UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

CERTAS PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DE UMA CLASSE DE SISTEMAS LINEARES PERIÓDICOS BIDIMENSIONAIS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Adalberto Spezamiglio

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Nelson Onuchic

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de "Mestre em Matemática".

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÃO CARLOS
1976

ON CERTAIN TOPOLOGICAL PROPERTIES OF A CLASS OF PERIODIC TWO-DIMENTIONAL LINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ADALBERTO SPEZAMIGLIO

ADVISER: PROF. DR. NELSON ONUCHIC

In this work, we study certain topological properties of a class of two-dimentional ordinary differential systems

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{1}$$

in which $A = A(t)$ is a real-valued continuous matrix, satisfying, for some positive ω, the following conditions:

(i) $A(t+\omega) = A(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$

(ii) $\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)dt = 0$.

In chapter 0, we present certain results concerning the general theory of systems $\dot{x} = A(t)x$ where $A = A(t)$ is an $n \times n$ periodic continuous matrix.

In Chapter I, we pose the above mentioned problem. We deal with examples in which the fundamental matrix $U = U(t)$ is defined by $U(0)$ = the identity matrix. In this case, the Jordan canonical form of $U(\omega)$ is given by one of the following cases:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$(5)\quad \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} \quad (b \neq 0,\ a^2+b^2=1) \qquad (6)\quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \quad (0 < |c| < 1)$$

In Chapter II, we characterize certain sets of matrices in which the behavior of the solutions of (1) is strongly related to its characteristic multipliers, that is, to the eigenvalues of $U(\omega)$. By using results proved in this chapter, we obtain certain topological properties of the above mentioned sets of matrices.

A meus pais

e à Sonia

Meus sinceros agradecimentos

ao Prof. Dr. Nelson Onuchic, pela orientação segura e completa disponibilidade na realização do meu programa de mestrado.

aos colegas do ICMSC pelo ambiente entusiástico de trabalho, em especial ao Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas pelas valiosas sugestões.

Este trabalho só foi possível
graças ao apoio das entidades
CAPES, CNPq, FAPESP, FINEP

APRESENTAÇÃO

Estudamos neste trabalho, algumas propriedades topológicas da classe dos sistemas lineares bidimensionais de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{1}$$

onde $A = A(t)$ é uma matriz de funções reais contínuas, satisfazendo, para algum $\omega > 0$, as seguintes condições:

(i) $A(t + \omega) = A(t) \quad (-\infty < t < \infty)$

(ii) $\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)dt = 0$.

No capítulo 0, registramos alguns resultados que são usados no desenvolvimento do trabalho, sobre a teoria dos sistemas $\dot{x} = A(t)x$ onde $A = A(t)$ é uma matriz $n \times n$, contínua e periódica.

No capítulo I apresentamos o problema acima mencionado. Definindo $U = U(t)$ = matriz fundamental para (1) tal que $U(0)$ = matriz identidade, notamos que $U(\omega)$, com seus auto-valores λ_1, λ_2, só podem satisfazer a um dos seguintes casos:

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $U(\omega)$ diagonalizada

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $U(\omega)$ não diagonalizável

(3) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $U(\omega)$ diagonalizável

(4) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $U(\omega)$ não diagonalizável

(5) $\operatorname{Im}(\lambda_1) \neq 0$; $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$

(6) $\operatorname{Im}(\lambda_1) = 0$; $|\lambda_1| < 1$

Mostramos em seguida que, fixado $\omega > 0$, existem matrizes $A = A(t)$ satisfazendo às condições (i) e (ii), para as quais as matrizes fundamentais $U = U(t)$ se enquadram em cada um dos casos de (1) a (6) .

No capítulo II, caracterizamos certos conjuntos de matrizes nos quais o comportamento das soluções de (1) estão fortemente relacionados com os multiplicadores característicos, isto é, com os auto-valores de $U(\omega)$. Usando resultados provados neste capítulo, obtemos algumas propriedades topológicas dos conjuntos de matrizes acima mencionados.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0

Reunimos neste capítulo alguns resultados da teoria dos sistemas lineares homogêneos com coeficientes periódicos.

Consideremos o sistema linear homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{0.1}$$

onde $A = A(t)$ é uma matriz $n \times n$ de funções reais (ou complexas) contínuas, e

$$A(t + \omega) = A(t) \qquad (-\infty < t < \omega) \tag{0.2}$$

para algum $\omega > 0$. Neste caso, (0.1) é chamado *sistema periódico* e ω é um *período* de A. Não exigimos que ω seja o menor valor positivo para o qual (0.2) se verifica.

Seja $U = U(t)$ uma matriz fundamental para (0.1) e seja V definida por

$$V(t) = U(t + \omega) \qquad (-\infty < t < \infty) .$$

Como $\dot{U}(t) \equiv A(t)U(t)$, temos que $\dot{V}(t) = \dot{U}(t+\omega) = A(t+\omega)U(t+\omega) = A(t)V(t)$, $(-\infty < t < \infty)$, e desde que $\det V(t) = \det U(t+\omega) \neq 0$, $-\infty < t < \infty$, segue que V é uma matriz fundamental para (0.1). Logo, existe uma matriz constante não singular C tal que

$$U(t + \omega) \equiv U(t)C .$$

Se W é outra matriz fundamental para (0.1) e D é uma matriz constante não singular tal que

$$W(t + \omega) \equiv W(t)D ,$$

então, desde que existe uma matriz constante não singular S tal que

$$W(t) \equiv U(t)S ,$$

temos

$$W(t + \omega) \equiv U(t + \omega)S \equiv U(t)CS \equiv U(t)SS^{-1}CS \equiv W(t)S^{-1}CS .$$

Mas isso significa que $D = S^{-1}CS$, ou seja, C e D são semelhantes.

Um fato fundamental para sistemas periódicos é dado no

Teorema 0.1 (Floquet)

Se U é uma matriz fundamental para (0.1), então existe uma matriz não singular $P = P(t)$ com período ω e uma matriz constante R tal que $U(t) \equiv P(t)\exp(tR)$.

Prova:

Seja C matriz constante não singular tal que $U(t+\omega) \equiv U(t)C$. Então, existe uma matriz constante R tal que $C = \exp(\omega R)$. Seja P definida por

$$P(t) = U(t)\exp(-tR) \qquad (-\infty < t < \infty) .$$

Então, P é não singular e

$$P(t+\omega) = U(t+\omega)\exp((-t-\omega)R) = U(t)C\exp(-\omega R)\exp(-tR) =$$

$$= U(t)\exp(-tR) = P(t) , \qquad -\infty < t < \infty ,$$

donde segue que P tem período ω. Pela definição de P temos

$$U(t) = P(t)\exp(tR) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

o que prova o teorema.

Consideremos a matriz fundamental $U(t) \equiv P(t)\exp(tR)$ do teorema 0.1. Temos que $U(t+\omega) = U(t)\exp(\omega R)$. Pelas observações iniciais, as matrizes fundamentais para (0.1) determinam um único conjunto de auto-valores, a saber, os de $\exp(\omega R)$. Eles são chamados *multiplicadores característicos* de (0.1). Os auto-valores da matriz R são chamados *expoentes característicos* de (0.1). A parte imaginária destes é dada a menos de múltiplos inteiros de $2\pi/\omega$. Para ver isso, observar que

$$U(t) = P(t)\exp(tR) = P(t)\exp(-\frac{2k\pi it}{\omega} I)\exp(\frac{2k\pi it}{\omega} I)\exp(tR) =$$

$$= P_1(t)\exp(t(R + \frac{2k\pi i}{\omega} I)), \quad -\infty < t < \infty , \quad k \text{ inteiro,}$$

onde $P_1(t) \equiv P(t)\exp(-\frac{2k\pi it}{\omega} I)$ tem período ω .

Observamos que os expoentes característicos também não dependem da matriz fundamental considerada. De fato, sejam

$$U(t) \equiv P(t)\exp(tR)$$

$$W(t) \equiv P_1(t)\exp(tR_1)$$

matrizes fundamentais para (0.1). Vimos inicialmente que existe uma matriz constante não singular S tal que

$$\exp(\omega R_1) = S^{-1}\exp(\omega R)S .$$

Como $S^{-1}\exp(\omega R)S = \exp(\omega S^{-1}RS)$, segue que $\exp(\omega R_1) = \exp(\omega S^{-1}RS)$ donde temos

$$R_1 = S^{-1}RS \quad (\mathrm{mod}\ \frac{2\pi i}{\omega} I)$$

Relacionaremos os expoentes característicos com os multiplicadores característicos de (0.1). Suponhamos ρ_1 , ρ_2 , ... , ρ_n os auto-valores de R . Podemos supor sem perda de generalidade, R na forma canônica de Jordan

$$R = \mathrm{diag}(R_o, R_1, \ldots , R_s)$$

onde

$$R_o = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots , \rho_q)$$

e

$$R_k = \begin{pmatrix} \rho_{q+k} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{q+k} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{q+k} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \rho_{q+k} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho_{q+k} \end{pmatrix}$$

para $k = 1, 2, \ldots , s$. Então,

$$\exp(\omega R) = \operatorname{diag}(\exp(\omega R_o),\ \exp(\omega R_1),\ \dots,\ \exp(\omega R_s)) ,$$

onde

$$\exp(\omega R_o) = \operatorname{diag}(\exp(\omega \rho_1),\ \exp(\omega\rho_2),\ \dots,\ \exp(\omega\rho_q))$$

e

$$\exp(\omega R_k) = \exp(\omega \rho_{q+k}) \begin{pmatrix} 1 & \omega & \dots & \dfrac{\omega^{r_k-1}}{(r_k-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \dfrac{\omega^{r_k-2}}{(r_k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

para $k = 1, 2, \dots , s$; $q + r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$.

Observamos assim que, se ρ é um expoente característico de (0.1), então $\exp(\omega\rho)$ é um multiplicador característico de (0.1). Reciprocamente, todo multiplicador característico de (0.1) é da forma $\lambda = \exp(\omega\rho)$, onde ρ é um expoente característico de (0.1).

Examinemos a forma explícita de duas soluções linearmente independentes φ , Ψ de (0.1), quando $A = A(t)$ é de ordem 2 . Seja $U(t) \equiv P(t)\exp(tR)$ matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$, onde R tem a forma canônica de Jordan. Pode ocorrer os seguintes casos:

(i) $R = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$

Neste caso, as colunas φ , Ψ de U são da forma

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp(t\rho_1)p_1(t) , \quad -\infty < t < \infty \\ \Psi(t) &= \exp(t\rho_2)p_2(t) , \quad -\infty < t < \infty \end{aligned} \tag{0.3}$$

onde p_1 , p_2 são as colunas de P .

(ii) $R = \begin{pmatrix} \rho_1 & 1 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$

Neste caso, necessariamente $\rho_1 = \rho_2$ e φ , Ψ ficam

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp(t\rho_1)p_1(t) , \quad -\infty < t < \infty \\ \Psi(t) &= \exp(t\rho_2)(tp_1(t) + p_2(t)) , \quad -\infty < t < \infty\end{aligned} \tag{0.4}$$

De (0.3) e (0.4) concluimos que, se $Re(\rho_j) < 0$, $j = 1,2$, então toda solução tende para zero quando $t \to \infty$. Além disso, se ρ é um expoente característico de $\dot{x} = A(t)x$, então existe uma solução não nula que é da forma $\exp(t\rho)p(t)$ onde p tem período ω . Em particular, se $\lambda = 1 (\lambda = -1)$ é multiplicador característico, tomando $\rho = 0$ $(\rho = \pi i/\omega)$ temos que existe uma solução de período $\omega (2\omega)$.

Voltando ao caso geral, seja $U = U(t)$ matriz fundamental para (0.1). De $U(t+\omega) = U(t)\exp(\omega R)$, temos $U(\omega) = U(0)\exp(\omega R)$. Logo, se $U(0) = I$ = matriz identidade , temos $U(\omega) = \exp(\omega R)$ e portanto os multiplicadores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são auto-valores de $U(\omega)$. Neste caso ainda , usando o teorema de Liouville, temos

$$\lambda_1 . \lambda_2 . \ldots \lambda_n = \det U(\omega) = \exp(\int_0^\omega trA(t)dt) \tag{0.5}$$

Quando $A = A(t)$ é de ordem 2 e $U(0) = I$, os multiplicadores característicos são raízes da equação

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(\omega) - \lambda & \Psi_1(\omega) \\ \varphi_2(\omega) & \Psi_2(\omega) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

que fica

$$\lambda^2 - tr\, U(\omega)\lambda + \det U(\omega) = 0 \tag{0.6}$$

Veremos agora outros resultados de nosso interesse.

Teorema 0.2

Seja $A = A(t)$ uma matriz $n \times n$ de funções reais (ou complexas) contínuas em $(-\infty, \infty)$, de período ω , e seja $U = U(t)$ a matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$ com $U(0) = I$.

Se $U(\omega)$ é diagonalizável com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então existem soluções linearmente independentes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ de $\dot{x} = A(t)x$ tais que $\psi_j(t+\omega) = \lambda_j \psi_j(t)$, $-\infty < t < \infty$, $j = 1,2, \ldots, n$.

Prova:

Seja S matriz constante não singular tal que $S^{-1}U(\omega)S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, e seja V definida por $V(t) = U(t)S$, $-\infty < t < \infty$. Então, V é matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$, e desde que $U(t+\omega) = U(t)\,U(\omega)$, temos

$$V(t+\omega) = U(t+\omega)S = U(t)\,U(\omega)S = U(t)SS^{-1}U(\omega)S =$$
$$= V(t)\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \qquad -\infty < t < \infty .$$

Portanto, as colunas ψ_j de V satisfazem $\psi_j(t+\omega) = \lambda_j \psi_j(t)$, $-\infty < t < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Corolário 0.1

Nas hipóteses do Teorema 0.2, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ onde λ é uma raiz m-ésima da unidade, então toda solução tem período $m\omega$.

Teorema 0.3

Seja $A = A(t)$ uma matriz $n \times n$ de funções reais (ou complexas) contínuas, de período ω, tal que $A(-t) = -A(t)$, $-\infty < t < \infty$. Então, toda solução de $\dot{x} = A(t)x$ é par e periódica, de período ω.

Prova:

Seja $U = U(t)$ a matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$ tal que $U(0) = I$. Pelo teorema 0.1,

$$U(t) = P(t)\exp(tR) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

onde P tem período ω e R é matriz constante. Seja V definida por

$$V(t) = P(-t)\exp(-tR) \qquad (-\infty < t < \infty) .$$

Então, como $\dot{U}(t) \equiv A(t)\,U(t)$, temos que

$$\dot{V}(t) = -\dot{U}(-t) = -A(-t)U(-t) = A(t)V(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

e desde que $\det V(t) = \det U(-t) \neq 0$, para todo t, segue que V é matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$. Como $V(0)=U(0)$, temos que $V(t) \equiv U(t)$ provando que toda solução é par. Para $t = \omega/2$, a identidade acima fica

$$P(-\omega/2)\exp(-(\omega/2)R) = P(\omega/2)\exp((\omega/2)R)$$

donde concluimos que $\exp(\omega R) = I$. Portanto $U(\omega) = I$, os multiplicadores característicos são $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$, e pelo Corolário 0.1, toda solução tem período ω.

CAPÍTULO I

A partir de agora estudaremos o sistema

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{1.1}$$

onde A é uma matriz 2×2 de funções reais contínuas, satisfazendo, para algum $\omega > 0$, as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad A(t+\omega) = A(t) \qquad (-\infty < t < \infty) \\ &(ii) \qquad \int_0^\omega trA(t)dt = 0 . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Seja $U = U(t)$ a matriz fundamental para (1.1) tal que $U(0) = I$. Se λ_1, λ_2 são os multiplicadores característicos de (1.1), segue por (0.5) e (0.6) que λ_1, λ_2 são raízes da equação

$$\lambda^2 - tr\, U(\omega)\lambda + 1 = 0 \quad ,$$

donde só pode ocorrer um dos seguintes casos:

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $U(\omega)$ diagonalizada

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $U(\omega)$ não diagonalizável

(3) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $U(\omega)$ diagonalizável

(4) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $U(\omega)$ não diagonalizável

(5) $Im(\lambda_1) \neq 0$; $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$

(6) $Im(\lambda_1) = 0$; $|\lambda_1| < 1$.

Fixemos $\omega > 0$. Mostraremos neste capítulo, que existem matrizes satisfazendo às condições (1.2), para as quais os multiplicadores característicos se enquadram em cada um dos casos de (1) a (6) .

(1) Aqui, $U(\omega) = I = U(0)$. Basta tomar uma matriz $A = A(t)$ ímpar de período ω, com $\int_0^\omega tr\, A(t)dt = 0$. O resultado segue do teorema 0.3 .

(2) Seja

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{2\pi}{\omega}\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi t}{\omega})}{2-\cos(\frac{2\pi t}{\omega})} & \frac{1}{\omega}(2-\cos(\frac{2\pi t}{\omega})) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tem período ω . $\int_0^\omega \mathrm{tr}\,A(t)dt = 0$ pois a integranda é uma função ímpar de período ω. (Esse fato pode ser observado também por um cálculo direto). A matriz fundamental $U = U(t)$ tal que $U(0) = I$ é

$$U(t) = \begin{pmatrix} 2-\cos(\frac{2\pi t}{\omega}) & \frac{t}{\omega}(2-\cos(\frac{2\pi t}{\omega})) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(3) Seja

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \pi/\omega \\ -\pi/\omega & 0 \end{pmatrix}$$

A tem período ω ; $\int_0^\omega \mathrm{tr}\,A(t)dt = 0$. A matriz fundamental $U = U(t)$ tal que $U(0) = I$ é

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{\omega} & \mathrm{sen}\,\frac{\pi t}{\omega} \\ -\mathrm{sen}\,\frac{\pi t}{\omega} & \cos\frac{\pi t}{\omega} \end{pmatrix}$$

e

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Passemos ao caso (5). O caso (4) será tratado mais tarde.

(5) Seja

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2\omega} \\ -\frac{\pi}{2\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

A tem período ω ; $\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)dt = 0$. A matriz fundamental $U = U(t)$ tal que $U(0) = I$ é

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2\omega} & \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2\omega} \\ -\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2\omega} & \cos \frac{\pi t}{2\omega} \end{pmatrix}$$

e

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

cujos auto-valores são $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

(6) Seja $p = p(t)$ uma função contínua de período ω com $\int_0^\omega p(t)dt = 0$ e seja $\alpha > 0$ um número real. Seja

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha + p(t) & 0 \\ 0 & -\alpha + p(t) \end{pmatrix}$$

A tem período ω ; $\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)dt = 0$. A matriz fundamental $U = U(t)$ tal que $U(0) = I$ é

$$U(t) = \begin{pmatrix} \exp \int_0^t (\alpha + p(s))ds & 0 \\ 0 & \exp \int_0^t (-\alpha + p(s))ds \end{pmatrix}$$

e

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} \exp(\alpha\omega) & 0 \\ 0 & \exp(-\alpha\omega) \end{pmatrix}$$

que tem como auto-valores $\lambda_1 = \exp(-\alpha\omega)$, $\lambda_2 = \exp(\alpha\omega)$, reais e $|\lambda_1| < 1$. Passemos agora ao caso (4).

(4) Determinaremos uma matriz $A = A(t)$ em que a matriz fundamental

$$U(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \Psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \Psi_2(t) \end{pmatrix}$$

onde φ_1, φ_2, Ψ_1, Ψ_2 são funções de classe C^1, satisfaz $U(0) = I$ e $U(\omega) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Para isso, estas funções devem satisfazer:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_1(0) = 1 \ ; & \varphi_1(\omega) = -1 \\ \varphi_2(0) = 0 \ ; & \varphi_2(\omega) = 0 \\ \Psi_1(0) = 0 \ ; & \Psi_1(\omega) = 1 \\ \Psi_2(0) = 1 \ ; & \Psi_2(\omega) = -1 \end{array}\right. \qquad (a)$$

Como $U(0) = I$, segue que $U(t + \omega) \equiv U(t)U(\omega)$. Logo, exigimos ainda que

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t + \omega) = - \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t + \omega) = - \varphi_2(t) \\ \Psi_1(t + \omega) = \varphi_1(t) - \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t + \omega) = \varphi_2(t) - \Psi_2(t) \end{array}\right. \qquad (b)$$

para $-\infty < t < \infty$. Sendo U matriz fundamental, impomos ainda que

$$\det U(t) \neq 0 \ , \quad \text{para todo } t \ , \quad 0 \leq t \leq \omega \ . \qquad (c)$$

Lema 1.1

Nas condições (b), $\det U(t + \omega) = \det U(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Prova:

$$\det U(t+\omega) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t+\omega) & \Psi_1(t+\omega) \\ \varphi_2(t+\omega) & \Psi_2(t+\omega) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\varphi_1(t) & \varphi_1(t) - \Psi_1(t) \\ -\varphi_2(t) & \varphi_2(t) - \Psi_2(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \Psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \Psi_2(t) \end{pmatrix} =$$

$= \det\ U(t)\ , \quad -\infty < t < \infty\ .$

Corolário 1.1

Nas condições (b) e (c) , $\det U(t) \neq 0$, $-\infty < t < \infty$.

Seja A definida por

$A(t) = \dot{U}(t)U^{-1}(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$.

A é uma matriz de funções contínuas em $-\infty < t < \infty$.

Lema 1.2

A tem período ω .

Prova:

Temos que $U^{-1}(t) = \dfrac{1}{\det U(t)} \begin{pmatrix} \Psi_2(t) & -\Psi_1(t) \\ -\varphi_2(t) & \varphi_1(t) \end{pmatrix}$,

para $-\infty < t < \infty$. Logo, pelo Lema 1.1 e pelas relações (b),

$A(t+\omega) = \dot{U}(t+\omega)U^{-1}(t+\omega) =$

$$= \frac{1}{\det U(t+\omega)} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(t+\omega) & \dot{\Psi}_1(t+\omega) \\ \dot{\varphi}_2(t+\omega) & \dot{\Psi}_2(t+\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_2(t+\omega) & -\Psi_1(t+\omega) \\ -\varphi_2(t+\omega) & \varphi_1(t+\omega) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det U(t)} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_1(t)-\dot{\Psi}_1(t) \\ -\dot{\varphi}_2(t) & \dot{\varphi}_2(t)-\dot{\Psi}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2(t)-\Psi_2(t) & -\varphi_1(t)+\Psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & -\varphi_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det U(t)} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_1(t) & -\dot{\Psi}_1(t) \\ -\dot{\varphi}_2(t) & -\dot{\Psi}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Psi_2(t) & \Psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & -\varphi_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \dot{U}(t)U^{-1}(t) = A(t) \ , \quad -\infty < t < \infty \ .$$

Lema 1.3

$\int_0^\omega \mathrm{tr}\, A(t)dt = 0$.

Prova:

Pelo teorema de Liouville,

$\det U(\omega) = \det U(0) \exp\int_0^\omega \mathrm{tr}A(t)dt$.

Logo, $\exp \int_0^\omega \mathrm{tr}A(t)dt = 1$, donde segue que $\int_0^\omega \mathrm{tr}A(t)dt = 0$.

Portanto, a matriz A satisfaz as condições (1.2), U é matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$ com $U(0) = I$ e $U(\omega) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; para completarmos, precisamos mostrar que existem funções φ_1, φ_2, Ψ_1, Ψ_2 de classe C^1 em $(-\infty, \infty)$, satisfazendo (a), (b), e (c) .

Para $0 \le t \le \omega$, definimos:

$\varphi_1(t) = \cos \frac{\pi t}{\omega}$

$\varphi_2(t) = -\frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi t}{\omega})$

$\Psi_1(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\pi t}{\omega})$

$\Psi_2(t) = \cos \frac{\pi t}{\omega}$

Claramente, estas funções satisfazem as condições (a) .

$$\det U(t) = \cos^2(\frac{\pi t}{\omega}) + \frac{1}{4}(1 - \cos \frac{2\pi t}{\omega})(1 - \cos \frac{\pi t}{\omega})$$

$$= \cos^2(\frac{\pi t}{\omega}) + \mathrm{sen}^2(\frac{\pi t}{\omega}) \ \mathrm{sen}^2(\frac{\pi t}{2\omega}) > 0 \ ,$$

para $0 \le t \le \omega$. Logo, (c) está satisfeita. Vamos extender o domínio destas funções ao intervalo $0 \le t \le 2\omega$, usando as re lações (b). Para $0 \leq t \leq \omega$,

$$\varphi_1(t+\omega) = -\varphi_1(t) = -\cos\frac{\pi t}{\omega} = \cos(\frac{\pi t}{\omega} + \pi) = \cos\frac{\pi}{\omega}(t+\omega)$$

$$\varphi_2(t+\omega) = -\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi t}{\omega} + 2\pi)) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi}{\omega}(t+\omega)) .$$

$$\Psi_1(t+\omega) = \varphi_1(t) - \Psi_1(t) = \cos\frac{\pi t}{\omega} - \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{\pi t}{\omega}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - 3\cos\frac{\pi t}{\omega}) = -\frac{1}{2}(1 + 3\cos(\frac{\pi t}{\omega} + \pi)) =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 + 3\cos\frac{\pi}{\omega}(t+\omega))$$

$$\Psi_2(t+\omega) = \varphi_2(t) - \Psi_2(t) = -\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega}) - \cos\frac{\pi t}{\omega} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi t}{\omega} + 2\pi)) + \cos(\frac{\pi t}{\omega} + \pi)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi}{\omega}(t+\omega) + \cos\frac{\pi}{\omega}(t+\omega) .$$

Portanto, para $\omega \leq t \leq 2\omega$, colocamos:

$$\varphi_1(t) = \cos\frac{\pi t}{\omega}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega})$$

$$\Psi_1(t) = -\frac{1}{2}(1 + 3\cos\frac{\pi t}{\omega})$$

$$\Psi_2(t) = \cos\frac{\pi t}{\omega} - \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega})$$

Estas funções são claramente contínuas em $[0,2\omega]$ e diferenciáveis em $(0,2\omega)$. Verifiquemos a continuidade de suas derivadas no ponto ω. φ_1 o é trivialmente.

$$\lim_{t\uparrow\omega} \dot{\varphi}_2(t) = \lim_{t\uparrow\omega} (-\frac{\pi}{\omega} \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{\omega}) = 0$$

$$\lim_{t\downarrow\omega} \dot{\varphi}_2(t) = \lim_{t\downarrow\omega} (\frac{\pi}{\omega} \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{\omega}) = 0$$

Logo, $\dot{\varphi}_2$ é contínua no ponto ω;

$$\lim_{t\uparrow\omega} \dot{\Psi}_1(t) = \lim_{t\uparrow\omega} \left(\frac{\pi}{2\omega} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\omega}\right) = 0$$

$$\lim_{t\downarrow\omega} \dot{\Psi}_1(t) = \lim_{t\downarrow\omega} \left(\frac{3\pi}{2\omega} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\omega}\right) = 0$$

Logo, $\dot{\Psi}_1$ é contínua no ponto ω ;

$$\lim_{t\uparrow\omega} \dot{\Psi}_2(t) = \lim_{t\uparrow\omega}\left(- \frac{\pi}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\omega}\right) = 0$$

$$\lim_{t\downarrow\omega} \dot{\Psi}_2(t) = \lim_{t\downarrow\omega}\left(- \frac{\pi}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\omega} - \frac{\pi}{\omega} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\omega}\right) = 0$$

Logo, $\dot{\Psi}_2$ é contínua no ponto ω .

Extensão ao intervalo $[-\omega, 2\omega]$: para $-\omega \leq t \leq 0$, usando as relações (b) ,

$$\varphi_1(t) = -\varphi_1(t+\omega) = -\cos \frac{\pi}{\omega}(t+\omega) = \cos \frac{\pi t}{\omega}$$

$$\varphi_2(t) = -\varphi_2(t+\omega) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{2\pi}{\omega}(t+\omega)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega}\right)$$

$$\Psi_1(t) = \varphi_1(t) - \Psi_1(t+\omega) = \cos\frac{\pi t}{\omega} - \frac{1}{2}\left[1 - \cos\frac{\pi}{\omega}(t-\omega)\right] =$$

$$= \cos\frac{\pi t}{\omega} - \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi t}{\omega}\right) = - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{\omega}\right)$$

$$\Psi_2(t) = \varphi_2(t) - \Psi_2(t+\omega) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega}\right) - \cos \frac{\pi}{\omega}(t+\omega)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{\omega}\right) + \cos\frac{\pi t}{\omega} .$$

Como anteriormente, verifica-se que estas funções têm derivadas contínuas no ponto 0 , e por construção, as condições (b) são válidas em $[-\omega, 2\omega]$. Extendendo ao intervalo $(-\infty, \infty)$ obteremos, para $n\omega \leq t \leq (n+1)\omega$, n inteiro:

$$\varphi_1(t) = \cos \frac{\pi t}{\omega}$$

$$\varphi_2(t) = (-1)^{n+1}. \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi t}{\omega}\right)$$

$$\Psi_1(t) = (-1)^{n}. \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}(2n+1)\cos \frac{\pi t}{\omega}\right)$$

$$\Psi_2(t) = \cos \frac{\pi t}{\omega} + (-1)^{n}. \frac{n}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi t}{\omega}\right) ,$$

funções estas de classe C^1 em $(-\infty, \infty)$, satisfazendo as condições (a), (b) e (c).

Denominemos por $\mathbb{M}(\omega)$ o conjunto das matrizes 2×2 de funções reais contínuas em $(-\infty, \infty)$, satisfazendo as condições (1.2). Provaremos neste capítulo, algumas propriedades topológicas do conjunto $\mathbb{M}(\omega)$.

Se $A = A(t) = (a_{jk}(t)) \in \mathbb{M}(\omega)$, definimos a norma $||A||$ de A por

$$||A|| = \sup_{0\leq t\leq\omega} |A(t)|$$

onde $|A(t)| = \sum_{j,k=1}^{2} |a_{jk}(t)|$. Para $A, B \in \mathbb{M}(\omega)$, são válidas as seguintes propriedades:

(1) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

(2) $||AB|| \leq ||A||.||B||$.

Se $x = x(t)$ é um vetor coluna 2×1, vale ainda

(3) $|A(t)\ x(t)| \leq ||A||.|x(t)| \qquad (-\infty < t < \infty)$

Denotaremos por C_0 o conjunto dos números complexos $z \neq 0$ tais que $|z| = 1$ ou $\mathrm{Im}(z) = 0$. Consideraremos C_0 com a topologia habitual induzida do conjunto dos números complexos.

Sejam λ_1, λ_2 os multiplicadores característicos de (1.1). Em tudo que segue, estaremos adotando a seguinte

Convenção:

Se os multiplicadores são complexos-conjugados λ_1 denota o que tem parte imaginária positiva; se eles não são complexos, λ_1 denota o que tem módulo ≤ 1.

Com as considerações anteriores, definimos a aplicação $F: \mathbb{M}(\omega) \to C_0$ assim: Se $A = A(t) \in \mathbb{M}(\omega)$, $F(A)$ é o multi plicador característico λ_1 de $\dot{x} = A(t)x$.

Teorema 2.1

F é uma aplicação contínua.

Prova:

Tomemos $A \in \mathbb{M}(\omega)$. Seja

$$U(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \Psi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \Psi_2(t) \end{pmatrix}$$

matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ com $U(0) = I$. Provaremos que F é contínua em A. Seja (A_n) uma sequência de elementos de $\mathbb{M}(\omega)$ convergindo para A em $[0,\omega]$ (portanto em $(-\infty,\infty)$) e seja

$$U_n(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(t) & \Psi_{1n}(t) \\ \varphi_{2n}(t) & \Psi_{2n}(t) \end{pmatrix}$$

matriz fundamental de $\dot{x} = A_n(t)x$, com $U_n(0) = I$, $n = 1,2,\ldots$

Denotando por $\varphi(t)$ a coluna $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ e por $\varphi_n(t)$ a coluna $\begin{pmatrix} \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{2n}(t) \end{pmatrix}$, temos que

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t A(s)\,\varphi(s)ds \qquad (0 \leq t \leq \omega)$$

$$\varphi_n(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t A_n(s)\,\varphi_n(s)ds \qquad (0 \leq t \leq \omega) .$$

Mostraremos que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente em $[0,\omega]$. Para cada $t \in [0,\omega]$ e para cada n inteiro positivo, temos:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \int_0^t |A_n(s)\varphi_n(s) - A(s)\varphi(s)|ds =$$

$$= \int_0^t |A_n(s)\varphi_n(s) - A_n(s)\varphi(s) + A_n(s)\varphi(s) - A(s)\varphi(s)|ds \leq$$

$$\leq \int_0^t (||A_n||.|\varphi_n(s) - \varphi(s)| + ||A_n - A||.|\varphi(s)|)ds .$$

Como φ é contínua em $(-\infty, \infty)$, portanto em $[0,\omega]$, existe K_1 real tal que $|\varphi(s)| \leq K_1$, $0 \leq s \leq \omega$, e como $A_n \to A$, existe K_2 real tal que $||A_n|| \leq K_2$, $n = 1, 2, \ldots$

Logo, para cada n inteiro positivo e para cada t, $0 \leq t \leq \omega$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq K_1 \int_0^\omega ||A_n - A||ds + \int_0^t K_2|\varphi_n(s) - \varphi(s)|ds .$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq K_1.||A_n - A||.\omega.\exp(\int_0^t K_2 ds)$$

$$\leq K_1.||A_n - A||.\omega.\exp(K_2\omega) ,$$

donde concluimos que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente em $[0,\omega]$.

O mesmo acontece com as segundas colunas das matrizes U_n e U. Daí tiramos que

$$\varphi_{1n} \to \varphi_1 ,$$

$$\Psi_{2n} \to \Psi_2$$

em $[0,\omega]$, donde

$$\varphi_{1n} + \Psi_{2n} \to \varphi_1 + \Psi_2$$

em $[0,\omega]$. Em particular, para $t = \omega$,

$$\mathrm{tr}\, U_n(\omega) \to \mathrm{tr}\, U(\omega) .$$

Pondo $\alpha_n = \mathrm{tr}\, U_n(\omega)$, $\alpha = \mathrm{tr}\, U(\omega)$, temos por (0.6), que os multiplicadores característicos λ_{1n}, λ_{2n} de $\dot{x} = A_n(t)x$ são raízes da equação

$$\lambda^2 - \alpha_n\lambda + 1 = 0 , \quad n = 1, 2, \ldots$$

e os multiplicadores característicos λ_1, λ_2 de $\dot{x} = A(t)x$ são as raízes da equação

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0 .$$

Temos que $\alpha_n \to \alpha$. Para provarmos o teorema, devemos provar que $\lambda_{1n} \to \lambda_1$. Consideremos os casos:

(a) $\alpha > 2$.

Neste caso, $\alpha^2 - 4 > 0$ e portanto $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4})$. Para n suficientemente grande, $\alpha_n > 2$ donde $\lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 - 4})$. Logo, $\lambda_{1n} \to \lambda_1$.

(b) $\alpha < -2$

Neste caso, $\alpha^2 - 4 > 0$ e portanto $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4})$. Para n suficientemente grande, $\lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 - 4})$. Logo, $\lambda_{1n} \to \lambda_1$.

(c) $|\alpha| < 2$

Neste caso, $\alpha^2 - 4 < 0$ e portanto $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2})$. Para n suficientemente grande, $\lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + i\sqrt{4 - \alpha_n^2})$. Logo, $\lambda_{1n} \to \lambda_1$

(d) $\alpha = 2$.

Neste caso, $\lambda_1 = 1$. Para n suficientemente grande, ocorre

$$\lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + i\sqrt{4 - \alpha_n^2}) \quad \text{ou} \quad \lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 - 4}) ,$$

com α_n arbitrariamente próximo de 2 . Temos assim que $\lambda_{1n} \to \lambda_1$.

(e) $\alpha = -2$

Neste caso, $\lambda_1 = -1$. Para n suficientemente grande, ocorre

$$\lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + i\sqrt{4 - \alpha_n^2}) \quad \text{ou} \quad \lambda_{1n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 - 4})$$

com α_n arbitrariamente próximo de -2 . Temos assim que $\lambda_{1n} \to \lambda_1$. Isso encerra a prova do teorema.

Seja $A \in \mathbb{M}(\omega)$ e suponhamos que os multiplicadores característicos de $\dot{x} = A(t)x$ satisfazem

$$Im(\lambda_1) > 0 \ ; \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \ .$$

Pelo teorema 0.2 , existem soluções linearmente independentes φ , Ψ tais que

$$\varphi(t+\omega) = \lambda_1\varphi(t) \ , \qquad \Psi(t+\omega) = \lambda_2\Psi(t)$$

para $-\infty < t < \infty$. Como $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, temos

$$|\varphi(t+\omega)| = |\varphi(t)| \ , \qquad |\Psi(t+\omega)| = |\Psi(t)| \ ,$$

para $-\infty < t < \infty$. Sendo φ , Ψ limitadas em $0 \leq t \leq \omega$, elas são portanto limitadas em $-\infty < t < \infty$. Além disso não têm período 2ω . Por exemplo,

$$\varphi(t+2\omega) = \lambda_1\varphi(t+\omega) = \lambda_1^2\varphi(t) \ , \quad \lambda_1^2 \neq 1 \ .$$

Seja

$\mathbb{E} = \{A \in \mathbb{M}(\omega) :$ toda solução não nula de $\dot{x} = A(t)x$ é limitada e não tem período $2\omega\}$.

Vimos no capítulo I que $\mathbb{E} \neq \emptyset$. Não é difícil ver que, se $A \in \mathbb{E}$, os multiplicadores característicos λ_1, λ_2 de $\dot{x} = A(t)x$ só podem satisfazer

$$Im(\lambda_1) > 0 \ ; \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \ .$$

Corolário 2.1

$\mathbb{E}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{M}(\omega)$.

Prova:

Consideremos a aplicação F do teorema 2.1 e seja

$$C_1 = \{z \in C_o : Im(z) > 0\}$$

C_1 é aberto em C_o . Sendo F contínua, $F^{-1}(C_1)$ é aberto em $\mathbb{M}(\omega)$. Mas, pelas observações anteriores, $F^{-1}(C_1) = \mathbb{E}$, o que prova o corolário.

Seja $A \in \mathbb{M}(\omega)$ e suponhamos agora que os multiplicadores característicos λ_1 , λ_2 de $\dot{x} = A(t)x$ satisfazem

$$|\lambda_1| < 1 \ , \quad Im(\lambda_1) = 0 \ .$$

Neste caso, $\lambda_1 = \exp(\omega\,\rho_1)$, $\lambda_2 = \exp(\omega\,\rho_2)$ onde $Re(\rho_1) < 0$, $Re(\rho_2) > 0$. Conforme observado no capítulo 0 , existem soluções linearmente independentes φ , Ψ da forma

$$\varphi(t) = p_1(t).\exp(t\rho_1) \ ,$$

$$\Psi(t) = p_2(t).\exp(t\rho_2) \ ,$$

onde p_1 , p_2 têm período ω . Temos portanto que

$$\varphi(t) \to 0 \ , \quad |\Psi(t)| \to \infty$$

quando $t \to \infty$

Seja

$\mathbb{G} = \{A \in \mathbb{M}(\omega)$: toda solução de $\dot{x} = A(t)x$ em módulo tende para zero ou para ∞ quando $t \to \infty$ }.

Vimos no capítulo I que $\mathbb{G} \neq \emptyset$. É fácil ver também que , se $A \in \mathbb{G}$, os multiplicadores característicos λ_1 , λ_2 de $\dot{x} = A(t)x$ satisfazem

$$|\lambda_1| < 1 \ , \quad Im(\lambda_1) = 0$$

Corolário 2.2

$\mathbb{G}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{M}(\omega)$.

Prova:

Consideremos a aplicação F do teorema 2.1 . Seja

$$C_2 = \{z \in C_o : |z| < 1\} \ .$$

C_2 é aberto em C_o. Sendo F contínua, $F^{-1}(C_2)$ é aberto em $\mathbb{M}(\omega)$. Ora, pelas observações anteriores, $F^{-1}(C_2) = \mathbb{G}$, o que prova o corolário.

Consideremos o aberto $\mathbb{E}$ do corolário 2.1 e fixemos $A \in \mathbb{E}$. Para α real, seja $U_\alpha = U_\alpha(t)$ a matriz fundamental de $\dot{x} = \alpha A(t)x$ tal que $U_\alpha(0) = I$. Definimos a função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$T(\alpha) = \operatorname{tr} U_\alpha(\omega) .$$

Teorema 2.2

T é uma função analítica

Prova:

Para cada α real, definimos:

$$U_{\alpha,o}(t) \equiv I$$

$$U_{\alpha,n+1}(t) \equiv I + \int_o^t \alpha A(s_1) U_{\alpha,n}(s_1)\,ds_1 \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Ora,

$$U_{\alpha,o}(t) \equiv I ;$$

$$U_{\alpha,1}(t) \equiv I + \alpha\int_o^t A(s_1)\,ds_1$$

$$U_{\alpha,2}(t) \equiv I + \int_o^t \alpha A(s_1).\left[I + \int_o^{s_1} \alpha A(s_2)\,ds_2\right] ds_1$$

$$\equiv I + \alpha\int_o^t A(s_1)\,ds_1 + \alpha^2 \int_o^t A(s_1).\int_o^{s_1} A(s_2)\,ds_2\,ds_1$$

....

$$U_{\alpha,n}(t) \equiv I + \alpha\int_o^t A(s_1)\,ds_1 + \ldots + \alpha^n \int_o^t A(s_1) \int_o^{s_1} A(s_2)\ldots$$

$$\ldots \int_o^{s_{n-1}} A(s_n)\,ds_n\,ds_{n-1}\ldots ds_1$$

....

Assim, $(U_{\alpha,n})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, é a sequência das reduzidas da série de matrizes

$$\sum_{n=o}^{\infty} A_n(t)\alpha^n$$

onde

$$A_0(t) \equiv I \,,$$

$$A_n(t) \equiv \int_0^t A(s_1)\int_0^{s_1} A(s_2)\ldots \int_0^{s_{n-1}} A(s_n)ds_n\ldots ds_1$$

para $n = 1, 2, 3 \ldots$

Tomemos $R > 0$ arbitrário. Provaremos que $(U_{\alpha,n})$ converge uniformemente em $[-R, R]$. Seja $||A|| = K$. Então, para cada n, temos:

$$\begin{aligned}
||A_n \alpha^n|| &\leq |\alpha|^n . | \int_0^t K.\int_0^{s_1} K\ldots \int_0^{s_{n-1}} K.ds_n ds_{n-1}\ldots ds_1| = \\
&= |\alpha|^n . | \int_0^t K.\int_0^{s_1} K\ldots \int_0^{s_{n-2}} K^2 s_{n-1} ds_{n-1}\ldots ds_1| = \\
&= |\alpha|^n . | \int_0^t K.\int_0^{s_1} K\ldots \int_0^{s_{n-3}} K^3.\frac{1}{2}.s_{n-2}^2 ds_{n-2}\ldots ds_1| = \\
&= |\alpha|^n . | \int_0^t K.\int_0^{s_1} K\ldots \int_0^{s_{n-4}} K^4.\frac{1}{3.2}.s_{n-3}^3.ds_{n-3}\ldots ds_1|
\end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned}
&= |\alpha|^n . | \int_0^t K.\int_0^{s_1} K^{n-1} \frac{1}{(n-2)!} . s_2^{n-2} ds_2 ds_1| = \\
&= |\alpha|^n . | \int_0^t K^n \frac{1}{(n-1)!} s_1^{n-1} ds_1| \\
&= |\alpha|^n . K^n \frac{|t|^n}{n!} \\
&\leq \frac{(|\alpha|.K.R)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(|\alpha|.K.R)^n}{n!} = \exp(|\alpha|.K.R)$, temos, pelo teste de Weierstrass, que $(U_{\alpha,n})$ converge absoluta e uniformemente em $[-R, R]$. Daí segue que $(U_{\alpha,n})$ converge absolutamente em $(-\infty, \infty)$ e uniformemente nas partes compactas.

Seja $L_\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} U_{\alpha,n}(t)$. Para $0 \leq t \leq \omega$, temos, usando a convergência uniforme, que

$$L_\alpha(t) = I + \int_0^t \alpha A(s) L_\alpha(s)\, ds .$$

Isso quer dizer que L_α é matriz fundamental de $\dot{x} = \alpha A(t)x$, com $L_\alpha(0) = I$, ou seja, $L_\alpha(t) \equiv U_\alpha(t)$. Portanto,

$$U_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\alpha^n \qquad (0 \leq t \leq \omega)$$

Em particular, para $t = \omega$,

$$U_\alpha(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\omega)\alpha^n .$$

Seja $a_n = \operatorname{tr} A_n(\omega)$. Então,

$$T(\alpha) = \operatorname{tr} U_\alpha(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n ,$$

o que prova o teorema.

Seja

$$\mathbb{E}_1 = \{ A \in \mathbb{E} : \text{toda solução de } \dot{x} = A(t)x \text{ é periódica} \} .$$

Teorema 2.3

$\mathbb{E}_1$ é denso em $\mathbb{E}$

Prova:

Seja $\mathbb{O}$ um aberto qualquer não vazio de $\mathbb{E}$. Provaremos que $\mathbb{O} \cap \mathbb{E}_1 \neq \emptyset$.

Tomemos $A \in \mathbb{O}$ e consideremos a função $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$P(\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_\alpha(\omega) ,$$

onde U_α é a matriz fundamental de $\dot{x} = \alpha A(t)x$, com $U_\alpha(0) = I$. Pelo teorema 2.2, P é uma função analítica. Temos também que P não é constante, pois

$$P(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} I = 1 ,$$

$$|P(1)| < 1 .$$

Como $|P(1)| < 1$, existe um aberto W em $\mathbb{R}$ tal que

$$P(1) \in W \subset (-1,1) .$$

Sendo P contínua, existe um aberto V_1 em $\mathbb{R}$ tal que $1 \in V_1$ e $P(V_1) \subset W$. Além disso, sendo a aplicação

$$\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha A \in \mathbb{M}(\omega)$$

contínua, existe um aberto V_2 em $\mathbb{R}$ tal que $1 \in V_2$ e $\alpha \in V_2$ implica $\alpha A \in \mathbb{O}$.

Seja $V = (\delta,\delta')$ tal que $1 \in V$ e $\overline{V} \subset V_1 \cap V_2$. Como P é analítica e não constante, P não pode ser constante em V. Logo, P assume em $\overline{V}$ um valor m e um valor M, com $m \leq P(1) \leq M$, em que uma das desigualdades é estrita. Suponhamos que ocorra $m < P(1) \leq M$. Para algum inteiro positivo n, existe uma raiz n-ésima da unidade λ_1 tal que $m < \mathrm{Re}(\lambda_1) < P(1)$. Sendo P contínua, existe $\alpha_o \in \overline{V}$ tal que $P(\alpha_o) = \mathrm{Re}(\lambda_1)$. Assim, $\alpha_o A \in \mathbb{O}$ pois $\alpha_o \in \overline{V} \subset V_2$. Afirmamos que $\alpha_o A \in \mathbb{E}_1$. De fato, como $\alpha_o A \in \mathbb{E}$, os multiplicadores característicos de $\dot{x} = \alpha_o A(t)x$ são complexos-conjugados, e como $P(\alpha_o) = \mathrm{Re}(\lambda_1) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} U_{\alpha_o}(\omega)$, esses multiplicadores são λ_1 e $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Pelo teorema 0.2, existem soluções linearmente independentes φ, Ψ de $\dot{x} = \alpha_o A(t)x$ tais que

$$\varphi(t + \omega) = \lambda_1 \varphi(t) ,$$

$$\Psi(t + \omega) = \lambda_2 \Psi(t) ,$$

$-\infty < t < \infty$, donde temos

$$\varphi(t + n\omega) = \varphi(t) ,$$

$$\Psi(t + n\omega) = \Psi(t) ,$$

$-\infty < t < \infty$, provando que $\alpha_o A \in \mathbb{E}_1$.

Se ocorrer $m \leq P(1) < M$, o raciocínio é inteiramente análogo. Fica assim demonstrado o teorema.

Observamos que $\mathbb{E}_1$ não é denso em $\mathbb{M}(\omega)$. Basta notar que $\mathbb{E} \cap \mathbb{G} = \emptyset$ e $\mathbb{G}$ é aberto em $\mathbb{M}(\omega)$, conforme corolário 2.2 .

BIBLIOGRAFIA

1. Coddington, E. A. and Levinson, N.
   "Theory of Ordinary Differential Equations"
   McGraw-Hill Book Company, Inc. 1 955.

2. Wilson, H. K.
   "Ordinary Differential Equations"
   Addilson-Wesley Publishing Company, 1 971.

3. Hartman, P.
   "Ordinary Differential Equations"
   John Wiley and Sons, New York, 1 964.

4. Reid, W. T.
   "Ordinary Differential Equations"
   John Wiley and Sons, New York, 1 971.