UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Hipoelipticidade de formas diferenciais rotacionalmente invariantes com uma singularidade

Fernanda Martins Simão

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Fernanda Martins Simão

Hipoelipticidade de formas diferenciais rotacionalmente invariantes com uma singularidade

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
Abril de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S588h

Simão, Fernanda Martins
Hipoelipticidade de formas diferenciais rotacionalmente invariantes com uma singularidade / Fernanda Martins Simão; orientador Paulo Leandro Dattori da Silva. -- São Carlos, 2023.
65 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Hipoelipticidade. 2. Singularidade. 3. Formas Diferenciais. 4. Normalização. 5. Regularidade de soluções. I. Dattori da Silva, Paulo Leandro, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Fernanda Martins Simão

Hypoellipticity of rotationally invariant differential forms with a singularity

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
April 2023

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Carina e George, por todo amor, carinho e incentivo aos estudos.

Aos professores do ICMC-USP que fizeram parte da minha formação, em particular ao meu orientador, Paulo Dattori, que além de todo o conhecimento compartilhado, me deu muito apoio durante toda minha trajetória na graduação e pós.

Às minhas irmãs, Rafaela e Julia, ao meu namorado Kuabara, e à todos os meus amigos, pela companhia e momentos de descontração compartilhados. Em especial, agradeço à Isadora, ao Lucas, ao Aires, ao Victor e ao Gabriel, pelos muitos momentos de estudo e desabafos conjuntos.

Finalmente, meus agradecimentos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2020/14106-9, pelo financiamento.

RESUMO

SIMAO, F. M. **Hipoelipticidade de formas diferenciais rotacionalmente invariantes com uma singularidade**. 2023. 65 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Esta dissertação é dedicada ao estudo da C^∞-hipoelipticidade da classe das 1-formas diferenciais suaves que são rotacionalmente invariantes, tem uma singularidade irredutível na origem de $\mathbb{R}^2$ e são elípticas fora dela.

Considere Ω uma 1-forma nas condições acima e sejam $k+2$ e $l+2$ as ordens de anulamento na origem das 2-formas $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ e $\Omega \wedge (\bar{z}dz + zd\bar{z})$, respectivamente. Apresentaremos os resultados de A. Meziani que mostram que, para $k \geq 2l$, sob certas hipóteses Ω não é C^∞-hipoelíptica. Para $k < 2l$, Ω é C^∞-hipoelíptica se considerada agindo em um subespaço de 1-formas diferenciais.

Palavras-chave: Hipoelipticidade, Singularidade, Formas Diferenciais, Normalização, Regularidade de soluções.

ABSTRACT

SIMAO, F. M. **Hypoellipticity of rotationally invariant differential forms with a singularity**. 2023. 65 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

This dissertation is dedicated to the study of the C^∞-hypoellipticity of the class of smooth differential 1-forms that are rotationally invariant, have an irreducible singularity at the origin of $\mathbb{R}^2$ and are elliptical outside of it.

Consider Ω a differential 1-form under the above conditions and let $k+2$ and $l+2$ be the vanishing orders at the origin of the 2-forms $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ and $\Omega \wedge (\bar{z}dz + zd\bar{z})$, respectively. We will present the results of A. Meziani that show that, for $k \geq 2l$, under certain assumptions Ω is not C^∞-hypoelliptic. For $k < 2l$, Ω is C^∞-hypoelliptic if considered acting on a subspace of 1-forms.

Keywords: Hypoellipticity, Singularity, Differential Forms, Normalization, Regularity of Solutions.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Seja

$$\Omega = A(z,\bar{z})dz + B(z,\bar{z})d\bar{z}$$

uma 1-forma diferencial de classe C^∞ em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$.

Dizemos que Ω tem uma singularidade de ordem m na origem se m é o menor valor entre as ordens de anulamento na origem de A e de B. A singularidade é irredutível de ordem m em $(0,0)$ se não existe uma 1-forma diferencial Ω' singular em $(0,0)$ com ordem de anulamento em $(0,0)$ menor que m satisfazendo $\Omega \wedge \Omega' = 0$.

A 1-forma Ω é rotacionalmente invariante se

$$\Omega \wedge R_\alpha^* \Omega = 0$$

para toda rotação R_α de ângulo α de $\mathbb{R}^2$.

Suponha que Ω é rotacionalmente invariante, elíptica fora da origem e possui uma singularidade irredutível de ordem m em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Sejam $k+2$ e $l+2$ as ordens de anulamento na origem das 2-formas $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ e $\Omega \wedge (\bar{z}dz + zd\bar{z})$, respectivamente. Quando $k \geq 2l$, sob hipóteses adicionais veremos que Ω não é C^∞-hipoelíptica.

Considere η a 1-forma diferencial dada por

$$\eta = \tilde{A}(z,\bar{z})dz + \tilde{B}(z,\bar{z})d\bar{z},$$

com $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ funções de classe C^∞ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Para κ a ser definido futuramente, diremos que η cumpre a condição C_κ se os coeficientes de η satisfazem

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial z^j \partial \bar{z}^j}\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z}\right)(0) = 0, \text{ para } j = 1, \ldots, \kappa - 1.$$

Denotamos por $\Lambda(\kappa)$ o espaço das 1-formas diferenciais suaves em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a condição C_κ.

Para $k < 2l$, mostraremos que o problema

$$du \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega \tag{1.1}$$

é resolúvel se, e somente se, $\eta \in \Lambda(\kappa)$, mais ainda, temos a C^∞-hipoelipticidade nessa classe menor.

Esta dissertação é baseada no artigo (MEZIANI, 2013) e foi dividida em seis capítulos, onde o primeiro capítulo é destinado a esta introdução.

No segundo capítulo são apresentadas as principais definições e propriedades dos objetos utilizados ao longo do texto. Também enunciamos resultados utilizados nas demonstrações futuras com as referências para uma consulta mais detalhada.

Sob certas hipóteses, o terceiro capítulo tem o objetivo de transformar o problema da C^∞-hipoelipticidade das 1-formas rotacionalmente invariantes em um problema envolvendo as 1-formas $\bar{z}dz + zd\bar{z}$ e $\bar{z}dz - zd\bar{z}$.

No quarto capítulo desenvolvemos o caso $k \geq 2l$. Com o auxílio da normalização de Ω, que é construída no quinto capítulo, no sexto capítulo tratamos do caso $k < 2l$.

CAPÍTULO

2

PRELIMINARES

2.1 Uma breve introdução às formas diferenciais

Nesta seção apresentamos as noções básicas de formas diferenciais para familiarizar o leitor com o objeto de estudo principal da dissertação. Para mais detalhes das definições e teoremas expostos aqui recomenda-se ao leitor consultar (LIMA, 2014).

Dados dois espaços vetoriais reais E e F, com dim $E < \infty$, denotamos por $L^r(E,F)$ o espaço das transformações

$$T : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{r \text{ vezes}} \to F$$

r-lineares. Este é um espaço vetorial real com as operações $(T+S)(x) = T(x) + S(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

Definição 2.1. Dizemos que uma transformação $T \in L^r(E,F)$ é alternada se ela satisfaz alguma das seguintes condições equivalentes:

- $T(v_1, \ldots, v_r) = 0$, se existem $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ com $i \neq j$ tais que $v_i = v_j$;
- $T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots., v_r) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$ para quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in E$;
- $T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = \varepsilon(\sigma) T(v_1, \ldots, v_r)$ para quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in E$ e qualquer permutação σ de $\{1, \ldots, r\}$, onde $\varepsilon(\sigma)$ é o sinal de σ (é 1 se σ se escreve como produto de um número par de transposições e -1 se σ se escreve como produto de um número ímpar de transposições).

Consideremos $E = \mathbb{R}^m$ e $F = \mathbb{R}$. Neste caso, escrevemos apenas $L^r(E,F) = L^r(\mathbb{R}^m)$. Denotamos o subespaço vetorial de $L^r(\mathbb{R}^m)$ das transformações lineares alternadas por $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$. Por convenção, $\Lambda^0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$. Como toda transformação linear entre dois espaços vetoriais é alternada, $\Lambda^1(\mathbb{R}^m) = (\mathbb{R}^m)^*$.

Definição 2.2. Se $\omega_1, ..., \omega_n \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m) = (\mathbb{R}^m)^*$, o produto exterior $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_n \in L^n(\mathbb{R}^m)$ é definido por

$$\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_n(v_1, ..., v_n) = \det\,(\omega_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Proposição 2.3. Dadas $\omega, \eta, \alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m)$, temos

- $(\omega + \alpha) \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \alpha \wedge \eta$;
- $\eta \wedge (\omega + \alpha) = \eta \wedge \omega + \eta \wedge \alpha$;
- $\lambda(\omega \wedge \eta) = (\lambda \omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda \eta), \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$.

Seja $\{e_1, ..., e_m\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$, com $e_j = (\delta_{1j}, ..., \delta_{mj})$, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. Denotamos por $\{dx^1, ..., dx^m\} \subset (\mathbb{R}^m)^*$ a base dual, isto é, $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$. Com essa notação, o conjunto

$$\{dx^I = dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} \ : \ I = \{i_1 < ... < i_r\} \subset \{1, ..., m\}\}$$

é uma base para o espaço vetorial $\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$. Assim,

$$\dim(\Lambda^r(\mathbb{R}^m)) = \frac{m!}{r!(m-r)!}.$$

Definição 2.4. Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, definimos uma r-forma diferencial suave ω a valores reais como uma aplicação suave $\omega : U \to \Lambda^r(\mathbb{R}^m)$. Podemos escrever $\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx^I$, onde cada $a_I : U \to \mathbb{R}$ é C^∞ e $a_I(x) = \omega(x) \cdot (e_{i_1}, ..., e_{i_r})$, para $I = \{i_1 < ... < i_r\} \subset \{1, ..., m\}$.

Denotamos por $\Omega^r(U)$ o conjunto de todas as r-formas diferenciais suaves. Note que é um espaço vetorial real com as operações naturais $(\omega + \eta)(x) = \omega(x) + \eta(x)$ e $(\lambda \omega)(x) = \lambda(\omega(x))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 2.5. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^∞. Definimos o *pullback* $f^* : \Omega^r(V) \to \Omega^r(U)$ por

$$(f^*\omega)(x)(v_1, ..., v_r) = \omega(f(x))(Df(x) \cdot v_1, ..., Df(x) \cdot v_r)$$

para cada $\omega \in \Omega^r(V)$ e $x \in U$.

Se $\omega, \eta \in \Omega^1(U)$, definimos o produto exterior $\omega \wedge \eta$ pontualmente através da definição 2.2: $(\omega \wedge \eta)(x) \doteq \omega(x) \wedge \eta(x)$.

Proposição 2.6. Sejam $\omega, \eta \in \Omega^1(V)$ e $f : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^∞. Então

- $f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$;
- $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$;

- $f^*(\phi \cdot \omega) = (\phi \circ f) \cdot f^*\omega$, para cada $\phi \in C^\infty(V,\mathbb{R})$;
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, para uma aplicação suave $g : V \subset \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}^p$.

Definimos a derivada exterior $d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$ como sendo a aplicação

$$g \mapsto dg = \sum_{i \in I} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx^i.$$

Proposição 2.7. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $g,h \in \Omega^0(U)$ e $f : U \to V$ suave. Então

- $d(g+h) = dg + dh$;
- $d(g \wedge h) = dg \wedge h + g \wedge dh$;
- $d(f^*g) = f^*(dg)$, onde $g \in \Omega^0(V)$ neste caso.

2.2 1-formas diferenciais a valores complexos

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto com $(0,0) \in U$. Uma 1-forma diferencial suave Ω a valores complexos em um ponto $p = (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear alternada $\Omega(p) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, isto é, $\Omega(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$.

Podemos escrever $\Omega(p) = \Re\Omega(p) + i\Im\Omega(p)$, sendo $\Re\Omega(p)$ e $\Im\Omega(p)$ 1-formas a valores reais em p. Com a identificação entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, em p podemos ver Ω como uma aplicação $\Omega(p) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Mais ainda, podemos escrever

$$\Omega = A(z,\bar{z})dz + B(z,\bar{z})d\bar{z},$$

com $A,B \in C^\infty(U)$.

Definição 2.8. A 1-forma diferencial $\overline{\Omega}$ conjugada de Ω é dada por

$$\overline{\Omega} = \overline{A(z,\bar{z})}d\bar{z} + \overline{B(z,\bar{z})}dz,$$

onde $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são as funções conjugadas de A e B, respectivamente.

Definição 2.9. Dizemos que Ω é **elíptica** em um aberto $V \subset U \subset \mathbb{R}^2$ se

$$\Omega(p) \wedge \overline{\Omega}(p) \neq 0 \ \forall p \in V.$$

O conjunto característico Σ de Ω é o conjunto onde Ω deixa de ser elíptica, isto é,

$$\Sigma = \{p \in U \ : \ \Omega(p) \wedge \overline{\Omega}(p) = 0\}.$$

Definição 2.10. A 1-forma Ω é **C^∞-hipoelíptica** em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ se sempre que uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(U)$ satisfaz

$$du \wedge \Omega \in \Omega^2(C^\infty(U),\mathbb{C}),$$

então $u \in C^\infty(U')$ para certo aberto $U' \subset U$, com $(0,0) \in U'$.

Observação 2.11. Quando $u \in \mathscr{D}' \setminus C^1$, du é definido como uma corrente (veja, por exemplo, (BERHANU; CORDARO; HOUNIE, 2008), página 335).

De forma análoga à definição acima, definimos C^ω-hipoelipticidade na origem:

Definição 2.12. A 1-forma Ω é **C^ω-hipoelíptica** em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ se sempre que uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(U)$ satisfaz
$$du \wedge \Omega \in \Omega^2(C^\omega(U), \mathbb{C}),$$
então $u \in C^\omega(U')$ para certo aberto $U' \subset U$, com $(0,0) \in U'$.

Definição 2.13. Uma função f é dita ser **integral primeira** de Ω se $\Omega = \lambda df$ para alguma função $\lambda \in C^\infty$ não identicamente nula.

Definição 2.14. Dizemos que $\Omega = A(z,\bar{z})dz + B(z,\bar{z})d\bar{z}$ tem uma **singularidade de ordem** m em $(0,0)$ se m é o menor valor entre as ordens de anulamento em $(0,0)$ de A e de B.

Definição 2.15. Dizemos que Ω tem uma singularidade **irredutível de ordem** m em $(0,0)$ se não existe uma 1-forma diferencial Ω' singular em $(0,0)$ com ordem de anulamento em $(0,0)$ menor que m satisfazendo $\Omega \wedge \Omega' = 0$.

Definição 2.16. A 1-forma Ω é dita **rotacionalmente invariante** se
$$\Omega \wedge R_\alpha^* \Omega = 0$$
para toda rotação R_α de ângulo α de $\mathbb{R}^2$.

2.3 O espaço W das funções 2π-periódicas

Durante toda a dissertação, Σ irá denotar o círculo característico $r = 0$, isto é,
$$\Sigma \doteq \{0\} \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1.$$

Seja
$$W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2); f(x,y) = f(x, y + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.1}$$

O espaço W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Com a métrica proveniente da família de seminormas
$$\rho_j(f) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{K}_j, |\alpha| \leq j} |(\partial^\alpha f)(x,y)|,$$
sendo $\mathbb{K}_j = [-j-1, j+1] \times \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, o espaço W se torna um espaço topológico metrizável localmente convexo e completo. Ou seja, W é um espaço de Fréchet. Para mais detalhes ver (HERNANDEZ, 2016), onde os teoremas e a proposição abaixo estão demonstrados.

Teorema 2.17. Os espaços $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ e W são homeomorfos.

Definição 2.18. Dizemos que uma sequência numérica $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ de números complexos é **rapidamente decrescente** se para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, existir $C > 0$ tal que $|c_m| \leq \frac{C}{|m|^k}$ para todo $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Teorema 2.19. Seja $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ uma sequência rapidamente decrescente. Então $f(y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \mathrm{e}^{imy}$ pertence a $C^\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 2.20. Seja $f \in W$. Então, $\hat{f}_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\mathrm{e}^{-ik\theta}d\theta$ (chamado coeficiente de Fourier de f) forma uma sequência rapidamente decrescente e

$$f(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k(r)\mathrm{e}^{ik\theta}.$$

Se g depender apenas de θ, denotaremos por g^0 o zero-ésimo coeficiente de Fourier de g, isto é,

$$g^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta. \tag{2.2}$$

Definição 2.21. Uma função **flat** em um ponto x_0 é uma função suave cujas derivadas de todas as ordens se anulam em x_0.

Proposição 2.22. Seja $f \in W$ e considere $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função que possua apenas zeros de ordem finita. Se f for flat em $g^{-1}(0)\times\mathbb{R}$, então existirá $h \in W$, flat em $g^{-1}(0)\times\mathbb{R}$, tal que

$$g(x)h(x,t) = f(x,t),\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Usaremos a notação $T_r f$ para denotar a série de Taylor de f com respeito a r. Ou seja,

$$T_r f(r,\theta) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j, \text{ onde } f_j(\theta) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j f}{\partial r^j}(0,\theta).$$

2.4 Outros resultados auxiliares

Teorema 2.23 (Teorema da função inversa)**.** Sejam $f : U \to \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, fortemente diferenciável no ponto $a \in U$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um isomorfismo (equivalentemente, o determinante jacobiano det $Jf(a) =$det$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ é diferente de zero). Então f é um homeomorfismo de um aberto V contendo a sobre um aberto W contendo $f(a)$. O homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \to V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$ e sua derivada nesse ponto é $[f'(a)]^{-1}$. Se $f \in C^r$ $(r \geq 1)$ então V pode ser tomado de modo que f seja um difeomorfismo de V sobre W.

Demonstração. Ver (LIMA, 2014). □

Teorema 2.24 (Teorema da função implícita)**.** Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^r $(r \geq 1)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se um ponto $p = (x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(p) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, então existem uma bola $B \doteq B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^m$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ tais que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : B \to J$ de classe C^r. Para todo $x \in B$, tem-se

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x)) / \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x)),\ i = 1, ..., n.$$

Demonstração. Ver (LIMA, 2014). □

Precisaremos do resultado de que toda série de potências é a série de Taylor de alguma função suave. Este é o clássico Teorema de Borel:

Teorema 2.25 (Teorema de Borel)**.** Para $j = 0, 1, 2, \ldots$ seja $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K}$ é um compacto de $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ uma vizinhança compacta da origem. Então, podemos encontrar uma função $f \in C_0^\infty(\mathbb{K} \times \mathbb{I})$ tal que

$$\left.\frac{\partial^j}{\partial t^j} f(x,t)\right|_{t=0} = f_j(x),\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Demonstração. Ver (HÖRMANDER, 1990). □

CAPÍTULO

3

1-FORMAS DIFERENCIAIS ROTACIONALMENTE INVARIANTES

Ao longo do texto iremos utilizar a notação

$$\omega_r \doteq \bar{z}dz + zd\bar{z} \text{ e } \omega_a \doteq \bar{z}dz - zd\bar{z},$$

onde r e a significam radial e anelar, respectivamente. Além disso, usaremos a letra grega Π para denotar a aplicação C^∞

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\mapsto \Pi(r,\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta} = (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note que, para $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\bar{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, temos

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta = \mathrm{e}^{i\theta}dr + ri\mathrm{e}^{i\theta}d\theta \text{ e } d\bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial r}dr + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}d\theta = \mathrm{e}^{-i\theta}dr - ri\mathrm{e}^{-i\theta}d\theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pi^*\omega_r &= r\mathrm{e}^{-i\theta}[\mathrm{e}^{i\theta}dr + ri\mathrm{e}^{i\theta}d\theta] + r\mathrm{e}^{i\theta}[\mathrm{e}^{-i\theta}dr - ri\mathrm{e}^{-i\theta}d\theta] \\ &= rdr + r^2id\theta + rdr - r^2id\theta = 2rdr \end{aligned} \tag{3.2}$$

e

$$\begin{aligned} \Pi^*\omega_a &= r\mathrm{e}^{-i\theta}[\mathrm{e}^{i\theta}dr + ri\mathrm{e}^{i\theta}d\theta] - r\mathrm{e}^{i\theta}[\mathrm{e}^{-i\theta}dr - ri\mathrm{e}^{-i\theta}d\theta] \\ &= rdr + r^2id\theta - rdr + r^2id\theta = 2ir^2d\theta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Fixe

$$\Omega = A(z,\bar{z})dz + B(z,\bar{z})d\bar{z}$$

uma 1-forma diferencial suave a valores complexos definida em $U \subset \mathbb{R}^2$, U um aberto com $(0,0) \in U$.

Suponha que Ω é elíptica fora da origem, rotacionalmente invariante e possui uma singularidade irredutível de ordem m em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Estamos interessados em estudar a C^∞-hipoelipticidade de Ω e equações do tipo

$$du \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega, \tag{3.4}$$

sendo η uma 1-forma de classe C^∞ em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$.

Nesse primeiro momento nosso intuito é reduzir o problema (3.4) a um problema mais simples. Para isso precisaremos do lema a seguir, cuja prova foi baseada na Proposição 1.1 de (BERHANU; MEZIANI, 1997).

Lema 3.1. Seja $\Omega = A(z,\bar{z})dz + B(z,\bar{z})d\bar{z}$ uma 1-forma diferencial suave, rotacionalmente invariante e com uma singularidade irredutível de ordem m em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Podemos escrever

$$\Pi^*\Omega = r^m C(r,\theta)[X(r)dr + irY(r)d\theta],$$

onde C é uma aplicação suave definida em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ e X e Y são aplicações suaves definidas em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}$. Mais ainda, C nunca se anula e X e Y não se anulam simultaneamente.

Demonstração. Como Ω possui singularidade irredutível de ordem m, podemos escrever

$$\Omega = |z|^m\tilde{\Omega}, \tag{3.5}$$

onde

$$\tilde{\Omega} = \frac{A(z,\bar{z})}{|z|^m}dz + \frac{B(z,\bar{z})}{|z|^m}d\bar{z} \doteq \tilde{A}(z,\bar{z})dz + \tilde{B}(z,\bar{z})d\bar{z}$$

é não singular, isto é,

$$|\tilde{A}(z,\bar{z})| + |\tilde{B}(z,\bar{z})| \neq 0 \ \forall z.$$

Como $dz = \mathrm{e}^{i\theta}dr + ri\mathrm{e}^{i\theta}d\theta$ e $d\bar{z} = \mathrm{e}^{-i\theta}dr - ri\mathrm{e}^{-i\theta}d\theta$, então

$$\begin{aligned}
\Pi^*\tilde{\Omega} &= (\tilde{A}\circ\Pi)(r,\theta)[\mathrm{e}^{i\theta}dr + ri\mathrm{e}^{i\theta}d\theta] + (\tilde{B}\circ\Pi)(r,\theta)[\mathrm{e}^{-i\theta}dr - ri\mathrm{e}^{-i\theta}d\theta] \\
&= [(\tilde{A}\circ\Pi)(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} + (\tilde{B}\circ\Pi)(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta}]dr + [(\tilde{A}\circ\Pi)(r,\theta)ri\mathrm{e}^{i\theta} - (\tilde{B}\circ\Pi)(r,\theta)ri\mathrm{e}^{-i\theta}]d\theta \\
&= P(r,\theta)dr + irQ(r,\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

onde $P(r,\theta) \doteq (\tilde{A}\circ\Pi)(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} + (\tilde{B}\circ\Pi)(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta}$ e $Q(r,\theta) \doteq (\tilde{A}\circ\Pi)(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} - (\tilde{B}\circ\Pi)(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta}$. Logo, a equação (3.5) se torna

$$\Pi^*\Omega = r^m[P(r,\theta)dr + irQ(r,\theta)d\theta]. \tag{3.6}$$

Como Ω é rotacionalmente invariante, $\tilde{\Omega}$ também é. Assim, se R_α é rotação de ângulo α,

$$\begin{aligned}
&R_\alpha^*(\Pi^*\tilde{\Omega}) \wedge (\Pi^*\tilde{\Omega}) = 0 \iff \\
&[P(r,\theta+\alpha)dr + irQ(r,\theta+\alpha)d\theta] \wedge [P(r,\theta)dr + irQ(r,\theta)d\theta] = 0 \iff \\
&irP(r,\theta+\alpha)Q(r,\theta)dr\wedge d\theta + irQ(r,\theta+\alpha)P(r,\theta)d\theta\wedge dr = 0 \iff \\
&P(r,\theta+\alpha)Q(r,\theta) = Q(r,\theta+\alpha)P(r,\theta) \ \forall r,\theta,\alpha.
\end{aligned}$$

Em particular, se $\alpha = -\theta$,

$$P(r,0)Q(r,\theta) = Q(r,0)P(r,\theta) \ \forall r,\theta.$$

Como P e Q não se anulam simultaneamente, os vetores não nulos $(P(r,\theta),Q(r,\theta))$ e $(P(r,0),Q(r,0))$ são paralelos; logo, existe uma função $C \in C^\infty$ que nunca se anula tal que

$$P(r,\theta) = C(r,\theta)P(r,0) \text{ e } Q(r,\theta) = C(r,\theta)Q(r,0).$$

Portanto, se $X(r) \doteq P(r,0)$ e $Y(r) \doteq Q(r,0)$, a equação (3.6) se torna

$$\Pi^*\Omega = r^m C(r,\theta)[P(r,0)dr + irQ(r,0)d\theta] = r^m C(r,\theta)[X(r)dr + irY(r)d\theta],$$

o que prova o resultado. □

Proposição 3.2. Seja Ω uma 1-forma diferencial suave, rotacionalmente invariante e com uma singularidade irredutível de ordem m em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Então $m = 1$ e pelo menos um dos itens abaixo ocorre:

1. $\Omega \wedge (\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a) = 0$ para certa $F_1 : (-\delta_1, \delta_1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suave, onde $\delta_1 > 0$;

2. $\Omega \wedge (\omega_a + F_2(|z|^2)\omega_r) = 0$ para certa $F_2 : (-\delta_2, \delta_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suave, onde $\delta_2 > 0$.

Em particular, F_1 e F_2 são funções pares.

Demonstração. Pelo Lema 3.1, existem aplicações suaves $C : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\Pi^*\Omega = r^m C(r,\theta)[X(r)dr + irY(r)d\theta].$$

Note que $\Pi^*\Omega$ é invariante pela aplicação $(r,\theta) \underset{\mathrm{R}}{\mapsto} \mathrm{R}(r,\theta) = (-r, \theta + \pi)$, pois, sendo

$$\begin{aligned}\Pi \circ \mathrm{R}(r,\theta) &= \Pi(-r,\theta+\pi) = (-r\cos(\theta+\pi), -r\sin(\theta+\pi)) = (-r(-\cos\theta), -r(-\sin\theta)) \\ &= (r\cos\theta, r\sin\theta) = \Pi(r,\theta),\end{aligned}$$

temos $\mathrm{R}^*(\Pi^*\Omega) = (\Pi \circ \mathrm{R})^*\Omega = \Pi^*\Omega$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\Pi^*\Omega \wedge \mathrm{R}^*(\Pi^*\Omega) = 0 \iff \\
&r^m C(r,\theta)[X(r)dr + irY(r)d\theta] \wedge (-r)^m C(-r,\theta+\pi)[X(-r)(-1)dr + i(-r)Y(-r)d\theta] = 0 \iff \\
&r^m C(r,\theta)(-r)^m C(-r,\theta+\pi)[X(r)dr + irY(r)d\theta] \wedge [-X(-r)dr - irY(-r)d\theta] = 0 \iff \\
&(-1)^m r^{2m} C(r,\theta)C(-r,\theta+\pi)[-X(r)irY(-r) + irY(r)X(-r)]dr \wedge d\theta = 0 \iff \\
&Y(r)X(-r) - X(r)Y(-r) = 0.
\end{aligned}$$

Quando $X(0) \neq 0$, a aplicação $r \mapsto \frac{Y(r)}{X(r)}$ é par em uma vizinhança da origem. Então existe $\delta_1 > 0$ e $F_1 : (-\delta_1, \delta_1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $F_1(r^2) \doteq \frac{Y(r)}{X(r)}$.

Sabendo que $\Pi^*\omega_r = 2rdr$ e $\Pi^*\omega_a = 2ir^2d\theta$, temos

$$\begin{aligned}\Pi^*\Omega &= r^m C(r,\theta)X(r)(dr + irF_1(r^2)d\theta)\\ &= \frac{r^{m-1}C(r,\theta)X(r)}{2}(2rdr + F_1(r^2)2ir^2d\theta)\\ &= \frac{r^{m-1}C(r,\theta)X(r)}{2}(\Pi^*\omega_r + F_1(r^2)\Pi^*\omega_a)\\ &= \frac{r^{m-1}C(r,\theta)X(r)}{2}\Pi^*(\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Então, de (3.7),

$$\begin{aligned}\Pi^*(\Omega\wedge(\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a)) &= \Pi^*\Omega\wedge\Pi^*(\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a)\\ &= \frac{r^{m-1}C(r,\theta)X(r)}{2}\Pi^*(\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a)\wedge\Pi^*(\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Omega\wedge(\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a) = 0$$

e Ω satisfaz o item 1 do enunciado. A 1-forma $\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a$ tem uma singularidade de ordem 1 na origem e, pela equação acima, tem produto exterior com Ω sendo 0; logo, pela definição de singularidade irredutível, devemos ter $m = 1$.

O caso em que $Y(0) \neq 0$ é análogo e implica que Ω satisfaz o item 2 e que $m = 1$. Ademais, não é possível que X e Y se anulem simultaneamente na origem, pois isto contradiz a maneira como foram construídos (ver Lema 3.1). □

Observação 3.3. Veja que, quando $X(0) \neq 0$ e $Y(0) \neq 0$ simultaneamente, os itens 1 e 2 da Proposição 3.2 são válidos. Nesse caso, a 1-forma $\omega_r + F_1(|z|^2)\omega_a$ é múltipla da 1-forma $\omega_a + F_2(|z|^2)\omega_r$.

A fim de simplificar a notação, daqui em diante usaremos apenas F para denotar F_1 e F_2 e δ para denotar δ_1 e δ_2.

Corolário 3.4. Seja Ω como na Proposição 3.2. Se $u \in C^1$, a equação

$$du\wedge\Omega = \eta\wedge\Omega$$

é equivalente à equação

$$du\wedge(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) = \eta\wedge(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) \tag{3.8}$$

se Ω satisfaz o item 1 da Proposição 3.2, ou à equação

$$du\wedge(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) = \eta\wedge(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) \tag{3.9}$$

se Ω satisfaz o item 2 da Proposição 3.2.

Demonstração. Suponha que Ω satisfaz o item 1 da Proposição 3.2. Existe aplicação g definida numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e que não se anula fora da origem tal que

$$\Omega = g(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a).$$

Assim, fora da origem temos

$$\begin{aligned} du \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega &\iff du \wedge g(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) = \eta \wedge g(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) \\ &\iff du \wedge (\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) = \eta \wedge (\omega_r + F(|z|^2)\omega_a). \end{aligned}$$

Além disso, na origem as equações são trivialmente equivalentes. De modo análogo, supondo que Ω satisfaz o item 2 da Proposição 3.2, obtemos que

$$du \wedge (\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) = \eta \wedge (\omega_a + F(|z|^2)\omega_r).$$

□

Observação 3.5. Sejam $k+2$ e $l+2$, respectivamente, as ordens de anulamento na origem das 2-formas $\Omega \wedge \overline{\Omega}$ e $\Omega \wedge \omega_r$. Se $\Omega = \omega_a + F(|z|^2)\omega_r$ então,

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \overline{\Omega} &= (\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) \wedge (\overline{\omega}_a + \overline{F(|z|^2)}\overline{\omega}_r) = \omega_a \wedge \overline{\omega}_a + \omega_a \wedge \overline{F(|z|^2)}\overline{\omega}_r \\ &\quad + F(|z|^2)\omega_r \wedge \overline{\omega}_a + |F(|z|^2)|^2 \omega_r \wedge \overline{\omega}_r \\ &= (\bar{z}dz - zd\bar{z}) \wedge (zd\bar{z} - \bar{z}dz) + (\bar{z}dz - zd\bar{z}) \wedge \overline{F(|z|^2)}(zd\bar{z} + \bar{z}dz) \\ &\quad + F(|z|^2)(\bar{z}dz + zd\bar{z}) \wedge (zd\bar{z} - \bar{z}dz) + |F(|z|^2)|^2(\bar{z}dz + zd\bar{z}) \wedge (zd\bar{z} + \bar{z}dz) \\ &= 2\overline{F(|z|^2)}\bar{z}zdz \wedge d\bar{z} + 2F(|z|^2)\bar{z}zdz \wedge d\bar{z} = 2|z|^2(\overline{F(|z|^2)} + F(|z|^2))dz \wedge d\bar{z} \\ &= 4|z|^2\Re(F(|z|^2))dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Analogamente, quando $\Omega = \omega_r + F(|z|^2)\omega_a$, então

$$\Omega \wedge \overline{\Omega} = (\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) \wedge (\overline{\omega}_r + \overline{F(|z|^2)}\overline{\omega}_a) = 4|z|^2\Re(F(|z|^2))dz \wedge d\bar{z}.$$

Logo, sendo $k+2$ a ordem de anulamento na origem de $\Omega \wedge \overline{\Omega}$, em ambos os casos k é a ordem de anulamento de $\Re(F)$. Além disso,

$$(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) \wedge \omega_r = \omega_a \wedge \omega_r = (\bar{z}dz - zd\bar{z}) \wedge (\bar{z}dz + zd\bar{z}) = 2|z|^2 dz \wedge d\bar{z}.$$

Da linha acima, se $l+2$ é a ordem de anulamento na origem de $\Omega \wedge \omega_r$, então $l = 0$. Assim, para $\Omega = \omega_a + F(|z|^2)\omega_r$, é sempre verdadeiro que $k \geq 2l$.

Agora, seja $\Omega = \omega_r + F(|z|^2)\omega_a$. Temos

$$(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) \wedge \omega_r = F(|z|^2)\omega_a \wedge \omega_r = 2F(|z|^2)|z|^2 dz \wedge d\bar{z}.$$

Como $l+2$ é a ordem de anulamento na origem de $\Omega \wedge \omega_r$, a ordem de anulamento de F é l. Sendo a ordem de anulamento de F o mínimo entre as ordens de anulamento da parte real e imaginária, obtemos que a ordem de anulamento de $\Im(F)$ é l neste caso. Note que isso implica que $l \leq k$.

CAPÍTULO

4

CASO $k \geq 2l$

Neste capítulo veremos que, para $k \geq 2l$, sob certas hipóteses adicionais a 1-forma $\Omega = A(z,\bar{z})dz + B(z,\bar{z})d\bar{z}$ não é C^∞-hipoelíptica.

Para o primeiro teorema precisaremos do resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada na Observação 3.1 em (MEZIANI, 2013) e utiliza das técnicas da teoria de estruturas hipoanalíticas, cuja referência são os livros (TREVES, 1992) e (BERHANU; CORDARO; HOUNIE, 2008).

Lema 4.1. Suponha que Ω é uma 1-forma real-analítica em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, tem uma singularidade irredutível na origem e é C^ω-hipoelíptica fora da origem. Então, existem formas reais analíticas η não identicamente nulas em qualquer aberto tais que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, a equação

$$du \wedge \Omega = z^N \eta \wedge \Omega$$

tem uma solução C^∞ fora da origem, mas em $L^q \setminus C^\infty$ em uma vizinhança contendo a origem.

Seja $D \doteq D((0,0),\tilde{\delta})$ o disco de centro $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e raio $\tilde{\delta} > 0$, e denotemos

$$D_0 \doteq D((0,0),\tilde{\delta}) \backslash \{(0,0)\}.$$

Teorema 4.2. Assuma que $\Omega = \omega_a + F(|z|^2)\omega_r$. Então existe uma 1-forma η suave em D de modo que a equação

$$du \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega \tag{4.1}$$

admite solução u suave em D_0, mas que não se estende a uma função suave em D.

Demonstração. Pela Observação 3.5, $\Omega \wedge \overline{\Omega} = 4|z|^2 \Re(F(|z|^2))dz \wedge d\bar{z}$. Como Ω é elíptica em D_0, temos

$$4|z|^2 \Re(F(|z|^2))dz \wedge d\bar{z} = \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0, \text{ para } z \in D_0.$$

Podemos supor que $\Re(F(s)) > 0$ para $s > 0$ (logo $\Re(F(0)) \geq 0$), pois, caso contrário, basta substituir θ por $-\theta$ na demonstração do Lema 3.1.

Defina $\tilde{F} : (-\delta, \delta) \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{F}(s) = \begin{cases} \dfrac{F(s) - F(0)}{s}, \ s \neq 0; \\ F'(0), \ s = 0, \end{cases}$$

e $G : (-\delta, \delta) \to \mathbb{C}$ por

$$G(r) = \int_0^r s\tilde{F}(s^2)ds.$$

Pela Proposição 3.2, sabe-se que F é uma função par. Logo, $sF(s^2)$ é ímpar e, consequentemente, G uma função par, pois

$$G(r) - G(-r) = \int_0^r s\tilde{F}(s^2)ds - \int_0^{-r} s\tilde{F}(s^2)ds = -\int_r^{-r} s\tilde{F}(s^2)ds = \int_{-r}^{r} s\tilde{F}(s^2)ds = 0.$$

Considere a aplicação I definida em D_0 e dada em coordenadas polares por

$$I(r, \theta) \doteq r^{F(0)} \mathrm{e}^{G(r)+i\theta}.$$

Note que $\Re(G(r))$ é contínua em um compacto $[-\delta+\varepsilon, \delta-\varepsilon] \subset (-\delta, \delta)$, logo existe $M > 0$ de modo que $|\Re(G(r))| \leq M \ \forall r \in [-\delta+\varepsilon, \delta-\varepsilon]$. Isso implica que I é limitada para $|r| < \delta - \varepsilon$, pois, como $\Re(F(0)) \geq 0$,

$$|I(r, \theta)| = |r^{F(0)} \mathrm{e}^{G(r)+i\theta}| = |r|^{\Re(F(0))} \mathrm{e}^{\Re(G(r))} < \delta^{\Re(F(0))} \mathrm{e}^{M}.$$

Consequentemente, I define uma distribuição em D. Além disso, fora da origem I satisfaz

$$\Pi^*\Omega \wedge dI = \Pi^*(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) \wedge dI = 0, \tag{4.2}$$

onde Π é a aplicação dada em (3.1). Com efeito,

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial r}dr + \frac{\partial I}{\partial \theta}d\theta = (F(0)r^{F(0)-1}\mathrm{e}^{G(r)+i\theta} + r^{F(0)}\mathrm{e}^{G(r)+i\theta} r\tilde{F}(r^2))dr + iI(r,\theta)d\theta \\ &= r^{F(0)}\mathrm{e}^{G(r)+i\theta}\left(\frac{F(0)}{r} + r\tilde{F}(r^2)\right)dr + iI(r,\theta)d\theta \\ &= r^{F(0)}\mathrm{e}^{G(r)+i\theta}\left(\frac{F(0)}{r} + \frac{F(r^2) - F(0)}{r}\right)dr + iI(r,\theta)d\theta \\ &= \left(\frac{I(r,\theta)\cdot F(r^2)}{r}\right)dr + iI(r,\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Pi^*\Omega \wedge dI &= \Pi^*(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) \wedge dI \\ &= [2ir^2 d\theta + F(r^2)2rdr] \wedge \left[\left(\frac{I(r,\theta)\cdot F(r^2)}{r}\right)dr + iI(r,\theta)d\theta\right] \\ &= 2I(r,\theta)[irF(r^2)d\theta \wedge dr + irF(r^2)dr \wedge d\theta] = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como
$$I(z) = |z|^{F(0)} e^{G(|z|)} \left(\frac{z}{|z|}\right) = z|z|^{F(0)-1} e^{G(|z|)},$$
I não se estende a uma função C^∞ em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ quando $F(0) \notin \mathbb{Z}^+$ ou quando $F(0) \in 2\mathbb{Z}^+$. Nesses casos, isso conclui a prova do teorema.

O caso restante a ser considerado é quando $F(0)$ é ímpar, isto é, $F(0) = 2p+1,\ p \in \mathbb{Z}^+$, e $I(z) = z|z|^{2p} e^{\tilde{G}(|z|^2)}$, com $\tilde{G} \in C^\infty((-\delta,\delta),\mathbb{C})$, pois G é função par.

A aplicação $(r,\theta) \mapsto (\rho,\phi) = (re^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}}, \theta + \Im(\tilde{G}(r^2)))$ é um difeomorfismo numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, pois a matriz jacobiana
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(re^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}}\right) & \frac{\partial}{\partial \theta}\left(re^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\theta + \Im(\tilde{G}(r^2))\right) & \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta + \Im(\tilde{G}(r^2))\right) \end{bmatrix}_{|r=0} = \begin{bmatrix} e^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}} + re^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}} \frac{\frac{\partial}{\partial r}\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}\Im(\tilde{G}(r^2)) & 1 \end{bmatrix}_{|r=0}$$
tem determinante 1. Assim, podemos considerar a mudança de variáveis
$$\begin{cases} \rho = re^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}}; \\ \phi = \theta + \Im(\tilde{G}(r^2)), \end{cases}$$
com
$$\frac{\rho}{r} = e^{\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}} \implies \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) = \frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1} \implies (2p+1)\ln\left(\frac{\rho}{r}\right) = \Re(\tilde{G}(r^2)).$$
Então, como $I(r,\theta) = r^{2p+1} e^{\tilde{G}(r^2)+i\theta}$, temos
$$\begin{aligned} I(\rho,\phi) &= \left(\rho e^{-\frac{\Re(\tilde{G}(r^2))}{2p+1}}\right)^{2p+1} e^{(2p+1)\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)+i(\phi-\theta)+i\theta} \\ &= \rho^{2p+1} e^{-\Re(\tilde{G}(r^2))} e^{(2p+1)\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)+i\phi} = \rho^{2p+1} e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Da equação (4.3), temos $\Pi^*(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) = \alpha \cdot dI$, para certo α. Então, nas novas coordenadas (ρ,ϕ) de I, a 1-forma $\Pi^*(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r)$ pode ser vista como múltipla de $\Omega_1 \doteq (2p+1)\rho d\rho + i\rho^2 d\phi$:
$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial I}{\partial \phi} d\phi = (2p+1)\rho^{2p} e^{i\phi} d\rho + i\rho^{2p+1} e^{i\phi} d\phi \\ &= \rho^{2p-1} e^{i\phi}[(2p+1)\rho d\rho + i\rho^2 d\phi] = \rho^{2p-1} e^{i\phi}\Omega_1. \end{aligned}$$
Mais ainda, assim como fizemos com ω_r e ω_a em (3.2) e (3.3), podemos transformar $\Pi^*(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r)$ em um múltiplo de $\Omega_0 \doteq (2p+1)\Lambda^*[\bar{\zeta}d\zeta + \zeta d\bar{\zeta}] + \Lambda^*[\bar{\zeta}d\zeta - \zeta d\bar{\zeta}]$, onde Λ é a aplicação tal que $\Lambda(\rho,\phi) = \rho e^{i\phi} = \zeta$. Com efeito,
$$\begin{aligned} \Pi^*(\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) = \alpha dI = \alpha\rho^{2p-1} e^{i\phi}\Omega_1 &= \alpha\rho^{2p-1} e^{i\phi}[(2p+1)\rho d\rho + i\rho^2 d\phi] \\ &= \alpha\rho^{2p-1} e^{i\phi}\frac{1}{2}[(2p+1)\Lambda^*(\bar{\zeta}d\zeta + \zeta d\bar{\zeta}) + \Lambda^*(\bar{\zeta}d\zeta - \zeta d\bar{\zeta})] \\ &= \frac{1}{2}\alpha\rho^{2p-1} e^{i\phi}\Omega_0. \end{aligned}$$

A 1-forma Ω_0 é real-analítica em ζ e $\bar{\zeta}$ e possui uma singularidade irredutível na origem. Pelo Lema 4.1, existem 1-formas diferenciais reais analíticas η tais que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, a equação

$$du \wedge \Omega_0 = [\zeta|\zeta|^{2p}]^N \eta \wedge \Omega_0$$

tem solução suave em D_0, mas que não se estende a uma função suave em D. □

Observação 4.3. Com a notação do Teorema acima, nos casos em que a aplicação I é uma função de classe C^1 em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, a equação

$$du \wedge (\omega_a + F(|z|^2)\omega_r) = \eta \wedge (\omega_a + F(|z|^2)\omega_r)$$

é equivalente à equação

$$du \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega,$$

onde Ω é dada pelo Corolário 3.4. Nessas condições, Ω não é C^∞-hipoelíptica. Isso acontece, por exemplo, quando $F(0) \in 2\mathbb{Z}^+_{>2}$.

Teorema 4.4. Seja $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{C}$ uma função C^∞ tal que F tem ordem de anulamento finita em 0 e $\Re(F(s)) > 0$ para $s > 0$. Sejam k e l as ordens de anulamento em 0 de $\Re(F)$ e $\Im(F)$, respectivamente. Se $k \geq 2l$, então

$$du \wedge (\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) = 0 \tag{4.4}$$

admite solução u suave em D_0, mas que não se estende a uma função suave em D.

Demonstração. Dado $R > 0$ tal que $R^2 < \delta$, considere a função $G : (0,R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$G(r) = \int_R^r \frac{1}{sF(s^2)} ds = -\int_r^R \frac{1}{sF(s^2)} ds, \; r \in (0,R). \tag{4.5}$$

Veja que a condição $R^2 < \delta$ é para que tenhamos $s^2 \in (-\delta, \delta)$, que é o domínio de definição da função F.

Pela hipótese $k \geq 2l$ podemos escrever $k = 2l + n$, com $n \geq 0$. Caso $n \geq 1$,

$$F(s) = s^{2l+1}F_1(s) + is^l F_2(s),$$

com F_1 e F_2 funções a valores reais, $F_1(s) > 0$ para $s > 0$ (pois $\Re(F(s)) > 0$ para $s > 0$ por hipótese) e $F_2(0) \neq 0$ (pois ordem($\Im(F)$)$= l$). Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{sF(s^2)} &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^{4l+2}F_1(s^2) + is^{2l}F_2(s^2)}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^{4l+2}F_1(s^2) - is^{2l}F_2(s^2)}{(s^{4l+2}F_1(s^2))^2 + (s^{2l}F_2(s^2))^2}\right) \\
&= \frac{s^{4l+2}F_1(s^2) - is^{2l}F_2(s^2)}{s^{4l+1}(s^{4l+4}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2)} \\
&= s\frac{F_1(s^2)}{s^{4l+4}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2} - i\frac{F_2(s^2)}{s^{2l+1}(s^{4l+4}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2)}.
\end{aligned}$$

Defina

$$I(r,\theta) \doteq \mathrm{e}^{G(r)+i\theta} = \mathrm{e}^{\Re(G(r))+i\Im(G(r))+i\theta}.$$

Como $s^{4l+4}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2$ nunca se anula, $\Re(G(r)) \in C^\infty([0,R])$. Em particular, $|\Re(G(r))| \leq M$ para algum $M > 0$. Assim, I é limitada, pois

$$|I(r,\theta)| = \mathrm{e}^{\Re(G(r))} \leq \mathrm{e}^{M}.$$

Consequentemente, define uma distribuição em D. Além disso, fora da origem,

$$\begin{aligned} dI \wedge \Pi^*(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) &= [\mathrm{e}^{G(r)+i\theta}(G'(r)dr + id\theta)] \wedge [2r(dr + F(r^2)ird\theta)] \\ &= 2r\mathrm{e}^{G(r)+i\theta}(G'(r)F(r^2)irdr \wedge d\theta - idr \wedge d\theta) \\ &= 2r\mathrm{e}^{G(r)+i\theta}(idr \wedge d\theta - idr \wedge d\theta) = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

pois, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $G'(r) = \frac{1}{rF(r^2)}$. Como $\Im(G(r))$ não é contínua na origem, I não é suave em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, o que conclui a demonstração no caso $n \geq 1$.

Caso $n = 0$, $F(s) = s^{2l}F_1(s) + is^lF_2(s)$. Então

$$\frac{1}{sF(s^2)} = \frac{1}{s^{2l+1}(s^{2l}F_1(s^2) + iF_2(s^2))} = \frac{s^{2l}F_1(s^2) - iF_2(s^2)}{s^{2l+1}(s^{4l}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2)} = \frac{s^{2l}\hat{F}_1(s^2) + i\hat{F}_2(s^2)}{s^{2l+1}}, \tag{4.7}$$

onde

$$\hat{F}_1(s^2) \doteq \frac{F_1(s^2)}{s^{4l}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2} \text{ e } \hat{F}_2(s^2) \doteq \frac{-F_2(s^2)}{s^{4l}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2}$$

são funções a valores reais com $\hat{F}_1(0) > 0$ e $\hat{F}_2(0) \neq 0$. Considere a expansão de Taylor de $\hat{F}_1$ e $\hat{F}_2$:

$$\begin{cases} \hat{F}_1(s^2) = \dfrac{\hat{F}_1(0)}{0!}(s^2)^0 + o(|s^2|^1) = \hat{F}_1(0) + s^2\tilde{F}_1(s^2); \\ \hat{F}_2(s^2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \dfrac{\hat{F}_2^{(j)}(0)}{j!}(s^2)^j + o(|s^2|^{l+1}) = \sum_{j=0}^{l} A_j(s^2)^j + s^{2(l+1)}\tilde{F}_2(s^2), \end{cases}$$

onde $A_j \doteq \dfrac{\hat{F}_2^{(j)}(0)}{j!}$ e $\tilde{F}_1$ e $\tilde{F}_2$ são funções suaves a valores reais. Note que $A_0 = \dfrac{\hat{F}_2^{(0)}(0)}{0!} = \hat{F}_2(0) \neq 0$. Voltando à equação (4.7), temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{sF(s^2)} &= \frac{1}{s}\left(\hat{F}_1(0) + s^2\tilde{F}_1(s^2)\right) + \frac{i}{s^{2l+1}}\left(\sum_{j=0}^{l} A_j(s^2)^j + s^{2(l+1)}\tilde{F}_2(s^2)\right) \\ &= \frac{\hat{F}_1(0)}{s} + s\tilde{F}_1(s^2) + i\left(\sum_{j=0}^{l} \frac{A_j}{s^{2l+1-2j}} + s^{2(l+1)-(2l+1)}\tilde{F}_2(s^2)\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Assim, a função G pode ser escrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
G(r) &= \int_R^r \frac{1}{sF(s^2)} ds \\
&= \hat{F}_1(0) \int_R^r \frac{ds}{s} + \int_R^r s\tilde{F}_1(s^2)ds + i\left[\sum_{j=0}^{l} A_j \int_R^r \frac{ds}{s^{2(l-j)+1}} + \int_R^r s\tilde{F}_2(s^2)ds\right] \\
&= \hat{F}_1(0)(\ln r - \ln R) + \int_R^r s\tilde{F}_1(s^2)ds + i\sum_{j=0}^{l-1} A_j \left(\frac{r^{-2(l-j)}}{-2(l-j)} - \frac{R^{-2(l-j)}}{-2(l-j)}\right) \\
&+ i\left[A_l(\ln r - \ln R) + \int_R^r s\tilde{F}_2(s^2)ds\right] \\
&\doteq g_1(r^2) + i\frac{g_2(r^2)}{r^{2l}} + C\ln(r^2),
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

onde g_2 é um polinômio real com $g_2(0) \neq 0$ e $\deg(g_2) \leq l-1$ (deg denota o grau do polinômio), $C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}$ e $g_1 \in C^\infty$ é dada por

$$
g_1(r^2) = -\hat{F}_1(0)\ln R + \int_R^r s(\tilde{F}_1(s^2) + i\tilde{F}_2(s^2))ds + i\sum_{j=0}^{l-1} A_j \frac{R^{-2(l-j)}}{2(l-j)} - iA_l \ln R.
$$

Novamente, seja

$$
I(r,\theta) \doteq \mathrm{e}^{G(r)+i\theta} = \mathrm{e}^{\Re(G(r))+i\Im(G(r))+i\theta}.
$$

Pela equação (4.9), temos que I é limitada, além de satisfazer $dI \wedge \Pi^*(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) = 0$ fora da origem pela equação (4.6). Contudo, I não é suave na origem, o que finaliza a demonstração.

□

CAPÍTULO

5

NORMALIZAÇÃO

Neste capítulo, considerando $k < 2l$, iremos encontrar uma mudança de variáveis que transforma $\omega_r + F(|z|^2)\omega_a$ em uma 1-forma com uma expressão mais simples, a chamaremos aqui de normalização. Os métodos utilizados são baseados nos empregados por (MEZIANI, 2004) (e podem ser encontrados também em (COSTA, 2014)) para obter a normalização do campo

$$L_n = \frac{\partial}{\partial \theta} - ir^{n+1}a(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,$$

definido em $A_\delta = (-\delta,\delta)\times\mathbb{S}^1$, com $a \in C^\infty(A_\delta)$ e $\Re(a(r,\theta)) > 0$ para todo $(r,\theta) \in A_\delta$.

A normalização de $\omega_r + F(|z|^2)\omega_a$ será dividida em dois lemas, o primeiro tratando do caso $k = l$ e o segundo abordando o caso $l < k < 2l$ (como visto na Observação 3.5, não há o caso $k < l$, pois $l \leq k$).

Lema 5.1. Suponha que $F \in C^\infty((-\delta,\delta),\mathbb{C})$ tem ordem finita em 0 e $\Re(F(s)) > 0$ para $s > 0$. Sejam k e l as ordens de anulamento em 0 de $\Re(F)$ e $\Im(F)$, respectivamente. Se $k = l$, a menos de uma mudança de coordenadas em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, a 1-forma $\omega_r + F(|z|^2)\omega_a$ pode ser escrita como

$$\Omega_0 = \omega_r + \frac{|z|^{2k}}{2|z|^2P'(|z|^2) - 2kP(|z|^2) + \mu|z|^{2k}}\omega_a,$$

onde $\mu \in \mathbb{C}$ e P é um polinômio a valores complexos com grau menor ou igual a $k-1$ e satisfazendo $\Re(P(0)) < 0$.

Demonstração. Da mesma maneira que no Teorema 4.4, considere a função $G : U \doteq (0,R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$G(r) = \int_R^r \frac{1}{sF(s^2)}ds,\ r \in (0,R). \tag{5.1}$$

Como k e l são as ordens de anulamento em 0 de $\Re(F)$ e $\Im(F)$ e $k = l$, podemos escrever

$$F(s) = s^k(F_1(s) + iF_2(s)),$$

com F_1 e F_2 funções a valores reais e $F_1(0) > 0$. Então,

$$\frac{1}{sF(s^2)} = \frac{1}{s}\frac{1}{s^{2k}(F_1(s^2)+iF_2(s^2))} = \frac{1}{s^{2k+1}}\frac{F_1(s^2)-iF_2(s^2)}{F_1(s^2)^2+F_2(s^2)^2} = \frac{1}{s^{2k+1}}[\hat{F}_1(s^2)+i\hat{F}_2(s^2)],$$

onde

$$\hat{F}_1(s^2) \doteq \frac{F_1(s^2)}{F_1(s^2)^2+F_2(s^2)^2} \text{ e } \hat{F}_2(s^2) \doteq \frac{-F_2(s^2)}{F_1(s^2)^2+F_2(s^2)^2}$$

são funções a valores reais com $\hat{F}_1(0) > 0$.

Considere a expansão de Taylor de $\hat{F} \doteq \hat{F}_1 + i\hat{F}_2$ na origem:

$$\frac{1}{sF(s^2)} = \frac{1}{s^{2k+1}}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{\hat{F}^{(j)}(0)}{j!}(s^2)^j + o(|s^2|^{k+1})\right] = \frac{1}{s^{2k+1}}\left[\sum_{j=0}^{k}A_j s^{2j} + s^{2k+2}(\tilde{F}_1(s^2)+i\tilde{F}_2(s^2))\right],$$

onde $A_j \doteq \frac{\hat{F}^{(j)}(0)}{j!}$, $\tilde{F}_1$ e $\tilde{F}_2$ são funções suaves a valores reais e $\Re(A_0) = \Re(\hat{F}(0)) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
G(r) &= \int_R^r \frac{1}{sF(s^2)}ds = \sum_{j=0}^{k-1}A_j\int_R^r s^{2j-2k-1}ds + A_k\int_R^r \frac{1}{s}ds + \int_R^r s(\tilde{F}_1(s^2)+i\tilde{F}_2(s^2))ds \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}A_j\frac{r^{2j-2k}}{2j-2k} - \sum_{j=0}^{k-1}A_j\frac{R^{2j-2k}}{2j-2k} + A_k(\ln(r)-\ln(R)) + \int_R^r s(\tilde{F}_1(s^2)+i\tilde{F}_2(s^2))ds \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{-A_j}{2(k-j)}\frac{r^{2j}}{r^{2k}} + \frac{A_k}{2}\ln(r^2) + \alpha(r^2) = \frac{P(r^2)}{r^{2k}} + C\ln(r^2) + \alpha(r^2),
\end{aligned}$$

onde $P = P_1 + iP_2$ é um polinômio de grau menor ou igual a $k-1$ com $P_1(0) = \Re(P(0)) = \Re\left(\frac{-A_0}{2k}\right) < 0$, $C = C_1 + iC_2 \doteq \frac{A_k}{2}$ e

$$\alpha(r^2) \doteq -\sum_{j=0}^{k-1}A_j\frac{R^{2j-2k}}{2j-2k} - A_k\ln(R) + \int_R^r s(\tilde{F}_1(s^2)+i\tilde{F}_2(s^2))ds \doteq \alpha_1(r^2) + i\alpha_2(r^2)$$

é função C^∞ com α_1 e α_2 funções a valores reais.

Defina a aplicação

$$I(r,\theta) = \mathrm{e}^{G(r)+i\theta} = \exp\left(\frac{P(r^2)}{r^{2k}} + C\ln(r^2) + \alpha(r^2) + i\theta\right),$$

que é C^∞ em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, já mostramos em (4.6) que, para I definida dessa forma, temos $dI \wedge \Pi^*(\omega_r + F(|z|^2)\omega_a) = 0$. Mostraremos que $\Omega_0 \wedge dI = 0$.

Afirmação: existe $\delta > 0$ tal que I é injetiva no disco $D(0,\delta)$. De fato, se $I(r,\theta) = I(\rho,\phi)$,

$$\begin{aligned}
\|I(r,\theta)\| = \|I(\rho,\phi)\| &\iff \mathrm{e}^{\Re(G(r)+i\theta)} = \mathrm{e}^{\Re(G(\rho)+i\phi)} \\
&\implies \Re(G(r)) = \Re(G(\rho)) \\
&\implies \frac{P_1(r^2)}{r^{2k}} + C_1\ln(r^2) + \alpha_1(r^2) = \frac{P_1(\rho^2)}{\rho^{2k}} + C_1\ln(\rho^2) + \alpha_1(\rho^2).
\end{aligned}$$

Sendo $s = r^2$ e $t = \rho^2$, a linha acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \frac{P_1(s)+C_1 s^k \ln(s)+s^k\alpha_1(s)}{s^k} = \frac{P_1(t)+C_1 t^k \ln(t)+t^k\alpha_1(t)}{t^k} \\ \iff & \frac{t^k}{P_1(t)+C_1 t^k \ln(t)+t^k\alpha_1(t)} = \frac{s^k}{P_1(s)+s^k C_1 \ln(s)+s^k\alpha_1(s)} \\ \iff & \frac{t}{\sqrt[k]{-P_1(t)-C_1 t^k \ln(t)-t^k\alpha_1(t)}} = \frac{s}{\sqrt[k]{-P_1(s)-C_1 s^k \ln(s)-s^k\alpha_1(s)}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Seja $H(t) \doteq -P_1(t) - C_1 t^k \ln(t) - t^k\alpha_1(t)$, com $H(0) = -P_1(0) > 0$. Como $H \in C^\infty$, tome V uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$, $V \subset U$, de modo que $H(t) > 0\ \forall t \in V$. Defina $f : V \times V \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(t,s) = \left(\frac{t}{\sqrt[k]{H(t)}}, \frac{s}{\sqrt[k]{H(s)}}\right).$$

Temos $f \in C^\infty(V \times V)$ e a matriz jacobiana de f é dada por

$$Df = \begin{bmatrix} (H(t))^{-\frac{1}{k}} - \frac{t}{k}(H(t))^{-\frac{1}{k}-1}H'(t) & 0 \\ 0 & (H(s))^{-\frac{1}{k}} - \frac{s}{k}(H(s))^{-\frac{1}{k}-1}H'(s) \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \det Df = {} & (H(t)H(s))^{-\frac{1}{k}} - (H(t))^{-\frac{1}{k}}\frac{s}{k}(H(s))^{-\frac{1}{k}-1}H'(s) - (H(s))^{-\frac{1}{k}}\frac{t}{k}(H(t))^{-\frac{1}{k}-1}H'(t) \\ & + \frac{t}{k}(H(t))^{-\frac{1}{k}-1}H'(t)\frac{s}{k}(H(s))^{-\frac{1}{k}-1}H'(s). \end{aligned}$$

Como $H'(t) = -P_1'(t) - C_1 k t^{k-1}\ln(t) - C_1 t^{k-1} - k t^{k-1}\alpha_1(t) - t^k\alpha_1'(t)$ converge a zero se $t \to 0$, temos

$$\det Df(0,0) = H(0)^{-\frac{2}{k}} = (-P_1(0))^{-\frac{2}{k}} \neq 0,$$

pois $P_1(0) < 0$. Pelo Teorema da Função Inversa (ver Teorema 2.23), existe $\delta' > 0$ tal que $D(0,\delta') \subset V \times V \subset \mathbb{R}^2$ de modo que $f|_{D(0,\delta')}$ é difeomorfismo sobre sua imagem. Em particular, para $(t,s) \in D(0,\delta')$, f é injetiva, isto é $f(t,s) = f(s,t) \iff s = t$. Assim, para $(r,\rho) \in D(0,\delta')$, como f é injetiva e vale (5.2), temos $r = \rho$ e

$$\begin{aligned} I(r,\theta) = I(\rho,\phi) & \implies I(r,\theta) = I(r,\phi) \implies \mathrm{e}^{G(r)+i\theta} = \mathrm{e}^{G(r)+i\phi} \\ & \implies \theta = \phi \text{ se } \theta,\phi \in (0,2\pi). \end{aligned}$$

Logo, I é injetiva no disco $D(0,\delta)$ para $\delta = \min\{\delta', 2\pi\}$.

Nosso objetivo agora é eliminar α na definição de I através de uma mudança de coordenadas, obtendo $\Omega_0 \wedge dI = 0$ para uma 1-forma Ω_0 como a do enunciado.

Considere a equação

$$\begin{aligned} & \frac{P_1(s)}{s^k} + C_1\ln(s) = \frac{P_1(t)}{t^k} + C_1\ln(t) + \alpha_1(t) \\ \iff & \frac{s}{\sqrt[k]{-P_1(s)-C_1 s^k\ln(s)}} = \frac{t}{\sqrt[k]{-P_1(t)-C_1 t^k\ln(t)-t^k\alpha_1(t)}} \end{aligned} \tag{5.3}$$

e seja

$$\tilde{H}(t,s) \doteq \frac{s}{\sqrt[k]{-P_1(s) - C_1 s^k \ln(s)}} - \frac{t}{\sqrt[k]{-P_1(t) - C_1 t^k \ln(t) - t^k \alpha_1(t)}}.$$

Temos

$$\frac{\partial \tilde{H}(t,s)}{\partial s} = \frac{\sqrt[k]{-P_1(s) - C_1 s^k \ln(s)} - \frac{s}{k}\left(\frac{-P_1'(s) - kC_1 s^{k-1}\ln(s) - C_1 s^{k-1}}{(-P_1(s) - C_1 s^k \ln(s))^{1-\frac{1}{k}}}\right)}{(\sqrt[k]{-P_1(s) - C_1 s^k \ln(s)})^2}.$$

Como $\lim_{s\to 0} s^k \ln(s) = 0$ e $P_1(0) < 0$, temos $\frac{\partial \tilde{H}(t,s)}{\partial s} \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita (ver Teorema 2.24), temos $s = s(t)$ para t suficientemente pequeno. Como $t = 0$ implica $s = 0$, segue que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[k]{-P_1(s) - C_1 s^k \ln(s)}}{\sqrt[k]{-P_1(t) - C_1 t^k \ln(t) - t^k \alpha_1(t)}} = 1.$$

Sabendo que

$$s = \frac{t\sqrt[k]{-P_1(s) - C_1 s^k \ln(s)}}{\sqrt[k]{-P_1(t) - C_1 t^k \ln(t) - t^k \alpha_1(t)}},$$

pela fórmula de Taylor podemos escrever

$$s(t) = t(1+\beta(t)). \tag{5.4}$$

Mostremos que $\beta \in C^\infty$ e se anula de ordem pelo menos $k-1$ em 0. Substituindo (5.4) em (5.3),

$$\frac{t}{\sqrt[k]{-P_1(t) - C_1 t^k \ln(t) - t^k \alpha_1(t)}} = \frac{t(1+\beta(t))}{\sqrt[k]{-P_1(t(1+\beta(t))) - C_1(t(1+\beta(t)))^k \ln(t(1+\beta(t)))}}$$

isto é,

$$-P_1(t(1+\beta(t))) - C_1(t(1+\beta(t)))^k \ln(t(1+\beta(t))) = (1+\beta(t))^k(-P_1(t) - C_1 t^k \ln(t) - t^k \alpha_1(t)). \tag{5.5}$$

Se

$$E(t,\beta) \doteq P_1(t(1+\beta)) - (1+\beta)^k P_1(t) + C_1 t^k (1+\beta)^k \ln(1+\beta) - t^k (1+\beta)^k \alpha_1(t),$$

por (5.5) obtém-se $E(t,\beta) = 0$. Note que

- $E(0,0) = P_1(0) - P_1(0) = 0$;
- $$\frac{\partial E(t,\beta)}{\partial \beta} = tP_1'(t(1+\beta)) - k(1+\beta)^{k-1}P_1(t) + C_1 t^k k(1+\beta)^{k-1}\ln(1+\beta) + \frac{C_1 t^k (1+\beta)^k}{1+\beta} - kt^k(1+\beta)^{k-1}\alpha_1(t),$$

  isto é, $\dfrac{\partial E(0,\beta)}{\partial \beta} = -k(1+\beta)^{k-1}P_1(0) \neq 0$;

- $\dfrac{\partial E(t,\beta)}{\partial t} = P_1'(t(1+\beta))(1+\beta) - (1+\beta)^k P_1'(t) + C_1 k t^{k-1}(1+\beta)^k \ln(1+\beta)$
$$- k t^{k-1}(1+\beta)^k \alpha_1(t) - t^k (1+\beta)^k \alpha_1'(t),$$
isto é, $\dfrac{\partial E(0,0)}{\partial t} = P_1'(0) - P_1'(0) = 0;$

- $\dfrac{\partial^2 E(t,\beta)}{\partial t^2} = P_1''(t(1+\beta))(1+\beta)^2 - (1+\beta)^k P_1''(t) + C_1 k(k-1) t^{k-2}(1+\beta)^k \ln(1+\beta)$
$$- k(k-1) t^{k-2}(1+\beta)^k \alpha_1(t) - k t^{k-1}(1+\beta)^k \alpha_1'(t) - k t^k (1+\beta)^k \alpha_1'(t)$$
$$- t^k (1+\beta)^k \alpha_1''(t),$$
isto é, $\dfrac{\partial^2 E(0,0)}{\partial t^2} = P_1''(0) - P_1''(0) = 0.$

Procedendo assim, obtemos

$$\frac{\partial^j E(0,0)}{\partial t^j} = 0,\ \ j = 1, \ldots, k-1.$$

Pelo Teorema da Função Implícita (ver Teorema 2.24), $\beta = \beta(t)$ para valores de t suficientemente pequenos. Assim,

$$\frac{\partial \beta(0)}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial E(0,\beta)}{\partial t}}{\dfrac{\partial E(0,\beta)}{\partial \beta}} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 \beta(0)}{\partial t^2} = -\left(\frac{\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}\dfrac{\partial E}{\partial \beta} - \dfrac{\partial E}{\partial t}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t \partial \beta}}{\left(\dfrac{\partial E}{\partial \beta}\right)^2} \right)_{|t=0} = 0.$$

Analogamente, $\dfrac{\partial^j \beta(0)}{\partial t^j} = 0,\ \ j = 1, \ldots, k-1$. Pela Fórmula de Taylor,

$$\beta(t) = t^{k-1}\nu(t), \tag{5.6}$$

para alguma função $\nu \in C^\infty$.

Note que, se $s = t(1 + t^{k-1}\nu(t))$, a função

$$\ln(t) - \ln(s) \tag{5.7}$$

é C^∞ em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. De fato,

$$\ln(t) - \ln(s) = \ln(t) - \ln(t + t^k \nu(t)) = \ln\left(\frac{t}{t + t^k \nu(t)}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 + t^{k-1}\nu(t)}\right)$$
$$= -\ln(1 + t^{k-1}\nu(t))$$

e para $|t|$ suficientemente pequeno, $1 + t^{k-1}\nu(t) > 0$. Evidentemente, para $t = 0$, temos $-\ln(1 + 0^{k-1}\nu(t)) = -\ln 1 = 0$. Afirmação: a função

$$\frac{P_2(t)}{t^k} - \frac{P_2(s)}{s^k} \tag{5.8}$$

é também C^∞ em $0 \in \mathbb{R}$. De fato, o numerador da expressão abaixo se anula de ordem k em 0:

$$\frac{P_2(t)}{t^k} - \frac{P_2(s)}{s^k} = \frac{P_2(t)}{t^k} - \frac{P_2(t(1+t^{k-1}\nu(t)))}{t^k(1+t^{k-1}\nu(t))^k} = \frac{(1+t^{k-1}\nu(t))^k P_2(t) - P_2(t(1+t^{k-1}\nu(t)))}{t^k(1+t^{k-1}\nu(t))^k},$$

o que prova a afirmação.

Como $s = r^2$ e $t = \rho^2$, a expressão $s = t(1+t^{k-1}\nu(t))$ se torna

$$r^2 = \rho^2(1+(\rho^2)^{k-1}\nu(\rho^2)) \implies r = \rho\sqrt{1+\rho^{2(k-1)}\nu(\rho^2)}.$$

A aplicação $(\rho,\theta) \mapsto (\rho\sqrt{1+\rho^{2(k-1)}\nu(\rho^2)},\theta)$ é um difeomorfismo numa vizinhança de $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, pois a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sqrt{1+\rho^{2(k-1)}\nu(\rho^2)} & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\sqrt{1+\rho^{2(k-1)}\nu(\rho^2)} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\rho} & \frac{\partial\theta}{\partial\theta} \end{bmatrix}_{|\rho=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sqrt{1+\rho^{2(k-1)}\nu(\rho^2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{|\rho=0}$$

tem determinante não nulo. Assim, podemos considerar a mudança de variáveis

$$\begin{cases} r_1 = \rho\sqrt{1+\rho^{2(k-1)}\nu(\rho^2)}; \\ \theta_1 = \theta. \end{cases} \tag{5.9}$$

Por construção, $s = t(1+t^{k-1}\nu(t))$ satisfaz a equação (5.3),

$$P_1(s) + C_1 s^k \ln(s) = P_1(t) + C_1 t^k \ln(t) + t^k \alpha_1(t),$$

isto é,

$$P_1(r_1^2) + C_1 r_1^{2k}\ln(r_1^2) = P_1(\rho^2) + C_1\rho^{2k}\ln(\rho^2) + \rho^{2k}\alpha_1(\rho^2). \tag{5.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\frac{P_2(r^2)}{r^{2k}} + C_2\ln(r^2) + \alpha_2(r^2) + \theta = \\
&\frac{P_2(r^2)}{r^{2k}} + C_2\ln(r^2) + \alpha_2(r^2) + \theta + \frac{P_2(\rho^2)}{\rho^{2k}} - \frac{P_2(\rho^2)}{\rho^{2k}} + C_2\ln(\rho^2) - C_2\ln(\rho^2) = \\
&\frac{P_2(\rho^2)}{\rho^{2k}} + C_2\ln(\rho^2) + \alpha_2(r^2) + \theta + C_2(\ln(r^2) - \ln(\rho^2)) + \left(\frac{P_2(r^2)}{r^{2k}} - \frac{P_2(\rho^2)}{\rho^{2k}}\right) = \\
&\frac{P_2(\rho^2)}{\rho^{2k}} + C_2\ln(\rho^2) + \gamma(r,\rho) + \theta,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

sendo

$$\gamma(r,\rho) \doteq \alpha_2(r^2) + C_2(\ln(r^2) - \ln(\rho^2)) + \left(\frac{P_2(r^2)}{r^{2k}} - \frac{P_2(\rho^2)}{\rho^{2k}}\right).$$

Por (5.7) e (5.8), $\gamma \in C^\infty$. Nas coordenadas (5.9), usando (5.10) e (5.11), I se escreve como

$$I(r_1,\theta_1) = \exp\left(\frac{P_1(r_1^2)}{r_1^{2k}} + C_1\ln(r_1^2)\right) \cdot \exp\left(i\frac{P_2(r_1^2)}{r_1^{2k}} + iC_2\ln(r_1^2) + i\gamma(r_1^2) + i\theta_1\right).$$

Agora, considere a aplicação $(r_1,\theta_1) \mapsto (r_1,\theta_1+\gamma(r_1^2))$. Esta aplicação é um difeomorfismo em uma vizinhança de $\{0\}\times\mathbb{S}^1$, pois

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial r_1} & \dfrac{\partial r_1}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial r_1}(\theta_1+\gamma(r_1^2)) & \dfrac{\partial}{\partial \theta_1}(\theta_1+\gamma(r_1^2)) \end{bmatrix}_{|r_1=0} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r_1}(\gamma(r_1^2)) & 1 \end{bmatrix}_{|r_1=0} = 1.$$

Assim, podemos definir a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} r_2 = r_1; \\ \theta_2 = \theta_1+\gamma(r_1^2). \end{cases} \tag{5.12}$$

Com respeito a essas novas coordenadas, I assume a forma

$$I(r_2,\theta_2) = \exp\left(\frac{P_1(r_2^2)+iP_2(r_2^2)}{r_2^{2k}} + (C_1+iC_2)\ln(r_2^2)+i\theta_2\right) \doteq \exp(B(r_2,\theta_2)). \tag{5.13}$$

A fim de simplificar a notação, escreveremos I nas variáveis (r,θ) ao invés de (r_2,θ_2). Tome $\mu \doteq 2(C_1+iC_2)$. Então a 1-forma

$$\Omega_0 = \omega_r + \frac{|z|^{2k}}{2|z|^2P'(|z|^2)-2kP(|z|^2)+\mu|z|^{2k}}\omega_a$$

satisfaz $\Omega_0 \wedge dI = 0$. Em coordenadas polares,

$$\Pi^*(\Omega_0) = 2rdr + \frac{r^{2k}}{2r^2P'(r^2)-2kP(r^2)+\mu r^{2k}}2ir^2d\theta$$

e

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial r}dr + \frac{\partial I}{\partial \theta}d\theta = \exp(B(r,\theta))\frac{\partial B(r,\theta)}{\partial r}dr + \exp(B(r,\theta))\frac{\partial B(r,\theta)}{\partial \theta}d\theta \\ &= \exp(B(r,\theta))\cdot\left(\frac{P'(r^2)2r}{r^{2k}} + (-2k)\frac{P(r^2)}{r^{2k+1}} + \frac{2(C_1+iC_2)}{r}\right)dr + i\exp(B(r,\theta))d\theta \\ &= \exp(B(r,\theta))\cdot\left(\frac{P'(r^2)2r^2+(-2k)P(r^2)+\mu r^{2k}}{r^{2k+1}}\right)dr + i\exp(B(r,\theta))d\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Pi^*(\Omega_0)\wedge dI &= 2ri\exp(B(r,\theta))dr\wedge d\theta \\ &\quad - \left(\frac{r^{2k}\cdot 2ir^2\cdot\exp(B(r,\theta))}{2r^2P'(r^2)-2kP(r^2)+\mu r^{2k}}\right)\cdot\left(\frac{P'(r^2)2r^2+(-2k)P(r^2)+\mu r^{2k}}{r^{2k+1}}\right)dr\wedge d\theta \\ &= 2ri\exp(B(r,\theta))dr\wedge d\theta - 2ir\exp(B(r,\theta))dr\wedge d\theta = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 5.2. Suponha que $F \in C^\infty((-\delta,\delta),\mathbb{C})$ tem ordem finita em 0 e é tal que $\Re(F(s)) > 0$ para $s > 0$. Sejam k e l as ordens de anulamento em 0 de $\Re(F)$ e $\Im(F)$, respectivamente. Se $0 < l < k < 2l$, a menos de uma mudança de coordenadas em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, a 1-forma $\omega_r + F(|z|^2)\omega_a$ pode ser escrita como

$$\Omega_0 = \omega_r + \frac{|z|^{2l}}{2S(|z|^2)}\omega_a,$$

com S um polinômio dado por

$$S(s) = s^{k-l+1}q_1'(s) - (2l-k)s^{k-l}q_1(s) + i[sq_2'(s) - lq_2(s)] + Cs^l,$$

onde q_1 e q_2 são polinômios a valores reais satisfazendo

$$q_1(0) > 0,\ q_2(0) \neq 0,\ \deg(q_1) \leq 2l-k-1 \text{ e } \deg(q_2) \leq l-1,$$

com deg denotando o grau do polinômio.

Demonstração. Da mesma maneira que no Teorema 4.4, considere a função $G : (0,R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$G(r) = \int_R^r \frac{1}{sF(s^2)}ds,\ r \in (0,R). \tag{5.14}$$

Como k e l são as ordens em 0 de $\Re(F)$ e $\Im(F)$ e $0 < l < k < 2l$, podemos escrever

$$F(s) = s^l[s^{k-l}F_1(s) + iF_2(s)],$$

com F_1 e F_2 funções a valores reais, $F_1(0) > 0$ e $F_2(0) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{sF(s^2)} &= \frac{1}{s}\frac{1}{s^{2l}[s^{2(k-l)}F_1(s^2) + iF_2(s^2)]} = \frac{1}{s^{2l+1}}\frac{s^{2(k-l)}F_1(s^2) - iF_2(s^2)}{s^{4(k-l)}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2}\\ &= \frac{s^{2(k-l)}\hat{F}_1(s^2) + i\hat{F}_2(s^2)}{s^{2l+1}},\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde

$$\hat{F}_1(s^2) \doteq \frac{F_1(s^2)}{s^{4(k-l)}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2} \text{ e } \hat{F}_2(s^2) \doteq \frac{-F_2(s^2)}{s^{4(k-l)}F_1(s^2)^2 + F_2(s^2)^2}$$

são funções a valores reais com $\hat{F}_1(0) > 0$ e $\hat{F}_2(0) \neq 0$. Considere a expansão de Taylor de $\hat{F}_1$ e $\hat{F}_2$:

$$\begin{cases}\hat{F}_1(s^2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2l-k}\frac{\hat{F}_1{}^{(j)}(0)}{j!}(s^2)^j + o(|s^2|^{2l-k+1}) = \sum_{j=0}^{2l-k}A_{j,1}(s^2)^j + s^{2(2l-k+1)}\tilde{F}_1(s^2);\\ \hat{F}_2(s^2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l}\frac{\hat{F}_2{}^{(j)}(0)}{j!}(s^2)^j + o(|s^2|^{l+1}) = \sum_{j=0}^{l}A_{j,2}(s^2)^j + s^{2(l+1)}\tilde{F}_2(s^2),\end{cases}$$

onde $A_{j,p} \doteq \dfrac{\hat{F}_p{}^{(j)}(0)}{j!}$, $p = 1,2$, e $\tilde{F}_1$ e $\tilde{F}_2$ são funções suaves a valores reais. Note que

$$A_{0,1} = \frac{\hat{F}_1{}^{(0)}(0)}{0!} = \hat{F}_1(0) > 0 \text{ e } A_{0,2} = \frac{\hat{F}_2{}^{(0)}(0)}{0!} = \hat{F}_2(0) \neq 0.$$

Voltando à equação (5.15), temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{sF(s^2)} &= \frac{s^{2(k-l)}}{s^{2l+1}}\left(\sum_{j=0}^{2l-k} A_{j,1}(s^2)^j + s^{2(2l-k+1)}\tilde{F}_1(s^2)\right) + \frac{i}{s^{2l+1}}\left(\sum_{j=0}^{l} A_{j,2}(s^2)^j + s^{2(l+1)}\tilde{F}_2(s^2)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{2l-k} \frac{A_{j,1}}{s^{2l+1-2(k-l)-2j}} + s^{2(2l-k+1)+2(k-l)-(2l+1)}\tilde{F}_1(s^2)\\
&+ i\left(\sum_{j=0}^{l} \frac{A_{j,2}}{s^{2l+1-2j}} + s^{2(l+1)-(2l+1)}\tilde{F}_2(s^2)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{2l-k} \frac{A_{j,1}}{s^{2(2l-k-j)+1}} + s\tilde{F}_1(s^2) + i\left(\sum_{j=0}^{l} \frac{A_{j,2}}{s^{2(l-j)+1}} + s\tilde{F}_2(s^2)\right).
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Assim, a função G pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
G(r) &= \int_R^r \frac{1}{sF(s^2)}ds\\
&= \sum_{j=0}^{2l-k} A_{j,1}\int_R^r \frac{ds}{s^{2(2l-k-j)+1}} + \int_R^r s\tilde{F}_1(s^2)ds + i\left[\sum_{j=0}^{l} A_{j,2}\int_R^r \frac{ds}{s^{2(l-j)+1}} + \int_R^r s\tilde{F}_2(s^2)ds\right]\\
&= \sum_{j=0}^{2l-k-1} A_{j,1}\left(\frac{r^{-2(2l-k-j)}}{-2(2l-k-j)} - \frac{R^{-2(2l-k-j)}}{-2(2l-k-j)}\right) + A_{2l-k,1}(\ln r - \ln R)\\
&+ \int_R^r s\tilde{F}_1(s^2)ds + i\sum_{j=0}^{l-1} A_{j,2}\left(\frac{r^{-2(l-j)}}{-2(l-j)} - \frac{R^{-2(l-j)}}{-2(l-j)}\right) + i\left[A_{l,2}(\ln r - \ln R) + \int_R^r s\tilde{F}_2(s^2)ds\right]\\
&\doteq \frac{q_1(r^2)}{r^{2(2l-k)}} + i\frac{q_2(r^2)}{r^{2l}} + C\ln(r^2) + \alpha(r^2),
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

onde q_1 e q_2 são polinômios reais com $q_1(0) > 0, q_2(0) \neq 0, \deg(q_1) \leq 2l-k-1, \deg(q_2) \leq l-1$, $C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in C^\infty$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\alpha(r^2) &= \sum_{j=0}^{2l-k-1} A_{j,1}\frac{R^{-2(2l-k-j)}}{2(2l-k-j)} - A_{2l-k,1}\ln R + \int_R^r s(\tilde{F}_1(s^2) + i\tilde{F}_2(s^2))ds\\
&+ i\sum_{j=0}^{l-1} A_{j,2}\frac{R^{-2(l-j)}}{2(l-j)} - iA_{l,2}\ln R \doteq \alpha_1(r^2) + i\alpha_2(r^2),
\end{aligned}
$$

com α_1 e α_2 funções a valores reais. Note que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $G'(r) = \frac{1}{rF(r^2)}$.

Defina a aplicação

$$I(r,\theta) \doteq e^{G(r)+i\theta},$$

que é C^∞ em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Mostremos que existe $\delta > 0$ tal que I é injetiva no disco $D((0,0),\delta)$.

De fato, se $I(r,\theta) = I(\rho,\phi)$,

$$\begin{aligned}
\|I(r,\theta)\| = \|I(\rho,\phi)\| &\iff \mathrm{e}^{\Re(G(r)+i\theta)} = \mathrm{e}^{\Re(G(\rho)+i\phi)} \\
&\iff \Re(G(r)) = \Re(G(\rho)) \\
&\iff \frac{q_1(r^2)}{r^{2(2l-k)}} + C_1\ln(r^2) + \alpha_1(r^2) = \frac{q_1(\rho^2)}{\rho^{2(2l-k)}} + C_1\ln(\rho^2) + \alpha_1(\rho^2).
\end{aligned}$$

Sendo $s = r^2$ e $t = \rho^2$, a linha acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&\frac{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s) + s^{2l-k}\alpha_1(s)}{s^{2l-k}} = \frac{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}{t^{2l-k}} \\
\iff &\frac{t^{2l-k}}{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)} = \frac{s^{2l-k}}{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s) + s^{2l-k}\alpha_1(s)} \\
\iff &\frac{t}{\sqrt[2l-k]{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}} = \frac{s}{\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s) + s^{2l-k}\alpha_1(s)}}.
\end{aligned}$$

Seja $H(t) \doteq q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)$, com $H(0) = q_1(0) > 0$. Como $H \in C^\infty$, tome V uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$, $V \subset U$, de modo que $H(t) > 0\ \forall t \in V$. Defina $f : V \times V \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(t,s) = \left(\frac{t}{\sqrt[2l-k]{H(t)}}, \frac{s}{\sqrt[2l-k]{H(s)}} \right).$$

Temos $f \in C^\infty(V \times V)$ e a matriz jacobiana de f é dada por

$$Df = \begin{bmatrix} (H(t))^{-\frac{1}{2l-k}} - \frac{t}{2l-k}(H(t))^{-\frac{1}{2l-k}-1}H'(t) & 0 \\ 0 & (H(s))^{-\frac{1}{2l-k}} - \frac{s}{2l-k}(H(s))^{-\frac{1}{2l-k}-1}H'(s) \end{bmatrix}.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\det Df = (H(t)H(s))^{-\frac{1}{2l-k}} &- (H(t))^{-\frac{1}{2l-k}} \frac{s(H(s))^{-\frac{1}{2l-k}-1}H'(s)}{2l-k} - (H(s))^{-\frac{1}{2l-k}} \frac{t(H(t))^{-\frac{1}{2l-k}-1}H'(t)}{2l-k} \\
&+ \frac{t(H(t))^{-\frac{1}{2l-k}-1}H'(t)}{2l-k} \frac{s(H(s))^{-\frac{1}{2l-k}-1}H'(s)}{2l-k}.
\end{aligned}$$

Como $H'(t) = q_1'(t) + C_1(2l-k)t^{2l-k-1}\ln(t) + C_1 t^{2l-k-1} + (2l-k)t^{2l-k-1}\alpha_1(t) + t^{2l-k}\alpha_1'(t)$ converge a zero se $t \to 0$, temos

$$\det Df(0,0) = H(0)^{-\frac{2}{2l-k}} = (q_1(0))^{-\frac{2}{2l-k}} \neq 0,$$

pois $q_1(0) > 0$. Pelo Teorema da Função Inversa (ver Teorema 2.23), existe $\delta' > 0$ tal que $D((0,0),\delta') \subset V \times V \subset \mathbb{R}^2$ de modo que $f|_{D((0,0),\delta')}$ é difeomorfismo sobre sua imagem. Em particular, para $(t,s) \in D((0,0),\delta')$, f é injetiva, isto é $f(t,s) = f(s,t) \iff s = t$. Assim, para $(r,\rho) \in D((0,0),\delta')$, temos $r = \rho$ e,

$$\begin{aligned}
I(r,\theta) = I(\rho,\phi) &\implies I(r,\theta) = I(r,\phi) \implies \mathrm{e}^{G(r)+i\theta} = \mathrm{e}^{G(r)+i\phi} \\
&\implies \theta = \phi \text{ se } \theta,\phi \in (0,2\pi).
\end{aligned}$$

Logo, I é injetiva no disco $D((0,0),\delta)$ para $\delta = \min\{\delta', 2\pi\}$.

Nosso objetivo agora é eliminar α na definição de I através de uma mudança de coordenadas, obtendo $\Omega_0 \wedge dI = 0$ para uma 1-forma Ω_0 como a do enunciado.

Considere a equação

$$\begin{aligned} &\frac{q_1(s)}{s^{2l-k}} + C_1 \ln(s) = \frac{q_1(t)}{t^{2l-k}} + C_1 \ln(t) + \alpha_1(t) \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{s}{\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s)}} = \frac{t}{\sqrt[2l-k]{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}} \end{aligned} \tag{5.18}$$

e seja

$$\tilde{H}(t,s) \doteq \frac{s}{\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s)}} - \frac{t}{\sqrt[2l-k]{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}}.$$

Temos

$$\frac{\partial \tilde{H}(t,s)}{\partial s} = \frac{\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s)} - \frac{s}{2l-k}\left(\frac{q_1'(s) + C_1(2l-k)s^{2l-k-1}\ln(s) + C_1 s^{2l-k-1}}{(q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s))^{1-\frac{1}{2l-k}}}\right)}{\left(\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s)}\right)^2}.$$

Como $\lim_{s\to 0} s^{2l-k}\ln(s) = 0$ e $q_1(0) > 0$, temos $\frac{\partial \tilde{H}(t,s)}{\partial s} \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita (ver Teorema 2.24), temos $s = s(t)$ para t suficientemente pequeno. Como $t = 0$ implica $s = 0$, segue que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s)}}{\sqrt[2l-k]{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}} = 1.$$

Sabendo que

$$s = \frac{t\,\sqrt[2l-k]{q_1(s) + C_1 s^{2l-k}\ln(s)}}{\sqrt[2l-k]{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}},$$

pela fórmula de Taylor, podemos escrever

$$s(t) = t(1 + \beta(t)). \tag{5.19}$$

Mostremos que $\beta \in C^\infty$ e se anula de ordem pelo menos $2l-k-1$ em 0. Substituindo (5.19) em (5.18),

$$\frac{t(1+\beta(t))}{\sqrt[2l-k]{q_1(t(1+\beta(t))) + C_1 t^{2l-k}(1+\beta(t))^{2l-k}\ln(t(1+\beta(t)))}} = \frac{t}{\sqrt[2l-k]{q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)}};$$

isto é,

$$\begin{aligned} &q_1(t(1+\beta(t))) + C_1 t^{2l-k}(1+\beta(t))^{2l-k}\ln(t(1+\beta(t))) \\ &= (1+\beta(t))^{2l-k}(q_1(t) + C_1 t^{2l-k}\ln(t) + t^{2l-k}\alpha_1(t)). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Para

$$\begin{aligned} E(t,\beta) &\doteq -q_1(t(1+\beta)) - C_1 t^{2l-k}(1+\beta)^{2l-k}\ln(t(1+\beta)) + (1+\beta)^{2l-k}q_1(t) \\ &+ (1+\beta)^{2l-k}t^{2l-k}\alpha_1(t) \\ &= -q_1(t(1+\beta)) - C_1 t^{2l-k}(1+\beta)^{2l-k}\ln\left(\frac{1}{1+\beta}\right) + (1+\beta)^{2l-k}q_1(t) \\ &+ (1+\beta)^{2l-k}t^{2l-k}\alpha_1(t), \end{aligned}$$

por (5.20) obtém-se $E(t,\beta) = 0$. Note que

- $E(0,0) = -q_1(0) + q_1(0) = 0$;
- $$\frac{\partial E(t,\beta)}{\partial \beta} = -tq_1'(t(1+\beta)) - C_1 t^{2l-k}(2l-k)(1+\beta)^{2l-k-1}\ln\left(\frac{1}{1+\beta}\right) + C_1 t^{2l-k}(1+\beta)^{2l-k}\frac{1}{1+\beta} + (2l-k)(1+\beta)^{2l-k-1}q_1(t) + (2l-k)(1+\beta)^{2l-k-1}t^{2l-k}\alpha_1(t),$$
  isto é, $\dfrac{\partial E(0,\beta)}{\partial \beta} = (2l-k)(1+\beta)^{2l-k-1}q_1(0) \neq 0$;
- $$\frac{\partial E(t,\beta)}{\partial t} = -(1+\beta)q_1'(t(1+\beta)) - C_1(2l-k)t^{2l-k-1}(1+\beta)^{2l-k}\ln\left(\frac{1}{1+\beta}\right) + (1+\beta)^{2l-k}q_1'(t) + (1+\beta)^{2l-k}(2l-k)t^{2l-k-1}\alpha_1(t) + (1+\beta)^{2l-k}t^{2l-k}\alpha_1'(t),$$
  isto é, $\dfrac{\partial E(0,0)}{\partial t} = -q_1'(0) + q_1'(0) = 0$;
- $$\frac{\partial^2 E(t,\beta)}{\partial t^2} = -C_1(2l-k)(2l-k-1)t^{2l-k-2}(1+\beta)^{2l-k}\ln\left(\frac{1}{1+\beta}\right) + (1+\beta)^{2l-k}q_1''(t) + (1+\beta)^{2l-k}(2l-k)(2l-k-1)t^{2l-k-2}\alpha_1(t) + 2(1+\beta)^{2l-k}(2l-k)t^{2l-k-1}\alpha_1'(t) + (1+\beta)^{2l-k}t^{2l-k}\alpha_1''(t) - (1+\beta)^2 q_1''(t(1+\beta)),$$
  isto é, $\dfrac{\partial^2 E(0,0)}{\partial t^2} = -q_1''(0) + q_1''(0) = 0$.

Procedendo assim, obtemos

$$\frac{\partial^j E(0,0)}{\partial t^j} = 0,\ j = 1, \dots, 2l-k-1.$$

Pelo Teorema da Função Implícita (ver Teorema 2.24), $\beta = \beta(t)$ para valores de t suficientemente pequenos. Assim,

$$\frac{\partial \beta(0)}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial E(0,\beta)}{\partial t}}{\dfrac{\partial E(0,\beta)}{\partial \beta}} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 \beta(0)}{\partial t^2} = -\left.\left(\frac{\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}\dfrac{\partial E}{\partial \beta} - \dfrac{\partial E}{\partial t}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t \partial \beta}}{\left(\dfrac{\partial E}{\partial \beta}\right)^2}\right)\right|_{t=0} = 0.$$

Analogamente, $\dfrac{\partial^j \beta(0)}{\partial t^j} = 0,\ j = 1, \dots, 2l-k-1$. Pela Fórmula de Taylor,

$$\beta(t) = t^{2l-k-1}\nu(t), \tag{5.21}$$

para alguma função $\nu \in C^\infty$.

Note que se $s = t(1 + t^{2l-k-1}\nu(t))$, a função

$$\ln(t) - \ln(s) \tag{5.22}$$

é C^∞ em $(0,0)\in\mathbb{R}^2$. De fato,

$$\begin{aligned}\ln(t)-\ln(s) &= \ln(t)-\ln(t+t^{2l-k}\nu(t)) = \ln\left(\frac{t}{t+t^{2l-k}\nu(t)}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+t^{2l-k-1}\nu(t)}\right)\\ &= -\ln(1+t^{2l-k-1}\nu(t))\end{aligned}$$

e para $|t|$ suficientemente pequeno, $1+t^{2l-k-1}\nu(t)>0$. Evidentemente, para $t=0$, temos $-\ln(1+0^{2l-k-1}\nu(t)) = -\ln 1 = 0$. Além disso, tem-se que a função

$$\frac{q_2(t)}{t^l}-\frac{q_2(s)}{s^l} \tag{5.23}$$

é C^∞ em $0\in\mathbb{R}$. De fato, o numerador da expressão abaixo se anula de ordem l em 0:

$$\begin{aligned}\frac{q_2(t)}{t^l}-\frac{q_2(s)}{s^l} &= \frac{q_2(t)}{t^l}-\frac{q_2(t(1+t^{2l-k-1}\nu(t)))}{t^l(1+t^{2l-k-1}\nu(t))^l}\\ &= \frac{(1+t^{2l-k-1}\nu(t))^l q_2(t)-q_2(t(1+t^{2l-k-1}\nu(t)))}{t^l(1+t^{2l-k-1}\nu(t))^l}.\end{aligned}$$

Como $s=r^2$ e $t=\rho^2$, a expressão $s=t(1+t^{2l-k-1}\nu(t))$ se torna

$$r^2=\rho^2(1+(\rho^2)^{2l-k-1}\nu(\rho^2)) \implies r=\rho\sqrt{1+\rho^{2(2l-k-1)}\nu(\rho^2)}.$$

A aplicação $(\rho,\theta)\mapsto(\rho\sqrt{1+\rho^{2(2l-k-1)}\nu(\rho^2)},\theta)$ é um difeomorfismo numa vizinhança de $\{0\}\times\mathbb{S}^1$, pois a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sqrt{1+\rho^{2(2l-k-1)}\nu(\rho^2)} & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\sqrt{1+\rho^{2(2l-k-1)}\nu(\rho^2)}\\ \frac{\partial\theta}{\partial\rho} & \frac{\partial\theta}{\partial\theta}\end{bmatrix}_{|\rho=0} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sqrt{1+\rho^{2(2l-k-1)}\nu(\rho^2)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{|\rho=0}$$

tem determinante não nulo. Assim, podemos considerar a mudança de variáveis

$$\begin{cases} r_1=\rho\sqrt{1+\rho^{2(2l-k-1)}\nu(\rho^2)};\\ \theta_1=\theta.\end{cases} \tag{5.24}$$

Por construção, $s=t(1+t^{2l-k-1}\nu(t))$ satisfaz a equação (5.18),

$$\frac{q_1(s)}{s^{2l-k}}+C_1\ln(s)=\frac{q_1(t)}{t^{2l-k}}+C_1\ln(t)+\alpha_1(t),$$

isto é,

$$\frac{q_1(r_1^2)}{r_1^{2(2l-k)}}+C_1\ln(r_1^2)=\frac{q_1(\rho^2)}{\rho^{2(2l-k)}}+C_1\ln(\rho^2)+\alpha_1(\rho^2). \tag{5.25}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}&\frac{q_2(r^2)}{r^{2l}}+C_2\ln(r^2)+\alpha_2(r^2)+\theta =\\ &\frac{q_2(r^2)}{r^{2l}}+C_2\ln(r^2)+\alpha_2(r^2)+\theta+\frac{q_2(\rho^2)}{\rho^{2l}}-\frac{q_2(\rho^2)}{\rho^{2l}}+C_2\ln(\rho^2)-C_2\ln(\rho^2) =\\ &\frac{q_2(\rho^2)}{\rho^{2l}}+C_2\ln(\rho^2)+\alpha_2(r^2)+\theta+C_2(\ln(r^2)-\ln(\rho^2))+\left(\frac{q_2(r^2)}{r^{2l}}-\frac{q_2(\rho^2)}{\rho^{2l}}\right) =\\ &\frac{q_2(\rho^2)}{\rho^{2l}}+C_2\ln(\rho^2)+\gamma(r,\rho)+\theta,\end{aligned} \tag{5.26}$$

sendo

$$\gamma(r,\rho) \doteq \alpha_2(r^2) + C_2(\ln(r^2) - \ln(\rho^2)) + \left(\frac{q_2(r^2)}{r^{2l}} - \frac{q_2(\rho^2)}{\rho^{2l}} \right).$$

Por (5.22) e (5.23), $\gamma \in C^\infty$. Nas coordenadas (5.24), usando (5.25) e (5.26), I se escreve como

$$I(r_1,\theta_1) = \exp\left(\frac{q_1(r_1^2)}{r_1^{2(2l-k)}} + C_1 \ln(r_1^2) \right) \cdot \exp\left(i\frac{q_2(r_1^2)}{r_1^{2l}} + iC_2 \ln(r_1^2) + i\gamma(r_1^2) + i\theta_1 \right).$$

Agora, considere a aplicação $(r_1,\theta_1) \mapsto (r_1, \theta_1 + \gamma(r_1^2))$. Esta aplicação é um difeomorfismo em uma vizinhança de $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, pois

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial r_1} & \dfrac{\partial r_1}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial r_1}(\theta_1 + \gamma(r_1^2)) & \dfrac{\partial}{\partial \theta_1}(\theta_1 + \gamma(r_1^2)) \end{bmatrix}_{|r_1=0} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r_1}(\gamma(r_1^2)) & 1 \end{bmatrix}_{|r_1=0} = 1.$$

Assim, podemos definir a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} r_2 = r_1; \\ \theta_2 = \theta_1 + \gamma(r_1^2). \end{cases} \tag{5.27}$$

Com respeito a essas novas coordenadas, I assume a forma

$$I(r_2,\theta_2) = \exp\left(\frac{q_1(r_2^2)}{r_2^{2(2l-k)}} + i\frac{q_2(r_2^2)}{r_2^{2l}} + (C_1 + iC_2)\ln(r_2^2) + i\theta_2 \right) \doteq \exp\left(B(r_2,\theta_2)\right).$$

A fim de simplificar a notação, escreveremos I nas variáveis (r,θ) ao invés de (r_2,θ_2). Seja

$$S(s) \doteq s^{k-l+1} q_1'(s) - (2l-k)s^{k-l} q_1(s) + i[s q_2'(s) - l q_2(s)] + Cs^l.$$

Então a 1-forma

$$\Omega_0 = \omega_r + \frac{|z|^{2l}}{2S(|z|^2)}\omega_a$$

satisfaz $\Omega_0 \wedge dI = 0$. Em coordenadas polares,

$$\Pi^*(\Omega_0) = 2rdr + \frac{r^{2l}}{2S(r^2)} 2ir^2 d\theta$$

e

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial r}dr + \frac{\partial I}{\partial \theta}d\theta = \exp\left(B(r,\theta)\right)\frac{\partial B(r,\theta)}{\partial r}dr + \exp\left(B(r,\theta)\right)\frac{\partial B(r,\theta)}{\partial \theta}d\theta \\ &= \exp\left(B(r,\theta)\right)\left(\frac{q_1'(r^2)2r}{r^{2(2l-k)}} - 2(2l-k)\frac{q_1(r^2)}{r^{2(2l-k)+1}} + i\frac{q_2'(r^2)2r}{r^{2l}} - i2l\frac{q_2(r^2)}{r^{2l+1}} + \frac{2C}{r} \right) dr \\ &+ i\exp\left(B(r,\theta)\right)d\theta \\ &= 2\exp\left(B(r,\theta)\right)\left(\frac{q_1'(r^2)r^{2k-2l+2} - (2l-k)q_1(r^2)r^{2k-2l} + iq_2'(r^2)r^2 - ilq_2(r^2) + Cr^{2l}}{r^{2l+1}} \right) dr \\ &+ i\exp\left(B(r,\theta)\right)d\theta \\ &= 2\exp\left(B(r,\theta)\right)\left(\frac{S(r^2)}{r^{2l+1}} \right) dr + i\exp\left(B(r,\theta)\right)d\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Pi^*(\Omega_0)\wedge dI = 2ri\exp(B(r,\theta))dr\wedge d\theta - \frac{r^{2l}}{2S(r^2)}2ir^2\cdot 2\exp(B(r,\theta))\left(\frac{S(r^2)}{r^{2l+1}}\right)dr\wedge d\theta$$
$$= 2ri\exp(B(r,\theta))dr\wedge d\theta - 2ir\exp(B(r,\theta))dr\wedge d\theta = 0.$$

$\square$

Observação 5.3. Para $k<2l$, provamos no Corolário 3.4 e na Observação 3.5 que podemos supor que $\Omega = \omega_r + F(|z|^2)\omega_a$. Mais ainda, pelos Lemas 5.1 e 5.2, podemos considerar Ω como

1. $$\Omega_0 = \omega_r + \frac{|z|^{2k}}{2|z|^2P'(|z|^2) - 2kP(|z|^2) + \mu|z|^{2k}}\omega_a,$$
   onde $\mu\in\mathbb{C}$ e P é um polinômio a valores complexos com grau $\leq k-1$ e satisfazendo $\Re(P(0))<0$.

2. $$\Omega_0 = \omega_r + \frac{|z|^{2l}}{2S(|z|^2)}\omega_a,$$
   com S um polinômio da forma

   $$\begin{aligned} S(s) &= s^{k-l+1}q_1'(s) - (2l-k)s^{k-l}q_1(s) + i[sq_2'(s) - lq_2(s)] + cs^l \\ &= s^{k-l}[sq_1'(s) - (2l-k)q_1(s) + cs^{2l-k}] + i[sq_2'(s) - lq_2(s)] \\ &\doteq s^{k-l}S_1(s) + iS_2(s), \end{aligned}$$

   onde q_1 e q_2 são polinômios a valores reais satisfazendo

   $$q_1(0)>0,\ q_2(0)\neq 0,\ \deg(q_1)\leq 2l-k-1 \text{ e } \deg(q_2)\leq l-1.$$

   Além disso, note que $S(0)\neq 0$ e $S_1(0)>0$.

Conclusão: Ω pode ser vista como

$$\Omega_0 = \omega_r + |z|^{2\kappa}b(|z|^2)\omega_a$$

ou, em coordenadas polares,

$$\Pi^*(\Omega_0) = \Pi^*(\omega_r) + r^{2\kappa}b(r^2)\Pi^*(\omega_a) = 2r[dr + ir^{2\kappa+1}b(r^2)d\theta], \tag{5.28}$$

onde $\kappa\in\{k,l\}$ e

$$b(s) = s^ab_1(s) + ib_2(s), \tag{5.29}$$

sendo b suave, $a\geq 0$ e b_1 e b_2 funções a valores reais satisfazendo $b(0)\neq 0$ e $b_1(0)>0$. De fato, no item 1 podemos tomar

$$\begin{aligned} b(r^2) &\doteq \frac{1}{2r^2P'(r^2) - 2kP(r^2) + \mu r^{2k}} \\ &= \frac{\Re(2r^2P'(r^2) - 2kP(r^2) + \mu r^{2k}) - i\Im(2r^2P'(r^2) - 2kP(r^2) + \mu r^{2k})}{\Re(2r^2P'(r^2) - 2kP(r^2) + \mu r^{2k})^2 + \Im(2r^2P'(r^2) - 2kP(r^2) + \mu r^{2k})^2} = b_1(r^2) + ib_2(r^2), \end{aligned}$$

com $b(0) \neq 0$ e $b_1(0) > 0$, pois $\Re(P(0)) < 0$. No item 2 considere

$$b(r^2) \doteq \frac{1}{2S(r^2)} = \frac{\overline{S(r^2)}}{2(\Re(S(r^2))^2 + \Im(S(r^2))^2)} = \frac{r^{2(k-l)}S_1(r^2) - iS_2(r^2)}{2r^{4(k-l)}S_1^2(r^2) + 2S_2^2(r^2)} = r^{2a}b_1(r^2) + ib_2(r^2),$$

com $a \doteq k - l, b(0) = b_2(0) \neq 0$ e $b_1(0) > 0$.

Além disso, Ω_0 tem uma integral primeira I que se anula de ordem infinita em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e é um homeomorfismo entre discos em torno da origem.

CAPÍTULO

6

CASO $k < 2l$

Neste capítulo iremos mostrar que, para $k < 2l$, o problema

$$du \wedge \Omega = \eta \wedge \Omega,$$

é resolúvel em C^∞ se, e somente se, η satisfaz certas condições de compatibilidade.

Considere η a 1-forma diferencial dada por

$$\eta = \tilde{A}(z,\bar{z})dz + \tilde{B}(z,\bar{z})d\bar{z},$$

com $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ funções de classe C^∞ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Dizemos que η cumpre a condição C_κ se os coeficientes de η satisfazem

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial z^j \partial \bar{z}^j}\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z}\right)(0) = 0, \text{ para } j = 1, \ldots, \kappa - 1, \tag{6.1}$$

onde $\kappa = k$ ou $\kappa = l$, em vista da Observação 5.3. Note que $\kappa - 1$ está bem definido, pois, supondo $k < 2l$, implicitamente estamos supondo $l \neq 0$, o que implica $k \neq 0$ (pois $k = l$ ou $l < k < 2l$).

Seja $\Lambda(\kappa)$ o espaço das 1-formas diferenciais suaves em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a condição C_κ.

O objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema abaixo:

Teorema 6.1. Seja Ω_0 dada como em (5.28) e seja η uma 1-forma diferencial C^∞ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. A equação

$$du \wedge \Omega_0 = \eta \wedge \Omega_0 \tag{6.2}$$

tem uma solução $u \in C^\infty$ se, e somente se, $\eta \in \Lambda(\kappa)$. Além disso, quando $\eta \in \Lambda(\kappa)$, qualquer solução distribucional de (6.2) é uma função C^∞ em $(0,0)$, isto é, Ω_0 é C^∞-hipoelíptica no espaço $\Lambda(\kappa)$.

Embora não seja trabalhado nessa dissertação, (MEZIANI, 2013) afirma que, para formas diferenciais que não satisfazem a condição C_κ, o problema (6.2) é resolúvel com menor regularidade (nos espaços L^p).

Para provar o Teorema 6.1 precisamos de alguns resultados. Daqui em diante, L irá denotar o campo vetorial

$$L = \frac{\partial}{\partial\theta} - ir^{2\kappa+1}b(r^2)\frac{\partial}{\partial r}. \tag{6.3}$$

Lema 6.2. Se u é uma solução distribucional da equação $du\wedge\Pi^*(\Omega_0) = 0$, sendo $\Pi^*(\Omega_0)$ dada por (5.28), então u é C^∞ em $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Se u é uma solução de $du\wedge\Pi^*(\Omega_0) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = du\wedge\Pi^*(\Omega_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta\right)\wedge 2r(dr + ir^{2\kappa+1}b(r^2)d\theta) \\ &= 2r\left(\frac{\partial u}{\partial r}ir^{2\kappa+1}b(r^2) - \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)dr\wedge d\theta \implies Lu = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dos Lemas 5.1 e 5.2 sabemos que

$$dI\wedge\Pi^*(\Omega_0) = 0,$$

onde I é a integral primeira de Ω_0, que é um homeomorfismo do disco $D(0,\delta)$ no disco $D(0,\delta')$ e se anula de ordem infinita em 0. Com o mesmo cálculo de (6.4) obtemos que $LI = 0$.

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} 0 = Lu = L((u\circ I^{-1})\circ I) &= \frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\zeta}\frac{\partial I(r,\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar I(r,\theta)}{\partial\theta} \\ &- ir^{2\kappa+1}b(r^2)\left[\frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\zeta}\frac{\partial I(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\bar\zeta}\frac{\partial\bar I(r,\theta)}{\partial r}\right] \\ &= \left[\frac{\partial I(r,\theta)}{\partial\theta} - ir^{2\kappa+1}b(r^2)\frac{\partial I(r,\theta)}{\partial r}\right]\frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\zeta} + \left[\frac{\partial\bar I(r,\theta)}{\partial\theta} - ir^{2\kappa+1}b(r^2)\frac{\partial\bar I(r,\theta)}{\partial r}\right]\frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\bar\zeta} \\ &= LI\frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\zeta} + L\bar I\frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\bar\zeta} = L\bar I\frac{\partial(u\circ I^{-1})}{\partial\bar\zeta}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$U(\zeta) \doteq u\circ I^{-1}(\zeta)$$

resolve a equação de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial U}{\partial\bar\zeta} = 0$$

em $D(0,\delta')\backslash\{0\}$, sendo $\zeta = 0$ uma singularidade isolada de U. Assim, a função U é holomorfa em $D(0,\delta')\backslash\{0\}$ e, portanto, $u(z) = U(I(z))$ também é holomorfa em $D(0,\delta')\backslash\{0\}$.

Note que a singularidade de U não pode ser um polo ou uma singularidade essencial, pois nesses casos u não definiria uma distribuição numa vizinhança da origem, visto que I é flat em $z = 0$. Logo, a origem é uma singularidade removível de U e u é C^∞ na origem. $\square$

A seguinte definição será útil no próximo lema:

Definição 6.3. Um polinômio trigonométrico é uma função da forma

$$P(\theta) = \sum_{|s|\leq N} p_s \mathrm{e}^{is\theta}, \; p_s \in \mathbb{C}.$$

Dizemos que um polinômio trigonométrico P tem a paridade do inteiro j (que pode ser par ou ímpar) e é de grau menor ou igual a N se

$$P(\theta) = \begin{cases} \sum\limits_{|2s|\leq N} p_s \mathrm{e}^{i(2s)\theta}, \text{ se } j \text{ é par;} \\ \sum\limits_{|2s+1|\leq N} p_s \mathrm{e}^{i(2s+1)\theta}, \text{ se } j \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $p_s \in \mathbb{C}$.

Lema 6.4. Seja Ω_0 como em (5.28) e $\eta = \tilde{A}(z,\bar{z})dz + \tilde{B}(z,\bar{z})d\bar{z}$ uma 1-forma diferencial C^∞ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$\Pi^*(\eta \wedge \Omega_0) = 2rM(r,\theta)d\theta \wedge dr,$$

onde $M(r,\theta)$ é C^∞ em uma vizinhança de $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{S}^1$ e tem série de Taylor

$$T_r M(r,\theta) = \sum_{j\geq 1} M_j(\theta) r^j,$$

onde para cada $j \in \mathbb{Z}^+$, M_j é um polinômio trigonométrico com paridade de j e grau $\leq j$. Além disso, η satisfaz a condição C_κ se, e somente se,

$$M_{2s}^0 = 0, \text{ para } s = 1, ..., \kappa,$$

sendo a notação M_{2s}^0 dada em (2.2).

Demonstração. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi^*\eta &= \Pi^*[\tilde{A}(z,\bar{z})dz + \tilde{B}(z,\bar{z})d\bar{z}] \\ &= \tilde{A}(r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{i\theta}dr + ri\mathrm{e}^{i\theta}d\theta) + \tilde{B}(r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-i\theta}dr - ri\mathrm{e}^{-i\theta}d\theta) \\ &= (\tilde{A}(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta} + \tilde{B}(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-i\theta})dr + ri(\tilde{A}(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta} - \tilde{B}(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Pi^*(\eta \wedge \Omega_0) &= \Pi^*\eta \wedge 2r[dr + ir^{2\kappa+1}b(r^2)d\theta] \\ &= -2r[(\tilde{A}(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} + \tilde{B}(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta})ir^{2\kappa+1}b(r^2)]d\theta \wedge dr \\ &\quad + 2r[ri(\tilde{A}(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} - \tilde{B}(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta})]d\theta \wedge dr \\ &= 2rM(r,\theta)d\theta \wedge dr, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} M(r,\theta) &= ri(\tilde{A}(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} - \tilde{B}(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta}) - (\tilde{A}(r,\theta)\mathrm{e}^{i\theta} + \tilde{B}(r,\theta)\mathrm{e}^{-i\theta})ir^{2\kappa+1}b(r^2) \\ &= ri[(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}r^{2\kappa}b(r^2))\tilde{A}(r,\theta) - (\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}r^{2\kappa}b(r^2))\tilde{B}(r,\theta)]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Sejam $T_r\tilde{A}$ e $T_r\tilde{B}$ as séries de Taylor de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ em $z = 0$, isto é,

$$T_r\tilde{A} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(z) \text{ e } T_r\tilde{B} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(z),$$

onde A_j e B_j são polinômios homogêneos em z e $\bar{z}$ dados por

$$\begin{cases} A_j(z) = \displaystyle\sum_{s=0}^{j} A_j^s z^{j-s}\bar{z}^s \text{ com } A_j^s = \frac{1}{(j-s)!s!}\frac{\partial^j A}{\partial z^{j-s}\partial \bar{z}^s}(0); \\ B_j(z) = \displaystyle\sum_{s=0}^{j} B_j^s z^{j-s}\bar{z}^s \text{ com } B_j^s = \frac{1}{(j-s)!s!}\frac{\partial^j B}{\partial z^{j-s}\partial \bar{z}^s}(0). \end{cases} \tag{6.6}$$

Em coordenadas polares A_j e B_j se tornam

$$\begin{cases} A_j(r,\theta) = \displaystyle\sum_{s=0}^{j} A_j^s r^{j-s}(\mathrm{e}^{i\theta})^{j-s} r^s (\mathrm{e}^{-i\theta})^s = \sum_{s=0}^{j} A_j^s (\mathrm{e}^{i\theta})^{j-2s} r^j \doteq P_j(\theta) r^j; \\ B_j(r,\theta) = \displaystyle\sum_{s=0}^{j} B_j^s r^{j-s}(\mathrm{e}^{i\theta})^{j-s} r^s (\mathrm{e}^{-i\theta})^s = \sum_{s=0}^{j} B_j^s (\mathrm{e}^{i\theta})^{j-2s} r^j \doteq Q_j(\theta) r^j, \end{cases} \tag{6.7}$$

onde P_j e Q_j são polinômios trigonométricos com a paridade de j e grau menor ou igual a j.

Considere a série de Taylor em $0 \in \mathbb{R}$

$$T_r b(r^2) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s,\ b_s = \frac{1}{s!}\frac{d^s b(r^2)}{dr^s}_{|r=0}, \tag{6.8}$$

da aplicação b dada em (5.29), com $b_0 = b(0) \neq 0$ e $b_s = 0$ para todo s ímpar.

Voltando à equação (6.5), podemos substituir as séries de Taylor dadas em (6.7) e (6.8) para escrever a série de Taylor de M:

$$\begin{aligned} T_r M &= ri\left[\left(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}r^{2\kappa}\sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s\right)\sum_{j=0}^{\infty} P_j(\theta) r^j - \left(\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}r^{2\kappa}\sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s\right)\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(\theta) r^j\right] \\ &= ri\left[\left(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}\sum_{s=0}^{\infty} b_s r^{2\kappa+s}\right)\sum_{j=0}^{\infty} P_j(\theta) r^j - \left(\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\sum_{s=0}^{\infty} b_s r^{2\kappa+s}\right)\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(\theta) r^j\right] \\ &= ri\left[\sum_{j=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{i\theta}P_j(\theta) - \mathrm{e}^{-i\theta}Q_j(\theta))r^j + \sum_{s=0}^{\infty} b_s r^{2\kappa+s}\left(-\mathrm{e}^{i\theta}\sum_{j=0}^{\infty} P_j(\theta) r^j - \mathrm{e}^{-i\theta}\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(\theta) r^j\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo, $T_r M = \sum_{j=1}^{\infty} M_j(\theta) r^j$, com

$$\begin{cases} M_j(\theta) = i[\mathrm{e}^{i\theta}P_{j-1}(\theta) - \mathrm{e}^{-i\theta}Q_{j-1}(\theta)] \text{ para } 1 \leq j \leq 2\kappa; \\ M_j(\theta) = i\left[\mathrm{e}^{i\theta}P_{j-1}(\theta) - \mathrm{e}^{-i\theta}Q_{j-1}(\theta) - \displaystyle\sum_{s=0}^{j-2\kappa-1} b_{j-2\kappa-s-1}(\mathrm{e}^{i\theta}P_s(\theta) + \mathrm{e}^{-i\theta}Q_s(\theta))\right], \text{ para } j > 2\kappa. \end{cases}$$

Sabendo que $e^{i\theta}P_{j-1} + e^{-i\theta}Q_{j-1}$ são polinômios trigonométricos com paridade de j e grau menor ou igual a j e que $b_s = 0$ para todo s ímpar, obtemos que M_j é um polinômio com paridade de j e grau menor ou igual a j.

Se η satisfaz a condição C_κ, então, com a notação dada em (6.6),

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^{2s}}{\partial z^s \partial \bar{z}^s}\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z}\right)(0) = (2s+1-s-1)!(s+1)!A^{s+1}_{2s+1} - (2s+1-s)s!B^s_{2s+1} \\
&= s!(s+1)!A^{s+1}_{2s+1} - (s+1)!s!B^s_{2s+1} = (s+1)!s!(A^{s+1}_{2s+1} - B^s_{2s+1}),
\end{aligned}$$

para $s \leq \kappa - 1$; isto é,

$$A^{s+1}_{2s+1} - B^s_{2s+1} = 0,$$

para $s \leq \kappa - 1$. Consequentemente, se $j = 2j_1$, $j_1 \leq \kappa$,

$$\begin{aligned}
M^0_{2j_1} &= \int_0^{2\pi} M_{2j_1}(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} i(e^{i\theta}P_{2j_1-1}(\theta) - e^{-i\theta}Q_{2j_1-1}(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i\left(e^{i\theta}\sum_{s=0}^{2j_1-1} A^s_{2j_1-1}e^{i\theta(2j_1-1-2s)} - e^{-i\theta}\sum_{s=0}^{2j_1-1} B^s_{2j_1-1}e^{i\theta(2j_1-1-2s)}\right)d\theta \\
&= i\sum_{s=0}^{2j_1-1} A^s_{2j_1-1}\int_0^{2\pi} e^{2i\theta(j_1-s)}d\theta - i\sum_{s=0}^{2j_1-1} B^s_{2j_1-1}\int_0^{2\pi} e^{2i\theta(j_1-1-s)}d\theta \\
&= 2\pi i(A^{j_1}_{2j_1-1} + B^{j_1-1}_{2j_1-1}) = 0.
\end{aligned}$$

A demonstração do lema está completa. □

Considere L como em (6.3). Dada uma série de potências formal $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j$, com $f_j \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, dizemos que a equação $Lu = f$ é formalmente resolúvel se existem funções $u_j \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ satisfazendo

$$L\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j(\theta)r^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j, \tag{6.9}$$

ou seja,

$$u_0'(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}[u_j(\theta)r^j] - ir^{2\kappa+1}b(r^2)\frac{\partial}{\partial r}[u_j(\theta)r^j]\right) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j. \tag{6.10}$$

Como no Lema 6.4, escrevemos a série de Taylor de b em $0 \in \mathbb{R}$ como $T_r b(r^2) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s$, com $b_0 \neq 0$ e $b_s = 0$ para todo s ímpar. Assim, a equação (6.10) se torna

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j &= u_0'(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(u_j'(\theta)r^j - ir^{2\kappa+1}\left(\sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s\right)u_j(\theta)jr^{j-1}\right) \\
\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j &= u_0'(\theta) + \sum_{j\geq 1} u_j'(\theta)r^j - i\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} b_s u_j(\theta)jr^{2\kappa+s+j} \\
\sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta)r^j &= u_0'(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j'(\theta)r^j - i\sum_{j=2\kappa+1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j-2\kappa} b_{j-2\kappa-s}u_s(\theta)s\right)r^j.
\end{aligned}$$

Isso significa que as funções u_j resolvem o sistema de equações

$$\begin{cases} u_j'(\theta) = f_j(\theta), \text{ para } 0 \leq j \leq 2\kappa; \\ u_j'(\theta) = f_j(\theta) + i \displaystyle\sum_{s=1}^{j-2\kappa} s b_{j-2\kappa-s} u_s(\theta), \text{ para } j \geq 2\kappa+1. \end{cases} \tag{6.11}$$

Lema 6.5. Considere M_j, $j \in \mathbb{Z}^+$, polinômio trigonométrico com a paridade de j e grau menor ou igual a j. Temos $M_j^0 = 0$, $j = 2j_1$, $j_1 = 1, ..., \kappa$, se, e somente se, a equação

$$L\left(\sum_{j=1}^{\infty} u_j(\theta) r^j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} M_j(\theta) r^j \tag{6.12}$$

é formalmente resolúvel, sendo cada u_j um polinômio trigonométrico com a paridade de j e grau menor ou igual a j unicamente determinado.

Demonstração. Resolver (6.12) é equivalente a resolver o sistema (6.11) para $f_j = M_j$. Para analisar a paridade das soluções, precisamos dividir nos casos em que j é par ou ímpar.

Considere j um número ímpar, isto é, $j = 2j_1 + 1$.

Se $j_1 < k$, temos $j = 2j_1 + 1 < 2\kappa + 1$, então $u_j'(\theta) = M_j(\theta)$; isto é, u_j é dado por

$$u_j(\theta) = \int_0^{\theta} M_j(t)dt + C_j, \tag{6.13}$$

onde $C_j \in \mathbb{C}$. Como M_j é um polinômio trigonométrico de paridade j e grau menor ou igual a j, para que u_j também tenha essas características devemos tomar $C_j = 0$, visto que $C_j = C_j e^0$ tem uma potência par da exponencial.

Se $j_1 \geq \kappa$, temos $j = 2j_1 + 1 \geq 2\kappa + 1$. Como $b_r = 0$ para todo r ímpar, se s é par,

$$b_{j-2\kappa-s} = b_{2j_1+1-2\kappa-s} = 0.$$

Se s é ímpar, então $s = 2s_1 + 1$ e

$$\begin{cases} s = 1, \text{ para } s_1 = 0; \\ s = 2(j_1 - \kappa) + 1 = 2j_1 + 1 - 2\kappa = j - 2\kappa, \text{ para } s_1 = j_1 - \kappa. \end{cases}$$

Logo, a soma no lado direito da segunda equação em (6.11) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\sum_{s=1}^{j-2\kappa} s b_{j-2\kappa-s} u_s(\theta) = \sum_{s_1=0}^{j_1-\kappa} (2s_1+1) b_{2(j_1-\kappa-s_1)} u_{2s_1+1}(\theta). \tag{6.14}$$

Como $u_1, u_3, ..., u_{2\kappa-1}$ já foram definidos em (6.13), de (6.11) podemos definir indutivamente u_{2j_1+1} por

$$u_{2j_1+1} = \int_0^{\theta} M_{2j_1+1}(t)dt + i \sum_{s_1=0}^{j_1-\kappa} (2s_1+1) b_{2(j_1-\kappa-s_1)} \int_0^{\theta} u_{2s_1+1}(t)dt + C_{2j_1+1}, \tag{6.15}$$

pois $2s_1+1 \leq 2(j_1-\kappa)+1 = j-2\kappa < j$. Tomando $C_{2j_1+1}=0$, temos (6.15) um polinômio trigonométrico de paridade ímpar e grau $\leq 2j_1+1$.

Agora, considere j um número par, isto é, $j=2j_1$.

Se $j_1 \leq \kappa$, temos $j=2j_1 \leq 2\kappa$. Note que $v_{2j_1}(\theta)=\int_0^\theta M_{2j_1}(t)dt$ é polinômio trigonométrico de paridade par, grau $\leq 2j_1$ e satisfazendo

$$v_{2j_1}^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{2j_1}(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} M_{2j_1}(t)dt = \int_0^{\theta}\int_0^{2\pi} M_{2j_1}(t)dt = 0, \tag{6.16}$$

pois, por hipótese, $M_{2j_1}^0=0$. Assim, a solução geral da equação $u'_{2j_1}(\theta)=M_{2j_1}(\theta)$ é

$$u_{2j_1}(\theta) = v_{2j_1}(\theta)+C_{2j_1},$$

com $C_{2j_1}\in\mathbb{C}$.

Se $j_1>\kappa$, temos $j=2j_1>2\kappa$. Analogamente a (6.14), usando que $b_r=0$ para todo r ímpar, obtemos

$$u'_{2j_1}(\theta) = M_{2j_1}(\theta)+i\sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa} 2s_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)}u_{2s_1}(\theta). \tag{6.17}$$

Para $j_1=\kappa+1$,

$$u'_{2(\kappa+1)}(\theta) = M_{2(\kappa+1)}(\theta)+2ib_0u_2(\theta) = M_{2(\kappa+1)}(\theta)+2ib_0v_2(\theta)+2ib_0C_2. \tag{6.18}$$

Se $u\in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, então u pode ser vista como uma função 2π-periódica em $\mathbb{R}$. Logo, a equação acima tem solução $u\in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ se, e somente se, o zero-ésimo coeficiente de Fourier do lado direito é zero. Como $v_2^0=0$ por (6.16),

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[M_{2(\kappa+1)}(\theta)+2ib_0v_2(\theta)+2ib_0C_2]d\theta = M_{2(\kappa+1)}^0+2ib_0C_2. \tag{6.19}$$

Ou seja,

$$C_2 = \frac{-M_{2(\kappa+1)}^0}{2ib_0}.$$

Assim, existe uma única escolha da constante C_2 de modo que a equação (6.19) seja satisfeita. Consequentemente, o polinômio $u_2=v_2+C_2$ é único. Nesse caso, a solução geral de (6.18) é

$$u_{2(\kappa+1)} = v_{2(\kappa+1)}+C_{2(\kappa+1)},$$

onde $C_{2(\kappa+1)}\in\mathbb{C}$ e

$$v_{2(\kappa+1)}(\theta) = \int_0^\theta [M_{2(\kappa+1)}(t)+2ib_0v_2(t)+2ib_0C_2]dt$$

é polinômio trigonométrico de paridade par, grau menor ou igual a $2(\kappa+1)$ e tal que $v_{2(\kappa+1)}^0=0$, por (6.19).

Provaremos por indução em $j_1 \geq \kappa+1$ que a constante $C_{2(j_1-\kappa)}$ em $u_{2(j_1-\kappa)} = v_{2(j_1-\kappa)} + C_{2(j_1-\kappa)}$ é única de modo que a equação (6.17) tenha uma única solução u_{2j_1}, sendo este um polinômio trigonométrico com paridade par e grau menor ou igual a $2j_1$.

O caso $j_1 = \kappa+1$ já foi feito logo acima.

Separando o último termo do somatório da equação (6.17), temos

$$u'_{2j_1}(\theta) = M_{2j_1}(\theta) + 2i(j_1-\kappa)b_0 u_{2(j_1-\kappa)}(\theta) + i\sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1} 2s_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)} u_{2s_1}(\theta). \tag{6.20}$$

Pela hipótese de indução, $u_{2s_1} = v_{2s_1} + C_{2s_1}$ é polinômio trigonométrico com paridade par unicamente determinado para $s_1 \leq j_1-\kappa-1$, com grau menor ou igual a $2s_1$ e satisfazendo $v^0_{2s_1} = 0$. Para obter o polinômio trigonométrico u_{2j_1} de modo único basta escolher $C_{2(j_1-\kappa)}$ em $u_{2(j_1-\kappa)} = v_{2(j_1-\kappa)} + C_{2(j_1-\kappa)}$ de modo que o lado direito de (6.20) tenha o zero-ésimo coeficiente de Fourier nulo. Isso é satisfeito para

$$C_{2(j_1-\kappa)} = \frac{-M^0_{2j_1} - 2i\sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1} s_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)} C_{2s_1}}{2i(j_1-\kappa)b_0}.$$

De fato, como $v^0_{2(j_1-\kappa)} = 0$ e $v^0_{2s_1} = 0$ se $s_1 \leq j_1-\kappa-1$,

$$\begin{aligned}
0 &= M^0_{2j_1} + 2i(j_1-\kappa)b_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{2(j_1-\kappa)}(\theta)d\theta + i\sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1} 2s_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{2s_1}(\theta)d\theta \\
&= M^0_{2j_1} + \frac{i(j_1-\kappa)b_0}{\pi}\int_0^{2\pi}(v_{2(j_1-\kappa)}(\theta)+C_{2(j_1-\kappa)})d\theta + \sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1}\frac{is_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)}}{\pi}\int_0^{2\pi} u_{2s_1}(\theta)d\theta \\
&= M^0_{2j_1} + \frac{i(j_1-\kappa)b_0}{\pi}\int_0^{2\pi} C_{2(j_1-\kappa)}d\theta + \sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1}\frac{is_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)}}{\pi}\int_0^{2\pi}(v_{2s_1}(\theta)+C_{2s_1})d\theta \\
&= M^0_{2j_1} + \frac{i(j_1-\kappa)b_0}{\pi}C_{2(j_1-\kappa)}2\pi + \sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1}\frac{is_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)}}{\pi}C_{2s_1}2\pi \\
\implies\ C_{2(j_1-\kappa)} &= \frac{-M^0_{2j_1} - 2i\sum_{s_1=1}^{j_1-\kappa-1} s_1 b_{2(j_1-\kappa-s_1)} C_{2s_1}}{2i(j_1-\kappa)b_0}.
\end{aligned}$$

□

A demonstração do próximo lema foi baseada em (BERGAMASCO; DATTORI DA SILVA, 2006) e (HERNANDEZ, 2016).

Lema 6.6. Seja $g \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$ tal que g se anula de ordem infinita ao longo de Σ e considere L o campo vetorial dado em (6.3). Então a equação $Lv = g$ tem uma solução C^∞ em uma vizinhança de Σ que se anula de ordem infinita ao longo de Σ.

Demonstração. Como $g \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$, o Teorema 2.17 fornece que $g \in W$ e, pelo Teorema 2.20, $g(r,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{g}_j(r)e^{ij\theta}$. Escrevemos

$$v(r,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(r)e^{ij\theta}.$$

Se v for solução de $Lv = g$,

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta}\right) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{g}_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta} \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - ir^{2\kappa+1}b(r^2)\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta}\right) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{g}_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta} \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(ijv_j(r) - ir^{2\kappa+1}b(r^2)v_j'(r)\right)\mathrm{e}^{ij\theta} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{g}_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta}. \end{aligned}$$

Assim, $Lv = g$ se, e somente se, $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfaz

$$ijv_j(r) - ir^{2\kappa+1}b(r^2)v_j'(r) = \hat{g}_j(r) \tag{6.21}$$

em uma vizinhança da origem e a série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta}$ converge em uma vizinhança de Σ, sendo $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ uma sequência rapidamente decrescente (pelo Teorema 2.19, nessas condições $v(r,\theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(r)\mathrm{e}^{ij\theta} \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$). Mais ainda, devemos mostrar que v se anula de ordem infinita ao longo de Σ.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $b(r^2) \neq 0$ para $r \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Então, podemos reescrever a equação (6.21) como

$$\frac{j}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}v_j(r) - v_j'(r) = \frac{\hat{g}_j(r)}{ir^{2\kappa+1}b(r^2)}, \tag{6.22}$$

ou seja,

$$v_j'(r) - \frac{j}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}v_j(r) = \frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}. \tag{6.23}$$

Observe que, se g é flat, então $\hat{g}_j$ é flat, isto é, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, temos $\hat{g}_j(r) = R_{j,n}(r)r^n$. Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, existe constante $C_n > 0$ tal que

$$\left|\frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right| \le C_n|r|^n, \tag{6.24}$$

ou seja,

$$\left|\frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right| = O(|r|^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6.25}$$

pois

$$\lim_{r\to 0} \frac{\frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}}{r^n} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{iR_{j,n+2\kappa+1}(r)r^{n+2\kappa+1}}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}}{r^n} = \lim_{r\to 0} \frac{iR_{j,n+2\kappa+1}(r)}{b(r^2)} = 0.$$

No caso $j = 0$, a equação (6.23) se torna

$$v_0'(r) = \frac{i\hat{g}_0(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}, \tag{6.26}$$

cuja solução em uma vizinhança da origem é

$$v_0(r) = \int_0^r \frac{i\hat{g}_0(s)}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds \in C^\infty(-\varepsilon,\varepsilon),$$

pois $\dfrac{i\hat{g}_0(s)}{s^{2\kappa+1}b(s^2)} \in C^\infty(-\varepsilon,\varepsilon)$ (ver Proposição 2.22, onde usamos que $\hat{g}_0$ é flat em 0 por g ser flat em Σ). Note que $|v_0(r)| = O(|r|^n),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Com efeito, pela equação (6.24),

$$|v_0(r)| = \left|\int_0^r \frac{i\hat{g}_0(s)}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds\right| \leq C_0\int_0^r |s|^n ds \leq \frac{N_0|r|^{n+1}}{n+1} \leq \tilde{N}_0\varepsilon|r|^n.$$

Agora vamos resolver (6.23) para $j \neq 0$ com $r \in (-\varepsilon,0)$ para $\varepsilon > 0$ pequeno; o caso $r \in (0,\varepsilon)$ é análogo.

Multiplicando ambos os lados de (6.23) por $\mathrm{e}^{j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}$, $-\varepsilon < \eta < r < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}v_j'(r) - \mathrm{e}^{j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{j}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}v_j(r) &= \mathrm{e}^{j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\\ \iff \frac{d}{dr}\left(\mathrm{e}^{j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}v_j(r)\right) &= \mathrm{e}^{j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$v_j(r) = \mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy,\ -\delta < \mu \leq y \leq r < 0. \tag{6.27}$$

Como

$$\frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)} = \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2) - ib_2(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)} = \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)} - i\frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{b_2(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)},$$

temos,

$$\begin{aligned}v_j(r) &= \int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_r^\eta \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds + j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy\\ &= \int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy\\ &= \int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\mathrm{e}^{-ij\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{b_2(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|v_j(r)| &\leq \int_\mu^r \left|\mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\right|\left|\mathrm{e}^{-ij\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{b_2(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\right|\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy\\ &\leq \int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}|v_j(r)| \leq &\int_\mu^{2r} \mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy\\ &+\int_{2r}^r \mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy.\end{aligned} \tag{6.28}$$

Por continuidade, podemos diminuir $\varepsilon > 0$, se necessário, para supor que

$$\frac{\lambda_1}{s^{2(\kappa-a)+1}} \leq \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)} \leq \frac{\lambda_2}{s^{2(\kappa-a)+1}}\ \forall s \in (-\varepsilon, 0), \tag{6.29}$$

para certos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, pois $\frac{b_1(0)}{0^{4a}b_1^2(0)+b_2^2(0)} > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
0 > -\int_r^y \frac{\lambda_1}{s^{2(\kappa-a)+1}}ds \geq -\int_r^y \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds \geq -\int_r^y \frac{\lambda_2}{s^{2(\kappa-a)+1}}ds \\
0 > \int_y^r \frac{\lambda_1}{s^{2(\kappa-a)+1}}ds \geq \int_y^r \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds \geq \int_y^r \frac{\lambda_2}{s^{2(\kappa-a)+1}}ds,
\end{aligned}$$

para y satisfazendo $\mu \leq y \leq 2r < r < 0$. Logo,

$$\int_y^r \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds \leq \int_y^r \frac{\lambda_1}{s^{2(\kappa-a)+1}}ds = \lambda_1\left(\frac{r^{-2(\kappa-a)}}{-2(\kappa-a)} - \frac{y^{-2(\kappa-a)}}{-2(\kappa-a)}\right),$$

isto é,

$$\int_y^r \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds \leq \frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)}\left(\frac{1}{y^{2(\kappa-a)}} - \frac{1}{r^{2(\kappa-a)}}\right).$$

Como $\mu \leq y \leq 2r < r < 0$,

$$\begin{aligned}
\int_y^r \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds &\leq \frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)}\left(\frac{1}{y^{2(\kappa-a)}} - \frac{1}{r^{2(\kappa-a)}}\right) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)}\left(\frac{1}{(2r)^{2(\kappa-a)}} - \frac{1}{r^{2(\kappa-a)}}\right) \\
&= \frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)r^{2(\kappa-a)}}\left(\frac{1}{2^{2(\kappa-a)}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Portanto, para $j > 0$,

$$\exp\left(j\int_y^r \frac{1}{s^{2(\kappa-a)+1}}\frac{b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds\right) \leq \exp\left(j\frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)r^{2(\kappa-a)}}\left(\frac{1}{2^{2(\kappa-a)}} - 1\right)\right).$$

A equação (6.28) pode então ser escrita como

$$\begin{aligned}
|v_j(r)| \leq{}& \mathrm{e}^{j\frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)r^{2(\kappa-a)}}\left(\frac{1}{2^{2(\kappa-a)}}-1\right)}\int_\mu^{2r}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy \\
&+\int_{2r}^r \mathrm{e}^{j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

A função $\dfrac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}$ é limitada em $(\mu, 2r)$, logo

$$\int_\mu^{2r}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy \leq \lambda_3.$$

Se $2r < y \leq r$, podemos proceder analogamente ao que foi feito acima para obter que

$$\exp\left(j\int_r^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}}\frac{s^{2a}b_1(s^2)}{s^{4a}b_1^2(s^2)+b_2^2(s^2)}ds\right) < \exp 0 = 1.$$

Utilizando que (6.25), a equação (6.30) se torna

$$|v_j(r)| \leq \mathrm{e}^{j\frac{\lambda_1}{2(\kappa-a)r^{2(\kappa-a)}}\left(\frac{1}{2^{2(\kappa-a)}}-1\right)}\lambda_3 + \int_{2r}^{r}\left|\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}\right|dy = O(|r|^n),\ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.31}$$

Para $j < 0$, um raciocínio análogo nos fornece também $|v_j(r)| = O(|r|^n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, onde

$$v_j(r) = \mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\int_r^0 \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy. \tag{6.32}$$

Em suma, com os resultados de (BERGAMASCO; DATTORI DA SILVA, 2006),

$$v_0(r) = \int_0^r \frac{i\hat{g}_0(s)}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds,$$

para $j > 0$, temos

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\displaystyle\int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy, \text{ se } r \in (\mu,0); \\ 0, \text{ se } r = 0; \\ -\mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\displaystyle\int_0^r \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy, \text{ se } r \in (0,-\mu); \end{cases} \tag{6.33}$$

e para $j < 0$,

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\displaystyle\int_r^0 \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy, \text{ se } r \in (\mu,0); \\ 0, \text{ se } r = 0; \\ -\mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\displaystyle\int_r^\mu \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy, \text{ se } r \in (0,-\mu). \end{cases} \tag{6.34}$$

Mostremos agora que $v_j^{(\alpha)}(r) = O(|r|^n)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall \alpha, n \in \mathbb{Z}^+$. Para $\alpha = 1$ e $j = 0$, a equação (6.26) fornece que

$$|v_0'(r)| = \left|\frac{i\hat{g}_0(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right|(r) = O(|r|^n),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Seja

$$C(r) \doteq \int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds.$$

Para $\alpha = 1$ e $j > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}v_j(r) &= \frac{d}{dr}\left[\mathrm{e}^{-j\int_\eta^r \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\int_\mu^r \mathrm{e}^{j\int_\eta^y \frac{1}{s^{2\kappa+1}b(s^2)}ds}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy\right] \\ &= \frac{d}{dr}\left[\mathrm{e}^{-jC(r)}\int_\mu^r \mathrm{e}^{jC(y)}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy\right] \\ &= (-jC'(r))\mathrm{e}^{-jC(r)}\int_\mu^r \mathrm{e}^{jC(y)}\frac{i\hat{g}_j(y)}{y^{2\kappa+1}b(y^2)}dy + \mathrm{e}^{-jC(r)}\mathrm{e}^{jC(r)}\frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)} \\ &= (-jC'(r))v_j(r) + \frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)} \\ &= -j\frac{1}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}v_j(r) + \frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}. \end{aligned}$$

Logo, $v_j' \in C^\infty((\mu,0)\cup(0,-\mu))$. Além disso,

$$\left|\frac{d}{dr}v_j(r)\right| \leq j\left|\frac{1}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right||v_j(r)| + \left|\frac{\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right|. \tag{6.35}$$

Como $|v_j(r)| = O(|r|^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$ e $\left|\dfrac{\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right| = O(|r|^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$, a equação (6.35) se torna

$$\left|\frac{d}{dr}v_j(r)\right| \leq j\left|\frac{1}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right|\beta_0|r|^{n+2\kappa+1} + \beta_1|r|^n \tag{6.36}$$

para certas constantes β_0 e β_1. Por b ser função contínua em $[\mu,-\mu]$, podemos escrever $\beta_3 \leq |b(r^2)| \leq \beta_4$:

$$\left|\frac{d}{dr}v_j(r)\right| \leq j\frac{1}{\beta_3}\beta_0|r|^n + \beta_1|r|^n = \left(j\frac{1}{\beta_3}\beta_0 + \beta_1\right)|r|^n. \tag{6.37}$$

Denotando $\beta_5 \doteq j\dfrac{1}{\beta_3}\beta_0 + \beta_1$, obtemos

$$\left|\frac{d}{dr}v_j(r)\right| \leq \beta_5|r|^n \implies \frac{d}{dr}v_j(r) = O(|r|^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Para $\alpha = 2$ e $j > 0$, calculemos $\dfrac{d^2}{dr^2}v_j(r)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dr^2}v_j(r) &= \frac{d}{dr}\left(-j\frac{1}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}v_j(r) + \frac{i\hat{g}_j(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right)\\
&= \frac{(-j)(-1)}{(r^{2\kappa+1}b(r^2))^2}[(2\kappa+1)r^{2\kappa}b(r^2) + r^{2\kappa+1}2rb'(r^2)]v_j(r) - j\frac{1}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}v_j'(r)\\
&\quad + \frac{i\hat{g}_j'(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)} - \frac{i\hat{g}_j(r)}{(r^{2\kappa+1}b(r^2))^2}[(2\kappa+1)r^{2\kappa}b(r^2) + r^{2\kappa+1}2rb'(r^2)].
\end{aligned}$$

Como $v_j(r) = O(|r|^n)\ \forall n$, $v_j'(r) = O(|r|^n)\ \forall n$, $\dfrac{i\hat{g}_j'(r)}{r^{2\kappa+1}b(r^2)} = O(|r|^n)\ \forall n$ e $\dfrac{i\hat{g}_j(r)}{(r^{2\kappa+1}b(r^2))^2} = O(|r|^n)\ \forall n$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^2}{dr^2}v_j(r)\right| &\leq \left|\frac{(-j)(-1)}{(r^{2\kappa+1}b(r^2))^2}[(2\kappa+1)r^{2\kappa}b(r^2) + r^{2\kappa+1}2rb'(r^2)]\right|\beta_6|r|^{n+2(2\kappa+1)}\\
&\quad + \left|j\frac{1}{r^{2\kappa+1}b(r^2)}\right|\beta_7|r|^{n+2\kappa+1} + \beta_8|r|^n + |(2\kappa+1)r^{2\kappa}b(r^2) + r^{2\kappa+1}2rb'(r^2)|\beta_9|r|^n\\
&\leq j\frac{1}{|b(r^2)|^2}|(2\kappa+1)r^{2\kappa}b(r^2) + r^{2\kappa+1}2rb'(r^2)|\beta_6|r|^n\\
&\quad + j\frac{1}{|b(r^2)|}\beta_7|r|^n + \beta_8|r|^n + |(2\kappa+1)r^{2\kappa}b(r^2) + r^{2\kappa+1}2rb'(r^2)|\beta_9|r|^n
\end{aligned}$$

para certos $\beta_6, \beta_7, \beta_8$ e β_9 inteiros positivos. Como já visto, $\beta_3 \leq |b(r^2)| \leq \beta_4$. Também temos $\beta_{10} \leq |b'(r^2)| \leq \beta_{11}$, logo,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^2}{dr^2}v_j(r)\right| &\leq \frac{j}{\beta_3^2}(2\kappa+1)|r|^{2\kappa}|b(r^2)|\beta_6|r|^n + \frac{j}{\beta_3^2}|r|^{2\kappa+2}2|b'(r^2)|\beta_6|r|^n + j\frac{1}{\beta_3}\beta_7|r|^n \\
&+ \beta_8|r|^n + (2\kappa+1)|r|^{2\kappa}|b(r^2)|\beta_9|r|^n + |r|^{2\kappa+2}2|b'(r^2)|\beta_9|r|^n \\
&\leq \frac{j}{\beta_3^2}(2\kappa+1)\beta_4\beta_6|r|^n + \frac{j}{\beta_3^2}|r|^{2\kappa+2}2\beta_{11}\beta_6|r|^n + j\frac{1}{\beta_3}\beta_7|r|^n \\
&+ \beta_8|r|^n + (2\kappa+1)|r|^{2\kappa}\beta_4\beta_9|r|^n + |r|^{2\kappa+2}2\beta_{11}\beta_9|r|^n \\
&\leq \left(\frac{j}{\beta_3^2}(2\kappa+1)\beta_4\beta_6 + \frac{j}{\beta_3^2}2\beta_{11}\beta_6 + j\frac{1}{\beta_3}\beta_7 + \beta_8 + (2\kappa+1)\beta_4\beta_9 + 2\beta_{11}\beta_9\right)|r|^n.
\end{aligned}$$

Se $\beta_{12} \doteq \frac{j}{\beta_3^2}(2\kappa+1)\beta_4\beta_6 + \frac{j}{\beta_3^2}2\beta_{11}\beta_6 + j\frac{1}{\beta_3}\beta_7 + \beta_8 + (2\kappa+1)\beta_4\beta_9 + 2\beta_{11}\beta_9$, obtemos

$$\left|\frac{d^2}{dr^2}v_j(r)\right| \leq \beta_{12}|r|^n,$$

isto é, $\frac{d^2}{dr^2}v_j(r) = O(|r|^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$v_j^{(\alpha)}(r) = O(|r|^n),\ \forall j \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha, n \in \mathbb{Z}^+,$$

logo $v_j \in C^\infty(\mu, -\mu)$. Isso, juntamente com o fato de que $\hat{g}_j$ é rapidamente decrescente, implica que $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência de funções suaves que são flat na origem e tem decrescimento rápido. Portanto, $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ define uma função flat $v \in C^\infty$ solução de $Lv = g$ e que se anula de ordem infinita ao longo de Σ. □

6.1 Demonstração do Teorema 6.1

Seja $\eta \in \Lambda(\kappa)$. Quando $u \in C^1$, a equação (6.2) é equivalente à equação

$$L(u \circ \Pi) = M,$$

onde L é o campo dado em (6.3) e M é dado pelo Lema 6.4. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Pi^*(du \wedge \Omega_0) &= \Pi^* du \wedge \Pi^*\Omega_0 = d(\Pi^* u) \wedge \Pi^*\Omega_0 = d(u\circ\Pi) \wedge \Pi^*\Omega_0 \\
&= \left(\frac{\partial(u\circ\Pi)}{\partial r}dr + \frac{\partial(u\circ\Pi)}{\partial\theta}d\theta\right) \wedge \Pi^*\Omega_0 \\
&= \left(\frac{\partial(u\circ\Pi)}{\partial r}dr + \frac{\partial(u\circ\Pi)}{\partial\theta}d\theta\right) \wedge 2r\left(dr + ir^{2\kappa+1}b(r^2)d\theta\right) \\
&= 2r\left[-\frac{\partial(u\circ\Pi)}{\partial r}ir^{2\kappa+1}b(r^2) + \frac{\partial(u\circ\Pi)}{\partial\theta}\right]d\theta\wedge dr = 2rL(u\circ\Pi)d\theta\wedge dr.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Pi^*(du\wedge\Omega_0)=\Pi^*(\eta\wedge\Omega_0) &\iff 2rL(u\circ\Pi)d\theta\wedge dr=2rM(r,\theta)d\theta\wedge dr\\ &\iff L(u\circ\Pi)=M.\end{aligned}$$

Segue do Lema 6.5 que podemos encontrar polinômios trigonométricos u_j com a paridade de j e grau $\leq j$ tal que

$$L\left(\sum_{j=1}^{\infty}u_j(\theta)r^j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}M_j(\theta)r^j. \tag{6.38}$$

Se $z=re^{i\theta}$, temos $r=|z|=\sqrt{z\bar{z}}$. Para j par, isto é, $j=2j_1$, temos

$$\begin{aligned}\Pi_*(u_j(\theta)r^j)=\Pi_*\left(\sum_{|2s|\leq j}p_s e^{i(2s)\theta}r^{2j_1}\right)&=\sum_{|2s|\leq j}p_s\left(\frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}\right)^{2s}(\sqrt{z\bar{z}})^{2j_1}=\sum_{|2s|\leq j}p_s\frac{z^{2s}z^{j_1}\bar{z}^{j_1}}{z^s\bar{z}^s}\\ &=\sum_{|2s|\leq j}p_s z^{s+j_1}\bar{z}^{j_1-s}\doteq P_j(z,\bar{z}).\end{aligned}$$

Para j ímpar, isto é, $j=2j_1+1$, temos

$$\begin{aligned}\Pi_*(u_j(\theta)r^j)=\Pi_*\left(\sum_{|2s+1|\leq j}p_s e^{i(2s+1)\theta}r^{2j_1}\right)&=\sum_{|2s+1|\leq j}p_s\left(\frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}\right)^{2s+1}(\sqrt{z\bar{z}})^{2j_1+1}\\ &=\sum_{|2s+1|\leq j}p_s\frac{z^{2s+1}z^{j_1}\bar{z}^{j_1}\sqrt{z\bar{z}}}{z^s\bar{z}^s\sqrt{z\bar{z}}}=\sum_{|2s+1|\leq j}p_s z^{s+j_1+1}\bar{z}^{j_1-s}\doteq P_j(z,\bar{z}).\end{aligned}$$

Ou seja, o *pushforward* via Π de $u_j(\theta)r^j$ é um polinômio homogêneo P_j em z e $\bar{z}$ de grau j.

Pelo Teorema de Borel (ver Teorema 2.25) podemos encontrar uma função $v\in C^\infty$ definida em uma vizinhança de $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ e tal que sua série de Taylor na origem é dada por $\sum_{j=1}^{\infty}P_j$. Como $u_j(\theta)r^j=\Pi^*P_j(z,\bar{z})$, a série de Taylor formal de $\Pi^*v=v\circ\Pi$ é dada por

$$T_r(v\circ\Pi)(r,\theta)=T_r(\Pi^*v)(r,\theta)=\Pi^*(T_rv)(r,\theta)=\Pi^*\left(\sum_{j=1}^{\infty}P_j(z,\bar{z})\right)=\sum_{j=1}^{\infty}u_j(\theta)r^j. \tag{6.39}$$

Considere a aplicação

$$g\doteq M-L(v\circ\Pi),$$

suave em uma vizinhança de $\Sigma\subset\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$. Por (6.38) e (6.39), g se anula de ordem infinita ao longo de Σ. Consequentemente, pelo Lema 6.6, existe uma função suave h que se anula de ordem infinita ao longo de Σ e satisfaz $Lh=g$. Seja w a aplicação C^∞ e que se anula de ordem infinita na origem definida por

$$w(z)=h\circ\Pi^{-1}(z)$$

numa vizinhança de $(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{aligned}L((w+v)\circ\Pi)(r,\theta)=L(w\circ\Pi+v\circ\Pi)(r,\theta)=L(h+v\circ\Pi)(r,\theta)=Lh(r,\theta)+L(v\circ\Pi)(r,\theta)\\ =g(r,\theta)+L(v\circ\Pi)(r,\theta)=M(r,\theta),\end{aligned}$$

ou seja, a função suave $u(z) \doteq w(z) + v(z)$ satisfaz (6.2).

Finalmente, se u_1 é outra solução da equação (6.2), então $\tilde{u} = u - u_1$ satisfaz

$$d\tilde{u} \wedge \Omega_0 = du \wedge \Omega_0 - du_1 \wedge \Omega_0 = \eta \wedge \Omega_0 - \eta \wedge \Omega_0 = 0.$$

Pelo Lema 6.2, temos $\tilde{u} \in C^\infty$ e, portanto, $u_1 \in C^\infty$.

REFERÊNCIAS

BERGAMASCO, A. P.; DATTORI DA SILVA, P. L. Global solvability for a special class of vector fields on the torus. **Contemporary Mathematics**, v. 400, p. 11–20, 2006. Citado nas páginas 56 e 60.

BERHANU, S.; CORDARO, P. D.; HOUNIE, J. **An Introduction to Involutive Structures**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. Citado nas páginas 18 e 27.

BERHANU, S.; MEZIANI, A. Global properties of a class of planar vector fields of infinite type. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 22, n. 1-2, p. 381–425, 1997. Citado na página 22.

COSTA, G. S. **Forma Normal para uma Classe de Campos Vetoriais Complexos Elípticos Degenerados**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2014. Citado na página 33.

HERNANDEZ, L. S. **Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de campos vetoriais complexos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2016. Citado nas páginas 18 e 56.

HÖRMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**: Distribution Theory and Fourier Analysis. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. ISBN 978-3-540-00662-6. Citado na página 20.

LIMA, E. L. **Curso de Análise vol.2**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. ISBN 978-85-244-0372-9. Citado nas páginas 15, 19 e 20.

MEZIANI, A. Elliptic Planar Vector Fields with Degeneracies. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 357, n. 10, p. 4225–4248, 2004. Citado na página 33.

____. On the Hypoellipticity of Differential Forms with Isolated Singularities. **Journal of Geometric Analysis**, v. 23, p. 1236–1256, 2013. Citado nas páginas 14, 27 e 50.

TREVES, F. **Hypo-Analytic Structures**: Local Theory. 1. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1992. ISBN 0-691-08744-X. Citado na página 27.

ICMC USP

SÃO CARLOS