

*Aos meus pais,  
o Professor Carlos Gutierrez,  
e o Professor Salvador Zanata.*

## Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento deste trabalho.

Gostaria de agradecer aos meus dois orientadores, os Professores Carlos Gutierrez e Salvador Zanata, pela sua intensa dedicação e muitas idéias compartilhadas. Durante a minha graduação, tive a sorte de ter tido professores que me inspiraram e motivaram a ser um matemático, e por isto, agradeço aos Professores Maria Aparecida Soares Ruas, Miriam Garcia Manoel e Washington Luis Marar. Pela amizade e conversas matemáticas, agradeço aos Professores Benito Pires, Felipe Ladeira, Marcela Paz, Miriam Silva, Martin Anderson e Roland Rabanal. Devo agradecer aos funcionários do ICMC pela convivência, e todas as vezes em que me ajudaram, principalmente na Secretaria de Pós-Graduação e na biblioteca. Agradeço também à amizade e carinho de Cássia Neumann, Hugo Arruda, Igor Villa, Rafael Miranda, Renato Fabbri e Ubiratan Ribeiro.

## Resumo

O principal objetivo desta tese é estudar os difeomorfismos planares que satisfazem as hipóteses da Versão Modificada da Conjectura Discreta de Markus-Yamabe. Para estes difeomorfismos, definimos um conceito construtivo de número de rotação. Além disto, exibimos um contra-exemplo para a Versão Modificada da Conjectura Discreta de Markus-Yamabe que apresenta uma intersecção homoclínica transversal e implica a existência de infinitos pontos periódicos hiperbólicos.

## **Abstract**

The main goal of this thesis is to study the plane diffeomorphisms satisfying the hypothesis of the Modified Version of the Discrete Conjecture of Markus-Yamabe. For these diffeomorphisms, we define a constructive concept of rotation number. Moreover, we present a counter-example to the Modified Version of the Discrete Markus-Yamabe Conjecture which exhibits a transversal homoclinic intersection, implying the existence of infinitely many hyperbolic periodic points.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 1
<b>2</b>	<b>A Versão Discreta da Conjectura de Markus-Yamabe</b>	p. 5
2.1	Histórico da Versão Discreta da Conjectura de Markus-Yamabe . . . . .	p. 5
2.2	O conjunto $\Sigma$ . . . . .	p. 11
2.3	Acessibilidade e Pontes . . . . .	p. 18
<b>3</b>	<b>Dinâmica induzida nos fins primos</b>	p. 34
3.1	Construção da seqüência de endcuts $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ . . . . .	p. 34
3.2	A teoria dos fins primos . . . . .	p. 40
3.3	O homeomorfismo $\hat{f}$ . . . . .	p. 44
<b>4</b>	<b>Um Contra-exemplo para a Conjectura DM-Y</b>	p. 63
4.1	Descrição do Resultado . . . . .	p. 63
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 69

# 1 *Introdução*

O presente trabalho é motivado pelo estudo do problema conhecido como a Versão Discreta da Conjectura de Markus-Yamabe, cujo enunciado é:

**Conjectura DM-Y [25]** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que  $f(O) = O$ , onde  $O$  denota a origem em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha também que para todo ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ , todos os autovalores da matriz derivada de  $f$  em  $p$  possuem módulo menor que um. Então a origem é um atrator global do sistema dinâmico discreto gerado por  $f$ .

No que segue, nos referimos à conjectura acima como Conjectura DM-Y.

A Conjectura DM-Y enquadra-se na tradição da teoria dos sistemas dinâmicos de buscar condições necessárias e suficientes para a existência de um atrator global para uma classe de sistemas dinâmicos, tanto no caso contínuo, como no caso discreto. Tal tradição remonta ao início do século XX, no estudo da estabilidade conduzido por Lyapunov.

Como veremos mais adiante, a Conjectura DM-Y é verdadeira somente no caso unidimensional.

No caso bidimensional, o primeiro contra-exemplo foi encontrado por Cimas, Gasull e Mañosas [10]. Este contra-exemplo apresenta infinitas órbitas que divergem para o infinito, bem como uma órbita periódica de período quatro.

Numa tentativa de obter uma proposição verdadeira a partir da Conjectura DM-Y, Alarcón, Guiñez e Gutierrez fortaleceram as hipóteses do problema ao supor que  $f$  satisfaz a seguinte condição adicional:

**Condição de Repulsão no Infinito** Diremos que *o infinito é um repulsor* para um difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  caso exista um número real  $R > 0$  para o qual o disco ao redor do infinito  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq R\}$  satisfaz: (i)  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(D) = \emptyset$  e (ii)  $f^{-1}(D)$  está contido no interior de  $D$ .

Chamaremos a conjectura DM-Y com esta nova hipótese de **Conjectura DM-Y Modificada**.

Mesmo sob esta hipótese adicional, Alarcón, Guiñez e Gutierrez encontraram contra-exemplos para a Conjectura DM-Y [3].

O principal objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica da classe de difeomorfismos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfazem as condições da Conjectura DM-Y Modificada, mas para os quais a origem não é um atrator global. Neste caso, é possível demonstrar a existência de um conjunto conexo e compacto (um *continuum*)  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ , que contém a origem e é um atrator global para  $f$ .

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo da topologia do atrator  $\Sigma$ . Para tal, utiliza-se algumas definições e resultados clássicos da topologia do plano, como os conceitos de *endcut* e *acessibilidade*.

No Capítulo 2, associamos a cada difeomorfismo  $f$  nas condições da Conjectura DM-Y Modificada, para o qual a origem não é um atrator global, um homeomorfismo do círculo que preserva orientação  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$ . O homeomorfismo  $\hat{f}$  está relacionado a um homeomorfismo do círculo induzido por  $f$  em  $S^1$ , que foi definido por Carathéodory, e aqui será denotado por  $\bar{f}$ . O homeomorfismo  $\bar{f}$  é definido através de uma aplicação de Riemann, enquanto o homeomorfismo  $\hat{f}$  definido aqui é construído indutivamente a partir de um conjunto bem escolhido de endcuts do atrator  $\Sigma$ .

Ainda no Capítulo 2, apresentamos o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.15 (Teorema Principal)** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ , que preserva orientação, e que satisfaz as seguintes condições:

1.  $f(O) = O$ ,
2.  $\infty$  é um repulsor, e
3.  $Spec(f) \subset B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ ,

onde  $Spec(f)$  é o conjunto de todos os autovalores de  $D_p f$ , com  $p$  variando em  $\mathbb{R}^2$ .

Então:

- Existe um *continuum*  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  que é um atrator global, e

- Existe um homeomorfismo do círculo  $\hat{f}: S^1 \rightarrow S^1$ , tal que se o número de rotação de  $\hat{f}$  é racional, então  $f$  possui uma órbita periódica, ou a origem é um ponto acessível, e a bacia de atração da origem é um subconjunto denso de  $\Sigma$ .

Finalmente, no Capítulo 3, exibimos um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y Modificada que apresenta infinitos pontos periódicos hiperbólicos. Para isto, consideramos inicialmente um difeomorfismo planar analítico real  $f_0$  que preserva área e possui um único ponto fixo elíptico. Utilizando um resultado de Zehnder [26], temos que arbitrariamente próximo de  $f_0$  na topologia  $C^1$ , existe um difeomorfismo analítico real  $f_1$  que preserva área e apresenta uma intersecção homoclínica transversal. Esta intersecção homoclínica é persistente no conjunto dos difeomorfismos planares analíticos munidos com a topologia  $C^1$ . Mostramos, então, que arbitrariamente próximo de  $f_1$  na topologia  $C^1$ , existe um difeomorfismo planar  $g$  que satisfaz as condições da Conjectura DM-Y modificada, e portanto, também apresenta uma intersecção homoclínica transversal. Essa construção foi motivada por simulações numéricas de um difeomorfismo do plano inspirado na aplicação de Henón.





## 2 *A Versão Discreta da Conjectura de Markus-Yamabe*

### 2.1 Histórico da Versão Discreta da Conjectura de Markus-Yamabe

Num artigo publicado em 1960, Larry Markus e Hidehiko Yamabe enunciaram a seguinte conjectura:

**Conjectura de Markus-Yamabe (M-Y)[22]** Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$  tal que  $F(O) = O$ , onde  $O$  denota a origem em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que para todo  $p \in \mathbb{R}^n$  a parte real de todos os autovalores da matriz derivada de  $F$  em  $p$  é negativa. Então a origem  $O$  é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo gerado pelo campo vetorial  $F$ .

Apesar de Markus e Yamabe atribuírem a formulação da proposição acima a Aizerman [1], a conjectura ficou conhecida como Conjectura de Markus-Yamabe. No que segue, nos referimos a esta conjectura como Conjectura M-Y.

Neste mesmo artigo [22], Markus e Yamabe demonstram a Conjectura M-Y para campos planares que na forma  $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$  satisfazem a forte restrição  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \equiv 0$ , para ao menos um par  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ .

Ainda em [22], Markus e Yamabe enunciam a chamada Conjectura Fraca de Markus-Yamabe:

**Conjectura Fraca de Markus-Yamabe** Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$  tal que  $F(O) = O$ . Suponha que para todo  $p \in \mathbb{R}^n$  a parte real de todos os autovalores da matriz derivada de  $F$  em  $p$  é negativa. Então  $F$  é injetiva.

Em 1963, Olech [23] mostrou que a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe é equivalente a Conjectura M-Y, estabelecendo assim uma conexão entre estabilidade assintótica

e injetividade global.

Em 1988, Meisters e Olech [21] demonstraram a Conjectura M-Y restrita a campos polinomiais do plano.

A validade da Conjectura M-Y em dimensão dois foi demonstrada em 1993, de forma independente, por Fessler [14] e Gutierrez [16], sendo que uma terceira demonstração foi publicada em 1994 por Glutsyuk [15]. No entanto, a Conjectura M-Y para dimensões maiores do que dois ainda permanecia em aberto.

Em 1997, Cima, Hubbers, Gasull, Mañosas e Van den Essen [9] construíram contra-exemplos polinomiais para a Conjectura M-Y em dimensão  $n$ , para cada  $n \geq 3$ . Nestes contra-exemplos, a conjectura falha pois existem órbitas que além de não se acumularem na origem, tendem para o infinito. Neste trabalho os autores também mostram que a conjectura é válida em qualquer dimensão, sob a hipótese adicional de que a matriz derivada de  $F$  em cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é uma matriz triangular. Desta forma, eles generalizam para dimensões maiores do que dois o resultado de 1960 de Markus e Yamabe.

Sendo assim, a Conjectura M-Y está completamente respondida, sendo verdadeira somente nos casos  $n = 1$  e  $n = 2$ .

Inspirado pela Conjectura M-Y, em 1976 La Salle [19] formulou a seguinte conjectura, que é conhecida como a Versão Discreta da Conjectura de Markus-Yamabe (DM-Y):

**Conjectura DM-Y [19]** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que  $f(O) = O$ . Suponha também que para todo ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ , todos os autovalores da matriz derivada de  $f$  em  $p$  possuem módulo menor do que um. Então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por  $f$ .

A conjectura acima é o equivalente da Conjectura M-Y para sistemas dinâmicos discretos, e a denotaremos por Conjectura DM-Y. O seguinte resultado é uma motivação para a Conjectura DM-Y:

**Proposição 2.1.1** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que  $f(O) = O$ . Se para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|D_p f\| < 1$ , então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por  $f$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $f$  como no enunciado acima,  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $S = \|p\|$ . Como  $f$  é de classe  $C^1$  e  $\overline{B(O, S)}$  é compacto, segue que existe  $M < 1$  tal que  $\|D_x f\| < M$ , para todo  $x$  em  $\overline{B(O, S)}$ . Se  $q \in \overline{B(O, S)}$ , temos que  $\|f(p) - f(q)\| \leq M\|p - q\|$ , e  $f|_{\overline{B(O, S)}}$  é uma  $M$ -contração. Assim, a restrição de  $f$  a qualquer bola centrada na origem é uma contração.

Desta forma,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(p) = O$ . Como  $p$  é um ponto arbitrário de  $\mathbb{R}^2$ , temos que a origem é um atrator global para  $f$ .  $\square$

**Observação 2.1.2** *Podemos afirmar que se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y, segue que existe um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|D_p f\| = 1$ , pois caso contrário, a restrição de  $f$  ao redor de qualquer bola centrada na origem seria uma contração, e portanto, a origem seria um atrator global.*

O Teorema de Hartman-Grobman juntamente com a condição espectral garantem que se  $f$  satisfaz a Conjectura DM-Y, então a origem é um atrator local.

Em 1999, Cima, Gasull e Mañosas [10], baseados em um exemplo de W. Szlenk, mostraram que a Conjectura DM-Y é falsa até mesmo para  $n = 2$ . Os autores demonstram que para um número  $a > 0$  pequeno o suficiente, o seguinte difeomorfismo é um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y no plano:

$$G_a(x, y) = \left( -\frac{ky^3}{1+x^2+y^2} - ax, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} - ay \right),$$

onde  $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$ .

Nas condições acima expressas, o difeomorfismo  $G_a$  possui uma órbita periódica do tipo sela, e de período quatro, além de pontos cujas órbitas tendem para o infinito.

A seguir, veremos que cada elemento da família de exemplos acima de fato satisfazem as condições da Conjectura DM-Y.

Seja  $F = G_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A matriz jacobiana de  $F$  num ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é dada por:

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2kxy^3}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-ky^2(3+3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{kx^2(3+x^2+3y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2kx^3y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$\det DF(x, y) = \frac{3k^2x^2y^2(3+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3},$$

bem como

$$\text{tr}DF(x, y) = \frac{-2kxy(x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Em coordenadas polares, temos que a aplicação  $G_0$  é dada por

$$r' = \arctan\left(\frac{-1}{\tan^3(\theta)}\right)$$

$$\theta' = \frac{kr^3}{1+r^2} \sqrt{\cos^6(\theta) + \sin^6(\theta)}$$

Portanto, temos  $0 \leq \det DF(r, \theta) = \frac{3k^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) r^4 (r^2 + 3)}{(1+r^2)^3} = \frac{3k^2 \sin^2(2\theta)(r^6 + 3r^4)}{4(r^6 + 3r^4 + 3r^2 + 1)} < \frac{3k^2}{4} < 1$ .

Temos que o discriminante  $\Delta$  da equação dos autovalores de  $DF(x, y)$  satisfaz

$$\Delta = (\text{tr}DF(x, y))^2 - 4 \det DF(x, y) = -4k^2 x^2 y^2 \frac{2x^4 + 8x^2 y^2 + 2y^4 + 12x^2 + 12y^2 + 9}{(1 + x^2 + y^2)^4} \leq 0.$$

Desta forma, se  $xy = 0$ , então  $\lambda = 0$  é um autovalor duplo de  $DF(x, y)$ . Caso contrário, temos que

$$0 < \|\lambda\| < \sqrt{\det DF(x, y)} < \sqrt{\frac{3k^2}{4}} \leq \frac{k\sqrt{3}}{2} < 1.$$

Em ambos casos, temos que  $F(O) = O$  e o espectro de  $F$  é um subconjunto da bola unitária com centro na origem, e portanto  $F$  satisfaz as hipóteses da Conjectura DM-Y. O mesmo vale para  $G_a$ , com  $a$  próximo de 0. Neste caso, é possível mostrar que  $G_a$  é um difeomorfismo [10].

Ainda em [10], os autores provam que a conjectura é verdadeira para aplicações polinomiais do plano.

A partir do contra-exemplo para a Conjectura DM-Y no plano apresentado acima, é fácil encontrar contra-exemplos para esta conjectura em qualquer dimensão  $n > 2$ :

$$G_a(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(-\frac{kx_2^3}{1+x_1^2+x_2^2} - ax_1, -\frac{kx_1^3}{1+x_1^2+x_2^2} - ax_2, cx_3, \dots, cx_n\right),$$

para  $a > 0$  pequeno,  $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$  e  $c \in (0, 1)$ .

Antes de prosseguir no estudo da Conjectura DM-Y, faz-se necessário fixar as

definições de “atrator local” e “atrator global”.

Nas definições a seguir,  $f$  denota uma aplicação diferenciável do plano nele mesmo,  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana sobre  $\mathbb{R}^2$ , e se  $S \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\text{int}(S)$  denota o conjunto dos pontos interiores de  $S$ , isto é:  $\text{int}(S) = \{p \in S \mid \text{existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } B(p, \epsilon) \subset S\}$ .

**Definição 2.1.3** Dizemos que a origem  $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$  é um atrator local para  $f$  caso exista um disco fechado  $D$ , centrado na origem, tal que  $f(D) \subset \text{int}(D)$  e  $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(D) = \{O\}$ .

**Definição 2.1.4** Definimos o conjunto  $\omega$ -limite de um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  - denotado por  $\omega(p)$  - como o conjunto (possivelmente vazio) dos pontos  $x \in \mathbb{R}^2$  para os quais existe uma seqüência de inteiros  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  tendendo para  $+\infty$ , tal que  $f^{n_k}(p) \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Dizemos que a origem  $O \in \mathbb{R}^2$  é um atrator global para  $f$  caso seja um atrator local, e  $\omega(p) = \{O\}$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ .

Finalmente, chamamos um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  de atrator global para  $f$ , caso para alguma vizinhança compacta  $K \subset \mathbb{R}^2$  de  $S$ , tenhamos:

1.  $\omega(p) \subset S$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ ,
2.  $f(K) \subset \text{int}(K)$ , e
3.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(K) = S$ .

**Definição 2.1.5** Dizemos que o infinito é um repulsor caso exista um número real  $R > 0$  para o qual o disco ao redor do infinito  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq R\}$  satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(D) = \emptyset$ , e
- (ii)  $f^{-1}(D) \subset \text{int}(D)$ .

Visto que o contra-exemplo de Cima, Gasull e Mañosas apresenta órbitas tendendo para o infinito, Alarcón, Guíñez e Gutierrez [3] adicionaram duas hipóteses ao enunciado da Conjectura DM-Y, na tentativa de obter uma proposição verdadeira acerca dos difeomorfismos planares:

**Versão Modificada da Conjectura DM-Y** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  que **preserva orientação**, e que satisfaz  $f(O) = O$ . Suponha também que para todo ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  todos os autovalores da matriz derivada de  $f$  em  $p$  possuem módulo menor que um e que **o infinito é repulsor**. Então a origem é um atrator global do sistema dinâmico discreto gerado por  $f$ .

Ao longo deste texto, nos referimos a esta conjectura como Conjectura DM-Y Modificada. Em [3], Alarcón, Guiñez e Gutierrez demonstram que mesmo a Conjectura DM-Y Modificada possui um contra-exemplo, cuja construção é inspirada no contra-exemplo de Cima, Gasull e Mañosas.

A seguir esboçaremos a construção do contra-exemplo de Alarcón, Guiñez e Gutierrez.

**Lema 2.1.6** *Sejam  $R > 0$ ,  $C > \frac{1}{2}$ , e  $0 < \epsilon < \frac{1}{8C}$ . Então existe uma aplicação suave  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [\frac{1}{2C}, 1]$  tal que*

1.  $\phi(r) = 1$ , para todo  $r \in [0, R]$ ,
2.  $\phi'(r) \leq 0$  e  $|\phi'(r)r| < \epsilon$ , para todo  $r \in [0, \infty)$ , e
3. existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\phi(r) = \frac{1}{2C}$ , para todo  $r > R + N$ .

Note que se  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é da forma  $H(x, y) = (\phi(x^2 + y^2)x, \phi(x^2 + y^2)y)$ , então  $H|_{B(O, R+1)^c}$  é uma contração.

Alarcón, Guiñez e Gutierrez mostram que para  $1 < k < 1.01$ ,  $R = \frac{2}{\sqrt{k-1}}$ ,  $C > 0$  e  $0 < \epsilon < \frac{1}{8C}$ , temos que para  $a = a(k, C, \epsilon) > 0$  pequeno o suficiente, a aplicação  $f_a = H \circ G_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y Modificada, lembrando que  $G_a = (-\frac{ky^3}{1+x^2+y^2} - ax, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} - ay)$ . O difeomorfismo  $f_a$  é um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y Modificada, visto que a dinâmica de  $f_a$  restrita à bola  $B(O, R)$  coincide com a dinâmica de  $G_a$ , e que existe uma órbita de período quatro para  $G_a$  em  $B(O, R)$ . Além disto,  $f_a$  possui uma órbita periódica do tipo poço de período quatro.

Ao longo deste texto, estudaremos a dinâmica dos difeomorfismos que satisfazem as hipóteses da Conjectura DM-Y Modificada, mas não têm a origem como atrator global. Veremos que neste caso, existe um atrator global contendo a origem - denotado aqui por  $\Sigma$  - cuja estrutura dinâmica será estudada na próxima seção.

## 2.2 O conjunto $\Sigma$

Esta seção é dedicada ao estudo das propriedades básicas do seguinte conjunto:

$$\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(D),$$

onde  $D = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \geq R\}$ , como na Definição 2.1.5, e  $f$  é um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y Modificada (como por exemplo, a aplicação  $f_a$  definida por Alarcón, Guíñez e Gutierrez). Veremos que  $\Sigma$  é o atrator global associado a  $f$ .

**Observação 2.2.1** *Supomos que  $\mathbb{R}^2$  está mergulhado na esfera de Riemann  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , que denotaremos por  $\hat{\mathbb{C}}$ , e utilizaremos  $\partial S$  para denotar a fronteira de um conjunto  $S \subset \hat{\mathbb{C}}$ .*

O seguintes resultados elementares encontram-se em [11]:

**Proposição 2.2.2** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  uma seqüência crescente de abertos simplesmente conexos. Então a união  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  é um aberto simplesmente conexo.*

**Proposição 2.2.3** *Seja  $V \subset \hat{\mathbb{C}}$  uma vizinhança do infinito. Se  $V$  é simplesmente conexa em  $\hat{\mathbb{C}}$ , então o seu complementar é um subconjunto conexo de  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

**Observação 2.2.4** *Ao longo deste texto utilizaremos diversas vezes o seguinte resultado clássico, que pode ser encontrado no livro de Topologia Algébrica de Spanier [24]:*

**Teorema da Curva de Jordan** *Seja  $J \subset \mathbb{R}^2$  um círculo topológico. Então o complementar de  $J$  em  $\mathbb{R}^2$  é a união disjunta de dois abertos conexos por caminhos que possuem  $J$  como fronteira comum. Além disto, apenas um destes abertos é limitado.*

*A componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus J$  é chamada interior de  $J$ , e a indicaremos por  $\text{Int}(J)$ . Analogamente, chamamos de exterior de  $J$  a única componente ilimitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus J$ , que denotaremos por  $\text{Ext}(J)$ .*

**Observação 2.2.5** *Notemos que  $\text{Int}(J)$  é um aberto não-vazio, enquanto  $\text{int}(J)$  é o conjunto vazio. Apesar de ambos conjuntos serem chamados de interior de  $J$ , sempre que nos referirmos ao interior de uma curva de Jordan, estaremos fazendo menção ao aberto não-vazio  $\text{Int}(J)$ .*



**Definição 2.2.6** Dizemos que um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  é um continuum, caso  $S$  seja conexo, compacto e não-vazio. Se  $S$  contém mais de um ponto, dizemos que  $S$  é um continuum não-degenerado. Finalmente, se  $T \subset S$  é um continuum, dizemos que  $T$  é um subcontinuum de  $S$ .

**Definição 2.2.7** Definimos a bacia de atração da origem como sendo o conjunto  $\mathcal{B}(O) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(p) = O\}$ .

**Definição 2.2.8** Dizemos que um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  é invariante caso  $f(S) \subset S$ .

**Observação 2.2.9** A bacia de atração da origem,  $\mathcal{B}(O)$ , é invariante.

**Proposição 2.2.10**  $\Sigma$  é um continuum invariante.

**Demonstração:**

Primeiramente observamos que como  $f$  é um homeomorfismo para o qual o infinito é repulsor, existe  $R > 0$  tal que se  $D = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \geq R\}$ , então  $f^n(D)$  está contido no interior de  $f^{n+1}(D)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sendo assim,  $\{f^n(D)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência crescente de subconjuntos fechados de  $\mathbb{R}^2$ .

Como  $\partial f(D)$  é uma curva de Jordan contida no interior de  $\partial D$ , existe um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  satisfazendo  $D \subset U \subset f(D)$ .

Segue que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(f(D)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(D) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(D) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U),$$

onde a segunda igualdade segue do fato de  $\{f^n(D)\}_{n=0}^{\infty}$  ser uma seqüência crescente de conjuntos. Portanto,  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ .

Lembrando que

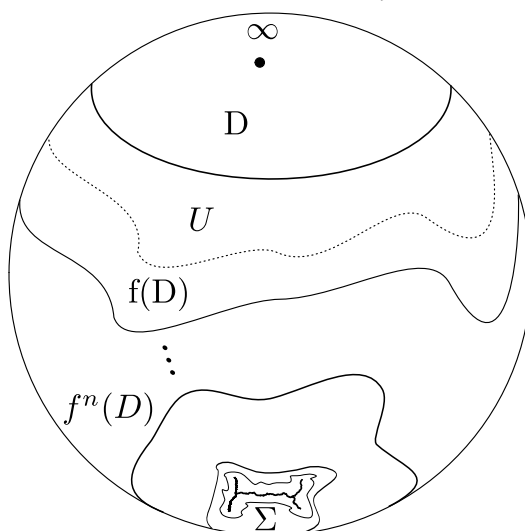
$$\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(D),$$

temos que  $\Sigma = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^2 \setminus f^n(U)$ , onde a intersecção é decrescente, visto que é o complementar de uma união crescente.

Além disto, para qualquer  $n \geq 0$ , temos que  $\mathbb{R}^2 \setminus f^n(U)$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2 \setminus D = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| < R\}$ , que é fechado e não-vazio. Desta forma,  $\Sigma$  é uma intersecção de compactos não-vazios, e sendo assim, é ele próprio um compacto não-vazio.

Para cada  $n \geq 0$  natural, temos que  $f^n(U) \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  é um disco ao redor do infinito, e portanto é um vizinhança simplesmente conexa do infinito em  $\hat{\mathbb{C}}$ . Pela Proposição 2.2.2, temos que  $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$  é uma vizinhança aberta e simplesmente conexa do infinito em  $\hat{\mathbb{C}}$ , e pela Proposição 2.2.3, segue que o seu complementar,  $\Sigma$ , é conexo. Portanto,  $\Sigma$  é um continuum.

Figura 1: O conjunto  $\Sigma$  visto como um subconjunto da esfera de Riemann.



Mostremos que  $f(\Sigma) = \Sigma$ . Temos que

$$f(\Sigma) = f(\mathbb{R}^2) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(D) = \Sigma,$$

pois  $D \subset f(D)$ . □

**Observação 2.2.11** A proposição acima mostra que  $\Sigma$  é um continuum dado pela intersecção enumerável de bolas fechadas do plano. Vimos que todo continuum dado pela intersecção de bolas fechadas do plano é um subconjunto conexo da esfera de Riemann cujo complementar é simplesmente conexo. No entanto, tal intersecção pode não ser conexa por caminhos, como mostra o exemplo a seguir:

Sejam  $A = \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1]\}$ , e  $B$  o gráfico  $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1]\}$ .

$A \cup B$  possui exatamente duas componentes conexas por caminho:  $A$  e  $B$ . Portanto,  $A \cup B$  não é um espaço conexo por caminhos.

Lembramos que  $D$  denota o disco  $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \geq R\}$ , onde  $R > 0$ , como na definição 2.1.5. Denotaremos por  $C$  a fronteira de  $D$ .

**Lema 2.2.12**  $\Sigma$  é um atrator global, e se  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $\omega(p)$  é um subconjunto não-vazio de  $\Sigma$ .

**Demonstração:**

O infinito é repulsor, portanto,  $D \subset f(\text{int}(D))$ .

Como  $f$  é um homeomorfismo, temos que  $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus f(D)} \subset \overline{\mathbb{R}^2 \setminus D} = \mathbb{R}^2 \setminus D$ . Assim, para cada  $n \geq \mathbb{N}$ , temos que

$$\overline{\mathbb{R}^2 \setminus f^{n+1}(D)} \subset \mathbb{R}^2 \setminus f^n(D). \quad (2.1)$$

(i) Provaremos a seguir que  $\omega(p) \subset \Sigma$ . Seja  $q \in \omega(p)$ . Como o infinito é repulsor,  $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D) = \emptyset$ . Portanto,  $\bigcup_{n \geq 0} (f^{-n}(D))^c = \mathbb{R}^2$ .

Logo existe  $l \geq 0$  tal que  $f^n(p) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ , para todo  $n \geq l$ . Portanto,  $q \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ , ou ainda,  $\omega(p) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ .

Como  $f(\omega(p)) = \omega(p)$ , temos que  $\omega(p) \subset \bigcap_{n \geq 0} f^n(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \Sigma$ , como queríamos mostrar.

(ii) Prosseguimos mostrando que se  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $\omega(p) \neq \emptyset$ . Como visto em (i), existe um natural  $l \geq 0$  tal que  $f^l(p) \in \mathbb{R}^2 \setminus D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < R\}$ , um conjunto  $f$ -invariante e limitado. Isto implica que  $\omega(p) \neq \emptyset$ , visto que  $\{f^n(p)\}_{n \geq 0}$  contém ao menos um ponto de acumulação em  $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus D}$ .

(iii) Resta mostrar que existe uma vinhança compacta  $K$  de  $\Sigma$  tal que  $f(K) \subset \text{int}(K)$  e  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(K) = \Sigma$ . Seja  $K = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus D}$ . Por (2.1), temos que  $f(K) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus f(D)} \subset \mathbb{R}^2 \setminus D = \text{int}(K)$ , visto que  $K$  é um disco cuja fronteira é uma curva de Jordan.

Além disto, como visto na Proposição 2.2.10,  $\Sigma = \bigcap_{n \geq 0} f^n(K)$ , provando assim que  $\Sigma$  é um atrator global.  $\square$

**Proposição 2.2.13**  $\Sigma$  possui interior vazio.

**Demonstração:**

A condição sobre os autovalores da derivada de  $f$  implica que  $f$  é uma aplicação dissipativa, ou seja; se  $m$  denota a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^2$ , então  $m(f(A)) \leq m(A)$ , para qualquer conjunto mensurável no sentido de Lebesgue  $A \subset \mathbb{R}^2$  com medida finita, sendo que a igualdade vale se, e somente se, a medida de  $A$  é zero. Como  $\Sigma$  é uma intersecção enumerável de compactos,  $\Sigma$  é um conjunto mensurável de medida finita. Como  $f(\Sigma) = \Sigma$ , segue que  $m(f(\Sigma)) = m(\Sigma)$ , e portanto,  $m(\Sigma) = 0$ .  $\square$

**Lema 2.2.14** *Se  $p \in \Sigma$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(C), p) = 0$ .*

**Demonstração:**

Fixemos  $p \in \Sigma$ . Temos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \text{Int}(f^n(C))$  e  $\text{Int}(f^{n+1}(C)) \subset \text{Int}(f^n(C))$ . Desta forma,

$$d(f^{n+1}(C), p) < d(f^n(C), p), \quad (2.2)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Suponha que  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(C), p)$  é positivo. Logo  $B(p, \frac{c}{2}) \subset \text{Int}(f^n(C))$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Desta forma,  $B(p, \frac{c}{2}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus f^n(D)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Segue que  $B(p, \frac{c}{2}) \subset \Sigma$ . Chegamos a uma contradição, visto que  $\Sigma$  possui interior vazio.  $\square$

**Observação 2.2.15** *Lembramos que a topologia de Hausdorff sobre o conjunto  $\mathcal{K} = \{K \mid K \text{ é subconjunto compacto de } \mathbb{R}^2\}$  é a topologia induzida pela métrica*

$$\delta(K_1, K_2) = \max\{\sup_{x \in K_1} d(x, K_2), \sup_{x \in K_2} d(x, K_1)\},$$

onde  $K_1, K_2 \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ , e  $d(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y)$  para  $S \subset \mathbb{R}^2$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ .

**Proposição 2.2.16** *A seqüência de curvas de Jordan  $\{f^n(C)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tende a  $\Sigma$  na topologia de Hausdorff.*

**Demonstração:**

De acordo com a definição da topologia de Hausdorff, devemos mostrar que

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Sigma} d(x, f^n(C)) = 0$ , e

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in f^n(C)} d(x, \Sigma) = 0$ .

Primeiramente, demonstraremos a afirmação (1). Sejam  $p \in \Sigma$  e  $\epsilon > 0$ . Pelo Lema 2.2.14, existe  $N(p) \in \mathbb{N}$  tal que  $d(p, f^{N(p)}(C)) < \epsilon$ .

Se  $q \in \Sigma$  está suficientemente próximo de  $p$ , temos  $d(q, f^{N(p)}(C)) < \epsilon$ . Segue da compacidade de  $\Sigma$  que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x, f^N(C)) < \epsilon$  para cada  $x \in \Sigma$ . A partir da desigualdade (2.2), temos que  $d(x, f^n(C)) < \epsilon$ , para todo  $n \geq N$ , provando assim a afirmação (1).

Consideremos agora a afirmação (2). Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Sigma \subset \text{Int}(f^{n+1}(C)) \subset \text{Int}(f^n(C)),$$

portanto

$$\sup_{x \in f^n(C)} d(x, \Sigma) > \sup_{x \in f^{n+1}(C)} d(x, \Sigma).$$

Logo o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in f^n(C)} d(x, \Sigma)$  existe. Suponha - por absurdo - que este limite é um número positivo, digamos  $c > 0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como  $f^n(C)$  é compacto, o supremo  $\sup_{x \in f^n(C)} d(x, \Sigma)$  é atingido em  $f^n(C)$ . Então existe uma seqüência crescente de naturais  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , bem como uma seqüência de pontos  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C$  tais que  $d(f^{n_k}(p_k), \Sigma) \geq \frac{c}{2}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Como  $\{f^{n_k}(p_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  está contido no conjunto limitado  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ , podemos supor - tomando uma subseqüência se necessário - que  $\{f^{n_k}(p_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge para um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$ , e  $d(p, \Sigma) \geq \frac{c}{2}$ .

Como  $p \in \text{Int}(f^{n_k-1}(C))$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \Sigma$ , e chegamos a uma contradição. Portanto  $c = 0$ , como queríamos mostrar.  $\square$

**Proposição 2.2.17** *O conjunto  $\Sigma$  é um continuum não-degenerado.*

**Demonstração:**

Suponha, por absurdo que  $\Sigma$  se reduz a um ponto. Como a origem pertence ao interior de  $f^n(C)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\Sigma = \{O\}$ . Pelo Teorema de Hartman-Grobman, a origem é um atrator local.

Segue do Lema 2.2.12 que para qualquer ponto  $p \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega(p)$  é um subconjunto não-vazio de  $\Sigma$ . Portanto,  $\omega(p) = \{O\}$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ , contradizendo o fato da origem não ser atrator global. Portanto,  $\Sigma$  é um continuum não-degenerado.  $\square$

**Definição 2.2.18** *Seja  $A$  uma matriz quadrada real. Definimos o espectro de  $A$  (denotado por  $\text{Spec}(A)$ ), como o conjunto de todos os autovalores de  $A$ . De forma análoga, se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação diferenciável, definimos  $\text{Spec}(f)$  como sendo o conjunto de todos os autovalores de  $D_p f$ , com  $p$  variando em  $\mathbb{R}^2$ .*

No artigo [13], Fernandes, Gutierrez e Rabanal demonstram o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.19** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação diferenciável (não necessariamente de classe  $C^1$ ) satisfazendo  $\text{Spec}(f) \cap [0, \epsilon) = \emptyset$ , para algum  $\epsilon > 0$ . Então  $f$  é uma aplicação injetiva.*

**Corolário 2.2.20** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação diferenciável (não necessariamente de classe  $C^1$ ) satisfazendo  $\text{Spec}(f) \cap [1, 1 + \epsilon) = \emptyset$ , para algum  $\epsilon > 0$ . Então  $|\text{Fix}(f)| \leq 1$ , onde  $\text{Fix}(f)$  denota o conjunto dos pontos fixos de  $f$ .*

**Demonstração:**

Como  $\text{Spec}(f) \cap [1, 1 + \epsilon) = \emptyset$ , para algum  $\epsilon > 0$ , temos que  $f - Id$  é diferenciável, e o seu espectro é disjunto de  $[0, \epsilon)$ , onde  $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  denota a aplicação identidade do plano. Portanto  $f - Id$  é uma aplicação injetiva, ou de forma equivalente,  $\text{Fix}(f)$  é um conjunto unitário ou vazio.  $\square$

**Observação 2.2.21** *Aplicando o corolário acima a  $f$ , a condição  $\text{Spec}(f) \subset B(0, 1)$  implica que  $\text{Fix}(f) = \{O\}$ .*

**Observação 2.2.22** *Como  $\text{Spec}(f) \subset B(0, 1)$ , qualquer compacto  $f$ -invariante possui medida de Lebesgue nula, o que implica que  $\Sigma$  possui interior vazio. Além disto, como  $\Sigma$  é fechado, segue que  $\partial\Sigma = \Sigma$ .*

A seguinte proposição sumariza os resultados desta seção:

**Proposição 2.2.23** *Seja  $f$  um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y Modificada. Então:*

- *Existe um atrator global  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  que é um continuum não-degenerado, invariante, e tem medida zero,*
- *$\omega(p)$  é um subconjunto não-vazio de  $\Sigma$ , para cada  $p \in \mathbb{R}^2$ ,*
- *Na topologia de Hausdorff,  $\Sigma$  é o limite da seqüência de curvas de Jordan  $\{f^n(C)\}_{n \geq 1}$ , e*
- *$\text{Fix}(f) = \{O\}$ .*

## 2.3 Acessibilidade e Pontes

**Definição 2.3.1** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Um ponto  $p$  em  $S$  é dito ser acessível (com relação a  $S$ ) caso exista um mergulho topológico  $\gamma : [a, b] \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus S) \cup \{p\}$  tal que  $\gamma(a) = p$ , onde  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ . Neste caso dizemos que  $\gamma$  é um endcut com ponto base  $p$ .*

**Observação 2.3.2** *Se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus S) \cup \{p\}$  denota um endcut de  $\Sigma$ , também chamaremos sua imagem de um endcut de  $\Sigma$ .*

O conjunto dos pontos acessíveis de um subconjunto fechado  $S \subset \mathbb{R}^2$  é denso em  $\partial S$ . De fato, fixemos um ponto  $x \in \partial S$  e  $\epsilon > 0$ . Como  $x \in \partial S$ , existe  $y \in B(x, \epsilon) \setminus S$ . Seja  $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização do segmento de reta ligando  $x$  a  $y$ , de maneira que  $l(0) = x$ .

Seja  $t_0 = \max\{t \geq 0 \mid l(t) \in S\}$ . Como  $l(0) \in \partial S$  e  $l(1) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ , temos que  $t_0 \in [0, 1)$  e  $l([t_0, 1]) \subset \mathbb{R}^2 \setminus S$ . Portanto,  $l([t_0, 1])$  é um endcut de  $S$ , com ponto base em  $l(t_0) \in B(x, \epsilon)$ , como queríamos mostrar.  $\square$

No que segue, consideramos que todos os endcuts possuem ponto base em  $\Sigma$ .

**Observação 2.3.3** *Tanto  $\Sigma$  quanto o seu complementar em  $\mathbb{R}^2$  são  $f$ -invariantes, portanto, se um endcut  $\gamma$  tem ponto base  $p \in \Sigma$ , temos que  $f(\gamma)$  é um endcut com ponto base  $f(p) \in \Sigma$ . Desta forma, o conjunto de pontos acessíveis de  $\Sigma$  é um subconjunto  $f$ -invariante e denso em  $\Sigma$ .*

**Proposição 2.3.4** *Sejam  $n \geq 2$  e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts de  $\Sigma$ . Então:*

- (i) *Existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_i \cap f^M(C) \neq \emptyset$ , para quaisquer  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $M \geq L$ . Denotaremos o menor  $L$  satisfazendo esta propriedade por  $L(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ .*
- (ii) *Se os pontos  $\gamma_1(0), \dots, \gamma_n(0)$  são distintos e  $\epsilon > 0$  for pequeno o suficiente, então  $\gamma_1|_{[0, \epsilon]}$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_n|_{[0, \epsilon]}$  são endcuts dois a dois disjuntos.*

**Demonstração:**

(i) Seja  $r = \min_{i=1, \dots, n} d(\gamma_i(1), \Sigma) > 0$ . Pela Proposição 2.2.16, existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que se  $M \geq L$ , então  $\delta(f^M(C), \Sigma) < r$ . Conseqüentemente, para todos  $M \geq L$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f^M(C)$  é uma curva de Jordan contendo  $\gamma_i(0) \in \gamma_i$  no seu interior, e  $\gamma_i(1) \in \gamma_i$  no seu exterior. Como cada endcut  $\gamma_i$  é conexo, cada  $\gamma_i$  intersecta  $f^M(C)$ , provando assim o item (i).

(ii) Fixemos  $\rho = \frac{1}{3} \min_{1 \leq i < j \leq n} d(\gamma_i(0), \gamma_j(0))$ . Como  $\gamma_i(0) \neq \gamma_j(0)$ , se  $i$  for diferente de  $j$ ,  $\rho > 0$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\gamma_i([0, 1])$  não esteja contido em  $B(\gamma_i(0), \rho)$ , seja  $\epsilon_i = \min\{t > 0 \mid \gamma_i(t) \notin B(\gamma_i(0), \rho)\}$ . Se  $\gamma_i([0, 1]) \subset B(\gamma_i(0), \rho)$ , definimos  $\epsilon_i = 1$ . Finalmente, fixando  $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \epsilon_i$ , temos que os endcuts  $\gamma_1|_{[0, \epsilon]}, \dots, \gamma_n|_{[0, \epsilon]}$  são disjuntos entre si, visto que estão contidos em bolas mutuamente disjuntas.  $\square$

**Observação 2.3.5** *Supomos que todo círculo topológico  $E \subset \mathbb{R}^2$  está parametrizado no intervalo  $[0, 1]$ , e possui a orientação positiva usual. Isto significa que se  $D(E)$  é um disco limitado por  $E$  em  $\mathbb{R}^2$ , então  $E$  é parametrizado no sentido anti-horário com respeito a um ponto no interior de  $D(E)$ . Além disto, supomos que todo arco topológico também está parametrizado no intervalo  $[0, 1]$ .*

Seja  $J$  um círculo topológico, ou um arco orientado. Dados  $p$  e  $q$ , dois pontos distintos de  $J$ , definimos a seguinte notação:

- $[p, q]_J$  denota o sub-arco fechado de  $J$  com extremo inicial  $p$  e extremo final  $q$ ,
- $[p, q)_J$  denota o sub-arco  $[p, q]_J \setminus \{q\}$ ,
- $(p, q]_J$  denota o sub-arco  $[p, q]_J \setminus \{p\}$ , e
- $(p, q)_J$  denota o sub-arco  $[p, q]_J \setminus \{p, q\}$ .

Seja  $I$  um dos sub-arcos acima. Em todos os quatro casos acima, diremos que  $p$  é o extremo inicial de  $I$ ,  $q$  é o extremo final de  $I$ , e que  $p$  e  $q$  são os pontos extremos de  $I$ .

Supomos também que cada um dos intervalos definidos acima está munido da orientação induzida por  $J$ . Omitiremos o índice  $J$  quando a curva  $J$  estiver implícita.

Portanto, se  $J$  denota uma curva de Jordan, então  $(p, q)_J \cap (q, p)_J = \emptyset$ .

**Definição 2.3.6** *Sejam  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um endcut. Dizemos que um endcut  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma extensão de  $\gamma$  caso  $\Gamma([0, 1)) \subset \text{Int}(C)$ ,  $\Gamma([0, \frac{1}{2}]) = \gamma([0, 1])$ , e  $\Gamma(1) \in C$  (ver a Figura 2.3).*

**Proposição 2.3.7** *Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  dois endcuts disjuntos, e  $L = L(\gamma, \eta)$  como na definição anterior. Então existem  $\Gamma$  e  $H$ , extensões disjuntas de  $\gamma$  e  $\eta$ .*



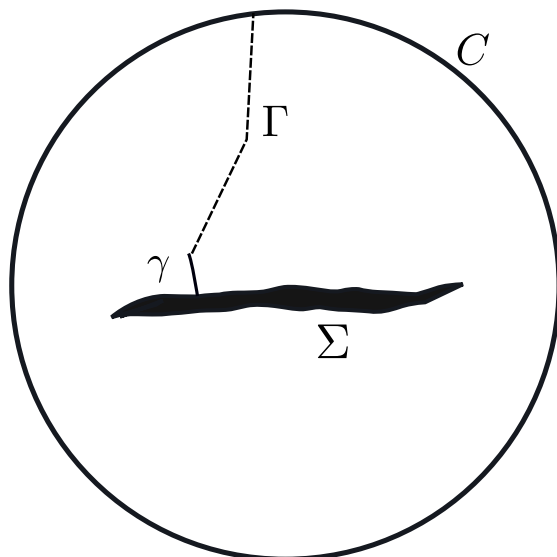


Figura 2:

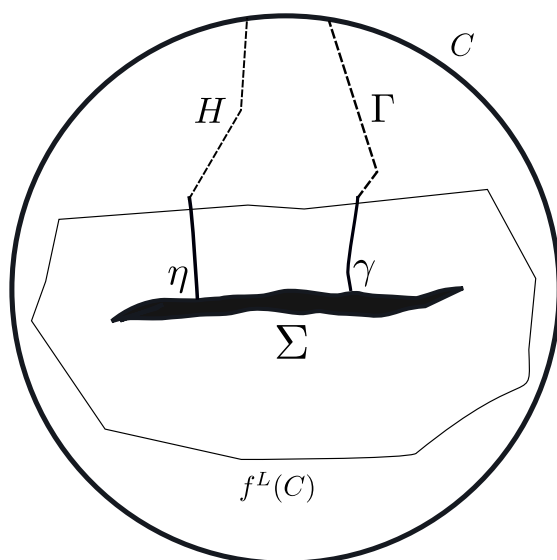


Figura 3:

Esta situação está ilustrada na Figura 2.3.

Como  $\Gamma((\frac{1}{2}, 1]) \cup \Gamma((\frac{1}{2}, 1]) \subset \text{Ext}(f^L(C))$ , temos que  $\Gamma((\frac{1}{2}, 1]) \cap f^N(C) = \emptyset$ , para todo  $N \geq L$ .

**Definição 2.3.8** *Sejam  $p \neq q$  pontos de  $\partial U$ . Dizemos que um mergulho topológico  $l : [0, 1] \rightarrow U \cup \{p, q\}$  é um crosscut de  $U$ , ou simplesmente um crosscut caso  $l(0) = p$  e  $l(1) = q$ . Caso  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$ , dizemos que  $l$  é um crosscut de  $\Sigma$ .*

O aberto  $U \setminus l([0, 1])$  se decompõe como a união de duas componentes conexas  $U_1 \cup U_2$ . Denotaremos por  $B(l)$  a componente conexa de  $U \setminus l([0, 1])$  que não contém o ponto no infinito. Portanto, se  $l$  é um crosscut de  $\Sigma$ ,  $B(l)$  é a componente conexa limitada de  $\mathbb{C} \setminus (\Sigma \cup l([0, 1]))$  em  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Sejam  $l$  e  $l'$  dois crosscuts de  $U$ . Dizemos que  $l'$  separa  $l$  caso  $B(l') \subset B(l)$ .

**Definição 2.3.9** *Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  dois endcuts disjuntos. Seja também  $N \geq L(\gamma, \eta)$ , onde  $L(\gamma, \eta)$  está definido como na Proposição 2.3.4. Supomos que a curva  $f^N(C)$  está parametrizada no intervalo  $[0, 1]$ , e no sentido anti-horário. Suponha que  $(a, b)$  é um arco aberto em  $f^N(C)$ , de forma que:*

- $a \in \gamma$ ,
- $b \in \eta$ ,
- $(a, b) \cap (\gamma \cup \eta) = \emptyset$ , e
- *dadas duas extensões disjuntas  $\Gamma$  e  $H$ , temos que o crosscut  $[\gamma(0), a]_{\gamma} \cup (a, b) \cup [\eta(0), b]_{\eta}$  separa o crosscut  $\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0, 1])$ , onde  $[\Gamma(1), H(1)]$  denota o arco orientado em  $C$  com extremo inicial em  $\Gamma(1)$  e extremo final em  $H(1)$ .*

Nestas condições, diremos que  $(a, b) \subset f^N(C)$  é uma ponte de  $\gamma$  para  $\eta$ .

Como  $\gamma$  e  $\eta$  são compactos disjuntos, temos que  $\delta(\gamma, \eta) > 0$ . Além disto,  $f^N(C)$  possui comprimento finito. Portanto,  $f^N(C)$  contém no máximo um número finito de pontes de  $\gamma$  para  $\eta$ .

Denotamos por  $r \in \mathbb{N}$  o número de pontes de  $\gamma$  para  $\eta$ . Segue que  $r \geq 1$ , já que  $f^N(C)$  intersecta  $\gamma$  e  $\eta$ .

Assim, podemos parametrizar  $f^N(C)$  de maneira que existam números reais  $0 \leq s_1 < t_1 < \dots < s_r < t_r < 1$  tais que para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $f^N(C)((s_i, t_i))$  é uma ponte de  $\gamma$  para  $\eta$ , e qualquer ponte de  $\gamma$  para  $\eta$  possui extremos em  $\{\gamma(s_1), \eta(t_1), \dots, \gamma(s_r), \eta(t_r)\}$ .

Como  $f^N(C)$  é um círculo topológico, ele não possui auto-intersecções, e portanto, duas pontes distintas de  $\gamma$  para  $\eta$  são disjuntas.

Como existem exatamente  $r$  pontes de  $\gamma$  para  $\eta$  em  $f^N(C)$ , existe um único  $l \in \{1, \dots, r\}$  para o qual

$$[\gamma(0), f^N(C)(s_l)]_\gamma \subset [\gamma(0), f^N(C)(s_j)]_\gamma,$$

para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

**Definição 2.3.10** Denotaremos por  $A(\gamma, \eta, N)$  a “ponte mais baixa”  $f^N(C)((s_l, t_l))$ . Como  $C$  é a fronteira do disco topológico  $D$  (como na definição de “infinito repulsor”), temos que  $A(\gamma, \eta, N)$  de fato depende apenas dos endcuts  $\gamma, \eta$ , e de  $N \geq L(\gamma, \eta)$ . Além disto, temos que  $A(\gamma, \eta, N) \cap A(\eta, \gamma, N) = \emptyset$ .

**Definição 2.3.11** Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  endcuts disjuntos, e  $N \geq L(\gamma, \eta)$ . Denotamos por  $D(\gamma, \eta, N)$  o aberto  $B(\gamma \cup A(\gamma, \eta, N) \cup \eta)$ .

**Corolário 2.3.12**  $D(\gamma, \eta, M) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  é um disco topológico cuja fronteira  $\partial D(\gamma, \eta, M)$  se escreve como a seguinte união disjunta (ver a Figura 1.2):

$$(\gamma(0), \alpha^M]_\gamma \cup A(\gamma, \eta, M) \cup [\beta^M, \eta(0))_\eta \cup \Sigma',$$

onde  $\Sigma'$  é um subcontinuum não-degenerado de  $\Sigma$ .

**Corolário 2.3.13**

$$\overline{\partial D(\gamma, \eta, M) \setminus \Sigma} = \gamma \cup A(\gamma, \eta, M) \cup \eta.$$

**Definição 2.3.14** Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  e  $n \geq 2$  um inteiro. Dizemos que  $B$  separa  $A$  em  $n$  componentes conexas - ou simplesmente que  $B$  separa  $A$  - caso  $A \setminus B$  possua  $n$  componentes conexas.

**Proposição 2.3.15** Seja  $M' > M \geq L(\gamma, \eta)$  em  $\mathbb{N}$ . Então:

(a)  $A(\gamma, \eta, M')$  separa  $D(\gamma, \eta, M)$  em duas componentes conexas.

(b) A única componente conexa de  $D(\gamma, \eta, M) \setminus A(\gamma, \eta, M')$  cuja fronteira intersecta  $\Sigma$  é  $D(\gamma, \eta, M')$ . Portanto,  $D(\gamma, \eta, M') \subset D(\gamma, \eta, M)$  e  $\Sigma \cap \overline{D(\gamma, \eta, M')} = \Sigma \cap \overline{D(\gamma, \eta, M)}$ .

**Demonstração:**

Demonstração do item (a) Sejam  $\Gamma, H$  extensões como na definição de  $A(\gamma, \eta, L)$ . Então o crosscut  $\gamma \cup A(\gamma, \eta, L) \cup \eta$  separa o crosscut  $\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0, 1])$ .

Como  $N > L$ ,  $f^N(C) \cap (\Gamma([0, 1]) \cup H([0, 1])) \subset (\gamma([0, 1]) \cup \eta([0, 1]))$ . Além disto,  $f^N(C) \cap C = \emptyset$ .

Portanto,  $f^N(C)$  intersecta o crosscut  $\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0, 1])$  apenas em  $\gamma \cup \eta$ .

Sejam  $\Gamma_N$  e  $H_N$  extensões como na definição de  $A(\gamma, \eta, N)$ .

Sabemos que  $A(\gamma, \eta, N)$  possui extremos em pontos distintos da fronteira de  $B(\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0, 1]))$ . Portanto,  $A(\gamma, \eta, N)$  divide o aberto  $B(\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0, 1]))$  em duas componentes.

Como  $A(\gamma, \eta, N) \cap (\gamma \cup f^L(C) \cup \eta \cup \Sigma) = \emptyset$ , temos que  $A(\gamma, \eta, N) \cap \partial D(\gamma, \eta, L) = \emptyset$ . Da conexidade de  $A(\gamma, \eta, N)$ , temos que  $A(\gamma, \eta, N)$  é um subconjunto do exterior ou do interior de  $D(\gamma, \eta, L)$ .

Mas  $A(\gamma, \eta, N)$  não está no exterior de  $D(\gamma, \eta, L)$ , pois divide o aberto  $B(\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0, 1]))$  em duas componentes, e intersecta a fronteira deste aberto apenas em  $\gamma \cup \eta$  (ver a Figura 3).

Portanto,  $A(\gamma, \eta, N)$  está no interior de  $D(\gamma, \eta, N)$ , e o divide em duas componentes conexas.

O item (b) segue do fato do conjunto  $C = \overline{D(\gamma_i, \gamma_j, M')} \setminus \Sigma$  ser um crosscut de  $\Sigma$ , e portanto, contém  $\Sigma'$  pertence ao fecho de  $B(C) = D(\gamma_i, \gamma_j, M')$ .  $\square$

**Corolário 2.3.16**

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \delta(\overline{A(\gamma, \eta, M)}, \Sigma') = 0.$$

**Proposição 2.3.17** *Sejam  $n \geq 3$  em  $\mathbb{N}$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts mutuamente disjuntos e  $L = L(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  como definido na Proposição 2.3.4.*

*Seja também  $\{i, j, k\} \subset \{1, \dots, n\}$ , com  $i$  distinto de  $j$  e tal que*

$$\gamma_k((0, \epsilon)) \subset D(\gamma_i, \gamma_j, M),$$

*para algum par  $(\epsilon, M)$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $M \geq L$  em  $\mathbb{N}$ .*

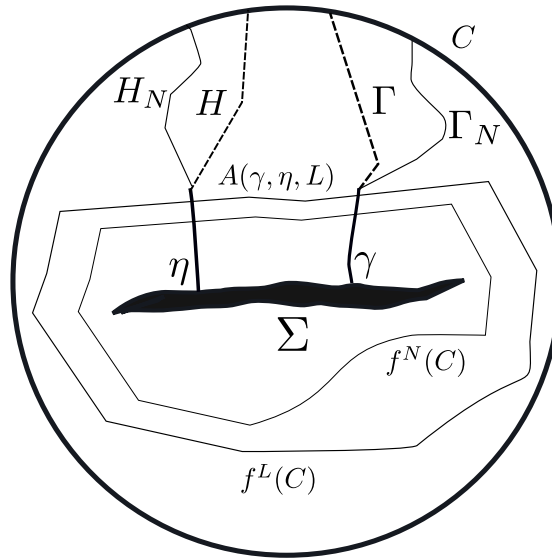


Figura 4:

Então, para cada  $M' > M$  em  $\mathbb{N}$  existe  $\epsilon' = \epsilon'(M') > 0$  tal que

$$\gamma_k((0, \epsilon')) \subset D(\gamma_i, \gamma_j, M').$$

### Demonstração:

Pela proposição anterior, se  $n \geq L$ ,  $\overline{D(\gamma_i, \gamma_j, n)} \cap \Sigma = \overline{D(\gamma_i, \gamma_j, L)} \cap \Sigma$  é um subcontinuum de  $\Sigma$  que denotaremos por  $\Sigma_j^i$ .

Fixemos os inteiros  $M' > M \geq 1$ . Como  $\gamma_k(0) \in \Sigma$  e  $A(\gamma_i, \gamma_j, M') \subset f^{M'}(C) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ , segue da compacidade de  $f^{M'}(C)$  que  $d = d(\gamma_k(0), A(\gamma_i, \gamma_j, M')) > 0$ . Seja  $\epsilon' \in (0, \epsilon)$  tal que

$$\gamma_k((0, \epsilon')) \subset B(\gamma_k(0), \frac{d}{2}).$$

Então  $\gamma_k((0, \epsilon')) \cap A(\gamma_i, \gamma_j, M') = \emptyset$ .

Pela Proposição 2.3.15, temos que  $A(\gamma_i, \gamma_j, M')$  separa  $D(\gamma_i, \gamma_j, M)$  em duas componentes conexas, denotadas por  $A$  e  $B$ . Como  $\gamma_k((0, \epsilon')) \cap A(\gamma_i, \gamma_j, M') = \emptyset$  e  $\gamma_k((0, \epsilon'))$  é conexo, segue que  $\gamma_k((0, \epsilon'))$  está contido na única componente conexa de  $D(\gamma_i, \gamma_j, M) \setminus A(\gamma_i, \gamma_j, M)$  cujo fecho intersecta  $\Sigma$ . Pelo item (b) da Proposição 2.3.15,  $\gamma_k((0, \epsilon')) \subset D(\gamma_i, \gamma_j, M')$ .  $\square$

As duas definições a seguir serão utilizadas no Capítulo 2 para definir o homeomorfismo  $\hat{f}$  sobre a compactificação por fins primos de  $\Sigma$ .

**Definição 2.3.18** Sejam  $n \geq 3$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts mutuamente disjuntos e  $L = L(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Seja também  $\{i, j, k\} \subset \{1, \dots, n\}$  com  $i$  distinto de  $j$ .

Dizemos que  $\gamma_k$  está entre  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  caso existam  $\epsilon > 0$  e  $M \geq L$ , tais que

$$\gamma_k((0, \epsilon)) \subset D(\gamma_i, \gamma_j, M).$$

Neste caso, utilizamos a seguinte notação:  $\gamma_j < \gamma_k < \gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ . Também dizemos que  $\gamma_k$  biparte  $\Sigma_j^i$ , onde  $\Sigma_j^i = \Sigma \cap \overline{D(\gamma_i, \gamma_j, M)}$  (ver a Figura 5).

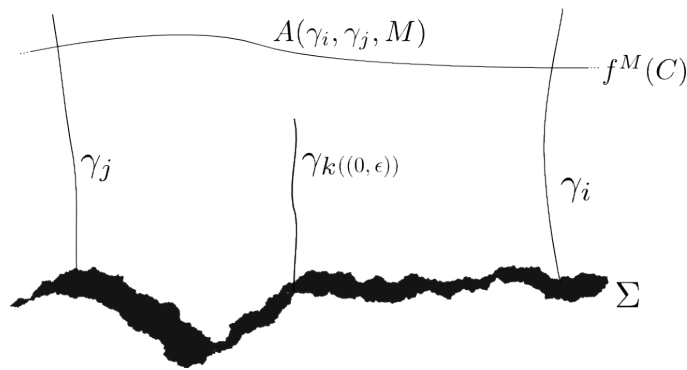


Figura 5:  $\gamma_j < \gamma_k < \gamma_i$ .

**Definição 2.3.19** Dizemos que  $\gamma_j$  é vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  caso não exista  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\gamma_j < \gamma_k < \gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .

**Observação 2.3.20** Se  $\gamma_j$  não for o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ , e  $N \geq L(\gamma_i, \gamma_{e(i)})$ , então existe uma seqüência de números reais  $\{t_n\}_{n \geq 1}$  tendendo a zero tal que  $\{\gamma_j(t_n)\}_{n \geq 1} \subset D(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N)^c$ . Em geral, se  $i, j, k$  são inteiros distintos entre si em  $\{1, \dots, n\}$ , e não vale  $\gamma_j < \gamma_k < \gamma_i$ , então existe uma seqüência de números reais  $\{t_n\}_{n \geq 1}$  tendendo a zero tal que  $\{\gamma_k(t_n)\}_{n \geq 1} \subset D(\gamma_i, \gamma_j, N)^c$ , onde  $N \geq L(\gamma_i, \gamma_k)$ .

**Proposição 2.3.21** Sejam  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  endcuts disjuntos,  $\{i, j, k\}$  inteiros distintos entre si em  $\{1, \dots, n\}$  e  $N \geq L(\gamma_i, \gamma_k)$ . Caso não valha  $\gamma_i < \gamma_j < \gamma_k$ , então existe  $\epsilon \in (0, 1)$  tal que  $\gamma_j((0, \epsilon)) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, N)^c$ .

Além disto, existe  $M > N$  tal que  $\gamma_j((0, 1]) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, M)^c$ .

**Demonstração:**

Seja  $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset (0, 1]$  uma seqüência de números reais tendendo a zero tal que  $\{\gamma_j(t_n)\}_{n \geq 1} \subset D(\gamma_k, \gamma_i, N)^c$ .

Como  $\gamma_j(0) \in \Sigma$  e  $A(\gamma_k, \gamma_i, N) \subset f^N(C)$ , se  $r = d(\gamma_j(0), A(\gamma_k, \gamma_i, N))$ , então  $r > 0$ . Sejam  $m \geq 1$  tal que  $\gamma_j((0, t_m]) \subset B(\gamma_j(0), \frac{r}{2})$  e  $\epsilon = t_m$ . Então  $\gamma_j((0, \epsilon)) \cap A(\gamma_k, \gamma_i, N) = \emptyset$ . Além disto, sabemos que  $\gamma_j((0, \epsilon)) \cap (\gamma_k \cup \gamma_i \cup \Sigma) = \emptyset$ . Como  $\gamma_j(t_m) \notin D(\gamma_k, \gamma_i, N)$ , segue da conexidade de  $\gamma_j((0, t_m])$ , e do Corolário 2.3.12, que  $\gamma_j((0, \epsilon]) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, N)^c$ , mostrando assim a primeira afirmação.

Sejam  $\epsilon$  e  $N$  como na primeira parte da demonstração. Sejam também  $\Sigma' = \Sigma \cap \overline{D(\gamma_k, \gamma_i, N)}$ ,

$$d = d(\gamma_j([\epsilon, 1]), \Sigma'),$$

e  $M \geq N$  tal que

$$\delta(\overline{A(\gamma_k, \gamma_i, M)}, \Sigma') < \frac{d}{2},$$

sendo que  $M$  existe pela Corolário 2.3.16.

Como  $\Sigma' = \Sigma \cap \overline{D(\gamma_k, \gamma_i, M)}$ , temos que  $\gamma_j([\epsilon, 1]) \cap A(\gamma_k, \gamma_i, M) = \emptyset$ .

Por outro lado, pela Proposição 2.3.15, temos que  $A(\gamma_k, \gamma_i, M) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, N)$ . Pela primeira parte da demonstração,  $\gamma_j([0, \epsilon]) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, N)^c$ . Logo,  $\gamma_j((0, 1]) \cap A(\gamma_k, \gamma_i, M) = \emptyset$ .

Sabemos que  $\gamma_j((0, 1]) \cap (\gamma_k \cup \gamma_i \cup \Sigma) = \emptyset$ , logo segue do Corolário 2.3.12 que  $\gamma_j((0, 1]) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, M)^c$ , como queríamos mostrar.  $\square$

**Proposição 2.3.22** *Se  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  são endcuts mutuamente disjuntos, então existem respectivas extensões  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  também disjuntas entre si.*

**Demonstração:** A demonstração é por indução sobre  $n$ . O caso  $n = 1$  é trivial. Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$  endcuts mutuamente disjuntos. Pela hipótese de indução, existem endcuts disjuntos entre si, denotados aqui por  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , que são extensões de  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , respectivamente. Então  $\text{Int}(C) \setminus (\Sigma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n)$  é a união de  $n$  discos topológicos disjuntos, que denotamos por  $D_1, \dots, D_n$ .

Como  $\gamma_{n+1}$  é um compacto disjunto dos endcuts  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , podemos sem perda de generalidade supor que  $\gamma_{n+1} \cap \Gamma_i = \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

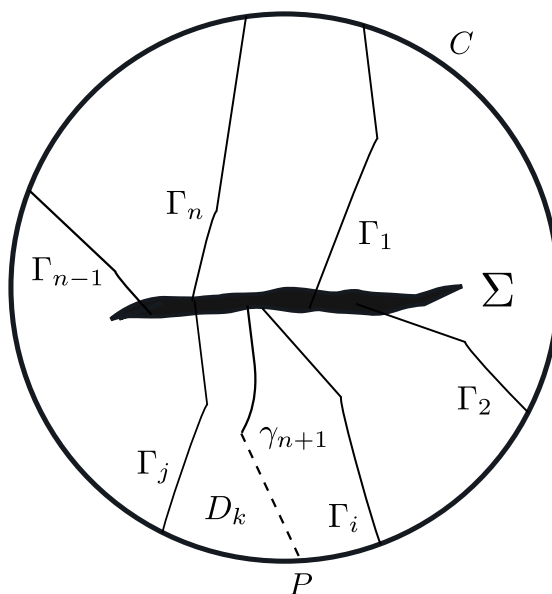


Figura 6:

Segue de  $\gamma_{n+1} \subset \text{Int}(C) \setminus (\Sigma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n)$  que existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\gamma_{n+1} \subset D_k$ . Como  $\{\Gamma_i(1)\}_{i=1, \dots, n}$  são distintos entre si,  $\partial D_k \cap C$  é um arco com extremos em  $[\Gamma_i(1), \Gamma_j(1)]$ . Sejam  $P \in (\Gamma_i(1), \Gamma_j(1))$  e  $\eta : [0, 1] \rightarrow D_k \cup \{P\}$  tal que  $\gamma([0, 1]) \cup \eta([0, 1]) = \{\eta(0)\}$ , e  $\eta([0, 1]) \cap f^L(C) = \{\gamma_{n+1}(1)\}$ . Definimos  $\Gamma_{n+1} : [0, 1] \rightarrow D \cup \{\gamma_{n+1}(0), P\}$  como uma concatenação de  $\gamma_{n+1}$  e  $\eta$  que satisfaz  $\Gamma_{n+1}(0) = \gamma_{n+1}(0)$ ,  $\Gamma_{n+1}(\frac{1}{2}) = \gamma_{n+1}(1)$  e  $\Gamma_{n+1}(1) = P$ .  $\square$

**Proposição 2.3.23** *Sejam  $n \geq 3$  em  $\mathbb{N}$  e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts mutuamente disjuntos. Então para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\gamma_j$  é o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  extensões disjuntas de  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , respectivamente. Então  $\Gamma_1(1), \dots, \Gamma_n(1)$  são pontos distintos em  $C$ . Seja  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\Gamma_j(1)$  é o vizinho à esquerda de  $\Gamma_i(1)$  em  $\{\Gamma_1(1), \dots, \Gamma_n(1)\}$ , isto é, o arco orientado  $(\Gamma_i(1), \Gamma_j(1)) \subset C$  não intersecta  $\{\Gamma_1(1), \dots, \Gamma_n(1)\}$ .

Afirmamos que  $\Gamma_j$  é o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .

Seja  $D$  o disco topológico limitado por  $\Sigma \cup \Gamma_i \cup (\Gamma_i(1), \Gamma_j(1)) \cup \Gamma_j$ . Suponhamos, por absurdo, que exista  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\gamma_k((0, \epsilon]) \subset D(\gamma_i, \gamma_j, L(\gamma_i, \gamma_j)) \subset D$ . Isto implica que  $\Gamma_k(1) \in (\Gamma_i(1), \Gamma_j(1))$ , contradizendo o fato de  $\Gamma_j(1)$  ser o vizinho à esquerda de  $\Gamma_i(1)$  em  $\{\Gamma_1(1), \dots, \Gamma_n(1)\}$ .  $\square$



**Corolário 2.3.24** *Sejam  $n \geq 3$  em  $\mathbb{N}$  e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts mutuamente disjuntos. A aplicação  $e : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  que associa a um natural  $i \in \{1, \dots, n\}$  o único natural  $e(i) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$  é uma bijeção.*

**Proposição 2.3.25** *Seguindo a notação do corolário anterior, se  $N \geq L(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , então  $\Sigma \cup \bigcup_{i=1}^n (\gamma_i \cup D(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N) \cup \gamma_{e(i)})$  é uma vizinhança de  $\Sigma$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\tilde{L} = L(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Como  $D(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N) \subset D(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, \tilde{L})$ , basta mostrar que

$$\bigcup_{i=1}^n (\gamma_i \cup D(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N) \cup \gamma_{e(i)})$$

é uma vizinhança de  $\Sigma$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sejam  $a_i \in \gamma_i$  o extremo inicial da ponte  $A(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N)$ , e  $b_i \in \gamma_{e(i)}$  o extremo final da ponte  $A(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N)$ . Portanto,  $\bigcup_{i=1}^n (A(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N) \cup [b_i, a_{e^{-1}(i)}]_{\gamma_i})$  é um círculo topológico que contém  $\gamma_i(0) \in \Sigma$  no seu interior. Como  $\Sigma$  é um conjunto conexo, e  $\bigcup_{i=1}^n (A(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N) \cup [b_i, a_{e^{-1}(i)}]_{\gamma_i})$  não intersecta  $\Sigma$ , temos que  $\Sigma$  está contido no interior da curva de Jordan  $\bigcup_{i=1}^n (A(\gamma_i, \gamma_{e(i)}, N) \cup [b_i, a_{e^{-1}(i)}]_{\gamma_i})$ .

**Lema 2.3.26** *Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  endcuts disjuntos,  $M \geq L(\gamma, \eta)$  e  $0 \leq s < t < 1$  e  $f^M((s, t))$  uma ponte de  $\gamma$  para  $\eta$ . Então  $f^{M+1}((s, t))$  é uma ponte de  $f \circ \gamma$  para  $f \circ \eta$ .*

**Demonstração:**

Como  $f^M((s, t))$  é uma ponte de  $\gamma$  para  $\eta$ , temos que:

- $f^M(C(s)) \in \gamma$ ,
- $f^M(C(t)) \in \eta$ ,
- $f^M(C)((s, t)) \cap (\gamma \cup \eta) = \emptyset$ , e
- existem extensões  $\Gamma, H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como na Proposição 2.3.7, de maneira que o crosscut  $[\gamma(0), f^M(s)]_{\gamma} \cup f^M((s, t)) \cup [\eta(0), f^M(t)]_{\eta}$  separa o crosscut  $\Gamma([0, 1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup$

$H([0,1])$ , onde  $[\Gamma(1),H(1)]$  denota o arco orientado em  $C$  com extremo inicial em  $\Gamma(1)$  e extremo final em  $H(1)$ .

Como  $f^{M+1}(C(s)) \in f \circ \gamma$ ,  $f \circ \eta(C(t)) \in f \circ \eta$  e  $f^{M+1}(C)((s,t)) \cap (f \circ \gamma \cup f \circ \eta) = \emptyset$ , resta mostrar que existem extensões  $\Gamma', H' : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como na Proposição 2.3.7 tais que o crosscut  $[f \circ \gamma(0), f^{M+1}(s)]_\gamma \cup f^{M+1}((s,t)) \cup [f \circ \eta(0), f^{M+1}(t)]_\eta$  separa o crosscut  $\Gamma'([0,1]) \cup [\Gamma'(1), H'(1)] \cup H'([0,1])$ .

Sejam  $\tilde{\Gamma}, \tilde{H} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  endcuts que satisfazem  $\tilde{\Gamma}([0, \frac{3}{4}]) = \Gamma([0,1])$ ,  $\tilde{H}([0, \frac{3}{4}]) = H([0,1])$  e  $\tilde{\Gamma}(1) \tilde{H}(1)$  são pontos distintos de  $f^{-1}(C)$ .

Como o crosscut  $C = \Gamma([0,1]) \cup [\Gamma(1), H(1)] \cup H([0,1])$  separa o crosscut  $C' = \tilde{\Gamma}([0,1]) \cup [\tilde{\Gamma}(1), \tilde{H}(1)] \cup \tilde{H}([0,1])$ , e  $f^M((s,t))$  divide  $B(C)$ , segue que  $f^{M+1}((s,t))$  divide  $B(f(C')) = B(f \circ \tilde{\Gamma}([0,1]) \cup [f \circ \tilde{\Gamma}(1), \tilde{H}(1)] \cup f \circ \tilde{H}([0,1]))$ .

Como  $f \circ \tilde{\Gamma}, f \circ \tilde{H} \in f^L(C) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  são extensões de  $f \circ \gamma$  e  $f \circ \eta$ , respectivamente,  $f^{M+1}((s,t))$  é uma ponte de  $f \circ \gamma$  para  $f \circ \eta$ .  $\square$

**Proposição 2.3.27** *Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo as hipóteses da Conjectura DM-Y Modificada,  $\gamma, \eta$  endcuts disjuntos e  $M \geq L(\gamma, \eta)$ . Então  $f(D(\gamma, \eta, M)) = D(f(\gamma), f(\eta), M+1)$ .*

### Demonstração:

Sejam  $\Gamma$  e  $H$  extensões de  $\gamma$  e  $\eta$ , respectivamente, de maneira que a ponte  $A(\gamma, \eta, M)$  separa o crosscut  $\Gamma([0,1]) \cup (\Gamma(1), H(1)) \cup H([0,1])$ , como na definição de  $A(\gamma, \eta, M)$ .

Sejam  $0 \leq s_1 < t_1 < \dots < s_r < t_r < 1$  tais que para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $f^N(C)((s_i, t_i))$  é uma ponte de  $\gamma$  para  $\eta$ , e qualquer ponte de  $\gamma$  para  $\eta$  possui extremos em  $\{\gamma(s_1), \eta(t_1), \dots, \gamma(s_r), \eta(t_r)\}$ . Pelo lema anterior, pontes de  $\gamma$  para  $\eta$  em  $f^M(C)$  são levadas em pontes de  $f \circ \gamma$  para  $f \circ \eta$  em  $f^{M+1}(C)$ .

Então  $\{f((s_i, t_i))\}_{i=1}^r$  é o conjunto das pontes de  $\gamma$  para  $\eta$ . Pela definição de  $A(\gamma, \eta, M)$ , temos que  $A(\gamma, \eta, M) = f^M((s_i, t_i))$ , para o único  $i \in \{1, \dots, r\}$  que satisfaz  $[\gamma(0), f^M(s_i)] \subset [\gamma(0), f^M(s_j)]$ , para todo  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

Segue que  $[f \circ \gamma(0), f^{M+1}(s_i)] \subset [f \circ \gamma(0), f^{M+1}(s_j)]$ , para todo  $j \in \{1, \dots, r\}$ , e portanto,  $A(f \circ \gamma, f \circ \eta, M+1) = f(f^M(s_i, t_i)) = f(A(\gamma, \eta, M))$ .

Pela definição de  $D(\gamma, \eta, M)$ , temos que  $D(\gamma, \eta, M) = B([\gamma(0), f^M(s_j)]_\gamma \cup A(\gamma, \eta, M) \cup [\eta(0), f^M(t_j)]_\eta)$ . Portanto, temos que  $f(D(\gamma, \eta, M)) = f(B([\gamma(0), f^M(s_j)]_\gamma \cup A(\gamma, \eta, M) \cup$

$[f(\eta(0), f^M(t_j)]_\eta) = B([f \circ \gamma(0), f^{M+1}(s_j)]_\gamma \cup A(f \circ \gamma, f \circ \eta, M+1) \cup [f \circ \eta(0), f^{M+1}(t_j)]_\eta) = D(f \circ \gamma, f \circ \eta, M+1)$ , como queríamos mostrar.  $\square$

**Corolário 2.3.28** *Sejam  $n \geq 3$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts disjuntos e  $i, j, k$  naturais distintos entre si em  $\{1, \dots, n\}$ . Então:*

- (i)  $\gamma_i < \gamma_j < \gamma_k$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  se, e somente se,  $f(\gamma_i) < f(\gamma_j) < f(\gamma_k)$  em  $\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_n)\}$ , e
- (ii) para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(\gamma_{e(i)})$  é vizinho à esquerda de  $f(\gamma_i)$  em  $\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_n)\}$ .

**Demonstração:**

Item (i)

Segundo a definição de “<” (Definição 2.3.18),  $\gamma_i < \gamma_j < \gamma_k$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  se, e somente se, existem  $\epsilon > 0$  e  $M \geq L(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  tais que  $\gamma_j((0, \epsilon)) \subset D(\gamma_k, \gamma_i, M)$ . Pela Proposição 2.3.27, isto ocorre se, e somente se,  $f \circ \gamma_j((0, \epsilon)) \subset D(f(\gamma_k), f(\gamma_i), M+1) = f(D(\gamma_k, \gamma_i, M))$ , ou seja:  $f(\gamma_i) < f(\gamma_j) < f(\gamma_k)$  em  $\{f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_n)\}$ .

Item (ii)

Suponha, por absurdo, que existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $f(\gamma_{e(i)}) < f(\gamma_k) < f(\gamma_i)$ . Pela item (i),  $\gamma_{e(i)} < \gamma_k < \gamma_i$ , contradizendo o fato de  $\gamma_{e(i)}$  ser vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ .  $\square$

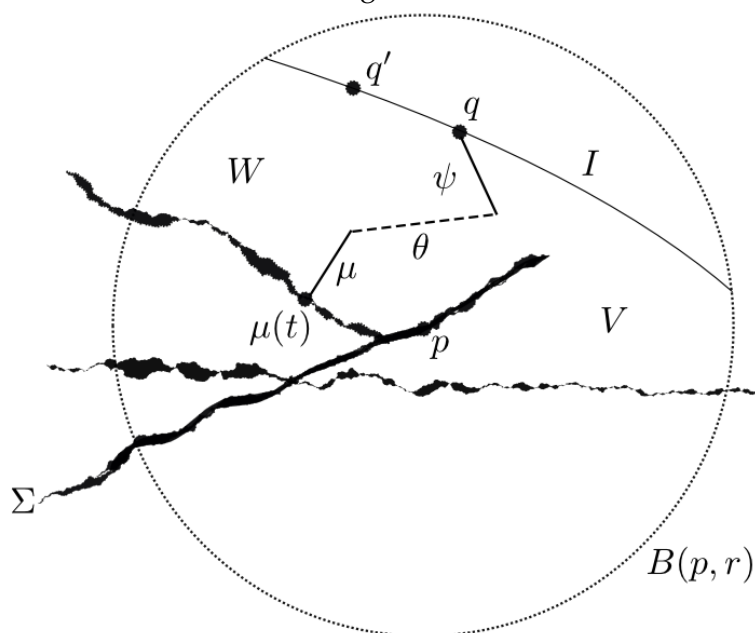
O seguinte teorema envolvendo endcuts será utilizado repetidas vezes ao longo do próximo capítulo:

**Teorema 2.3.29** *Sejam  $r > 0$ ,  $S \subset \Sigma$  um conjunto enumerável,  $p \in \Sigma$  e  $N \in \mathbb{N}$  tais que  $f^N(C) \cap B(p, r) \neq \emptyset$ . Sejam também  $I \subset f^N(C)$  uma componente conexa de  $B(p, r) \cap f^N(C)$  e  $q \in I$ . Então existem dois endcuts  $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow B(p, r)$  tais que:*

1.  $\gamma(1) = q$ ,
2.  $\gamma([0, 1]) \cup [\gamma(1), \eta(1)]_I \cup \eta([0, 1]) \subset B(p, r)$ ,
3.  $\{\gamma(0), \eta(0)\} \subset \Sigma \setminus S$ , e
4.  $\eta(0) \notin \mathcal{O}(\gamma(0))$ .

**Observação 2.3.30** *Se  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{O}(X)$  denota a união das órbitas de cada elemento de  $X$ .*

Figura 7:

**Demonstração:**

Denotaremos por  $U$  a componente conexa de  $B(p, r) \setminus I$  que contém  $p$ . Seja  $\psi : [0, 1] \rightarrow U \cup \{q\}$  uma parametrização de um segmento de reta que satisfaz  $\psi(0) = q$  e  $\psi((0, 1]) \subset U \setminus \Sigma$ .

Denotamos por  $V$  a componente conexa de  $U \setminus \Sigma$  que contém  $\psi(1)$ .  $V$  é um disco topológico, cuja fronteira contém um subcontinuum de  $\Sigma$  com mais de um ponto. Portanto,  $\Sigma \cap \partial V$  é um conjunto não-enumerável, que denotaremos por  $\Sigma'$ .

Fixemos agora um ponto  $u \in \Sigma' \cap B(p, r) \setminus S$ .

É imediato que  $\partial V \setminus \Sigma \subset I \cup \partial B(p, r)$ . Como o ponto  $u$  não pertence ao conjunto compacto  $I \cup \partial B(p, r) \cup \psi((0, 1])$ , existe  $\rho > 0$  tal que  $B(u, \rho) \cap (\partial V \setminus \Sigma \cup \psi((0, 1])) = \emptyset$ .

Fixemos uma parametrização de segmento de reta  $\phi : [0, 1] \rightarrow V \cap B(u, \rho)$ , que não é colinear a  $u$ , isto é, o ponto  $u$  não pertence à reta que contém  $\phi([0, 1])$ . Como  $S$  é um conjunto enumerável e  $[\phi(x), u] \cap [\phi(y), u] = \emptyset$ , se  $x$  é diferente de  $y$  em  $[0, 1]$ , então existe  $a \in [0, 1]$  tal que o segmento de reta  $[\phi(a), u]$  não intersecta  $S$ .

Seja também  $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , uma parametrização do segmento de reta  $[\phi(a), u]$ , que satisfaz  $\mu(0) = u$  e  $\mu(1) = \phi(a)$ .

Notemos que se  $t = \max\{s \in [0, 1] \mid \mu(s) \in \Sigma\}$ , então  $t$  existe, visto que  $\mu(0) = u \in \Sigma$ , e  $t < 1$ , pois  $\mu(1) = \phi(a) \notin \Sigma$ . Logo  $\mu([t, 1])$  é um endcut com ponto base em  $\Sigma \setminus S$ , ver a

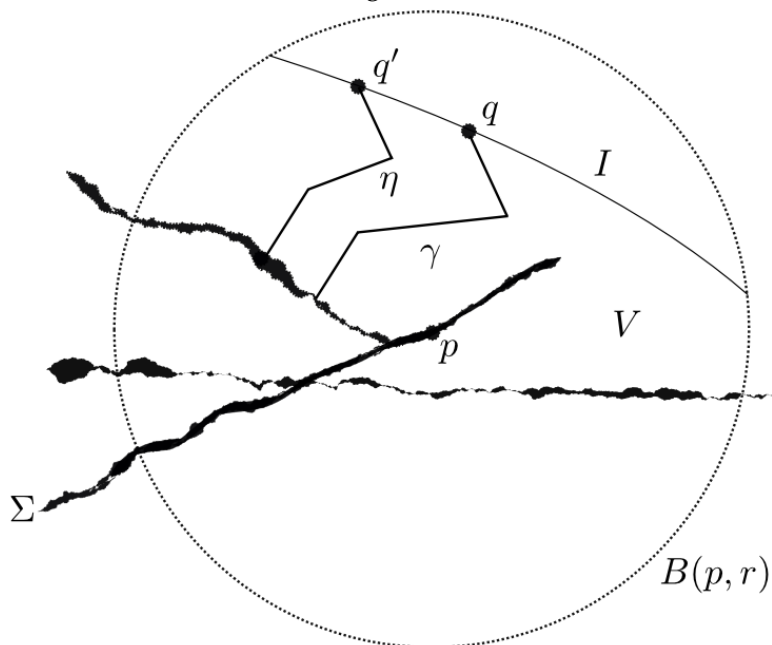
Figura 7.

Como  $\mu((t,1])$  está contido em  $B(p,\rho) \setminus \Sigma$ ,  $B(p,\rho) \cap (\overline{\partial V \setminus \Sigma} \cup \psi([0,1])) = \emptyset$  e  $\mu(1) \in V$ , concluímos que  $\mu((t,1]) \subset V$  e  $\mu((t,1]) \cap \psi([0,1]) = \emptyset$ .

$V$  é um conjunto conexo por caminhos, e portanto, existe uma parametrização de um arco topológico  $\theta : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\theta([0,1]) \subset V$ ,  $\theta((0,1)) \cap (\psi([0,1]) \cup \mu((t,1])) = \emptyset$ ,  $\theta(0) = \mu(1)$  e  $\theta(1) = \psi(1)$  (ver a Figura 7).

Seja  $\gamma : [0,1] \rightarrow V \cup \{\mu(t), p\}$  uma parametrização do arco topológico obtido pela concatenação de arcos  $\psi([0,1]) \cup \theta([0,1]) \cup \mu([t,1])$ , e que satisfaz  $\gamma(0) = \mu(t)$  e  $\gamma(1) = q$ .

Figura 8:



Temos que o endcut  $\gamma([0,1])$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $\gamma(0) \in \Sigma \setminus S$ ,
- $\gamma(1) = q$ , e
- $\gamma([0,1]) \subset B(p,r)$ .

Fixemos  $q' \in B(p,r)$  um ponto à esquerda de  $q$  em  $I$ , com respeito à orientação induzida por  $f^N(C)$  em  $I$ . Como  $V$  é um disco topológico, o arco  $\gamma([0,1])$  está contido em  $V$  e  $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \subset \partial V$ , temos que  $V \setminus \gamma$  tem duas componentes conexas (ver Figura 7).

Seja  $W$  a única destas componentes conexas cuja fronteira contém  $q'$ . Então, procedendo de forma análoga à construção de  $\gamma$  (ver a Figura 8), existe um endcut  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

- $\eta(0) \in \Sigma' \cap B(p, r) \setminus (S \cup \mathcal{O}(\gamma(0)))$ ,
- $\eta((0, 1)) \subset W \subset B(p, r)$ , e
- $\eta(1) = q'$ .

Segue que  $\gamma([0, 1]) \cup [\gamma(1), \eta(1)]_I \cup \eta([0, 1]) \subset B(p, r)$ .

**Corolário 2.3.31** *Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  endcuts disjuntos,  $S \subset \Sigma$  conjunto enumerável e  $N \geq L(\gamma, \eta)$ . Então existe um endcut  $\mu$  tal que  $\gamma < \mu < \eta$  e  $\mu(0) \in \Sigma \setminus (S \cup \mathcal{O}(\{\gamma(0), \eta(0)\}))$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $u \in \Sigma \cap \overline{D(\gamma, \eta, N)} \setminus \{\gamma(0), \eta(0)\}$  e  $r > 0$  tais que  $B(u, r) \cap (\gamma \cup A(\gamma, \eta, N) \cup \eta) = \emptyset$ . Seguindo o raciocínio da demonstração do teorema anterior, existe um endcut  $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que:

- $\mu(0) \in \Sigma \setminus (S \cup \mathcal{O}(\{\gamma(0), \eta(0)\}))$ ,
- $\mu(1) \in D(\gamma, \eta, N)$ , e
- e  $\mu((0, 1]) \subset B(u, r)$ .

Portanto,  $\mu((0, 1]) \subset D(\gamma, \eta, N)$ , implicando que  $\eta < \mu < \gamma$ . □

### 3 *Dinâmica induzida nos fins primos*

O objetivo deste capítulo é associar a cada difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que é um contra-exemplo para a Conjectura DM-Y Modificada, um homeomorfismo do círculo  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$  que preserva orientação e reflete algumas propriedades da dinâmica da restrição de  $f$  ao atrator  $\Sigma$ . Veremos, por exemplo, que se  $\hat{f}^q$  possui pontos fixos para algum  $q > 1$ , então temos a seguinte alternativa: (i)  $\Sigma$  contém pontos periódicos distintos da origem, ou (ii) a bacia de atração da origem contém todos os pontos acessíveis de  $\Sigma$ , e neste caso, a bacia de atração é densa em  $\Sigma$ . Entre as proposições empregadas nas demonstrações deste capítulo, estão alguns resultados da teoria dos fins primos, que é atribuída à Carathéodory (ver [8]), e alguns resultados da teoria dos sistemas dinâmicos planares demonstrados por Alligood e York [4].

#### 3.1 Construção da seqüência de endcuts $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$

Nesta seção definiremos uma seqüência  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  de endcuts de  $\Sigma$ , que será utilizada na construção do homeomorfismo do círculo  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$  a que nos referimos no início deste capítulo. A construção de  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  é realizada através da indução sobre  $k \geq 1$ , de maneira que no  $k$ -ésimo passo da indução, definimos os endcuts  $\{\gamma_n\}_{n=M(k-1)+1}^{M(k)}$ , onde supomos que  $0 = M(0) < M(k) < M(k+1)$ , para todo  $k \geq 1$ . Seguindo a notação anterior, denotamos por  $O$  a origem em  $\mathbb{R}^2$ .

Veremos que para cada  $k \geq 1$ , existe um inteiro  $N_k > 0$ , de maneira que o conjunto de endcuts  $\{\gamma_n\}_{n=M(k-1)+1}^{M(k)}$  satisfaz as seguintes propriedades:

**Propriedade P1** Dois pontos distintos em  $\{O\} \cup \{\gamma_n(0)\}_{n=1}^{M(k)}$  têm órbitas disjuntas,

**Propriedade P2** Para cada  $k \geq 1$  existe um conjunto  $\{p_1^k, \dots, p_{m(k)}^k\} \subset \Sigma$  que é  $\frac{1}{k}$ -denso em  $\Sigma$ , tal que para todo  $i \in \{1, \dots, m(k)\}$ , existem  $s < t$  em  $\{M(k-1)+1, \dots, M(k)\}$  de maneira que

$$\gamma_s([0, 1]) \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k(C)}} \cup \gamma_t([0, 1])$$

está contido em  $B(p_i^k, \frac{1}{k})$ , e

**Propriedade P3** Cada componente conexa de  $f^{N_k}(C) \setminus \{\gamma_n(1)\}_{n=M(k-1)+1}^{M(k)}$  possui comprimento menor do que  $\frac{1}{k}$ .

Iniciamos a construção com  $k = 1$ :

Fixemos  $\{p_1^1, \dots, p_{m(1)}^1\} \subset \Sigma$  tal que  $\delta(\{p_i^1\}_{i=1}^{m(1)}, \Sigma) < \frac{1}{2}$ , e  $N_1 \in \mathbb{N}$  de maneira que

$$\delta(f^{N_1}(C), \Sigma) < \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

Portanto,  $\delta(\{p_i^1\}_{i=1}^{m(1)}, f^{N_1}(C)) < 1$  e  $f^{N_1}(C) \subset \bigcup_{i=1, \dots, m(1)} B(p_i^1, 1)$ .

Seja também  $F_1 \neq \emptyset$  um subconjunto finito de  $f^{N_1}(C)$  de maneira que todas as componentes conexas de  $f^{N_1}(C) \setminus F_1$  tenham comprimento menor do que 1, e  $F_1 \cap B(p_i^1, 1) \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m(1)\}$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, m(1)\}$ , denotamos por  $n(1, i)$  a cardinalidade do conjunto

$$F_1^i = F_1 \cap B(p_i^1, 1) \setminus \bigcup_{j < i} B(p_j^1, 1),$$

e por  $\{q_1^{1,i}, \dots, q_{n(1,i)}^{1,i}\}$  os elementos de  $F_1^i$ , caso  $n(1, i) > 0$ . Notemos que os conjuntos da forma  $F_1^i$  determinam uma partição de  $F_1$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, m(1)\}$  tal que  $n(1, i) > 0$ , e  $j \in \{1, \dots, n(1, i)\}$ , denotamos por  $I_j^{1,i}$  a componente conexa de  $f^{N_1}(C) \cap B(p_i^1, 1)$  que contém  $q_j^{1,i}$ .

Como  $B(p_1^1, 1) \cap F_1 \neq \emptyset$ ,  $n(1, 1)$  é positivo, decorre do Teorema 2.3.29 que existem dois endcuts  $\gamma_1^{1,1}, \eta_1^{1,1} : [0, 1] \rightarrow B(p_1^1, 1)$  tais que:

- Dois pontos distintos em  $\{O, \gamma_1^{1,1}(0), \eta_1^{1,1}(0)\}$  possuem órbitas disjuntas,
- $\gamma_1^{1,1}(1) = q_1^{1,1}$ , e
- $\gamma_1^{1,1} \cup [\gamma_1^{1,1}(1), \eta_1^{1,1}(1)]_{f^{N_1}(C)} \cup \eta_1^{1,1} \subset B(p_1^1, 1)$ .

Se  $n(1, 1) > 1$ , definimos sucessivamente para cada  $j$  em  $\{2, \dots, n(1, 1)\}$ , endcuts  $\gamma_j^{1,1}$  e  $\eta_j^{1,1}$  que satisfazem as seguintes propriedades:

- Dois pontos distintos em  $\{O\} \cup \{\gamma_l^{1,1}(0)\}_{l=1}^j \cup \{\eta_l^{1,1}(0)\}_{l=1}^j$  possuem órbitas disjuntas,



- $\gamma_l^{1,1}(1) = q_l^{1,1}$ , e
- $\gamma_l^{1,1} \cup [\gamma_l^{1,1}(1), \eta_l^{1,1}(1)]_{f^{N_1}(C)} \cup \eta_l^{1,1} \subset B(p_1^1, 1)$ , para cada  $l \in \{2, \dots, j\}$ .

Para isto, basta supor que para cada  $j \in \{2, \dots, n(1, 1)\}$ , os endcuts  $\gamma_j^{1,1}$  e  $\eta_j^{1,1}$  tenham pontos base em  $\Sigma \setminus S_j^{1,1}$ , onde

$$S_j^{1,1} = \{O\} \cup \mathcal{O}(\{\gamma_l^{1,1}(0) \mid 1 \leq l < j\} \cup \{\eta_l^{1,1}(0) \mid 1 \leq l < j\}).$$

Desta maneira, definimos endcuts  $\{\gamma_j^{1,1}(0)\}_{j=1}^{n(1,1)} \cup \{\eta_j^{1,1}(0)\}_{j=1}^{n(1,1)}$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- Dois pontos distintos em  $\{O\} \cup \{\gamma_j^{1,1}(0)\}_{j=1}^{n(1,1)} \cup \{\eta_j^{1,1}(0)\}_{j=1}^{n(1,1)}$  possuem órbitas disjuntas,
- $\gamma_j^{1,1}(1) = q_j^{1,1}$ , e
- $\gamma_j^{1,1} \cup [\gamma_j^{1,1}(1), \eta_j^{1,1}(1)]_{f^{N_1}(C)} \cup \eta_j^{1,1} \subset B(p_1^1, 1)$ , para cada  $j \in \{1, \dots, n(1, 1)\}$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, m(1)\}$ , seja  $A_{1,i} = \{j \in \{1, \dots, i\} \mid n(1, j) > 0\}$ . Caso  $m(1) > 1$ , repetimos o processo acima, para cada  $i \in \{1, \dots, m(1)\}$ , utilizando diversas vezes o Teorema 2.3.29 para definir um conjunto de endcuts

$$\Gamma_{1,i} = \{\gamma_l^{1,j}(0) \mid j \in A_{1,i}, l \in \{1, \dots, n(1, j)\}\} \cup \{\eta_l^{1,j}(0) \mid j \in A_{1,i}, l \in \{1, \dots, n(1, j)\}\},$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- Dois pontos distintos em  $\{O\} \cup \{\gamma(0) \mid \gamma \in \Gamma_{1,i}\}$  possuem órbitas disjuntas,
- $\gamma_l^{1,j}(1) = q_l^{1,j}$ , e
- $\gamma_l^{1,j} \cup [\gamma_l^{1,j}(1), \eta_l^{1,j}(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \eta_l^{1,j} \subset B(p_j^1, 1)$ , para cada  $j \in A_{1,i}$  e  $l \in \{1, \dots, n(1, j)\}$ .

Do item (ii) segue que cada componente conexa de  $f^{N_1}(C) \setminus \{\gamma(1) \mid \gamma \in \Gamma_{1,i}\}$  tem comprimento menor do que 1, garantindo assim, a validade da propriedade P3 para  $k = 1$ .

Definimos  $M(1) = 2 \sum_{i=1}^{r(1)} n(1, i) \geq 2n(1, 1) = 2$ . Então  $M(1)$  é a quantidade de endcuts em  $\Gamma_{1,r(1)}$ , onde  $r(1) = \max\{1 \leq i \leq m(1) \mid n(1, i) > 0\}$ . Definimos também  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(1)}$  como uma reindexação do conjunto  $\Gamma_{1,r(1)}$ . Segue da construção acima que o conjunto de endcuts  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(1)}$  satisfazem as propriedades P1-P3 para  $k = 1$ .

**Observação 3.1.1** Como os pontos base de  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(1)}$  têm órbitas disjuntas, e são distintos da origem, a Proposição 2.3.4 garante que podemos fixar  $\epsilon_1 \in (0, 1)$  e  $L_1 \in \mathbb{N}$  tais que:

- os endcuts em  $\{f^i \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, f^i \circ \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]}\}_{i=0,1}$  são todos disjuntos entre si, e
- $L_1$  é o menor inteiro tal que  $f^i \circ \gamma_n([0, \epsilon_1]) \cap f^{L_1}(C) \neq \emptyset$ , para quaisquer  $n \in \{1, \dots, M(1)\}$  e  $i \in \{0, 1\}$ .

No que segue, estenderemos indutivamente a construção acima para  $k > 1$ . O passo de indução consiste em definir  $M(k) > M(k-1)$ , e os endcuts  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(k)}$  a partir de  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(k-1)}$ , de maneira a satisfazer as propriedades P1-P3.

Fixemos  $\epsilon_{k-1} \in (0, 1)$  tal que os endcuts em

$$\{f^i \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \dots, f^i \circ \gamma_{M(k-1)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]}\}_{i=0,1}$$

são todos disjuntos entre si, e definimos  $L_{k-1}$  como o menor inteiro tal que  $f^i \circ \gamma_n([0, \epsilon_{k-1}]) \cap f^{L_{k-1}}(C) \neq \emptyset$ , para quaisquer  $n \in \{1, \dots, M(k-1)\}$  e  $i \in \{0, 1\}$  (ver a Proposição 2.3.4).

Para cada  $n \in \{1, \dots, M(k-1)\}$ ,  $\gamma_{e(n)}$  denota o vizinho à esquerda de  $\gamma_n|_{[0, \epsilon_{k-1}]}$  em  $\{\gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \dots, \gamma_{M(k-1)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]}\}$ . Sabemos que  $M(k-1) \geq 2$ , visto que  $M(1) \geq 2$ . Caso  $M(k-1) = 2$ , consideramos que  $\gamma_{e(1)} = \gamma_2$  e  $\gamma_{e(2)} = \gamma_1$ .

De acordo com o Corolário 2.3.31, existe um endcut  $\gamma_{M(k-1)+1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\gamma_{M(k-1)+1}(0) \in \overline{D(\gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \gamma_{e(1)}|_{[0, \epsilon_{k-1]}}, L_{k-1})} \cap \Sigma \setminus \mathcal{O}(\{\gamma_n(0)\}_{n=1}^{M(k-1)}),$$

e  $\gamma_{M(k-1)+1}((0, 1]) \subset D(\gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \gamma_{e(1)}|_{[0, \epsilon_{k-1]}}, N_{k-1})$ . Portanto,

$$\gamma_{e(1)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]} \prec \gamma_{M(k-1)+1} \prec \gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}$$

Analogamente, para cada  $i \in \{2, \dots, M(k-1)\}$ , o Corolário 2.3.31 garante a existência de um endcut  $\gamma_{M(k-1)+i} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\gamma_{M(k-1)+i}(0) \in \overline{D(\gamma_i|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \gamma_{e(i)}|_{[0, \epsilon_{k-1]}}, N_{k-1})} \cap \Sigma \setminus \mathcal{O}(\{\gamma_n(0)\}_{n=1}^{M(k-1)+i-1}),$$

e  $\gamma_{e(i)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]} \prec \gamma_{M(k-1)+i} \prec \gamma_i|_{[0, \epsilon_{k-1}]}$ .

Desta maneira, definimos endcuts  $\gamma_{M(k-1)+1}, \dots, \gamma_{2M(k-1)}$  que satisfazem as seguintes propriedades:

- Dois pontos distintos em  $\{O, \gamma_1(0), \dots, \gamma_{M(k-1)}(0), \dots, \gamma_{2M(k-1)}(0)\}$  possuem órbitas disjuntas, e
- Para cada  $i \in \{1, \dots, M(k-1)\}$ ,  $\gamma_{e(i)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]} \prec \gamma_{M(k-1)+i} \prec \gamma_i|_{[0, \epsilon_{k-1}]}$ .

Agora, definiremos os endcuts em  $\{\gamma_{2M(k-1)+1}, \dots, \gamma_{M(k)}\}$ .

Fixemos  $m(k) \in \mathbb{N}$ ,  $\{p_1^k, \dots, p_{m(k)}^k\} \subset \Sigma$  tal que  $\delta(\{p_i^k\}_{i=1}^{m(k)}, \Sigma) < \frac{1}{2k}$ , e  $N_k > N_{k-1}$ , inteiro grande o suficiente, de maneira que

$$\delta(f^{N_k}(C), \Sigma) < \frac{1}{2k}. \quad (3.2)$$

Lembramos que  $N_1$  foi definido em (3.1).

Portanto,  $\delta(\{p_i^k\}_{i=1}^{m(k)}, f^{N_k}(C)) < \frac{1}{k}$  e  $f^{N_k}(C) \subset \bigcup_{i=1, \dots, m(k)} B(p_i^k, \frac{1}{k})$ .

Definimos  $F_k \neq \emptyset$  um subconjunto finito de  $f^{N_k}(C)$  de maneira que todas as componentes conexas de  $f^{N_k}(C) \setminus F_k$  tenham comprimento menor do que  $\frac{1}{k}$ , e  $F_k \cap B(p_i^k, \frac{1}{k}) \neq \emptyset$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m(k)\}$ .

Denotamos por  $n(k, i)$  a cardinalidade do conjunto

$$F_k^i = F_k \cap B(p_i^k, \frac{1}{k}) \setminus \bigcup_{j < i} B(p_j^k, \frac{1}{k}),$$

onde  $k$  está fixado, e  $i$  varia em  $\{1, \dots, m(k)\}$ .

Caso  $n(k, i)$  seja positivo, denotamos por  $\{q_1^{k,i}, \dots, q_{n(k,i)}^{k,i}\}$  os elementos de  $F_k^i$ . Notemos que os conjuntos  $F_k^i$ 's determinam uma partição de  $F_k$ .

Como  $B(p_1^k, \frac{1}{k}) \cap F_k \neq \emptyset$ ,  $n(k, 1)$  é positivo.

Novamente, segue do Teorema 2.3.29 a existência de endcuts  $\gamma_1^{k,1}, \eta_1^{k,1} : [0, 1] \rightarrow B(p_1^k, \frac{1}{k})$  tais que:

- Dois pontos distintos em  $\{O\} \cup \{\gamma_n(0)\}_{n=1}^{2M(k-1)} \cup \{\gamma_1^{k,1}(0), \eta_1^{k,1}(0)\}$  possuem órbitas disjuntas,
- $\gamma_1^{k,1}(1) = q_1^{k,1}$ , e
- $\gamma_1^{k,1} \cup [\gamma_1^{k,1}(1), \eta_1^{k,1}(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \eta_1^{k,1} \subset B(p_1^k, \frac{1}{k})$ .

Se  $n(k,1) > 1$ , definimos para cada  $j > 1$  em  $\{2, \dots, n(k,1)\}$ , endcuts  $\gamma_j^{k,1}$  e  $\eta_j^{k,1}$  que satisfazem as seguintes propriedades:

- Dois pontos distintos em

$$\{O\} \cup \{\gamma_n(0)\}_{n=1}^{2M(k-1)} \cup \{\gamma_j^{k,1}(0)\}_{j=1}^{n(k,1)} \cup \{\eta_j^{k,1}(0)\}_{j=1}^{n(k,1)}$$

possuem órbitas disjuntas,

- $\gamma_j^{k,1}(1) = q_j^{k,1}$ , e
- $\gamma_j^{k,1} \cup [\gamma_j^{k,1}(1), \eta_j^{k,1}(1)]_{f^{N_k(\mathbb{C})}} \cup \eta_j^{k,1} \subset B(p_j^k, 1)$ .

Caso  $m(k) > 1$ , seguimos o processo acima para cada  $i \in \{2, \dots, m(k)\}$  tal que  $n(k,i) > 0$ , aplicando repetidas vezes o Teorema 2.3.29, para definir um conjunto de endcuts

$$\Gamma_{k,i} = \{\gamma_l^{k,j}(0) \mid j \in \{1, \dots, i\}, l \in \{1, \dots, n(k,i)\}\} \cup \{\eta_l^{k,j}(0) \mid j \in \{1, \dots, i\}, l \in \{1, \dots, n(k,i)\}\},$$

de maneira que:

- Dois pontos distintos em  $\{O\} \cup \{\gamma_n(0)\}_{n=1}^{2M(k-1)} \cup \{\gamma(0) \mid \gamma \in \Gamma_{k,i}\}$  possuem órbitas disjuntas,
- $\gamma_j^{k,i}(1) = q_j^{k,i}$ , e
- $\gamma_j^{k,i} \cup [\gamma_j^{k,i}(1), \eta_j^{k,i}(1)]_{f^{N_k(\mathbb{C})}} \cup \eta_j^{k,i} \subset B(p_i^k, 1)$ ,

para  $i \in \{1, \dots, m(k)\}$  tal que  $n(k,i) > 0$ , e  $j \in \{1, \dots, n(k,i)\}$ .

Então  $2 \sum_{i=1}^{m(k)} n(k,i)$  é o número de endcuts em  $\Gamma_{k,r(k)}$ , onde  $r(k) = \max\{i \in \{1, \dots, m(k)\} \mid n(k,i) > 0\}$ . Definimos  $M(k) = 2M(k-1) + 2 \sum_{i=1}^{m(k)} n(k,i)$ , e  $\{\gamma_n\}_{n=2M(k-1)+1}^{M(k)}$  como uma rein-  
dexação do conjunto  $\Gamma_{k,r(k)}$ .

Assim, os endcuts  $\{\gamma_n\}_{n=2M(k-1)+1}^{M(k)}$  satisfazem as propriedades P1-P3.

**Observação 3.1.2** *Seja  $k \geq 1$ . Notemos que os pontos em  $\{\gamma_n(0)\}_{n \geq 1}$  possuem órbitas disjuntas. Além disto,  $f \circ \gamma_n(0) \neq \gamma_n(0)$ , para cada  $n \geq 1$ , visto que  $\{\gamma_n(0)\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ .*

De acordo com a Proposição 2.3.4, podemos fixar para cada  $k \geq 1$ ,  $\epsilon_k > 0$  tal que todos os endcuts em

$$\{\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}\}$$

são disjuntos entre si, onde  $M(k)$  é o número de endcuts definidos até o  $k$ -ésimo passo indutivo da construção da seqüência de endcuts  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ .

A construção de  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  também implica que para cada  $k > 1$ , e  $i \in \{1, \dots, M(k)\}$ , temos que  $\gamma_{e(i)}|_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_{M(k)+i} < \gamma_i|_{[0, \epsilon_k]}$ , onde  $\gamma_{e(i)}$  denota o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{1, \dots, M(k)\}$ .

Também supomos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ .

**Observação 3.1.3** Através do processo indutivo acima, fixamos também uma seqüência crescente de naturais  $\{L_k\}_{k \geq 1}$ , de maneira, que para cada  $k \geq 1$  (ver a Proposição 2.3.4),

$$L_k = L(\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}).$$

## 3.2 A teoria dos fins primos

Antes de prosseguir com a construção do homeomorfismo  $\hat{f}$ , definiremos alguns objetos clássicos da teoria dos fins primos, que se deve a Carathéodory. Como referência para esta teoria, utilizamos o artigo de Mather sobre conseqüências topológicas da teoria dos fins primos [20].

No que segue,  $U$  denota um aberto conexo e simplesmente conexo da esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$ , que contém o ponto no infinito e cuja fronteira  $\partial U$  contém mais de um ponto.

**Definição 3.2.1** Sejam  $l$  e  $l'$  dois crosscuts de  $U$ . Dizemos que  $l'$  separa  $l$  caso  $B(l') \subset B(l)$ .

Seja  $\{l_n\}_{n \geq 1}$  uma seqüência de crosscuts tal que para todo  $n \geq 1$ ,  $l_{n+1}$  separa  $l_n$ . Neste caso, dizemos que uma seqüência  $\{B(l_n)\}_{n \geq 1}$  é uma cadeia. Se  $V = \{V_n\}_{n \geq 1}$  e  $V' = \{V'_n\}_{n \geq 1}$  são duas cadeias, dizemos que  $V$  divide  $V'$ , se para cada  $i \geq 1$ , existe  $j \geq 1$  tal que  $V_j \subset V'_i$ . Dizemos que  $V$  e  $V'$  são equivalentes caso uma cadeia divida a outra, e neste caso, escrevemos  $V \sim V'$ . É imediato que “ $\sim$ ” é uma relação de equivalência definida sobre o conjunto das cadeias de  $U$ . Se  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$ , dizemos que  $\{B(l_n)\}_{n \geq 1}$  é uma cadeia de  $\Sigma$ .

Considerando esta relação, chamamos cada classe de equivalência de cadeias de um fim. Caso  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$ , dizemos que uma classe de equivalência de  $\sim$  é um fim de  $\Sigma$ .

Uma cadeia  $V$  é dita *prima* caso ela seja equivalente a qualquer cadeia que a divida.

Finalmente, um fim é dito *primo* caso o fim seja a classe de equivalência de uma cadeia prima.

Denotaremos por  $U^*$  a compactificação de Carathéodory (ou compactificação por fins primos) do aberto  $U$ , que é definida como a união  $U \cup \mathcal{F}(U)$ , onde  $\mathcal{F}(U)$  denota o conjunto de todos os fins primos de  $U$ . O conjunto  $U^*$  é um espaço topológico com a topologia que definiremos a seguir.

Seja  $l$  um crosscut de  $U$ . Definimos  $B(l)^*$  como a união de todos os fins primos em  $\mathcal{F}(U)$  que possuem como representante uma cadeia prima  $\{V_n\}_{n \geq 1}$ , que satisfaz  $V_n \subset U$ , para todo  $n \geq 1$ . Definimos uma base de abertos para a compactificação de Carathéodory de  $U$  como a família de todos os conjuntos da forma  $B(l)^*$ , para algum crosscut  $l$  de  $U$ , juntamente com o conjunto de todos os abertos de  $U$ . Assim, definimos a topologia da compactificação de Carathéodory de  $U$ .

O seguinte teorema foi demonstrado por Carathéodory, e o enunciado abaixo encontra-se num artigo de Cartwright e Littlewood sobre existência de pontos fixos em um continuum do plano [8]:

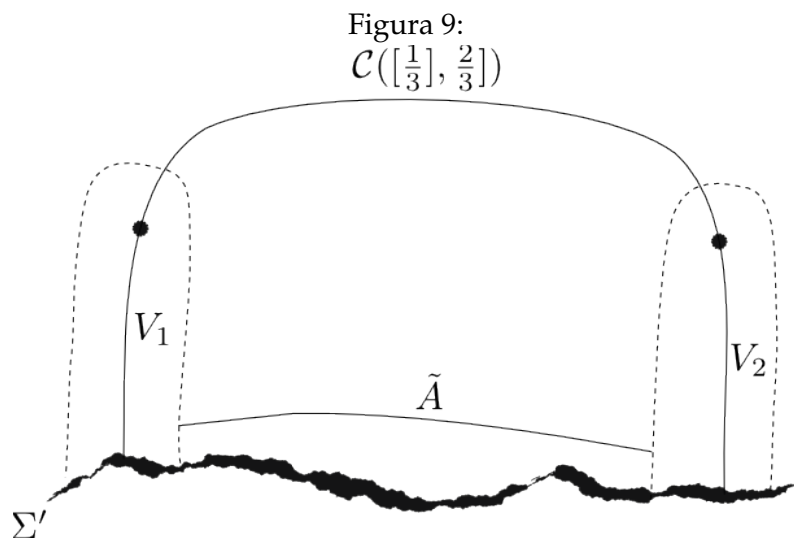
**Teorema 3.2.2 (Carathéodory)** *Seja  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  um aberto conexo e simplesmente conexo. Suponha que  $\partial U$  possui mais de um ponto, e que  $\mathbb{D} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \leq 1\}$ . Então existe um homeomorfismo  $\tau : U^* \rightarrow \mathbb{D}$ , de maneira que os pontos em  $U$  são enviados em pontos no interior do disco  $\mathbb{D}$ , e os fins primos de  $\partial U$  correspondem a pontos da fronteira  $S^1$ . Além disto, se  $F$  é um homeomorfismo de  $\hat{\mathbb{C}}$  que deixa  $U$  invariante, então existe uma aplicação  $F^*$  em  $\hat{U}$ , de maneira que  $F^* = F$  em  $U$ .*

Deste ponto em diante, consideramos que  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$  e  $F = f$ . Como  $f$  é um homeomorfismo do plano,  $f$  possui uma extensão contínua para a esfera de Riemann, que também denotaremos por  $f$ .

Como os fins primos de  $\Sigma$  são levados em fins primos de  $\Sigma$  por  $f$ , e a fronteira de  $U$  é  $f$ -invariante, é possível estudar a dinâmica de  $f$  sobre a fronteira de  $U$  através do homeomorfismo induzido no círculo  $\bar{f} = \tau \circ f^* \circ \tau^{-1} |_{\tau(S^1)}$ , onde  $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = 1\}$ . Como veremos adiante,  $\bar{f}$  está relacionado com o homeomorfismo  $\hat{f}$  a ser definido, pois  $\bar{f}$  apresenta uma órbita periódica se, e somente se, o mesmo é válido para o homeomorfismo  $\hat{f}$  que construiremos adiante.

**Definição 3.2.3** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo as condições da Conjectura DM-Y Modificada.*

Definimos o número de rotação de  $f$  como sendo o número de rotação do homeomorfismo  $\bar{f} = \tau \circ f^* \circ \tau^{-1} |_{\tau(S^1)}$ .



**Proposição 3.2.4** *Seja  $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um crosscut de  $\Sigma$ . Então existem  $k \geq 1$  e  $s, t \in \{M(k-1) + 1, \dots, M(k)\}$  de maneira que  $\gamma_s([0, 1]) \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k(C)}} \cup \gamma_t([0, 1])$  separa  $C$ , onde a seqüência  $\{N_k\}_{k \geq 1}$  foi definida nos itens (3.1) e (3.2).*

**Demonstração:**

Para cada arco diferenciável  $I \subset \mathbb{R}^2$ , denotaremos por  $l(I)$  o comprimento de  $I$ . Utilizaremos  $\Sigma'$  para denotar o continuum  $\Sigma \cap \overline{B(C)}$ . Além disto, se  $X \subset \mathbb{R}^2$  e  $\epsilon > 0$ , utilizamos  $V(X, \epsilon)$  para denotar o conjunto  $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, X) \leq \epsilon\}$ .

Seja  $k \geq 1$  tal que

- $\frac{6}{k} < d(C([0, \frac{1}{3}]), C([\frac{2}{3}, 1]))$ , e
- $\frac{3}{k} < d(C([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]), \Sigma)$ .

Pela definição de  $N_k$ , temos que  $\delta(f^{N_k}(C), \Sigma) < \frac{1}{2k}$ . Portanto,  $C([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) \subset \text{Ext}(f^{N_k}(C))$ .

Como  $\{C(0), C(1)\} \subset \Sigma \subset \text{Int}(f^{N_k}(C))$ , concluímos que  $f^{N_k}(C) \cap C([0, \frac{1}{3}])$  e  $f^{N_k}(C) \cap C([\frac{2}{3}, 1])$  são ambos conjuntos não vazios. Como  $C([0, \frac{1}{3}])$  e  $C([\frac{2}{3}, 1])$  são endcuts de  $\Sigma$ , a ponte  $A = A(C([0, \frac{1}{3}]), C([\frac{2}{3}, 1]), N_k)$  está bem definida (ver a Definição 2.3.10).

Por um argumento similar ao da demonstração da Proposição 2.3.15, temos que  $A$  separa  $B(C)$  em duas componentes conexas.

Sejam  $V_1 = V(C([0, \frac{1}{3}], \frac{2}{k}))$  e  $V_2 = V(C([\frac{2}{3}, 1], \frac{2}{k}))$ .

Denotemos o extremo inicial, (resp. extremo final), de  $A$  por  $\alpha$ , (resp.  $\beta$ ). Como  $\alpha \in C([0, \frac{1}{3}])$  e  $\beta \in C([\frac{2}{3}, 1])$ , temos que  $l(A) \geq \frac{6}{k}$ . Logo existe uma componente conexa  $\tilde{A}$  de  $A \setminus (V_1 \cup V_2)$  tal que  $l(\tilde{A}) \geq \frac{2}{k}$ .

Temos também que  $f^{N_k}(C) \subset \bigcup_{i=1}^{m(k)} B(p_i^k, \frac{1}{k})$  implica que  $\tilde{A} \subset \bigcup_{i=1}^{m(k)} B(p_i^k, \frac{1}{k})$ . De acordo com a propriedade P3 dos endcuts  $\{\gamma_n\}_{n=M(k-1)+1}^{M(k)}$ , existem  $1 \leq i \leq m(k)$  e  $1 \leq j \leq n(i, k)$  tais que  $q_j^{k,i} \in \tilde{A}$ . Como  $\gamma_j^{k,i} \in \{M(k-1)+1, \dots, M(k)\}$ , existem  $s, t \in \{M(k-1)+1, \dots, M(k)\}$  tais que  $\gamma_j^{k,i} = \gamma_s$  e  $\eta_j^{k,i} = \gamma_t$ .

De acordo com a propriedade P2 de  $\{\gamma_n\}_{n=M(k-1)+1}^{M(k)}$ ,  $\gamma_s \cup [\gamma_t(1), \gamma_s(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t \subset B(p_i^k, \frac{1}{k}) \subset B(\gamma_s(1), \frac{2}{k})$ . Como  $\gamma_s(1) = q_j^{k,i}$  e  $d(q_j^{k,i}, C([0, \frac{1}{3}]) \cup C([\frac{2}{3}, 1])) > \frac{2}{k}$ , temos que

$$(\gamma_s \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t) \cap (C([0, \frac{1}{3}]) \cup C([\frac{2}{3}, 1])) = \emptyset.$$

Como  $q_j^{k,i} \in \tilde{A} \subset f^{N_k}(C)$  e  $\delta(f^{N_k}(C), \Sigma) < \frac{1}{2k}$ , temos que  $d(q_j^{k,i}, \Sigma) < \frac{1}{2k}$ . Além disto,

$$\gamma_s \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t \subset B(q_j^{k,i}, \frac{2}{k}),$$

e portanto,  $d(x, \Sigma) < \frac{5}{2k}$ , para todo  $x \in \gamma_s \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t$ . Por outro lado,  $d(C([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]), \Sigma) > \frac{3}{k}$ , logo

$$(\gamma_s \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t) \cap C([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) = \emptyset.$$

Portanto,

$$(\gamma_s \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t) \cap C = \emptyset.$$

Como  $\gamma_s(1) \in \tilde{A} \subset B(C)$ , e

$$(\gamma_s((0, 1]) \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t((0, 1])) \cap \Sigma' = \emptyset,$$

segue que  $\gamma_s((0, 1]) \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t((0, 1]) \subset B(C)$ , implicando que

$$\gamma_s \cup [\gamma_s(1), \gamma_t(1)]_{f^{N_k}(C)} \cup \gamma_t$$

separa  $C$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

A seguir, mostraremos que cada fim primo de  $\Sigma$  possui como representante uma



cadeia prima cujos elementos são abertos da forma  $D(\gamma_i, \gamma_j, N_k)$ , onde  $k \geq 1$  e  $i, j, N_k \in \mathbb{N}$ .

**Corolário 3.2.5** *Seja  $V = \{V_n\}_{n \geq 1}$  uma cadeia prima de  $\Sigma$ . Então existem seqüências de inteiros  $\{S_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{k_n\}_{n \geq 1}$  tais que  $\{D(\gamma_{S_n}, \gamma_{T_n}, N_{k_n})\}_{n \geq 1}$  é uma cadeia prima equivalente a  $V$ , onde a seqüência  $\{N_k\}_{k \geq 1}$  foi definida nos itens (3.1) e (3.2).*

**Demonstração:**

Seja  $V = \{V_n\}_{n \geq 1}$  uma cadeia prima arbitrária. Se  $D = \{D(\gamma_{S_n}, \gamma_{T_n}, N_{k_n})\}_{n \geq 1}$  é uma cadeia que divide  $V$ , então  $D$  é necessariamente equivalente a  $V$ , pois  $V$  é uma cadeia prima, e portanto,  $V$  divide  $D$ .

Fixemos  $n \geq 1$ . Para demonstrar o presente lema, é suficiente definirmos um aberto da forma  $D(\gamma_{S_n}, \gamma_{T_n}, N_{k_n})$ , que satisfaz  $D(\gamma_{S_n}, \gamma_{T_n}, N_{k_n}) \subset V_n$ .

Seja  $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  um crosscut de  $\Sigma$  tal que  $V_n = B(C)$ .

Pela proposição anterior, existem  $k_n \geq 1$  e  $S_n, T_n \in \{M(k_n - 1) + 1, \dots, M(k_n)\}$  tais que

$$\gamma_{S_n}([0, 1]) \cup [\gamma_{S_n}(1), \gamma_{T_n}(1)]_{f^{N_{k_n}(C)}} \cup \gamma_{T_n}([0, 1])$$

separa  $C$ . Portanto,  $B(\gamma_{S_n}([0, 1]) \cup [\gamma_{S_n}(1), \gamma_{T_n}(1)]_{f^{N_{k_n}(C)}} \cup \gamma_{T_n}([0, 1])) \subset V_n$ . Como

$$D(\gamma_{S_n}, \gamma_{T_n}, N_{k_n}) = B(\gamma_{S_n}([0, 1]) \cup [\gamma_{S_n}(1), \gamma_{T_n}(1)]_{f^{N_{k_n}(C)}} \cup \gamma_{T_n}([0, 1])),$$

temos que  $D(\gamma_{S_n}, \gamma_{T_n}, N_{k_n}) \subset V_n$ . □

### 3.3 O homeomorfismo $\hat{f}$

O objetivo desta seção é definir, a partir de uma família de endcuts  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  como construída na seção anterior, um homeomorfismo do círculo  $\hat{f} : S^1 \rightarrow S^1$ , que reflete alguns aspectos da dinâmica de  $f$  sobre o atrator global  $\Sigma$ . A construção de  $\hat{f}$ , ao contrário da construção de  $\bar{f}$ , não está unicamente definida a menos de uma translação do círculo, mas depende da escolha da seqüência  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ .

No entanto, como veremos adiante,  $\hat{f}^q$  possui um ponto fixo para um inteiro  $q > 0$  se, e somente se, o mesmo é válido para  $\bar{f}^q$ .

A seguir, utilizaremos o modelo aditivo de  $S^1$ , isto é, o intervalo  $[0, 1]$  com os seus pontos extremos identificados, e munido de uma estrutura de soma módulo um.

Necessitaremos das seguintes definições:

**Definição 3.3.1** Consideremos o círculo  $S^1$  munido com a orientação anti-horária. Dois pontos  $a, b \in S^1$ , com  $a \neq b$ , determinam de maneira única um arco  $[a, b] \subset S^1$  com extremo inicial em  $a$  e extremo final em  $b$ . Se  $c \in S^1$ , escrevemos  $a < c < b$  caso  $c \in (a, b)$ , onde  $(a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\}$ .

**Definição 3.3.2** Sejam  $n \geq 3$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  endcuts disjuntos e  $x_1, \dots, x_n$  pontos distintos em  $S^1$ . Dizemos que  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  e  $(x_1, \dots, x_n)$  têm a mesma ordem caso  $\gamma_i < \gamma_j < \gamma_k$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  se, e somente se,  $x_i < x_j < x_k$ , para  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Observação 3.3.3** Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+r}$  endcuts disjuntos,  $n, r > 0$  em  $\mathbb{N}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\gamma_{e(i)}$  o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ , e  $\{x_1, \dots, x_{n+r}\} \subset S^1$ .

Suponhamos que:

- $\gamma_{e(i)} < \gamma_{n+1} < \dots < \gamma_{n+r} < \gamma_i$ ,
- $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  e  $(x_1, \dots, x_n)$  têm a mesma ordem, e
- $x_{e(i)} < x_{n+1} < \dots < x_{n+r} < x_i$  em  $S^1$ .

Como  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  e  $(x_1, \dots, x_n)$  têm a mesma ordem,  $x_{e(i)}$  é o vizinho à esquerda de  $x_i$  em  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Então,  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+r})$  e  $(x_1, \dots, x_{n+r})$  têm a mesma ordem.

**Definição 3.3.4** Sejam  $n \geq 2$  em  $\mathbb{N}$ , e  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \subset S^1$  tais que:

- $x_{(i-1) \bmod n} < x_i < x_{(i+1) \bmod n}$ , e
- $y_{(i-1) \bmod n} < y_i < y_{(i+1) \bmod n}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Seja também  $h : S^1 \rightarrow S^1$  o único homeomorfismo linear por partes do círculo que preserva orientação e satisfaz  $h(x_i) = y_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Neste caso, dizemos que  $h$  é o homeomorfismo linear por partes gerado por  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$ .

**Observação 3.3.5** Denotaremos por  $\text{Homeo}^+(S^1)$  o conjunto de todos os homeomorfismos do círculo que preservam orientação. O homeomorfismo  $\hat{f}$  (que mencionamos no início desta desta

seção) será definido como o limite de uma seqüência de homeomorfismos  $\{\hat{f}_k\}_{k \geq 1} \subset \text{Homeo}_+(S^1)$ , definidos utilizando indução sobre  $k \geq 1$ .

Esboçaremos agora a construção do homeomorfismo  $\hat{f}_k : S^1 \rightarrow S^1$ , para cada natural  $k \geq 1$ . Lembramos que no  $k$ -ésimo passo indutivo da construção de  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ , estão definidos os endcuts  $\gamma_1, \dots, \gamma_{M(k)}$ .

Inicialmente, associamos a cada endcut  $\gamma_n \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_{M(k)}\}$ , um ponto do círculo  $x_n$ , de maneira que  $(\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]})$  e  $(x_1, \dots, x_{M(k)})$  tenham a mesma ordem.

Utilizando o fato dos pontos base

$$\gamma_1(0), \dots, \gamma_{M(k)}(0)$$

terem órbitas disjuntas, associamos a cada endcut  $f \circ \gamma_n|_{[0, \epsilon_k]} \in \{f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}\}$  um ponto  $\hat{f}_k(x_n) \in S^1 \setminus \{x_1, \dots, x_{M(k)}\}$ , de maneira que

$$(\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]})$$

e

$$(x_1, \dots, x_{M(k)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)}))$$

tenham a mesma ordem, onde  $\{\epsilon_k\}_{k \geq 1}$  foi definido na Observação 3.1.2. Finalmente, definiremos  $\hat{f}_k$  como o homeomorfismo linear por partes gerado por  $(x_1, \dots, x_{M(k)})$  e  $(\hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)}))$ .

Na proposição a seguir, definimos o homeomorfismo  $\hat{f}$ .

**Proposição 3.3.6** Existe uma seqüência de homeomorfismos  $\{\hat{f}_k\}_{k \geq 1} \subset \text{Homeo}_+(S^1)$  e pontos  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset S^1$  de maneira que para cada  $k \geq 1$ :

**Q1**

$$(\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]})$$

e

$$(x_1, \dots, x_{M(k)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)}))$$

têm a mesma ordem,

**Q2**  $\{x_n\}_{n=M(k-1)+1}^{M(k)}$  é  $\frac{1}{k}$ -denso em  $S^1$ , onde consideramos  $S^1$  munido com a métrica Riemanniana,

**Q3** Se  $1 \leq j < k$ , então  $\hat{f}_j(x_i) = \hat{f}_k(x_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, M(j)\}$ , e

**Q4** Se  $k \geq 1$ , então  $\{\hat{f}_k(x_n)\}_{n=1}^{M(k)}$  não intersecta o conjunto  $\{\frac{x_n - x_{e(n)}}{2}\}_{n=1}^{M(k)}$ , onde  $\gamma_{e(n)}$  denota o vizinho à esquerda de  $\gamma_n$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{M(k)}\}$ , para cada  $n \in \{1, \dots, M(k-1)\}$ .

Além disto, o limite  $\hat{f} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_k$  existe, e pertence a  $\text{Homeo}_+(S^1)$ .

**Observação 3.3.7** De acordo com a Definição 3.3.2, a Propriedade Q1 equivale à seguinte afirmação:

Seja  $\{i, j, l\} \subset \{1, \dots, M(k)\}$ . Então  $\hat{f}_k(x_i) \in (\hat{f}_k(x_j), \hat{f}_k(x_l))$  se, e somente se,  $f \circ \gamma_j|_{[0, \epsilon_k]} < f \circ \gamma_i|_{[0, \epsilon_k]} < f \circ \gamma_l|_{[0, \epsilon_k]}$ .

**Demonstração:**

A construção de  $\{\hat{f}_k\}_{k \geq 1}$  é feita através de indução sobre  $k \geq 1$ .

Construiremos inicialmente  $\hat{f}_1$ . Assim, supomos  $k = 1$ .

Sem perda de generalidade, podemos reindexar os endcuts  $\gamma_1, \dots, \gamma_{M(1)}$ , de maneira que

$$\gamma_1 < \dots < \gamma_i < \gamma_{i+1} < \dots < \gamma_{M(1)},$$

ou seja, para cada  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$ , o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{M(1)}\}$  é  $\gamma_{(i-1) \bmod M(1)}$ . Também supomos que os endcuts da forma  $\gamma_i$  são indexados módulo  $M(1)$ .

Definimos para  $i = 1, \dots, M(1)$ ,  $x_i = \frac{i-1}{M(1)+1}$ . Então  $(x_1, \dots, x_{M(1)})$  e  $(\gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]})$  têm a mesma ordem, onde  $\epsilon_1$  está fixado de acordo com a Observação 3.1.2.

Para  $k = 1$  a propriedade Q2 é satisfeita de maneira trivial, enquanto a Propriedade Q3 é satisfeita por vacuidade.

De acordo com a Proposição 2.3.25,

$$X_1 = \bigcup_{i=1}^{M(1)} (\gamma_i|_{[0, \epsilon_1]} \cup D(\gamma_i|_{[0, \epsilon_1]}, \gamma_{i-1}|_{[0, \epsilon_1]}, L_1) \cup \gamma_{i-1}|_{[0, \epsilon_1]})$$

é uma vizinhança de  $\Sigma$ , onde  $L_1$  foi definido na Observação (3.1.3) como

$$L_1 = L(\gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, f \circ \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]}).$$

Portanto, podemos tomar  $r_1 > 0$  pequeno o suficiente de forma que  $f \circ \gamma_i([0, r_1]) \subset X_1$ , para cada  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$ .

Assim, para cada  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$ , existe  $a(i) \in \{1, \dots, M(1)\}$  tal que

$$f \circ \gamma_i([0, r_1]) \subset D(\gamma_{a(i)}|_{[0, \epsilon_1]}, \gamma_{a(i)-1}|_{[0, \epsilon_1]}, L_1),$$

e portanto,  $\gamma_{a(i)-1}|_{[0, \epsilon_1]} < f \circ \gamma_i < \gamma_{a(i)}|_{[0, \epsilon_1]}$ , ou ainda,

$$\gamma_{a(i)-1}|_{[0, \epsilon_1]} < f \circ \gamma_i|_{[0, \epsilon_1]} < \gamma_{a(i)}|_{[0, \epsilon_1]}.$$

Como  $f \circ \gamma_i|_{[0, \epsilon_1]}$  possui um único vizinho à esquerda em  $\{\gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]}, f \circ \gamma_i|_{[0, \epsilon_1]}\}$ , segue que  $a(i)$  é único.

Para cada  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$ , utilizamos  $m(i)$  para denotar a cardinalidade do conjunto  $\{j \in \{1, \dots, M(1)\} \mid a(j) = i\}$ . Se  $m(i) > 0$ , existe um conjunto  $\{l_{i,1}, \dots, l_{i,m(i)}\} \subset \{1, \dots, M(1)\}$ , de modo que:

- $\bigcup_{i|m(i)>0} \{l_{i,1}, \dots, l_{i,m(i)}\} = \{1, \dots, M(1)\}$ , e
- $\gamma_{i-1} < f \circ \gamma_{l_{i,1}}|_{[0, \epsilon_1]} < \dots < f \circ \gamma_{l_{i,m(i)}}|_{[0, \epsilon_1]} < \gamma_i$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$  tal que  $m(i) > 0$ , dividimos o intervalo  $[x_{i-1}, x_i] \subset S^1$  em  $m(i) + 1$  subintervalos cujos extremos são dados por pontos  $x_{i-1} < y_{l_{i,1}} < \dots < y_{l_{i,m(i)}} < x_i$ , de forma que  $\{y_{l_{i,j}}\}_{j=1}^{m(i)}$  não contenha o ponto médio do intervalo  $[x_{i-1}, x_i] \subset S^1$ . Se  $j \in \{1, \dots, m(i)\}$ , definimos  $\hat{f}_1(x_{l_{i,j}}) = y_{l_{i,j}}$ , para  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$ , e  $j \in \{1, \dots, m(i)\}$ . Desta forma, vale a propriedade Q4 para  $k = 1$ .

Como  $\bigcup_{i|m(i)>0} \{l_{i,1}, \dots, l_{i,m(i)}\} = \{1, \dots, M(1)\}$ , definimos  $\hat{f}_1$  sobre  $\{x_1, \dots, x_{M(1)}\}$ .

Assim, para cada  $i \in \{1, \dots, M(1)\}$  tal que  $m(i) > 0$ , temos que

$$x_{i-1} < \hat{f}_1(x_{l_{i,1}}) < \dots < \hat{f}_1(x_{l_{i,m(i)}}) < x_i.$$

De acordo com a Observação 3.3.3,

$$(\gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_1]}, \dots, f \circ \gamma_{M(1)}|_{[0, \epsilon_1]})$$

e  $(x_1, \dots, x_{M(1)}, \hat{f}_1(x_1), \dots, \hat{f}_1(x_{M(1)}))$  têm a mesma ordem, e portanto, vale a Propriedade Q1 para  $k = 1$ .

Pelo Corolário 2.3.28, se  $i, j, k \in \{1, \dots, M(1)\}$ , e  $\gamma_i|_{[0, \epsilon_1]} < \gamma_j|_{[0, \epsilon_1]} < \gamma_k|_{[0, \epsilon_1]}$ , então

$$f \circ \gamma_i|_{[0, \epsilon_1]} < f \circ \gamma_j|_{[0, \epsilon_1]} < f \circ \gamma_k|_{[0, \epsilon_1]}.$$

Assim, podemos definir  $\hat{f}_1 : S^1 \rightarrow S^1$  como o homeomorfismo linear por partes gerado por  $(x_1, \dots, x_{M(1)})$  e  $(\hat{f}_1(x_1), \dots, \hat{f}_1(x_{M(1)}))$ .

Fixemos agora  $k > 1$ , a fim de definir  $\hat{f}_k$ .

Supomos que os endcuts da forma  $\gamma_n$  em  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(k-1)}$  estão indexados módulo  $M(k-1)$ . Definiremos indutivamente,  $\hat{f}_k \in \text{Homeo}_+(S^1)$ , a partir de  $\hat{f}_{k-1} \in \text{Homeo}_+(S^1)$ , dado que  $\{x_1, \dots, x_{M(k-1)}\} \subset S^1$  e  $\hat{f}_{k-1} \in \text{Homeo}_+(S^1)$  satisfazem as propriedades Q1-Q4.

Segue da construção de  $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$  que  $M(k) > 2M(k-1)$ . Inicialmente, definiremos os pontos  $x_{M(k-1)+1}, \dots, x_{2M(k-1)}$ .

Pela hipótese de indução,

$$(\gamma_1 |_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \dots, \gamma_{M(k-1)} |_{[0, \epsilon_{k-1}]}, f \circ \gamma_1 |_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k-1)} |_{[0, \epsilon_{k-1}]})$$

e  $(x_1, \dots, x_{M(k-1)}, \hat{f}_{k-1}(x_1), \dots, \hat{f}_{k-1}(x_{M(k-1)}))$  têm a mesma ordem.

Se  $i \in \{1, \dots, M(k-1)\}$ , então  $\gamma_{e(i)}$  denota o vizinho à esquerda de  $\gamma_i$  em  $\{1, \dots, M(k-1)\}$ .

Segue da construção de  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M(k)}$  que  $\gamma_{M(k-1)+i}$  satisfaz  $\gamma_{e(i)} |_{[0, \epsilon_{k-1}]} < \gamma_{M(k-1)+i} < \gamma_i |_{[0, \epsilon_{k-1}]}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, M(k-1)\}$ .

Definimos para  $i \in \{1, \dots, M(k-1)\}$ ,

(i)  $x_{M(k-1)+i} = \frac{x_i + x_{e(i)}}{2}$ , e

(ii)  $\hat{f}_k(x_i) = \hat{f}_{k-1}(x_i)$ .

O item (i) garante a validade da propriedade Q2, pois no  $k$ -ésimo passo da indução definimos  $x_{M(k-1)+1}, \dots, x_{2M(k-1)}$  como sendo os pontos médios dos intervalos em  $S^1 \setminus \{x_1, \dots, x_{M(k-1)}\}$ . Isto implica que a seqüência  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  é densa em  $S^1$ . Esta densidade será utilizada para definir  $\hat{f}$  em  $S^1$  como a única extensão contínua de  $\hat{f} : \{x_n\}_{n \geq 1} \rightarrow [0, 1]$ .

O item (ii) garante a validade da propriedade Q3.

Pela propriedade Q4 da hipótese de indução, temos que

$$\left\{ \frac{x_i + x_{e(i)}}{2} \right\}_{i=1}^{M(k-1)} \cap \{ \hat{f}_{k-1}(x_i) \}_{i=1}^{M(k-1)} = \emptyset,$$

e logo  $\{x_{M(k-1)+i}\}_{i=1}^{M(k-1)} \cap \{\hat{f}_k(x_i)\}_{i=1}^{M(k-1)} = \emptyset$ . Portanto,  $x_1, \dots, x_{2M(k-1)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k-1)})$  são pontos distintos entre si.

Da Observação 3.3.2, segue que:

**Observação 3.3.8** As  $3M(k-1)$ -uplas

$$(x_1, \dots, x_{2M(k-1)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k-1)}))$$

e

$$(\gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \dots, \gamma_{2M(k-1)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_{k-1}]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k-1)}|_{[0, \epsilon_{k-1}]})$$

têm a mesma ordem.

Definiremos agora  $\hat{f}_k(x_i)$ , para  $i \in \{M(k-1)+1, \dots, 2M(k-1)\}$ .

Seja

$$E = \{\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{2M(k-1)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k-1)}|_{[0, \epsilon_k]}\}. \quad (3.3)$$

A partir deste ponto, se  $\gamma \in E$ ,  $\bar{\gamma}$  denotará o vizinho à esquerda de  $\gamma$  em  $E$ .

De acordo com a Proposição 2.3.25,

$$X = \bigcup_{\gamma \in E} (\gamma|_{[0, \epsilon_k]} \cup D(\gamma|_{[0, \epsilon_k]}, \bar{\gamma}|_{[0, \epsilon_k]}, L_k) \cup \bar{\gamma}|_{[0, \epsilon_k]})$$

é uma vizinhança de  $\Sigma$ , onde o inteiro  $L_k$  é definido na Observação (3.1.3).

Portanto, podemos tomar  $r_k \in (0, \epsilon_k)$  pequeno o suficiente, de forma que  $f \circ \gamma_u([0, r_k]) \subset X$ , para cada  $u \in \{M(k-1)+1, \dots, 2M(k-1)\}$ .

Seja

$$I = \{(i, j) \in \{0, 1\} \times \{1, \dots, M(k-1)\} \cup \{0\} \times \{M(k-1)+1, \dots, 2M(k-1)\}\},$$

ou seja;  $E = \{f^i \circ \gamma_j|_{[0, \epsilon_k]} \text{ tal que } (i, j) \in I\}$ .

Para cada  $u \in \{M(k-1)+1, \dots, 2M(k-1)\}$ , existe um único par ordenado  $(\alpha(u), \beta(u)) \in I$ , de forma que

$$f \circ \gamma_u([0, r_k]) \subset D(f^{\alpha(u)} \circ \gamma_{\beta(u)}|_{[0, \epsilon_k]}, \overline{f^{\alpha(u)} \circ \gamma_{\beta(u)}|_{[0, \epsilon_k]}}, L_k).$$

Assim,  $\overline{f^{\alpha(u)} \circ \gamma_{\beta(u)}|_{[0, \epsilon_k]}} < f \circ \gamma_u|_{[0, r_k]} < f^{\alpha(u)} \circ \gamma_{\beta(u)}|_{[0, \epsilon_k]}$ , ou ainda,

$$\overline{f^{\alpha(u)} \circ \gamma_{\beta(u)}|_{[0, \epsilon_k]}} < f \circ \gamma_u|_{[0, \epsilon_k]} < f^{\alpha(u)} \circ \gamma_{\beta(u)}|_{[0, \epsilon_k]},$$

em  $E$  (ver a Definição 2.3.18).

Para cada par ordenado  $p = (i, j) \in I$ , seja  $m_p$  a cardinalidade do conjunto

$$E_p = \{M(k-1) + 1 \leq u \leq 2M(k-1) \mid \alpha(u) = i \text{ e } \beta(u) = j\}.$$

Se  $m_p > 0$ , podemos escrever  $E_p$  como  $\{l(p, 1), \dots, l(p, m_p)\} \subset \{M(k-1) + 1, \dots, 2M(k-1)\}$ , de forma que:

$$\bigcup_{p \in I \mid m_p > 0} E_p = \{M(k-1) + 1, \dots, 2M(k-1)\}, \quad (3.4)$$

e caso  $m_p > 0$ ,

$$\overline{f^i \circ \gamma_j \mid_{[0, \epsilon_k]} < f \circ \gamma_{l(p, 1)} \mid_{[0, \epsilon_k]} < \dots < f \circ \gamma_{l(p, m_p)} \mid_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j \mid_{[0, \epsilon_k]}. \quad (3.5)$$

Para cada par ordenado  $p = (i, j) \in I$ , a Proposição 2.3.23 garante que existe um par ordenado  $(s(p), t(p)) \in I$ , tal que  $f^s \circ \gamma_t \mid_{[0, \epsilon_k]}$  é o vizinho à esquerda de  $f^i \circ \gamma_j \mid_{[0, \epsilon_k]}$  em  $E$ , onde o conjunto  $E$  é definido no item (3.3), e abreviamos  $s(p)$  e  $t(p)$  por  $s$  e  $t$ , respectivamente.

Segue de (3.5) que

$$f^s \circ \gamma_t \mid_{[0, \epsilon_k]} < f \circ \gamma_{l(p, 1)} \mid_{[0, \epsilon_k]} < \dots < f \circ \gamma_{l(p, m_p)} \mid_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j \mid_{[0, \epsilon_k]}.$$

Pela Observação 3.3.8, temos que  $\hat{f}_k^s(x_t)$  é o vizinho à esquerda de  $\hat{f}_k^i(x_j)$  em

$$(x_1, \dots, x_{M(2k-1)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k-1)})).$$

Assim, dividimos cada intervalo  $[\hat{f}_k^s(x_t), \hat{f}_k^i(x_j)]$  em  $m_p + 1$  subintervalos, cujos extremos são dados por pontos  $\hat{f}_k^s(x_t) < \hat{f}_k(x_{l(p, 1)}) < \dots < \hat{f}_k(x_{l(p, m_p)}) < \hat{f}_k^i(x_j)$  de maneira que, para todo  $i \in \{M(k-1) + 1, \dots, 2M(k-1)\}$ ,  $\{\hat{f}_k(x_i)\}_{i=M(k-1)+1}^{2M(k-1)}$  não intersecta o conjunto dos pontos  $\{\frac{x_i + x_{e(i)}}{2}\}_{i=1}^{2M(k-1)}$ , onde  $x_{e(i)}$  denota o vizinho à esquerda de  $x_i$  em  $\{x_1, \dots, x_{2M(k-1)}\}$ .

De acordo com a igualdade (3.4), definimos  $\hat{f}_k$  sobre o conjunto  $\{x_{M(k-1)+1}, \dots, x_{2M(k-1)}\}$ . Além disto, temos que

(iii)

$$(x_1, \dots, x_{2M(k-1)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{2M(k-1)}))$$



e

$$(\gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{2M(k-1)} |_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{2M(k-1)} |_{[0, \epsilon_k]})$$

têm a mesma ordem, e

(iv) O conjunto  $\{\hat{f}_k(x_i)\}_{i=1}^{2M(k-1)}$  é disjunto do conjunto  $\{\frac{x_i + x_{e(i)}}{2}\}_{i=1}^{2M(k-1)}$ .

O próximo passo é definir os pontos  $x_{2M(k-1)+1}, \dots, x_{M(k)}$ . Seja

$$F = \{\gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{2M(k-1)} |_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{2M(k-1)} |_{[0, \epsilon_k]}\}.$$

A seguir, se  $\gamma \in F$ ,  $\bar{\gamma}$  denotará o vizinho à esquerda de  $\gamma$  em  $F$ .

Seja

$$J = \{(i, j) \in \{0, 1\} \times \{1, \dots, 2M(k-1)\}\}. \quad (3.6)$$

De acordo com a Proposição 2.3.25,

$$Y = \bigcup_{\gamma \in F} (\gamma \cup D(\gamma |_{[0, \epsilon_k]}, \bar{\gamma} |_{[0, \epsilon_k]}, L_k) \cup \bar{\gamma} |_{[0, \epsilon_k]})$$

é uma vizinhança de  $\Sigma$ .

Portanto, podemos fixar  $\epsilon \in (0, \epsilon_k)$  pequeno o suficiente, de maneira que para cada  $u \in \{2M(k-1) + 1, \dots, M(k)\}$ , existe um único par ordenado  $(i, j) \in J$  tal que  $\gamma_u((0, \epsilon)) \subset D(f^i \circ \gamma_j, \overline{f^i \circ \gamma_j}, L_k)$ .

Para cada par ordenado  $p = (i, j) \in J$ , seja

$$F_p = \{2M(k-1) + 1 \leq l \leq M(k) \mid \overline{f^i \circ \gamma_j |_{[0, \epsilon_k]}} < \gamma_l |_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j |_{[0, \epsilon_k]}\}.$$

Denotamos por  $n_p$  a cardinalidade do conjunto  $F_p$ . Então

$$\bigcup_{p \in J | n_p > 0} F_p = \{2M(k-1) + 1, \dots, M(k)\} \quad (3.7)$$

Se  $n_p > 0$ , podemos escrever  $F_p$  como

$$\{w(p, 1), \dots, w(p, n_p)\},$$

e de modo que:

$$\overline{f^i \circ \gamma_j |_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_{w(p,1)} |_{[0, \epsilon_k]} < \dots < \gamma_{w(p, n_p)} |_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j |_{[0, \epsilon_k]}. \quad (3.8)}$$

Para  $p \in J$ , existe um único par ordenado  $(\bar{s}(p), \bar{t}(p)) \in J$ , tal que  $f^{\bar{s}} \circ \gamma_{\bar{t}} |_{[0, \epsilon_k]}$  é o vizinho à esquerda de  $f^i \circ \gamma_j |_{[0, \epsilon_k]}$  em  $F$ , onde abreviamos  $\bar{s}(p)$  por  $\bar{s}$  e  $\bar{t}(p)$  por  $\bar{t}$ .

Segue de (3.8) que

$$f^{\bar{s}} \circ \gamma_{\bar{t}} |_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_{w(p,1)} |_{[0, \epsilon_k]} < \dots < \gamma_{w(p, n_p)} |_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j |_{[0, \epsilon_k]}.$$

Do item (iii), segue que  $f_k^{\bar{s}}(x_{\bar{t}})$  é o vizinho à esquerda de  $f_k^i(x_j)$  em

$$(x_1, \dots, x_{2M(k-1)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{2M(k-1)})).$$

Assim, se  $p \in J$  e  $n_p > 0$ , dividimos cada intervalo  $[f_k^{\bar{s}}(x_{\bar{t}}), f_k^i(x_j)]$  em  $n_p + 1$  subintervalos, cujos extremos são dados por pontos  $f_k^{\bar{s}}(x_{\bar{t}}) < x_{w(p,1)} < \dots < x_{w(p, n_p)} < f_k^i(x_j)$ , de maneira que, para todo  $i \in \{2M(k-1) + 1, \dots, M(k)\}$ ,  $\frac{x_i + x_{e(i)}}{2}$  não pertence ao conjunto  $\{\hat{f}_k(x_i)\}_{i=1}^{2M(k-1)}$ , onde  $x_{e(i)}$  denota o vizinho à esquerda de  $x_i$  em  $\{x_1, \dots, x_{M(k)}\}$ .

**Observação 3.3.9** *Portanto, segue da Observação 3.3.3 que*

$$(x_1, \dots, x_{M(k)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{2M(k-1)}))$$

e

$$(\gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)} |_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{2M(k-1)} |_{[0, \epsilon_k]})$$

têm a mesma ordem.

Resta definir os pontos  $\hat{f}_k(x_{2M(k-1)+1}), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)})$ .

Seja

$$G = \{\gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)} |_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1 |_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{2M(k-1)} |_{[0, \epsilon_k]}\}.$$

A partir deste ponto, se  $\gamma \in G$ ,  $\bar{\gamma}$  denotará o vizinho à esquerda de  $\gamma$  em  $G$ .

Seja

$$K = \{(i, j) \in \{0, 1\} \times \{1, \dots, 2M(k-1)\} \cup \{0\} \times \{2M(k-1) + 1, \dots, M(k)\}\}.$$

De acordo com a Proposição 2.3.25,

$$Z = \bigcup_{\gamma \in G} (\gamma \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} \cup D(\gamma \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}, \bar{\gamma} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}, L_k) \cup \overline{\gamma \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}})$$

é uma vizinhança de  $\Sigma$ , e portanto, se  $r \in (0, \epsilon_k)$  for pequeno o suficiente, temos que para cada  $l \in \{2M(k-1) + 1, \dots, M(k)\}$ , existe um único par ordenado  $(a(l), b(l)) \in K$ , de forma que

$$f \circ \gamma_l([0, r]) \subset D(f^{a(l)} \circ \gamma_{b(l)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}, \overline{f^{a(l)} \circ \gamma_{b(l)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}}, L_k).$$

Assim,  $\overline{f^{a(l)} \circ \gamma_{b(l)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}} < f \circ \gamma_l \upharpoonright_{[0, r]} < f^{a(l)} \circ \gamma_{b(l)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}$ , ou ainda,

$$\overline{f^{a(l)} \circ \gamma_{b(l)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}} < f \circ \gamma_l \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < f^{a(l)} \circ \gamma_{b(l)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}.$$

Para cada par ordenado  $p = (i, j) \in K$ , denotamos por  $G_p$  o conjunto

$$\{2M(k-1) \leq l \leq M(k) \mid \overline{f^i \circ \gamma_j \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}} < f \circ \gamma_l \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}\}.$$

Seja  $o_p$  a cardinalidade do conjunto  $G_p$ . Se  $o_p > 0$ , podemos escrever  $G_p$  como  $\{g(p, 1), \dots, g(p, o_p)\}$ . Assim,

(v)  $\bigcup_{p \in K \mid o_p > 0} G_p = \{2M(k-1) + 1, \dots, M(k)\}$ ,  
e caso  $o_p > 0$ ,

(vi)  $\overline{f^i \circ \gamma_j \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}} < f \circ \gamma_{g(p, 1)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < \dots < f \circ \gamma_{g(p, o_p)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}$ .

Para  $p = (i, j) \in K$ , existe um único par ordenado  $(\tilde{s}(p), \tilde{t}(p)) \in K$ , tal que  $f^{\tilde{s}} \circ \gamma_{\tilde{t}} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}$  é o vizinho à esquerda de  $f^i \circ \gamma_j \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}$  em  $G$ , onde abreviamos  $\tilde{s}(p)$  por  $\tilde{s}$ , e  $\tilde{t}(p)$  por  $\tilde{t}$ .

Do item (vi) segue que

$$f^{\tilde{s}} \circ \gamma_{\tilde{t}} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < f \circ \gamma_{g(p, 1)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < \dots < f \circ \gamma_{g(p, o_p)} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < f^i \circ \gamma_j \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}.$$

Da Observação 3.3.9, segue que  $\hat{f}_k^{\tilde{s}}(x_{\tilde{t}})$  é o vizinho à esquerda de  $\hat{f}_k^i(x_j)$  em

$$(x_1, \dots, x_{M(k)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{2M(k-1)})).$$

Se  $p = (i, j) \in K$  e  $o_p > 0$ , definimos os pontos  $\{\hat{f}_k(x_{g(p,1)}), \dots, \hat{f}_k(x_{g(p,o_p)})\}$  da seguinte maneira: dividimos o intervalo  $[\hat{f}_k^{\tilde{s}}(x_{\tilde{i}}), \hat{f}_k^{\tilde{i}}(x_j)]$  em  $o_p + 1$  subintervalos, cujos extremos são

$$\hat{f}_k^{\tilde{s}}(x_{\tilde{i}}) < \hat{f}_k(x_{g(p,1)}) < \dots < \hat{f}_k(x_{g(p,o_p)}) < \hat{f}_k^{\tilde{i}}(x_j),$$

de maneira que, para todo  $g \in \{g(p,1), \dots, g(p,o_p)\}$ ,  $\hat{f}_k(x_g)$  não pertence a  $\{\frac{x_i + x_{e(i)}}{2}\}_{i=1}^{M(k)}$ , onde  $x_{e(i)}$  denota o vizinho à esquerda de  $x_i$  em  $\{x_1, \dots, x_{M(k)}\}$ .

Do item (v), segue que definimos os pontos  $\{\hat{f}_k(x_{2M(k-1)+1}), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)})\}$ , e do item (iv), segue que  $\{\hat{f}_k(x_{2M(k-1)+1}), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)})\}$  não intersecta  $\{\frac{x_i + x_{e(i)}}{2}\}_{i=1}^{M(k)}$ .

Portanto, vale a Propriedade Q4 para  $k$ .

Além disto, da Observação 3.3.3, temos que

$$(x_1, \dots, x_{M(k)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)}))$$

e

$$(\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]})$$

têm a mesma ordem. Assim, a Propriedade Q1 é satisfeita para  $k$ .

Assim, definimos  $\hat{f}_k: S^1 \rightarrow S^1$  como o homeomorfismo linear por partes gerado por

$$(x_1, \dots, x_{M(k)}, \hat{f}_k(x_1), \dots, \hat{f}_k(x_{M(k)}))$$

e

$$(\gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}, f \circ \gamma_1|_{[0, \epsilon_k]}, \dots, f \circ \gamma_{M(k)}|_{[0, \epsilon_k]}).$$

O limite de  $\{\hat{f}_k\}_{k \geq 1}$  existe, e para que seja um homeomorfismo que preserva orientação, é suficiente que não exista um intervalo  $(a, b) \subset S^1$  onde  $\hat{f}$  é constante.

Seja  $k \geq 1$  tal que o comprimento de  $(a, b)$  é maior do que  $\frac{2}{k}$ .

Sabemos que a função  $\hat{f}_k$  coincide com  $\hat{f}$ , quando restrita ao conjunto  $\{x_1, \dots, x_{M(k)}\}$ .

Como o conjunto  $\{x_n\}_{n=1}^{M(k)}$  é  $\frac{1}{k}$ -denso em  $S^1$ , segue que existem  $i \neq j$  em  $\{1, \dots, M(k)\}$  tais que  $[x_i, x_j] \subset (a, b)$ . Pela construção de  $\hat{f}_k$ ,  $\hat{f}_k(x_i) \neq \hat{f}_k(x_j)$ , mostrando assim, que  $\hat{f}_k$  não é constante em  $(a, b)$ , e portanto,  $\hat{f}$  também não é constante no intervalo  $(a, b)$ . Assim,  $\hat{f}$  é de fato um homeomorfismo do círculo que preserva orientação.  $\square$

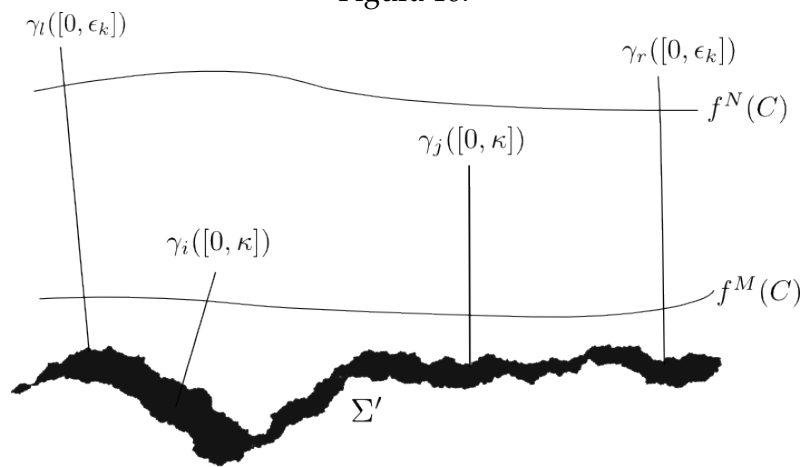
**Proposição 3.3.10** *Seja  $\{\epsilon_k\}_{k \geq 1}$  como na Observação 3.1.2. Sejam também  $\{i, j, k, l, r\} \subset \mathbb{N}$  de maneira que os endcuts  $\gamma_i|_{[0, \epsilon_k]}, \gamma_j|_{[0, \epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0, \epsilon_k]}$  e  $\gamma_r|_{[0, \epsilon_k]}$  são disjuntos entre si, e  $N > L(\gamma_i|_{[0, \epsilon_k]}, \gamma_j|_{[0, \epsilon_k]})$ .*

*Se  $[x_i, x_j] \subset (x_l, x_r)$ , então existem  $M > N$  e  $\kappa > 0$  tais que*

$$D(\gamma_j|_{[0, \kappa]}, \gamma_i|_{[0, \kappa]}, M) \subset D(\gamma_r|_{[0, \epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0, \epsilon_k]}, N).$$

**Demonstração:**

Figura 10:



Como  $[x_i, x_j] \subset (x_l, x_r)$ , segue da propriedade Q1 (enunciada na Proposição 3.3.6), que

- $\gamma_l|_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_i|_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_r|_{[0, \epsilon_k]}$ , e
- $\gamma_l|_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_j|_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_r|_{[0, \epsilon_k]}$ .

Pela definição da relação  $<$ , existe  $\kappa \in (0, \epsilon_k)$  tal que  $\gamma_i((0, \kappa)) \cup \gamma_j((0, \kappa)) \subset D(\gamma_r|_{[0, \epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0, \epsilon_k]}, N)$ .

Aplicando a Proposição 2.3.21 ao conjunto de endcuts mutuamente disjuntos

$$\{\gamma_l|_{[0, \epsilon_k]}, \gamma_i|_{[0, \kappa]}, \gamma_j|_{[0, \kappa]}, \gamma_r|_{[0, \epsilon_k]}\},$$

temos que existe  $M > N$  tal que  $\gamma_l((0, 1)) \cup \gamma_r((0, 1)) \subset D(\gamma_j|_{[0, \kappa]}, \gamma_i|_{[0, \kappa]}, M)^c$ . De acordo com a demonstração da Proposição 2.3.21, temos ainda que  $A(\gamma_j|_{[0, \kappa]}, \gamma_i|_{[0, \kappa]}, M) \cap (\gamma_r((0, 1)) \cup \gamma_l((0, 1))) = \emptyset$ .

As pontes  $A(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N)$  e  $A(\gamma_j|_{[0,\kappa]}, \gamma_i|_{[0,\kappa]}, M)$  são disjuntas, logo  $\gamma_i((0, \kappa)) \cup A(\gamma_j|_{[0,\kappa]}, \gamma_i|_{[0,\kappa]}, M) \cup \gamma_j((0, \kappa))$  não intersecta  $\gamma_r((0, \epsilon_k)) \cup A(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N) \cup \gamma_r((0, \epsilon_k)) \cup \Sigma$ , ou seja,  $\gamma_i((0, \kappa)) \cup A(\gamma_j|_{[0,\kappa]}, \gamma_i|_{[0,\kappa]}, M) \cup \gamma_j((0, \kappa))$  não intersecta a fronteira de  $D(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N)$ .

Como a fronteira de  $D(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N)$  separa o plano em duas componentes conexas,  $\gamma_i((0, \kappa)) \subset D(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N)$  e  $\gamma_i((0, \kappa)) \cup A(\gamma_j|_{[0,\kappa]}, \gamma_i|_{[0,\kappa]}, M) \cup \gamma_j((0, \kappa))$  é um conjunto conexo, temos que  $\gamma_i((0, \kappa)) \cup A(\gamma_j|_{[0,\kappa]}, \gamma_i|_{[0,\kappa]}, M) \cup \gamma_j((0, \kappa)) \subset D(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N)$ .

Segue da Proposição 2.3.12 que  $D(\gamma_j|_{[0,\kappa]}, \gamma_i|_{[0,\kappa]}, M) \subset D(\gamma_r|_{[0,\epsilon_k]}, \gamma_l|_{[0,\epsilon_k]}, N)$ .  $\square$

**Proposição 3.3.11** *Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um difeomorfismo satisfazendo as condições da Conjectura DM-Y Modificada, tal que a origem não é um atrator global, e seja também  $q$  um inteiro positivo. Então  $\text{Fix}(\hat{f}^q) \subset S^1$  é não-vazio se, e somente se,  $\text{Fix}(\bar{f}^q) \subset S^1$  é não-vazio, onde consideramos  $S^1$  como a compactificação por fins primos de  $\Sigma$ .*

### Demonstração:

Primeiramente, mostraremos que se existe  $x \in \text{Fix}(\hat{f}^q)$ , para um inteiro positivo  $q$ , então  $\text{Fix}(\bar{f}^q) \neq \emptyset$ . No que segue, é suficiente considerar o caso  $q = 1$ , substituindo  $f^q$ ,  $\hat{f}^q$  e  $\bar{f}^q$  por  $f$ ,  $\hat{f}$  e  $\bar{f}$ , respectivamente.

Como  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  é denso em  $S^1$ , podemos tomar uma seqüência decrescente de intervalos abertos encaixados  $\{(x_{u_n}, x_{v_n})\}_{n \geq 1} \subset S^1$  tal que  $\bigcap_{n \geq 1} (x_{u_n}, x_{v_n}) = \{x\}$ .

Como  $x_{u_n} < x_{u_{n+1}} < x_{v_{n+1}} < x_{v_n}$ , para cada  $n \geq 1$ , segue da Proposição 3.3.10 que existe uma seqüência crescente de naturais  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  e uma seqüência decrescente  $\{\kappa_n\}_{n \geq 1} \subset (0, 1]$  tal que

$$D(\gamma_{v_{n+1}}|_{[0,\kappa_{n+1}]}, \gamma_{u_{n+1}}|_{[0,\kappa_{n+1}]}, Y_{n+1}) \subset D(\gamma_{v_n}|_{[0,\kappa_n]}, \gamma_{u_n}|_{[0,\kappa_n]}, Y_n),$$

para todo  $n \geq 1$ . Assim, definimos uma cadeia de  $\Sigma$ , que se escreve como  $\{D(\gamma_{v_n}|_{[0,\kappa_n]}, \gamma_{u_n}|_{[0,\kappa_n]}, Y_n)\}_{n \geq 1}$ .

Pelo Corolário 3.2.5, existe uma cadeia prima da forma  $\{D(\gamma_{b_n}, \gamma_{a_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$  que refina  $\{D(\gamma_{v_n}|_{[0,\kappa_n]}, \gamma_{u_n}|_{[0,\kappa_n]}, Y_n)\}_{n \geq 1}$ , onde  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{R_n\}_{n \geq 1}$  são seqüências de inteiros positivos, e  $R_{n+1} > R_n$ , para cada  $n \geq 1$ .

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$D(\gamma_{b_N}, \gamma_{a_N}, R_N) \subset D(\gamma_{v_n} \upharpoonright_{[0, \kappa_n]}, \gamma_{u_n} \upharpoonright_{[0, \kappa_n]}, Y_n).$$

Seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $M(k) > \max\{a_N, b_N, u_n, v_n\}$ . Então

$$\gamma_{u_n} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_{a_N} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_{b_N} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]} < \gamma_{v_n} \upharpoonright_{[0, \epsilon_k]}.$$

Segue que  $(x_{a_N}, x_{b_N}) \subset (x_{u_n}, x_{v_n}) \subset S^1$ .

Portanto,  $\bigcap_{n \geq 1} (x_{a_n}, x_{b_n}) = \{x\}$ .

A seguir, mostraremos que a cadeia prima  $\{D(\gamma_{b_n}, \gamma_{a_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$  é um representante de um ponto fixo  $y \in \text{Fix}(\bar{f}) \subset S^1$ , caso existam seqüências  $\{S_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{T_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{Z_n\}_{n \geq 1}$  em  $\mathbb{N}$  e  $\{r_n\}_{n \geq 1} \subset (0, 1]$ , tais que

- (i)  $Z_n > R_n$ , para todo  $n \geq 1$ ,
- (ii)  $\{D(\gamma_{b_{T_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, Z_n)\}_{n \geq 1}$  é uma cadeia, e
- (iii)  $\{f(D(\gamma_{b_{T_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, Z_n))\}_{n \geq 1}$  refina  $\{D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$ .

De fato, suponhamos por ora que existam tais seqüências satisfazendo os itens (i)-(iii). Dos itens (i) e (ii) segue que  $\{D(\gamma_{b_{T_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, Z_n)\}_{n \geq 1}$  refina  $\{D(\gamma_{b_n}, \gamma_{a_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$ , e portanto,  $\{D(\gamma_{b_{T_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, Z_n)\}_{n \geq 1}$  também é uma cadeia prima. Assim, segue do item (iii), e da transitividade da relação “ $\sim$ ” que  $\{D(\gamma_{b_n}, \gamma_{a_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$  é equivalente à sua imagem por  $f$ .

Construiremos então, utilizando indução sobre  $n \geq 1$ , a cadeia  $\{D(\gamma_{b_{T_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, Z_n)\}_{n \geq 1}$ .

Por definição, o item (ii) equivale à afirmação de que para todo  $n \geq 1$ , temos que

$$D(\gamma_{b_{T_{n+1}}} \upharpoonright_{[0, r_{n+1}]}, \gamma_{a_{S_{n+1}}} \upharpoonright_{[0, r_{n+1}]}, Z_{n+1}) \subset D(\gamma_{b_{T_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} \upharpoonright_{[0, r_n]}, Z_n). \quad (3.9)$$

Para demonstrar a validade do item (iii), é suficiente mostrar que para cada  $n \geq 1$ , vale a inclusão

$$f(D(\gamma_{b_{T_{n+1}}} \upharpoonright_{[0, r_{n+1}]}, \gamma_{a_{S_{n+1}}} \upharpoonright_{[0, r_{n+1}]}, Z_{n+1})) \subset D(\gamma_{b_n}, \gamma_{a_n}, R_n). \quad (3.10)$$

Sejam, para cada  $n \geq 1$ ,  $S_n, T_n \geq 1$  de maneira que  $[\hat{f}(x_{a_{S_n}}), \hat{f}(x_{b_{T_n}})] \subset (x_{a_n}, x_{b_n})$ . Supomos, ainda, que  $x_{a_{S_n}} < x_{a_{S_{n+1}}} < x_{b_{T_{n+1}}} < x_{b_{T_n}}$ , para cada  $n \geq 1$ .

Isto é possível, visto que  $\{x_{a_n}\}_{n \geq 1}$  tende a  $x$  pela esquerda,  $\{x_{b_n}\}_{n \geq 1}$  tende a  $x$  pela direita,  $(x_{a_{n+1}}, x_{b_{n+1}}) \subset (x_{a_n}, x_{b_n})$ , para todo  $n \geq 1$  e  $\hat{f}(x) = x$ .

Como  $[\hat{f}(x_{a_{S_1}}), \hat{f}(x_{b_{T_1}})] \subset (x_{a_1}, x_{b_1})$ , segue da Proposição 3.3.10 a existência de um inteiro  $Z_1 > R_1$  e  $r_1 \in (0, \epsilon_{k_1}]$  tais que

$$D(f \circ \gamma_{b_{T_1}} \upharpoonright_{[0, r_1]}, f \circ \gamma_{a_{S_1}} \upharpoonright_{[0, r_1]}, Z_1 + 1) \subset D(\gamma_{b_1}, \gamma_{a_1}, R_1).$$

Utilizando a Proposição 2.3.27,

$$f(D(\gamma_{T_1} \upharpoonright_{[0, r_1]}, \gamma_{S_1} \upharpoonright_{[0, r_1]}, Z_1)) \subset D(\gamma_{b_1}, \gamma_{a_1}, R_1).$$

Como  $[x_{S_2}, x_{T_2}] \subset (x_{S_1}, x_{T_1})$ , pela Proposição 3.3.10, existem  $\theta_1 \in (0, r_1]$  e  $Q_1 > Z_1$  tais que

$$D(\gamma_{b_{T_2}} \upharpoonright_{[0, \theta_1]}, \gamma_{a_{S_2}} \upharpoonright_{[0, \theta_1]}, Q_1) \subset D(\gamma_{b_{T_1}} \upharpoonright_{[0, r_1]}, \gamma_{a_{S_1}} \upharpoonright_{[0, r_1]}, Z_1).$$

Como  $[\hat{f}(x_{S_2}), \hat{f}(x_{T_2})] \subset (x_{a_2}, x_{b_2})$ , novamente pela Proposição 3.3.10, existem  $r_2 \in [0, \theta_1]$  e  $Z_2 > Q_1$  tais que

$$D(f \circ \gamma_{b_{T_2}} \upharpoonright_{[0, r_2]}, f \circ \gamma_{a_{S_2}} \upharpoonright_{[0, r_2]}, Z_2 + 1) \subset D(\gamma_{b_1}, \gamma_{a_1}, R_1).$$

A Proposição 2.3.27 implica que

$$f(D(\gamma_{b_{T_2}} \upharpoonright_{[0, r_2]}, \gamma_{a_{S_2}} \upharpoonright_{[0, r_2]}, Z_2)) \subset D(\gamma_{b_1}, \gamma_{a_1}, R_1).$$

Além disto, como  $Z_2 > Q_1$  e  $r_2 \in (0, \theta_1)$ , segue do item (b) da Proposição 2.3.15 que

$$D(\gamma_{b_{T_2}} \upharpoonright_{[0, r_2]}, \gamma_{a_{S_2}} \upharpoonright_{[0, r_2]}, Z_2) \subset D(\gamma_{b_{T_1}} \upharpoonright_{[0, r_1]}, \gamma_{a_{S_1}} \upharpoonright_{[0, r_1]}, Z_1).$$

Assim, mostramos que valem as propriedades (3.9) e (3.10) para  $n = 1$ .

Seja  $n > 1$ .

Supomos que  $\{S_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{Z_i\}_{i=1}^n$  em  $\mathbb{N}$  e  $\{r_i\}_{i=1}^n \subset (0, 1]$  satisfazem as propriedades



(3.9) e (3.10) para  $n - 1$ .

Para completar o processo indutivo, é suficiente definir  $Z_{n+1}$  e  $r_{n+1}$  de modo que as propriedades (3.9) e (3.10) sejam satisfeitas para  $n$ .

Por hipótese, temos que  $[x_{a_{T_{n+1}}}, x_{s_{b_{n+1}}}] \subset (x_{a_{T_n}}, x_{s_{b_n}})$ . Pela Proposição 3.3.10, existem  $\theta \in (0, r_n)$  e  $Q > R_{n+1}$  em  $\mathbb{N}$  tais que

$$D(\gamma_{b_{T_{n+1}}} |_{[0, \theta]}, \gamma_{a_{S_{n+1}}} |_{[0, \theta]}, Q) \subset D(\gamma_{b_{T_n}} |_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} |_{[0, r_n]}, Z_n).$$

Como  $[\hat{f}(x_{a_{S_{n+1}}}), \hat{f}(x_{b_{T_{n+1}}})] \subset (x_{a_n}, x_{b_n})$ , segue que existem  $r_{n+1} \in (0, \theta)$  e  $Z_{n+1} > Q$  tais que

$$D(f \circ \gamma_{b_{T_{n+1}}} |_{[0, r_{n+1}]}, f \circ \gamma_{a_{S_{n+1}}} |_{[0, r_{n+1}]}, Z_{n+1} + 1) \subset D(\gamma_{b_{n+1}}, \gamma_{a_{n+1}}, R_{n+1}),$$

ou ainda,

$$f(D(\gamma_{b_{T_{n+1}}} |_{[0, r_{n+1}]}, \gamma_{a_{S_{n+1}}} |_{[0, r_{n+1}]}, Z_{n+1})) \subset D(\gamma_{b_{n+1}}, \gamma_{a_{n+1}}, R_{n+1}).$$

Além disto, como  $Z_{n+1} > Q$  e  $r_{n+1} \in (0, \theta)$ , segue do item (b) da Proposição 2.3.15 que

$$D(\gamma_{b_{T_{n+1}}} |_{[0, r_{n+1}]}, \gamma_{a_{S_{n+1}}} |_{[0, r_{n+1}]}, Z_{n+1}) \subset D(\gamma_{b_{T_n}} |_{[0, r_n]}, \gamma_{a_{S_n}} |_{[0, r_n]}, Z_n).$$

Portanto, são válidas as propriedades (3.9) e (3.10), para  $n$ , completando o processo indutivo.

A seguir, mostraremos que se existe  $x \in \text{Fix}(\bar{f}^q)$ , para algum inteiro positivo  $q$ , então  $\text{Fix}(\hat{f}^q) \neq \emptyset$ .

Novamente, é suficiente considerar o caso em que  $q = 1$ .

Então existe uma cadeia prima  $\{V_n\}_{n \geq 1}$  que é fixa por  $f$ , isto é  $\{V_n\}_{n \geq 1} \sim \{f(V_n)\}_{n \geq 1}$ . Pelo Corolário 3.2.5, existe cadeia prima da forma  $\{D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$  equivalente a  $\{V_n\}_{n \geq 1}$ .

Como  $f$  é um difeomorfismo e  $\{D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n)\}_{n \geq 1} \sim \{V_n\}_{n \geq 1}$ , temos que

$$\{f(D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n))\}_{n \geq 1} \sim \{f(V_n)\}_{n \geq 1}.$$

Segue da transitividade da relação “ $\sim$ ” que a cadeia  $\{D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$  é equivalente à sua imagem por  $f$ .

Como  $D(\gamma_{a_{n+1}}, \gamma_{b_{n+1}}, R_{n+1}) \subset D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n)$ , segue que  $[x_{b_{n+1}}, x_{a_{n+1}}] \subset (x_{b_n}, x_{a_n})$ , para

cada  $n \geq 1$ . Seja  $I = \bigcap_{n \geq 1} [x_{b_n}, x_{a_n}] \subset S^1$ . Então  $I$  é um intervalo ou um ponto.

A cadeia prima  $\{D(\gamma_{a_n}, \gamma_{b_n}, R_n)\}_{n \geq 1}$  é equivalente à sua imagem, logo para todo  $n \geq 1$ , existe  $N = N(n) > n$  tal que

$$D(f \circ \gamma_{b_N}, f \circ \gamma_{a_N}, R_N) \subset D(\gamma_{b_n}, \gamma_{a_n}, R_n).$$

Portanto, se  $k \geq 1$  é tal que  $M(k) > \max\{a_n, b_n, a_N, b_N\}$ , temos que

$$\gamma_{b_n} |_{[0, \epsilon_k]} \prec f \circ \gamma_{b_N} |_{[0, \epsilon_k]} \prec f \circ \gamma_{a_N} |_{[0, \epsilon_k]} \prec \gamma_{a_n} |_{[0, \epsilon_k]}.$$

Assim,  $[\hat{f}(x_{b_N}), \hat{f}(x_{a_N})] \subset (x_{b_n}, x_{a_n})$ , para cada  $n \geq 1$ . Portanto, temos que  $\hat{f}(I) = \hat{f}\left(\bigcap_{n \geq 1} [x_{a_n}, x_{a_n}]\right) = \hat{f}\left(\bigcap_{n \geq 1} [x_{b_{N(n)}}, x_{a_{N(n)}}]\right) = \bigcap_{n \geq 1} \hat{f}([x_{b_{N(n)}}, x_{a_{N(n)}}]) \subset \bigcap_{n \geq 1} [x_{a_n}, x_{a_n}] = I$ .

Como  $\hat{f}$  é um homeomorfismo do círculo que preserva orientação, e  $I$  é um subarco próprio do círculo, temos que existe ao menos um ponto fixo de  $\hat{f}$  em  $I$ .  $\square$

**Observação 3.3.12** Se o número de rotação de  $f$  for racional da forma  $\frac{a}{b}$ , dizemos que  $\frac{a}{b}$  está na forma reduzida caso  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ , e  $a, b$  são primos entre si.

As duas proposições seguintes encontram-se num artigo de Alligood e York [4]:

**Proposição 3.3.13** Seja  $f$  uma aplicação que contrai área, preserva orientação e possui um atrator global  $\Sigma$  cujo número de rotação é racional. Caso os pontos periódicos de  $f$  sejam isolados, temos que existe um periódico para  $f$  que é acessível em  $\Sigma$ .

**Proposição 3.3.14** Seja  $f$  nas condições acima. Então a órbita de todo ponto acessível de  $\Sigma$  converge a um ponto periódico.

Combinando os resultados acima, obtemos o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.15** Seja  $f$  satisfazendo as condições da Conjectura DM-Y Modificada, de maneira que a origem não é um atrator global. Se o número de rotação de  $f$  é racional, e  $\text{Per}(f) = \{O\}$ , temos que a origem é um ponto acessível de  $\Sigma$ , e todo ponto acessível de  $\Sigma$  pertence à bacia de atração da origem, que é portanto, densa em  $\Sigma$ .

**Demonstração:**

Caso  $Per(f) = \{O\}$ , a Proposição 3.3.13 implica que a origem é um ponto acessível, enquanto a Proposição 3.3.14 implica que todo o ponto acessível pertence à bacia de atração da origem. Como o conjunto dos pontos acessíveis de  $\Sigma$  é denso, segue que a bacia de atração da origem também é densa.  $\square$

**Observação 3.3.16** *Se  $f$  satisfaz as condições da Conjectura DM-Y Modificada, e  $f$  possui uma órbita periódica de período  $k > 1$ , então o Corolário 2.2.20 implica que  $Spec(f^{kn}) \cap B(0,1)^c \neq \emptyset$ , para todo inteiro  $n$ .*

## 4 Um Contra-exemplo para a Conjectura DM-Y

### 4.1 Descrição do Resultado

Neste capítulo, demonstramos o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.1** *Existe um difeomorfismo analítico real  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfaz as condições da Conjectura DM-Y Modificada, e que possui uma interseção homoclínica transversal, e portanto, contém infinitos pontos periódicos.*

Antes de demonstrar o resultado acima, necessitamos da seguintes definições:

**Definição 4.1.2** *Dizemos que uma aplicação diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  preserva área caso  $\det(D_p f) = 1$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ .*

**Definição 4.1.3** *Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação que preserva área,  $n \geq 1$  e  $p \in \text{Per}_n(f)$ . Dizemos que  $p$  é um ponto elíptico caso  $\text{Spec}(D_p f^n) \subset S^1 \setminus \{-1, 1\}$ , onde  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ .*

O seguinte teorema é devido a Birkhoff [7]:

**Teorema 4.1.4** *Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um germe de aplicação analítica real que preserva área, e para o qual a origem é um ponto fixo elíptico.*

*Então existe um germe de difeomorfismo analítico que preserva área  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  sobre  $\mathbb{R}^2$  de forma que*

$$h \circ f(\zeta, \bar{\zeta}) \circ h^{-1} = \zeta e^{2\pi i \alpha(|\zeta|^2)} + P(\zeta, \bar{\zeta}),$$

*onde  $\alpha(|\zeta|^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta^2 + \dots + \alpha_s^{2s}$ ,  $s = \lceil \frac{q-2}{2} \rceil$ , e  $P$  é uma aplicação analítica cujos termos têm ordem superior a  $q$ .*

*Chamamos a forma acima de forma normal de Birkhoff de  $f$  ao redor da origem.*

Seja  $r \geq 1$  em  $\mathbb{N}$ . Denotamos por  $M_r$  o conjunto dos difeomorfismos planares de classe  $C^r$ , que preservam área, e para os quais a origem é um ponto fixo elíptico. Definimos também  $M = \{f \in M_1 \mid f \text{ é aplicação analítica real}\}$ .

Em [26], Zehnder enuncia o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.5** *Seja  $f \in M$  cuja forma normal de Birkhoff (ver o Teorema 4.1.4) apresenta  $\alpha_0 \in S^1 \setminus \{-1, 1\}$ .*

*Sejam também  $r \geq 1$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  uma vizinhança da origem, e  $\mathcal{V} \subset M_r$  uma vizinhança de  $f$  com respeito à topologia  $C^r$ . Então existe  $g \in \mathcal{V}$  tal que  $f \equiv g$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus U$ , e  $g$  possui uma intersecção homoclínica transversal em  $U$ .*

A seguir, demonstraremos o Teorema 4.1.1.

### Demonstração:

Consideremos inicialmente o difeomorfismo analítico do plano  $f_0$ , que possui a seguinte forma normal de Birkhoff:

$$f_0(\zeta) = \zeta e^{2\pi i(\alpha_0 + |\zeta|^2)},$$

onde  $\alpha_0 \in S^1 \setminus \{-1, 1\}$ .

Desta maneira,  $f_0$  apresenta um ponto fixo elíptico na origem, e satisfaz as condições do teorema de Zehnder.

Pelo Teorema 4.1.5, existe uma aplicação  $C^1$ -próxima de  $f_0$  em  $M_1$ , aqui denotada por  $f_1$ , tal que  $f_1 \equiv f_0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus D_1$ , e  $D_1$  contém uma intersecção homoclínica transversal, onde  $D_1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \leq 1\}$ .

Como  $\text{Spec}(f_0) \subset S^1 \setminus \{\pm 1\}$ , podemos escolher  $f_1 \in M$  suficientemente próximo de  $f_0$ , de maneira que  $\text{Spec}(f_1) \subset S^1 \setminus \{\pm 1\}$ .

A existência de uma intersecção homoclínica transversal é robusta em  $\text{Dif}^1(\mathbb{R}^2)$ , e portanto, existe  $\epsilon > 0$  tal que a aplicação  $g = \frac{1}{1-\epsilon} f_1 \in \text{Dif}^1(\mathbb{R}^2)$  ainda é um difeomorfismo que exibe uma intersecção homoclínica transversal, e satisfaz  $\text{Spec}(f_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < \frac{1}{1-\epsilon}\}$ .

Portanto, para mostrar que  $g$  satisfaz as condições da Conjectura DM-Y Modificada, é suficiente mostrar que o infinito é repulsor.

Como  $g|_{\mathbb{R}^2 \setminus D_1}$  é igual a  $\frac{1}{1-\epsilon} f_0|_{\mathbb{R}^2 \setminus D_1}$ , e  $f_0$  preserva o círculo  $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = r\}$ , para todo  $r > 1$ , temos que  $g^{-1}(D_2) \subset \text{int}(D_2)$ , e  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(D_2) = \emptyset$ , onde  $D_2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \geq 2\}$ . Portanto, o infinito é repulsor para  $g$ .  $\square$

**Observação 4.1.6** *A construção acima foi motivada por simulações numéricas realizadas com a família de aplicações  $K_{a,b,c} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cujas componentes  $(f, g)$  são dadas por*

$$\alpha(x, y) = a \exp(-x^2) - by \quad (4.1)$$

$$\beta(x, y) = cx, \quad (4.2)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são números positivos.

A matriz Jacobiana  $J_{(x,y)}K_{a,b,c}$  de tal transformação é

$$\begin{pmatrix} -2ax \exp(-x^2) & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, para que  $K_{a,b,c}$  contraia área e preserve orientação, devemos ter  $0 < bc < 1$ .

Se  $bc = 1$ , temos que  $K_{a,b,c}$  preserva área, e  $D_0K_{a,b,c}$  tem autovalores  $i$  e  $-i$ .

A seguir, supomos que  $bc = 1$ , e escolheremos  $a$  de maneira que a condição espectral  $\text{Spec}(K_{a,b,c}) \subset S^1 \setminus \{-1, 1\}$  seja satisfeita.

Seja  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Como  $K_{a,b,c}$  é um difeomorfismo que preserva área,  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $D_pK_{a,b,c}$ . Caso  $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ , devemos ter necessariamente que  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$  e portanto,  $\lambda_1, \lambda_2 \in S^1 \setminus \{-1, 1\}$ .

Assim,  $\lambda_1 \in S^1 \setminus \{-1, 1\}$  se, e somente se, o discriminante  $\Delta(x, y)$  da equação característica  $\lambda^2 + 2ax \exp(-x^2) + 1 = 0$  for negativo, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Portanto, devemos escolher  $a$  de maneira que  $4a^2 x^2 \exp(-2x^2) - 4 < 0$ , que implica em  $x^2 \exp(-2x^2) < \frac{1}{a^2}$ , ou ainda,  $|x| \exp(-x^2) < \frac{1}{|a|}$ .

Como a aplicação real dada por  $\psi(x) = |x| \exp(-x^2)$  atinge o seu valor máximo no ponto  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , temos que se  $\psi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1}{2}) < \frac{1}{|a|}$ , para todo  $x$  real, então  $\Delta(x, y) < 0$ . Assim, se  $a$  satisfaz  $a \in (0, \sqrt{2} \exp(\frac{1}{2}))$  e  $bc = 1$ , temos que  $\Delta(x, y) < 0$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sob estas condições, vale que  $\text{Spec}(K_{a,b,c}) \subset S^1 \setminus \{-1, 1\}$ , que a aplicação  $K_{a,b,c}$  preserva área e tem a origem como ponto fixo elíptico.

As Figuras 11, 12 e 13 foram obtidas a partir de simulações numéricas da dinâmica de aplicações do tipo  $K_{a,b,c}$ .

A Figura 11 representa algumas órbitas para  $K_{a,b,c}$  com parâmetros conservativos nas condições acima definidas. Esta aplicação foi inspirada no difeomorfismo de Henón, e numericamente verificamos que ela possui um ponto fixo elíptico genérico. Assim, toda a complexidade tradicional do mundo conservativo parece estar presente.

A Figura 12 representa o atrator global  $\Sigma$  associado à uma aplicação da forma  $K_{a,b,c}$  com parâmetros dissipativos. Este é um exemplo que provavelmente apresenta ferraduras de Smale.

A Figura 13 representa as órbitas de alguns pontos para os parâmetros da figura anterior. Note que o ponto fixo e o poço de período três parecem atrair todas as órbitas.

---

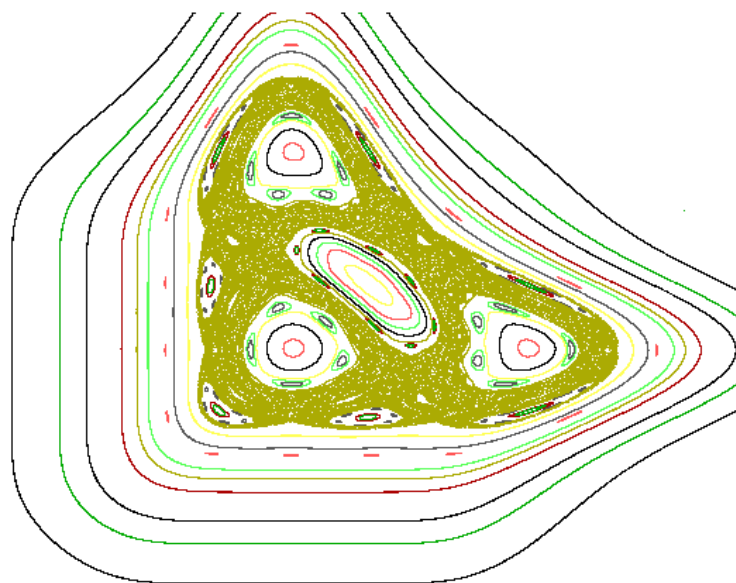


Figura 11:

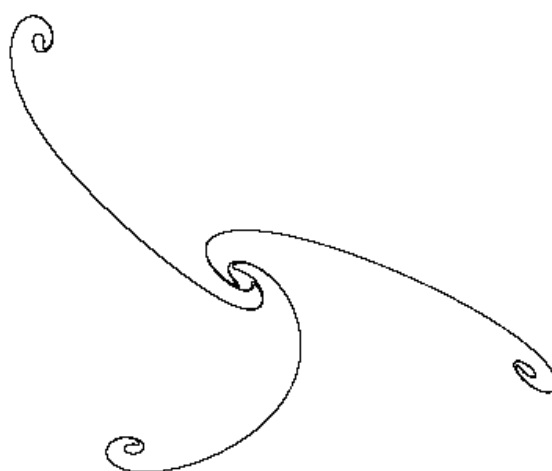


Figura 12:



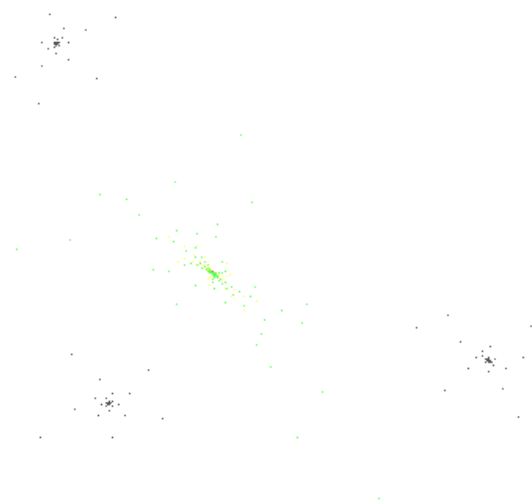


Figura 13:

## *Referências Bibliográficas*

- [1] AIZERMAN, M. On a problem concerning the stability in the large of a dynamical system. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, v. 4, p. 187-188, 1949.
- [2] ALARCÓN, B.; GUIÑEZ, V.; GUTIERREZ, C. Hopf bifurcation at infinity for planar vector fields. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 17, n. 2, p. 247-258, 2007.
- [3] ALARCÓN, B.; GUIÑEZ, V.; GUTIERREZ, C. Planar embeddings with a globally attracting fixed point. *Nonlinear Analysis*, v. 69, p. 140-150, 2008.
- [4] ALLIGOOD, K. T.; YORK, J. A. Accessible saddles on fractal boundaries. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 69, p. 377-400, 1992.
- [5] ARANSON, S. KH.; BELITSKY, G. R.; ZHUZHOMA, E. V. *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*. Translations of mathematical monographs, AMS, v. 153, p. 390, 1996.
- [6] BELL, H. A fixed point theorem for plane homeomorphisms. *Fundamenta Mathematicae*, v. 100, p. 778-780, 1976.
- [7] BIRKHOFF, G.D. *Dynamical systems*. American Mathematical Society Colloquium Publications v. IX, 1927.
- [8] CARTWRIGHT, M. L.; LITTLEWOOD, J. E. Some fixed points theorems. *Annals of Mathematics*, v. 54, p. 1-37, 1951.
- [9] CIMAS, A.; GASULL, A.; HUBBERS, E.; MAÑOSAS, F.; VAN DEN ESSEN, A. A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe Conjecture. *Advances in Mathematics*, v. 131, p. 453-457, 1997.
- [10] CIMAS, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. The discrete Markus-Yamabe problem. *Nonlinear analysis*, v. 35, p. 343-354, 1999.
- [11] CONWAY, J. *Functions of complex variable*. Springer Verlag, p. 182, 1978.
- [12] CONWAY, J. *Functions of complex variable*. Springer Verlag, p. 202, 1978.

- [13] FERNANDES, A.; GUTIERREZ, C.; RABANAL, R. Global asymptotic stability for differentiable vector fields of  $\mathbb{R}^2$ . *Journal of Differential Equations*, v. 206, n. 2, p. 470-482, 2004.
- [14] FESSLER, R. A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture. *Annales Polonici Mathematici*, v. 62, p. 45-75, 1995.
- [15] GLUTSYUK, A. The complete solution of the Jacobian conjecture for vector fields on the plane. *Communications of the Moscow Mathematical Society*, v. 49, p. 185-186, 1994.
- [16] GUTIERREZ, C. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture. *Workshop, I-28050 POVO (TN), Italy, September 14-17*, Ed. M. Sabatini, 1993.
- [17] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, p. 394, 1995.
- [18] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, p. 390, 1995.
- [19] LA SALLE, J. P. The stability of dynamical systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa. Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 1976.
- [20] MATHER, J. *Topological proofs of some pure topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends*. Th. M. Rassias and G. M. Rassias, eds. Selected Studies. North-Holland: Amsterdam, p. 225-255, 1982.
- [21] MEISTERS, G. H.; OLECH, C. Solution of the global asymptotic stability Jacobian conjecture. *Analyse Mathématique et applications*. Gauthier-Villars, Paris, p. 373-381, 1988.
- [22] MARKUS, L.; YAMABE, H. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 12, p. 305-317, 1960.
- [23] OLECH, J. On the global stability of an autonomous system on the plane. *Annales de l'institut Fourier*, Springer Verlag, Grenoble, v. 14, n. fasc.1, p. 389-400, 1963.
- [24] SPANIER, E. *Algebraic topology*. Mc Graw-Hill, New York, 1966.
- [25] VAN DEN ESSEN, A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. *Progress in Mathematics*, v. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [26] ZEHNDER, E. Homoclinic points near elliptic fixed points. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 26, p. 131-182, 1973.