$

LEMA III.3.1:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses L_3, L_4, L_5 e L_7.

Então para cada $\varepsilon > 0$, existem $T(\varepsilon) \geq 0$ e $\delta(\varepsilon) > 0$ tais que $t \geq t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0, y_0) \in R^2$ com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ implicam $|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$ para toda solução $(x(t), y(t))$ de (III.1') tal que $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos a seguinte função

$$V(t,x,y) = \sqrt{\frac{2}{M^3}} \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du \right]^{1/2} + \int_t^\infty \beta(u)\, du$$

onde M é tal que $0 < \frac{1}{M} \leq p(y) \leq M$ para $|x| + |y| \leq \frac{2\rho}{3}$

Seja $\varepsilon > 0$ dado; sem perda de generalidade podemos supor que $\varepsilon < \frac{\rho}{2}$.

Pondo

$$2m = \min_{|x|+|y|=\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{M}} \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du \cdot \int_0^x g(u)\, du \right]^{1/2}$$

e levando em conta que $p(y) > 0$ para $|y| < \rho$ e $xg(x)>0$ para $|x| < \rho$, $x \neq 0$ temos

$$\inf_{\substack{|x| + |y| = \varepsilon \\ t \geq 0}} V(t,x,y) \geq 2m > 0 \qquad \text{(A)}$$

Sejam $T(\varepsilon) \geq 0$ e $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ escolhidos de tal maneira que

$$\int_{T(\varepsilon)}^{\infty} \beta(u)\, du < m \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{2}{M^3}} \left[\int_0^y \frac{u}{p(u)}\, du + \int_0^x g(u)\, du \right]^{1/2} < m$$

para $|x| + |y| \leq \delta(\varepsilon)$.

Então
$$\max_{\substack{t \geq T(\varepsilon) \\ |x|+|y|=\delta(\varepsilon)}} V(t,x,y) < 2m \qquad \text{(B)}$$

Além disso, para $|x|+|y| < \frac{\rho}{2}$, $t \geq 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$ temos $\dot{V}_{(III.1')}(t,x,y) \leq 0$, como feito no Lema III.2.1.

Suponhamos que existam $t_0 \geq T(\varepsilon)$ e $(x_0,y_0) \varepsilon R^2$ com $|x_0| + |y_0| < \delta(\varepsilon)$ tais que para alguma solução de (III.1')

satisfazendo $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ e para algum $\bar{t} > t_0$ tenhamos $|x(\bar{t})| + |y(\bar{t})| \geq \varepsilon$. Então existem $t_0<t_1<t_2$ tais $|x(t_1)| + |y(t_1)| = \delta(\varepsilon)$, $|x(t_2)| + |y(t_2)| = \varepsilon$ e $\delta(\varepsilon) \leq$ $\leq |x(t)| + |y(t)| \leq \varepsilon$ para $t \in [t_1, t_2]$.

Então de (A), (B) e do exposto acima concluimos que

$$V(t_1, x(t_1), y(t_1)) < V(t_2, x(t_2), y(t_2)) \quad (C)$$

Como para $t \in [t_1, t_2]$, $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$ e $|x(t)| + |y(t)| < \frac{\rho}{2}$ concluimos que $V(t, x(t), y(t))$ é diferenciável em $[t_1, t_2]$. Então de (C), existe real $s \in [t_1, t_2]$ tal que $\dot{V}(s, x(s), y(s)) > 0$.

Mas isto é uma contradição pois para $t \geq 0$, $(x(t), y(t)) \neq$ $\neq (0,0)$ e $|x(t)| + |y(t)| < \frac{\rho}{2}$, $\dot{V}(t, x(t), y(t)) \leq 0$. Então segue a conclusão do lema.

OBSERVAÇÃO:

O Lema III.2.1 pode ser visto como caso particular do lema acima. Mantemos o Lema III.2.1 porque ele nos dá uma formulação mais conveniente para a demonstração do Teorema III.2.1.

COROLÁRIO III.3.1:

Suponhamos que alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial seja satisfeita para (III.1').

Suponhamos satisfeitas as hipóteses L_3, L_4, L_5 e L_7 com $k(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$

Então a solução nula de (III.1') é uniformemente estável.

LEMA III.3.2:

Suponhamos satisfeita a hipótese L_6 e que $f(x,y)$, $g(x)$ e $p(x)$ são contínuas em V_ρ.

Então o conjunto ω-limite de toda solução $(x(t),y(t))$ de (III.1') limitada no futuro é um compacto invariante para (III.3').

LEMA III.3.3:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses L_1, L_2, L_4, L_5 com f, g e p de classe C^1.

Então a origem pertence a todo compacto invariante para (III.3').

TEOREMA III.3.1:

Suponhamos satisfeitas as hipóteses L_1 - L_7 com f, g e p de classe C^1.

Então se $(x(t), y(t))$ é solução (III.1') limitada no futuro, $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ quando $t \to \infty$.

OBSERVAÇÃO:

As demonstrações dos Corolário III.3.1, Lema III.3.2, Lema III.3.3. e Teorema III.3.1. seguem essencialmente as mesmas linhas das proposições correspondentes nas partes anteriores, com óbvias adaptações. Observamos que a hipótese de $(x(t),y(t))$, solução de (III.1'), ser limitada no futuro é necessária desde que com as hipóteses locais que impusemos, não é possível afirmar que tôda solução de (III.1') satisfaz tal propriedade. Notamos entretanto que o Lema III.3.I. garante a existência de vizinhança da origem tal que tôda solução de (III.1') que passa por essa vizinhança é limitada no futuro.

COROLÁRIO III.3.2:

Suponhamos que alguma condição de **unicidade** com relação ao problema de valor inicial para (III.1') esteja satisfeita. Suponhamos satisfeitas as hipóteses L_1-L_7 com f, g e p de classe C^1 e $k(t,0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Então a origem é assintoticamente estável para (III.1').

DEMONSTRAÇÃO:

Do Corolário III.3.1, a solução nula de (III.1') é uniformemente estável. Existe então uma vizinhança V da origem tal que, toda solução de (III.1') partindo de V para $t_0 \geq 0$ é limitada no futuro. Aplica-se então o Teorema III.3.1.

BIBLIOGRAFIA

[1]- AVELLAR, C.E. DE - Propriedades de estabilidade das soluções de sistemas de equações diferenciais de 2ª ordem - Dissertação de Mestrado - São Carlos- - 1973.

[2]- CODINGTON, E.A. & LEVINSON, N. - Theory of ordinary differential equations - New York, Mac-Hill Book Company, 1965.

[3]- LA SALLE, J.P. & LEFSCHETZ, S. - Stability by Lyapunov's direct method with applications. New York, Academic Press, 1961.

[4]- MILLER, R.K. - Asymptotic behaviour of nonlinear delay--differential equations. - J. Of Differential Equations, 1:293 - 305, july, 1965.

[5]- _____.- Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear differential equations. - Trans. of the American Math. Society, 115: 400 - 416, march , 1965.

[6]- ONUCHIC, N. - Invariance properties in the theory of differential equations with applications to stability problems. - SIAM J. Control, 9: 97 - - 104, february, 1971.

[7]- _____. - Stability of a second order differential equation. - Acta Mexicana de Ciencia y Tecnologia, 3: 6-11, enero/abril, 1969

[8] - ONUCHIC, N; ONUCHIC, L. de La Rosa; TABOAS, P. Zoéga & RODRIGUES, H. Munhoz. - Invariance, stability, and applications. - Seminário de Ecuaciones Diferenciales, Centro de Investigación y Estudios Avanzados y Organización de Los - Estados Americanos. - México, Verano, 1972.

[9] - RODRIGUES, H.M. - Invariança para sistemas não Autonomos de equações diferenciais com retardamento e aplicação - Dissertação de Mestrado - - São Carlos - 1970.

[10] - YOSHIZAWA, T. - Asymptotic behaviour of solutions of a system of differential equations. - Contribuitions to Differential Equations, 1:371- - 387, 1963.

[11] - _____.- Stability Theory by Lyapunov's second method. Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1966.