UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

GERMES FINITAMENTE DETERMINADOS E SÍMBOLO DE BOARDMAN

Wilson Maurício Tadini

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática"

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS
1976

Aos meus pais,

e

à Nilce

MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS,

* Ao Professor Doutor Gilberto Francisco Loibel, pela constante dedicação, pelas críticas construtivas e pela orientação segura na realização do meu programa de mestrado.

* Ao Professor Doutor Celso Volpe, pelo incentivo e apoio, desde os tempos de vestibular, até o momento.

* Aos Professores Doutores Mario Rameh Saab e Luiz Antonio Favaro, pelos incentivos e maneira humana de tratar os colegas.

* Aos colegas Claudio Martins Mendes e Eurípides Alves da Silva, por um grande número de favores, os quais cumpre-me registrá-los.

* À Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São José do Rio Preto, pelo total apoio e incentivo ao nosso início de carreira.

Este trabalho só foi possível graças ao apoio das entidades CAPES , CNPq , FAPESP , FINEP

A B S T R A C T

In this work we propose to relate the k-determinance of $f: R^n,0 \to R^p,0$ *, relatively to* R, L, A, C *and* K *, with*

i) the rank of f *and the dimensions* n *and* p *.*

ii) the Boardman' Simbols.

Chapters II and III are deal with the case i . Some general theorems are proved and deeper results are given for small values of n *and* p *.*

The case ii was worked out in the chapter IV . Nescessary and suficient conditions for finite Boardman' Simbols are given. Also we relate the degree of finite determinance with the lenght of the Boardman' Simbols.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, nos propusemos encontrar relações entre o grau de determinação de um germe $f: R^n,0 \to R^p,0$, relativamente aos grupos R, L, A, C e K, e

(1) o seu posto e as dimensões dos espaços,

(2) o comprimento do seu símbolo de Boardman.

No caso (1), estabelecemos teoremas gerais, constituindo o capítulo II. No capítulo III, estudamos o mesmo problema, para valores pequenos das variáveis.

O caso (2), foi tratado no capítulo IV, onde, além de darmos uma condição necessária e suficiente para que o símbolo de Boardman seja finito, relacionamos o grau de determinação com o comprimento do símbolo de Boardman.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

1. GERMES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS (C^∞)

-Preliminares 1
-Grupos que atuam sobre F 3
-Germes finitamente determinados 9
-Campo vetorial ao longo de um germe 10
-Espaço tangente às órbitas de $R_k^\ell, L_k^\ell, C_k^\ell, A_k^\ell, K_k^\ell$. . 13

2. TEOREMA DA DIVISÃO DE WEIERSTRASS 19

3. EXTENSÕES JACOBIANAS DE IDEAIS

-Preliminares 23
-Homomorfismos de R-álgebras 24
-Derivação em A_n 28
-Extensões jacobianas de ideais 28
-Sistemas de coordenadas de A_n 29
-Posto e nulidade de um ideal 30
-Símbolo de Boardman de um ideal de A_n 31
-Símbolo de Boardman de um ideal de C_oR^n 33

CAPÍTULO II

RELACIONAMENTOS ENTRE DETERMINAÇÃO FINITA DE UM GERME, SEU POSTO E AS DIMENSÕES DOS ESPAÇOS

-Preliminares 35
-Estudo para o grupo K 36
-Estudo para o grupo R 45
-Estudo para o grupo C 52
-Estudo para o grupo A 53

CAPÍTULO III

RESULTADOS RELACIONADOS COM A DETERMINAÇÃO FINITA, PARA VALORES PEQUENOS DAS VARIÁVEIS ESTUDADAS

-Caso k = 1 , grupo K 58
-Caso k = 2 , grupo A 59
-Caso k = 2 , grupo K 62

CAPÍTULO IV

RELAÇÕES ENTRE DETERMINAÇÃO FINITA E SÍMBOLO DE BOARDMAN

-Proposições 65
-Caso relacionando comprimento do símbolo com o grau de determinação 69
-Teorema caracterizando símbolo de Boardman finito 71

***

CAPÍTULO I

(a) DETERMINAÇÃO FINITA

As noções abaixo e os resultados citados, encontram-se em [5] e [6]. Acrescentamos que, as demonstrações dadas, foram adaptadas por nós.

§1 - Germes de Aplicações Diferenciáveis C^∞.

Sejam S, T subconjuntos não vazios do R^n e R^p, respectivamente, com S finito. Consideremos $F_o = \{f: R^n \to R^p, f \in C^\infty: f(S) \subset T\}$.

Em F_o, definamos a relação: $f,g \in F_o$, $f \sim g$, se e somente se, existe um aberto U do R^n, contendo S, tal que, $f/_U = g/_U$. Segue que "$\sim$" é uma relação de equivalência em F_o. Cada classe de equivalência será denominada " germe de aplicação em S ".

Denotaremos por $f: R^n,S \to R^p,T$ ou $f: (R^n,S) \to (R^p,T)$.

Observações:

se $T = R^p$, denotaremos $f: R^n,S \to R^p$

se $p = 1$ e $T = R$, denotaremos $F_{o/\sim} = C_S(R^n)$

se $S = \{0\}$ e $T = \{0\}$, denotaremos: $f:(R^n,0) \to (R^p,0)$ ou $f: R^n,0 \to R^p,0$, e $F_{o/\sim} = F$. Portanto, $F = \{f: R^n,0 \to R^p,0 : f \in C^\infty\}$.

se $S=\{0\}$, $p=1$ e $T=R$, denotaremos $F_{o/\sim} = C_o(R^n)$.

Em nosso trabalho, salvo no parágrafo 5, trataremos do caso em que $S = \{0\}$.

Definimos m_n, como o *ideal* de $C_o(R^n)$, consistindo de todos os germes de aplicações $f: R^n,0 \to R,0$.

Denotaremos também por $m_o(R^n)$.

Facilmente se mostra que, $C_o(R^n)$ é um anel local e, que, $m_n = m_o(R^n)$ é o seu ideal maximal.

Lema I-1 : Seja $(x_1,\ldots,x_n)$ um sistema local de coordenadas do R^n, se anulando em $x_o=0$. Seja $M=\{x_1=\ldots=x_k=0\}$. Consideremos $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n \in C_o(R^n)$, onde $\bar{x}_i$ denota o germe de x_i em $\underline{0}$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações, para $u \in C_o(R^n)$:

(i) $u \in \{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k\}^{\ell}.C_o(R^n)$

(ii) Existe um representante de u, $\tilde{u}: U \to R$, U aberto do R^n contendo $\underline{0}$, tal que, $\tilde{u}$ se anula juntamente com suas derivadas até ordem $\ell-1$, em $M\cap U$.

Corolário 1 : O ideal m_n é gerado por $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$.

Corolário 2 : O ideal $m_n^k = m_n.m_n\ldots m_n$ (k-vezes) consiste exatamente dos germes cujos representantes se anulam em $\underline{0}$, juntamente com suas derivadas até ordem $k-1$.

Corolário 3 : $\dfrac{C_o(R^n)}{m_n^k} \cong \dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{m_{(n)}^k}$, onde $m_{(n)}$ denota o ideal maximal da R-álgebra $R[[x_1,\ldots,x_n]]$. (ver §9)

Observações:

Dado $f: R^n,0 \to R^p,0$, usaremos a notação f para um representante qualquer do mesmo.

§2 - *Grupos que atuam sobre o conjunto* F .

Grupo R :

Seja $R = \{h: R^n,0 \to R^n,0 \mid h$ é um difeomorfismo nas vizinhanças de $\underline{0}\}$.

Com relação à composição, R tem estrutura de grupo, atuando sobre F da seguinte maneira:

$$R \times F \to F$$
$$(h,f) \to h * f = f \circ h^{-1}$$

Grupo L :

Seja $L = \{k: R^p,0 \to R^p,0 \mid k$ é um difeomorfismo nas vizinhanças de $\underline{0}\}$.

Logo, com relação à composição, L tem estrutura de grupo, atuando sobre F da seguinte maneira:

$$L \times F \to F$$
$$(k,f) \to k * f = k \circ f$$

Grupo A :

Seja $A = R \times L$. Logo, A tem estrutura de grupo, atuando sobre F da seguinte maneira:

$$A \times F \to F$$

$$((h,k),f) \to (h,k) * f = k \circ f \circ h^{-1}$$

É claro que R e L são subgrupos de A e, a ação de A sobre F, estende as ações de R e L sobre F.

Grupo $\underline{C}$:

Seja $C = \{H: R^n \times R^p, 0 \to R^n \times R^p, 0 \mid H$ é um difeomorfismo nas vizinhanças de $\underline{0}$ e, o diagrama (*) comuta $\}$.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & (R^n \times R^p, 0) \arrow[dd, "H"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ (R^n, 0) \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & (R^n, 0) \\ & (R^n \times R^p, 0) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

onde $i(x) = (x,0)$.

Portanto, com relação à composição, C tem estrutura de grupo atuando sobre F, da seguinte maneira:

$$C \times F \to F$$

$$(H,f) \to H * f = g \text{ , onde, } H * f = g \Leftrightarrow H \circ (id,f) = (id,g)$$

Propriedades:

(1) $H \in C$

Então, $H(R^n \times 0) \subset R^n \times 0$ e $H(x \times R^p) \subset x \times R^p$.

(2) $H \in C$, $f \in F$, $H * f = g$.

Então, $H(\text{graf } f) = \text{graf } g$

(nestas propriedades, estamos tratando de germes de conjuntos).

Grupo K :

Seja $K = \{H: R^n \times R^p, 0 \to R^n \times R^p, 0 \mid H$ é um difeomorfismo nas vizinhanças de $\underline{0}$ e, existe $h: R^n, 0 \to R^n, 0$ de maneira que o diagrama (**) comuta$\}$.

$$(**) \qquad \begin{array}{ccccc} R^n,0 & \xhookrightarrow{i} & R^n \times R^p,0 & \xrightarrow{\pi} & R^n,0 \\ h\downarrow & & \downarrow H & & \downarrow h \\ R^n,0 & \xhookrightarrow{i} & R^n \times R^p,0 & \xrightarrow{\pi} & R^n,0 \end{array}$$

Sendo $H = (H_1, H_2)$, segue que $h(x) = H_1(x,0)$ e $H_2(x,0) = 0$. Temos também que $h(x) = H_1(x,y)$, com (x,y) nas vizinhanças de $0 \in R^n \times R^p$. Portanto, h é unívocamente determinada por H e é, germe de difeomorfismo nas vizinhanças de $0 \in R^n$. Logo, $h \in R$.

Nestas condições, K tem estrutura de grupo com relação à composição, atuando sobre F da seguinte maneira.

$$K \times F \to F$$

$$(H,f) \to H * f = g, \text{ onde, } H*f = g \Leftrightarrow H \circ (id,f) \circ h^{-1} = (id,g)$$

Propriedades:

(1) C é um subgrupo de K.

Basta considerar $h = id$

(2) R é um subgrupo de K.

Seja $R \xhookrightarrow{i} K$ definida por $i(h) = (h, id)$, $id: R^p, 0 \to R^p, 0$. Logo, a inclusão i é um monomorfismo canônico. Observemos que a ação de K sobre F, estende a ação de R sobre F. De fato:

$R \times F \to F$ $\qquad\qquad$ $K \times F \to F$

$(h,f) \to f \circ h^{-1}$ $\qquad\qquad$ $((h,id),f) \to (h,id) * f = g$

$(h,id) * f = g \iff (h,id) \circ (id,f) \circ h^{-1} = (id,g) \iff (id,g) =$

$= (h,id) \circ (h^{-1}, f \circ h^{-1}) = (id, f \circ h^{-1}) \iff g = f \circ h^{-1}.$

(3) L é um subgrupo de K.

Seja $L \overset{i}{\hookrightarrow} C$, tal que, $i(k) = (id,k)$ onde $id: R^n, 0 \to R^n, 0$.

Sendo a inclusão um monomorfismo canônico, temos que L é um subgrupo de C, e portanto, de K. Temos ainda que, tanto a ação de C como a ação de K sobre F, estendem a ação de L sobre F.

De fato:

$L \times F \to F$ $\qquad\qquad$ $C \times F \to F$

$(k,f) \to k \circ f$ $\qquad\qquad$ $((id,k),f) \to (id,k) * f = g$

$(id,k) * f = g \iff (id,k) \circ (id,f) = (id, k \circ f) =$

$= (id,g) \iff k \circ f = g$.

$K \times F \to F$

$((id,k),f) \to (id,k) * f = g$ onde, $(id,k) * f = g \iff$

$\iff (id,k) \circ (id,f) \circ (id)^{-1} = (id,g) \iff (id,g) =$

$= (id, k \circ f) \iff g = k \circ f.$

(4) A é um subgrupo de K.

Seja $A \overset{i}{\hookrightarrow} K$ onde $i(h,k) = (h,k) = H$. Observemos que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{tikzcd}
R^n,0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & R^n \times R^p,0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(h,k)"] & R^n,0 \arrow[d, "h"] \\
R^n,0 \arrow[r, hook, "i"] & R^n \times R^p,0 \arrow[r, "\pi"] & R^n,0
\end{tikzcd}$$

Logo, A é um subgrupo de K, cuja ação sobre F, é estendida pela ação de K, sobre F.

De fato:

$$\begin{array}{lll}
A \times F \to F & & K \times F \to F \\
((h,k),f) \to k \circ f \circ h^{-1} & & ((h,k),f) \to (h,k) * f = g
\end{array}$$

$(h,k) * f = g \iff (h,k) \circ (id,f) \circ h^{-1} = (id,g) \iff (id,g) =$

$= (h,k) \circ (h^{-1}, f \circ h^{-1}) = (id, k \circ f \circ h^{-1}) \iff g = k \circ f \circ h^{-1}$.

Dados dois germes $f,g: R^n,0 \to R^p,0$, diremos que eles são *localmente equivalentes*, se existirem germes $h \in R$ e $k \in L$, tal que, o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd}
R^n,0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & R^p,0 \arrow[d, "k"] \\
R^n,0 \arrow[r, "g"] & R^p,0
\end{tikzcd}$$

Diremos que dois germes $f,g: R^n,0 \to R^p,0$, são *equivalentes por contato*, se existir um germe de difeomorfismo $H: R^n \times R^p,0 \to R^n \times R^p,0$, tal que:

$H(R^n \times 0,0) = (R^n \times 0,0)$ e $H(\text{graf } f) = \text{graf } g$.

Propriedades:

Sejam $f,g: R^n,0 \to R^p,0$

(1) f e g estão na mesma A-órbita, se e somente se, f e g são localmente equivalentes.

(2) f e g estão na mesma K-órbita, se e somente se, f e g são equivalentes por contato.

(3) São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) f e g estão na mesma C-órbita.

(ii) $f^*m_p.C_o(R^n) = g^*m_p.C_o(R^n)$

(iii) Existe uma matriz (u_{ij}), $p \times p$, invertível, com entradas em $C_o(R^n)$, tal que, $f_i = \sum_j u_{ij}.g_j$, onde $f = (f_1,\ldots,f_p)$ e $g = (g_1,\ldots,g_p)$.

(iv) Existe um germe de difeomorfismo:

$H: R^n \times R^p,0 \to R^n \times R^p,0$, tal que

$H\big|_{(R^n \times 0,0)} = id$ e $H(\text{graf } f) = \text{graf } g$.

§3 - *Lema de Nakayama.*

Lema (Nakayama)

Seja A um anel comutativo, com unidade 1.

Sejam:

1) E e F, A-módulos, com E finitamente gerado.

2) $\alpha: E \to F$, homomorfismo de A-módulo.

3) $I \subset A$ um ideal, tal que, $1+z$ é invertível, para todo $z \in I$.

Então, se $\alpha(E) + I.F = F$, segue que $\alpha(E) = F$.

Corolário 1 : Seja A um $C_o(R^n)$-módulo finitamente gerado e seja B um sub-módulo de A.

Se $\dim_R \frac{A}{m^{\ell+1}A+B} \leq \ell$, então $m_n^{\ell}A \subset B$, e B é um $C_o(R^n)$-módulo finitamente gerado.

Corolário 2 : Seja A um ideal de $C_o(R^n)$.

Então:

(1) $\dim_R \frac{C_o(R^n)}{A} < \infty \iff$ Existe $\ell \geq 1$ tal que $m_n^{\ell} \subset A$.

(2) $\dim_R \frac{C_o(R^n)}{A} = \ell \Rightarrow m_n^{\ell} \subset A$.

§4 - *Germes finitamente determinados.*

Dado $f,g \in F$, diremos que f e g tem o mesmo k-*jato*, se as suas derivadas parciais em $\underline{0}$, até ordem k, coincidirem.

Denotaremos por $f \sim_k g$.

Facilmente se verifica que $\sim_k$ é uma relação de equivalência em F. Sejam $\frac{F}{\sim_k} = J^k(n,p)$ e $j^k f(0) = f^{(k)}$, a classe que contém f .

Um germe $f \in F$, diz-se k-*determinado com relação ao*

grupo $G(G = L,R,C,A,K)$, se a classe $j^k f(0)$ estiver contida numa mesma órbita da ação de G em F.

Em outras palavras, $f \in F$ diz-se k-determinado com relação ao grupo G, se, para todo $g \in F$, tal que, $j^k f(0) = j^k g(0)$, tem-se $g \in G.f$.

notação: f k-det G.

Um germe $f \in F$ diz-se *finitamente determinado com relação ao grupo* $G(G = L,R,C,A,K)$, se para algum inteiro positivo k, f for k-det G.

Observemos que se f é k_o-det G, então f é k-det G, para todo $k \geq k_o$.

§5 - *Campo vetorial ao longo de um germe.*

Seja $f \in F$. Diremos que $\xi: (R^n,0) \to TR^p$ é um *campo vetorial ao longo de* f, se $\pi \circ \xi = f$, onde $\pi: TR^p \to R^p$ é a projeção.

$$\begin{tikzcd} & TR^p \arrow[d, "\pi"] \\ (R^n,0) \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "f"] & (R^p,0) \end{tikzcd}$$

Seja $\Theta(f)$ o conjunto dos campos vetoriais ao longo de f.

Pela estrutura vetorial real das fibras de TR^p, segue que $\Theta(f)$ é um $C_o(R^n)$-módulo, finitamente gerado por $\{\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f\}_{i=1,\ldots,p}$, onde $(y_1,\ldots,y_p)$ é um sistema de coor

denadas nas vizinhanças de $0 \in R^p$.

Consideremos $A = \Theta(I_{R^p,0})$ e $B = \Theta(I_{R^n,0})$, onde $I_{R^n,0}$ e $I_{R^p,0}$ denotam os germes identidades $(R^n,0 \to R^n,0)$ e $(R^p,0 \to R^p,0)$, respectivamente.

Logo, A é o $C_o(R^p)$-módulo dos germes para $0 \in R^p$, dos campos vetoriais sobre R^p. Da mesma forma, B é o $C_o(R^n)$-módulo dos germes para $0 \in R^n$, dos campos vetoriais sobre R^n.

Dado $f \in F$, seja $Tf: (TR^n, \pi_n^{-1}0) \to (TR^p, \pi_p^{-1}0)$, o germe da aplicação tangente para $\pi_n^{-1}0$ de qualquer representante de f, onde $\pi_n: TR^n \to R^n$ e $\pi_p: TR^p \to R^p$ são as projeções. Portanto, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} (TR^n, \pi_n^{-1}0) & \xrightarrow{Tf} & (TR^p, \pi_p^{-1}0) \\ \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi_p \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{f} & (R^p, 0) \end{array}$$

Nestas condições, se $\xi \in B$ e $\eta \in A$, então, $Tf \circ \xi \in \Theta(f)$ e $\eta \circ f \in \Theta(f)$.

Vamos definir:

$tf: B \to \Theta(f)$, tal que, $tf(\xi) = Tf \circ \xi$, e,

$wf: A \to \Theta(f)$, tal que, $wf(\eta) = \eta \circ f$.

Segue que tf é um homomorfismo de $C_o(R^n)$-módulo, e, wf é um homomorfismo sobre $f^*: C_o(R^p) \to C_o(R^n)$.

Observemos que tf e wf são R-lineares.

Consideremos os elementos:

$$d(f,R) = \dim_R \frac{\Theta(f)}{tf(B)}$$

$$d(f,L) = \dim_R \frac{\Theta(f)}{wf(A)} \quad ;$$

$$d(f,C) = \dim_R \frac{\Theta(f)}{f^*m_p.\Theta(f)} \quad ;$$

$$d(f,A) = \dim_R \frac{\Theta(f)}{tf(B)+wf(A)} \quad e \ ,$$

$$d(f,K) = \dim_R \frac{\Theta(f)}{tf(B)+f^*m_p.\Theta(f)} \ .$$

Relacionados com estes elementos, temos:

Proposição I-2

Sejam $f \in F$ e $G = R,L,C,A$ ou K .

Então, $d(f,G) < \infty \iff$ existe um inteiro s, tal que

$m_n^s\ \Theta(f) \subset tf(B)$, se $G = R$

$m_n^s\ \Theta(f) \subset wf(A)$, se $G = L$

$m_n^s\ \Theta(f) \subset f^*m_p.\Theta(f)$, se $G = C$

$m_n^s\ \Theta(f) \subset tf(B) + wf(A)$, se $G = A$

$m_n^s\ \Theta(f) \subset tf(B) + f^*m_p.\Theta(t)$, se $G = K$.

A demonstração é uma aplicação do Lema de Nakayama.

Teorema I-3 : (MATHER)

Sejam $G = R,L,A,C$ ou K, e $f \in F$.

Então, $d(f,G) < \infty \iff f$ é finitamente determinado com relação ao grupo G .

§6 - *Espaço tangente à uma órbita de qualquer um dos grupos* R_k^ℓ, L_k^ℓ, C_k^ℓ, A_k^ℓ e K_k^ℓ.

Seja $G = R, L, C, A$ ou K.

Denotemos por G_k, o subgrupo de G, formado pelos elementos que tem o mesmo k-jato que a identidade de G, em $\underline{0}$. Nestas condições, podemos escrever:

$R_k = R \cap K_k$, $L_k = L \cap K_k$, $A_k = A \cap K_k$, $C_k = C \cap K_k$, ou de um modo geral, $G_k = G \cap K_k$. Temos também, $A_k = R_k \times L_k$. Como G_k é um subgrupo normal de G, e, G_ℓ é um subgrupo de G_k, se $\ell \geq k$, então consideremos $G_k^\ell = \frac{G_k}{G_\ell} (\ell \geq k)$. Desta forma, podemos ver G_k^ℓ, como o conjunto dos ℓ-jatos de elementos de G, que tem o mesmo k-jato que a identidade de G, em $\underline{0}$.

Como G atua sobre F, então, esta ação induz uma ação de G_k^ℓ sobre $J^\ell(n,p)$, da seguinte maneira

$$\begin{array}{lll} G \times F \to F & & G_k^\ell \times J^\ell(n,p) \to J^\ell(n,p) \\ (g,f) \to g * f & & (g^{(\ell)}, f^{(\ell)}) \to g^{(\ell)} * f^{(\ell)} = (g * f)^{(\ell)} \end{array}$$

Tomando $G^\ell = G_o^\ell$, segue que $G_k^\ell \subset G_o^\ell = G^\ell$. Sendo G^ℓ um grupo de Lie, tem-se que G_k^ℓ é um subgrupo de Lie de G^ℓ, atuando em $J^\ell(n,p)$. Portanto, as órbitas desta ação, são subvariedades imersas em $J^\ell(n,p)$. (ver [2]). Portanto, podemos falar em espaços tangentes às órbitas da ação de G_k^ℓ sobre $J^\ell(n,p)$.

Seja $f \in F$, $z = f^{(\ell)} \in J^{\ell}(n,p)$. Vamos definir uma aplicação $\pi^{\ell}: m_n.\Theta(f) \to T_z J^{\ell} (J^{\ell} = J^{\ell}(n,p))$, tal que:

(i) π^{ℓ} é R-linear

(ii) π^{ℓ} é sobrejetiva

(iii) kernel $\pi^{\ell} = m_n^{\ell+1}\Theta(f)$, e, a partir da qual, teremos expressões determinadas dos espaços tangentes à $G^{\ell}.z$, para $G = R, L, C, A$ ou K.

Para cada $\xi \in m_n.\Theta(f)$, suponhamos que exista $F: R^n \times R, 0 \times I_o \to R^p \times R, 0 \times I_o$, onde $I_o = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, satisfazendo:

(1) F preserva níveis, isto é, $F(x,t) = (F^1(x,t), t)$.

(2) $F(x,0) = (f(x), 0)$

(3) $\frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{t=0} = \xi$, isto é,

$$\frac{\partial F^1}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}(x,0), \ldots, \frac{\partial F_p}{\partial t}(x,0)\right) = \xi(x),$$

onde, $F = (F^1, F^2)$ e $F^1 = (F_1, \ldots, F_p)$.

Tomemos $\psi: I_o \to J^{\ell}(n,p)$, definido por $\psi(t) = F_t^{(\ell)}$, onde $F_t: R^n, 0 \to R^p, 0$, $F_t(x) = F^1(x,t)$. Portanto, ψ está bem definido e, $\psi(0) = z = f^{(\ell)}$.

Sendo

$$\psi(t) = F_t^{(\ell)} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(0,t), \ldots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(0,t), \ldots, \frac{\partial F_p}{\partial x_1}(0;t), \ldots, \frac{\partial F_p}{\partial x_n}(0,t), \ldots, \frac{\partial^{\ell} F_p}{\partial x_{i_1}, \ldots, x_{i_\ell}}(0,t)\right),$$

temos que

$$\psi'(0) = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial t}(0), \ldots, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_n \partial t}(0), \ldots, \frac{\partial^2 F_p}{\partial x_1 \partial t}(0), \ldots, \frac{\partial^2 F_p}{\partial x_n \partial t}(0), \ldots, \frac{\partial^{\ell+1} F_p}{\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_\ell} \partial t}(0)\right) =$$

$= (\xi'(0), \ldots, \xi^{(\ell)}(0))$, a menos de reordenação.

Então, colocando,

$$\pi^{\ell}: m_n.\Theta(f) \to T_z J^{\ell}$$
$$\xi \to \pi^{\ell}(\xi) = \frac{d}{dt} F_t^{(\ell)} \Big|_{t=0} = (\xi'(0),\ldots,\xi^{(\ell)}(0)),$$

teremos:

(a) $\pi^{\ell}(\xi)$ independe da F tomada

(b) π^{ℓ} é R-linear

(c) π^{ℓ} é sobrejetiva (dado $v \in T_z J$, então $v \in R^N$, para algum N. Logo, é possível encontrar $\xi \in m_n.\Theta(f)$, tal que, $(\xi'(0),\ldots,\xi^{(\ell)}(0)) = v$).

(d) kernel $\pi^{\ell} = m_n^{\ell+1}\Theta(f)$, uma vez que, π^{ℓ} está defida em $m_n.\Theta(f)$ e, para cada $\xi \in m_n.\Theta(f)$, $\pi^{\ell}(\xi) = (\xi'(0),\ldots,\xi^{(\ell)}(0))$.

Logo, a π^{ℓ} definida, tem as propriedades fixadas inicialmente. Mostremos agora, que dado $\xi \in m_n.\Theta(f)$, existe F nas condições tomadas. De fato: se $\xi \in m_n.\Theta(f)$, então, $\xi(x) = (f(x);\ \xi_1(x),\ldots,\xi_p(x))$.

Seja $F: R^n \times R, 0 \times I_o \to R^p \times R, 0 \times I_o$, tal que $F(x,t) = (t\xi_1(x) + f_1(x),\ldots,t\xi_p(x) + f_p(x);\ t)$, onde $f = (f_1,\ldots,f_p)$. Facilmente se verifica que, F tem as propriedades exigidas, para definirmos $\pi^{\ell}(\xi)$.

Daí, temos a

Proposição I-4 :

Seja $f \in F$, $z = f^{(\ell)}$. Então, $T_z(G_k^{\ell}.z)$ é igual à:

(i) $\pi^{\ell}(tf(m_n^{k+1}B))$, se $G = R$

(ii) $\pi^{\ell}(wf(m_n^{k+1}A))$, se $G = L$

(iii) $\pi^{\ell}(m_n^k f^* m_p.\Theta(f))$, se $G = C$

(iv) $\pi^{\ell}(tf(m_n^{k+1}B) + wf(m_n^{k+1}A))$, se $G = A$, e ,

(v) $\pi^{\ell}(tf(m_n^{k+1}B) + m_n^k f^* m_p.\Theta(f))$, se $G = K$.

Provemos agora, a

Proposição I-5 :

Seja $f \in F$.

(i) se f é k-det R, então $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_n B)$

(ii) se f é k-det L, então $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset wf(m_n A)$

(iii) se f é k-det C, então $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset f^* m_p.\Theta(t)$

(iv) se f é k-det A, então $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_n.B) +$
$+ wt(m_n.A)$

(v) se f é k-det K, então $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_n B) +$
$+ f^* m_p.\Theta(f)$.

Prova :

Provemos (v). Para os demais casos, segue raciocínio análogo.

Sejam f k-det K, $\ell > k$ e $z = f^{(\ell)} \in J^{\ell}(n,p)$.

Seja $E = \pi^{-1}(\pi(z))$, onde $\pi: J^{\ell} \to J^k$ é a projeção canônica. Se $g^{(\ell)} \in E$, então $\pi(g^{(\ell)}) = \pi(z)$, isto é, $g^{(k)} = f^{(k)}$. Logo, existe $H \in K$, tal que, $H * f = g$. Segue então que $g^{(\ell)} = (H * f)^{(\ell)} = H^{(\ell)} * f^{(\ell)} \in K$ . .

Portanto, $z \in E$ e $E \subset K^{\ell}.z$. Como π é uma submersão, temos que E é uma subvariedade de J^{ℓ} (cod E = dim J^k).

Então, $T_zE \subset T_z(K^{\ell}.z)$. Das definições de E e π^{ℓ}, segue que $T_zE = \pi^{\ell}(m_n^{k+1}\Theta(f))$.

Temos então, $\pi^{\ell}(m_n^{k+1}\Theta(f)) \subset \pi^{\ell}(tf(m_nB) + f^*m_p.\Theta(f))$, com kernel $\pi^{\ell} = m_n^{\ell+1}\Theta(f)$.

Portanto, $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_nB) + f^*m_p.\Theta(f) + m_n^{\ell+1}\Theta(f)$, com $\ell > k$.

Consideremos: $M = tf(m_nB) + f^*m_p.\Theta(f)$,

$N = M + m^{k+1}\Theta(f)$,

$I = m_n$,

$M \xrightarrow{i} N$, inclusão de $C_o(R^n)$-módulo e, $\ell = k+1$.

Como $M + I.N = M + m_n^{k+2}\Theta(f) \supset M + m_n^{k+1}\Theta(f) = N$, segue por Nakayama que, $M = N$. Portanto, $m^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_nB) + f^*m_p.\Theta(f)$.

Temos ainda, os seguintes teoremas:

Teorema I-6 :

Seja $f \in F$

Se $m_n^k\Theta(f) \subset tf(m_nB) + f^*m_p.\Theta(f)$, então f é $(k+1)$-det K.

Teorema I-7 :

Seja $f: R^n,0 \to R,0$

Se $m_n^k \subset m_n.\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle + m_n^{k+1}$, então f é k-det R.

Observações:

(i) $f \in F$, k-det $K \Longrightarrow m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_nB) + f^*m_p.\Theta(f) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_n B) + \langle f_1,\ldots,f_p \rangle . \Theta(f)$, onde

$f = (f_1,\ldots,f_p)$. Portanto, se f é k-det K, tem-se

$m_n^{k+1} \subset \langle \frac{\partial f_j}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f_j}{\partial x_n} ; f_1,\ldots,f_p \rangle . C_o(R^n)$, para cada $j = 1,\ldots,p$.

(ii) $f \in F$, k-det $R \Longrightarrow m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(m_n B)$.

Portanto, se f é k-det R, tem-se para cada $j=1,\ldots,p$,

$m_n^{k+1} \subset \langle \frac{\partial f_j}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f_j}{\partial x_n} \rangle . C_o(R^n)$.

(iii) $f \in F$, k-det $C \Longrightarrow m_n^{k+1}\Theta(f) \subset f^*m_p.\Theta(f)$.

Logo, f k-det $C \Longrightarrow m_n^{k+1} \subset \langle f_1,\ldots,f_p \rangle . C_o(R^n)$.

§7 - *Invariança do grau de determinação.*

Neste parágrafo, mostraremos que se um germe f é k-det G, onde $G = R, L, A$ ou K, então, todo $g \in A.f$ é k-det G. Formalisemos tal resultado, através do

Lema I-8 :

Sejam $f \in F$ e $G = R, L, A$ ou K.

Se f é k-det G, então, todo elemento da A-órbita de f é k-det G.

Prova :

(i) $G = R$

Sejam $(\phi,\Psi) \in A$ e f k-det R.

Suponhamos que $[(\psi,\Psi) * f]^{(k)} = g^{(k)}$, com $g \in F$.

Então, $(\Psi \circ f \circ \psi^{-1})^{(k)} = g^{(k)} \Rightarrow f^{(k)} = (\Psi^{-1} \circ g \circ \psi)^{(k)}$.

Como f é k-det R, existe $\lambda \in R$, tal que, $f = \Psi^{-1} \circ g \circ \psi \circ \lambda$. Donde segue que $(\psi,\Psi) * f =$
$= g \circ \psi \circ \lambda \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \lambda^{-1} \circ \psi^{-1}) * g \in R.g$.

(ii) $G = K$

Sejam $(\psi,\Psi) \in A$ e f k-det K.

Mostraremos que $(\psi,\Psi) * f = \Psi \circ f \circ \psi^{-1}$ é k-det K.

Suponhamos que $g^{(k)} = (\Psi \circ f \circ \psi^{-1})^{(k)}$, $g \in F$.

Segue então que, $f^{(k)} = (\Psi^{-1} \circ g \circ \psi)^{(k)}$. Sendo f k-det K, tem-se $\Psi^{-1} \circ g \circ \psi \in K.f$. Como A é um subgrupo de K, e K estende a ação de A sobre F, segue $g \in K.f$ (basta aplicar (ψ, Ψ) à $\Psi^{-1} \circ g \circ \psi$).

$g \in K.f \Leftrightarrow f \in K.g \Leftrightarrow (\psi,\Psi) * f = \Psi \circ f \circ \psi^{-1} \in K.g \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g \in K.(\Psi \circ f \circ \psi^{-1})$.

(iii) $G = L,A$

Demonstra-se analogamente ao caso (i).

§8 - *Teorema da Divisão de WEIERSTRASS* :

Teorema I-9 : (DIVISÃO)

Seja $a(x_1,\ldots,x_n) \in R[[x_1,\ldots,x_n]]$, regular em x_1, de ordem h. Então, qualquer que seja $b(x_1,\ldots,x_n) \in R[[x_1,\ldots,x_n]]$, existem $u(x_1,\ldots,x_n)$, $r_i(x_2,\ldots,x_n) \in R[[x_1,\ldots,x_n]]$,

$(i = 0,\ldots,h-1)$, univocamente determinadas, tal que:

$$b(x_1,\ldots,x_n) = u(x_1,\ldots,x_n).a(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=0}^{h-1} r_i(x_2,\ldots,x_n).x_1^i$$

Teorema I-10 :

Seja $a(x_1,\ldots,x_n) \in R[[x_1,\ldots,x_n]]$, com $a \not\equiv 0$.

Então $\underline{a}$ é regular. Podemos ainda supor sem perda de generalidade, que seja regular em x_1.

A partir de (I-9) e (I-10), vamos demonstrar o:

Teorema I-11 :

Sejam $p_1,\ldots,p_r \in R[[x_1,\ldots,x_n]]$, tais que , $p_1(0) = \ldots = p_r(0) = 0$.

Se $r < n$, então, $\dim_R \dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{\langle p_1,\ldots,p_r\rangle} = \infty$.

Prova :

(a) Seja $r = 1$. Se $p_1 \equiv 0$, nada temos que provar.

Suponhamos $p_1 \not\equiv 0$. Consideremos por (I-10), p_1 regular em x_1, de ordem k .

Logo, por (I-9), podemos considerar $\dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{\langle p_1 \rangle}$, como um espaço vetorial real, gerado por elementos da forma $\sum_{i=0}^{h-1} \theta_i(x_2,\ldots,x_n).x_1^i$.

Sendo $n \geq 2$, segue que $\dim_R \dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{\langle p_1 \rangle} = \infty$.

(b) Seja $r = 2$. Se $p_1 \equiv 0$ ou $p_2 \equiv 0$, nada temos a demonstrar. Suponhamos então, $p_1.p_2 \not\equiv 0$. Por (I-10), p_1 e

p_2 são regulares. Consideremos esta regularidade, em relação à x_1, tal que, p_1 é de ordem h_1 e p_2, de ordem h_2, com $h_1 \leq h_2$.

Sejam: $B_n = \dfrac{A_n}{\langle p_1 \rangle}$, $C_n = \dfrac{B_n}{\langle \rho_1 p_2 \rangle}$ e,

$\rho_1 : A_n \to B_n$, $\rho_2 : B_n \to C_n$, as projeções canônicas,

onde, $A_n = R[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Por (I-9), $p_2(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1, \ldots, x_n) . p_1(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=0}^{h-1} \Theta_i(x_2, \ldots, x_n) . x_1^i$, onde, $u_1, \Theta_o, \ldots, \Theta_{h_1-1}$, são univocamente determinadas.

Logo, $\rho_1(p_2) = \sum_{i=0}^{h_1-1} \Theta_i(x_2, \ldots, x_n) x_1^i + \langle p_1 \rangle$.

Vamos definir:

$R_o : B_n \to R[[x_2, \ldots, x_n]]$, por:

$$R_o(g(x_1, \ldots, x_n) + \langle p_1 \rangle) = R_o\left(\sum_{i=0}^{h_1-1} r_i(x_2, \ldots, x_n) x_1^i + \langle p_1 \rangle\right) = r_o(x_2, \ldots, x_n).$$

Pela unicidade garantida em (I-9), segue que R_o está bem definida, e é um homomorfismo sobrejetivo de $R[[x_2, \ldots, x_n]]$-módulo.

É fácil ver que $R_o(\langle \rho_1(p_2) \rangle) \subset \langle R_o \rho_1(p_2) \rangle$, em $R[[x_2, \ldots, x_n]]$.

Seja $\overline{R}_o : B_n \to \dfrac{R[[x_2, \ldots, x_n]]}{\langle R_o \rho_1(p_2) \rangle}$, definida por:

$\overline{R}_o(a) = R_o(a) + \langle R_o \rho_1(p_2) \rangle$. Nestas condições, $\overline{R}_o$ é um homomorfismo de $R[[x_2, \ldots, x_n]]$-módulo, sobrejetivo.

Logo, $\dfrac{B_n}{\operatorname{Ker} \overline{R}_o} \simeq \dfrac{R[[x_2, \ldots, x_n]]}{\langle R_o \rho_1(p_2) \rangle}$. Como $\langle \rho_1(p_2) \rangle \subset \operatorname{Ker} \overline{R}_o$,

segue que, $\dim_R \dfrac{B_n}{\langle \rho_1 p_2 \rangle} = \infty$, pois, $\dim_R \dfrac{R[[x_2,\ldots,x_n]]}{\langle R_o\ \rho_1\ (p_2)\rangle} = \infty$, $(n \geq 3)$.

Portanto, $\dim_R \dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{\langle\ p_1,p_2\ \rangle} = \infty$.

(c) No caso $r \geq 3$, a demonstração é feita por indução sobre r, seguindo raciocínio análogo ao (b).

Teorema 1-12 :

Sejam $p_1,\ldots,p_z : R^n,0 \to R,0$, com $n > z$.

Então, $\dim_R \dfrac{C_o(R^n)}{\langle p_1,\ldots,p_z\rangle} = \infty$.

Prova :

Por ([8]-Teorema de Borel), existe $\psi : C_o(R^n) \to R[[x_1,\ldots,x_n]]$, R-linear e sobrejetiva. Portanto, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_o(R^n) & \xrightarrow{\psi} & R[[x_1,\ldots,x_n]] \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \dfrac{C_o(R^n)}{\langle p_1,\ldots,p_z\rangle} & \overset{\overline{\psi}}{\dashrightarrow} & \dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{\psi\ \langle p_1,\ldots,p_z\ \rangle} \end{array}$$

, comuta, onde:

π_1 , π_2 são as projeções canônicas, e, $\overline{\psi}$ é definida por $\overline{\psi}(f + \langle p_1,\ldots,p_z\rangle) = \psi(f) + \psi\langle p_1,\ldots,p_z\rangle$ (na construção dada por Borel, temos ainda que ψ é um homomorfismo de anéis).

Como $\overline{\psi}$ é sobrejetiva, segue que $\dim_R \dfrac{C_o(R^n)}{\langle p_1,\ldots,p_z\rangle} = \infty$, pois, $\dim_R \dfrac{R[[x_1,\ldots,x_n]]}{\langle\psi(p_1),\ldots,\psi(p_z)\rangle} = \infty$ $(n > z)$.

(b) EXTENSÕES JACOBIANAS DE IDEAIS

As noções e resultados citados, encontram-se em [6]. Registramos porém, que as demonstrações dadas, foram por nós adaptadas.

§9 - Preliminares

Seja $A_n = R[[x_1,\ldots,x_n]]$, a álgebra das séries formais, nas indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$, com coeficientes no corpo dos números reais. Um elemento $\underline{a}$ de A_n, será denotado por $a = \sum_{j \geq 0} \tilde{a}_j$, onde $\tilde{a}_j$ significa a parte formal homogenea do do grau j.

Denotemos por $m_{(n)}$, o subconjunto de A_n, constituído dos elementos com parte constante nula, isto é, $m_{(n)} = \{a \in A_n \mid \tilde{a}_o = 0\}$. Segue imediatamente que, $m_{(n)}$ é um ideal de A_n, gerado por $x_1,\ldots,x_n$.

Lema I-11 :

$a \in A_n$ é A_n-unitário $\Longleftrightarrow \tilde{a}_o \neq 0$.

Prova :

Se a é A_n-unitário, é imediato que $\tilde{a}_o \neq 0$.

Se $\tilde{a}_o \neq 0$, tomemos $\tilde{a} = \frac{1}{\tilde{a}_o} . a = 1 + \sum_{i \geq 1} \tilde{d}_i = 1 - c$

Como $\{c^s\}_{s \geq 1}$ é uma família somável, tomando $d_s = 1 + c + \ldots + c^s$, teremos $(1-c).d_s - 1 = -c^{s+1} \in m_{(n)}^{s+1}$. Desde que

$\bigcap_{i\geq 1} m^i_{(n)} = \{0\}$, tomando $b = 1 + \sum_{i\geq 1} c^i$, segue que $a.\frac{b}{\bar{a}_o} = 1$.

Corolário : $m_{(n)}$ é o único ideal maximal de A_n .

§10 - *Homomorfismo de R-álgebras*

Sejam $A_p = R[[y_1,\ldots,y_p]]$ e $A_n = R[[x_1,\ldots,x_n]]$ duas R-álgebras.

Consideremos $f: A_n \to A_p$, tal que

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(ii) $f(u.v) = f(u) + f(v)$

(iii) $f(\alpha.u) = \alpha.f(u)$

(iv) $f(1) = 1$, $u, v \in A_n$, $\alpha \in R$.

Nestas condições, diremos que f é um *homomorfismo* entre as R-álgebras A_n e A_p .

Como podemos observar, f transforma elementos A_n-unitários em elementos A_p-unitários, e, $f(m_{(n)}) \subset m_{(p)}$.

Proposição I-12 :

Sejam $A_p = R[[y_1,\ldots,y_p]]$, $A_n = R[[x_1,\ldots,x_n]]$ e $u_1,\ldots,u_p \in m_{(n)}$.

Então, existe um único homomorfismo de R-álgebras $f: A_p \to A_n$, tal que, $f(y_i) = u_i$, $i = 1,\ldots,p$.

Prova :

(i) existência

$a \in A_p$, $a = \tilde{a}_o + \sum_{i=1}^{p} a_i y_i + \sum_{i \leq j}^{p} a_{ij} y_i y_j + \ldots$, com $\tilde{a}_o, a_i, \ldots \in R$.

Definamos $f(a) = \tilde{a}_o + \sum_{i=1}^{p} a_i u_i + \sum_{i \leq j}^{p} a_{ij} u_i u_j + \ldots$.

Logo, f é um homomorfismo de R-álgebras, com $f(y_i) = u_i$, para $i = 1, \ldots, p$.

(ii) unicidade

Sejam $f, g: A_p \to A_n$, homomorfismo de R-álgebras, com $f(y_i) = g(y_i) = u_i$, $i = 1, \ldots, p$. Se $a \in A_p$ é um polinômio, então $f(a) = g(a)$. Seja $b \in A_p$, $b = \tilde{b}_o + \ldots + \tilde{b}_r + \tilde{b}_{r+1} + \ldots = \bar{b} + \bar{\bar{b}}$, onde $\bar{\bar{b}} = \tilde{b}_{r+1} + \ldots \in m_{(n)}^{r+1}$. Segue que $f(\bar{\bar{b}}), g(\bar{\bar{b}}) \in m_{(n)}^{r+1}$, e portanto, $f(b - \bar{b}), g(b - \bar{b}) \in m_{(n)}^{r+1}$.

Mas, $f(b - \bar{b}) = f(b) - f(\bar{b})$ e $g(b - \bar{b}) = g(b) - g(\bar{b}) = g(b) - f(\bar{b})$. Logo, $f(b) - g(b) \in m_{(n)}^{r+1}$, para todo $r \geq 1$.

Portanto, $f(b) = g(b)$.

Corolário : Seja $f: A_p \longrightarrow A_n$, homomorfismo de R-álgebras.

Então, f fica determinada por $f(y_i)$, $i = 1, \ldots, p$.

Proposição I-13 :

Sejam $y_1, \ldots, y_n \in m_{(n)}$.

Então, $y_1,\ldots,y_n$ geram $m_{(n)}$, se e somente se, $\tilde{y}_{11},\ldots,\tilde{y}_{n1}$ geram os polinômios homogeneos do primeiro grau de $A_n = R[[x_1,\ldots,x_n]]$.

Prova :

(=>)

$w \in m_{(n)}$, $w = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \ldots$. Como $y_1,\ldots,y_n$ geram $m_{(n)}$, então existem $b_1,\ldots,b_n \in A_n$, tal que, $w = b_1y_1 + \ldots + b_ny_n$. Logo, $\tilde{w}_1 = \tilde{b}_{10}\tilde{y}_{11}+\ldots+\tilde{b}_{n0}\tilde{y}_{n1}$, onde $\tilde{b}_{i0}$ é o termo constante de b_i .

Portanto, $\tilde{w}_1$ é gerado por $\tilde{y}_{11},\ldots,\tilde{y}_{n1}$. Em particular, tomando $w = \tilde{w}_1$, segue o resultado.

(<=) Sejam $z_1,\ldots,z_n \in m_{(n)}$, definidos por:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \sum\limits_{i \leq j} a_{ij}^{(1)} x_i x_j + \ldots \\ z_2 = x_2 + \sum\limits_{i \leq j} a_{ij}^{(2)} x_i x_j + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = x_n + \sum\limits_{i \leq j} a_{ij}^{(n)} x_i x_j + \ldots \end{cases}$$

, onde os coeficientes são reais.

Afirmamos que $x_1,\ldots,x_n \in R[[z_1,\ldots,z_n]]$.

Sejam:

$$\begin{cases} u_1 = z_{i_o} \Rightarrow u_1 - x_{i_o} \in m^2_{(n)} \\ u_2 = z_{i_o} - \sum_{i \leq j} a_{ij}^{(i_o)} z_i z_j \Rightarrow u_2 - x_{i_o} \in m^3_{(n)} \\ u_3 = u_2 - \sum_{i \leq j \leq k} a_{ijk}^{(i_o)} z_i z_j z_k \Rightarrow u_3 - x_{i_o} \in m^4_{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_r = \ \ldots \ \Rightarrow u_r - x_{i_o} \in m^{r+1}_{(n)} \end{cases}$$

$\therefore \ u_r \to x_{i_o} \in R[[z_1,\ldots,z_n]]$ (Topologia de Krull em $R[[z_1,\ldots,z_n]]$)

Logo, $R[[x_1,\ldots,x_n]] = R[[z_1,\ldots,z_n]]$.

Vamos agora, construir elementos $w_1,\ldots,w_n$, que se expressam através de $y_1,\ldots,y_n$, com coeficientes reais.

Como $\tilde{y}_{11},\ldots,\tilde{y}_{n1}$ são linearmente independentes no espaço vetorial real, dos polinômios homogêneos do primeiro grau, nas variáveis $x_1,\ldots,x_n$, segue que:

$$\begin{cases} \tilde{y}_{11} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{y}_{n1} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \ , \quad a_{ij} \in R, \ \det(a_{ij}) \neq 0 \ . \end{cases}$$

Considerando $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$, segue que, $x_i = \sum_j b_{ij}\tilde{y}_{j1}$, $i = 1,\ldots,n$.

Tomemos $w_i = \sum_j b_{ij}y_j$, $i = 1,\ldots,n$. Disto segue que:

$$w_i = x_i + \sum_{k \leq j} c_{kj}^{(i)} x_k x_j + \ldots \ , \quad i = 1,\ldots,n \ .$$

Logo, pela construção inicial, temos $R[[x_1,\ldots,x_n]] = R[[w_1,\ldots,w_n]]$.

Por outro lado, $R[[w_1,\ldots,w_n]] \subset R[[y_1,\ldots,y_n]] \subset R[[x_1,\ldots,x_n]]$.

Portanto, $R[[x_1,\ldots,x_n]] = R[[y_1,\ldots,y_n]]$.

§11 - *Derivação em* $R[[x_1,\ldots,x_n]]$

Seja $\mathcal{D}: R[[x_1,\ldots,x_n]] \to R[[x_1,\ldots,x_n]]$, uma aplicação satisfazendo:

(i) $\mathcal{D}$ é R-linear.

(ii) $\mathcal{D}(a.b) = a\,\mathcal{D}(b) + b\,\mathcal{D}(a)$, $a,b \in R[[x_1,\ldots,x_n]]$.

(iii) $\mathcal{D}(m^r_{(n)}) \subset m^{r-1}_{(n)}$, $r \geq 2$.

Nestas condições, diremos que $\mathcal{D}$ *é uma derivação em* $R[[x_1,\ldots,x_n]]$.

Para cada $i = 1,\ldots,n$, definamos uma aplicação $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}: R[[x_1,\ldots,x_n]] \to R[[x_1,\ldots,x_n]]$, linear , tal que , $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$.

Logo, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma derivação em $R[[x_1,\ldots,x_n]]$, e, é única nestas condições. Temos ainda que, se $\mathcal{D}$ é uma derivação em $R[[x_1,\ldots,x_n]]$, então existem séries formais u_1 , $\ldots,u_n$ de $R[[x_1,\ldots,x_n]]$, tais que, $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

§12 - *Extensões jacobianas de Ideais*

Seja $I \subset m_{(n)}$ um ideal e s um inteiro positivo.

A *extensão s-jacobiana de* I, é definida como sendo o ideal $I + I'$, onde o I' é o ideal gerado pelos determinantes das sub-matrizes $s \times s$ da matriz $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i})$, com $f_j \in I$.

notação: $\Delta_s I = I + I'$.

Propriedades :

$I, I_1, I_2 \subset m_{(n)}$, ideais

(1) $\Delta_m I = I$ se $m > n$.

(2) $I = \Delta_{n+1} I \subset \Delta_n I \subset \Delta_{n-1} I \subset \ldots \subset \Delta_1 I \subset \Delta_o I = A_n$.

(3) $\Delta_1 (I_1 + I_2) = \Delta_1 I_1 + \Delta_1 I_2$.

(4) $\Delta_1 (I_1 \cdot I_2) \subseteq I_1 (\Delta_1 I_2) + I_2 (\Delta_1 I_1)$

(5) Se $I_1 \subset I_2$, então $\Delta_i I_1 \subset \Delta_i I_2$, $i \in N$.

(6) Se $f_1, \ldots, f_p$ são geradores de I, então $\Delta_s I = I + I'$, onde I' é o ideal gerado pelos determinantes das sub-matrizes $s \times s$, da matriz $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i})$, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$.

Observemos que na propriedade (4), pode ocorrer inclusão estrita. Para tal, basta considerarmos:

$$A_4 = R[[x_1, x_2, x_3, x_4]]; \quad I_1 = \langle x_1 + x_2 x_3 \rangle \quad e \quad I_2 = \langle x_2 + x_4^2 \rangle.$$

§13 - *Sistemas de coordenadas de* $R[[x_1, \ldots, x_n]]$

Sejam $y_1, \ldots, y_n \in m_{(n)}$.

Instituto de Ciências Matemáticas
Biblioteca
São Carlos

Diremos que $y_1,\ldots,y_n$, constitui um *sistema de coordenadas* de $A_n = R[[x_1,\ldots,x_n]]$, se eles gerarem $m_{(n)}$.

Portanto, $y_1,\ldots,y_n \in m_{(n)}$ é um sistema de coordenadas de A_n , se e somente se, $\tilde{y}_{11},\ldots,\tilde{y}_{n1}$ constitui uma base do espaço vetorial real $\dfrac{m_{(n)}}{m^2_{(n)}}$.

§14 - *Posto e nulidade (Corank) de um ideal* $I \subset m_{(n)}$

Seja $I \subset m_{(n)}$, um ideal. Definimos como *posto do ideal* I , e denotamos por $\mathrm{rk}\, I$, à dimensão real do espaço vetorial real $\dfrac{I + m^2_{(n)}}{m^2_{(n)}}$. Definimos *nulidade de* I , como sendo o número $n - \mathrm{rk}\, I$.

Portanto, $\mathrm{rk}\ I = \dim_R \dfrac{I + m^2_{(n)}}{m^2_{(n)}}$ e nulidade $I = \mathrm{kr}\ I = n - \mathrm{rk}\ I$.

Observemos que os elementos de I , com partes lineares linearmente independentes, não necessariamente geram I . Para vermos isto, basta considerarmos $A_2 = R[[x_1,x_2]]$, $I = \langle x_1,x_2^2\rangle$. Neste caso, $\mathrm{rk}\ I = 1$, e, $I \neq \langle x_1\rangle$.

Se $I \subset m_{(n)}$, é óbvio que $\mathrm{rk}\ I \leq n$.

Lema I-14 :

Seja $I \subset m_{(n)}$, ideal.

Se $\mathrm{rk}\ I = r$, então $\Delta_r I = A_n$.

Proposição I-15 :

Seja $I \subset m_{(n)}$, ideal.

Então, $\Delta_s I \subset m_{(n)} \iff \text{rk } I < s$.

As demonstrações dos resultados acima, são imediatas.

Seja $I \subset m_{(n)}$, um ideal, com $\text{rk } I = r$. Então temos:

$$I = \Delta_{n+1} I \subset \Delta_n I \subset \Delta_{n-1} I \subset \ldots \subset \Delta_{r+2} I \subset \Delta_{r+1} I \subset m_{(n)} \subset \Delta_r I = A_n .$$

§15 - *Operador* δ

Seja $I \subset m_{(n)}$, um ideal, com $\text{rk } I = r$. Então, definimos como *extensão crítica de* I , e denotamos por δI , ao ideal $\Delta_{r+1} I$. Portanto, $\delta I = \Delta_{r+1} I$.

§16 - *Símbolo de Boardman de um ideal* $I \subset m_{(n)}$

Seja $I \subset m_{(n)}$ um ideal. Consideremos a sequência $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots)$, onde $i_1 = \text{kr } I$, $i_2 = \text{kr } \delta I, \ldots$, $i_k = \text{kr } \delta^{k-1} I, \ldots$.

Definimos como *símbolo de Boardman* do ideal I , à sequência $I = (i_1, i_2, \ldots)$. Denotemos $I = I(I)$.

Propriedades :

(1) $n \geq i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq 0$

(2) $I_1, I_2, I_3 \subset m_{(n)}$, ideais, com $I_1 \subset I_2 \subset I_3$.

Se $I(I_1) = I(I_3)$, então, $I(I_1) = I(I_2) = I(I_3)$

(3) $I_1, I_2 \subset m_{(n)}$, ideais, com $I_2 \subset I_1$ e $I(I_1) = I(I_2)$.

Então, nada garante que $I_1 = I_2$.

As verificações de (1) e (2), são imediatas. Quanto à propriedade (3), basta tomarmos em $A_6 = R[[x_1,\ldots,x_6]]$, os ideais $I_1 = \langle x_1\rangle + \langle x_2,x_3\rangle^2 + \langle x_4,x_5,x_6\rangle^3$ e $I_2 = \langle x_1, x_2x_3, x_4x_5x_6\rangle$.

§17 - *Álgebra das séries truncadas*

Dado $r = 0, 1, \ldots,$ seja $A_n(r) = \dfrac{A_n}{m_{(n)}^{r+1}}$. Se $\psi: A_n \to A_n$ é um automorfismo, então $\psi(m_{(n)}^s) = m_{(n)}^s$. Portanto, $A_n(r)$ independe do sistema de coordenadas considerado. Segue ainda, que $A_n(0) \simeq R$ e $A_n(r)$ é uma R-álgebra.

Sejam $\pi_r: A_n \to A_n(r)$ e $\pi_{r\ell}: A_n(\ell) \to A_n(r)$, $\ell \geq r$, as projeções canônicas.

Proposição I-16 :

Seja $I \subsetneq A_n(r)$, um ideal. Então, o símbolo de Boardman de $\pi_r^{-1} I$, é da forma $(i_1,\ldots,i_r,0,\ldots)$.

Baseado nesta proposição, definimos como símbolo de Boardman de I, à sequência $(i_1,\ldots,i_r)$, e denotamos por $I_r(I) = (i_1,\ldots,i_r)$.

Proposição I-17

Seja $I \subset m_{(n)}$ um ideal, com $I(I) = (i_1,i_2,\ldots)$.

Então, $I_r(\pi_r I) = (i_1,\ldots,i_r)$.

Proposição I-18

Seja $I \subsetneq A_n(\ell)$, um ideal, $(\ell \geq r)$, com $I_\ell(I) = (i_1,\ldots,i_r,\ldots,i_\ell)$.

Então, $I_r(\pi_{r\ell} I) = (i_1,\ldots,i_r)$.

§18 - *Símbolo de Boardman de um ideal* $I \subsetneq C_o(R^n)$

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, isto é, $f \in F$, onde $f = (f_1,\ldots,f_p)$. Denotemos por $\langle f\rangle = \langle f_1,\ldots,f_p\rangle$, o ideal gerado por $f_1,\ldots,f_p$, em $C_o(R^n)$.

Sejam: $f_1 = f_1^1 + f_1^2 + \ldots + f_1^r + \overline{f}_1^r$, ..., $f_p = f_p^1 + f_p^2 + \ldots + f_p^r + \overline{f}_p^r$, onde f_i^s é a parte homogênea de f_i, de grau s, em $x_1,\ldots,x_n$, e, $\overline{f}_i^r \in m_n^{r+1}$ $(i = 1,\ldots,p$; $s = 1,\ldots,r)$.

Como $A_n(r)$ pode ser considerado como o conjunto dos polinômios em $x_1,\ldots,x_n$, com coeficientes reais, de grau $\leq r$, então, $\langle f_1^1 + \ldots + f_1^r, \ldots, f_p^1 + \ldots + f_p^r\rangle$ pode ser considerado como um ideal em $A_n(r)$.

notação: $\langle f\rangle_r = \langle f_1^1 + \ldots + f_1^r, \ldots, f_p^1 + \ldots f_p^r\rangle . A_n(r)$.

Definimos como *símbolo de Boardman de ordem* r de $\langle f\rangle$, ao símbolo de Boardman de $\langle f\rangle_r$ em $A_n(r)$.

notação: $I_r(\langle f\rangle) = I(\langle f\rangle_r)$

Lema I-19 :

Dado $f \in F$, existe $r_o \in N$ tal que, para $r' \geq r_o$,

tem-se $i_{r'} = i_{r_o}$ em $I_{r'}(\langle f\rangle)$.

Baseado neste lema, dada $f \in F$, definimos como *símbolo de Boardman do ideal* $\langle f\rangle$ de $C_o(R^n)$, à sequência $(i_1,\ldots,i_{r_o}, i_{r_o}, i_{r_o}, \ldots)$, à qual *denotaremos por* I_f , isto é, $I_f = (i_1,\ldots,i_{r_o}, i_{r_o}, \ldots)$.

§19 - *Considerações finais*

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, $rk\langle f\rangle = r$.

Então, existem $\phi \in R$, $\Psi \in L$, tal que a expressão de um representante de f é dado por:

$\Psi f \phi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_r,g_{r+1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_p(x_1,\ldots,x_n))$,

onde $g_i \in m_n^2$, $i = r+1,\ldots,p$.

Por outro lado, se f é k-det G , onde $G = R,L,A,K$, então existe $H \in G$, tal que, $H * (\Psi \circ f \circ \phi)(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n, h_{r+1},\ldots,h_p)$, onde $h_i = h_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = r+1,\ldots,p$, são polinômios de grau $\leq k$, com coeficientes reais, e são elementos de m_n^2 .

Como, f é k-det $G \iff \Psi \circ f \circ \phi$ é k-det $G \iff H * (\Psi \circ f \circ \phi)$ é k-det G , $H \in G$, segue que:

Se f é k-det G e $rk\langle f\rangle = r$, então podemos considerar $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_r, f_{r+1},\ldots,f_p)$, onde $f_j = f_j(x_1,\ldots,x_n) \in m_n^2$ e f_j são polinômios com coeficientes reais, do grau $\leq k$, $(j = r+1,\ldots,p)$.

CAPÍTULO II

RELACIONAMENTOS ENTRE DETERMINAÇÃO FINITA DE UM GERME, SEU POSTO E AS DIMENSÕES DOS ESPAÇOS

§1 - *Preliminares*

Com o intuito de facilitar a leitura deste trabalho, convencionemos como:

$\rho_m(\ell) = \binom{m+\ell-1}{\ell}$, o número de coeficientes de um polinômio homogêneo genérico, do grau ℓ, em m indeterminadas;

n , a dimensão do espaço-domínio;

p , a dimensão do espaço contra-domínio;

r , o posto do ideal $\langle f \rangle$;

k , o grau de determinação do germe;

$i_1 = (n-r)$, o primeiro índice de Boardman do ideal $\langle f \rangle$, e,

$j_1 = (p-r)$, o primeiro índice de Thom do ideal $\langle f \rangle$.

Se g é um polinômio, então escreveremos $g = g^0 + \ldots + g^s$, onde g^0 é o termo constante, e $g^i (i \geq 1)$ é a parte homogênea de grau i . Logo, se $g(0) = 0$ e $g \not\equiv 0$, então $g = g^t + g^{t+1} + \ldots + g^s$.

Vamos agora, estabelecer algumas relações entre os ele

mentos n, p, r, k, i_1 é j_1 .

§2 - *Estudo do grupo* K

Teorema II-1 :

Dados $r \geq 0$, $k \geq 2$, $p > 0$, com $p > r+k+1$, existe $\Theta_K(r,k,p)$, tal que, todo $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle \leq r$ e $n > \Theta_K(r,k,p)$, não é k-det K .

Prova :

Suponhamos $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$, k-det K. Por (I-5 e I-§18), segue que

$$m_n^{k+1}\theta(f) \quad tf(m_n B) + \langle x_1,\ldots,x_r, f_{r+1},\ldots,f_p\rangle \cdot \theta(f) \quad ,$$

onde $f_j = f_j^2 + \ldots + f_j^k$, $j = r+1,\ldots,p$.

Portanto, dados $u_1,\ldots,u_p \in m_n^{k+1}$, existem $\xi_1,\ldots,\xi_n \in m_n$ e $\psi_{ij} \in C_o(R^n)$, com $i,j = 1,\ldots,p$, tais que

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \sum_{i=1}^{r} x_i\psi_{1i} + \sum_{i=r+1}^{p} f_i\psi_{1i} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_r = \xi_r + \sum_{i=1}^{r} x_i\psi_{ri} + \sum_{i=r+1}^{p} f_i\psi_{ri} \\ u_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i}\xi_i + \sum_{i=r+1}^{p} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i}\xi_i + \sum_{i=1}^{r} x_i\psi_{r+1,i} + \sum_{i=r+1}^{p} f_i\psi_{r+1,i} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_p = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}\xi_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}\xi_i + \sum_{i=1}^{r} x_i\psi_{pi} + \sum_{i=r+1}^{p} f_i\psi_{pi} \end{cases}$$

Tomando em particular, $u_1 \equiv \ldots \equiv u_r \equiv 0$ e $u_{r+1},\ldots,u_p$ polinômio homogêneo do grau $k+1$, em $x_1,\ldots,x_n$, teremos necessariamente, a existência de:

1. para $i = 1,\ldots,n$: $\xi_i = \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^k$
2. para $i,j = 1,\ldots,r$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^1 + \ldots + \psi_{ij}^{k-1}$
3. para $i \leq r,\ j \geq r+1$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^o + \ldots + \psi_{ij}^{k-2}$
4. para $i \geq r+1,\ j \leq r$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^k$
5. para $i,j \geq r+1$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^1 + \ldots + \psi_{ij}^{k-1}$

Exploremos o grau de liberdade dos ξ_i, $i = 1,\ldots,r$, em 2. e 3.

Logo,

$$(p-r)\rho_n(k+1) \leqslant (n-r)\left[\rho_n(k)+\ldots+\rho_n(2)\right] + r(p-r)\rho_n(k) +$$
$$+ (p-r)^2\left[\rho_n(k-1)+\ldots+\rho_n(1)\right] + r^2\left[\rho_n(k-1)+\ldots+\rho_n(1)\right] +$$
$$+ r(p-r)\left[\rho_n(k-2)+\ldots+\rho_n(1) + 1\right], \quad \text{onde:}$$

$(n-r)\left[\rho_n(k)+\ldots+\rho_n(2)\right]$ = número de coeficientes dos ξ_i, $i \geq r+1$;

$r(p-r)\rho_n(k)$ = número de coeficientes dos ψ_{ij}, $i \geq r+1$ e $j \leq r$;

$(p-r)^2\left[\rho_n(k-1)+\ldots+\rho_n(1) + 1\right]$ = número de coeficientes dos ψ_{ij}, $i,j \geq r+1$;

$r^2\left[\rho_n(k-1)+\ldots+\rho_n(1)\right]$ = número de coeficientes dos ψ_{ij}, $i,j \leq r$,

e $r(p-r)\left[\rho_n(k-2)+\ldots+\rho_n(1) + 1\right]$ = número de coeficientes dos ψ_{ij}, $i \leq r, j \geq r+1$.

Portanto, temos:

$$(p-r)\rho_n(k+1) - n\rho_n(k) \leq r(p-r-1)\rho_n(k) + (p^2-pr+r^2+n-r)\binom{n+k-1}{k-1} -$$

$$- \left[(n-r)(n+1) + p^2 - 2pr + 2r^2 + r(p-r)\rho_n(k-1)\right].$$

Desenvolvendo, teremos:

$$\frac{(p-r-k-1)}{(k+1)!} n^{k+1} + \left(\frac{k(p-r-k-1) - 2r(p-r-1)}{2k!} \right) n^k +$$

$$+ \alpha_{k-1}(p,r,k).n^{k-1} + \ldots + \alpha_o(p,r,k) \leq 0 .$$

Sendo $p > r+k+1$, então o coeficiente do termo dominante é positivo, acarretando que existe $\theta_K(r,k,p)$, tal que, para $n > \theta_K(r,k,p)$, a desigualdade ocorrerá em sentido contrário. Temos ainda mais, isto é, dados $r \geq 0$, $k \geq 2$ e $p > 0$, com $p > r+k+1$, é possível encontrarmos $\theta_K(r,k,p)$, com a propriedade:

"Para $n > \theta_K(r,k,p)$ e $r' \leq r$, a desigualdade ocorrerá em sentido contrário". Com isto, o teorema fica demonstrado.

Exemplo :

Seja $f: R^{r+1},0 \to R^p,0$, $p \geq r+1$, definido por $f(x_1,\ldots,x_{r+1}) = (x_1,\ldots,x_r, x_{r+1}^2, 0,\ldots,0)$. Como $m_{r+1}^2 \subset \langle x_1,\ldots,x_r, x_{r+1}^2 \rangle . C_o(R^{r+1})$, então, por (I-6) segue que f é 3-det K.

Portanto, dados $r \geq 0$, $k \geq 3$ e $p > r+k+1$, tem-se exemplo para o qual $\theta_K(r,k,p) \neq 0$.

Corolário 1 :

Dados $r = 0$, $k \geq 2$ e $p > k+1$, podemos tomar $\theta_K(0,k,p) = p(k+1) - (k+2)$

Prova :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, k-det K , com $rk\langle f\rangle = 0$ e $p > k+1$. Então, temos

$$p\rho_n(k+1) \leq n\rho_n(k) + (p^2+n)\binom{n+k-1}{k-1} - [n(n+1) + p^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\rho_n(k+1) \leq n\rho_n(k) + (p^2+n)\binom{n+k-1}{k-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p-k-1)n^2 + [pk - k(k+1)]n - k(k+1)p^2 \leq 0 .$$

Tomemos $\Psi(x) = (p-k-1)x^2 + [pk - k(k+1)]x - k(k+1)p^2 = (p-k-1)x(x+k) - k(k+1)p^2$; $p-k-1 > 0$.

Como $\Psi(0) < 0$ e, $\Psi((p-1)(k+1) \geq (k+1)[(p-1)(p(k+1)-1)-kp^2] = (k+1)[p^2 - (k+2)p + 1] > 0$, uma vez que $p > k+1$.

Portanto, se $\Psi(x) \leq 0$, então $x \leq p(k+1)-(k+2)$. Basta pois, tomarmos $\Theta_K(0,k,p) = p(k+1) - (k+2)$.

Corolário 2 :

Dados $k \geq 2$, $p > 0$, $j_1 \geq 0$, com $p \geq j_1 \geq k+2$, existe $n_o = n_o(k,p,j_1)$ tal que, para $n \geq n_o$, todo $f: R^n,0 \to R^p,0$ tendo primeiro índice de Thom $\geq j_1$, não é k-det K .

Teorema II-2 :

Dados $r \geq 0$, $k \geq 2$, $q \geq 0$, existe $\Psi_K(r,k,q)$ tal que, todo $f: R^{p+q},0 \to R^p,0$ com $rk\langle f\rangle \leq r$ e $p > \Psi_K(r,k,q)$, não é k-det K .

Prova :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$ k-det K , com $rk\langle f\rangle = r$.

Da demonstração do teorema II-1, segue que:

$$(p-r)\frac{(p+q+k)\ldots(p+q)}{(k+1)!} \leq (p+q)\frac{(p+q+k-1)\ldots(p+q)}{k!} +$$

$$+ r(p-r-1)\frac{(p+q+k-1)\ldots(p+q)}{k!} + [p^2+(1-r)p+r^2-r+q]\frac{(p+q+k-1)\ldots(p+q+1)}{(k-1)!} -$$

$$- \left[(p+q-r)(p+q+1) + p^2 - 2pr + 2r^2 + r(p-r)\frac{(p+q+k-2)\ldots(p+q)}{(k-1)!}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^{k+2} + \alpha_{k+1}(r,k,q)p^{k+1} + \ldots + \alpha_o(r,k,q) \leq 0 .$$

Logo, existe $\Psi_K(r,k,q)$ tal que, para $r' \leq r$ e $p > \Psi_K(r,k,q)$, a desigualdade ocorrerá em sentido contrário.

Exemplos :

1. Seja $f: R^3,0 \to R^2,0$ tal que, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2x_3)$. Como $m_3^2\Theta(f) \subset tf(m_3B) + \langle x_1,x_2.x_3\rangle\ \Theta(f)$, segue de (I-6) que f é 3-det K. Observemos pois que, para $r = 1$, $k \geq 3$ e $q = 1$, tem-se exemplo onde $\Psi_K(1,k,1) \neq 0$.

2. Seja $f: R^4,0 \to R^4,0$ definido por $f(x_1,\ldots,x_4) = (x_1,x_2,x_3^2,x_4^2)$. De $m_4^2\Theta(f) \subset tf(m_4B) + \langle x_1,x_2,x_3^2,x_4^2\rangle\ \Theta(f)$, segue que f é 3-det K.

   Portanto, no caso $q = 0$, $r = 2$ e $k \geq 3$, temos exemplo onde $\Psi_K(2,k,0) \neq 0$.

Observações : Como vimos, Θ_K e Ψ_K não são necessariamente nulas.

Corolário 1 :

Se $r = q = 0$, podemos tomar $\Psi_K(0,k,0) = 1 + k + k^2$.

Prova :

Seja $f: R^{p},0 \to R^{p},0$, k-det K , com $rk\langle f\rangle = 0$. Então, temos: $\rho_p(k+1) \leq \rho_p(k) + (p+1)\binom{p+k-1}{k-1} - (2p+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_p(k+1) \leq \rho_p(k) + (p+1)\binom{p+k-1}{k-1} \Leftrightarrow p^2-(1+k+k^2)p - k(k+1) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \leq 1+k+k^2$.

Observações : Se $k=2$, então $p \leq 6$ (III-6) .

Corolário 2 :

Se $r=0$, $q \geq 1$, podemos tomar $\Psi_K(0,k,q) = k+k^2$.

Prova :

Se $f: R^{p+q},0 \to R^{p},0$, $q \geq 1$, é k-det K,com $rk\langle f\rangle=0$, então $p^3+(2q-k^2-k-1)p^2 + (q^2-qk-2q-k^2-k)p - (k+1)(q^2+qk) \leq 0$.

Tomemos $\lambda(x) = x^2[x - (k^2+k+1-2q)] - (qk+2q+k^2+k-q^2)x - (k+1)(q^2+qk)$. Seja $x_\alpha = k^2+k+\alpha$. Então, $\lambda(x_\alpha) > 0$, se $\alpha \geq 1$ e $q \geq 1$. Portanto, basta tomarmos $\Psi_K(0,k,q) = k^2+k$ $(k \geq 2$, $q \geq 1)$.

Corolário 3 :

(i) se $r=0$, $q=2$, $k \geq 2$, podemos tomar $\Psi_K(0,k,2) = k^2+k-1$.

(ii) se $r=0$, $q=3$, $k=2$, podemos tomar $\Psi_K(0,k,3)=4$.

(iii) se $r=0$, $q=3$, $k \geq 3$, podemos tomar $\Psi_K(0,k,3) = k^2+k-3$.

Prova :

Do corolário 2, temos:

$$\lambda(x_\alpha) = (\alpha+2q-2)k^4 + (2\alpha+3q-4)k^3 + [q^2+(4\alpha-2)q + 2(\alpha^2-\alpha-1)]k^2 +$$
$$+ [3(\alpha-1)q + \alpha(2\alpha-3)]k + [(\alpha-1)q^2+2\alpha(\alpha-1)q + \alpha^2(\alpha-1)] \ ;$$

(i) se $q = 2$, $\alpha = 0$, temos $\lambda(x_0) > 0$ $(k \geq 2)$.

(ii) se $q = 3$, $\alpha = -1$, temos $\lambda(x_{-1}) > 0$ $(k \geq 2)$.

Podemos tomar $\Psi_K(0,k,3) = k^2+k-2$, logo , $\Psi_K(0,2,3) = 4$.

(iii) se $q = 3$, $\alpha = -2$, temos $\lambda(x_{-2}) > 0$ $(k \geq 3)$.

Portanto, podemos tomar $\Psi_K(0,k,3) = k^2+k-3$, se $k \geq 3$.

Observações:

Ressaltemos os resultados acima, da seguinte maneira:

1. $f: R^p,0 \to R^p,0$, k-det K, com $r = 0 \Rightarrow p \leq 1+k+k^2$.
2. $f: R^{p+q},0 \to R^p,0$, k-det K, $r = 0$, $q \geq 1 \Rightarrow p \leq k+k^2$.
3. $f: R^{p+2},0 \to R^p,0$, k-det K, $r = 0 \Rightarrow p \leq k^2+k-1$.
4. $f: R^{p+3},0 \to R^p,0$, 2-det K, $r = 0 \Rightarrow p \leq 4$.
5. $f: R^{p+3},0 \to R^p,0$, k-det K, $r = 0$, $k \geq 3 \Rightarrow p \leq k^2+k-3$.

Como podemos observar pelas técnicas aplicadas nas demonstrações, os resultados podem ser melhorados, variando os valores de k . Tal fato, comprovaremos no capítulo III.

Teorema II-3 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, k-det K , com $rk\langle f\rangle = r$ e

e $f = (x_1,\ldots,x_r, f_{r+1},\ldots,f_p)$, onde $f_{r+i} = f^t_{r+i}+\ldots+f^k_{r+i}$, $i = 1,\ldots,p-r$.

Então, temos:

$$(p-r)\rho_n(k+1) \leq (n-r)\left[\rho_n(k-t+2)+\ldots+\rho_n(2)\right]+ r(p-r)\rho_n(k) +$$

$$+ (p-r)^2\left[\rho_n(k-t+1)+\ldots+\rho_n(1)\right] + r^2\left[\rho_n(k-t+1)+\ldots+\rho_n(1)\right] +$$

$$+ r(p-r)\left[\rho_n(k-2t+2)+\ldots+1\right] .$$

Prova :

Aplicando o raciocínio do teorema II-1, teremos:

1. para $i \geq 1$: $\xi_i = \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^{k-t+2}$.

2. para $i,j \geq 1$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^1 + \ldots + \psi_{ij}^{k-t+1}$.

3. para $i \leq r$, $j \geq r+1$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^o + \ldots + \psi_{ij}^{k-2t+2}$.

4. para $i \geq r+1$, $j \leq r$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^k$.

5. para $i,j \geq r+1$: $\psi_{ij} = \psi_{ij}^1 + \ldots + \psi_{ij}^{k-t+1}$.

Exploremos o grau de liberdade dos ξ_i , $i = 1,\ldots,r$, em 2. e 3.

Desta forma, sendo:

$(n-r)\left[\rho_n(k-t+2)+\ldots+\rho_n(2)\right]$ = nº de coeficientes dos ξ_i , $i \geq r+1$;

$r(p-r)\rho_n(k)$ = nº de coeficientes dos ψ_{ij} , $i \geq r+1$, $j \leq r$;

$(p-r)^2\left[\rho_n(k-t+1)+\ldots+\rho_n(1)\right]$ = nº de coeficientes dos ψ_{ij} , $i,j \geq r+1$;

$$r^2[\rho_n(k-t+1)+\ldots+\rho_n(1)] = \text{nº de coeficientes dos } \psi_{ij}, \quad i,j \leq r,$$

e,
$$r(p-r)[\rho_n(k-2t+2)+\ldots+1] = \text{nº de coeficientes dos } \psi_{ij}, \quad i \leq r, \quad j \geq r+1,$$

teremos,

$$(p-r)\rho_n(k+1) \leq (n-r)[\rho_n(k-t+2)+\ldots+\rho_n(2)]+r(p-r)\rho_n(k) +$$
$$+ (p-r)^2[\rho_n(k-t+1)+\ldots+\rho_n(1)] + r^2[\rho_n(k-t+1)+\ldots+\rho_n(1)] +$$
$$+ r(p-r)[\rho_n(k-2t+2)+\ldots+1] .$$

Observações :

(i) para $t = 2$, teremos o resultado encontrado na demonstração de II-1 .

(ii) Se $k \geq t > \frac{k}{2}+1$, $k \geq 3$, então, na desigualdade encontrada, não aparecerá o último fator.

Corolário :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, $n \geq 2$, $r = 0$ e $f_j = f_j^k$, $j = 1,\ldots,n$.

Se $k \geq 8$, então f não é k-det K .

Prova :

Se f é k-det K, então $n\rho_n(k+1) \leq n\rho_n(2) + n^2\rho_n(1)$.

Portanto, $(n+k)\ldots(n+2)3.2. \leq 9.(k+1)$!

Tomando em particular, $n = 2$, segue que, $k+2 \leq 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow k \leq 7$. Logo, se $k \geq 8$, então f não e k-det K .

Proposição II-4 :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, com $n \geq 2$ e $r < n$, $r \neq 0$ ..

Se f é k-det K, então $n \leq k^2 + (1+r)k + 2r$.

Prova :

Se $f: R^n,0 \to R^n,0$, é k-det K, $(n \geq 2, k \geq 2)$, então temos:

$$(n-r)\frac{(n+k)\ldots n}{(k+1)!} \leq n\frac{(n+k-1)\ldots n}{k!} + r(n-r-1)\frac{(n+k-1)\ldots n}{k!} +$$

$$+ \left[n^2 + (1-r)n + r(r-1)\right]\frac{(n+k-1)\ldots(n+1)}{(k-1)!} - r(n-r)\frac{(n+k-2)\ldots n}{(k-1)!} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (n-r)\frac{(n+k)(n+k-1)n}{(k+1)!} \leq \frac{(n+k-1)n^2}{k!} + r(n-r-1)\frac{(n+k-1)n}{k!} +$$

$$+ \left[n^2 + (1-r)n + r(r-1)\right]\frac{(n+k-1)}{(k-1)!} - \frac{r(n-r)n}{(k-1)!}.$$ Sendo $n,k \geq 2$,

segue que $n+k-1 \leq nk$. Logo, $-\frac{r(n-r)n}{(k-1)!} \leq -\frac{r(n-r)(n+k-1)}{k!}$.

Portanto, $(n-r)(n^2+kn) \leq n^2(k+1) + r(n-r-1)n(k+1) +$

$$+ \left[n^2+(1-r)n+r(r-1)\right]k(k+1) - r(n-r)(k+1) \Longleftrightarrow n^3-(k^2+rk+2r+k+1)n^2 +$$

$$+ \left[(r-1)k^2 + (r^2+2r-1)k + (r^2+2r)\right]n - r(r-1)k(k+1) \leq 0.$$

Concluimos então, que se $n \geq k^2 + rk + 2r + k + 1$, a desigualdade ocorrerá em sentido contrário, pois, $r \neq 0$.

Logo, se $f: R^n,0 \to R^n,0$ é k-det K, com $n,k \geq 2$, $rk\langle f\rangle = r \neq 0$, $r < n$, então, $n \leq k^2 + (1+r)k + 2r$.

§3 - *Estudo do grupo* R

Neste parágrafo, mostraremos que os únicos germes $f: R^n,0 \to R^p,0$ $p \geq 2$, finitamente determinados R, são os

germes de submersão e difeomorfismo.

Portanto, nestas condições apenas o 1-jato é suficiente para dizer se o germe é finitamente determinado R .

Proposição II-5 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$.

Se $n < p$, então f não é finitamente determinado com relação ao grupo R .

Prova :

Vamos registrar duas demonstrações:

(i) caso $n = 1$.

(ii) caso $n \geq 1$, isto em virtude de aplicarmos técnicas diferentes, embora (ii) englobe (i).

(i) $n = 1$, $p \geq 2$.

Se $rk\langle f\rangle = 1$, então existe $\psi: R^p,0 \to R^p,0$, germe de difeomorfismo, tal que, $\psi f(x) = (x,0,\ldots,0)$. Como, f é finitamente determinado, se e somente se, ψf for,então segue que f não é k-det R, qualquer que seja $k \geq 1$.

Se $rk\langle f\rangle = 0$, e f é k-det R, então podemos tomar $f = (f_1,\ldots,f_p)$, $f_i = f_i^2 + \ldots + f_i^k$, $i = 1,\ldots,p$. Supomos $f_i \not\equiv 0$, $(i = 1,\ldots,p)$, pois, do contrário, teríamos a não determinação finita de f .

Logo, $f_i'(x) = x^{s_i} . h_i(x)$, onde $h_i(0) \neq 0$ $(i \geq 1)$.

Sendo f k-det R, segue que, dados $u_1,\ldots,u_p \in m_1^{k+1}$, existe $\xi \in m_1$, tal que:

$$\begin{cases} u_1(x) = x^{s_1} . h_1(x).\xi(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_p(x) = x^{s_p} . h_p(x).\xi(x) \end{cases}$$

Como $p \geq 2$, tomemos $u_1 \equiv 0$ e $u_2 = x^{k+1}$. Portanto, $x^S.H(x).\xi(x)^p \equiv 0$, onde $S = \sum_{i=1}^{p} s_i$ e $H(x) = \prod_{i=1}^{p} h_i(x)$.

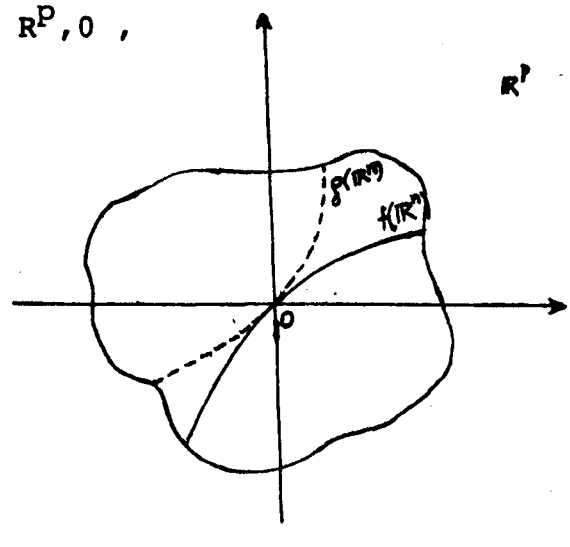
De $H(0) \neq 0$, segue que $x^S.\xi(x) \equiv 0$, e, portanto, $\xi(x) \equiv 0$. Mas isto contraria a identidade $x^{k+1}=x^{s_2}.h_2(x).\xi(x)$.

Concluimos portanto, que f não é finitamente determinado R .

(ii) $n \geq 2$ $(n < p)$.

Sendo $n < p$, e $f \in C^\infty$, segue que $f(R^n)$ tem medida nula em R^p, e portanto, $R^p - f(R^n)$ é denso em R^p. (Estamos tratando de germes de conjuntos).

Logo, existe $g: R^n,0 \to R^p,0$, tal que, $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, $\forall k \in N$, e no entanto, para todo $\psi \in R$, $f\psi(R^n) \neq$ $\neq g(R^n)$.



Portanto, f não é finitamente determinado com relação ao grupo R .

Vamos agora, estabelecer resultados aplicando essencialmente o teorema I-12 .

Teorema II-6 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n \geq p \geq 2$, e $rk\langle f\rangle = r < p$, $r \neq 0$.

Então, f não é finitamente determinado R .

Prova :

Suponhamos f k-det R . Então, podemos tomar $f = (x_1,\ldots,x_r, f_{r+1},\ldots,f_p)$, onde $f_j = f_j^2 + \ldots + f_j^k$, $j \geq r+1$.

Afirmamos que $m_n^{k+1} \subset \langle \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_n} \rangle . m_n$.

De fato. Sendo k-det R, temos $m_n^{k+1}\theta(f) \subset tf(m_n B)$. Portanto, dados $u_1,\ldots,u_p \in m_n^{k+1}$, existem $\xi_1,\ldots,\xi_p \in m_n$, tais que:

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 \\ \cdots \\ u_r = \xi_r \\ u_{r+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i} \xi_i \\ \cdots \\ u_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \xi_i \end{cases}$$

Tomando em particular, $u_1 \equiv \ldots \equiv u_r \equiv 0$, segue a nossa afirmação, isto é, $m_n^{k+1} \subset \langle \frac{f_{r+1}}{x_{r+1}}, \ldots, \frac{f_{r+1}}{x_n} \rangle . m_n$.

Consideremos $g: R^n,0 \to R^{n-r},0$, definida por $g = (\frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_n})$.

Como $n > n-r$ e $r \neq n$, temos que

$$\dim_R \frac{C_o(R^n)}{\langle \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_n} \rangle C_o(R^n)} = \dim_R \frac{C_o(R^n)}{\langle g_1, \ldots, g_{n-r} \rangle . C_o(R^n)} = \infty ,$$

onde $g_1 = \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}}, \ldots, g_{n-r} = \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_n}$ e $g_i(0) = 0$, $i \geq 1$.

Portanto, não existe $s \in N$, tal que, $m_n^s \subset \langle g_1, \ldots, g_{n-r} \rangle . C_o(R^n)$, o que é contra nossa afirmação.

Logo, f não é finitamente determinado $\mathcal{R}$.

Corolário 1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n > p \geq 2$ e $rk\langle f \rangle = r \neq 0$.

Então, f é finitamente determinado $\mathcal{R}$, se e somente se, f é germe de submersão.

Corolário 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, com $n \geq 2$ e $rk\langle f \rangle = r \neq 0$.

Então, f é finitamente determinado $\mathcal{R}$, se e somente se, f é germe de difeomorfismo.

Proposição II-7 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $p \geq 2$ e $rk\langle f \rangle = 0$.

Então, f não é finitamente determinado $\mathcal{R}$.

Prova :

(a) Suponhamos $p = 2$.

Se f é k-det $\mathcal{R}$, então temos $m_n^{k+1}\Theta(f) \subset tf(B)$.

Portanto, $\dim_R \dfrac{\theta(f)}{tf(B)} < +\infty$.

Como $\theta(f) = C_o(R^n) \times C_o(R^n)$ é

$$tf(B) = \{tf(\xi) : \xi \in B\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} : \xi_1, \ldots, \xi_n \in C_o(R^n) \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \xi_1 + \ldots + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \xi_n : \xi_1, \ldots, \xi_n \in C_o(R^n) \right\} =$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right) \right\rangle . C_o(R^n) .$$

Logo,

$$\dim_R \frac{\theta(f)}{tf(B)} < +\infty \iff \dim_R \frac{C_o(R^n) \times C_o(R^n)}{\left\langle \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right) \right\rangle . C_o(R^n)} < +\infty ,$$

o que é um absurdo pois, $f \in m_n^2$, e portanto, elementos de $C_o(R^n) \times C_o(R^n)$ da forma $(1,h)$ e $(h,1)$, com $h \in C_o(R^n)$, são representantes não nulos de elementos de $\dfrac{\theta(f)}{tf(B)}$.

(b) Seja $p \geq 2$.

Se $f = (f_1, \ldots, f_p)$ é k-det R , então , tomando $g: R^n, 0 \to R^2, 0$, com $g = (f_1, f_2)$, teremos que g é finitamente determinado R , com $g \in m_n^2$. Mas isto é contra (a).

Portanto, f não é finitamente determinado R .

Corolário 1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $p \geq 2$.

Então, f é finitamente determinado $\mathcal{R}$, se e somente se, f é germe de submersão ou difeomorfismo.

Corolário 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $p \geq 2$.

Então, f é finitamente determinado $\mathcal{R}$, se e somente se, f é 1-determinada $\mathcal{R}$.

Prova : ver corolário de III-3.

Observações:

Seja $f: R^n,0 \to R,0$.

(i) se $rk\langle f\rangle = 1$, então f é germe de submersão, e portanto, é 1-det $\mathcal{R}$.

(ii) se $rk\langle f\rangle = 0$, nada podemos afirmar pois:

1. Dado $k \geq 2$, existe $g: R^n,0 \to R,0$, tal que $rk\langle g\rangle = 0$, e g é k-det $\mathcal{R}$.

   Para tal, basta tomarmos $g(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^k$.

   Como $m_n^{k-1} \subset \langle x_1,\ldots,x_{n-1}, x_n^{k-1}\rangle . C_o(R^n)$, e portanto, $m_n^k \subset \langle x_1,\ldots,x_{n-1}, x_n^{k-1}\rangle . m_n$, segue de (I-7), que g é k-det $\mathcal{R}$.

2. $f: R^n,0 \to R,0$, $n \geq 2$, definido por $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2$, não é finitamente determinado $\mathcal{R}$.

§4 - *Estudo do grupo* $\mathcal{C}$

Teorema II-8

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n > p$.

Então, f não é finitamente determinado $\mathcal{C}$.

Prova :

Suponhamos f k-det $\mathcal{C}$. Então, $m_n^{k+1}\theta(f) \subset f^*m_p.\theta(f)$.

Portanto, $m_n^{k+1} \subset \langle f_1,\ldots,f_p\rangle \cdot C_o(R^n)$ onde $f = (f_1,\ldots,f_p)$. Segue pois, que $\dim_R \dfrac{C_o(R^n)}{\langle f_1,\ldots,f_p\rangle} < \infty$, que é um absurdo, uma vez que, $f(0) = 0$ e $n > p$.

Logo, se $f: R^n,0 \to R^p,0$ é finitamente determinada $\mathcal{C}$, teremos necessariamente, $n \leq p$.

Exemplo 1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n \leq p$, definido por $f = (x_1,\ldots,x_r, x_{r+1}^2,\ldots,x_n^2, 0,\ldots,0)$.

Portanto, existe $\ell \in N$, tal que,

$m_n^\ell\theta(f) \subset \langle x_1,\ldots,x_r, x_{r+1}^2,\ldots,x_n^2\rangle \cdot \theta(f)$.

Logo,

$m_n^\ell\theta(f) \subset f^*m_p.\theta(f) \Longleftrightarrow \dim_R \dfrac{\theta(f)}{f^*m_p.\theta(f)} < \infty \Longleftrightarrow d(f,\mathcal{C}) < \infty \Longleftrightarrow$
f é finitamente determinado $\mathcal{C}$.

Concluímos pois, que, dado $r \geq 0$, (r inteiro), existem n,p e $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n \leq p$ e $rk\langle f\rangle = r$, tal que $d(f,\mathcal{C}) < \infty$.

Exemplo 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n > p$, definido por $f = (x_1,\ldots,x_p)$.

Como, qualquer que seja ℓ , inteiro positivo, temos que $x_{p+1}^{\ell} \notin \langle x_1,\ldots,x_p\rangle\ C_o(R^n)$, então, concluimos que $d(f,C) = \infty$, isto é, f não é finitamente determinado C.

Observação: Se $n < p$, então f é C-det $\Longleftrightarrow$ f é K-det.
(Ver Mather IV)

§5 - *Estudo do grupo A*

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, k-det A , com $rk\langle f\rangle = r$. Podemos supor por (I-§18) que $f = (x_1,\ldots,x_r, f_{r+1},\ldots,f_p)$, onde $f_j = f_j^2 + \ldots + f_j^k$, $j \geq r+1$.

Logo, dados $u_1,\ldots,u_p \in m_n^{k+1}$, existem $\xi_1,\ldots,\xi_n \in m_n$ e $\eta_1,\ldots,\eta_p \in m_p$, tais que:

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \eta_1 \circ f \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_r = \xi_r + \eta_r \circ f \\ u_j = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\xi_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\xi_i + \eta_j \circ f , \quad j \geq r+1 \end{cases}$$

Tomando $u_1 \equiv \ldots \equiv u_r \equiv 0$ e $u_{r+1},\ldots,u_p \in m_n^{k+1}$, segue necessariamente, a existência de:

1. $\xi_i = \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^k$, $i \geq 1$.
2. $\eta_i = \bar{\eta}_i^1 + \ldots + \bar{\eta}_i^k$, $i \leq r$, onde $\bar{\eta}_i^{\alpha}$ é a parte

homogênea de η_i , em $y_1,\ldots,y_p$, do grau α , tal que $f^*\eta_i = -\xi_i\,(i \leq r)$.

3. $\eta_i = \bar{\eta}_i^2 + \ldots + \bar{\eta}_i^{k+1}$, $i \geq r+1$.

Observemos que podemos explorar a liberdade dos $\xi_i(i \leq r)$, em 2., mas, não a faremos.

Seja $m \in N$. Indiquemos por $\hat{m}$, os monômios de η_i , que envolvem exatamente $\underline{m}$ dos y_j , $j \leq r$. Por exemplo: em η_p , temos $\eta_p = \bar{\eta}_p^2 + \ldots + \bar{\eta}_p^{k+1}$ (se $p > r$) , onde $\bar{\eta}_p^2$ envolve $\hat{1}$, isto é, $\bar{\eta}_p^2(y_1,\ldots,y_p) = \sum_{\substack{i \leq r \\ j \geq r+1}} \alpha_{ij} y_i y_j$ + eventualmente monômios do 2º grau, que não envolverão $y_i\,(i \leq r)$, dependendo ser k par ou ímpar.

Analisemos os η_i , $(i \geq r+1)$, construindo duas tabelas, em termos dos $\hat{m}$:

(a) caso: k - ímpar

(b) caso: k - par .

(a) k-ímpar $(k \geq 3)$; $\eta_i = \bar{\eta}_i^2 + \ldots + \bar{\eta}_i^{k+1}$.

α							
2	:	$\hat{1}$	$\hat{0}$				
3	:	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$			
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\frac{k+1}{2}$	:	$\widehat{\frac{k-1}{2}}$	$\widehat{\frac{k-3}{2}}$	. . . . .	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$
$\frac{k+3}{2}$	:	$\widehat{\frac{k+1}{2}}$	. . . . .	. . . . .	$\hat{3}$	$\hat{2}$	
$\frac{k+5}{2}$	:	$\widehat{\frac{k+3}{2}}$	. . . . .	. . . . .	$\hat{4}$		
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$k-1$	:	$\widehat{k-2}$	$\widehat{k-3}$				
k	:	$\widehat{k-1}$					
$k+1$	:	$\widehat{k+1}$					

(b) k-par $(k \geq 4)$; $\eta_i = \bar{\eta}_i^2 + \ldots + \bar{\eta}_i^{k+1}$.

α							
2	:	$\hat{1}$	$\hat{0}$				
3	:	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$			
. . . . .							
$\frac{k}{2}$	:	$\widehat{\frac{k-2}{2}}$	. . . . .		$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$
$\frac{k+2}{2}$	:	$\widehat{\frac{k}{2}}$	. . . . .		$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$
$\frac{k+4}{2}$	:	$\widehat{\frac{k+2}{2}}$	. . . . .		$\hat{4}$	$\hat{3}$	
. . . . .							
k-1	:	$\widehat{k-2}$	$\widehat{k-3}$				
k	:	$\widehat{k-1}$					
k+1	:	$\widehat{k+1}$					

(*Observações:* os casos $k = 1,2$, serão tratados em III)

Portanto, temos:

$$I_k = \rho_r(k+1)(p-r) + [\rho_r(k-1) + \ldots + \rho_r(1)](p-r) +$$

$$+[\rho_r(k-3)+\ldots+\rho_r(1)+1].\rho_{p-r}(2)+\ldots+[\rho_r(4)+\ldots+\rho_r(1)+1].\rho_{p-r}(\tfrac{k-3}{2}) +$$

$$+ [\rho_r(2) + \rho_r(1)+1].\rho_{p-r}(\tfrac{k-1}{2}) + \rho_{p-r}(\tfrac{k+1}{2}) = [\rho_r(k+1)-1].(p-r) +$$

$$+\binom{r+k-1}{k-1}.(p-r) + \binom{r+k-1}{k-3}.\rho_{p-r}(2) + \ldots + \binom{r+4}{4}.\rho_{p-r}(\tfrac{k-3}{2}) +$$

$$+\binom{r+2}{2}\rho_{p-r}(\tfrac{k-1}{2}) + \rho_{p-r}(\tfrac{k+1}{2})$$ = número de coeficientes dos η_i , $i \geq r+1$ e k-ímpar.

$$P_k = [\rho_r(k+1) + \rho_r(k-1) + \rho_r(k-2) + \ldots + \rho_r(1)](p-r) +$$

$$+[\rho_r(k-3)+\rho_r(k-4)+\ldots+\rho_r(1)+1].\rho_{p-r}(2)+[\rho_r(k-5)+\ldots+\rho_r(1)+1] \ .$$

$$.\ \rho_{p-3}(3)+\ldots+[\rho_r(3)+\rho_r(2)+\rho_r(1)+1].\rho_{p-r}(\tfrac{k-2}{2})+[\rho_r(1)+1].\rho_{p-r}(\tfrac{k}{2}) =$$

$$= [\rho_r(k+1)-1](p-r) + \binom{r+k-1}{k-1}.(p-r) + \binom{r+k-3}{k-3}.\rho_{p-r}(2)+\ldots+\binom{r+3}{3} \ .$$

$$.\ \rho_{p-r}(\tfrac{k-2}{2}) + (1+r)\rho_{p-r}(\tfrac{k}{2}) = \text{número de coeficientes dos } \eta_i \ ,$$

$i \geq r+1$ e k-par.

Para os ξ_i , $(i \geq 1)$, temos: $[\rho_n(k) + \ldots + \rho_n(2)]n =$

$= \binom{n+k}{k}.n - n(n+1) =$ número de coeficientes dos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Segue então, o:

Teorema II-9 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$.

Se f é k-det A , então:

$$(p-r)\rho_n(k+1) \leq n\left[\binom{n+k}{k} - (n+1)\right]+P_k \ , \text{ se } k \text{ é par.}$$

$$(p-r)\rho_n(k+1) \leq n\left[\binom{n+k}{k} - (n+1)\right]+I_k \ , \text{ se } k \text{ é ímpar.}$$

Corolário :

Dados $r \geq 0$, $k \geq 3$, $p > 0$, $p > r+k+1$, existe $\mu_A(p,r,k)$ tal que, todo $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle \leq r$ e $n > \mu_A(p,r,k)$, não é k-det A .

Exemplo 1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $n < p$ e $f = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$

Como $m_n\theta(f) \subset wf(A)$, segue que f é finitamente L determinada, e, portanto, é finitamente determinado A.

Exemplo 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, $n \geq 2$, tal que, $f=(x_1,\ldots,x_{n-1}, x_n^2)$.

Dado $u \in C_o(R^n)$, existem $\psi_1,\psi_2 \in C_o(R^n)$, tal que ,

$u = 1 . f^*\psi_1 + x_n.f^*\psi_2$ (ver [7]-*Teorema de Malgrange*).

Logo, dados $u_1,\ldots,u_n \in C_o(R^n)$, o sistema abaixo tem solução em $\xi_1,\ldots,\xi_n$, $\eta_1,\ldots,\eta_n$:

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \eta_1 \circ f \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{n-1} = \xi_{n-1} + \eta_{n-1} \circ f \\ u_n = x_n\xi_n + \eta_n \circ f \end{cases}$$

Portanto, f é finitamente determinado A .

Observações:

Todo germe $f: R^n,0 \to R^p,0$, estável, é finitamente determinado com relação ao grupo A , (é $(p+1)$-det A).

CAPÍTULO III

RESULTADOS RELACIONADOS COM A DETERMINAÇÃO FINITA, PARA VALORES PEQUENOS DAS VARIÁVEIS

§1 - *Caso* $k = 1$ *e grupo* K

Lema III-1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$.

Se f é 1-det K e $r < \min\{n,p\}$, então $n > p$.

Prova :

Se $n \leq p$, então podemos tomar $f = (x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0)$, uma vez que f é 1-det K . Sendo $r < n$, então , $m_n^\ell \not\subset \langle x_1,\ldots,x_r\rangle \cdot C_o(R^n)$, para todo inteiro $\ell \geq 1$. Isto contradiz o fato de f ser 1-det K . Logo, $n > p$.

Lema III-2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$.

Se $n > p > r$, então, f não é 1-det K .

Prova :

Isto é óbvio pois, $m_n^\ell \not\subset \langle x_1,\ldots,x_r\rangle \; C_o(R^n)$, para todo inteiro $\ell \geq 1$.

Utilizando estes dois lemas, temos a,

Proposição III-3 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$.

Então, f é 1-det K,,se e somente se, $r = \min\{n,p\}$.

Corolário :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$.

(i) Se $n < p$, então:

f 1-det $K \iff f$ 1-det $L \iff f$ é germe de imersão.

(ii) Se $n > p$, então:

f 1-det $K \iff f$ 1-det $R \iff f$ é germe de submersão.

(iii) Se $n = p$, então:

f 1-det $K \iff f$ é germe de difeomorfismo.

§2 - *Caso* $k = 2$ *e grupo* A

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$, 2-det A. Então, podemos tomar $f = (x_1,\ldots,x_r, f_{r+1},\ldots,f_p)$, com $f_j = f_j^2$, $j \geq r+1$.

De $m_n^3\Theta(f) \subset tf(m_nB) + wf(m_nA)$, segue que, dados $u_1,\ldots,u_p \in C_o(R^n)$, existem $\xi_1,\ldots,\xi_p \in C_o(R^n)$ e $\eta_1,\ldots,\eta_p \in C_o(R^p)$, tais que:

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 + \eta_1 \circ f \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_r = \xi_r + \eta_r \circ f \\ u_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i} \xi_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_i} \xi_i + \eta_{r+1} \circ f \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_p = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \xi_i + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \xi_i + \eta_p \circ f \end{cases}$$

Tomando $u_1 \equiv \ldots \equiv u_r \equiv 0$ e $u_{r+1},\ldots,u_p$, polinômios homogêneos em $x_1,\ldots,x_n$, do terceiro grau, teremos necessariamente:

1. $\xi_i = \xi_i^2$, $i \geq 1$

2. $\eta_i(y) = \eta_i^1(y_{r+1},\ldots,y_p) + \eta_i^2(y_1,\ldots,y_r)$, $i \leq r$

3. $\eta_i(y) = \bar{\eta}_i^2(y_1,\ldots y_p) + \eta_i^3(y_1,\ldots,y_r)$, $i \geq r+1$, onde, em $\bar{\eta}_i^2$, os monômios envolvidos são da forma $\alpha \cdot y_{j_1} y_{j_2}$, com $j_1 \leq r$, $j_2 \geq r+1$ e $\alpha \in R$.

Logo, segue que:

(*) $(p-r)\rho_n(3) \leq (n-r)\rho_n(2) + [r(p-r)+\rho_r(3)](p-r) + r[(p-r)+\rho_r(2)]$,

e

(**) $(p-r)\rho_n(3) \leq n\rho_n(2) + (p-r)[r(p-r) + \rho_r(3)]$, onde, em (*), foi explorado o grau de liberdade de $\xi_1,\ldots,\xi_r$.

Portanto, temos o:

Lema III-4 :

Se $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = r$, é 2-det A , então valem as desigualdades (*) e (**) .

Corolário 1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $r = 0$.

Se f é 2-det A , então $p = 1,2$. Se $p = 2$, então $n \geq 4$.

Escólio :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, com $r = 0$.

Se f é 2-det A , então $n = 1$.

Observações:

Seja $A_o = \bigcup_{r \geq 1} A \cdot x^r$. Então, $\{f: R,0 \to R,0\} - A_o$, é constituído dos germes $g: R,0 \to R,0$, não finitamente determinados com relação ao grupo A .

Corolário 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, com $rk\langle f\rangle = r$.

Se f é 2-det A , então $n \leq 1 + 3r$.

Prova :

(**) Vale $\Longleftrightarrow$ $n^4 - rn^3 - (1+9r)n^2 + r(r^2-9r+2)n + r^2(r^2-3r+2) \leq 0$.

Seja $\psi(x) = x^4 - rx^3 - (1+9r)x^2 + r(r^2-9r+2)x + r^2(r^2-3r+2)$, e seja $x_\alpha = 3r + \alpha$.

Portanto, $\psi(x_\alpha) > 0$, se $\alpha \geq 2$.

Então, $\psi(x) \leq 0$, temos necessariamente, $x \leq 1 + 3r$.

Concluímos que, se $f: R^n,0 \to R^n,0$ é 2-det A, então, $n \leq 1+3r$.

Lema III-5 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = 0$, $2 \leq n \leq p$ e, $f = (f_1,\ldots,f_p)$, onde $f_1,\ldots,f_p$ são homogêneos do segundo grau, em $x_1,\ldots,x_n$.

Então, f não é finitamente determinado com relação ao grupo A.

Prova :

Suponhamos f k-det A. Seja $k_o \geq k$, k_o-par. Logo, f é k_o-det A, e então, $m_n^{k_o+1}\,\theta(f) \subset tf(m_nB) + wf(m_pA)$.

Como f é par, então, $wf(m_pA)$ é constituído por germes de funções pares.

Segue então que, dados $u_1,\ldots,u_p$, polinômios homogêneos em $x_1,\ldots,x_n$, do grau k_o+1 (ímpar), existem $\xi_i = \xi_i^{k_o}$, $i \geq 1$, tal que:

$$u_j = \sum_{i \geq 1} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,\xi_i\,, \quad j \geq 1$$

Portanto, $p\rho_n(k_o+1) \leq n\rho_n(k_o)$, que é um absurdo, pois, $p \geq n$ e $\rho_n(k_o+1) > \rho_n(k_o)$.

Exemplo:

$f: R^n,0 \to R^p,0$, com $2 \leq n \leq p$, e $f = (x_1^2,\ldots,x_n^2, 0,\ldots,0)$, não é A-determinado, mas, é K-determinado.

§3 - *Caso* $k = 2$ *e grupo* K

Lema III-6 :

Seja $f: R^{p+q},0 \to R^p,0$, $q \geq 0$, com $rk\langle f\rangle = 0$.

Se f é 2-det K , então $p \leq 6$.

Prova :

Por hipótese, temos que $p\rho_n(3) \leq n\rho_n(2) + p^2 n$, considerando $f: R^n,0 \to R^p,0$.

Fazendo $n = p+q$, segue que:

$p^3 + (2q-6)p^2 + (q^2-3q-1)p - (3q^2+3q) \leq 0$, donde tem-se o resultado.

Corolário 1 : Nas condições do Lema acima, temos:

(i) se $p = 3$, então $q \leq 5$.

(ii) se $p = 4$, então $q \leq 1$.

(iii) se $p = 5,6$, então $q = 0$.

Corolário 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, com $rk\langle f\rangle = 0$ e $n > p$.

Se $p \geq 5$, então f não é 2-det K .

Lema III-7 :

Seja $f: R^n,0 \to R^n,0$, com $rk\langle f\rangle = 0$.

Se f é 2-det K , então $n \leq 3r+5$.

Prova :

Sendo f 2-det K, então, $(n-r)\rho_n(3) \leq \rho_n(1)[n^2+(1-r)n+r(r-1)] +$

$+ \rho_n(2)\left[(1+r)n - r(r+1)\right] + \left[-(1+r)n^2 + (r^2+2r)n - r^2\right]$, donde tiramos, $(3n^2-9n+6)r^2 + (-4n^3+9n^2-5n)r + (n^4-6n^3-n^2) \leq 0$.

Tomando $\psi(x)=(3n^2-9n+6)x^2+(-4n^3+9n^2-5n)x+(n^4-6n^3-n^2)$, se $n \geq 3$, teremos que, $\psi(x) \leq 0$ implica que $x \geq \frac{n-5}{3}$.

Portanto, temos o resultado.

CAPÍTULO IV

RELAÇÕES ENTRE DETERMINAÇÃO FINITA E SÍMBOLO DE BOARDMAN

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$ e seja I_f, o seu símbolo de Boardman. Denominamos *comprimento do símbolo de Boardman* de f, e denotamos por $||I_f||$, ao número de índices não nulos, mais um.

Nestas condições, se $||I_f|| = t$, então escreveremos simplesmente, $I_f = (i_1,\ldots,i_{t-1},0)$, onde $i_{t-1} \neq 0$.

Lema IV-1 :

Seja $I \subset m_{(n)}$, um ideal de A_n, com $m_{(n)}^{\ell+1} \subset I$, $\ell \geq 1$.

Se $\mathrm{rk} I = 0$, então $m_{(n)}^{\ell} \subset \delta I$.

Prova :

Como $m_{(n)}^{\ell+1} \subset I$, então $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} \in I$, quaisquer que sejam os inteiros $a_1,\ldots,a_n \geq 0$, com $a_1 + \ldots + a_n = \ell + 1$.

Sendo $\mathrm{rk} I = 0$, temos $\delta I = \Delta_1 I$, e portanto, quaisquer que sejam os inteiros $b_1,\ldots,b_n \geq 0$, com $b_1+\ldots+b_n = \ell$, tem-se $x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n} \in \Delta_1 I = \delta I$. Logo, $m_{(n)}^{\ell} \subset \delta I$.

Proposição IV-2 :

Seja $I \subset m_{(n)}$, um ideal de A_n, com $m_{(n)}^{\ell+1} \subset I$, $\ell \geq 1$.

Então, $\delta^{\ell} I = m_{(n)}$.

Prova :

Seja $\mathrm{rk} I = r$.

(a) Se $r = n$, então $I = m_{(n)}$, e portanto, $\delta^{\ell} I = m_{(n)}$.

(b) Suponhamos $0 < r < n$. Então, podemos supor a existência de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in I$, cujas partes lineares, são linearmente independentes sobre R , e,

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \mu_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_r = a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n + \mu_r \end{cases}, \quad \text{onde } \mu_1, \ldots, \mu_r \in m^2_{(n)},$$

$a_{ij} \in R$ e $\det(a_{ij}) \neq 0$ $(1 \leq i , j \leq r)$.

De $m^{\ell+1}_{(n)} \subset I$, segue que $x_{r+1}\, x_j^{\ell} \in I$, onde $j \geq r+1$.

Sendo $\mathrm{rk} I = r$, então $\delta I = \Delta_{r+1} I$. Portanto, temos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, x_j^{\ell} + \psi_j \in \delta I$, $(j \geq r+1)$, onde $\psi_j \in m^{\ell+1}_{(n)}$, bastando para tal, observarmos a matriz:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11}+\frac{\partial\mu_1}{\partial x_1} & a_{12}+\frac{\partial\mu_1}{\partial x_2}\cdots & a_{1r}+\frac{\partial\mu_1}{\partial x_r} & a_{1,r+1}+\frac{\partial\mu_1}{\partial x_{r+1}}\cdots & a_{1n}+\frac{\partial\mu_1}{\partial x_n} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{r1}+\frac{\partial\mu_r}{\partial x_1} & a_{r2}+\frac{\partial\mu_r}{\partial x_2}\cdots & a_{rr}+\frac{\partial\mu_r}{\partial x_r} & a_{r,r+1}+\frac{\partial\mu_r}{\partial x_{r+1}}\cdots & a_{rn}+\frac{\partial\mu_r}{\partial x_n} & \\
\hline
0 & 0 & 0 & (\ell+1)x^{\ell}_{r+1} & 0\ \dots\ 0 & \\
0 & 0 & 0 & x^{\ell}_{r+2} & 0\ \dots\ 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & x^{\ell}_{n} & 0\ \dots\ 0 &
\end{array}\right)
$$

Suponhamos agora que $\operatorname{rk}\delta I = s$. Então, existem $\lambda_{r+1},\dots,\lambda_s \in \delta I$, tais que, $\lambda_1,\dots,\lambda_r, \lambda_{r+1},\dots,\lambda_s$, têm as partes lineares, linearmente independentes. Suponhamos ainda que:

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1s}x_s + \dots + a'_{1n}x_n + \Psi_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_s = a'_{s1}x_1 + \dots + a'_{ss}x_s + \dots + a'_{sn}x_n + \Psi_s \quad ,
\end{cases}
$$

onde, $a'_{ij} \in R$, $\det(a'_{ij}) \neq 0$ $(1 \leq i,\ j \leq s)$ e $\Psi_1,\ldots,\Psi_s \in m^2_{(n)}$.

Temos $\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\ x^{\ell}_{s+1} + \psi_{s+1},\ldots,x^{\ell}_n + \psi_n \in \delta I$, onde $\psi_{s+1},\ldots,\psi_n \in m^{\ell+1}_{(n)}$.

Sendo $\operatorname{rk} \delta I = s$, então $\delta^2 I = \Delta_{s+1} \delta I$. Portanto, observando a matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a'_{11} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \cdots & a'_{1s} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_s} & a'_{1,s+1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_{s+1}} & \cdots & a'_{1n} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_n} \\
\cdots & & & \cdots & & \\
a'_{s1} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial x_1} & \cdots & a'_{ss} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial x_s} & a'_{s,s+1} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial x_{s+1}} & \cdots & a'_{sn} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial x_n} \\
\hline
\frac{\partial \psi_{s+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{s+1}}{\partial x_s} & \ell x^{\ell-1}_{s+1} + \frac{\partial \psi_{s+1}}{\partial x_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial \psi_{s+1}}{\partial x_n} \\
\cdots & & & \cdots & & \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_s} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_{s+1}} & \cdots & \ell x^{\ell-1}_n + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}
\end{array}\right)$$

veremos que $\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\ x^{\ell-1}_{s+1} + \beta_{s+1},\ldots,x^{\ell-1}_n + \beta_n \in \delta^2 I$, onde, $\beta_{s+1},\ldots,\beta_n \in m^{\ell}_{(n)}$.

Seguindo raciocínio análogo, teremos depois de um número t de passos que:

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_j,\ x^{\ell+1-t}_{j+1} + \theta_{j+1},\ldots,x^{\ell+1-t}_n + \theta_n \in \delta^t I, \text{ onde,}$$

$\theta_{j+1},\ldots,\theta_n \in m_{(n)}^{\ell+2-t}$ e, $\lambda_1,\ldots,\lambda_j$ têm as partes lineares em $x_1,\ldots,x_j$, linearmente independentes sobre R. Observe que, $r \leq s \leq \ldots \leq j$.

Fazendo $t = \ell$, teremos:

$\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\ x_{p+1} + \Omega_{p+1},\ldots,x_n + \Omega_n \in \delta^{\ell} I$, onde, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ têm as partes lineares em $x_1,\ldots,x_p$, linearmente independentes sobre R, com $\Omega_{p+1},\ldots,\Omega_n \in m_{(n)}^2$.

Logo, $\delta^{\ell} I = m_{(n)}$, pois, $\mathrm{rk}\,\delta^{\ell} I = n$ e $\delta^{\ell} I \subset m_{(n)}$ (ver I-13).

(c) Se $r = 0$, então $m_{(n)}^{\ell} \subset \delta I$. Se $\mathrm{rk}\,\delta I = 0$, então $m_{(n)}^{\ell-1} \subset \delta^2 I$.

Prosseguindo o raciocínio, teremos:

(1) $\mathrm{rk} I = \mathrm{rk}\,\delta I = \ldots = \mathrm{rk}\,\delta^{\ell-1} I = 0$, e, portanto, $m_{(n)} = \delta^{\ell} I$, ou

(2) Existe $s \leq \ell - 1$, tal que, $\mathrm{rk} I = \ldots = \mathrm{rk}\delta^{s-1} I = 0$ e $\mathrm{rk}\delta^{s} I \neq 0$. Neste caso, basta aplicar o caso (b).

Lema IV-3 :

Seja $f: R^n,0 \to R,0$, k-det G, onde $G = R, L, A, C$ ou K.

Então temos:

(i) $\mathrm{rk}\langle f\rangle = 1 \iff I_f = (n-1)$.

(ii) $\mathrm{rk}\langle f\rangle = 0 \Rightarrow ||I_f|| \leq k+2$.

Prova :

(i) Se $rk\langle f\rangle = 1$, então $\delta\langle f\rangle = \Delta_2\langle f\rangle = \langle f\rangle$. Logo, $\delta^{\ell}\langle f\rangle = \langle f\rangle$, para todo $\ell \geq 1$. Portanto, $I_f = (n-1)$. A recíproca é imediata.

(ii) Se f é k-det G, com $G = R, L, C, A, K$, então, f é k-det K. Portanto, $m_n^{k+1} \subset tf(m_nB) + f^*m_1\, C_o(R^n) = tf(m_nB) + \langle f\rangle . C_o(R^n)$.

Como $rk\langle f\rangle = 0$, então $\delta\langle f\rangle = \Delta_1\langle f\rangle = \langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle . C_o(R^n)$. Daí, segue que $m_n^{k+1} \subset \delta\langle f\rangle$. Por (IV-2), temos $\delta^{k+1}\langle f\rangle = m_n$. Logo, $I_f = (i_1, \ldots, i_{k+1}, 0)$, e portanto, $||I_f|| \leq k+2$.

No caso de $rk\langle f\rangle = 0$, podemos generalizar o lema anterior, através da:

Proposição IV-4 :

Seja, $f: R^n, 0 \to R^p, 0$, com $rk\langle f\rangle = 0$, k-det G, ($G = R, L, A, C$ ou K).

Então, $||I_f|| \leq k+2$.

Prova :

Por hipótese, f é k-det K. Logo, $m_n^{k+1}\theta(f) \subset tf(m_nB) + f^*m_p\theta(f)$.

Considerando $f = (f_1, \ldots, f_p)$, teremos $m_n^{k+1} \subset tf_1(m_nB) + \langle f_1, \ldots, f_p\rangle . C_o(R^n)$.

Como $rk\langle f\rangle = 0$, então, $m_n^{k+1} \subset tf_1(m_nB) + \langle f_1, \ldots, f_p\rangle . C_o(R^n) \subset \delta\langle f\rangle = \delta\langle f_1, \ldots, f_p\rangle = \langle f_1, \ldots, f_p; \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}; \ldots$

$\ldots;\frac{\partial f_p}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f_p}{\partial x_n} > . C_o(R^n)$.

Portanto, $m_n^{k+1} \subset \delta<f>$. Por (IV-2), $m_n = \delta^{k+1}<f>$, acarretando pois, que $||I_f|| \leq k+2$.

Observação: O mesmo resultado vale, para $r \neq 0$ e f não submersão.

Teorema IV-5 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$.

Então, $||I_f|| < \infty$, se e somente se, existem inteiros $\ell,s \geq 1$, tais que, $m_n^{\ell} \subset \delta^s<f>$.

Prova :

Se $||I_f|| = b < +\infty$, então, $m_n = \delta^{b-1}<f>$, se $b \geq 2$ (se $b=1$, então, $m_n = <f>$). Basta portanto, tomarmos $\ell = 1$ e $s=b$.

Por outro lado, se $m_n^{\ell} \subset \delta^s<f>$, então , por (IV-2) , $\delta^{\ell+s-1}<f> = m_n$, e portanto, $||I_f|| \leq \ell+s$.

Corolário 1 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$.

Se $||I_f|| = +\infty$, então não existe $g: R^n,0 \to R^q,0$, k-det G , com $rk<g> = 0$, tal que, para alguns inteiros n_o, $m_o \geq 1$, se tenha $\delta^{n_o}<g> = \delta^{m_o}<f>$.

Prova :

Suponhamos que exista $g: R^n,0 \to R^p,0$, k-det G , com

$rk\langle g\rangle = 0$ e $\delta^{n_o}\langle g\rangle = \delta^{m_o}\langle f\rangle$. Por (IV-4), segue que $||I_g|| \leq k+2$. Como $\delta^{k+1}\langle g\rangle = m_n$, segue que $\delta^{n_o+k+1}\langle g\rangle = m_n$. Sendo $\delta^{n_o}\langle g\rangle = \delta^{m_o}\langle f\rangle$ e $\delta^{n_o+k+1}\langle g\rangle = m_n$, então $\delta^{m_o+k+1}\langle f\rangle = m_n$. Nestas condições, temos $||I_f|| \leq m_o+k+2$, contra a hipótese.

Exemplo:

Seja $f: R^n,0 \to R,0$, $n \geq 2$, definido por $\sum_{i=1}^{n} x_i = f$. Como $n \geq 2$, então $||I_f|| = +\infty$. Logo, não existe $g: R^n,0 \to R^q,0$, com $rk\langle g\rangle = 0$, e, finitamente determinado K, tal que, $\delta^{\ell}\langle g\rangle = \delta^{s}\langle f\rangle$, para alguns inteiros ℓ e s.

Corolário 2 :

Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$.

Se $m_n^{\ell} \subset \delta^{s}\langle f\rangle$, então $||I_f|| \leq \ell + s$.

Prova :

Temos $\langle f\rangle \subset m_n$ e $m_n^{\ell} \subset \delta^{s}\langle f\rangle$. Por (IV-2), segue que $\delta^{\ell+s-1}\langle f\rangle = m_n$. Portanto, $||I_f|| \leq \ell + s$.

Lema IV-6 :

Seja $f: R,0 \to R,0$.

Então, f é finitamente determinado R, se e somente se, $||I_f|| < +\infty$.

Prova :

(=>) Se f é finitamente determinado R, então existe um inteiro r, tal que, $\frac{d^{(r)}f}{dx^r}(0) \neq 0$. Do contrário, considerando:

$g,h: R,0 \to R,0$, definidos por $g(x) = 0$, para todo x, nas vizinhanças de $\underline{0}$, e, $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, teríamos $g \in R.h$, o que é um absurdo.

Logo, de $\frac{d^{(r)}f}{dx^r}(0) \neq 0$, segue que, $||I_f|| \leq r$.

(<=) Seja ℓ um inteiro positivo, tal que, $||I_f|| = \ell$.

Então, segue que $\frac{d^{(\ell-1)}f}{dx^\ell}(0) \neq 0$. Portanto, f é finitamente determinado R.

Corolário :

Seja $f: R,0 \to R,0$.

Então, $||I_f|| = \ell$, se e somente se, ℓ é a menor determinação de f com relação ao grupo R.

Observações finais:

(a) Seja $f: R^n,0 \to R^p,0$, $n \geq 3$, com $rk\langle f\rangle = 0$.

Então, $||I_f|| < +\infty$, não implica que f é finitamente determinado com relação ao grupo K.

De fato. Tomando $f:R^n,0 \to R^p,0$, $n \leq p$, definido por $f = (x_1^2 \ldots x_{n-1}^2.x_n,\ldots,x_1^2 \ldots x_{n-1}^2.x_n,0,\ldots,0)$, $f = (f_1,\ldots,f_p)$.

Temos então, $||I_f|| < \infty$. Como $n \geq 3$, segue que $d(f,K) = \infty$, pois, $x_n^\ell \notin tf_1(m_nB) + f^*m_p \cdot C_o(R^n)$, para todo inteiro $\ell \geq 1$.

(b) As órbitas de F , pela ação do grupo A , não podem ser caracterizadas pelos símbolos de Boardman.

De fato. Considerando $f,g: R^n,0 \to R^p,0$, $n \geq 2$, definidos por $f = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 , \ldots , \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ e $g = (\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 , \ldots , \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2)$, teremos $I_f = I_g = (n,0)$. No entanto, $f \notin A.g$.

(c) Sejam $f,g: R^n,0 \to R,0$, $n \geq 2$, com $I_f = I_g$ e $||I_f|| < \infty$. Se f é finitamente determinado com relação ao grupo K , nada podemos afirmar com relação à determinação finita de g .

De fato. Sejam $f,g: R^n,0 \to R,0$, $n \geq 3$, definidos por $f = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n-1}$ e $g = x_1^2 \ldots x_{n-1}^2 . x_n$.

Então, $I_f = I_g = (n,\ldots,n,0)$, com $||I_f|| = 2n-1$.

No entanto, f é finitamente determinado com relação a K , embora, g não o seja, pois $x_n^\ell \notin tg(m_nB) + g^*m_1 . C_o(R^n)$, para todo inteiro $\ell \geq 1$.

(d) O menor grau de determinação de um germe, não corresponde ao comprimento de seu símbolo de Boardman.

De fato.

(i) Tomando $f: R^n,0 \to R,0$, $n \geq 2$, definido por

$f = x_1$, segue que f é 1-det R . No entanto, $||I_f|| = \infty$.

(ii) Seja $f: R^2,0 \to R,0$, definido por $f = x_1^{10} + x_2^{19}$. Então, f é 25-det A , mas não 24-det A . No entanto, $||I_f|| = 19$.

(e) Seja $f: R^n,0 \to R,0$.

Então, f é um germe de uma função de Morse, se e somente se, $I_f = (n,0)$.

De fato. Se f é Morse, então é óbvio que $I_f = (n,0)$. Por outro lado, se $I_f = (n,0)$, então $rk\langle f\rangle = 0$ e $\delta\langle f\rangle = m_n$. Portanto, $m_n = \delta\langle f\rangle = \Delta_1\langle f\rangle = \langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle$. Nestas condições, as partes lineares de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, são linearmente independentes sobre R . Logo , $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)) \neq 0$. Segue portanto, que f é germe de uma função de Morse.

(f) Seja $f: R^n,0 \to R,0$, com $rk\langle f\rangle = 0$.

Então f é 2-det R , se e somente se, f é germe de uma função de Morse.

(g) Seja $f: R^n,0 \to R,0$, com $rk\langle f\rangle = 0$.

Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) f infinitesimalmente estável.

(ii) f estável.

(iii) f é germe de uma função de Morse.

(iv) $I_f = (n,0)$.

De fato. Seja $f = \sum_{i \leq j}^{n} a_{ij}x_ix_j + h$ com $h \in m_n^3$.

Então, f é estável, se e somente se, dado $\zeta \in C_o(R^n)$, a equação:

$$\zeta = (df(\xi) + \eta \circ f) \ (\text{mód } m_n^2) \ ,$$

tem solução em ξ e η . Mas isto, é equivalente à

$$\det\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0 \ ,$$

que equivale ser f, germe de uma função de Morse.

B I B L I O G R A F I A

[1]. Boardman, J.M. - Singularities of differentiable maps. I.H.E.S. (1967), p.p. 21-57.

[2]. Levine, H.I. - Singularities of differentiable mappings - Liverpool Singularities, p.p. 1-89.

[3]. Loibel, Gilberto Francisco - Introdução ao estudo das aplicações diferenciáveis. S.Carlos, USP (1972).

[4]. Loibel, Gilberto Francisco - Singularidades das aplicações diferenciáveis. 6º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[5]. Mather, J.N. - Stability of C^{∞} mappings. III - Finitely determined map germs. I.H.E.S. (1968), p.p. 127-156.

[6]. Zariski O. and P. Sammuel - Commutative Algebra. Vol. 2, D. Van Nostrand Company, (1960), Princeton.

[7]. Golubitsky M. and V. Guillemin - Stable Mappings and Their Singularities. Springer-Verlag New York Inc. (1973).

[8]. TH. Bröcker - Differentiable germs and catastrofes. Cambridge University Press (1975).